

Sadržaj

Uvod	3
1 Proces rizika	7
1.1 Definicija i osnovna svojstva	7
1.2 Lévyjevi procesi i Lévyjeve mjere	14
1.3 Distribucija rekordnih uzleta	17
2 Slučaj malih zahtjeva	27
2.1 Cramér-Lundbergov koeficijent	27
2.2 Pridružena slučajna šetnja	30
2.3 Slaba konvergencija vjerojatnosnih mjera	39
2.3.1 Preliminarije	39
2.3.2 Konvergencija po distribuciji	41
2.3.3 Produktni prostori	42
2.3.4 Konvergencija po vjerojatnosti	43
2.3.5 Teorem o neprekidnom preslikavanju	45
2.3.6 Prostor $D[a, b]$	46
2.3.7 Prostor $D[a, b]$	51
2.3.8 Prostor $D(\mathbb{R})$	52
2.3.9 Produktni prostori i familije koje određuju konvergenciju	57
2.4 Uvjetni granični teoremi za slučajne šetnje	59
2.5 Primjena na proces rizika	80
3 Slučaj velikih zahtjeva	93
3.1 Regularna varijacija i subeksponencijalnost	93
3.2 Vjerojatnost propasti u beskonačnom vremenu	98
3.3 Konvergencija tipova i maksimalne domene privlačenja	99

3.3.1 Neki kriteriji za pripadnost maksimalnoj domeni privlačenja Gumbelove distribucije	103
3.3.2 Maksimalne domene privlačenja i integrirani repovi	104
3.4 Asimptotski opis događaja propasti	105
Literatura	125
Sažetak	129
Summary	131
Životopis	133

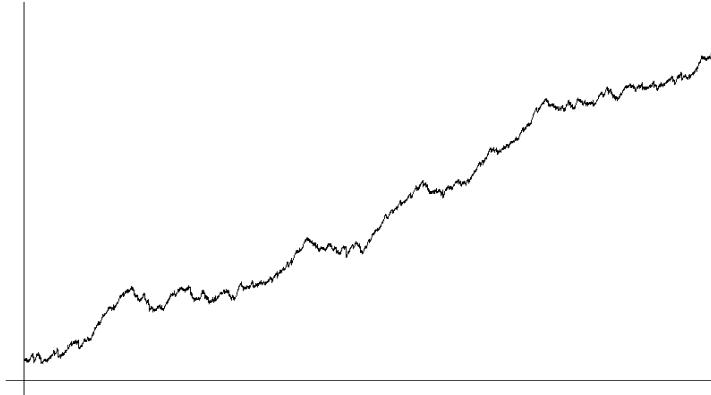
Uvod

Za većinu problema iz matematike osiguranja teorija rizika još uvijek predstavlja glavni matematički alat. Osnove spomenute teorije je još davne 1903. godine postavio Filip Lundberg, ugradivši Poissonove procese u srce modela neživotnog osiguranja. Tu je liniju dalje slijedio Harald Cramér koji je spojio Lundbergove ideje s teorijom slučajnih procesa, udarivši time temelje matematički neživotnih osiguranja. Iz tih je radova proizašao osnovni model neživotnog osiguranja, nazvan *Cramér-Lundbergov model rizika*. Riječ je o modelu portfelja neživotnog osiguranja, oblika

$$U_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} X_k.$$

Pri tome, u označava početni kapital portfelja, a ct priljev novca u portfelj u ovisnosti o vremenu. Treći dio u gornjoj relaciji opisuje isplate zahtjeva za odštetu koji su slučajni, i prema Lundbergovim postavkama pristižu ritmom homogenog Poissonovog procesa. Za zahtjeve X_k prepostavljamo da su nezavisni, jednako distribuirani i nezavisni od Poissonovog procesa (N_t) kojim se modelira njihovo pristizanje.

Jedan od prvih uvjeta na model svakako jest taj da nam u njega ugrađena strategija, dugoročno gledano, donosi profit. Prevedeno na jezik teorije vjerojatnosti, htjeli bismo da za sve $t > 0$ vrijedi $EU_t > u$, što nas nakon računa (vidi str. 9) dovodi do uvjeta $c - EX_1 \cdot EN_1 > 0$. Iz tog uvjeta preko jakog zakona velikih brojeva dobivamo da trajektorije procesa rizika teže u $+\infty$ (g.s.), što rješava pitanje dugoročnog profita. Pri tome je vremenska evolucija sredstava pripisanih portfelju približno jednak evoluciji pravca s koeficijentom smjera $c - EX_1 \cdot EN_1 > 0$. Željena se nejednakost očito može postići jedino korigiranjem konstante c (odnosno premija za police osiguranja) jer samo na nju i imamo utjecaja. No iako strategija kaže da bismo dugoročno gledano trebali ostvarivati profit, još uvijek nam ostaje rizik propasti portfelja, odnosno rizik da sva sredstva kojima portfelj raspolaže budu potrošena. U okviru modela, riječ je o događaju da U_t poprimi negativnu vrijednost za neko $t < 0$. Takav bi rizik bilo poželjno mjeriti, te se kao prirodna mjera nameće vjerojatnost propasti uz početni kapital u , u oznaci $\psi(u)$. Za mjeru rizika u konačnom vremenu $[0, T]$ uzimamo $\psi(u, T)$ -vjerojatnost da se propast uz početni kapital u dogodi do trenutka T .

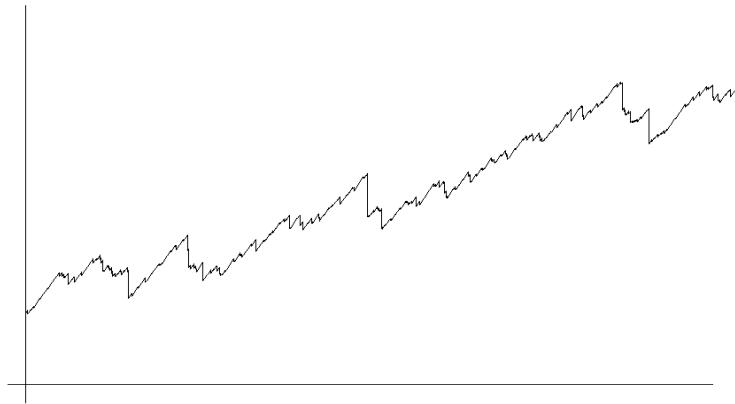


Slika 1: Tipični izgled trajektorije procesa rizika u slučaju malih zahtjeva. Trajektorija je proizašla iz simulacije kod koje su uzeti eksponencijalno distribuirani zahtjevi.

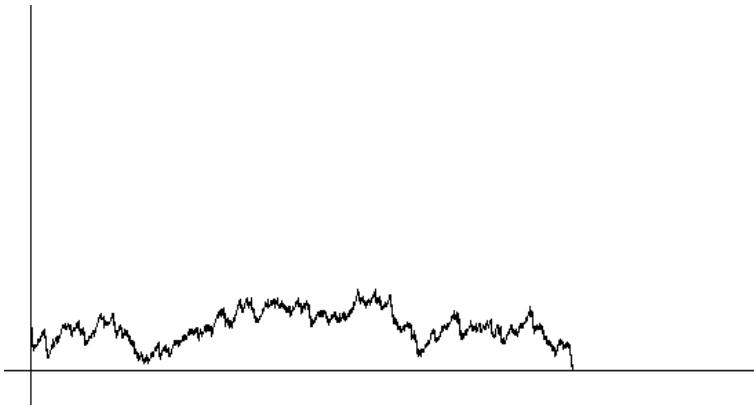
U prvom poglavlju vjerojatnost propasti u beskonačnom vremenu reprezentiramo Pollaczek-Hincinovom formulom, za što je ključna dekompozicija procesa na rekordne uzlete. Na početku drugog poglavlja imamo teorem 2.1.1 (prvi puta dokazan u Cramér [15]) u kojem se postiže asimptotska ocjena za $\psi(u)$, ali samo u slučaju tzv. malih zahtjeva. Riječ je o zahtjevima čija distribucija F ima svojstvo da njezin rep $1 - F$ konvergira u 0 eksponencijalnom brzinom, što znači da je vjerojatnost velikih pojedinačnih zahtjeva (eksponencijalno) malena. Primjeri distribucija koje odgovaraju takvim zahtjevima popisani su u tablici 2.1. U tablici 2.2 popisane su one distribucije koje ne zadovoljavaju uvjete teorema i za koje ocjena iz teorema 2.1.1 nije moguća, te ih nazivamo distribucijama velikih zahtjeva. Njihovi repovi konvergiraju u 0 sporije od bilo koje eksponencijalne funkcije i one same tipično nemaju niti drugi moment. Te se distribucije nipošto ne mogu zanemariti jer mnogo povijesnih podataka o nastalim štetama odgovara upravo njima. Uvjerljivi empirijski dokazi za to mogu se pronaći u Hogg i Klugman [34]. Stoga se teorija grana u dva smjera, posebno za male, a posebno za velike zahtjeve.

Razlika između distribucija malih i velikih zahtjeva dobro se vidi i prvim pogledom na tipične trajektorije procesa (U_t) u odgovarajućim slučajevima. Slike 1 i 2 prikazuju dvije takve trajektorije od kojih je druga (koja odgovara velikim zahtjevima) očigledno sklonija oscilacijama. Također, sa slike 2 se vidi da veliku ulogu u evoluciji procesa igraju povremeni veliki pojedinačni zahtjevi, što nije slučaj s prvom. Sada već imamo dva razloga da posumnjamo: nije li u slučaju velikih zahtjeva rizik od propasti veći?

Takvu hipotezu će potvrditi već i prvi pokušaj simuliranja trajektorija. Izdvojimo li one koje vode u propast, vidimo da tipični događaji propasti izgledaju kao na slikama 3 i 4. Dok se kod malih zahtjeva propast događa postupnim poniranjem odgovarajuće trajektorije, kod velikih zahtjeva se može dogoditi zbog jednog jedinog zahtjeva! Takvi su slučajevi već zabilježeni i u praksi, npr. kod osiguranja protiv elementarnih nepogoda

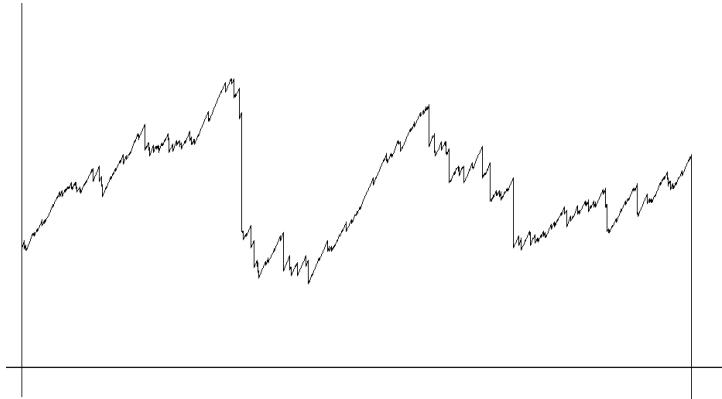


Slika 2: Tipični izgled trajektorije procesa rizika u slučaju velikih zahtjeva. Trajektorija je proizašla iz simulacije kod koje je distribucija zahtjeva Paretova.



Slika 3: Tipični izgled trajektorije procesa rizika koja vodi u propast u slučaju malih zahtjeva.

(za konkretnе podatke vidi Embrechts et al. [19] i Hogg i Klugman [34]). I dok kod malih zahtjeva još i možemo prepoznati opasnost, kod velikih se može dogoditi da za to nemamo nikakve šanse jer se propast događa trenutno. Stoga je od interesa i matematički poduprijeti ono što smo uočili, odnosno pokušati što preciznije opisati sam događaj propasti za svaki slučaj posebno. U nastavku drugog poglavlja to i radimo za slučaj malih zahtjeva, preuzimajući pristup i glavne rezultate iz Asmussen [4]. Za to se služimo određenim uvjetnim graničnim teoremmima za slučajne šetnje, koje kasnije primjenjujemo na proces rizika. Važan alat u tom smjeru predstavlja teorija konvergencije po distribuciji slučajnih procesa. U tom nam je dijelu glavni izvor Billingsley [12], te djelomično Ethier i Kurtz [21]. Definiravši $\tau(u)$ kao vrijeme propasti uz početni kapital u , asymptotske rezultate iskazujemo u terminima konvergencije po $P^{(u)}$ -vjerojatnosti definirane s $P^{(u)}(\cdot) = P(\cdot | \tau(u) < \infty)$. To



Slika 4: Tipični izgled trajektorije procesa rizika koja vodi u propast u slučaju velikih zahtjeva.

je ujedno i jedini prirođan način za asymptotski opis događaja propasti s obzirom na to da, kada $u \rightarrow \infty$, događaji $\{\tau(u) < \infty\}$ opadaju prema praznom skupu. Rezultat za vjerojatnosti propasti u konačnom vremenu sažet je u korolaru 2.5.3, dok u teoremu 2.5.5 dobivamo određenu zajedničku asymptotsku distribuciju ponašanja procesa do trenutka propasti i vremena propasti. Spomenuta dva rezultata prvi su put dokazana u Asmussen [4] odakle ih i preuzimamo. Situaciju rezimiramo u korolaru 2.5.7 i komentarima na kraju poglavlja. Dodatni zaključak koji tu iznosimo baziran je na rezultatu iz Schmidli [42].

U trećem poglavlju obrađujemo slučaj velikih zahtjeva. Pokazuje se da je skup svih distribucija koje ne zadovoljavaju uvjete teorema 2.1.1 preopćenit da bismo za njega dobili značajnije rezultate. Stoga uvodimo dodatne zahtjeve, pazeći da još uvijek zahvatimo tipične primjere iz tablice 2.2. Dobra matematička svojstva pronalazimo u klasama subeksponencijalnih distribucija i distribucija s repom regularne varijacije, u okviru kojih nastavljamo s istraživanjem. Asymptotski izraz za vjerojatnost propasti u beskonačnom vremenu za takve distribucije dolazi iz Embrechts i Veraverbeke [20]. Daljnji rezultati iz tog dijela su teorem 3.4.1 i korolar 3.4.2 koji podržavaju hipotezu da se uz veliki početni kapital u propast događa kao posljedica jednog velikog zahtjeva. Ti su rezultati, kao i tehnika njihovog dokaza, preuzeti iz Asmussen i Klüppelberg [8].

Na kraju se želim zahvaliti svima onima koji su pomogli da ovaj rad doživi svoj konačni izgled. Time posebno mislim na prof. dr. sc. Zorana Vondračeka i njegovu stručnu pomoć i strpljenje koje mi je ukazivao cijelim putem. Također, za tehničke savjete i rješenja zahvaljujem doc. dr. sc. Josipu Tambići koji s problemima uvijek napravi jednu te istu stvar: riješi ih!

Zagreb, siječanj 2003.

Mislav Žigo

Poglavlje 1

Proces rizika

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 1.1.1 (Cramér–Lundbergov model) Cramér–Lundbergov model *određen je uvjetima (a)–(f)*:

(a) Proces veličine zahtjeva:

veličine zahtjeva $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ su pozitivne nezavisne jednakom distribuirane slučajne varijable s zajedničkom nekritičkom funkcijom distribucije F i konačnim očekivanjem $\mu_X = EX_1$.

(b) Vremena zahtjeva:

zahtjevi se dešavaju u slučajnim vremenskim trenucima

$$0 < T_1 < T_2 < \dots \quad g.s.$$

(c) Proces pristizanja zahtjeva:

broj zahtjeva u intervalu $[0, t]$ je označen s

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

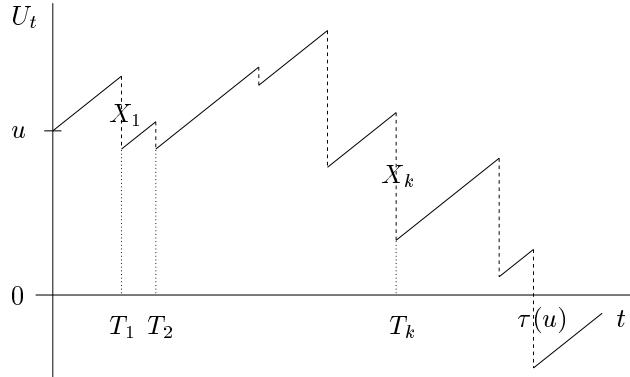
gdje je, po dogovoru, $\sup \emptyset = 0$.

(d) Međuvremena pristizanja:

$$Y_1 = T_1, \quad Y_k = T_k - T_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, \tag{1.1}$$

su nezavisne eksponencijalno distribuirane slučajne varijable s konačnim očekivanjem $\mu_Y = EY_1 = 1/\lambda$.

(e) Nizovi (X_k) i (Y_k) su međusobno nezavisni.



Slika 1.1: Jedna realizacija procesa rizika (U_t ; $t \geq 0$) koja vodi u propast.

(f) Cramér–Lundbergov proces ili proces rizika s početnim kapitalom u je proces (U_t ; $t \geq 0$) definiran relacijom

$$U_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} X_k = u - S_t, \quad (1.2)$$

$$\text{gdje je } c > 0 \text{ i } S_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k - ct.$$

U (1.2), konstantu $u \geq 0$ nazivamo *početni kapital* i ona predstavlja početni kapital odgovarajućeg portfelja. Konstantu $c > 0$ nazivamo *stopa uplata premija*, te $c \cdot t$ predstavlja novac uplaćen u portfelj od strane osiguranika u vremenskom intervalu $[0, t]$. Iako je pristizanje uplata očigledno slučajan proces, postoje razlozi zbog kojih, s aktuarskog stajališta, ima smisla promatrati baš linearnu stopu uplata (vidi npr. Bühlmann [14]), no te razloge nećemo ovdje razmatrati. Nadalje, kako je i rečeno u definiciji 1.1.1, N_t predstavlja broj zahtjeva za isplatu u intervalu $[0, t]$, dok X_1, \dots, X_{N_t} označavaju iznose tih zahtjeva. Tada rezultirajući proces (U_t ; $t \geq 0$) predstavlja ukupnu količinu novca na računu odgovarajućeg portfelja u trenutku t (vidi sliku 1.1).

Direktno iz prethodne definicije vidimo da je (N_t ; $t \geq 0$) homogeni Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$, odakle slijedi

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Jedno od temeljnih pitanja vezano uz Cramér–Lundbergov model jest pitanje vjerojatnosti propasti uz početni kapital $u \geq 0$, i to u konačnom vremenu $0 < T < \infty$

$$\psi(u, T) = P(U_t < 0 \text{ za neko } t \leq T) = P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq T} \{U_t < 0\}\right),$$

odnosno u beskonačnom vremenu

$$\psi(u) = \psi(u, \infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(u, T).$$

Sukladno tome, definiramo *prvo vrijeme propasti uz početni kapital u* kao

$$\tau(u) = \inf\{t > 0; U_t < 0\} = \inf\{t > 0; S_t > u\}, \quad (1.3)$$

pa upravo definirane vjerojatnosti propasti možemo izraziti kao

$$\psi(u, T) = P(\tau(u) \leq T), \quad \psi(u) = P(\tau(u) < \infty). \quad (1.4)$$

Laganim se računom pokazuje da vrijedi

$$EU_t = u + ct - \mu_X \lambda t,$$

dok iz osnovnog teorema obnavljanja slijedi

$$\frac{EU_t}{t} \rightarrow c - \lambda \mu_X. \quad (1.5)$$

Kao prvi korak prema solventnosti, nameće se uvjet pozitivnog drifta za velike t , što nas vodi na *uvjet čistog profita*

$$c - \lambda \mu_X > 0. \quad (1.6)$$

Uočimo odmah da se taj uvjet može ispuniti korekcijom parametra c , jedinog nad kojim osiguravajuća kuća ima kontrolu. U teorijskoj literaturi ponekad se kaže da se c namješta tako da drift bude 10-20% veći od očekivanog isplaćenog iznosa (vidi Asmussen [6]), odnosno tako da bude

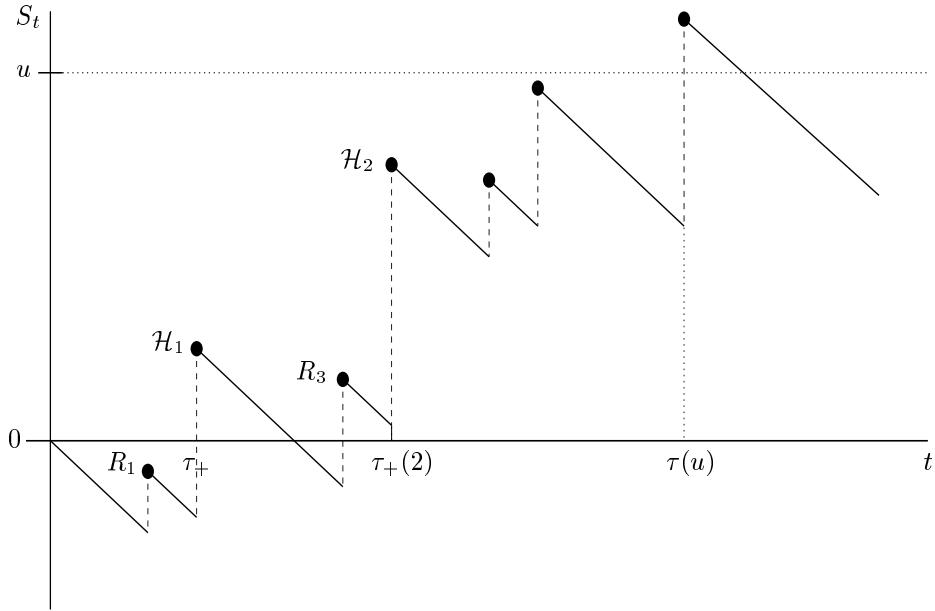
$$\rho = \frac{c - \lambda \mu_X}{\lambda \mu_X} \in [0.1, 0.2], \quad (1.7)$$

no mi nećemo diskutirati da li to zaista odgovara praksi ili ne. Konstatntu ρ nazivamo *sigurnost update*.

Samu propast bit će nam iz tehničkih razloga zgodnije promatrati kao događaj prelaska procesa $(S_t; t \geq 0)$ preko nivoa u nego kao događaj padanja procesa $(U_t; t \geq 0)$ ispod nivoa 0 (vidi (1.3) i sliku 1.2.). Stoga od sada pa nadalje našu pažnju usmjeravamo baš prema procesu (S_t) i proučavamo njegovu strukturu. Odmah uočimo da iz (1.5) slijedi da $S_t/t \rightarrow \lambda \mu_X - c < 0$, odnosno (S_t) ima negativan drift. Nije teško pokazati da je (S_t) Lévyjev, što slijedi direktno iz nezavisnosti i jednakosti distribuiranosti priroda Poissonovog procesa (N_t) (vidi propoziciju 1.2.6). No o Lévyjevoj strukturi procesa (S_t) više ćemo reći nešto kasnije. Prvo ćemo posvetiti pažnju slučajnoj šetnji koja je u njemu skrivena.

Zbog $c > 0$, propast se može dogoditi jedino u trenucima zahtjeva za isplatu T_k , kada proces (S_t) ostvaruje skok prema gore. Stoga uočavamo diskretni proces $(R_n; n \geq 0)$:

$$R_n = S_{T_n} = \sum_{k=1}^n (X_k - c Y_k) = \sum_{k=1}^n Z_k, \quad n \geq 0, \quad (1.8)$$



Slika 1.2: Jedna trajektorija procesa $(S_t; t \geq 0)$ koja vodi u propast. Masne točke označavaju diskretni kostur $(R_n; n \geq 0)$.

koji očigledno ima strukturu slučajne šetnje. Distribuciju od Z_1 označavamo s G . Proces (R_n) nazivamo *diskretni kostur procesa* (S_t) (vidi sliku 1.2). Prema uvjetu čistog profita (1.6) imamo $\mu_Z = EZ_1 = \mu_X - c/\lambda < 0$, pa vidimo da i diskretni kostur (R_n) procesa (S_t) ima negativan drift. Direktno iz te činjenice, preko jakog zakona velikih brojeva, slijedi

$$M := \sup_{t \geq 0} S_t = \sup_{n \geq 1} R_n < +\infty \quad (\text{g. s.}), \quad (1.9)$$

što nam daje još jednu reprezentaciju vjerojatnosti propasti u beskonačnom vremenu

$$\psi(u) = P(M > u).$$

Problem vjerojatnosti propasti upravo smo sveli na problem globalnog maksimuma slučajne šetnje, te nam takva konstrukcija omogućava korištenje alata teorije slučajnih šetnji i teorije obnavljanja. Od posebne je važnosti, pogotovo kod šetnji s negativnim driftom, struktura tzv. *rekordnih uzleta*.

Definicija 1.1.2 Za slučajnu šetnju $(R_n; n \geq 0)$ definiramo prvi indeks rekordnog uzleta

$$\tau_+ = \tau_+(1) = \inf \{n \geq 1; R_n > 0\}$$

i prvi rekordni uzlet

$$\mathcal{H}_1 = R_{\tau_+} \text{ na } \{\tau_+ < \infty\}.$$

Za $k \geq 2$ definiramo indeks k -tog rekordnog uzleta

$$\tau_+(k) = \inf\{n \geq 1; R_n > \mathcal{H}_{k-1}\} \text{ na } \{\tau_+(k-1) < \infty\}$$

i k -ti rekordni uzlet

$$\mathcal{H}_k = R_{\tau_+(k)} \text{ na } \{\tau_+(k) < \infty\}.$$

Događaji $\{\tau_+(k) < \infty\}$ očigledno tvore padajući niz. Nadalje, vrijedi $\{\tau_+ < \infty\} = \{\mathcal{H}_1 < \infty\}$, te je defekt od τ_+ i \mathcal{H}_1 jednak

$$P(\tau_+ = \infty) = P(R_n \leq 0, \forall n) = P(M \leq 0) = 1 - \psi(0). \quad (1.10)$$

Po definiciji uzimamo $\tau_+(0) = \mathcal{H}_0 = 0$. Situacija je opisana na slici 1.2.

Smisao upravo definiranih varijabli leži u činjenici da svaku slučajnu šetnju možemo dekomponirati na niz nezavisnih segmenata, svaki od kojih se odvija između dva uzastopna indeksa rekordnog uzleta. Preciznije, segmenti $[(R_n; \tau_+(k-1) \leq n < \tau_+(k)); k \in \mathbb{N}]$ su međusobno nezavisni (vidi Resnick [38], odjeljci 3.7.1 i 3.12). Također, svaki konačan skup od početnih k takvih segmenata promatran uz vjerojatnost $P(\cdot | \tau_+(k) < \infty)$ je i jednako distribuiran. Za naše potrebe dovoljan je idući rezultat.

Teorem 1.1.3 Za fiksno $k \in \mathbb{N}$, s obzirom na vjerojatnost $P(\cdot | \tau_+(k) < \infty)$, slučajni vektori $(\tau_+, \mathcal{H}_1), (\tau_+(2) - \tau_+, \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1), \dots, (\tau_+(k) - \tau_+(k-1), \mathcal{H}_k - \mathcal{H}_{k-1})$ su nezavisni i jednako distribuirani s distribucijom

$$H(n, x) = P(\tau_+ = n, \mathcal{H}_1 \leq x | \tau_+ < \infty).$$

Dokaz. Vrijedi

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \{\tau_+(i) - \tau_+(i-1) = n_i, \mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1} \leq x_i\}\right) = \prod_{i=1}^k P(\tau_+ = n_i, \mathcal{H}_1 \leq x_i). \quad (1.11)$$

Dokažimo gornju relaciju za $k = 2$ (opći slučaj analogno).

$$\begin{aligned} & P(\tau_+ = n_1, \mathcal{H}_1 \leq x_1, \tau_+(2) - \tau_+ = n_2, \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1 \leq x_2) \\ = & P(R_1 \leq 0, \dots, R_{n_1-1} \leq 0, 0 < R_{n_1} \leq x_1, R_{n_1+1} \leq R_{n_1}, R_{n_1+n_2-1} \leq R_{n_1}, \\ & R_{n_1} < R_{n_1+n_2} \leq R_{n_1} + x_2) \\ = & P(R_1 \leq 0, \dots, R_{n_1-1} \leq 0, 0 < R_{n_1} \leq x_1, Z_{n_1+1} \leq 0, Z_{n_1+1} + \dots + Z_{n_1+n_2-1} \leq 0, \\ & 0 < Z_{n_1+1} + \dots + Z_{n_1+n_2} \leq x_2) \\ = & P(\tau_+ = n_1, \mathcal{H}_1 \leq x_1)P(\tau_+ = n_2, \mathcal{H}_1 \leq x_2), \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili nezavisnost i jednaku distribuiranost prirasta slučajne šetnje. Iz gornje relacije dobivamo

$$\begin{aligned}
 P(\tau_+(k) < \infty) &= P\left(\bigcap_{i=1}^k \{\tau_+(i) < \infty\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^k \{\tau_+(i) - \tau_+(i-1) < \infty\}\right) \\
 &= \sum_{n_1, \dots, n_k} P\left(\bigcap_{i=1}^k \{\tau_+(i) - \tau_+(i-1) = n_i\}\right) \\
 &= \sum_{n_1, \dots, n_k} \prod_{i=1}^k P(\tau_+ = n_i) = P(\tau_+ < \infty)^k = \psi(0)^k,
 \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
 &P\left(\bigcap_{i=1}^k \{\tau_+(i) - \tau_+(i-1) = n_i, \mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1} \leq x_i\} \mid \tau_+(k) < \infty\right) \\
 &= \frac{1}{\psi(0)^k} \prod_{i=1}^k P(\tau_+ = n_i, \mathcal{H}_1 \leq x_i) = \frac{1}{\psi(0)^k} \prod_{i=1}^k P(\tau_+ = n_i, \mathcal{H}_1 \leq x_i, \tau_+ < \infty) \\
 &= \prod_{i=1}^k H(n_i, x_i),
 \end{aligned}$$

gdje je $H(n, x) = P(\tau_+ = n, \mathcal{H}_1 \leq x \mid \tau_+ < \infty)$. Još je preostalo pokazati $P(\tau_+(i) - \tau_+(i-1) = n_i, \mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1} \leq x_i \mid \tau_+(k) < \infty) = H(n_i, x_i), \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

$$\begin{aligned}
 &P(\tau_+(i) - \tau_+(i-1) = n_i, \mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1} \leq x_i \mid \tau_+(k) < \infty) \\
 &= \frac{1}{\psi(0)^k} P(\tau_+(i) - \tau_+(i-1) = n_i, \mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1} \leq x_i, \tau_+ < \infty, \tau_+(2) - \tau_+ < \infty, \dots, \\
 &\quad \tau_+(k) - \tau_+(k-1) < \infty) \\
 &= \frac{1}{\psi(0)^k} \sum_{n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_k} P(\tau_+ = n_1, \tau_+(2) - \tau_+ = n_2, \dots, \\
 &\quad \tau_+(k) - \tau_+(k-1) = n_k, \mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1} \leq x_i) \\
 &= \frac{1}{\psi(0)^k} P(\tau_+ < \infty)^{k-1} P(\tau_+ = n_i, \mathcal{H}_1 \leq x_i) = \frac{1}{\psi(0)} P(\tau_+ = n_i, \mathcal{H}_1 \leq x_i) \\
 &= H(n_i, x_i).
 \end{aligned}$$

□

Definicija 1.1.4 Proces obnavljanja nazivamo tranzijentnim (umirućim) ako je pripadna distribucija F međuvremena pristizanja defektna, odnosno $F(\infty) < 1$.

Naziv iz gornje definicije opravdan je činjenicom da tranzijentni procesi obnavljanja odu-miru s vjerojatnošću 1 (vidi Feller [22], odjeljak XI.6). Direktna je posljedica prethodnog teorema

Korolar 1.1.5 *Trenuci rekordnih uzleta ($\tau_+(n); n \geq 0$) i rekordni uzleti ($\mathcal{H}_n; n \geq 0$) čine dva tranzijentna procesa obnavljanja. Slučajna varijabla $K = \sup\{n \geq 1; \tau_+(n) < \infty\}$, koja označava ukupan broj obnavljanja, ima geometrijsku distribuciju s parametrom $\psi(0)$, tj. $P(K = n) = \psi(0)^n(1 - \psi(0))$.*

Definicija 1.1.6 Rep proizvoljne vjerojatnosne funkcije distribucije F na \mathbb{R} , u oznaci \overline{F} , jest funkcija

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x).$$

Primjenom teorema 1.1.3 i korolara 1.1.5 dobivamo

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(M > u) = \sum_{n=1}^{\infty} P(M > u, K = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(M > u, \tau_+(n) < \infty, \tau_+(n+1) = \infty) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^n (\mathcal{H}_k - \mathcal{H}_{k-1}) > u, \tau_+(n) < \infty, \tau_+(n+1) = \infty\right) \\ &= (1 - \psi(0)) \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^n (\mathcal{H}_k - \mathcal{H}_{k-1}) > u, \tau_+(n) < \infty\right) \\ &= (1 - \psi(0)) \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n (1 - H^{n*}(u)) \\ &= (1 - \psi(0)) \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n (\overline{H^{n*}}(u)) \end{aligned} \quad (1.12)$$

gdje je H funkcija distribucije prvog rekordnog uzleta s obzirom na vjerojatnost $P(\cdot | \tau_+ < \infty)$, tj. $H(x) = P(\mathcal{H}_1 \leq x | \tau_+ < \infty)$, dok H^{n*} označava njezinu n-tu konvoluciju. Dobivena formula reprezentacije vjerojatnosti propasti u beskonačnom vremenu naziva se *Pollaczek-Hinčinova formula*.

U nastavku želimo izračunati uvjetnu funkciju distribucije prvog rekordnog uzleta H . U slučaju opće slučajne šetnje, koja ostvaruje skokove prema gore i prema dolje, nije moguće dobiti eksplicitni izraz za H . Međutim u slučaju procesa (S_t) , koji je glavni predmet našeg istraživanja, tu je distribuciju moguće dobiti zaobilaznim putem. U tom postupku glavnu ulogu igra Lévyjevo svojstvo procesa (S_t) .

1.2 Lévyjevi procesi i Lévyjeve mjere

Definicija 1.2.1 Slučajni proces ($L_t; t \geq 0$) u \mathbb{R}^d nazivamo Lévyjevim ako vrijede idući uvjeti:

- (i) $\forall n \geq 1$ i $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ slučajne varijable $L_{t_0}, L_{t_1} - L_{t_0}, \dots, L_{t_n} - L_{t_{n-1}}$ su nezavisne (nezavisnost prirasta),
- (ii) $L_0 = 0$ (g. s.),
- (iii) Distribucija od $L_{t+s} - L_s$ ne ovisi o s (stacionarnost prirasta),
- (iv) $(L_t; t \geq 0)$ je stohastički neprekidan, tj. $\forall t \geq 0, \forall \varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|L_s - L_t| > \varepsilon) = 0,$$

- (v) Postoji $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $P(\Omega_0) = 1$ i $\forall \omega \in \Omega_0$ funkcija $t \mapsto L_t(\omega)$ je neprekidna zdesna i ima limes sljeva u svakoj točki $t \geq 0$ (neprekidnost trajektorija zdesna).

Napomena. Naglasimo odmah da uvjeti (i) – (v) nisu minimalni jer se može pokazati da (ii), (iii) i (v) zajedno povlače (iv). Zato je, da bismo provjerili da je neki proces Lévyjev, dovoljno pokazati (i), (ii), (iii) i (v).

U teoriji Lévyjevih procesa važan je pojam beskonačno djeljivih distribucija. Da bismo nastavili u tom smjeru, prvo moramo definirati neke pojmove.

Definicija 1.2.2 (i) Karakteristična funkcija vjerojatnosne mjere μ na \mathbb{R}^d je funkcija $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ definirana s

$$\hat{\mu}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle z, x \rangle} d\mu(x), \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

- (ii) Konvolucija dviju mjeri μ_1 i μ_2 na \mathbb{R}^d je mjeru $\mu_1 * \mu_2$ na \mathbb{R}^d definirana relacijom

$$(\mu_1 * \mu_2)(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_1(B - x) d\mu_2(x), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

gdje $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ označava Borelovu sigma algebru na \mathbb{R}^d .

- (iii) Za vjerojatnosnu mjeru μ na \mathbb{R}^d kažemo da je beskonačno djeljiva ako $\forall n \in \mathbb{N}$ postoji vjerojatnosna mjeru μ_n na \mathbb{R}^d s svojstvom $\mu = \mu_n^{**}$, gdje μ_n^{**} označava n -tu konvoluciju mjeri μ_n .

Također, trebat će nam i neki osnovni rezultati vezani uz upravo definirane pojmove. Iduća je propozicija preuzeta iz Sato [41], propozicija 2.5.

Propozicija 1.2.3 Neka su μ, μ_1, μ_2 vjerojatnosne mjere na \mathbb{R}^d .

- (i) Ako je $\widehat{\mu}_1(z) = \widehat{\mu}_2(z)$ za sve $z \in \mathbb{R}^d$, onda je $\mu_1 = \mu_2$.
- (ii) Ako je $\mu = \mu_1 * \mu_2$, onda je $\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}_1(z)\widehat{\mu}_2(z)$.
- (iii) Ako su X_1 i X_2 nezavisni d -dimenzionalni slučajni vektori, onda $P_{X_1+X_2} = P_{X_1}*P_{X_2}$.

U slučaju Lévyjevog procesa (L_t), distribucija od L_t je beskonačno djeljiva za proizvoljan $t \geq 0$. Za proizvoljne $t \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$ napišemo

$$L_t = (L_{\frac{t}{n}} - L_0) + (L_{\frac{2t}{n}} - L_{\frac{t}{n}}) + \cdots + (L_t - L_{\frac{(n-1)t}{n}}),$$

čime smo, prema svojstvima (i), (ii) i (iii) iz definicije Lévyjevih procesa, L_t prikazali kao sumu od n nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih vektora. Tvrđnja sada slijedi iz propozicije 1.2.3 (iii).

Važan rezultat u karakterizaciji beskonačno djeljivih vjerojatnosnih mjera jest tzv. *Lévy-Hinčinova reprezentacija*. Za dokaz upućujemo na Sato [41], str. 40-44.

Teorem 1.2.4 (Lévy-Hinčinova formula reprezentacije) (i) Ako je μ beskonačno djeljiva distribucija na \mathbb{R}^d , onda za $z \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{\mu}(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle + i \langle \gamma, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i\langle z, x \rangle \mathbf{1}_D(x)) d\nu(x) \right], \quad (1.13)$$

gdje je A simetrična pozitivno semidefinitna $d \times d$ matrica, $\gamma \in \mathbb{R}^d$, D jedinična kugla u \mathbb{R}^d , a ν mjera na \mathbb{R}^d koja zadovoljava

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad i \quad \int_{\mathbb{R}^d} (||x||^2 \wedge 1) d\nu(x) < \infty. \quad (1.14)$$

(ii) Trojka (A, γ, ν) iz gornje reprezentacije je jedinstvena.

(iii) Obratno, ako je A simetrična pozitivno semidefinitna $d \times d$ matrica, ν mjera koja zadovoljava (1.14) i $\gamma \in \mathbb{R}^d$, onda postoji beskonačno djeljiva vjerojatnosna mjera μ na \mathbb{R}^d čija je karakteristična funkcija dana s (1.13).

Definicija 1.2.5 (i) Trojku (A, ν, γ) iz teorema 1.2.4 nazivamo generirajućom trojkom od μ . A se naziva Gaussova matrica kovarijanci, dok ν zovemo Lévyjevom mjerom od μ .

(ii) Lévyjeva mjera Lévyjevog procesa (L_t) je Lévyjeva mjera vjerojatnosne mjere P_{L_1} .

Propozicija 1.2.6 Proces $(S_t; t \geq 0)$ je Lévyjev s pripadnom Lévyjevom mjerom $\lambda \cdot dF$.

Dokaz. Prema napomeni neposredno nakon definicije 1.2.1, dovoljno je provjeriti svojstva (i), (ii), (iii) i (v) iz iste definicije. No to lagano vidimo: (ii) slijedi iz definicije procesa (S_t) , (i) i (iii) direktno iz činjenice da Poissonov proces ima stacionarne nezavise priraste. Svojstvo (v) slijedi iz činjenice da su gotovo sve trajektorije Poissonovog procesa neprekidne zdesna i imaju limes slijeva, te iz činjenice da je distribucija skokova X_k procesa (S_t) nedefektua (što same skokove čini konačnima). U nastavku označimo s φ_{S_1} karakterističnu funkciju mjere P_{S_1} i izračunajmo je.

$$\begin{aligned}\varphi_{S_1}(z) &= E[e^{izS_1}] = E\left[e^{iz(\sum_{i=1}^{N(1)} X_i - c)}\right] \\ &= e^{-izc} \sum_{n=1}^{\infty} E\left[e^{iz\sum_{i=1}^n X_i} \mid N(1) = n\right] P(N(1) = n) \\ &= e^{-izc} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{X_1}(z))^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda - izc + \lambda \varphi_{X_1}(z)}\end{aligned}$$

Sada vidimo da je generirajuća trojka za P_{S_1} dana s $A = 0$, $\nu = \lambda dF$ i $\gamma = \int_D \lambda x dF(x) - c$, jer je u tom slučaju

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}Az^2 + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx \cdot 1_D(x)) d\nu(x) &= iz \left(\int_D \lambda x dF(x) - c \right) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx \cdot 1_D(x)) \lambda dF(x) \\ &= -izc + \lambda \varphi_{X_1}(z) - \lambda,\end{aligned}$$

te tvrdnja propozicije slijedi prema teoremu 1.2.4 djelovanjem eksponencijalne funkcije na obje strane gornje jednakosti. \square

Definicija 1.2.7 Neka je $X = (X_t; t \geq 0)$ stohastički proces.

- (i) Prirodna filtracija procesa X jest filtracija $(\mathcal{F}_t^X; t \geq 0)$ definirana s $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u; 0 \leq u \leq t)$.
- (ii) Lijevi limes procesa X u točki $t > 0$ je slučajna varijabla X_{t-} definirana s $X_{t-} = \lim_{s \nearrow t} X_s$.
- (iii) Skok procesa X u točki $t > 0$ je slučajna varijabla ΔX_t definirana s $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$.

Iz propozicije 72.7 u Sharpe [44] preuzimamo

Teorem 1.2.8 (Formula kompenzacije za Lévyjeve procese) *Neka je $(L_t; t \geq 0)$ Lévyjev proces s Lévyjevom mjerom ν i pripadnom prirodnom filtracijom $(\mathcal{F}_t^L; t \geq 0)$, te neka je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Tada je proces $(M_t; t \geq 0)$ definiran relacijom*

$$M_t = \sum_{0 < u \leq t} f(L_{u-}, \Delta L_u) \cdot 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta L_u) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(L_{u-}, y) \cdot 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(y) d\nu(y) du \quad (1.15)$$

(\mathcal{F}_t^L) -martingal.

1.3 Distribucija rekordnih uzleta

U prošlom smo odjeljku postavili situaciju za računanje distribucije prvog rekordnog uzleta

$$H(x) = P(\mathcal{H}_1 \leq x \mid \tau_+ < \infty). \quad (1.16)$$

U tu svrhu definiramo vremena

$$\begin{aligned} \tau_+(0) &= 0 \\ \tau_+(1) &= \inf\{t > 0; S_t > 0\} \\ \tau_+(k) &= \inf\{t > 0; S_t > S_{\tau_+(k-1)}\}, \quad k \geq 2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Označimo

$$\tau_+ = \tau_+(1) = \inf\{t > 0; S_t > 0\}. \quad (1.18)$$

Kao i kod slučajnih šetnji, $S_{\tau_+(k)}$ i $\tau_+(k)$ nazivamo k -ti rekordni uzlet i vrijeme k -tog rekordnog uzleta. Iako su oznake za vremena rekordnih uzleta procesa (S_t) i diskretnog kostura (R_n) iste, najčešće će iz konteksta biti jasno na što točno mislimo. U situacijama kada to nije očigledno koristit ćemo označke $\tau_+^R(k)$ i $\tau_+^S(k)$. Uočimo odmah i to da je odnos navedenih vremena oblika

$$\tau_+^S(k) = \sum_{i=1}^{\tau_+^R(k)} Y_i,$$

gdje su Y_i međuvremena čekanja iz definicije 1.1.1. Direktno iz te relacije vidimo

$$\{\tau_+^R(k) < \infty\} = \{\tau_+^S(k) < \infty\},$$

pa zaključujemo da je defekt od $\tau_+^S(k)$ opet jednak $\psi(0)^k$. Kao i prije, slučajne varijable $S_{\tau_+(k)}$ definiramo samo na gornjem događaju.

Budući da se prelazak procesa (S_t) preko nivoa u može dogoditi samo u trenucima T_n pristizanja zahtjeva za isplatu, slijedi

$$S_{\tau_+(k)} = \mathcal{H}_k,$$

pa nam je svejedno koju ćemo oznaku upotrijebiti (vidi sliku 1.2). Sada možemo pisati

$$H(x) = P(\mathcal{H}_1 \leq x \mid \tau_+ < \infty) = P(S_{\tau_+} \leq x \mid \tau_+ < \infty),$$

pa ćemo distribuciju H pokušati izračunati iz upravo dobivene reprezentacije.

Kako je i rečeno u definiciji 1.2.7, uz proces $(S_t; t \geq 0)$ vežemo i pripadnu mu prirodnu filtraciju $(\mathcal{F}_t^S; t \geq 0)$. Tada je prvo vrijeme τ_+ prijelaza procesa preko nivoa 0 ujedno i (\mathcal{F}_t^S) vrijeme zaustavljanja. To vidimo iz relacije

$$\{\tau_+ > t\} = \bigcap_{u \in [0, t]} \{S_u \leq 0\} = \bigcap_{u \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} \{S_u \leq 0\} \in \mathcal{F}_t^S,$$

jer su trajektorije od (S_t) neprekidne zdesna i imaju limes slijeva u svakoj točki. Definirajmo

$$H_+(x) = P(S_{\tau_+} \leq x, \tau_+ < \infty) = H(x)\psi(0) \quad (1.19)$$

i uočimo da je ovdje riječ o defektnoj funkciji distribucije.

Teorem 1.3.1 *Funkcija $x \mapsto H_+(x)$ je absolutno neprekidna s defektnom gustoćom*

$$h_+(x) = \frac{\lambda}{c} \overline{F}(x). \quad (1.20)$$

Dokaz ovog teorema nakratko ćemo odgoditi jer za to moramo uvesti neke nove pojmove i rezultate.

Definirajmo funkciju $R_+ : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ relacijom

$$R_+(A) = E \left[\int_0^{+\infty} 1_{\{S_t \in A, \tau_+ > t\}} dt \right] = E \left[\int_0^{\tau_+} 1_{\{S_t \in A\}} dt \right], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (1.21)$$

$R_+(A)$ je, intuitivno govoreći, mjera zadržavanja procesa (S_t) u skupu A prije prvog prijelaza preko nivoa 0, odnosno riječ je o očekivanom vremenu takvog zadržavanja. Lagano vidimo da je R_+ zaista dobro definirana mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, te da je koncentrirana na $(-\infty, 0]$.

Lema 1.3.2 *Za proizvoljnu nenegativnu izmjerivu funkciju g vrijedi*

$$\int_{-\infty}^0 g(y) dR_+(y) = E \left[\int_0^{\tau_+} g(S_t) dt \right].$$

Dokaz. U slučaju $g = 1_B$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tvrdnja slijedi direktno iz definicije, dok za slučaj jednostavne funkcije g slijedi iz linearnosti integrala. Stoga uzimomo g nenegativnu i neki niz jednostavnih nenegativnih funkcija (g_n) sa svojstvom $g_n \uparrow g$ po točkama. Za proizvoljan $\omega \in \Omega$ vrijedi

$$g_n(S_t(\omega)) \uparrow g(S_t(\omega)), \quad \forall t \in [0, \tau_+(\omega)],$$

pa primjenom Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\int_0^{\tau_+(\omega)} g_n(S_t(\omega)) dt \uparrow \int_0^{\tau_+(\omega)} g(S_t(\omega)) dt, \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (1.22)$$

Sada pomoću (1.22) dvostrukom primjenom Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 g(y) dR_+(y) &= \int_{-\infty}^0 \lim_n g_n(y) dR_+(y) = \lim_n \int_{-\infty}^0 g_n(y) dR_+(y) \\ &= \lim_n E \left[\int_0^{\tau_+} g_n(S_t) dt \right] = E \left[\lim_n \int_0^{\tau_+} g_n(S_t) dt \right] \\ &= E \left[\int_0^{\tau_+} g(S_t) dt \right], \end{aligned}$$

što se i tražilo. \square

Lema 1.3.3 Za prizvoljan Borelov skup $A \subseteq (-\infty, 0]$,

$$R_+(A) = \frac{1}{c} \lambda(A),$$

gdje je λ Lebesgueova mjera na \mathbb{R} .

Dokaz. Dovoljno je pokazati da za $\langle a, b] \subseteq (-\infty, 0]$ vrijedi $R_+(\langle a, b]) = \frac{1}{c}(b - a)$, jer tada tvrdnja leme slijedi iz teorema o proširenju mjeri. Za proizvoljan $T > 0$ definiramo

$$S_t^* = S_T - S_{T-t}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Trajektorije procesa $(S_t^*; 0 \leq t \leq T)$ dobivene su iz trajektorija procesa $(S_t; 0 \leq t \leq T)$ centralnom simetrijom kroz ishodište, a zatim translacijom u ishodište. Lagano se provjeri da i (S_t^*) ima nezavisne i jednakodistribuirane priraste. Takoder, spomenuta dva procesa su i jednakodistribuirana. Da bismo to pokazali dovoljno je provjeriti jednakost konačno

dimenzionalnih distribucija, jer tada tvrdnja slijedi iz Kolmogorovljeve konstrukcije vjerojatnosti na beskonačno dimenzionalnim prostorima.

Zbog jednake distribuiranosti prirasta Lévyjevog procesa (definicija 1.2.1 (iii)) imamo

$$S_t^* = S_T - S_{T-t} \stackrel{d}{=} S_{T-(T-t)} = S_t.$$

Slična relacija vrijedi i za priraste, odnosno uzmememo li $0 \leq t_1 < t_2$ imamo

$$S_{t_2}^* - S_{t_1}^* = S_T - S_{T-t_2} - S_T + S_{T-t_1} = S_{T-t_1} - S_{T-t_2} \stackrel{d}{=} S_{(T-t_1)-(T-t_2)} = S_{t_2} - S_{t_1}.$$

Uzmimo sada $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \leq T$. Zbog gornje relacije i nezavisnosti prirasta Lévyjevih procesa slijedi

$$(S_{t_1}, S_{t_2} - S_{t_1}, \dots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}}) \stackrel{d}{=} (S_{t_1}^*, S_{t_2}^* - S_{t_1}^*, \dots, S_{t_n}^* - S_{t_{n-1}}^*),$$

pa direktno zaključujemo

$$(S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}) \stackrel{d}{=} (S_{t_1}^*, S_{t_2}^*, \dots, S_{t_n}^*),$$

odnosno sve konačno dimenzionalne distribucije navedenih procesa su jednake.

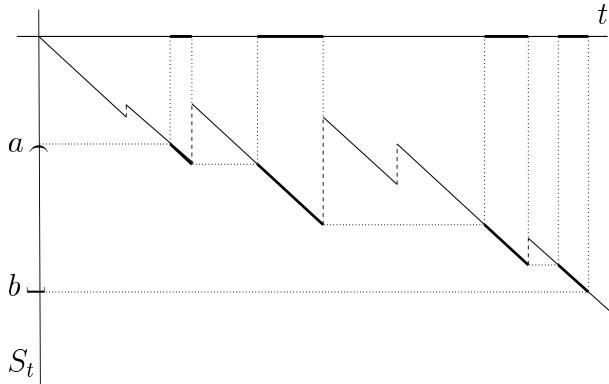
Odaberimo proizvoljan interval $A = \langle a, b \rangle \subseteq \langle -\infty, 0 \rangle$. Nadalje, uočimo da vrijede jednakosti $S_T^* = S_T$ i $S_t = S_T^* - S_{T-t}^*$, pa imamo redom

$$\begin{aligned} P(S_T \in A, \tau_+ > T) &= P(S_T \in A, S_t \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]) \\ &= P(S_T^* \in A, S_t \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]) \\ &= P(S_T^* \in A, S_T^* \leq S_{T-t}^* \quad \forall t \in [0, T]) \\ &= P(S_T^* \in A, S_T^* \leq S_t^* \quad \forall t \in [0, T]) \\ &= P(S_T \in A, S_T \leq S_t \quad \forall t \in [0, T]). \end{aligned}$$

Dvostrukom primjenom Fubinijevog teorema slijedi

$$\begin{aligned} R_+(A) &= E \left[\int_0^{+\infty} 1_{\{S_T \in A, \tau_+ > T\}} dT \right] = \int_0^{+\infty} E [1_{\{S_T \in A, \tau_+ > T\}}] dT \\ &= \int_0^{+\infty} P(S_T \in A, S_T \leq S_t \quad \forall t \in [0, T]) dT \\ &= E \left[\int_0^{+\infty} 1_{\{S_T \in A, S_T \leq S_t \quad \forall t \in [0, T]\}} dT \right]. \end{aligned}$$

Budući da gotovo sve trajektorije procesa (S_t) teže u $-\infty$, dobivamo

Slika 1.3: Prolazak minimuma procesa (S_t) kroz interval $(a, b]$.

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_T \in A, S_T \leq S_t \quad \forall t \in [0, T]\}} dT = \frac{b-a}{c} \quad (\text{g. s.}),$$

jer izraz sa lijeve strane predstavlja upravo vrijeme koje minimum trajektorije provede u skupu A , što se najbolje vidi na slici 1.3. Stoga zaključujemo $R_+(A) = \frac{b-a}{c}$, što se i tražilo. \square

Lema 1.3.4 H_+ je restrikcija od $\lambda \cdot R_+ * F$ na $\langle 0, +\infty \rangle$, odnosno

$$H_+(A) = \lambda \int_{-\infty}^0 F(A-y) dR_+(y).$$

Dokaz. Definiramo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$f(x, y) = \mathbb{1}_{(-\infty, 0]}(x) \mathbb{1}_A(x+y).$$

Funkcija f je očigledno omeđena, pa je prema teoremu 1.2.8 proces $(M_t; t \geq 0)$ definiran s

$$M_t = \sum_{0 < u \leq t} f(S_{u-}, \Delta S_u) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta S_u) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(S_{u-}, y) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(y) d\nu(y) du$$

(\mathcal{F}_t^S) -martingal čije su trajektorije neprekidne zdesna. Budući da je τ_+ vrijeme zaustavljanja, slijedi (vidi npr. Karatzas i Shreve [35], problem 3.24 (i)) da je $(M_{t \wedge \tau_+}; t \geq 0)$ ponovo (\mathcal{F}_t^S) -martingal (s trajektorijama neprekidnim zdesna). Očigledno vrijedi

$$M_{t \wedge \tau_+}^+ = \sum_{0 < u \leq t \wedge \tau_+} f(S_{u-}, \Delta S_u) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta S_u) \leq \sum_{0 < u \leq \tau_+} f(S_{u-}, \Delta S_u) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta S_u) \leq 1$$

jer je (uz ovako definiranu f) riječ upravo o broju skokova iz skupa $(-\infty, 0]$ u skup A koje proces načini u vremenskom intervalu $[0, \tau_+]$. Stoga vrijedi $\sup_{t \geq 0} E[M_{t \wedge \tau_+}^+] \leq 1 < \infty$, pa prema teoremu 3.15 iz Karatzas i Shreve [35] slijedi da postoji (g.s.) $\lim_{t \rightarrow \infty} M_{t \wedge \tau_+}$, koji se još k tome nalazi u L^1 . Primjenom teorema o opcionom zaustavljanju (Karatzas i Shreve [35], teorem 3.22) slijedi

$$E(M_{\tau_+}) = E(M_t) = E(M_0) = 0 \quad \forall t > 0,$$

odnosno

$$E \left[\sum_{0 < u \leq \tau_+} f(S_{u-}, \Delta S_u) 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta S_u) \right] = E \left[\int_0^{\tau_+} \int_{\mathbb{R}} f(S_{u-}, y) 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(y) d\nu(y) du \right]. \quad (1.23)$$

Pri tome podrazumijevamo $M_{\tau_+} = 0$ na $\{\tau_+ = +\infty\}$. Lijeva strana u (1.23) jednaka je

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{0 < u \leq \tau_+} 1_{(-\infty, 0]}(S_{u-}) 1_A(S_u) 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta S_u) \right] &= E[1_A(S_{\tau_+}) 1_{\{\tau_+ < \infty\}}] \\ &= P(S_{\tau_+} \in A, \tau_+ < \infty) = H_+(A). \end{aligned}$$

Prema propoziciji 1.2.6 (S_t) je Lévyjev s pripadnom Lévyjevom mjerom $d\nu = \lambda dF$, pa je desna strana u (1.23) jednaka

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^{\tau_+} \int_{\mathbb{R}} 1_{\{S_{u-} \leq 0\}} 1_{\{S_{u-} + y \in A\}} 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(y) d\nu(y) du \right] &= E \left[\lambda \int_0^{\tau_+} \int_0^{+\infty} 1_{\{S_{u-} + y \in A\}} dF(y) du \right] \\ &= E \left[\lambda \int_0^{\tau_+} F(A - S_{u-}) du \right]. \end{aligned}$$

Gotovo sve trajektorije procesa (S_t) imaju najviše prebrojivo skokova, pa za gotovo sve $\omega \in \Omega$ vrijedi da su funkcije $t \mapsto F(A - S_{t-}(\omega))$ i $t \mapsto F(A - S_t(\omega))$ (g. s.) jednake s obzirom na Lebesgueovu mjeru. Stoga su i integrali takvih funkcija po svakom skupu jednaki, te uz oznaku $g(y) = F(A - y)$ primjenom leme 1.3.2 slijedi

$$\begin{aligned} H_+(A) &= E \left[\lambda \int_0^{\tau_+} F(A - S_t) dt \right] = E \left[\lambda \int_0^{\tau_+} g(S_t) dt \right] = \lambda \int_{-\infty}^0 g(y) dR_+(y) \\ &= \lambda \int_{-\infty}^0 F(A - y) dR_+(y). \end{aligned}$$

□

Dokaz teorema 1.3.1 . Prema lemi 1.3.3, mjera R_+ je absolutno neprekidna s gustoćom $r_+(y) = \frac{1}{c}1_{\{y>0\}}$. Stoga uz pomoć leme 1.3.4 imamo redom

$$\begin{aligned} H_+(A) &= \lambda \int_{-\infty}^0 F(A-y)r_+(y)dy = \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_A(z+y)r_+(y)dF(z)dy \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_A(z+y)r_+(y)dydF(z) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_A(v)r_+(v-z)dv dF(z) \\ &= \lambda \int_A \int_{\mathbb{R}} r_+(v-z)dv dF(z), \end{aligned}$$

gdje smo koristili Fubinijev teorem i u četvrtom koraku zamjenju varijable $v = z + y$. Zaključujemo

$$h_+(x) = \lambda \int_0^{+\infty} r_+(x-z)df(z) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} 1_{(x, +\infty)}(z)df(z) = \frac{\lambda}{c} \bar{F}(x).$$

□

Prema upravo dokazanom teoremu,

$$\begin{aligned} H(x) &= P(\mathcal{H}_1 \leq x \mid \tau_+ < \infty) = P(S_{\tau_+} \leq x \mid \tau_+ < \infty) = \frac{H_+(x)}{\psi(0)} \\ &= \frac{\lambda}{c\psi(0)} \int_0^x \bar{F}(t)dt. \end{aligned}$$

Uzmimo u gornjoj jednakosti $\lim_{x \rightarrow +\infty}$, što nam daje

$$1 = \frac{\lambda}{c\psi(0)} \mu_X,$$

odnosno

$$\psi(0) = \frac{\lambda \mu_X}{c}. \quad (1.24)$$

Označimo li sada s F_0 integrirani rep distribucije F , odnosno

$$F_0(x) = \frac{1}{\mu_X} \int_0^x \bar{F}(t)dt, \quad (1.25)$$

slijedi

$$H(x) = F_0(x), \quad (1.26)$$

odnosno distribucija prvog rekordnog uzleta je upravo integrirani rep distribucije skokova (zahtjeva za isplatom). Zanimljivo je uočiti da ona uopće ne ovisi o intenzitetu λ pristizanja zahtjeva. Napokon, i Pollaczek-Hinčinovu formulu (1.12) možemo izraziti preko parametara modela u obliku

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu_X}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu_X}{c}\right)^n \overline{F_0^{n*}}(u). \quad (1.27)$$

Za dokaz ovog rezultata (tj. teorema 1.3.1), kako smo vidjeli, ključna je bila formula kompenzacije (1.15). Ista nam pomaže da dobijemo i jači rezultat, koji će nam kasnije trebati.

Teorem 1.3.5 *Uz oznaku $P^{(0)}(\cdot) = P(\cdot \mid \tau_+ < \infty)$ vrijedi*

$$(i) \quad P^{(0)}(S_{\tau_+} > x, -S_{\tau_+^-} > y) = \overline{F_0}(x+y),$$

$$(ii) \quad P^{(0)}(S_{\tau_+} \leq x) = P^{(0)}(-S_{\tau_+^-} \leq x) = F_0(x),$$

$$(iii) \quad P^{(0)}(\Delta S_{\tau_+} \leq x) = \frac{1}{\mu_X} \int_0^x y dF(y),$$

(iv) *Neka je $U \sim U(0, 1)$ i nezavisna od ΔS_{τ_+} s obzirom na vjerojatnost $P^{(0)}$. Tada je*

$$(U \cdot \Delta S_{\tau_+}, (1-U) \cdot \Delta S_{\tau_+}) \stackrel{d}{=} (S_{\tau_+}, -S_{\tau_+^-})$$

s obzirom na $P^{(0)}$.

Dokaz. (i) Fiksirajmo $x, y > 0$ i primjenimo fomulu kompenzacije (1.15) iz teorema 1.2.8 na funkciju

$$f(u, v) = 1_{(-\infty, -y)}(u)1_{(x, +\infty)}(u+v).$$

Primjenom teorema o opcionalnom zaustavljanju kao u dokazu leme 1.3.4 slijedi

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{0 < u \leq \tau_+} 1_{(-\infty, -y)}(S_{u-})1_{(x, +\infty)}(S_u)1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta S_u) \right] \\ &= E \left[\int_0^{\tau_+} \int_{\mathbb{R}} 1_{(-\infty, -y)}(S_{u-})1_{(x, +\infty)}(S_{u-} + v)1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(v)d\nu(v)du \right]. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ljeva strana u (1.28) jednaka je $P(S_{\tau_+} > x, -S_{\tau_+} > y, \tau_+ < \infty)$, dok na desnoj uz $d\nu = \lambda dF$ imamo

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^{\tau_+} 1_{\{S_{u-} < -y\}} \int_x^{+\infty} 1_{\{S_{u-} - x > -v\}} d\nu(v) du \right] &= E \left[\lambda \int_0^{\tau_+} 1_{\{S_{u-} < -y\}} \int_x^{+\infty} 1_{\{S_{u-} - x > -v\}} dF(v) du \right] \\ &= E \left[\lambda \int_0^{\tau_+} 1_{\{S_{u-} < -y\}} F(\langle x, +\infty \rangle - S_{u-}) du \right]. \end{aligned}$$

Budući da gotovo sve trajektorije procesa (S_t) imaju najviše prebrojivo skokova, vrijedi da su slučajne varijable

$$\begin{aligned} \omega \mapsto \int_0^{\tau_+(\omega)} 1_{\{S_{u-} < -y\}}(\omega) F(\langle x, +\infty \rangle - S_{u-}(\omega)) du &\quad \text{i} \\ \omega \mapsto \int_0^{\tau_+(\omega)} 1_{\{S_u < -y\}}(\omega) F(\langle x, +\infty \rangle - S_u(\omega)) du \end{aligned}$$

(g. s.) jednake, pa uz $g(u) = F(\langle x, +\infty \rangle - u) 1_{(-\infty, -y)}(u)$ primjenom lema 1.3.2 i 1.3.3 slijedi

$$\begin{aligned} P(S_{\tau_+} > x, -S_{\tau_+} > y, \tau_+ < \infty) &= E \left[\lambda \int_0^{\tau_+} 1_{\{S_u < -y\}} F(\langle x, +\infty \rangle - S_u) du \right] \\ &= \lambda E \left[\int_0^{\tau_+} g(S_u) du \right] = \lambda \int_{-\infty}^0 g(u) dR_+(u) = \lambda \int_{-\infty}^{-y} F(\langle x, +\infty \rangle - u) dR_+(u) \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{-y} \int_{\mathbb{R}} 1_{\langle x, +\infty \rangle}(u+v) r_+(u) dF(v) du = \frac{\lambda}{c} \int_{-\infty}^{-y} \int_{x-u}^{+\infty} dF(v) du = \frac{\lambda}{c} \int_{-\infty}^{-y} \bar{F}(x-u) du \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_{x+y}^{+\infty} \bar{F}(u) du. \end{aligned}$$

Podijelimo li lijevu i desnu stranu gornje jednakosti s $\psi(0) = \lambda \mu_X / c$, tvrdnja (i) slijedi. (ii) slijedi direktno iz (i) uzimanjem $\lim_{y \searrow 0}$, odnosno $\lim_{x \searrow 0}$.

(iii) Upotreboom formule kompenzacije uz

$$f(u, v) = 1_{\langle 0, +\infty \rangle}(u+v) 1_{\langle 0, x \rangle}(v)$$

i teorema o opcionalmom zaustavljanju na isti način kao i u (i), te uz oznaku $g(u) = F(\langle -u, x \rangle)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
P(\Delta S_{\tau_+} \leq x, \tau_+ < \infty) &= E \left[\int_0^{\tau_+} \int_{\mathbb{R}} 1_{(0, +\infty)}(S_{u-} + v) 1_{(0, x]}(v) 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(v) d\nu(v) du \right] \\
&= \lambda E \left[\int_0^{\tau_+} F(\langle -S_{u-}, x \rangle) du \right] = \lambda E \left[\int_0^{\tau_+} F(\langle -S_u, x \rangle) du \right] = \lambda E \left[\int_0^{\tau_+} g(S_u) du \right] \\
&= \lambda \int_{-\infty}^0 g(u) dR_+(u) = \frac{\lambda}{c} \int_{-\infty}^0 F(\langle -u, x \rangle) du = \frac{\lambda}{c} \int_{-x}^0 F(\langle -u, x \rangle) du = \frac{\lambda}{c} \int_0^x F(\langle u, x \rangle) du \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^x \int_u^x dF(v) du = \frac{\lambda}{c} \int_0^x \int_0^v du dF(v) = \frac{\lambda}{c} \int_0^x v dF(v),
\end{aligned}$$

te tvrdnja ponovo slijedi dijeljenjem s $\psi(0)$.

(iv) slijedi direktnim računom pomoću (iii). \square

Na žalost, u općem slučaju formula (1.27) predstavlja i krajnji domet, tj. zatvorenu formu izraza za $\psi(u)$ nije moguće izračunati. Navedena relacija ipak ne dopušta eksplicitni izračun vjerojatnosti propasti u beskonačnom vremenu, dok je za vjerojatnost propasti u konačnom vremenu (vidi (1.4)) situacija još i gora, jer za sada nemamo nikakav rezultat. Ova činjenica usmjerava naše daljnje istraživanje i navodi nas na pokušaje da dobijemo asimptotske rezultate za tražene vjerojatnosti. Pokazuje se da rezultati takve vrste ključno ovise o analitičkim svojstvima repa distribucije zahtjeva \bar{F} .

Preciznije govoreći, ovise o brzini konvergencije $\bar{F}(x) \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow +\infty$. U prvom slučaju, kada je ona eksponencijalna, govorimo o *laganom ili eksponencijalno ograničenom repu* distribucije, odnosno o *slučaju malih zahtjeva*. U drugom slučaju, kada je ona sporija od bilo koje eksponencijalne funkcije, govorimo o *teškom repu* distribucije, odnosno *slučaju velikih zahtjeva*. Važnu klasu takvih distribucija čine takozvane *subeksponencijalne distribucije*. Pokazuje se da način na koji se događa propast (odnosno izgled trajektorije koja vodi u propast) ključno ovisi o takvom (asimptotskom) ponašanju repa distribucije zahtjeva.

Navedene slučajeve detaljno obrađujemo u nastavku teksta.

Poglavlje 2

Slučaj malih zahtjeva

U tekućem poglavlju pokušat ćemo dobiti odgovore na pitanja o vjerojatnostima propasti i izgledu trajektorija koje vode u propast u slučaju kada je rep distribucije zahtjeva eksponencijalno malen.

2.1 Cramér-Lundbergov koeficijent

Idući je rezultati osnovni. Dokaz tvrdnje (i) može se pronaći u Grandell [31], odjeljak 1.1, dok za (ii) i (iii) upućujemo na Embrechts et al. [19], teorem 1.2.2.

Teorem 2.1.1 (Cramér-Lundbergov teorem) *Uzmimo Cramér–Lundbergov model s uvjetom čistog profita $\rho > 0$ i pretpostavimo da postoji $\nu > 0$ takav da*

$$\int_0^\infty e^{\nu x} dF_0(x) = \frac{c}{\lambda \mu_X} = 1 + \rho. \quad (2.1)$$

Tada vrijede slijedeće tvrdnje

(i) Za sve $u \geq 0$,

$$\psi(u) \leq e^{-\nu u}. \quad (2.2)$$

(ii) Ako, povrh toga, vrijedi

$$\int_0^\infty x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx < \infty, \quad (2.3)$$

onda

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{\nu u} \psi(u) = C < \infty, \quad (2.4)$$

Ime	Rep \bar{F} ili gustoća f	Parametri
Eksponencijalna	$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0$
Gama	$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\alpha, \beta > 0$
Weibulova	$\bar{F}(x) = e^{-cx^\tau}$	$c > 0, \tau \geq 1$
Odsječena normalna	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	—

Tablica 2.1: Distribucije malih zahtjeva. Sve su koncentrirane na $(0, +\infty)$.

gdje je

$$C = \left[\frac{\nu}{\rho \mu_X} \int_0^\infty x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx \right]^{-1}. \quad (2.5)$$

(iii) U slučaju eksponencijalne distribucije $F(x) = 1 - e^{-x/\mu}$, (1.27) se svodi na

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} \exp \left\{ -\frac{\rho}{\mu(1+\rho)} u \right\}, \quad u \geq 0. \quad (2.6)$$

Sve distribucije zahtjeva F koje zadovoljavaju uvjet (2.1) nazivamo *eksponencijalnim* distribucijama ili, u kontekstu modela, *distribucijama malih zahtjeva*. Tipični predstavnici popisani su u tablici 2.1. Koeficijent $\nu > 0$ koji se pojavljuje u navedenom uvjetu nazivamo *Cramér-Lundbergov eksponent*, dok sam uvjet nazivamo *Cramér-Lundbergov uvjet*. Kada imamo proces rizika sa takvom distribucijom veličine zahtjeva, govorimo o *slučaju malih zahtjeva*. Kako vidimo, u tom slučaju teorem 2.1.1 nudi asimptotsko rješenje problema vjerojatnosti propasti u beskonačnom vremenu. Također, relacija (2.2) daje nam gornju granicu za svako $u > 0$, te istu nazivamo *gornja Cramér-Lundbergova granica*.

Ovdje se valja zapitati što točno leži iza uvjeta (2.1) i (2.3) iz teorema. Već prvi pogled otkriva da, u analitičkom smislu, Cramér-Lundbergov uvjet (2.1) u stvari opisuje svojstva *funkcije izvodnice momenata* distribucije rekordnih uzleta F_0 (vidi (1.25)).

Definicija 2.1.2 Funkcija izvodnica momenata *vjerojatnosne distribucije F* je funkcija $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} dF(x).$$

Ako je X slučajna varijabla sa distribucijom F , onda pišemo $\hat{f}(s) = E[e^{sX}]$.

Funkcija izvodnica momenata uvijek je definirana za $s \leq 0$. Cramér-Lundbergov uvjet traži da ona bude definirana na $(-\infty, \nu]$ za neko $\nu > 0$ te da isti ν bude rješenje jednadžbe $\hat{f}_0(\nu) = 1 + \rho$, gdje je \hat{f}_0 funkcija izvodnica momenata distribucije F_0 . U tom

Ime	Rep \bar{F} ili gustoća f	Parametri
Lognormalna	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\ln x - \mu)^2/(2\sigma^2)}$	$\mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0$
Paretova	$\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa+x}\right)^\alpha$	$\alpha, \kappa > 0$
Burrova	$\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa+x^\tau}\right)^\alpha$	$\alpha, \kappa, \tau > 0$
Benktanderova I	$\bar{F}(x) = (1 + 2(\beta/\alpha) \ln x) e^{-\beta(\ln x)^2 - (\alpha+1) \ln x}$	$\alpha, \beta > 0$
Benktanderova II	$\bar{F}(x) = e^{\alpha/\beta} x^{-(1-\beta)} e^{-\alpha x^\beta / \beta}$	$\alpha > 0, 0 < \beta < 1$
Weibulova	$\bar{F}(x) = e^{-cx^\tau}$	$c > 0, 0 < \tau < 1$
Loggama	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha, \beta > 0$

Tablica 2.2: Distribucije velikih zahtjeva. Loggama i Benktanderove su koncentrirane na $\langle 1, +\infty \rangle$, a ostale na $\langle 0, +\infty \rangle$.

smislu, sva moguća ponašanja od \hat{f}_0 dana su slikom 2.1. Pri tom γ označava lijevu apscisu konvergencije od \hat{f}_0 .

Egzistencija od ν nužno povlači i jedinstvenost. Budući da je F_0 koncentrirana na $\langle 0, +\infty \rangle$, uvjet (2.3) povlači

$$0 < \hat{f}_0'(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x e^{\nu x} dF_0(x) < +\infty.$$

Dakle \hat{f}_0 stogo raste prolazeći kroz točku $(\nu, 1+\rho)$, pa jedinstvenost slijedi zbog činjenice da je to konveksna funkcija. S druge strane, ni za jednu od distribucija zahtjeva iz tablice 2.2 Cramér-Lundbergov eksponent ne postoji, odnosno događa se treći slučaj iz slike 2.1. Ta činjenica ima svoju težinu zbog toga što proizlazi da upravo te distribucije odgovaraju stvarnim podacima o veličinama zahtjeva iz npr. portfelja požarnog osiguranja (za empirijske dokaze vidi Hogg i Klugman [34]), ali i iz mnogih drugih. Pri tom posebno naglasimo važnost Paretove distribucije, koju detaljno opisujemo u poglavljiju 3. Ona predstavlja i lijep primjer za treći slučaj iz slike 2.1, jer se odmah vidi da za $\alpha, \kappa > 0$ vrijedi

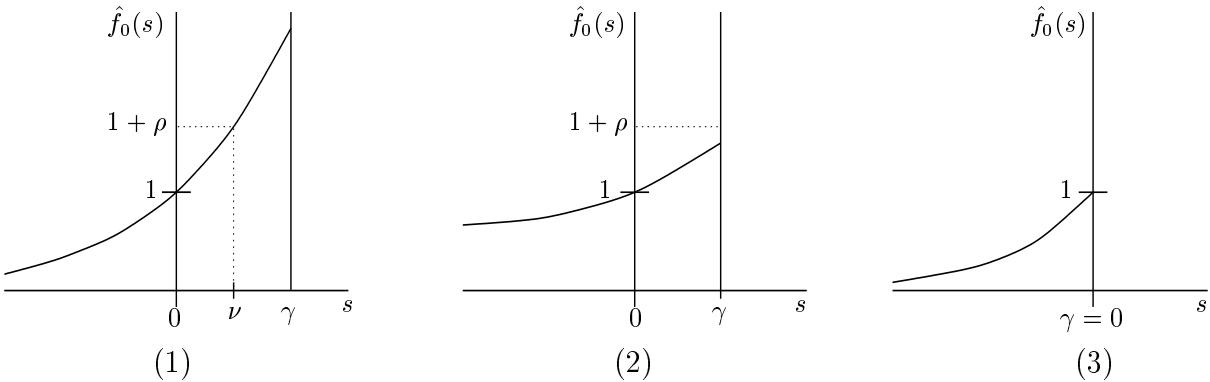
$$\hat{f}_0(s) = \frac{1}{\mu_X} \int_0^{+\infty} e^{sx} \kappa^\alpha (\kappa + x)^{-\alpha} dx = +\infty, \quad \forall s > 0.$$

Relacija (2.1) ujedno i opravdava naziv eksponencijalna distribucija. Iz nje lagano dobivamo $E[e^{\nu X_1}] = \frac{\lambda + c\nu}{\lambda} < +\infty$, te zbog

$$E[e^{\nu X_1}] \geq \int_{\{X_1 > x\}} e^{\nu X_1} dP \geq e^{\nu x} P(X_1 > x)$$

slijedi

$$\bar{F}(x) \leq e^{-\nu x} E[e^{\nu X_1}], \tag{2.7}$$



Slika 2.1: Mogući slučajevi s obzirom na Cramér-Lundbergov uvjet.

odnosno rep distribucije veličine zahtjeva je eksponencijalno malen.

Relacijama (2.1) i (2.3) možemo pristupiti i s točke gledišta vjerojatnosti, što nas dovodi do pojma *pridružene slučajne šetnje*, koju proučavamo u idućem odjeljku.

2.2 Pridružena slučajna šetnja

Iduća se opažanja nanovo temelje na diskretnom kosturu ($R_n; n \geq 0$) procesa ($S_t; t \geq 0$) (vidi (1.8)). Kako smo vidjeli, riječ je o slučajnoj šetnji s negativnim driftom, što proizlazi iz uvjeta čistog profitu (1.6). U tom svjetlu, laganim se računom vidi da su uvjeti (2.1) i (2.3) iz teorema 2.1.1 ekvivalentni uvjetima

$$\exists \nu > 0 \text{ takav da je } E[e^{\nu Z_1}] = 1 \text{ i } E[|Z_1| e^{\nu Z_1}] < \infty. \quad (2.8)$$

U nastavku teksta koncentriramo se na slučajnu šetnju $R_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ koja zadovoljava (2.8). Za funkciju distribucije od Z_1 koristimo oznaku G i prepostavljamo da je ona nearitmetička.

Prva jednakost iz (2.8) omogućava nam da definiramo tzv. *eksponencijalno nagnutu* funkciju distribucije G_ν relacijom

$$G_\nu(x) = \int_{-\infty}^x e^{\nu y} dG(y). \quad (2.9)$$

Definirajmo diskretnu filtraciju ($\mathcal{F}_n; n \geq 1$) s $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ i uzmimo standardnu oznaku $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n)$. Sada početni izmjerivi prostor (Ω, \mathcal{F}) na kojem je promatrana šetnja definirana možemo slobodno zamjeniti s $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$. U smislu istraživanja ponašanja naše šetnje time ne gubimo ništa jer \mathcal{F}_∞ sadrži sve događaje u kojima sudjeluju varijable (R_n) , odnosno (Z_n) . S druge strane, na \mathcal{F}_∞ možemo definirati novu vjerojatnosnu mjeru \tilde{P} , prvo na π -sistemu događaja

$$\{\{Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n\}; n \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{R}\}$$

relacijom

$$\tilde{P}(Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n G_\nu(x_i),$$

a zatim istu jedinstveno proširiti do najmanje sigma algebre generirane tim π -sistemom, što je upravo \mathcal{F}_∞ . Pod novom vjerojatnošću \tilde{P} imamo slučajnu šetnju s distribucijom prirasta G_ν za koju zbog (2.8) vrijedi $0 < \tilde{\mu}_Z < +\infty$, gdje je $\tilde{\mu}_Z = \tilde{E}[Z_1]$. Da bismo to lakše vidjeli, označimo s $\hat{z}(s)$ funkciju izvodnicu momenata od Z_1 . Prema prvoj relaciji iz (2.8) ona postoji na $[0, \nu]$ i $\hat{z}(0) = \hat{z}(\nu) = 1$. Druga relacija iz (2.8) garantira da je $\hat{z}'(\nu) = \int_{\mathbb{R}} ze^{\nu z} dG(z)$ konačno, odnosno $\tilde{E}[Z_1] = \hat{z}'(\nu)$ postoji. Napokon, \hat{z} je konveksna funkcija za koju je $\hat{z}'(0) = \int_{\mathbb{R}} zdG(z) = \frac{\lambda\mu_X - c}{\lambda} < 0$ zbog uvjeta čistog profita (1.6), pa zaključujemo $\tilde{E}[Z_1] = \hat{z}'(\nu) > 0$. Nova šetnja (s obzirom na distribuciju) ponaša se sasvim suprotno od stare u smislu da je drift promijenio predznak, te ju nazivamo *pridružena slučajna šetnja*. No iako se ponašanje potpuno promjenilo, veza između tih dviju slučajnih šetnji je vrlo uska.

Dok je u slučaju malih zahtjeva problem asimptotskog ponašanja vjerojatnosti propasti riješen relacijama (2.2) i (2.4) iz teorema 2.1.1, pridružena slučajna šetnja uvelike nam pomaže da odgovorimo na pitanje:

Uz veliki početni kapital u , kako izgledaju tipične trajektorije koje vode u propast?

Iz takvih razmatranja na kraju proizlazi i asimptotski rezultat za vjerojatnosti propasti u konačnom vremenu. Kako smo u uvodu i spomenuli, rezultate vrste iskazujemo u terminima konvergencije po $P^{(u)}$ -vjerojatnosti i po $P^{(u)}$ -distribuciji. Za $u \geq 0$, vjerojatnost $P^{(u)}$ jest vjerojatnost P gledana uz uvjet da se dogodi propast uz početni kapital u , tj.

$$P^{(u)}(\cdot) = P(\cdot \mid \tau(u) < \infty).$$

To je posve prirodan način za opis asymptotike događaja propasti, jer bilo koja familija događaja $(A(u); u \geq 0)$ takva da je $A(u) \subseteq \{\tau(u) < \infty\}$ po P -vjerojatnosti može konvergirati jedino prema 0.

Definicija 2.2.1 Za slučajne varijable $(A_u; u \geq 0)$ kažemo da

(i) po $P^{(u)}$ -vjerojatnosti konvergiraju prema slučajnoj varijabli A i pišemo $A_u \xrightarrow{P^{(u)}} A$ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)}(|A_u - A| \geq \varepsilon) = 0.$$

(ii) po $P^{(u)}$ -distribuciji konvergiraju prema \tilde{P} -distribuciji slučajne varijable A i pišemo $A_u \xrightarrow{d_u} A$ ako

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} E^{(u)}[f(A_u)] = \tilde{E}[f(A)],$$

gdje s $C_b(\mathbb{R})$ označavamo skup svih omeđenih neprekidnih funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Napomenimo da je u (ii) u stvari riječ upravo o slaboj konvergenciji pripadnih induciranih mjera, međutim gornja je notacija ipak nešto pogodnija za nastavak rasprave. Također, gornja se definicija može proširiti na slučajne elemente A_u , A s vrijednostima u nekom metričkom prostoru (S, d) .

Prvu vezu između dviju šetnji vidimo već u ponašanju konačno dimenzionalnih distribucija, što je opisano idućim rezultatom.

Propozicija 2.2.2 *Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)}(Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n) = \tilde{P}(Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n).$$

Dokaz. Uz $M = \sup_{n \geq 1} R_n$ definirajmo i $A = \{R_1 \leq u, \dots, R_n \leq u\}$. Slijedi

$$\begin{aligned} P^{(u)}(Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n) &= \frac{1}{\psi(u)} P(M > u, A, Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n) \\ &\quad + \frac{1}{\psi(u)} P(M > u, A^c, Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n) \\ &= (I + II). \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &P(M > u, A, Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n) \\ &= P\left(\sup_{k \geq n+1} R_k > u, R_1 \leq u, \dots, R_n \leq u, Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n\right) \\ &= P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \{R_k > u, R_1 \leq u, \dots, R_n \leq u, Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \{Z_{n+1} + \dots + Z_k > u - R_n, R_1 \leq u, \dots, R_n \leq u, Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n\}\right) \\ &= P\left(\sup_{k \geq n+1} (Z_{n+1} + \dots + Z_k) > u - R_n, R_1 \leq u, \dots, R_n \leq u, Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n\right). \end{aligned}$$

Zbog nezavisnosti prirasta slučajne šetnje vrijedi $\sup_{k \geq n+1} (Z_{n+1} + \dots + Z_k) \stackrel{d}{=} M$, pa imamo

$$I = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\psi(u - z_1 - \dots - z_n)}{\psi(u)} 1_{(-\infty, u]^n}(z_1, z_1 + z_2, \dots, z_1 + \dots + z_n) dG(z_1) \cdots dG(z_n).$$

Definiramo li familiju funkcija

$$g_u(z_1, \dots, z_n) = \frac{\psi(u - z_1 - \dots - z_n)}{\psi(u)} 1_{(-\infty, u]^n}(z_1, z_1 + z_2, \dots, z_1 + \dots + z_n), \quad u > 0,$$

uvjeti (2.8) preko relacije (2.4) iz teorema 2.1.1 povlače

$$\lim_{u \rightarrow \infty} g_u(z_1, \dots, z_n) = e^{\nu(z_1 + \dots + z_n)}, \quad \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Iz (2.4) slijedi da za $\varepsilon = C/2$ postoji $u_0(\varepsilon)$ takav da $\forall u \geq u_0(\varepsilon)$ vrijedi $e^{\nu u} \psi(u) > C/2$, pa pomoću (2.2) dobivamo

$$g_u(z_1, \dots, z_n) \leq \frac{e^{-\nu(u-z_1-\dots-z_n)}}{(C/2)e^{-\nu u}} + \frac{e^{-\nu(u-z_1-\dots-z_n)}}{\psi(u_0(\varepsilon))} \leq e^{\nu(z_1+\dots+z_n)} \left(\frac{2}{C} + \frac{1}{\psi(u_0(\varepsilon))} \right),$$

što je prema (2.8) integrabilno s obzirom na dG^n . Sada primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$I \longrightarrow \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} e^{\nu(z_1+\dots+z_n)} dG(z_1) \cdots dG(z_n) = \tilde{P}(Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n)$$

kada $u \rightarrow +\infty$. Nadalje, zbog $\{M > u\} \subseteq A^c$

$$II = \frac{1}{\psi(u)} P(Z_1 \leq x_1, \dots, Z_n \leq x_n, A^c) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{1_B(z_1, \dots, z_n)}{\psi(u)} dG(z_1) \cdots dG(z_n),$$

gdje je $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^n$ zadan s

$$B = \bigcup_{k=1}^n \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n; z_1 \leq u, z_1 + z_2 \leq u, \dots, z_1 + \dots + z_{k-1} \leq u, z_1 + \dots + z_k > u\}.$$

Zbog oblika skupa B podintegralna funkcija očigledno teži u 0 kada $u \rightarrow +\infty$ za sve $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Također je kao i ranije možemo dominirati integrabilnom funkcijom, pa još jednom primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi da $II \rightarrow 0$ kada $u \rightarrow +\infty$, čime je tvrdnja propozicije dokazana. \square

Označimo prvi trenutak prelaska šetnje preko nivoa u s $\tau_d(u)$, odnosno

$$\tau_d(u) = \inf\{n \geq 1; R_n > u\}. \quad (2.11)$$

Indeks d naglašava da je u pitanju diskretno vrijeme, kako ga ne bismo miješali sa kontinuiranim vremenom $\tau(u)$ definiranim u (1.3). Veza između navedenih vremena je oblika $\tau(u) = \sum_{i=1}^{\tau_d(u)} Y_i$, a uočimo i to da $\tau_d(u)$, $\tau(u) \rightarrow \infty P-$ (g. s.) kada $u \rightarrow +\infty$. Također, očigledno vrijedi $\{\tau_d(u) < \infty\} = \{\tau(u) < \infty\}$.

U nastavku, označimo s G_n empirijsku funkciju distribucije slučajnog uzorka Z_1, \dots, Z_n , tj.

$$G_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq x\}}. \quad (2.12)$$

Prema Glivenko-Cantellijevom teoremu

$$\|G_n - G\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |G_n(x) - G(x)| \longrightarrow 0 \quad P - (\text{g. s.}) \quad \text{kada } n \rightarrow \infty.$$

No takav rezultat ne znači mnogo u smislu ispitivanja ponašanja trajektorija koje vode u propast. Za odgovor na to pitanje trebali bismo promatrati $G_{\tau_d(u)}$ (jer je upravo to empirijska distribucija uzorka do trenutka propasti) i vidjeti čemu je ona bliska kada je početni kapital velik. Primjetimo da $G_{\tau_d(u)}$ jedino ima smisla promatrati s obzirom na $P^{(u)}$. Sada je odmah jasno da ne možemo dobiti potpuni analogon Glivenko-Cantellijevog teorema, jer u ovom slučaju $P^{(u)}$ -g. s. konvergenciju niti ne možemo smisleno definirati. Takvu vrst konvergencije mogli bismo jedino promatrati na skupu $\bigcap_{u \geq 0} \{\tau_d(u) < \infty\}$, no kod nas je isti P -zanemariv. Zato smo već na početku ograničeni na rezultate u smislu konvergencije po $P^{(u)}$ vjerojatnosti ili po $P^{(u)}$ distribuciji.

S obzirom na filtraciju $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$, $\tau_d(u)$ je vrijeme zaustavljanja pa shodno tome uvodimo standardnu oznaku $\mathcal{F}_{\tau_d(u)}$ za sigma algebru koja se sastoji od događaja A sa svojstvom $A \cap \{\tau_d(u) = n\} \in \mathcal{F}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Uvedimo i oznaku $B(u)$ za iznos za koji šetnja prvi put preskoči nivo u , tj.

$$B(u) = R_{\tau_d(u)} - u. \quad (2.13)$$

Direktno iz relacije $dG_\nu(z) = e^{\nu z} dG(z)$ slijedi

Lema 2.2.3 Za proizvoljnu Borelovu funkciju $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ za koju navedena očekivanja postoje

$$\begin{aligned} E[g(Z_1, \dots, Z_n)] &= \tilde{E}[e^{-\nu R_n} g(Z_1, \dots, Z_n)] \quad \text{i} \\ \tilde{E}[g(Z_1, \dots, Z_n)] &= E[e^{\nu R_n} g(Z_1, \dots, Z_n)]. \end{aligned}$$

Lema 2.2.4 Za proizvoljan događaj $A_u \in \mathcal{F}_{\tau_d(u)}$ vrijedi

$$\begin{aligned} P(A_u, \tau_d(u) < \infty) &= e^{-\nu u} \tilde{E}[e^{-\nu B(u)} 1_{A_u}] \quad \text{i} \\ P^{(u)}(A_u) &= \frac{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)} 1_{A_u}]}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]}. \end{aligned}$$

Dokaz. Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ imamo $A_u \cap \{\tau_d(u) = n\} \in \mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$, što znači da postoji $B_{u,n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ takav da je $A_u \cap \{\tau_d(u) = n\} = (Z_1, \dots, Z_n)^{-1}(B_{u,n})$. Na događaju $\{\tau_d(u) = n\}$ vrijedi relacija $R_n = u + B(u)$, pa prema lemi 2.2.3 slijedi

$$P(A_u, \tau_d(u) < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} P((Z_1, \dots, Z_n) \in B_{u,n}) = \sum_{n=1}^{\infty} E[1_{B_{u,n}}(Z_1, \dots, Z_n)]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{E} [e^{-\nu R_n} 1_{B_{u,n}}(Z_1, \dots, Z_n)] \\
&= e^{-\nu u} \tilde{E} \left[e^{-\nu B(u)} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_{u,n}}(Z_1, \dots, Z_n) \right] \\
&= e^{-\nu u} \tilde{E} [e^{-\nu B(u)} 1_{A_u}],
\end{aligned} \tag{2.14}$$

čime dobivamo prvu traženu relaciju. Uvrstimo li u (2.14) $A_u = \Omega$ i podijelimo (2.14) time, dobivamo i drugu. \square

Neka je \tilde{H} distribucija rekordnih uzleta s obzirom na vjerojatnost \tilde{P} , odnosno $\tilde{P}(\mathcal{H}_1 \leq x \mid \tau_+ < \infty)$. Pitanje koje se postavlja jest: ima li ona očekivanje? Odgovor nam daje idući rezultat, preuzet iz Feller [22], odjeljak XII.2, teorem 2.

Teorem 2.2.5 Neka je $(R_n; n \geq 0)$, $R_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ proizvoljna slučajna šetnja koja kreće iz 0. Tada vrijedi

- (i) ako je $E[Z_1] < 0$, distribucije od τ_+ i \mathcal{H}_1 su defektne,
- (ii) ako je $E[Z_1] = 0$ distribucije od τ_+ i \mathcal{H}_1 su nedefektne i $E[\tau_+] = +\infty$,
- (iii) ako je $0 < E[Z_1] < +\infty$ distribucije od τ_+ i \mathcal{H}_1 su nedefektne, imaju konačna očekivanja i vrijedi Waldova jednakost

$$E[\mathcal{H}_1] = E[\tau_+]E[Z_1].$$

- (iv) Označimo li s $t(s)$ funkciju izvodnicu od τ_+ , vrijedi

$$\ln \frac{1}{1 - t(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(R_n > 0) \frac{s^n}{n}.$$

Već smo ranije uočili da za pridruženu slučajnu šetnju vrijedi $0 < \tilde{E}[Z_1] < +\infty$ (vidi (2.8)), pa slobodno možemo uvesti označu $\tilde{h} = \tilde{E}[\mathcal{H}_1]$ jer je prema tvrdnji (iii) gornjeg teorema traženo očekivanje konačno. Iskoristimo također priliku da uočimo kako je, prema (iv), distribucija od τ_+ u općem slučaju potpuno određena vjerojatnostima $P(R_n > 0)$.

Konvergencije po \tilde{P} -vjerojatnosti i po \tilde{P} -distribuciji standardno su definirane, u smislu da potonja predstavlja slabu konvergenciju mjera induciranih pomoću \tilde{P} -vjerojatnosti. Pri tome koristimo oznake $\xrightarrow{\tilde{P}}$ i $\xrightarrow{\tilde{d}}$ redom.

Lema 2.2.6 $B(u) \xrightarrow{\tilde{d}} B(\infty)$ kada $u \rightarrow +\infty$, gdje je $B(\infty)$ slučajna varijabla s distribucijom danom s

$$P(B(\infty) \leq x) = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^x (1 - \tilde{H}(t)) dt.$$

Dokaz. Bazira se na rezultatima teorije obnavljanja, za detaljniju raspravu upućujemo na Feller [22], poglavljje XI. Slično kao kod korolara 1.1.5 (odnosno teorema 1.1.3), i s obzirom na \tilde{P} niz rekordnih uzleta ($\mathcal{H}_n; n \geq 0$) čini čisti proces obnavljanja, s tim što ovoga puta on nije tranzijentan. Označimo $K(u) = \max\{n \geq 0; \mathcal{H}_n \leq u\}$ i definirajmo $Q(u, \xi) = \tilde{P}(B(u) \leq \xi) = \tilde{P}(R_{\tau_d(u)} - u \leq \xi)$. Zbog $R_{\tau_d(u)} = \mathcal{H}_{K(u)+1}$

$$\begin{aligned} Q(u, \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}(\mathcal{H}_{n+1} - u \leq \xi, K(u) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}(\mathcal{H}_n + (\mathcal{H}_{n+1} - \mathcal{H}_n) - u \leq \xi, \mathcal{H}_n \leq u, \mathcal{H}_{n+1} - \mathcal{H}_n > u - \mathcal{H}_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^u \tilde{P}(u - x < \mathcal{H}_{n+1} - \mathcal{H}_n \leq u + \xi - x) d\tilde{H}^{n*}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^u (\tilde{H}(u + \xi - x) - \tilde{H}(u - x)) d\tilde{H}^{n*}(x). \end{aligned}$$

Uz standardnu oznaku $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{H}^{n*}(t)$ (U je dobro definirana opća funkcija distribucije čiju pripadnu mjeru nazivamo mjera obnavljanja) slijedi

$$Q(u, \xi) = \int_0^u (\tilde{H}(u + \xi - x) - \tilde{H}(u - x)) dU(x).$$

Stavimo li $z_\xi(t) = \tilde{H}(t + \xi) - \tilde{H}(t)$ imamo

$$Q(u, \xi) = U * z_\xi(u). \quad (2.15)$$

Međutim gornja funkcija predstavlja jedinstveno lokalno ograničeno rješenje jednadžbe

$$Q(u, \xi) = z_\xi(u) + \tilde{H} * Q(u, \xi)$$

(vidi Feller [22], odjeljak XI.1), pa pomoću Smithovog glavnog teorema obnavljanja zaključujemo

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} Q(u, \xi) = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^{+\infty} z_\xi(t) dt.$$

Sada računamo

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} Q(u, \xi) = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^{+\infty} z_\xi(t) dt = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^{+\infty} \int_t^{t+\xi} d\tilde{H}(s) dt = \frac{1}{\tilde{h}} \left[\int_0^\xi \int_t^\xi d\tilde{H}(s) dt + \int_\xi^{+\infty} \int_s^{+\infty} dt d\tilde{H}(s) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\tilde{h}} \left[\int_0^\xi (\tilde{H}(\xi) - \tilde{H}(t)) dt + \int_\xi^{+\infty} \xi d\tilde{H}(s) \right] \\
&= \frac{1}{\tilde{h}} \left[\int_0^\xi (\tilde{H}(\xi) - \tilde{H}(t)) dt + \int_0^\xi (1 - \tilde{H}(\xi)) ds \right] \\
&= \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^\xi (1 - \tilde{H}(t)) dt.
\end{aligned}$$

□

Ova nam lema daje i još jednu reprezentaciju konstante C iz teorema 2.1.1. Naime, pomoću leme 2.2.4 uz $A_u = \Omega$ imamo

$$C = \lim_{u \rightarrow \infty} e^{\nu u} P(\tau_d(u) < \infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{E}[e^{-\nu B(u)}] = E[e^{-\nu B(\infty)}], \quad (2.16)$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili činjenicu da je funkcija $g(x) = e^{-\nu x}$ neprekidna i omeđena. Također, lema 2.2.6 omogućava nam da dokažemo i idući rezultat koji će predstavljati važan alat za istraživanje konvergencije po $P^{(u)}$ -vjerojatnosti i $P^{(u)}$ -distribuciji objekata koji su od interesa.

Lema 2.2.7 *Ako su V, V_u $\mathcal{F}_{\tau_d(u)}$ -izmjernice slučajne varijable za koje vrijedi $V_u \xrightarrow{\tilde{P}} V$, onda $V_u \xrightarrow{P^{(u)}} V$.*

Dokaz. Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ primjenom leme 2.2.4 imamo

$$P^{(u)}(|V_u - V| \geq \varepsilon) = \frac{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)} \mathbf{1}_{\{|V_u - V| \geq \varepsilon\}}]}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]} \leq \frac{\tilde{P}(|V_u - V| \geq \varepsilon)}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]}.$$

Uzmememo li u gornjoj relaciji $\limsup_{u \rightarrow +\infty}$, prema (2.16) slijedi

$$\limsup_{u \rightarrow +\infty} P^{(u)}(|V_u - V| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{C} \limsup_{u \rightarrow +\infty} \tilde{P}(|V_u - V| \geq \varepsilon) = 0.$$

□

Lema 2.2.8 *Kada $u \rightarrow +\infty$ vrijedi*

$$(i) \frac{\tau_d(u)}{u} \xrightarrow{\tilde{P}} \frac{1}{\tilde{\mu}_Z}$$

$$(ii) \frac{\tilde{E}[\tau_d(u)]}{u} \rightarrow \frac{1}{\tilde{\mu}_Z}$$

$$(iii) \frac{\tau_d(u)}{u} \xrightarrow{P^{(u)}} \frac{1}{\tilde{\mu}_Z}$$

Dokaz. Prva tvrdnja, čak i uz (g. s.) konvergenciju, slijedi iz jakog zakona velikih brojeva, činjenice $\tau_d(u) \rightarrow +\infty \tilde{P}$ -g. s.) kada $u \rightarrow +\infty$ i nejednakosti

$$\frac{R_{\tau_d(u)-1}}{\tau_d(u)} \leq \frac{u}{\tau_d(u)} < \frac{R_{\tau_d(u)}}{\tau_d(u)}.$$

Prema lemi 2.2.7 (i) \Rightarrow (iii), pa je preostalo dokazati (ii). Kako smo primjetili u dokazu leme 2.2.6, s obzirom na \tilde{P} niz rekordnih uzleta ($\mathcal{H}_n; n \geq 0$) čini čisti proces obnavljanja s nedefektnom distribucijom prirasta. Uz označu $K(u) = \max\{n \geq 0; \mathcal{H}_n \leq u\}$ (dakle je $K(u) + 1$ ukupni broj obnavljanja u intervalu $[0, u]$ jer računamo i obnavljanje u 0), elementarni teorem obnavljanja daje

$$\frac{\tilde{E}[K(u)]}{u} \longrightarrow \frac{1}{\tilde{h}}. \quad (2.17)$$

Sada računamo

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\mathcal{H}_{K(u)+1}] &= \tilde{E}\left[\sum_{i=1}^{K(u)+1} (\mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1})\right] = \tilde{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} (\mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1})1_{\{i-1 \leq K(u)\}}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{E}[(\mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1})1_{\{i-1 \leq K(u)\}}], \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku u iskoristili Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji. Zbog $\{i-1 \leq K(u)\} = \{\mathcal{H}_{i-1} \leq u\}$ i činjenice da je $((\mathcal{H}_k - \mathcal{H}_{k-1}); k \geq 1)$ s obzirom na \tilde{P} niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli, slijedi da su varijable $\mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1}$ i $1_{\{i-1 \leq K(u)\}}$ nezavisne, pa je

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\mathcal{H}_{K(u)+1}] &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{E}[\mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i-1}] \tilde{E}[1_{\{i-1 \leq K(u)\}}] = \tilde{E}[\mathcal{H}_1] \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{P}(K(u) + 1 > i - 1) \\ &= \tilde{E}[\mathcal{H}_1] \tilde{E}[K(u) + 1]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pri tome opći rezultati teorije obnavljanja garantiraju konačnost sva tri očekivanja. Primjetimo i to da smo upravo dokazali i Waldovu jednakost iz teorema 2.2.5 (iii).

Na sličan se način pokaže jednakost

$$\tilde{E}[R_{\tau_d(u)}] = \tilde{E}[Z_1] \tilde{E}[\tau_d(u)], \quad (2.19)$$

samo što se ovaj put koristi Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji što nam omogućava činjenica $\tilde{E}[|Z_1|] < \infty$ (vidi (2.8)). Zbog $\mathcal{H}_{K(u)+1} = R_{\tau_d(u)}$ slijedi da su i tu

sva tri očekivanja konačna, pa kombiniranjem (2.18) i (2.19) dobivamo

$$\tilde{E}[\tau_d(u)] = \frac{\tilde{h}}{\tilde{\mu}_Z} \tilde{E}[K(u) + 1].$$

Tvrđnja (ii) sada proizlazi direktno iz (2.17). \square

Propozicija 2.2.9 Za empirijsku funkciju distribucije G_n definiranu relacijom (2.12) vrijedi

$$\|G_{\tau_d(u)} - G_\nu\| \xrightarrow{P^{(u)}} 0.$$

Dokaz. Prema Glivenko-Cantellijevom teoremu

$$\|G_n - G_\nu\| \longrightarrow 0 \quad \tilde{P} - (\text{g. s.}).$$

Zbog $\tau_d(u) \rightarrow +\infty$ kada $u \rightarrow +\infty$ \tilde{P} - (g. s.), prema lemi 2.2.7 dovoljno je vidjeti da su slučajne varijable $\|G_{\tau_d(u)} - G_\nu\|$ $\mathcal{F}_{\tau_d(u)}$ -izmjerive. No to lako vidimo jer je za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ zbog neprekidnosti zdesna $\|G_n - G_\nu\| = \sup_{t \in \mathbb{Q}} |G_n(t, \cdot) - G_\nu(t)|$ \mathcal{F}_n -izmjeriva slučajna varijabla kao supremum niza \mathcal{F}_n -izmjerivih, pa tražena tvrdnja slijedi iz definicije $\mathcal{F}_{\tau_d(u)}$ -izmjerivosti. \square

Gornja propozicija već sama sugerira na koji se način događa propast. Grubo govoreći, kaže da je za veliki u empirijska $P^{(u)}$ -distribucija slučajnog uzorka $Z_1, \dots, Z_{\tau_d(u)}$ bliska \tilde{P} -distribuciji prirasta. Već ovdje se nameće sumnja da bi slična veza mogla postojati i na nivou trajektorija, pa se odavde usmjeravamo na istraživanje sličnih rezultata na nivou procesa. Taj put vodi na ispitivanje konvergencije slučajnih procesa po distribuciji, odnosno slabe konvergencije vjerojatnosnih mjera. Osnovne definicije i rezultate dajemo u idućem odjeljku.

2.3 Slaba konvergencija vjerojatnosnih mjera

U izlaganjima iz ovog dijela pratimo pristup iz Billingsley [12], gdje se mogu pronaći i dokazi većine rezultata koje navodimo, osim ako se eksplicitno ne navodi neki drugi izvor.

2.3.1 Preliminarije

Tokom cijelog izlaganja u ovom odjeljku sa S označavamo metrički prostor, a sa \mathcal{S} sigma algebru generiranu svim otvorenim skupovima u S . Za skup svih neprekidnih omeđenih realnih funkcija na S koristimo oznaku $C_b(S)$.

Definicija 2.3.1 Ako vjerojatnosne mjere P_n, P na (S, \mathcal{S}) zadovoljavaju

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP \quad \forall f \in C_b(S),$$

kažemo da niz (P_n) slabo konvergira prema P i pišemo $P_n \Rightarrow P$.

Teorem 2.3.2 Ako su P, Q vjerojatnosne mjere na (S, \mathcal{S}) sa svojstvom

$$\int_S f dP = \int_S f dQ \quad \forall f \in C_b(S),$$

onda $P \equiv Q$.

Za dokaz vidi Billingsley [12], teorem 1.3.

Direktna je posljedica gornjeg rezultata da, budući da brojevi $\int f dP$ potpuno određuju vjerojatnosnu mjeru P , niz (P_n) ne može istodobno konvergirati prema dva slaba limesa, odnosno slab je limes jedinstven. Primjetimo i to da slaba konvergencija ovisi samo o topologiji na S , a ne i metrički koja ju generira.

Idući teorem daje nam koristan alat u obliku četiri karakterizacije slabe konvergencije. Pri tom *skupom neprekidnosti* od P nazivamo svaki skup $A \in \mathcal{S}$ čiji rub ∂A zadovoljava $P(\partial A) = 0$. Teorem je preuzet iz Billingsley [12], teorem 2.1.

Teorem 2.3.3 Neka su P_n, P vjerojatnosne mjere na (S, \mathcal{S}) . Iduće su tvrdnje ekvivalentne:

- (i) $P_n \Rightarrow P$,
- (ii) $\lim_n \int f dP_n = \int f dP \quad \forall$ omeđenu uniformno neprekidnu realnu f ,
- (iii) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F) \quad \forall F$ zatvoren,
- (iv) $\liminf_n P_n(G) \geq P(G) \quad \forall G$ otvoren,
- (v) $\lim_n P_n(A) = P(A) \quad \forall$ skup A neprekidnosti od P .

Podfamiliju \mathcal{T} od \mathcal{S} nazivamo *familijom koja određuje konvergenciju* ako konvergencija $P_n(A) \rightarrow P(A)$ za sve skupove $A \in \mathcal{T}$ neprekidnosti od P nužno povlači slabu konvergenciju $P_n \Rightarrow P$. *Određujućom familijom* nazivamo podfamiliju \mathcal{T} od \mathcal{S} za koju vrijedi da su svake dvije vjerojatnosne mjere P i Q koje se podudaraju na \mathcal{T} nužno identične. Primjer takve familije je svaki π -sistem koji generira \mathcal{S} . Zbog jedinstvenosti limesa u \mathbb{R} slijedi da je svaka familija koja određuje konvergenciju ujedno i određujuća familija. Primjer familije koja određuje konvergenciju u slučaju kada je S separabilan daje nam rezultat iz Billingsley [12], str. 14.

Teorem 2.3.4 U separabilnom metričkom prostoru S konačni presjeci otvorenih kugli formiraju familiju koja određuje konvergenciju.

Određujuće familije i familije koje određuju konvergenciju promatrali smo na nivou izmjerivih skupova, što nam je omogućio dio (v) teorema 2.3.3. Usmjerimo li se na početnu definiciju slabe konvergencije, slične se familije mogu definirati i na nivou integrabilnih realnih funkcija (npr. izmjerivih omeđenih), gdje je primjer familije koja određuje konvergenciju $C_b(S)$, a zbog teorema 2.3.2 to je ujedno i primjer za određujuću familiju. O takvom će pristupu nešto više riječi biti kasnije.

2.3.2 Konvergencija po distribuciji

Teorija slabe konvergencije može se prevesti na teoriju konvergencije po distribuciji. Iako posljednja ne uključuje značajnije nove ideje, za naše je potrebe pripadna terminologija pogodnija, a i sami rezultati poprimaju nešto kompaktniju formu.

Neka je X preslikavanje s nekog vjerojatnosnog prostora (Ω, \mathcal{F}, P) u metrički prostor S . Ako je ono izmjerivo u smislu da je $X^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{F}$, nazivamo ga *slučajnim elementom*. Svakom takvom pridružujemo njegovu *distribuciju*, odnosno vjerojatnosnu mjeru P^X na (S, \mathcal{S}) definiranu relacijom

$$P^X(A) = P(X^{-1}(A)) = P\{\omega : X(\omega) \in A\} = P(X \in A), \quad A \in \mathcal{S}. \quad (2.20)$$

Gornja se konstrukcija može i poopćiti. Ako je h izmjerivo preslikavanje između izmjerivih prostora (Ω, \mathcal{F}) i (Ω', \mathcal{F}') i P vjerojatnosna mjeru na (Ω, \mathcal{F}) , možemo definirati vjerojatnosnu mjeru P^h na (Ω', \mathcal{F}') relacijom $P^h(A') = P(h^{-1}(A')) = P(h \in A')$, $A' \in \mathcal{F}'$ kao gore. Za mjeru P^h kažemo da je dobivena *povlačenjem* mjerne P na (Ω', \mathcal{F}') pomoću h . Ako je dodatno f izmjeriva realna funkcija na Ω' , onda je $f \circ h$ izmjeriva realna funkcija na Ω i vrijedi

Teorem 2.3.5 (Teorem o zamjeni varijable) *Pod uvjetima kao gore, f je integrabilna s obzirom na P^h ako i samo ako je $f \circ h$ integrabilna s obzirom na P . U tom slučaju vrijedi*

$$\int_{h^{-1}(A')} (f \circ h) dP = \int_A f dP^h, \quad \forall A' \in \mathcal{F}'.$$

Dokaz ovog rezultata može se pronaći u Halmos [33], str. 163.

U situaciji kada je X slučajni element s vrijednostima u metričkom prostoru S i f izmjeriva realna funkcija na S , kao specijalni slučaj gornjeg teorema dobivamo relaciju

$$\int_{\Omega} f(X) dP = \int_S f dP^X, \quad (2.21)$$

gdje ili ne postoji nijedan od gornjih integrala, ili oba postoje i jednaki su. Prevedena u termine teorije vjerojatnosti, gornja relacija prelazi u

$$E[f(X)] = \int_S f dP^X. \quad (2.22)$$

Neka su $((\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n); n \in \mathbb{N})$ i (Ω, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostori na kojima počivaju slučajni elementi $(X_n; n \in \mathbb{N})$ i X redom.

Definicija 2.3.6 *Kažemo da niz slučajnih elemenata (X_n) konvergira po d_n -distribuciji slučajnom elementu X i pišemo $X_n \xrightarrow{d_n} X$ ako slabo konvergiraju pripadne distribucije, tj. ako $P_n^{X_n} \Rightarrow P^X$.*

Ovdje je još jednom riječ o slaboj konvergenciji pripadnih induciranih mjera, ali su nam gornje oznake pogodnije. One nam kažu koje slučajne elemente promatramo i pomoću kojih vjerojatnosti induciramo odgovarajuće distribucije.

Gornja definicija očito nema smisla ako prostori vrijednosti S svih slučajnih elemenata i pripadne sigma algebre nisu jednaki (mi ćemo uzimati uvjek istu topologiju na S , što garantira jednakost sigma algebri). Prema gornjoj definiciji, a s obzirom na formulu zamjene varijable (2.22), odmah možemo napisati

$$X_n \xrightarrow{d_n} X \iff E_n[f(X_n)] \rightarrow E[f(X)] \quad \forall f \in C_b(S).$$

Sada slobodno možemo preformulirati teorem 2.3.3 na pogodniji oblik. Skupove $A \in S$ za koje vrijedi $P^X(\partial A) = 0$ sada nazivamo skupovima neprekidnosti od X .

Teorem 2.3.7 *Neka su X_n , X slučajni elementi s vrijednostima u (S, \mathcal{S}) . Iduće su tvrdnje ekvivalentne:*

- (i) $X_n \xrightarrow{d_n} X$,
- (ii) $\lim_n E_n[f(X_n)] = E[f(X)] \quad \forall$ omeđenu uniformno neprekidnu realnu f ,
- (iii) $\limsup_n P_n(X_n \in F) \leq P(X \in F) \quad \forall F$ zatvoren,
- (iv) $\liminf_n P_n(X_n \in G) \geq P(X \in G) \quad \forall G$ otvoren,
- (v) $\lim_n P_n(X_n \in A) = P(X \in A) \quad \forall$ skup A neprekidnosti od X .

2.3.3 Produktni prostori

Neka je $S = S' \times S''$ produkt separabilnih metričkih prostora S' i S'' (čime je i sam S separabilan). Poznata je činjenica da su u tom slučaju Borelove sigma algebre tih prostora povezane relacijom $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \times \mathcal{S}''$, odnosno

$$\mathcal{S} = \sigma\{A' \times A''; A' \in \mathcal{S}', A'' \in \mathcal{S}''\}.$$

Marginalnim distribucijama vjerojatnosne mjere P na (S, \mathcal{S}) zovemo mjere $P'(A') = P(A' \times S'')$, $A' \in \mathcal{S}'$ i $P''(A'') = P(S' \times A'')$, $A'' \in \mathcal{S}''$. Pojam marginalnih distribucija ima svoju važnost u okviru slabe konvergencije stoga što se ona može karakterizirati na nivou skupova neprekidnosti marginalnih distribucija, tj. imamo (vidi Billingsley [12], teorem 3.1)

Teorem 2.3.8 *Neka su P_n , P vjerojatnosne mjere na produktu separabilnih metričkih prostora $S = S' \times S''$. Tada $P_n \Rightarrow P$ ako i samo ako $P_n(A' \times A'') \rightarrow P(A' \times A'')$ za proizvoljan izbor skupova neprekidnosti A' od P' i A'' od P'' .*

Produktnom mjerom mjera P' i P'' na separabilnom $S = S' \times S''$ zovemo jedinstvenu mjeru $P = P' \times P''$ definiranu na (S, \mathcal{S}) relacijom $P(A' \times A'') = P'(A')P''(A'')$. Kod konvergencije produktnih mjera imamo pojednostavljenje gornjeg kriterija.

Teorem 2.3.9 *Ako je S separabilan, $P'_n \times P''_n \Rightarrow P' \times P''$ ako i samo ako $P'_n \Rightarrow P'$ i $P''_n \Rightarrow P''$.*

Pretpostavimo da su X' i X'' slučajni elementi na istom izmjerivom prostoru (Ω, \mathcal{F}) , s vrijednostima u separabilnim metričkim prostorima S' i S'' redom. Zbog

$$(X', X'')^{-1}(\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'') = \sigma\{(X', X'')^{-1}(A' \times A''); A' \in \mathcal{S}', A'' \in \mathcal{S}''\} \subseteq \mathcal{F}$$

slijedi da je (X', X'') izmjerivo preslikavanje s vrijednostima u $S' \times S''$. U slučaju $S' = S''$, $d'(x', y')$ je neprekidna realna funkcija na $S' \times S'$, te je tada $d'(X', X'')$ slučajna varijabla.

2.3.4 Konvergencija po vjerojatnosti

Kao i konvergenciju po distribuciji, i konvergenciju po vjerojatnosti možemo preslikati sa slučajnih varijabli na slučajne elemente. Ako su (X_n) , X slučajni elementi definirani na istom vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) s vrijednostima u separabilnom metričkom prostoru (S, d) , kažemo da niz X_n konvergira prema X po vjerojatnosti i pišemo $X_n \xrightarrow{P} X$ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_n P(d(X_n, X) \geq \varepsilon) = 0.$$

Međutim, ovakva se definicija može i ponešto promijeniti. Zadržimo gornju situaciju, ali uz to dodatno uvedimo niz (P_n) vjerojatnoscnih mjera na (Ω, \mathcal{F}) . Ideja jest da n -ti član niza $d(X_n, X)$ promatramo baš uz vjerojatnost P_n (odnosno X_n i X smjestimo na $(\Omega, \mathcal{F}, P_n)$), gdje takav koncept odgovara konvergenciji po $P^{(u)}$ -vjerojatnosti koju smo ranije spominjali. U nastavku zadržavamo pretpostavku o separabilnosti prostora S .

Definicija 2.3.10 *Uz gornje pretpostavke, kažemo da niz (X_n) konvergira prema X po P_n -vjerojatnosti i pišemo $X_n \xrightarrow{P_n} X$ ako*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_n P_n(d(X_n, X) \geq \varepsilon) = 0.$$

Time smo malo odstupili od pristupa iz Billingsleya [12], pa ćemo rezultate koji uključuju konvergenciju po P_n -vjerojatnosti direktno dokazivati. Prvi je takav rezultat

Propozicija 2.3.11 *Za proizvoljnu konstantu $a \in S$ vrijedi $X_n \xrightarrow{P_n} a$ ako i samo ako $X_n \xrightarrow{d_n} a$.*

Dokaz. Za dokaz dovoljnosti uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Označimo li sa $K(a, \varepsilon)$ otvorenu kuglu u S s centrom u a i radijusom ε , slijedi da je $K(a, \varepsilon)^c$ skup neprekidnosti od P^a te imamo

$$P_n(d(X_n, a) \geq \varepsilon) = P_n(X_n \in K(a, \varepsilon)^c) \rightarrow P^a(K(a, \varepsilon)^c) = 0.$$

Za nužnost, uzmimo neki skup A neprekidnosti od a . Budući da mora biti $P^a(\partial A) = 0$, slijedi $a \notin \partial A$, odnosno $a \in \text{int}A$ ili $a \notin \overline{A}$. U prvom slučaju sigurno postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom $K(a, \varepsilon) \subset \text{int}A$, te imamo

$$P_n(X_n \in A) \geq P_n(X_n \in K(a, \varepsilon)) \rightarrow 1 = P^a(A).$$

U drugom slučaju je sigurno $\varepsilon := d(a, \overline{A}) > 0$, pa zaključujemo

$$P_n(X_n \in A) \leq P_n(d(X_n, a) \geq \varepsilon) \rightarrow 0 = P^a(A).$$

□

Također vrijedi

Teorem 2.3.12 Ako $X_n \xrightarrow{d_n} X$ i $d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P_n} 0$ onda $Y_n \xrightarrow{d_n} X$.

Dokaz. Neka je F zatvoren skup u S i $\varepsilon > 0$. Definiramo li $F_\varepsilon = \{x \in S; d(x, F) \leq \varepsilon\}$, imamo

$$P_n(Y_n \in F) \leq P_n(d(X_n, Y_n) \geq \varepsilon) + P_n(X_n \in F_\varepsilon).$$

Budući da je F_ε i sam zatvoren, pretpostavke teorema i teorem 2.3.7 (iii) povlače

$$\limsup_n P_n(Y_n \in F) \leq \limsup_n P_n(X_n \in F_\varepsilon) \leq P(X \in F_\varepsilon).$$

Pustimo li $\varepsilon \downarrow 0$, zbog zatvorenosti od F i neprekidnosti vjerojatnosti na padajuće nizove događaja vrijedi $F_\varepsilon \downarrow F$. Tvrđnja slijedi ponovnom upotrebom teorema 2.3.7 (iii). □

U idućem rezultatu pretpostavljamo da za svaki n X'_n i X''_n leže na istom vjerojatnoscnom prostoru, te da X' , X'_n poprimaju vrijednosti u separabilnom S' , a X''_n u separabilnom S'' .

Teorem 2.3.13 Neka je $a'' \in S''$. Ako $X'_n \xrightarrow{d_n} X'$ i $X''_n \xrightarrow{P_n} a''$ onda $(X'_n, X''_n) \xrightarrow{d_n} (X', a'')$.

Dokaz. Prema teoremu 2.3.8, dovoljno je pokazati

$$P_n(X'_n \in A', X''_n \in A'') \rightarrow P(X' \in A', a'' \in A'')$$

za proizvoljan izbor skupova neprekidnosti A' od X' i A'' od a'' . Stoga odaberimo takve A' i A'' (dakle je svakako $a'' \notin \partial A''$). Ako je $a'' \in A''$ onda $P_n(X''_n \notin A'') \rightarrow 0$, pa zbog pretpostavke $X'_n \xrightarrow{d_n} X'$ i $P_n(X'_n \in A') \leq P_n(X'_n \in A', X''_n \in A'') + P_n(X''_n \notin A'')$ slijedi

$$P_n(X'_n \in A') - P_n(X''_n \notin A'') \leq P_n(X'_n \in A', X''_n \in A'') \leq P_n(X'_n \in A'),$$

odnosno

$$P_n(X'_n \in A', X''_n \in A'') \rightarrow P(X' \in A') = P(X' \in A', a'' \in A'').$$

Ako $a'' \notin A''$, imamo

$$P_n(X'_n \in A', X''_n \in A'') \leq P_n(X''_n \in A'') \rightarrow 0 = P(X' \in A', a'' \in A'').$$

□

2.3.5 Teorem o neprekidnom preslikavanju

Već smo ranije vidjeli da, ako je $h : S \rightarrow S'$ preslikavanje između metričkih prostora, svaka vjerojatnosna mjera P na (S, \mathcal{S}) povlačenjem pomoću h inducira vjerojatnosnu mjeru P^h na (S', \mathcal{S}') definiranu s $P^h(A') = P(h^{-1}(A'))$. Naš je cilj u tom smislu istražiti uvjete pod kojima $P_n \Rightarrow P$ povlači $P_n^h \Rightarrow P^h$. Jedan očigledan uvjet takve vrste jest da h bude neprekidna. U tom slučaju, za proizvoljnu $f \in C_b(S')$ vrijedi $f \circ h \in C_b(S)$, pa iz definicije slabe konvergencije slijedi

$$\int_S (f \circ h) dP_n \rightarrow \int_S (f \circ h) dP,$$

odakle prema teoremu o zamjeni varijable (teorem 2.3.5) imamo

$$\int_{S'} f dP_n^h \rightarrow \int_{S'} f dP^h,$$

odnosno $P_n^h \Rightarrow P^h$. Međutim, taj uvjet možemo dodatno oslabiti, a da krajnji rezultat još uvijek vrijedi.

Prepostavimo samo da je h izmjeriva, te s D_h označimo podskup od S svih diskontinuiteta od h .

Lema 2.3.14 *Skup diskontinuiteta D_h proizvoljnog preslikavanja h između dvaju metričkih prostora je izmjeriv.*

Dokaz. S d i d' označimo metrike na S i S' redom, te za $\varepsilon, \delta > 0$ definirajmo $A_{\varepsilon, \delta}$ kao skup svih $x \in S$ za koje postoji točka $y, z \in S$ sa svojstvom $d(x, y) < \delta, d(x, z) < \delta$ i $d'(h(y), h(z)) \geq \varepsilon$. Tada je $A_{\varepsilon, \delta}$ otvoren skup. Da to dokazemo, uzimimo $x_0 \in A_{\varepsilon, \delta}$, odaberimo pripadne y_0, z_0 iz definicije i stavimo $r_1 = \max\{d(x_0, y_0), d(x_0, z_0)\}$. Zbog $r_1 < \delta$ vrijedi $r := \delta - r_1 > 0$. Sada za proizvoljan $x \in K(x_0, r)$ slijedi $d(x, x_0) < r \Rightarrow d(x, y_0), d(x, z_0) < r + r_1 < \delta$ i $d'(f(y_0), f(z_0)) \geq \varepsilon$, odnosno $K(x_0, r) \subseteq A_{\varepsilon, \delta}$ po definiciji. Nadalje, vrijedi

$$D_h = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+} \bigcap_{\delta \in \mathbb{Q}_+} A_{\varepsilon, \delta}.$$

Da to pokažemo, uočimo da gornja jednakost u stvari kaže

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \text{ sa svojstvom da } \forall \delta \in \mathbb{Q}_+ \exists y, z \in K(x, \delta) \text{ takvi da je } d'(f(y), f(z)) \geq \varepsilon,$$

te se lagano vidi da je to ekvivalentno izjavi

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \text{ sa svojstvom da } \forall \delta \in \mathbb{Q}_+ \exists y \in K(x, \delta) \text{ takav da je } d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

Stoga zaključujemo da je D_h izmjeriv kao kombinacija unija i presjeka od prebrojivo izmjerivih skupova. \square

Teorem 2.3.15 (Teorem o neprekidnom preslikavanju) *Ako $P_n \Rightarrow P$ i $P(D_h) = 0$, onda $P_n^h \Rightarrow P^h$.*

Dokaz. Koristimo teorem 2.3.7 (iii), odnosno dokazujemo da za $F' \subseteq S'$ zatvoren vrijedi

$$\limsup_n P_n^h(F') \leq P^h(F').$$

Zbog $P_n \Rightarrow P$ imamo

$$\limsup_n P_n(h^{-1}(F')) \leq \limsup_n P_n(\overline{h^{-1}(F')}) \leq P(\overline{h^{-1}(F')}).$$

Stoga je dovoljno dokazati $P(\overline{h^{-1}(F')}) = P(h^{-1}(F'))$, što slijedi direktno iz činjenice $\overline{h^{-1}(F')} \subseteq h^{-1}(F') \cup D_h$. Da bismo pak to vidjeli, uzimimo $x \in \overline{h^{-1}(F')}$. Tada postoji niz $(x_n) \subset h^{-1}(F')$ sa svojstvom $x_n \rightarrow x$. Ako x nije točka diskontinuiteta od h , onda $h(x_n) \rightarrow h(x)$, te zbog $(h(x_n)) \subset F'$ zatvoren slijedi $x \in h^{-1}(F')$. \square

2.3.6 Prostor $D[a, b]$

Označimo s $D[a, b]$ prostor svih funkcija $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ koje su neprekidne zdesna i imaju limes slijeva u svakoj točki $t \in [a, b]$. Naš je cilj definirati metriku na tom prostoru uz koju će isti biti separabilan (i potpun), a da ta metrika istovremeno predstavlja poopćenje sup metrike na $C[a, b]$ (koji je uz nju potpun i separabilan). I ovdje pratimo pristup iz Billingsley [12], odjeljak 14, gdje se mogu pronaći dokazi svih tvrdnji koje samo navodimo.

Neka je Λ skup svih rastućih neprekidnih bijekcija $\lambda : [a, b] \rightarrow [a, b]$ (dakle $\lambda a = a$ i $\lambda b = b$). Definiramo funkciju $d : D[a, b] \times D[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ relacijom

$$d(x, y) = \inf\{\varepsilon > 0; \exists \lambda \in \Lambda \text{ takva da je } \sup_{t \in [a, b]} |\lambda t - t| \leq \varepsilon \text{ i } \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(\lambda t)| \leq \varepsilon\}, \quad (2.23)$$

te se pokazuje da je to metrika. Osnovna ideja vezana uz nju sastoji se u tome da dopuštamo da se bliske funkcije malo razlikuju i po x , a ne samo po y osi. Za konvergenciju u metrici d koristimo oznaku $\xrightarrow{d[a, b]}$. Idući rezultat predstavlja korisnu karakterizaciju opisane konvergencije.

Lema 2.3.16 $x_n \xrightarrow{d^{[a, b]}} x$ ako i samo ako postoji niz $(\lambda_n) \subset \Lambda$ sa svojstvom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} |x_n(\lambda_n t) - x(t)| = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} |\lambda_n t - t| = 0,$$

odnosno ako i samo ako su konvergencije $x_n \circ \lambda_n \rightarrow x$ i $\lambda_n \rightarrow id$ uniformne po t .

Za $x \in D[a, b]$ i $T_0 \subseteq [a, b]$ definiramo oscilaciju od x na T_0 relacijom

$$w_x(T_0) = \sup_{s, t \in T_0} |x(s) - x(t)|. \quad (2.24)$$

U Billingsley [12], str. 110 je dokazana

Lema 2.3.17 Za proizvoljne $x \in D[a, b]$ i $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ intervala $[a, b]$ za koju vrijedi

$$w_x([t_{i-1}, t_i]) < \varepsilon \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Direktno iz gornje leme dobivamo da je svaka funkcija $x \in D[a, b]$ ujedno i ograničena, pa i ovdje ima smisla promatrati sup metriku.

Propozicija 2.3.18 $(D[a, b], d)$ je separabilan metrički prostor.

Dokaz. Dokazat ćemo da je prebrojiv gust skup u $D[a, b]$

$$A^{[a, b]} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{[a, b]},$$

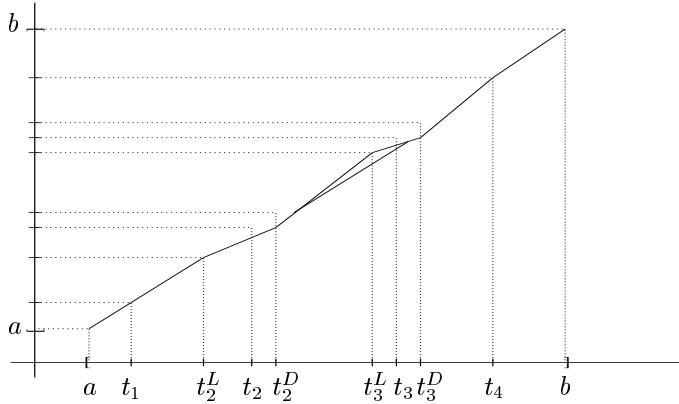
gdje se $A_n^{[a, b]}$ sastoji od svih funkcija koje na podintervalima oblika $[a + \frac{i-1}{n}(b-a), a + \frac{i}{n}(b-a)]$ imaju racionalne konstantne vrijednosti i racionalnu vrijednost u b . $A^{[a, b]}$ je očigledno prebrojiv kao prebrojiva unija prebrojivih skupova, pa još treba vidjeti da je gust. Uzmimo stoga $x \in D[a, b]$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljne i neka je $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ subdivizija sa svojstvom $w_x([t_{i-1}, t_i]) < \frac{\varepsilon}{2} \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Označimo s T skup svih točaka iz $[a, b]$ oblika $a + \frac{k}{n}(b-a)$ za neko $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Gornju subdiviziju profinjujemo na idući način: za svaku njezinu točku $t_i \notin T$ dodajemo dvije točke $t_i^L, t_i^D \in T$ odabrane tako da bude

$$t_{i-1} < t_i^L < t_i < t_i^D < t_{i+1} \quad \text{i} \quad t_i^D - t_i^L < \varepsilon.$$

Na taj način dobivamo novu subdiviziju $\{t_i, t_i^L, t_i^D; i = 1, \dots, r\}$, gdje u slučaju $t_i \in T$ podrazumijevamo $t_i = t_i^L = t_i^D$. Zatim definiramo $\lambda \in \Lambda$ po dijelovima linearu na način

$$\lambda t_i^L = t_i^L, \quad \lambda t_i^D = t_i$$

(čime je svaka točka $t_i \in T$ iz početne subdivizije fiksna za λ).

Slika 2.2: Graf od λ

Tada je očigledno graf od λ poligonalna linija i vrijedi $\lambda \in \Lambda$ (vidi sliku 2.2). Također vrijedi $|\lambda t - t| < \varepsilon$, $\forall t \in [a, b]$, jer se najveće razlike postižu upravo u točkama loma t_i^D , gdje imamo $|\lambda t_i^D - t_i^D| = t_i^D - t_i < \varepsilon$ (ostale točke loma su fiksne). Zatim iz aktualne subdivizije ispuštimo sve točke $t_i \notin T$ i preimenujmo subdiviziju koju time dobivamo u $a = s_0 < s_1 < \dots < s_{r'} = b$. Definiramo x_ε s

$$t \in [s_{i-1}, s_i], \quad x_\varepsilon(t) := f_i, \quad f_i \in \mathbb{Q} \text{ takav da } |f_i - x(s_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

i $x_\varepsilon(b) := f_{r'}$, $f_{r'} \in \mathbb{Q}$ takav da $|f_{r'} - x(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Naposlijetku, za $t \in [s_{i-1}, s_i]$, zbog činjenice da se λt i s_{i-1} nalaze u nekom intervalu $[t_{j-1}, t_j]$ početne subdivizije, imamo

$$|x_\varepsilon(t) - x(\lambda t)| \leq |x_\varepsilon(t) - x(s_{i-1})| + |x(s_{i-1}) - x(\lambda t)| < \frac{\varepsilon}{2} + w_x([t_{j-1}, t_j]) = \varepsilon.$$

Dakle je $d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$, gdje je $x_\varepsilon \in A^{[a, b]}$ očigledno. \square

Međutim, pokazuje se da metrika d ne čini $D[a, b]$ potpunim. Da bismo dobili i to svojstvo potrebno ju je malo modificirati. Reducirajmo skup rastućih bijekcija Λ na podskup Λ_0 sa svojstvom

$$\lambda \in \Lambda_0 \iff \|\lambda\| = \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda s - \lambda t}{s - t} \right| < \infty,$$

gdje su $s, t \in [a, b]$. Tada definiramo novu metriku d_0 na $D[a, b]$ s

$$d_0(x, y) = \inf\{\varepsilon > 0; \exists \lambda \in \Lambda_0 \text{ takva da je } \|\lambda\| \leq \varepsilon \text{ i } \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(\lambda t)| \leq \varepsilon\}. \quad (2.25)$$

Da je gornja funkcija dobro definirana metrika slijedi iz relacija

$$\|\lambda^{-1}\| = \|\lambda\| \quad \text{i} \quad \|\lambda_1 \lambda_2\| \leq \|\lambda_1\| + \|\lambda_2\|, \quad (2.26)$$

koje se lagano pokažu. Dodatni zahtjev kod metrike d_0 u odnosu na d jest što razlike po x osi dodatno kontroliramo Lipschitzovim funkcijama s konstantom bliskom 1, tj. grubo govoreći ne dopuštamo da se funkcija λ značajno razlikuje od funkcije identiteta na proizvoljno malom intervalu. Uz takav dodatni zahtjev, $(D[a, b], d_0)$ postaje potpun metrički prostor, što je lijepo opisano u Billingsley [12], str. 112-116. Također je sačuvana i separabilnost, što ćemo i dokazati odmah nakon što se upoznamo s jednom izvedenicom oscilacije funkcije $x \in D[a, b]$.

Za $x \in D([a, b])$ i $0 < \delta < 1$ definiramo

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{0 < i \leq r} w_x[t_{i-1}, t_i], \quad (2.27)$$

gdje infimum uzimamo po svim subdivizijama intervala $[a, b]$ koje zadovoljavaju $t_i - t_{i-1} > \delta$, $i = 1, 2, \dots, r$. Tada je lema 2.3.17 ekvivalentna

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w'_x(\delta) = 0. \quad (2.28)$$

Teorem 2.3.19 *Metrike d i d_0 na $D[a, b]$ su topološki ekvivalentne.*

Dokaz. Neka su $x, y \in D[a, b]$ takvi da je $d_0(x, y) < \varepsilon$, gdje je $\varepsilon < \frac{1}{4}$. Odaberimo $\lambda \in \Lambda_0$ sa svojstvom $\|\lambda\| \leq \varepsilon$ i $\sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(\lambda t)| \leq \varepsilon$. Za funkciju prirodnog logaritma vrijedi $\log(1 + s) \geq s - s^2$ za $|s| \leq \frac{1}{2}$ i $\log(1 + s) \leq s$ za $s > -1$, odakle zbog odabira ε dobivamo $\log(1 + 2\varepsilon) > \varepsilon$ i $\log(1 - 2\varepsilon) < -\varepsilon$. Upotrebom činjenice $\lambda a = a$ imamo

$$\log(1 - 2\varepsilon) < -\varepsilon \leq \log \frac{\lambda t - a}{t - a} \leq \varepsilon < \log(1 + 2\varepsilon) \quad \forall t \in D[a, b].$$

Odatle $\forall t \in D[a, b]$ imamo redom

$$1 - 2\varepsilon \leq \frac{\lambda t - a}{t - a} \leq 1 + 2\varepsilon \Rightarrow -2\varepsilon \leq \frac{\lambda t - t}{t - a} \leq 2\varepsilon \Rightarrow -2\varepsilon(t - a) \leq \lambda t - t \leq 2\varepsilon(t - a),$$

te zaključujemo $\sup_{t \in [a, b]} |\lambda t - t| \leq \sup_{t \in [a, b]} 2(t - a)\varepsilon = 2(b - a)\varepsilon$. Dobili smo

$$d_0(x, y) < \frac{1}{4} \Rightarrow d(x, y) \leq 2(b - a)d_0(x, y). \quad (2.29)$$

(U slučaju kada je $2(b - a) > 1$, inače $d \leq d_0$.) Uzmemo li proizvoljnu d -otvorenu kuglu $K_d(x, r)$ i $r_0 < \min\{\frac{r}{2(b-a)}, \frac{1}{4}\}$, vidimo $K_{d_0}(x, r_0) \subseteq K_d(x, r)$ jer za proizvoljan $y \in K_{d_0}(x, r_0)$

$$d_0(x, y) < r_0 < \frac{1}{4} \Rightarrow d(x, y) < 2(b - a)d_0(x, y) < 2(b - a)r_0 < r.$$

Da bismo vidjeli obrat, dovoljno je dokazati

$$\varepsilon < \frac{1}{4}, \quad d(x, y) < \varepsilon^2 \Rightarrow d_0(x, y) \leq 4\varepsilon + w'_x(\varepsilon). \quad (2.30)$$

U tom slučaju za proizvoljnu d_0 -otvorenu kuglu $K_{d_0}(x, r_0)$ zbog $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w'_x(\varepsilon) = 0$ možemo odabratи $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ takav da $4\varepsilon + w'_x(\varepsilon) < r_0$. Zato uz r odabran tako da bude $r < \varepsilon^2$ slijedi $K_d(x, r) \subseteq K_{d_0}(x, r_0)$, jer za proizvoljan $y \in K_d(x, r)$

$$d(x, y) < r < \varepsilon^2 \Rightarrow d_0(x, y) < 4\varepsilon + w'_x(\varepsilon) < r_0.$$

Da dokažemo (2.30), uzmimo $\varepsilon < \frac{1}{4}$ i $\mu \in \Lambda$ sa svojstvom

$$\sup_{t \in [a, b]} |\mu t - t| \leq \varepsilon^2 \quad i \quad \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(\mu t)| = \sup_{t \in [a, b]} |x(\mu^{-1}t) - y(t)| \leq \varepsilon^2.$$

Zatim odaberimo subdiviziju $\{t_0, \dots, t_r\}$ intervala $[a, b]$ takvu da je $\forall i \quad t_i - t_{i-1} > \varepsilon$ i $w_x[t_{i-1}, t_i] < w'_x(\varepsilon) + \varepsilon$. (To možemo po definiciji w'_x , tj. po definiciji infimuma.) Pomoću nje konstruiramo $\lambda \in \Lambda$ na način $\lambda t_i = \mu t_i$ za $i = 0, 1, \dots, r$ i linearno na podintervalima $[t_{i-1}, t_i]$. Zbog $\mu^{-1}\lambda t_i = t_i$ i činjenice da je $\mu^{-1}\lambda$ rastuća slijedi da t i $\mu^{-1}\lambda t$ uvijek leže u istom podintervalu, pa za proizvoljan t vrijedi

$$|x(t) - y(\lambda t)| \leq |x(t) - x(\mu^{-1}\lambda t)| + |x(\mu^{-1}\lambda t) - y(\lambda t)| \leq w'_x(\varepsilon) + \varepsilon + \varepsilon^2 \leq w'_x(\varepsilon) + 4\varepsilon.$$

Stoga je, da bismo dokazali teorem, dovoljno još vidjeti $\|\lambda\| < 4\varepsilon$. Zbog $\lambda t_i = \mu t_i$

$$|(\lambda t_i - \lambda t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})| \leq |\mu t_i - t_i| + |\mu t_{i-1} - t_{i-1}| \leq 2\varepsilon^2 \leq 2\varepsilon(t_{i-1} - t_{i-1}),$$

odakle slijedi

$$1 - 2\varepsilon \leq \frac{\lambda t_i - \lambda t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \leq 1 + 2\varepsilon \quad \forall i.$$

Graf od λ je poligonalna linija između točaka $(t_i, \lambda t_i)$, s pripadnim koeficijentima smjera k_i , i ni jedna spojnica točaka $(s, \lambda s)$ i $(t, \lambda t)$ ne može imati koeficijent smjera veći od najvećeg k_i , niti manji od najmanjeg (vidi sliku 2.2). Stoga iz gornje nejednakosti slijedi da za sve $s, t \in [a, b]$

$$1 - 2\varepsilon \leq \frac{\lambda t - \lambda s}{t - s} \leq 1 + 2\varepsilon,$$

odakle uz pomoć svojstava prirodnog logaritma kao i na početku dokaza dobivamo

$$-4\varepsilon < \log(1 - 2\varepsilon) \leq \log \frac{\lambda t - \lambda s}{t - s} \leq \log(1 + 2\varepsilon) < 4\varepsilon,$$

odnosno $\|\lambda\| < 4\varepsilon$. □

Iako nam je metrika d_0 pogodnija zbog potpunosti, nećemo posve napustiti niti d jer je ona pak pogodnija u tehničkom smislu. To se dade primjetiti već u idućem rezultatu.

Korolar 2.3.20 *Neka je niz $(x_n) \subset D[a, b]$ i $x \in C[a, b]$. Tada $x_n \xrightarrow{d_0^{[a, b]}} x$ ako i samo ako $x_n \rightarrow x$ u sup metriци.*

Dokaz. Dovoljnost je očigledna (uzmemmo $\lambda = id$), pa je dovoljno dokazati nužnost. Prema (2.29) slijedi $x_n \xrightarrow{d[a, b]} x$, a odatle prema lemi 2.3.16 slijedi da postoji niz $(\lambda_n) \subset \Lambda$ sa svojstvom $\lim_n x_n(\lambda_n t) = x(t)$ i $\lim_n \lambda_n t = t$, uniformno po $t \in [a, b]$. Sada računamo

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| &\leq \sup_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(\lambda_n^{-1}t)| + \sup_{t \in [a, b]} |x(\lambda_n^{-1}t) - x(t)| \\ &= \sup_{t \in [a, b]} |x_n(\lambda_n t) - x(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - x(\lambda_n t)|, \end{aligned}$$

te tvrdnja slijedi uzimanjem limesa obiju strana. \square

Označimo s \mathcal{D} najmanju sigma algebru koja sadrži topologiju generiranu metrikom d_0 . S druge strane, za $n \in \mathbb{N}$ i $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$ definiramo projekcije $\pi_{t_1, \dots, t_n} : D[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ s

$$\pi_{t_1, \dots, t_n}(x) = (x(t_1), \dots, x(t_n)). \quad (2.31)$$

Prema Billingsley [12], teorem 14.5 vrijedi da je \mathcal{D} jednaka najmanjoj sigma algebri generiranoj svim projekcijama gornjeg oblika, tj.

$$\mathcal{D} = \sigma\{\pi_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) ; n \in \mathbb{N}, a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b\}.$$

No na dokazu ovom prilikom nećemo inzistirati, budući da cijelu pripadnu konstrukciju još općenitije razrađujemo u idućoj točki, kod prostora $D(\mathbb{R})$.

2.3.7 Prostor $D[a, b]$

U ovoj ćemo točki promatrati jednu izvedenicu metričkog prostora $(D[a, b], d_0)$ koja nam je potrebna kako bismo navedeni prostor proširili na funkcije definirane na cijelom \mathbb{R} . Označimo s $D[a, b]$ skup svih funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ koje su neprekidne zdesna, imaju limes slijeva u svakoj točki, i za koje postoji lijevi limes u b . U tom slučaju $D[a, b]$ nije ništa drugo do skup svih restrikcija na $[a, b]$ funkcija iz $D[a, b]$. Zbog postojanja limesa u b za takve funkcije i dalje vrijedi lema 2.3.17. Na opisanom prostoru definiramo funkciju $d : D[a, b] \times D[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ gotovo jednako kao i u (2.23), jedino što izraz $\sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(\lambda t)| \leq \varepsilon$ mijenjamo s $\sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(\lambda t)| \leq \varepsilon$. Ponovo se pokazuje da je takva funkcija metrika uz koju imamo separabilan metrički prostor. Pri dokazu te činjenice, skupove $A_n^{[a, b]}$ iz dokaza propozicije 2.3.18 dovoljno je pretvoriti u skupove $A_n^{[a, b]}$ koji se sastoje od odgovarajućih restrikcija. Vrijedi i odgovarajući analogon leme 2.3.16. Bijekcije iz skupa Λ nemamo potrebe redefinirati.

Potom $D[a, b]$ snabdjevamo metrikom d_0 , ponovo tako da u (2.25) supremum uzimamo po zdesna otvorenom intervalu. Još jednom ta je metrika topološki ekvivalentna d i čini $D[a, b]$ potpunim (pri čemu dokaz teorema 2.3.19 možemo direktno prekopirati). Također vrijedi i korolar 2.3.20, gdje je prostor $C[a, b]$ opet dobiven restrikcijama iz $C[a, b]$.

Na funkcijama iz $D[a, b]$ očito možemo promatrati oba tipa metrika (što ovisi o domeni koju odaberemo u određenom trenutku). U oznakama, situaciju ćemo naglašavati na

samim metrikama, pa ćemo tako pisati $d^{[a, b]}$, $d_0(x, y)_{[a, b]}$ itd. Budući da je veza između metrika očito dana s

$$d(x, y)_{[a, b]} = \max\{d(x, y)_{[a, b]}, |x(b) - y(b)|\}$$

i

$$d_0(x, y)_{[a, b]} = \max\{d_0(x, y)_{[a, b]}, |x(b) - y(b)|\},$$

vidimo da svaka konvergencija u $D[a, b]$ vrijedi i na restrikcijama.

2.3.8 Prostor $D(\mathbb{R})$

S $D(\mathbb{R})$ označimo prostor svih realnih funkcija $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koje su neprekidne zdesna i imaju limes slijeva u svakoj točki $t \in \mathbb{R}$. Njega snabdjevamo metrikom d_0 zadanom

$$d_0(x, y) = \sum_{K=1}^{+\infty} 2^{-K} (d_0^{[-K, K]}(x, y) \wedge 1), \quad x, y \in D(\mathbb{R}). \quad (2.32)$$

Pri tome suma ide po svim $K \in \mathbb{N}$, \wedge označava manji od dva broja, dok $d_0^{[-K, K]}(x, y)$ označava udaljenost u $D[-K, K]$ restrikcija $x|_{[-K, K]}$ i $y|_{[-K, K]}$, kako je i opisano u prethodnoj točki. Zbog jasnoće, ubuduće ćemo prostor (interval) na koji mislimo uključivati i u oznake, pa ćemo tako pisati $d_0^{[-K, K]}$ ili $d_0(x, y)_{[-K, K]}$, $\Lambda^{[-K, K]}$, $\Lambda_0^{[-K, K]}$, $w'_x(\varepsilon)_{[-K, K]}$ itd.

Odmah se vidi da je gornja metrika dobro definirana, te se pitamo u kojoj su mjeri naslijedena svojstva metrika $d_0^{[-K, K]}$ od kojih je sastavljena. Prvi odgovor daje nam idući teorem.

Teorem 2.3.21 ($D(\mathbb{R})$, d_0) je potpun i separabilan metrički prostor.

Dokaz. Za dokaz potpunosti služimo se pomoćnom tvrdnjom koja se lagano iščitava iz dokaza korolara 2.3.20: ako je (x_n) niz u $D[a, b]$ koji konvergira prema nekom $x \in D[a, b]$, onda vrijedi $x_n(t) \rightarrow x(t)$ za svaku točku t neprekidnosti od x . Također, iz definicije metrike na $D[a, b]$ slijedi $x_n(a) \rightarrow x(a)$.

Potpunost sada slijedi direktno iz činjenice da su $(D[-K, K], d_0^{[-K, K]})$ potpuni metrički prostori. Uzmimo Cauchyjev niz (x_n) u $D(\mathbb{R})$. Tada za proizvoljan $K \in \mathbb{N}$ restrikcije na $[-K, K]$ čine Cauchyjev niz koji zbog potpunosti od $D[-K, K]$ konvergira prema nekoj funkciji $x^K \in D[-K, K]$. Pri tome za $K_1 \leq K_2$ vrijedi da se x^{K_1} i x^{K_2} (zbog jedinstvenosti limesa u \mathbb{R}) podudaraju u svim zajedničkim točkama neprekidnosti od x^{K_1} i x^{K_2} koje se nalaze u $[-K_1, K_1]$. Kako je taj skup gust, a funkcije koje uspoređujemo su neprekidne zdesna, slijedi da se one podudaraju na $[-K_1, K_1]$. Stoga je preslikavanje $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadano s $x(t) = x^K(t)$, gdje $K \in \mathbb{N}$ zadovoljava $t \in [-K, K]$ dobro definirano, neprekidno zdesna i očigledno vrijedi $x_n \xrightarrow{d_0} x$.

Točno ovdje i leži razlog zbog kojeg smo u definiciji metrike na $D(\mathbb{R})$ koristili metrike na poluočvorenim intervalima. U slučaju da odaberemo zatvorene intervale, kontrapri-mjerom se može pokazati da $D(\mathbb{R})$ više nije potpun. Problem se pojavljuje u točkama oblika $t = K \in \mathbb{N}$ u kojima funkcija kojoj konvergira niz (x_n) općenito nije neprekidna zdesna.

Što se separabilnosti tiče, tvrdimo da je gust prebrojiv skup zadan s

$$A = \bigcup_{K=1}^{\infty} A_{\mathbb{R}}^{[-K, K]},$$

gdje je $A_{\mathbb{R}}^{[-K, K]}$ skup svih funkcija koje dobijemo tako da funkcije iz skupa $A^{[-K, K]}$ koji je gust prebrojiv za $D[-K, K]$ (vidi dokaz propozicije 2.3.18 i komentar na strani 51) proširimo konstantom lijevo i desno na način

$$x(t) = x(-K) \text{ za } t \leq -K \text{ i } x(t) = x(K-) \text{ za } t \geq K. \quad (2.33)$$

Uzmimo stoga $x \in D(\mathbb{R})$ i $\delta > 0$ proizvoljne. Odaberimo K_0 tako da $\sum_{K=K_0+1}^{\infty} 2^{-K} < \delta$ i $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi $\varepsilon < \frac{1}{16}$, $\sqrt{\varepsilon} < \delta$ i $w'_x(\sqrt{\varepsilon})_{[-K, K]} < \delta$ za sve $K \leq K_0$ (što možemo zbog $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w'_x(\varepsilon)_{[-K, K]} = 0$ za proizvoljan K). Prema lemi 2.3.17, možemo odabratи subdiviziju $-K_0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r = K_0$ u kojoj se nalaze i točke $\pm 1, \dots, \pm(K_0 - 1)$, takvu da vrijedi

$$w_x[t_{i-1}, t_i] < \varepsilon, \quad i = 0, \dots, r-1. \quad (2.34)$$

Dalje nastavljamo potpuno isto kao i u dokazu propozicije 2.3.18, što nas dovodi do funkcije $x_\delta \in A^{[-K_0, K_0]} \subset D[-K_0, K_0]$ takve da je

$$d(x_\delta, x)_{[-K, K]} \leq \varepsilon < \frac{1}{4}, \quad \text{za sve } K = 1, \dots, K_0.$$

Pri tom samo spomenimo da uniformnost po $K \leq K_0$ slijedi iz činjenice da pripadajuća rastuća bijekcija $\lambda \in \Lambda^{[-K_0, K_0]}$, konstruirana na isti način kao u propoziciji 2.3.18, ima svojstvo $\lambda(\pm K) = \pm K$ za sve $K \leq K_0$, odnosno $\lambda|_{[-K, K]} \in \Lambda^{[-K, K]}$ (to pak slijedi iz činjenice da točke $\pm K$ iz subdivizije jesu oblika $-K_0 + \frac{k}{n}2K_0$ za $n = 2K_0$, pa su fiksne za λ). Sada zbog (2.30) slijedi

$$d_0(x_\delta, x)_{[-K, K]} \leq 4\sqrt{\varepsilon} + w'_x(\sqrt{\varepsilon})_{[-K, K]} < 5\delta, \quad \text{za sve } K = 1, \dots, K_0.$$

Napokon, proširimo x_δ na \mathbb{R} na način (2.33), čime dobivamo

$$d_0(x_\delta, x) \leq \sum_{K=1}^{K_0} 2^{-K} (d_0(x_\delta, x)_{[-K, K]} \wedge 1) + \delta \leq 5\delta \sum_{K=1}^{K_0} 2^{-K} + \delta < 6\delta,$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. \square

Topologija \mathcal{U} koju na $D(\mathbb{R})$ inducira metrika d_0 na prirodan način inducira sigma algebru $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{U})$. Kako smo i spomenuli u prošloj točki, od interesa je vidjeti je li ona jednaka najmanjoj sigma algebri generiranoj svim projekcijama. Same projekcije definiramo na isti način kao i prije: za $n \in \mathbb{N}$ i $-\infty < t_1 < \dots < t_n < +\infty$ proizvoljne definiramo projekciju $\pi_{t_1, \dots, t_n} : D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ s

$$\pi_{t_1, \dots, t_n}(x) = (x(t_1), \dots, x(t_n)).$$

Najmanja sigma algebra generirana svim projekcijama, odnosno najmanja sigma algebra u kojoj su sve projekcije izmjerive jest

$$\sigma\{\pi_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)); n \in \mathbb{N}, -\infty < t_1 < \dots < t_n < +\infty\}.$$

No familija koja generira gornju sigma algebru može se smanjiti, odnosno vrijedi

Lema 2.3.22 $\sigma\{\pi_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)); n \in \mathbb{N}, -\infty < t_1 < \dots < t_n < +\infty\} = \sigma\{\pi_t^{-1}(B); t \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Dokaz. Za dokaz je dovoljno vidjeti da je lijeva sigma algebra sadržana u desnoj, jer obrat vrijedi trivijalno. Uzmimo proizvoljne $n \in \mathbb{N}$, $-\infty < t_1 < \dots < t_n < +\infty$ i Borelov pravokutnik $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Zbog

$$\pi_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n) = \bigcap_{i=1}^n \pi_{t_i}^{-1}(B_i),$$

imamo

$$\begin{aligned} \pi_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(\sigma\{B_1 \times \dots \times B_n; B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) &= \sigma\{\pi_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n); B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \\ &\subseteq \sigma\{\pi_t^{-1}(B); t \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\pi_{t_1, \dots, t_n}^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \subseteq \sigma\{\pi_t^{-1}(B); t \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\},$$

pa traženi rezultat dobivamo uzimanjem unije po svim $n \in \mathbb{N}$ i $-\infty < t_1 < \dots < t_n < +\infty$. \square

Teorem 2.3.23 *Uz gornje označke, $\mathcal{D} = \sigma\{\pi_t^{-1}(B); t \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.*

Dokaz. Prvo dokazujemo \supseteq , tj. \mathcal{D} -izmjerivost jednodimenzionalnih projekcija. To ćemo napraviti tako da ćemo svaku proizvoljnu π_t prikazati kao limes niza \mathcal{D} -izmjerivih funkcija.

Fiksirajmo $t \in \mathbb{R}$ i odaberimo $K \in \mathbb{N}$ takav da $t \in \langle -K, K \rangle$. Zatim uzmimo $x \in D(\mathbb{R})$ i uzmimo proizvoljan niz (x_n) takav da $d_0(x_n, x) \rightarrow 0$. Tada vrijedi i $d_0(x_n, x)_{[-K, K]} \rightarrow 0$, odakle prema (2.29) slijedi $d(x_n, x)_{[-K, K]} \rightarrow 0$. Sada odaberimo niz $(\lambda_n) \subset \Lambda^{[-K, K]}$ kao

u lemi 2.3.16. Na isti način kao u dokazu korolara 2.3.20 može se pokazati da vrijedi $x_n(s) \rightarrow x(s)$ za proizvoljnu točku neprekidnosti s od x , odakle zaključujemo

$$x_n \rightarrow x \quad (\text{g. s.}) \quad \text{na} \quad [-K, K]$$

s obzirom na Lebesgueovu mjeru. Za $\varepsilon = 1$ postoji n_0 takav da za sve $n \geq n_0$ imamo

$$\sup_{t \in [-K, K]} |x_n(t) - x(\lambda_n t)| \leq 1,$$

pa uzimanjem supremuma u relaciji

$$|x_n(t)| \leq |x_n(t) - x(\lambda_n t)| + |x(\lambda_n t)|,$$

slijedi da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$\sup_{t \in [-K, K]} |x_n(t)| \leq 1 + \sup_{t \in [-K, K]} |x(t)|.$$

Stoga prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji imamo da za $\varepsilon > 0$ takav da je $\langle t, t + \varepsilon \rangle \subset [-K, K]$ vrijedi

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} x_n(s) ds \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} x(s) ds,$$

što znači da je za sve $\varepsilon > 0$ kao gore funkcija

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} x(s) ds$$

neprekidna. Budući da je x neprekidna zdesna u t , zaključujemo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(x) = x(t) = \pi_t(x),$$

odnosno π_t je izmjeriva kao limes niza izmjerivih funkcija.

Za dokaz \subseteq , fiksirajmo $-\infty = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = +\infty$. Za proizvoljan $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ definiramo $\eta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in D(\mathbb{R})$ na način

$$\eta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(t) = \alpha_i \quad \text{za} \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n$$

i $\eta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(t) = \alpha_1$ za $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$. Za bilo koji drugi izbor $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) \in \mathbb{R}^n$ očigledno vrijedi

$$d_0(\eta(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \eta(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)) \leq \max_{0 \leq i \leq n} |\alpha_i - \alpha'_i|,$$

pa vidimo da je preslikavanje $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow D(\mathbb{R})$ neprekidno. Zbog neprekidnosti metrike slijedi i da je za $z_0 \in D(\mathbb{R})$ preslikavanje $d_0(z_0, \cdot) : D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno s obzirom na topologiju \mathcal{U} inducirano metrikom d_0 , pa onda i izmjerivo s obzirom na \mathcal{D} . Budući da je π_{t_1, \dots, t_n} izmjerivo s obzirom na sigma algebru $\sigma\{\pi_t^{-1}(B); t \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ (lema 2.3.22), slijedi da je kompozicija

$$d_0(z_0, \cdot) \circ \eta \circ \pi_{t_1, \dots, t_n} : D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.35)$$

izmjeriva u paru sigma algebri $(\sigma\{\pi_t^{-1}(B); t \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, za proizvoljne $z_0 \in D(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ i t_1, \dots, t_n .

Sada za proizvoljan $m \in \mathbb{N}$ uzimamo skup $-\infty = -t_{(m^2+1)} < -t_{m^2} < \dots < -t_1 < t_0 < t_1 < \dots < t_{m^2} < t_{m^2+1} = +\infty$ tako da stavimo $t_i = \frac{i}{m^2}$, $i = 0, 1, \dots, m^2$. Tada $\{\pm t_i; i = 0, 1, \dots, m^2\}$ čini subdiviziju segmenta $[-m, m]$. Za taj novi skup definiramo η_m kao i ranije. Tvrdimo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_0(z_0, \eta_m(\pi_{-t_{m^2}}(x), \dots, \pi_{t_{m^2}}(x))) = d_0(z_0, x) \quad (2.36)$$

za svaki izbor $z_0, x \in D(\mathbb{R})$. Odatle slijedi da je $d_0(z_0, x)$ izmjeriva po x za fiksno z_0 kao limes niza izmjerivih funkcija oblika (2.35). Ako dokažemo gornju relaciju dokaz je gotov, jer tada za svaku otvorenu kuglu $K_0(z_0, \varepsilon)$ u $D(\mathbb{R})$ vrijedi

$$K_0(z_0, \varepsilon) = \{x \in D(\mathbb{R}); d_0(z_0, x) < \varepsilon\} \in \sigma\{\pi_t^{-1}(B); t \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\},$$

pa $\mathcal{D} \subseteq \sigma\{\pi_t^{-1}(B); t \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ slijedi zbog separabilnosti od $(D(\mathbb{R}), d_0)$. Da dokažemo (2.36), dovoljno je dokazati

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_0(z_0, \eta_m(\pi_{-t_{m^2}}(x), \dots, \pi_{t_{m^2}}(x)))_{[-K, K]} = d_0(z_0, x)_{[-K, K]} \quad \forall K \in \mathbb{N}. \quad (2.37)$$

Fiksirajmo z_0, x, K_0 i $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti od $d_0(z_0, \cdot)_{[-K_0, K_0]}$ dovoljno je pokazati $d_0(\eta_m(\pi_{-t_{m^2}}(x), \dots, \pi_{t_{m^2}}(x)), x)_{[-K_0, K_0]} \rightarrow 0$, odnosno pronaći m_0 takav da za sve $m \geq m_0$ vrijedi

$$d_0(\eta_m(\pi_{-t_{m^2}}(x), \dots, \pi_{t_{m^2}}(x)), x)_{[-K_0, K_0]} < \varepsilon.$$

Uzmemo li $\delta < \frac{1}{4}$ takav da je $4\delta + w'_x(\delta) < \varepsilon$, zbog (2.30) dovoljno je pronaći m_0 takav da za sve $m \geq m_0$ vrijedi

$$d(\eta_m(\pi_{-t_{m^2}}(x), \dots, \pi_{t_{m^2}}(x)), x)_{[-K_0, K_0]} < \delta^2.$$

Za to se služimo konstrukcijom sličnom onoj u propoziciji 2.3.18. Odaberimo subdiviziju $\{s_k\}$ segmenta $[-K_0, K_0]$ za koju vrijedi

$$w_x([s_{k-1}, s_k]) < \delta^2, \quad \forall k.$$

Za m_0 odabiremo neki prirodni broj koji zadovoljava $m_0 > K_0$, $\frac{1}{m_0} < \delta^2$ i $\frac{1}{m_0} < \min_k(s_k - s_{k-1})$, te uzimimo $m \geq m_0$ proizvoljan. Za taj m ubacimo u subdiviziju $\{s_k\}$ sve točke $\{\pm t_i; i = 0, 1, \dots, m^2\}$ oblika $t_i = \frac{i}{m}$ koje se nalaze u segmentu $[-K_0, K_0]$. Rastuću bijekciju $\lambda \in \Lambda^{[-K_0, K_0]}$ definiramo po dijelovima linearu između točaka t_i na sličan način kao i u propoziciji 2.3.18 (vidi sliku 2.2):

- ako interval $[t_{i-1}, t_i]$ ne sadrži nijednu s_k onda $\lambda t_i = t_i$
- ako interval $[t_{i-1}, t_i]$ sadrži jednu s_{k_0} onda $\lambda t_i = s_{k_0}$.

Ta je definicija dobra jer svaki interval $[t_{i-1}, t_i]$ zbog $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{m_0} < \min_k(s_k - s_{k-1})$ može sadržavati najviše jednu s_k . Sada se na vrlo sličan način kao i u propoziciji 2.3.18 vidi $|\lambda t - t| < \frac{1}{m} < \delta^2$ za sve $t \in [-K_0, K_0]$: najveća se razlika postiže upravo u točkama loma, no iz konstrukcije je vidljivo da t_i i λt_i uvijek leže u intervalu $[t_{i-1}, t_i]$. S druge strane imamo da t_{i-1} i skup $\lambda[t_{i-1}, t_i]$ istovremeno upadaju u neki interval $[s_{k-1}, s_k]$, odakle slijedi

$$\sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |\eta_m(\pi_{-t_{m^2}}(x), \dots, \pi_{t_{m^2}}(x))(t) - x(\lambda t)| = \sup_{t \in [s_{k-1}, s_k]} |x(t_{i-1}) - x(t)| < \delta^2.$$

Time dobivamo

$$\sup_{t \in [-K_0, K_0]} |\eta_m(\pi_{-t_{m^2}}(x), \dots, \pi_{t_{m^2}}(x))(t) - x(\lambda t)| < \delta^2 \quad \text{i} \quad \sup_{t \in [-K_0, K_0]} |\lambda t - t| < \delta^2,$$

odnosno

$$d(\eta_m(\pi_{-t_{m^2}}(x), \dots, \pi_{t_{m^2}}(x)), x)_{[-K_0, K_0]} < \delta^2,$$

čime je teorem dokazan. \square

Kao direktnu posljedicu korolara 2.3.20 imamo

Korolar 2.3.24 Neka je niz $(x_n) \subset D(\mathbb{R})$ i $x \in C(\mathbb{R})$. Tada $x_n \xrightarrow{d_0} x$ ako i samo ako $x_n(t) \rightarrow x(t)$ uniformno po kompaktnim intervalima.

2.3.9 Produktni prostori i familije koje određuju konvergenciju

Neka je (S, d) metrički prostor i $C_b(S)$ skup svih omeđenih neprekidnih realnih funkcija na S . Uzmemo li vjerojatnosne mjere P_n , P na S , po definiciji imamo

$$P_n \Rightarrow P \iff \lim_n \int_S f dP_n = \int_S f dP \quad \forall f \in C_b(S).$$

Već smo i ranije spomenuli pojam familije koja određuje konvergenciju, ali tada na nivou izmjerivih skupova u S (odnosno s obzirom na karakterizaciju slabe konvergencije mjera na nivou izmjerivih skupova u S). Sada nam je od interesa promatrati minimalne familije istog tipa na nivou funkcija, tj. s obzirom na gornju definiciju.

Definicija 2.3.25 Familiju $\mathcal{M} \subset C_b(S)$ nazivamo familijom koja određuje konvergenciju ako vrijedi da za proizvoljan izbor vjerojatnosnih mjera P_n , P na S svojstvo

$$\lim_n \int_S f dP_n = \int_S f dP \quad \forall f \in \mathcal{M}$$

nužno povlači $P_n \Rightarrow P$.

Posebno je značajno kako izgledaju takve familije kod produktnih prostora. Točnije, ako \mathcal{M}_k određuje konvergenciju na (S_k, d_k) , možemo li nekako doći do odgovarajuće familije na produktu danih metričkih prostora? To, naravno, ovisi o pretpostavkama koje dodamo na opći slučaj, a jednu takvu situaciju (čak i općenitiju nego nam je potrebno) prenosimo iz Ethier i Kurtz [21], propozicija 4.6.

Uzmimo niz (S_k, d_k) potpunih i separabilnih metričkih prostora s pripadnim Borelovim sigma algebrama \mathcal{S}_k . Tada je produkt $S = \prod_{k=1}^{\infty} S_k$ snabdjeven metrikom $d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(d_k(x_k, y_k) \wedge 1)$ potpun i separabilan metrički prostor, te vrijedi $\mathcal{S} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_k$.

Teorem 2.3.26 Neka su (S_k, d_k) , $k \in \mathbb{N}$ potpuni i separabilni metrički prostori, te neka je (S, d) definiran kao gore. Ako su $\mathcal{M}_k \subset C_b(S_k)$ familije koje određuju konvergenciju za S_k , onda je

$$\mathcal{M} = \{f(x) \equiv \prod_{k=1}^n f_k(x_k); n \in \mathbb{N}, f_k \in \mathcal{M}_k \cup \{id\} \text{ za } k = 1, \dots, n\}$$

familija koja određuje konvergenciju za S .

Za naše potrebe interesantan je produktni prostor koji nastaje množenjem $(D(\mathbb{R}), d_0)$ i $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Produkt $D(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ snabdjevamo metrikom $d = d_0 + |\cdot|$, odnosno

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_0(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|, \quad x_1, x_2 \in D(\mathbb{R}), \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Budući da su polazni prostori separabilni (ovako definirana metrika generira upravo produktnu topologiju) slijedi

$$\mathcal{B}(D(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}) = \mathcal{B}(D(\mathbb{R})) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Definiramo li na produktu drugu metriku d' koja će se podudarati s pretpostavkama gornjeg teorema, tj. $d' = (d_0 \wedge 1) + \frac{1}{2}(|\cdot| \wedge 1)$, lagano se provjeri da i ona generira produktnu topologiju (tj. topološki je ekvivalentna metriči d).

Napomenimo i to da cijela gornja konstrukcija u stvari vrijedi i za produkt n općenitih separabilnih metričkih prostora, posebno i za $D[0, 1] \times D[0, 1]$. U svjetlu provedene rasprave, kao direktnu posljedicu gornjeg teorema dobivamo.

Korolar 2.3.27 Jedna familija koja određuje konvergenciju na $D(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, promatranom uz metriku $d = d_0 + |\cdot|$ jest

$$\mathcal{M} = \{f(x, y) = f_1(x)f_2(y); f_1 \in C_b(D(\mathbb{R})), f_2 \in C_b(\mathbb{R})\}.$$

2.4 Uvjetni granični teoremi za slučajne šetnje

U cijelom odjeljku promatramo slučajnu šetnju $R_n = \sum_{k=1}^n Z_k$, $R_0 = 0$ očekivanja $\mu_Z < 0$ koja zadovoljava uvjet (2.8). Pri tome zadržavamo sve ranije označke, pa tako primjerice s G označavamo distribuciju od Z_1 , dok je G_ν definirana relacijom (2.9) (i predstavlja distribuciju prirasta pridružene slučajne šetnje). S G_n označavamo empirijsku distribuciju slučajnog uzorka Z_1, \dots, Z_n (vidi (2.12)). U propoziciji 2.2.9 vidjeli smo da je, uvjetno na događaj propasti, za veliki u distribucija od $G_{\tau_d(u)}$ bliska eksponencijalno nagnutoj funkciji distribucije G_ν . Taj se rezultat još može i pojačati.

Za sve $n \in \mathbb{N}$ definiramo *emperijski proces* $\xi_n \in D(\mathbb{R})$ relacijom

$$\xi_n(t, \omega) = \sqrt{n}(G_n(t, \omega) - G_\nu(t)) = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_k \leq t\}} - G_\nu(t) \right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.38)$$

Nadalje, s $W = (W(t); 0 \leq t \leq 1)$ označimo jedinično Brownovo gibanje na $[0, 1]$, a s $\overline{W} = (\overline{W}(t); 0 \leq t \leq 1) = (W(t) - tW(1); 0 \leq t \leq 1)$ pripadni Brownov most.

Teorem 2.4.1 *Uz gornje pretpostavke vrijedi*

$$\left\{ \sqrt{\frac{u}{\mu_Z}} (G_{\tau_d(u)}(t) - G_\nu(t)) \right\}_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{d_u} \overline{W} \circ G_\nu$$

u $D(\mathbb{R})$, gdje je $(\overline{W} \circ G_\nu)(t, \omega) = \overline{W}(G_\nu(t), \omega)$.

Prije dokaza iskazanog teorema morat ćemo dobiti određene međurezultate. Prvi takav izvađen je iz Billingsley [12], str. 103-105.

Teorem 2.4.2 *Neka je $(\eta_k; k \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih $U(0, 1)$ distribuiranih slučajnih varijabli definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Tada*

$$\left\{ \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{\eta_k \leq t\}} - t \right) \right\}_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{d} \overline{W}$$

u $D[0, 1]$.

Gornji se rezultat može generalizirati, te iz Pyke [37] preuzimamo

Teorem 2.4.3 *Neka je $(\eta_k; k \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih $U(0, 1)$ distribuiranih slučajnih varijabli definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) , te neka je $(N_u; u \geq 0)$ pozitivni cjelobrojni slučajni proces za kojeg vrijedi $N_u/u \xrightarrow{P} 1$. Tada*

$$\left\{ \sqrt{N_u} \left(\frac{1}{N_u} \sum_{k=1}^{N_u} 1_{\{\eta_k \leq t\}} - t \right) \right\}_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{d} \overline{W}$$

u $D[0, 1]$ kada $u \rightarrow \infty$.

Definicija 2.4.4 Za proizvoljnu funkciju distribucije F definiramo njezin generalizirani inverz u oznaci F^{-1} s

$$F^{-1}(y) = \inf\{x; y \leq F(x)\} = \sup\{x; F(x) \leq y\}.$$

Lagano se provjeri da je gornja jednakost istinita, kao i to da je u slučaju kada je F bijekcija generalizirani inverz jednak inverznoj funkciji (što opravdava oznaku koju koristimo). Također, laganim se računom pokazuje

$$y \leq F(x) \iff F^{-1}(y) \leq x. \quad (2.39)$$

Teorem 2.4.5 $\xi_{\tau_d(u)} \xrightarrow{\tilde{d}} \overline{W} \circ G_\nu$ u $D(\mathbb{R})$ kada $u \rightarrow \infty$.

Dokaz. Da bismo uopće krenuli u dokaz, morat ćemo situaciju preslikati na novi vjerojatnosni prostor, (Ω, \mathcal{F}, P) , na kojem uz niz (Z_k) čija distribucija ostaje ista imamo još i niz (η_k) nezavisnih jednakih distribuiranih $U(0, 1)$ (s obzirom na P) slučajnih varijabli, nezavisan od (Z_k) . I na tom vjerojatnosnom prostoru na sličan način dolazimo do vjerojatnosti \tilde{P} ; definiramo $\tilde{P}(Z_i \leq z_i, \eta_i \leq x_i, i = 1, \dots, n) = \prod_{i=1}^n G_\nu(z_i) F_\eta(x_i)$, te proširujemo na najmanju sigma algebru generiranu gornjim π -sistemom. Stoga je ovdje \tilde{P} samo malo proširenje u odnosu na prijašnju konstrukciju, te vrijede dosadašnji rezultati. Uočimo da je distribucija varijabli η_k s obzirom na \tilde{P} opet $U(0, 1)$.

Definirajmo $N_u = \tau_d(\tilde{\mu}_Z u)$, $u \geq 0$. Iz leme 2.2.8 (i) slijedi $N_u/u \xrightarrow{\tilde{P}} 1$, pa primjenom teorema 2.4.3 dobivamo

$$\left\{ \sqrt{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} \left(\frac{1}{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} \sum_{k=1}^{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} 1_{\{\eta_k \leq t\}} - t \right) \right\}_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{\tilde{d}} \overline{W}. \quad (2.40)$$

Sada definiramo $h : D[0, 1] \rightarrow D(\mathbb{R})$ relacijom $h(x)(t) = x(G_\nu(t))$ i tvrdimo da je ona neprekidna na $C[0, 1]$. Da bismo to i vidjeli, uzmimo niz $(x_n) \subseteq D[0, 1]$ takav da $x_n \rightarrow x \in C[0, 1]$, te pokažimo da tada nužno slijedi $h(x_n) \rightarrow h(x)$. Prema korolaru 2.3.20 vrijedi $x_n \rightarrow x$ u sup metrići, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} |x_n(t) - x(t)| = 0.$$

S druge pak strane za proizvoljan $K \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sup_{t \in [-K, K]} |h(x_n)(t) - h(x)(t)| = \sup_{t \in [-K, K]} |x_n(G_\nu(t)) - x(G_\nu(t))| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |x_n(t) - x(t)|,$$

pa odabirom $\lambda = id$ slijedi $d_0(h(x_n), h(x))_{[-K, K]} \leq \sup_{t \in [0, 1]} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$ za proizvoljan $K \in \mathbb{N}$. Stoga iz definicije d_0 zamjenom limesa i sume dobivamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_0(h(x_n), h(x)) = 0,$$

odnosno neprekidnost od h na $C[0, 1]$. Budući da su trajektorije Brownovog mosta (g. s.) neprekidne, primjenom teorema o neprekidnom preslikavanju (teorem 2.3.15) na konvergenciju u (2.40) dobivamo

$$\left\{ \sqrt{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} \left(\frac{1}{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} \sum_{k=1}^{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} 1_{\{\eta_k \leq G_\nu(t)\}} - G_\nu(t) \right) \right\}_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{\tilde{d}} \overline{W} \circ G_\nu.$$

Sada iskoristimo relaciju (2.39) koja nam daje $\{\eta_k \leq G_\nu(x)\} = \{G_\nu^{-1}(\eta_k) \leq x\}$, odnosno

$$\left\{ \sqrt{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} \left(\frac{1}{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} \sum_{k=1}^{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} 1_{\{G_\nu^{-1}(\eta_k) \leq t\}} - G_\nu(t) \right) \right\}_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{\tilde{d}} \overline{W} \circ G_\nu.$$

Napokon, zbog

$$\tilde{P}(G_\nu^{-1}(\eta_k) \leq x) = \tilde{P}(\eta_k \leq G_\nu(x)) = G_\nu(x) = \tilde{P}(Z_k \leq x)$$

slijedi da niz (Z_k) možemo reprezentirati (po distribuciji) na način $Z_k = G_\nu^{-1}(\eta_k)$, odakle dobivamo

$$\left\{ \sqrt{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} \left(\frac{1}{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} \sum_{k=1}^{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} 1_{\{Z_k \leq t\}} - G_\nu(t) \right) \right\}_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{\tilde{d}} \overline{W} \circ G_\nu,$$

odnosno $\xi_{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)} \xrightarrow{\tilde{d}} \overline{W} \circ G_\nu$. Tvrđnja sada slijedi iz činjenice da su zbog $\tilde{\mu}_Z > 0$ familije $(\xi_{\tau_d(\tilde{\mu}_Z u)})$ i $(\xi_{\tau_d(u)})$ jednake. \square

U idućem koraku cilj je prijeći s konvergencije po \tilde{d} distribuciji na konvergenciju po d_u distribuciji. U tu svrhu uvedimo označku $u' = u - \sqrt[4]{u}$. Važan korak predstavlja iduća lema.

Lema 2.4.6 Za proizvoljnu $g \in C_b([0, +\infty))$ vrijedi

$$\tilde{E}[g(B(u)) \mid \mathcal{F}_{\tau_d(u')}] \xrightarrow{\tilde{P}} E[g(B(\infty))],$$

gdje je $B(u) = R_{\tau_d(u)} - u$.

Dokaz. Stavimo $h(x) = \tilde{E}[g(B(x))]$. Dokazat ćemo da vrijedi

$$\tilde{E}[g(B(u)) \mid \mathcal{F}_{\tau_d(u')}] = h(\sqrt[4]{u} - B(u')) 1_{\{B(u') \leq \sqrt[4]{u}\}} + g(B(u') - \sqrt[4]{u}) 1_{\{B(u') > \sqrt[4]{u}\}}. \quad (2.41)$$

Sam račun, kako formula i sugerira, vršimo u dva dijela. Proces $(\tau_d(u))$ je neopadajući, posebno $\tau_d(u') \leq \tau_d(u)$, a jednakost se postiže na skupu $\{B(u') > \sqrt[4]{u}\}$, odnosno $\{B(u') >$

$\sqrt[4]{u}\} = \{\tau_d(u') = \tau_d(u)\}$ (riječima opisano: to je događaj na kojem je skok kojim proces prelazi preko nivoa u veći od $u - u' = \sqrt[4]{u}$, odnosno proces istovremeno preskače u' i u). Stoga na opisanom događaju vrijedi jednakost $B(u) = B(u') - \sqrt[4]{u}$, odnosno $g(B(u)) = g(B(u') - \sqrt[4]{u})$, a time i

$$\int_{A \cap \{B(u') > \sqrt[4]{u}\}} g(B(u)) d\tilde{P} = \int_{A \cap \{B(u') > \sqrt[4]{u}\}} g(B(u') - \sqrt[4]{u}) d\tilde{P}, \quad \forall A \in \mathcal{F}_{\tau_d(u')}.$$

Da bismo uvjetno očekivanje izračunali na skupu $\{B(u') \leq \sqrt[4]{u}\} = \{\tau_d(u') < \tau_d(u)\}$, uzmimo $A \in \mathcal{F}_{\tau_d(u')}$ (dakle $A \cap \{\tau_d(u') = n\} \in \mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$). Vrijedi

$$\int_{A \cap \{B(u') \leq \sqrt[4]{u}\}} g(B(u)) d\tilde{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A \cap \{\tau_d(u') = n\} \cap \{\tau_d(u) = n+k\}} g(R_n + Z_{n+1} + \dots + Z_{n+k} - u) d\tilde{P} \quad (2.42)$$

Uočimo pritom

$$\begin{aligned} A \cap \{\tau_d(u') = n\} \cap \{\tau_d(u) = n+k\} &= A \cap \{\tau_d(u') = n\} \cap \{R_n \leq u\} \cap \\ &\cap \{R_{n+1} \leq u, \dots, R_{n+k-1} \leq u, R_{n+k} > u\} \end{aligned}$$

Neka je $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ takav da je

$$A \cap \{\tau_d(u') = n\} \cap \{R_n \leq u\} = (Z_1, \dots, Z_n)^{-1}(B_1)$$

i za $a \in \mathbb{R}$ definiramo $B_2(a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ s

$$B_2(a) = \{(x_1, \dots, x_k); x_1 \leq a, \dots, x_1 + \dots + x_{k-1} \leq a, x_1 + \dots + x_k > a\}$$

Uz označku $r_n = z_1 + \dots + z_n$ višestrukom primjenom osnovnog teorema o transformaciji integrala i Fubinijevog teorema dobivamo

$$\begin{aligned} &\int_{A \cap \{\tau_d(u') = n\} \cap \{\tau_d(u) = n+k\}} g(R_n + Z_{n+1} + \dots + Z_{n+k} - u) d\tilde{P} \\ &= \int_{B_1} \int_{B_2(u-r_n)} g(r_n + z_{n+1} + \dots + z_{n+k} - u) dG_\nu(z_{n+1}) \dots dG_\nu(z_{n+k}) dG_\nu(z_1) \dots dG_\nu(z_n) \\ &= \int_{B_1} \int_{\{\tau_d(u-r_n) = k\}} g(r_n + R_k - u) d\tilde{P} dG_\nu(z_1) \dots dG_\nu(z_n) \end{aligned}$$

Uvrstimo li to u (2.42), slijedi

$$\int_{A \cap \{B(u') \leq \sqrt[4]{u}\}} g(B(u)) d\tilde{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_1} \int_{\{\tau_d(u-r_n) = k\}} g(r_n + R_k - u) d\tilde{P} dG_\nu(z_1) \dots dG_\nu(z_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_1} \int_{\{\tau_d(u-r_n)=k\}} g(r_n + R_{\tau_d(u-r_n)} - u) d\tilde{P} dG_{\nu}(z_1) \dots dG_{\nu}(z_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_1} \int_{\{\tau_d(u-r_n)=k\}} g(B(u-r_n)) d\tilde{P} dG_{\nu}(z_1) \dots dG_{\nu}(z_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_1} \tilde{E}[g(B(u-r_n))] dG_{\nu}(z_1) \dots dG_{\nu}(z_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_1} h(u-r_n) dG_{\nu}(z_1) \dots dG_{\nu}(z_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap \{\tau_d(u')=n\} \cap \{R_n \leq u\}} h(u-R_n) d\tilde{P} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap \{\tau_d(u')=n\} \cap \{R_n \leq u\}} h(\sqrt[4]{u} + u' - R_{\tau_d(u')}) d\tilde{P} \\
&= \int_{A \cap \{B(u') \leq \sqrt[4]{u}\}} h(\sqrt[4]{u} - B(u')) d\tilde{P},
\end{aligned}$$

te je (2.41) dokazana. Prema lemi 2.2.6 vrijedi $B(u) \xrightarrow{\tilde{d}} B(\infty)$ gdje je $B(\infty)$ slučajna varijabla s nedefektom \tilde{P} -distribucijom. U idućem koraku želimo dobiti $\tilde{P}(B(u') > \sqrt[4]{u}) \rightarrow 0$ kada $u \rightarrow \infty$. U tu svrhu uzimimo $\varepsilon > 0$ proizvoljan i $K > 0$ sa svojstvom $P(B(\infty) > K) < \varepsilon/2$. Zatim odaberemo u_0 dovoljno velik da za sve $u \geq u_0$ vrijedi $|\tilde{P}(B(u') > K) - P(B(\infty) > K)| < \varepsilon/2$ i $\sqrt[4]{u} > K$. Zaključujemo da za sve $u \geq u_0$ imamo

$$\tilde{P}(B(u') > \sqrt[4]{u}) \leq \tilde{P}(B(u') > K) \leq |\tilde{P}(B(u') > K) - P(B(\infty) > K)| + P(B(\infty) > K) < \varepsilon.$$

Slijedi

$$g(B(u') - \sqrt[4]{u}) 1_{\{B(u') > \sqrt[4]{u}\}} \xrightarrow{\tilde{P}} 0 \quad \text{kada } u \rightarrow \infty$$

jer za proizvoljan $\varepsilon > 0$ vrijedi $\{g(B(u') - \sqrt[4]{u}) 1_{\{B(u') > \sqrt[4]{u}\}} \geq \varepsilon\} \subseteq \{B(u') > \sqrt[4]{u}\}$. S druge strane imamo $\tilde{P}(B(u') \leq \sqrt[4]{u}) \rightarrow 1$ kada $u \rightarrow \infty$, odnosno

$$1_{\{B(u') \leq \sqrt[4]{u}\}} \xrightarrow{\tilde{P}} 1_{\Omega} \quad \text{kada } u \rightarrow \infty.$$

Stoga je dovoljno dokazati $h(\sqrt[4]{u} - B(u')) \xrightarrow{\tilde{P}} E[g(B(\infty))]$. No $\sqrt[4]{u} - B(u') \xrightarrow{d} \infty$ kada $u \rightarrow \infty$, u smislu da $\tilde{P}(\sqrt[4]{u} - B(u') \leq x) \rightarrow 0$ kada $u \rightarrow \infty$ za svaki x (jer se gornji

postupak može provesti i na izrazu $\tilde{P}(B(u') > \sqrt[4]{u} - x)$. Budući da je g omeđena vrijedi

$$h(x) = \tilde{E}[g(B(x))] \rightarrow E[g(B(\infty))] =: h(\infty) \quad \text{kada } x \rightarrow \infty.$$

Uzmimo sada $\varepsilon, \delta > 0$ proizvoljne i K dovoljno veliki da vrijedi $|h(u) - h(\infty)| < \varepsilon \quad \forall u \geq K$. Za takav K postoji u_0 takav da za $u \geq u_0$ vrijedi $\tilde{P}(\sqrt[4]{u} - B(u') \leq K) \leq \delta$, te tako za sve $u \geq u_0$ zbog činjenice $\{|h(\sqrt[4]{u} - B(u')) - h(\infty)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{\sqrt[4]{u} - B(u') \leq K\}$ imamo

$$\tilde{P}(|h(\sqrt[4]{u} - B(u')) - h(\infty)| \geq \varepsilon) \leq \tilde{P}(\sqrt[4]{u} - B(u') \leq K) \leq \delta,$$

čime je dokaz gotov. \square

Prije nego prijeđemo na dokaz teorema 2.4.1 dokažimo još jednu lemu.

Lema 2.4.7 *Neka su $(A_u; u \geq 0)$ i $(B_u; u \geq 0)$ dvije familije nenegativnih slučajnih varijabli na nekom vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Ako je familija (B_u) napeta i $A_u \xrightarrow{P} 0$, onda $A_u \cdot B_u \xrightarrow{P} 0$.*

Dokaz. Fiksirajmo proizvoljne $\varepsilon, \delta > 0$. Zbog napetosti, postoji $K > 0$ sa svojstvom $P(B_u \geq K) < \delta/2$ za sve $u \geq 0$. S druge strane, zbog $A_u \xrightarrow{P} 0$ postoji u_0 takvo da za sve $u \geq u_0$ vrijedi $P(A_u \geq \varepsilon/K) < \delta/2$. Stoga zbog $\{A_u \cdot B_u \geq \varepsilon\} \subseteq \{B_u \geq K\} \cup \{A_u \geq \varepsilon/K\}$ slijedi da za sve $u \geq u_0$ vrijedi

$$P(A_u \cdot B_u \geq \varepsilon) \leq P(B_u \geq K) + P(A_u \geq \varepsilon/K) < \delta.$$

\square

Dokaz teorema 2.4.1. Radi lakšeg razumijevanja (i budućih potreba), opišimo na koji način provodimo dokaz. On je zasnovan na pet tvrdnji od kojih smo jednu već dokazali, a ostale tek trebamo. Neka je B slučajna varijabla nezavisna od $\overline{W} \circ G_\nu$ s istom distribucijom kao $B(\infty)$. Dokazujemo redom

- (a) $\xi_{\tau_d(u)} \xrightarrow{\tilde{d}} \overline{W} \circ G_\nu$ (teorem 2.4.5),
- (b) $d((\xi_{\tau_d(u)}, B(u)), (\xi_{\tau_d(u')}, B(u))) \xrightarrow{\tilde{P}} 0$,
- (c) $(\xi_{\tau_d(u')}, B(u)) \xrightarrow{\tilde{d}} (\overline{W} \circ G_\nu, B)$,
- (d) pomoću (b) i (c) $(\xi_{\tau_d(u)}, B(u)) \xrightarrow{\tilde{d}} (\overline{W} \circ G_\nu, B)$,
- (e) pomoću (d) $\xi_{\tau_d(u)} \xrightarrow{d_u} \overline{W} \circ G_\nu$,

te na kraju pomoću (e) dobivamo tvrdnju teorema.

Tvrđnja (a) je već dokazana, pa dokazujemo (b). Uz iste oznake i argumente kao u prethodnoj lemi imamo redom

$$\begin{aligned}
\tilde{E}[\tau_d(u) - \tau_d(u')] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{\tau_d(u')=n\} \cap \{\tau_d(u)=n+k\}} k d\tilde{P} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_1} \int_{\{\tau_d(u-r_n)=k\}} k d\tilde{P} dG_{\nu}(z_1) \dots dG_{\nu}(z_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_1} \tilde{E}[\tau_d(u-r_n)] dG_{\nu}(z_1) \dots dG_{\nu}(z_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{\tau_d(u')=n\} \cap \{\tau_d(u) > \tau_d(u')\}} \tilde{E}[\tau_d(u-R_n)] d\tilde{P} \\
&= \int_{\{\tau_d(u) > \tau_d(u')\}} \tilde{E}[\tau_d(u-B(u')-u')] d\tilde{P} \\
&= \int_{\{B(u') \leq \sqrt[4]{u}\}} \tilde{E}[\tau_d(\sqrt[4]{u}-x)] dF_{B(u')}(x) \\
&\leq \tilde{E}[\tau_d(\sqrt[4]{u})] = O(\sqrt[4]{u}),
\end{aligned} \tag{2.43}$$

gdje zadnja jednakost proizlazi iz činjenice $\tilde{E}[\tau_d(u)]/u \rightarrow 1/\tilde{\mu}_Z$ (lema 2.2.8 (ii)). Označimo li s $\|\cdot\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\cdot|$, imamo redom (vidi raspravu u točki 2.3.9)

$$\begin{aligned}
d((\xi_{\tau_d(u)}, B(u)), (\xi_{\tau_d(u')}, B(u))) &= d(\xi_{\tau_d(u)}, \xi_{\tau_d(u')}) \leq \|\xi_{\tau_d(u)} - \xi_{\tau_d(u')}\| \\
&= \left\| \sqrt{\tau_d(u)} \left[\frac{1}{\tau_d(u)} \sum_{k=1}^{\tau_d(u)} 1_{\{Z_k \leq t\}} - G_{\nu}(t) \right] - \sqrt{\tau_d(u')} \left[\frac{1}{\tau_d(u')} \sum_{k=1}^{\tau_d(u')} 1_{\{Z_k \leq t\}} - G_{\nu}(t) \right] \right\| \\
&= \left\| (\sqrt{\tau_d(u)} - \sqrt{\tau_d(u')}) G_{\nu}(t) + \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_d(u)}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_d(u')}} \right) \sum_{k=1}^{\tau_d(u')} 1_{\{Z_k \leq t\}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\tau_d(u)}} \sum_{k=\tau_d(u')+1}^{\tau_d(u)} 1_{\{Z_k \leq t\}} \right\| \\
&\leq \sqrt{\tau_d(u)} - \sqrt{\tau_d(u')} + \tau_d(u') \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_d(u)}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_d(u')}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\tau_d(u)}} (\tau_d(u) - \tau_d(u')).
\end{aligned}$$

Svođenjem na zajednički nazivnik slijedi

$$d((\xi_{\tau_d(u)}, B(u)), (\xi_{\tau_d(u')}, B(u))) \leq \frac{2(\tau_d(u) - \tau_d(u'))}{\sqrt{\tau_d(u)}} = 2 \frac{\frac{\tau_d(u) - \tau_d(u')}{\sqrt{u}}}{\frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}}} \xrightarrow{\tilde{P}} 0,$$

jer nazivnik $\xrightarrow{\tilde{P}} 1/\sqrt{\mu_Z}$, dok brojnik $\rightarrow 0$ u srednjem prema (2.43), pa onda i po \tilde{P} vjerojatnosti.

Da bismo dokazali (d), prema teoremu 2.3.12 dovoljno je dokazati (c) (jer već imamo (b)), tj.

$$(\xi_{\tau_d(u')}, B(u)) \xrightarrow{\tilde{d}} (\overline{W} \circ G_\nu, B),$$

a za to je prema korolaru 2.3.27 dovoljno provjeriti

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{E}[f(\xi_{\tau_d(u')})g(B(u))] = E[f(\overline{W} \circ G_\nu)]E[g(B(\infty))] = E[f(\overline{W} \circ G_\nu)g(B(\infty))]$$

za svaki par $f \in C_b(D(\mathbb{R}))$ i $g \in C_b(\mathbb{R})$. Uzmimo zato dvije takve funkcije (dakle $|f| \leq M_f$ i $|g| \leq M_g$); korištenjem svojstava uvjetnog očekivanja i Jensenove nejednakosti u zadnjem koraku imamo

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{E}[f(\xi_{\tau_d(u')})g(B(u))] - E[f(\overline{W} \circ G_\nu)]E[g(B(\infty))] \right| \\ &= \left| \tilde{E} \left[f(\xi_{\tau_d(u')}) \tilde{E}[g(B(u)) \mid \mathcal{F}_{\tau_d(u')}] \right] - \tilde{E} \left[f(\xi_{\tau_d(u')}) E[g(B(\infty))] \right] \right| \\ &+ \left| \tilde{E}[f(\xi_{\tau_d(u')})]E[g(B(\infty))] - E[f(\overline{W} \circ G_\nu)]E[g(B(\infty))] \right| \\ &\leq \tilde{E} \left[|f(\xi_{\tau_d(u')})| \cdot \left| \tilde{E}[g(B(u)) \mid \mathcal{F}_{\tau_d(u')}] - E[g(B(\infty))] \right| \right] \\ &+ \left| \left(\tilde{E}[f(\xi_{\tau_d(u')})] - E[f(\overline{W} \circ G_\nu)] \right) E[g(B(\infty))] \right| \\ &\leq M_f \tilde{E} \left[\left| \tilde{E}[g(B(u)) \mid \mathcal{F}_{\tau_d(u')}] - E[g(B(\infty))] \right| \right] \\ &+ M_g \left| \tilde{E} \left[f(\xi_{\tau_d(u')}) \right] - E[f(\overline{W} \circ G_\nu)] \right|. \end{aligned}$$

Drugi izraz s desne strane $\rightarrow 0$ jer $\xi_{\tau_d(u')} \xrightarrow{\tilde{d}} \overline{W} \circ G_\nu$ prema teoremu 2.4.5. U prvom izrazu s desne strane, prema lemi 2.4.6, izraz pod očekivanjem $\rightarrow 0$ po \tilde{P} vjerojatnosti, a budući da je riječ o uniformno integrabilnoj familiji slučajnih varijabli (zbog omeđenosti od g), slijedi da konvergencija prema 0 vrijedi i u srednjem. Time je dokaz relacija (c) i (d) završen.

Da bismo dokazali (e), prvo uočimo da prema lemi 2.2.4 vrijedi

$$\frac{dP^{(u)}}{d\tilde{P}} = \frac{e^{-\nu B(u)}}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]} \quad \text{na } \mathcal{F}_{\tau_d(u)},$$

odakle zbog $B(u) \xrightarrow{\tilde{d}} B(\infty)$ i relacije (d) zaključujemo

$$E^{(u)}[f(\xi_{\tau_d(u)})] = \frac{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)} f(\xi_{\tau_d(u)})]}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]} \rightarrow \frac{E[e^{-\nu B(\infty)}] E[f(\overline{W} \circ G_\nu)]}{E[e^{-\nu B(\infty)}]} = E[f(\overline{W} \circ G_\nu)].$$

Dakle dokazali smo i (e), odnosno

$$\sqrt{\tau_d(u)}(G_{\tau_d(u)} - G_\nu) \xrightarrow{d_u} \overline{W} \circ G_\nu.$$

Da bismo prešli na zadnji korak, odnosno tvrdnju

$$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}}(G_{\tau_d(u)} - G_\nu) \xrightarrow{d_u} \overline{W} \circ G_\nu,$$

prema teoremu 2.3.12 dovoljno je vidjeti

$$d_0 \left(\sqrt{\tau_d(u)}(G_{\tau_d(u)} - G_\nu), \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}}(G_{\tau_d(u)} - G_\nu) \right) \xrightarrow{P^{(u)}} 0. \quad (2.44)$$

Očigledno vrijedi nejednakost

$$d_0 \left(\sqrt{\tau_d(u)}(G_{\tau_d(u)} - G_\nu), \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}}(G_{\tau_d(u)} - G_\nu) \right) \leq \left| 1 - \sqrt{\frac{u}{\tilde{\mu}_Z \tau_d(u)}} \right| \left\| \sqrt{\tau_d(u)}(G_{\tau_d(u)} - G_\nu) \right\|,$$

te prvi član produkta na desnoj strani $\xrightarrow{\tilde{P}} 0$ prema lemi 2.2.8 (i). Za drugi se član koristimo istom konstrukcijom kao u teoremu 2.4.5. Krenuvši od

$$\left\{ \sqrt{\tau_d(u)} \left(\frac{1}{\tau_d(u)} \sum_{k=1}^{\tau_d(u)} 1_{\{\eta_k \leq t\}} - t \right) \right\}_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{d} \overline{W},$$

koristimo činjenicu da je $h : D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s $h(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(G_\nu(t))|$ neprekidna na $C[0, 1]$, što nas preko teorema o neprekidnom preslikavanju dovodi do činjenice

$$\sqrt{\tau_d(u)} \|G_{\tau_d(u)} - G_\nu\| \xrightarrow{\tilde{d}} \|\overline{W} \circ G_\nu\|.$$

To znači da je u pitanju relativno kompaktna, pa prema teoremu Prohorova i napeta familija, te produkt $\xrightarrow{\tilde{P}} 0$ prema lemi 2.4.7. Stoga vrijedi (2.44) jer konvergencija po \tilde{P} vjerojatnosti povlači konvergenciju po $P^{(u)}$ vjerojatnosti, čime je teorem dokazan. \square

Dokaz gornjeg teorema sadrži konstrukciju na koju ćemo se naslanjati i ubuduće, s time da u nju više nećemo tako duboko i detaljno zalaziti. Naime, i dalje nastavljamo

istraživanje u smjeru asimptotske $P^{(u)}$ distribucije procesa koji nastaju kao izvedenice aktualne slučajne šetnje, sve s idejom da ćemo pomoći takvih rezultata uspjeti što preciznije opisati asimptotiku događaja propasti.

U nastavku dodatno pretpostavljamo

$$0 < \tilde{\sigma}_Z^2 = \widetilde{\text{Var}}Z_n < +\infty, \quad (2.45)$$

te promatramo niz slučajnih procesa

$$\Gamma_n = \left\{ \frac{1}{\tilde{\sigma}_Z \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} (Z_k - \tilde{\mu}_Z) \right\}_{0 \leq t \leq 1} \quad (2.46)$$

u $D[0, 1]$. Prema (dobro poznatom) Donskerovom teoremu (vidi Billingsley [12], teorem 16.1) vrijedi

$$\Gamma_n \xrightarrow{\tilde{d}} W,$$

gdje je W , kao i prije, jedinično Brownovo gibanje na $[0, 1]$. Opet bismo htjeli indeks n u gornjoj relaciji zamijeniti s $\tau_d(u)$, za što nam je potrebna iduća propozicija (za dokaz vidi Aldous [1], propozicija 1).

Propozicija 2.4.8 *Neka su V_n , $n \in \mathbb{N}$, slučajni elementi na nekom vjerojatnosnom prostoru, s vrijednostima u separabilnom metričkom prostoru (S, d) , (τ_n) niz pozitivnih cjelobrojnih slučajnih varijabli (na istom vjerojatnosnom prostoru) i $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ takav da $a_n \rightarrow +\infty$. Neka je V slučajni element (možda na nekom drugom vjerojatnosnom prostoru) s vrijednostima u istom metričkom prostoru kao gore. Iduće je ekvivalentno:*

- (i) $V_n \xrightarrow{d} V$ i $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ takav da $\limsup_n P(\max_{|i-n| \leq \delta \cdot n} d(V_i, V_n) \geq \varepsilon) < \varepsilon$
- (ii) $V_{\tau_n} \xrightarrow{d} V$ za svaki par nizova (τ_n) i (a_n) kao gore koji zadovoljava $\frac{\tau_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1$.

Uvjet

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$$
 takav da $\limsup_n P(\max_{|i-n| \leq \delta n} d(V_i, V_n) \geq \varepsilon) < \varepsilon \quad (2.47)$

nazivamo Anscombeovim uvjetom. Zamjena n s $\tau_d(u)$ počiva upravo na provjeri tog uvjeta na nizu Γ_n , za što nam pak treba jedan tehnički rezultat izvađen iz Billingsley [12], str. 69.

Lema 2.4.9 *Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih varijabli očekivanja 0 takav da vrijedi $\text{Var}X_i = \sigma_i^2 < +\infty$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ i $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. Tada za proizvoljan $\lambda > \sqrt{2}$ vrijedi*

$$P\left(\max_{i \leq n} |S_i| \geq \lambda s_n\right) \leq 2P(|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2})s_n).$$

Ako su (X_i) još i jednako distribuirane, imamo

$$P\left(\max_{i \leq n} |S_i| \geq \lambda\sqrt{n}\sigma\right) \leq 2P(|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2})\sqrt{n}\sigma).$$

Sada smo spremni dokazati

Teorem 2.4.10 $\Gamma_{\tau_d(u)} \xrightarrow{\tilde{d}} W$ u $D[0, 1]$.

Dokaz. Zbog Donskerovog teorema i propozicije 2.4.8, dovoljno je provjeriti Anscombeov uvjet (2.47) za niz procesa (Γ_n) . Neka je zato $\varepsilon > 0$ zadan. Definiramo funkcije

$$\alpha_1(\delta) = \frac{\delta}{\tilde{\sigma}_Z(\sqrt{1-\delta})(\sqrt{1-\delta}+1)}, \quad \beta_1(\delta) = \frac{\varepsilon}{2\alpha_1(\delta)} - \sqrt{2}\tilde{\sigma}_Z$$

$$\alpha_2(\delta) = \frac{\tilde{\sigma}_Z \varepsilon}{2\sqrt{\delta}} - \sqrt{2}\tilde{\sigma}_Z, \quad \alpha_2^n(\delta) = \frac{\tilde{\sigma}_Z \varepsilon \sqrt{n}}{2\sqrt{\lfloor \delta n \rfloor + 1}} - \sqrt{2}\tilde{\sigma}_Z.$$

i uočimo da vrijedi redom $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha_1(\delta) = 0$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta_1(\delta) = +\infty$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha_2(\delta) = +\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_2^n(\delta) = \alpha_2(\delta)$ za sve $\delta > 0$. Odaberimo $\delta(\varepsilon)$ takav da za sve $\delta \leq \delta(\varepsilon)$ vrijedi

$$(1) \quad \varepsilon - 2\sqrt{2}\tilde{\sigma}_Z \alpha_1(\delta) > 0, \quad (2) \quad \frac{2\tilde{\sigma}_Z^2}{(\beta_1(\delta))^2} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3) \quad (\alpha_2(\delta))^2 \geq \frac{4\tilde{\sigma}_Z^2}{\varepsilon} + 1,$$

te za tako odabran $\delta(\varepsilon)$ odaberimo $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$, $\delta \leq \delta(\varepsilon)$

$$(4) \quad (\alpha_2^n(\delta))^2 \geq \frac{4\tilde{\sigma}_Z^2}{\varepsilon}$$

(to možemo zbog $\alpha_2^n(\delta) \rightarrow \alpha_2(\delta)$). Uz oznaće $M = \max\{i, n\} \geq n$, $m = \min\{i, n\} \leq n$ i $\|\cdot\| = \sup_{t \in [0, 1]} |\cdot|$ imamo redom

$$\begin{aligned} \max_{|i-n| \leq \delta n} d_0(\Gamma_i, \Gamma_n) &\leq \max_{|i-n| \leq \delta n} \left\| \frac{1}{\tilde{\sigma}_Z \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} (Z_k - \tilde{\mu}_Z) - \frac{1}{\tilde{\sigma}_Z \sqrt{i}} \sum_{k=1}^{\lfloor it \rfloor} (Z_k - \tilde{\mu}_Z) \right\| \\ &= \max_{|i-n| \leq \delta n} \frac{1}{\tilde{\sigma}_Z} \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{i}} \right) \sum_{k=1}^{\lfloor mt \rfloor} (Z_k - \tilde{\mu}_Z) \pm \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=\lfloor mt \rfloor + 1}^{\lfloor Mt \rfloor} (Z_k - \tilde{\mu}_Z) \right\| \\ &\leq \frac{1}{\tilde{\sigma}_Z} \max_{|i-n| \leq \delta n} \left\| \frac{\sqrt{i} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{i}} \right\| \left\| \sum_{k=1}^{\lfloor mt \rfloor} (Z_k - \tilde{\mu}_Z) \right\| \\ &\quad + \frac{1}{\tilde{\sigma}_Z} \max_{|i-n| \leq \delta n} \frac{1}{\sqrt{M}} \left\| \sum_{k=\lfloor mt \rfloor + 1}^{\lfloor Mt \rfloor} (Z_k - \tilde{\mu}_Z) \right\| \end{aligned}$$

Iz nejednakosti $|i - n| \leq \delta n$ direktno slijedi da za $\delta \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi $\sqrt{1-\delta}\sqrt{n} \leq \sqrt{i} \leq \sqrt{1+\delta}\sqrt{n}$ odakle dobivamo

$$\frac{1}{\sqrt{i}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\delta}\sqrt{n}}.$$

Rastavimo li $|i - n|$ prema formuli razlike kvadrata, slijedi

$$|\sqrt{i} - \sqrt{n}| \leq \frac{\delta n}{\sqrt{i} + \sqrt{n}} \leq \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{1-\delta} + 1},$$

te naposljetku

$$\left| \frac{\sqrt{i} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{i}} \right| \leq \frac{\delta}{\sqrt{n}(\sqrt{1-\delta} + 1)\sqrt{1-\delta}}.$$

Stoga, uz označku $S_n = \sum_{k=1}^n (Z_k - \tilde{\mu}_Z)$

$$\begin{aligned} \max_{|i-n| \leq \delta n} d_0(\Gamma_i, \Gamma_n) &\leq \frac{\delta}{\tilde{\sigma}_Z \sqrt{n}(\sqrt{1-\delta} + 1)\sqrt{1-\delta}} \max_{|i-n| \leq \delta n} \sup_{t \in [0, 1]} |S_{\lfloor mt \rfloor}| \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n}\tilde{\sigma}_Z} \max_{|i-n| \leq \delta n} \sup_{t \in [0, 1]} |S_{\lfloor Mt \rfloor} - S_{\lfloor mt \rfloor}| \\ &\leq \frac{\alpha_1(\delta)}{\sqrt{n}} \max_{j \leq n} |S_j| + \frac{1}{\sqrt{n}\tilde{\sigma}_Z} \max_{|i-n| \leq \delta n} \sup_{t \in [0, 1]} |S_{\lfloor Mt \rfloor} - S_{\lfloor mt \rfloor}| \\ &= I + II \end{aligned}$$

Iskoristimo li (1), lemu 2.4.9 i Čebiševljevu nejednakost, slijedi

$$\begin{aligned} \tilde{P}(I \geq \frac{\varepsilon}{2}) &= \tilde{P}\left(\max_{j \leq n} |S_j| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2\alpha_1(\delta)}\right) \leq 2\tilde{P}\left(|S_n| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2\alpha_1(\delta)} - \sqrt{2}\sqrt{n}\tilde{\sigma}_Z\right) \\ &= 2\tilde{P}(|S_n| \geq \beta_1(\delta)\sqrt{n}) \leq 2 \frac{n\tilde{\sigma}_Z^2}{n(\beta_1(\delta))^2} < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku primjenili (2). S druge strane, zbog $\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x - y \rfloor + 1$, nezavisnosti prirasta slučajne šetnje, leme 2.4.9 i Čebiševljeve nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} \tilde{P}(II \geq \frac{\varepsilon}{2}) &= \tilde{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\tilde{\sigma}_Z} \max_{|i-n| \leq \delta n} \sup_{t \in [0, 1]} |S_{\lfloor Mt \rfloor} - S_{\lfloor mt \rfloor}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\leq \tilde{P}\left(\max_{|i-n| \leq \delta n} \max_{j \leq \lfloor M-m \rfloor + 1} |S_j| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}\tilde{\sigma}_Z}{2}\right) \leq \tilde{P}\left(\max_{j \leq \lfloor \delta n \rfloor + 1} |S_j| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}\tilde{\sigma}_Z}{2}\right) \\ &\leq 2\tilde{P}\left(|S_{\lfloor \delta n \rfloor + 1}| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}\tilde{\sigma}_Z}{2} - \sqrt{2}\sqrt{\lfloor \delta n \rfloor + 1}\tilde{\sigma}_Z\right) \\ &\leq 2\tilde{P}\left(|S_{\lfloor \delta n \rfloor + 1}| \geq \alpha_2^n(\delta)\sqrt{\lfloor \delta n \rfloor + 1}\right) \leq 2 \frac{(\lfloor \delta n \rfloor + 1)\tilde{\sigma}_Z^2}{(\lfloor \delta n \rfloor + 1)(\alpha_2^n(\delta))^2} \end{aligned}$$

$$\leq \text{(prema (4))} \leq \frac{2\tilde{\sigma}_Z^2}{\frac{4\tilde{\sigma}_Z^2}{\varepsilon}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Time smo dobili da za sve $n \geq n_0(\varepsilon)$ i $\delta \leq \delta(\varepsilon)$

$$\tilde{P} \left(\max_{|i-n| \leq \delta n} d_0(\Gamma_i, \Gamma_n) \geq \varepsilon \right) \leq \tilde{P}(I \geq \frac{\varepsilon}{2}) + \tilde{P}(II \geq \frac{\varepsilon}{2}) < \varepsilon,$$

tj.

$$\limsup_n \tilde{P} \left(\max_{|i-n| \leq \delta n} d_0(\Gamma_i, \Gamma_n) \geq \varepsilon \right) < \varepsilon \quad \forall \delta \leq \delta(\varepsilon),$$

čime je Anscombeov uvjet zadovoljen. \square

Gornji teorem još uvijek nam ne daje nikakvu tvrdnju o željenoj asimptotskoj d_u distribuciji procesa $\Gamma_{\tau_d(u)}$. Stoga moramo načiniti još jedan korak, za što imamo idući teorem.

Teorem 2.4.11 $\Gamma_{\tau_d(u)} \xrightarrow{d_u} W$ u $D[0, 1]$.

Dokaz. Za dokaz teorema koristimo konstrukciju istovjetnu onoj u dokazu teorema 2.4.1, odnosno dokazujemo relacije (a)-(e) koje su tamo navedene. Do sada smo već osigurali analogon relacije (a) (teorem 2.4.10), dok se analogoni od (c), (d) i (e) dobivaju na isti način kao i kod teorema 2.4.1 (jer koraci dokaza ne ovise o definiciji procesa $\xi_{\tau_d(u)}$, odnosno $\Gamma_{\tau_d(u)}$).

Stoga odmah prelazimo na korak (b), odnosno

$$d((\Gamma_{\tau_d(u)}, B(u)), (\Gamma_{\tau_d(u')}, B(u))) \xrightarrow{\tilde{P}} 0.$$

Ponovo, zbog definicije metrike d i teorema 2.3.12, za to je dovoljno vidjeti

$$\|\Gamma_{\tau_d(u)} - \Gamma_{\tau_d(u')}\| = \sup_{t \in [0, 1]} |\Gamma_{\tau_d(u)}(t) - \Gamma_{\tau_d(u')}(t)| \xrightarrow{\tilde{P}} 0.$$

Uvedimo za $x \in D[0, 1]$ pojam *modula neprekidnosti* $w(x, \delta)$ s

$$w(x, \delta) = \sup_{|t-s|<\delta} |x(t) - x(s)| \tag{2.48}$$

Vrijedi (vidi Billingsley [12], str. 110) $\lim_{\delta \rightarrow 0} w(x, \delta) = 0 \iff x \in C[0, 1]$ i za proizvoljno $\delta > 0$ preslikavanje $w(\cdot, \delta)$ je neprekidno na $C[0, 1]$. Stoga

$$\begin{aligned} & \|\Gamma_{\tau_d(u)} - \Gamma_{\tau_d(u')}\| = \\ &= \sup_{t \in [0, 1]} \left| \Gamma_{\tau_d(u)}(t) - \sqrt{\frac{\tau_d(u)}{\tau_d(u')}} \Gamma_{\tau_d(u)}(t) + \sqrt{\frac{\tau_d(u)}{\tau_d(u')}} \Gamma_{\tau_d(u)}(t) - \sqrt{\frac{\tau_d(u)}{\tau_d(u')}} \Gamma_{\tau_d(u)} \left(t \frac{\tau_d(u')}{\tau_d(u)} \right) \right| \\ &\leq \left| 1 - \sqrt{\frac{\tau_d(u)}{\tau_d(u')}} \right| \|\Gamma_{\tau_d(u)}\| + \sqrt{\frac{\tau_d(u)}{\tau_d(u')}} w \left(\Gamma_{\tau_d(u)}, 1 - \frac{\tau_d(u')}{\tau_d(u)} \right). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Zbog neprekidnosti od $\|\cdot\|$ na $C[0, 1]$ i teorema 2.4.10 prema teoremu o neprekidnom preslikavanju slijedi

$$\|\Gamma_{\tau_d(u)}\| \xrightarrow{\tilde{d}} \|W\|,$$

što znači da je familija $(\|\Gamma_{\tau_d(u)}\|; u \geq 0)$ relativno kompaktna, pa prema Prohorovu i napeta. S druge strane pomoću leme 2.2.8 lagano vidimo

$$1 - \sqrt{\frac{\tau_d(u)}{\tau_d(u')}} \xrightarrow{\tilde{P}} 0,$$

te zaključujemo da prvi sumand u (2.49) $\xrightarrow{\tilde{P}} 0$. Zbog $\sqrt{\frac{\tau_d(u)}{\tau_d(u')}} \xrightarrow{\tilde{P}} 1$, još je preostalo dokazati

$$w\left(\Gamma_{\tau_d(u)}, 1 - \frac{\tau_d(u')}{\tau_d(u)}\right) \xrightarrow{\tilde{P}} 0.$$

Fiksirajmo $\delta > 0$ i uočimo da zbog neprekidnosti od $w(\cdot, \delta)$ na $C[0, 1]$ vrijedi

$$w(\Gamma_{\tau_d(u)}, \delta) \xrightarrow{\tilde{d}} w(W, \delta),$$

pa zaključujemo da za gotovo sve $\varepsilon > 0$ (s obzirom na Lebesgueovu mjeru)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{P}(w(\Gamma_{\tau_d(u)}, \delta) \geq \varepsilon) = P(w(W, \delta) \geq \varepsilon)$$

(pri tom je P vjerojatnosna mjera na prostoru na kojem počiva Brownovo gibanje W). Zbog neprekidnosti trajektorija Brownovog gibanja imamo $\lim_{\delta \rightarrow 0} w(W, \delta) = 0$ P -g. s.), odnosno

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{P}(w(\Gamma_{\tau_d(u)}, \delta) \geq \varepsilon) = 0.$$

Napokon, za gotovo sve $\varepsilon > 0$ i proizvoljno $\delta > 0$ imamo

$$\begin{aligned} \limsup_{u \rightarrow \infty} \tilde{P}\left(w\left(\Gamma_{\tau_d(u)}, 1 - \frac{\tau_d(u')}{\tau_d(u)}\right) \geq \varepsilon\right) &\leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \tilde{P}\left(1 - \frac{\tau_d(u')}{\tau_d(u)} \geq \delta\right) \\ &+ \limsup_{u \rightarrow \infty} \tilde{P}(w(\Gamma_{\tau_d(u)}, \delta) \geq \varepsilon), \end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi uzimanjem limesa po δ obiju strana. \square

Završni rezultat ovog odjeljka koji precizno opisuje asimptotsku d_u distribuciju promatrane sličajne šetnje (prisjetimo se: jedini zahtjevi su da je prirast konačne varijance, te da vrijedi (2.8)) sadržan je u idućem teoremu.

Teorem 2.4.12

$$\left(\left\{ \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_Z} R_{\lfloor t\tau_d(u) \rfloor} - tu}{\sqrt{u}} \right\}_{0 \leq t \leq 1}, \left\{ \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_Z} \tilde{\mu}_Z \tau_d(tu) - tu}{\sqrt{u}} \right\}_{0 \leq t \leq 1} \right) \xrightarrow{d_u} (\overline{W}, -W)$$

Formalni dokaz još ćemo jednom malo odgoditi, tj. razložiti ga na nekoliko rezultata koje ćemo kasnije povezati u cjelinu. Takav je način pogodniji i stoga što opet uvodimo nove pojmove, te ćemo također promatrati i treći varijantu prostora funkcija neprekidnih zdesna s limesom slijeva: $D[0, \infty)$. Zaustavimo li se malo na tom pojmu, vidimo da se ni po čemu bitnom ne razlikuje od već promatranog $D(\mathbb{R})$. Metriku na $D[0, \infty)$ ponovo definiramo pomoću reda Skorokhodovih metrika na intervalima $[0, K]$ (tj. $d_0^{[0, K]}$) s težinama 2^{-K} , pa se odmah vidi da je situacija istovjetna ranijoj, posebno da vrijede svi analogni rezultati. Takvu metriku na $D[0, \infty)$ ponovo označavamo s d_0 , te ona u skladu s gornjom napomenom taj prostor čini potpunim i separabilnim. Također, najmanja sigma algebra generirana odgovarajućom topologijom, u oznaci \mathcal{D} , jednaka je najmanjoj sigma algebri generiranoj svim (jednodimenzionalnim) projekcijama (vidi lemu 2.3.22 i teorem 2.3.23).

Označimo s $D_0 \subseteq D[0, \infty)$ podskup nenegativnih, neopadajućih i neomeđenih funkcija (dakle su sve takve ujedno i funkcije distribucije na \mathbb{R}).

Definicija 2.4.13 (i) Za $x \in D_0$ definiramo njezin generalizirani inverz x^{-1} s

$$x^{-1}(t) = \inf\{u \geq 0; x(u) > t\}.$$

(ii) Za $x \in D[0, \infty)$ definiramo preslikavanje x^\uparrow s

$$x^\uparrow(t) = \sup\{x(u); 0 \leq u \leq t\}.$$

Lema 2.4.14 (i) Za $x \in D_0$ vrijedi $x^{-1} \in D_0$.

(ii) $D_0 \in \mathcal{D}$.

Dokaz. (i) x^{-1} je dobro definirana funkcija koja je očigledno nenegativna i neopadajuća (jer je x neopadajuća). Da bismo vidjeli da je neomeđena, odaberimo proizvoljan $M > 0$ i definirajmo $t_0 = x(M)$. Tada za sve $t \geq t_0$ slijedi $x^{-1}(t) \geq x^{-1}(t_0) = \inf\{u; x(u) > t_0\} \geq M$. Za neprekidnost zdesna, zbog monotonosti je dovoljno provjeriti da $\forall t \geq 0, \forall \varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $x^{-1}(t + \delta) < x^{-1}(t) + \varepsilon$, odnosno

$$\inf\{u; x(u) > t + \delta\} < \inf\{u; x(u) > t\} + \varepsilon.$$

Odaberimo t i ε ; po definiciji infimuma postoji $u_0 \in [x^{-1}(t), x^{-1}(t) + \varepsilon]$ takav da je $x(u_0) > t$. Stavimo li $\delta := (x(u_0) - t)/2$ slijedi $u_0 < x^{-1}(t) + \varepsilon$ i $x(u_0) > t + \delta$, odakle vidimo

$$\inf\{u; x(u) > t + \delta\} \leq u_0 < x^{-1}(t) + \varepsilon.$$

(ii) Podskup D_0 nenegativnih, neopadajući i neomeđenih funkcija zbog neprekidnosti zdesna možemo prikazati kao

$$\begin{aligned} D_0 &= \{x \in D[0, \infty); x(0) \geq 0\} \cap \left(\bigcap_{r < q; r, q \in \mathbb{Q}} \{x \in D[0, \infty); x(q) - x(r) \geq 0\} \right) \\ &\cap \left(\bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in D[0, \infty); x(q) > K\} \right) \\ &= \pi_0^{-1}[0, +\infty) \cap \left(\bigcap_{r < q; r, q \in \mathbb{Q}} (\pi_q - \pi_r)^{-1}[0, +\infty) \right) \cap \left(\bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \pi_q^{-1}(K, +\infty) \right), \end{aligned}$$

što je izmjeriv skup jer su projekcije izmjerive. \square

Lema 2.4.15 *Iduća su preslikavanja izmjeriva*

- (i) $(c, x) \mapsto c \cdot x$ iz $\mathbb{R} \times D[0, \infty)$ u $D[0, \infty)$
- (ii) $(x, y) \mapsto x + y$ iz $D[0, \infty) \times D[0, \infty)$ u $D[0, \infty)$
- (iii) $x \mapsto x^{-1}$ iz D_0 u D_0
- (iv) $x \mapsto x^{\uparrow}$ iz $D[0, \infty)$ u $D[0, \infty)$.

Dokaz. (i) vrijedi trivijalno jer je navedeno preslikavanje očito neprekidno. Za dokaz od (ii) uočimo redom

$$\begin{aligned} (x+y)^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D} &\iff \sigma((x+y)^{-1}\pi_t^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})); t \geq 0) \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D} \\ &\iff (x+y)^{-1}\pi_t^{-1}(B) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \quad \forall t \geq 0, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ &\iff (x+y) \mapsto \pi_t(x+y) \text{ izmjerivo } \quad \forall t \geq 0 \\ &\iff [\pi_t(x+y)]^{-1}(-\infty, \alpha) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \quad \forall t \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zadnja je pak tvrdnja istinita zbog prikaza

$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in D[0, \infty) \times D[0, \infty); x(t) + y(t) < \alpha\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{(x, y) \in D[0, \infty) \times D[0, \infty); x(t) < r\} \\ &\cap \{(x, y) \in D[0, \infty) \times D[0, \infty); y(t) < \alpha - r\}) \end{aligned}$$

i činjenice da su u kompoziciji $(x, y) \mapsto x \mapsto \pi_t(x)$ sva preslikavanja izmjeriva.

(iii) Označimo s $\mathcal{D} \cap D_0$ sigma algebru $\{A \cap D_0; A \in \mathcal{D}\}$. Kao i u (ii), dovoljno je pokazati

$$[\pi_t(x^{-1})]^{-1}(-\infty, \alpha) \in \mathcal{D} \cap D_0 \quad \forall t \geq 0, \alpha \in \mathbb{R},$$

odnosno

$$\{x \in D_0; x^{-1}(t) < \alpha\} \in \mathcal{D} \cap D_0.$$

No za funkcije iz D_0 lagano se pokaže

$$x^{-1}(t) < s \iff x(s - 0) > t,$$

pa u stvari treba pokazati

$$\{x \in D_0; x(\alpha - 0) > t\} \in \mathcal{D} \cap D_0,$$

što slijedi iz prikaza

$$\{x \in D_0; x(\alpha - 0) > t\} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}} \{x \in D_0; x(\alpha - \varepsilon) > t\}.$$

Za dokaz od (iv), na isti način uočavamo

$$[\pi_t(x^\uparrow)]^{-1}(-\infty, \alpha] = \bigcap_{q \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}} \{x \in D[0, \infty); x(q) \leq \alpha\}.$$

□

Iduće dvije leme prenosimo iz Vervaat [45], leme 1 i 2.

Lema 2.4.16 *Neka je $(x_n) \subset D_0$, $y \in C[0, \infty)$ i $(\varepsilon_n) \subset \langle 0, +\infty \rangle$ takav da $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Tada je ekvivalentno*

$$(i) \frac{x_n(t) - t}{\varepsilon_n} \rightarrow y(t) \text{ uniformno po kompaktima}$$

$$(ii) \frac{x_n^{-1}(t) - t}{\varepsilon_n} \rightarrow -y(t) \text{ uniformno po kompaktima.}$$

Lema 2.4.17 *Neka je $(x_n) \subset D[0, \infty)$, $y \in C[0, \infty)$ i $(\varepsilon_n) \subset \langle 0, +\infty \rangle$ takav da $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Ako*

$$\frac{x_n(t) - t}{\varepsilon_n} \rightarrow y(t) \text{ uniformno po kompaktima,}$$

onda

$$\frac{x_n^\uparrow(t) - t}{\varepsilon_n} \rightarrow y(t) \text{ uniformno po kompaktima.}$$

Uočimo da, zbog neprekidnosti limesa y i korolara 2.3.24, obje gornje leme možemo iskazati i u terminima konvergencije u $D[0, \infty)$.

Prije nego priđemo na dokaz teorema 2.4.12, uvodimo još jedan rezultat, ključan za konstrukciju dokaza. Prema Dudley [18] vrijedi

Teorem 2.4.18 Neka su A_n , A slučajni elementi s vrijednostima u separabilnom metričkom prostoru S , takvi da $Y_n \xrightarrow{d} Y$. Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ i slučajni elementi A'_n , A' definirani na njemu s istim distribucijama kao i A_n , A , i takvi da vrijedi

$$A'_n \rightarrow A' \quad P' - (g.s.).$$

Dokaz teorema 2.4.12. Označimo slučajni element u $D[0, 1] \times D[0, 1]$ iz iskaza teorema s (η_u^1, η_u^2) . Dokazat ćemo

$$(\Gamma_{\tau_d(u)}, \eta_u^1) \xrightarrow{d_u} (W, \overline{W}), \quad (\Gamma_{\tau_d(u)}, \eta_u^2) \xrightarrow{d_u} (W, -W). \quad (2.50)$$

U ovom se trenutku s $D[0, 1]$ prebacujemo na $D[0, \infty)$, te u tu svrhu definiramo

$$H_u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{\mu}_Z \tau_d(u)} \sum_{k=1}^{\lfloor t \tau_d(u) \rfloor} Z_k & ; 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\tilde{\mu}_Z \tau_d(u)} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor t \tau_d(u) \rfloor} Z_k + (t-1)\tilde{\mu}_Z \tau_d(u) \right) & ; t > 1 \end{cases},$$

$$b_u = \frac{\tilde{\sigma}_Z}{\tilde{\mu}_Z \sqrt{\tau_d(u)}}, \quad I(t) = t, \quad I_u(t) = \frac{\tau_d(u) \tilde{\mu}_Z}{u} t \quad \text{za } t \geq 0,$$

i proširujemo Brownovo gibanje W na $C[0, \infty)$ s $W(t) = W(1)$ za $t > 1$. Tada vrijedi

$$\frac{H_u(t) - I}{b_u} = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{\sigma}_Z \sqrt{\tau_d(u)}} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor t \tau_d(u) \rfloor} Z_k - t \tilde{\mu}_Z \tau_d(u) \right) & ; 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\tilde{\sigma}_Z \sqrt{\tau_d(u)}} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor t \tau_d(u) \rfloor} Z_k - \tilde{\mu}_Z \tau_d(u) \right) & ; t > 1 \end{cases}.$$

Nadalje, lagano vidimo

$$\begin{aligned} d_0 \left(\left(\frac{H_u - I}{b_u} \right)_{0 \leq t \leq 1}, (\Gamma_{\tau_d(u)})_{0 \leq t \leq 1} \right) &\leq \frac{\tilde{\mu}_Z}{\tilde{\sigma}_Z \sqrt{\tau_d(u)}} \sup_{t \in [0, 1]} | \lfloor t \tau_d(u) \rfloor - t \tau_d(u) | \\ &\leq \frac{\tilde{\mu}_Z}{\tilde{\sigma}_Z \sqrt{\tau_d(u)}} \xrightarrow{P^{(u)}} 0, \end{aligned} \quad (2.51)$$

pa zaključujemo

$$\frac{H_u - I}{b_u} \xrightarrow{d_u} W \quad \text{u } D[0, 1]$$

(jer $\Gamma_{\tau_d(u)} \xrightarrow{d_u} W$). Budući da je preslikavanje $h : D[0, 1] \rightarrow D[0, \infty)$ definirano s

$$(h(x))(t) = \begin{cases} x(t) & ; 0 \leq t \leq 1 \\ x(1) & ; t > 1 \end{cases}$$

očito neprekidno na $C[0, 1]$, dobivamo

$$\frac{H_u - I}{b_u} \xrightarrow{d_u} W \quad u \quad D[0, \infty).$$

Odaberimo sada proizvoljan niz $(u_n) \subset \langle 0, +\infty \rangle$ takav da $u_n \rightarrow +\infty$. Tada i $b_{u_n} \xrightarrow{P^{(u)}} 0$, pa prema teoremu 2.3.13 slijedi

$$\left(\frac{H_{u_n} - I}{b_{u_n}}, b_{u_n} \right) \xrightarrow{d_u} (W, 0) \quad u \quad D[0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Sada prema teoremu 2.4.18 postoji neki vjerojatnosni prostor $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ i slučajni elementi $(A'_n, B'_n), (W', 0')$ takvi da vrijedi

$$(A'_n, B'_n) \stackrel{d}{=} \left(\frac{H_{u_n} - I}{b_{u_n}}, b_{u_n} \right), \quad (W', 0') \stackrel{d}{=} (W, 0) \quad i \quad (A'_n, B'_n) \rightarrow (W', 0') \quad P' - (g. s.),$$

pri čemu u prvoj jednakosti mislimo na $P^{(u)}$ distribucije elemenata s desne strane. Stoga prema lemmama 2.4.16 i 2.4.17 slijedi

$$\left(A'_n, B'_n, \frac{(A'_n \cdot B'_n + I)^\uparrow - I}{B'_n}, \frac{((A'_n \cdot B'_n + I)^\uparrow)^{-1} - I}{B'_n} \right) \rightarrow (W', 0, W', -W').$$

Napokon, zbog jednake distribuiranosti, izmjerivosti svih upotrijebljenih preslikavanja i proizvoljnosti niza (u_n) imamo

$$\left(\frac{H_u - I}{b_u}, \frac{(H_u^\uparrow)^{-1} - I}{b_u} \right) \xrightarrow{d_u} (W, -W).$$

Nadalje, vrijedi

$$I_u^{-1}(t) = \frac{u}{\tilde{\mu}_Z \tau_d(u)} t \xrightarrow{P^{(u)}} I(t),$$

pa onda i

$$\left(\frac{H_u - I}{b_u}, \frac{(H_u^\uparrow)^{-1} - I}{b_u}, I_u^{-1} \right) \xrightarrow{d_u} (W, -W, I).$$

Neka se $E \subset D_0$ sastoji od svih linearnih funkcija φ takvih da je $\varphi(0) = 0$. Definiramo $\psi : D[0, \infty) \times D[0, \infty) \times E \rightarrow D[0, \infty) \times D[0, \infty)$ s $\psi(x, y, \varphi) = (x, y \circ \varphi)$. Evidentno

je da je ψ neprekidna na $C[0, \infty) \times C[0, \infty) \times \{I\}$ (jer tu imamo $\psi(x, y, \varphi) = (x, y)$), pa iz teorema o neprekidnom preslikavanju slijedi

$$\left(\frac{H_u - I}{b_u}, \frac{(H_u^\uparrow)^{-1} \circ I_u^{-1} - I_u^{-1}}{b_u} \right) \xrightarrow{d_u} (W, -W).$$

Budući da je konvergencija u prostorima $D[0, \infty)$ i $D[0, 1]$ prema neprekidnom limesu karakterizirana uniformnom konvergencijom po kompaktnim intervalima, vrijedi da je funkcija $h : D[0, \infty) \times D[0, \infty) \rightarrow D[0, 1] \times D[0, 1]$ definirana s $h(x, y) = (x|_{[0, 1]}, y|_{[0, 1]})$ neprekidna na $C[0, \infty) \times C[0, \infty)$, te slijedi

$$\left(\left(\frac{H_u - I}{b_u} \right)_{0 \leq t \leq 1}, \left(\frac{(H_u^\uparrow)^{-1} \circ I_u^{-1} - I_u^{-1}}{b_u} \right)_{0 \leq t \leq 1} \right) \xrightarrow{d_u} (W, -W) \quad \text{u } D[0, 1] \times D[0, 1].$$

Sada izračunajmo $(H_u^\uparrow)^{-1}$. Kao prvo, tvrdimo

$$(x^\uparrow)^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0; \sup_{0 \leq v \leq s} x(v) > t\} = \inf\{s \geq 0; x(s) > t\}, \quad \text{tj.} \quad (x^\uparrow)^{-1} = x^{-1}. \quad (2.52)$$

Označimo lijevi infimum sa s_0 , a desni sa s_1 , te neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $s \in [s_0, s_0 + \varepsilon)$ takav da je $\sup_{0 \leq v \leq s} x(v) > t$, odnosno postoji $v_0 \in [0, s]$ takav da je $x(v_0) > t$. Zato po definiciji od s_1 imamo

$$s_1 \leq v_0 \leq s < s_0 + \varepsilon,$$

odakle slijedi $s_0 \leq s_1$. Za obratnu nejednakost uočimo

$$\{s \geq 0; x(s) > t\} \subseteq \{s \geq 0; \sup_{0 \leq v \leq s} x(v) > t\}$$

te uzmimo infimum obiju strana, čime je (2.52) dokazana.

Budući da za proizvoljan $t \in [0, 1]$ vrijedi $\tilde{\mu}_Z \tau_d(u) H_u(1) = \sum_{k=1}^{\tau_d(u)} Z_k > u > ut$ možemo pisati redom

$$\begin{aligned} (H_u^\uparrow)^{-1}(I_u^{-1}(t)) &= \inf\{s \geq 0; H_u(s) > \frac{u}{\tilde{\mu}_Z \tau_d(u)} t\} = \inf\{s \geq 0; \sum_{k=1}^{\lfloor \tau_d(u)s \rfloor} Z_k > ut\} \\ &= \inf\{s \geq 0; \tau_d(u)s = \tau_d(ut)\} = \frac{\tau_d(tu)}{\tau_d(u)}, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Dakle vrijedi

$$\frac{(H_u^\uparrow)^{-1} \circ I_u^{-1}(t) - I_u^{-1}(t)}{b_u} = \frac{\frac{\tau_d(tu)}{\tau_d(u)} - \frac{tu}{\tilde{\mu}_Z \tau_d(u)}}{\frac{\tilde{\sigma}_Z}{\tilde{\mu}_Z \sqrt{\tau_d(u)}}} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_Z} \cdot \frac{\tilde{\mu}_Z \tau_d(tu) - tu}{\sqrt{\tau_d(u)}},$$

pa pomoću relacije (2.51) dobivamo

$$\left((\Gamma_{\tau_d(u)})_{0 \leq t \leq 1}, \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_Z} \cdot \frac{\tilde{\mu}_Z \tau_d(tu) - tu}{\sqrt{\tau_d(u)}} \right)_{0 \leq t \leq 1}, \frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \right) \xrightarrow{d_u} \left(W, -W, \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}} \right),$$

a odatle zbog neprekidnosti množenja konstanti i funkcija iz $D[0, 1]$

$$\left((\Gamma_{\tau_d(u)})_{0 \leq t \leq 1}, \left(\frac{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}}{\tilde{\sigma}_Z} \cdot \frac{\tilde{\mu}_Z \tau_d(tu) - tu}{\sqrt{u}} \right)_{0 \leq t \leq 1} \right) \xrightarrow{d_u} (W, -W),$$

što je točno druga relacija u (2.50).

Da bismo dobili prvu, za početak uočimo

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\tau_d(u)\tilde{\mu}_Z}{u}} \Gamma_{\tau_d(u)}(t) &= \sqrt{\frac{\tau_d(u)\tilde{\mu}_Z}{u}} \cdot \frac{1}{\tilde{\sigma}_Z \sqrt{\tau_d(u)}} \sum_{k=1}^{\lfloor t\tau_d(u) \rfloor} (Z_k - \tilde{\mu}_Z) \\ &= \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}}{\tilde{\sigma}_Z} \frac{R_{\lfloor t\tau_d(u) \rfloor} - \lfloor t\tau_d(u) \rfloor \tilde{\mu}_Z}{\sqrt{u}} \approx \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}}{\tilde{\sigma}_Z} \frac{R_{\lfloor t\tau_d(u) \rfloor} - t\tau_d(u)\tilde{\mu}_Z}{\sqrt{u}} \\ &= \eta_u^1(t) - t\eta_u^2(1), \end{aligned}$$

gdje \approx znači da udaljenost lijeve i desne strane u $D[0, 1]$ teži ka 0 po $P^{(u)}$ -vjerojatnosti. Nadalje, znamo $\Gamma_{\tau_d(u)} \xrightarrow{d_u} W \in C[0, 1]$, pa slijedi $\|\Gamma_{\tau_d(u)}\| \xrightarrow{d_u} \|W\|$, tj. familija ($\|\Gamma_{\tau_d(u)}\|$) je napeta. Tada

$$\begin{aligned} d_0((\eta_u^1(t))_{0 \leq t \leq 1}, (\Gamma_{\tau_d(u)}(t) + t\eta_u^2(1))_{0 \leq t \leq 1}) &\leq \sup_{t \in [0, 1]} |\eta_u^1(t) - t\eta_u^2(1) - \Gamma_{\tau_d(u)}(t)| \\ &= \left| \sqrt{\frac{\tau_d(u)\tilde{\mu}_Z}{u}} - 1 \right| \|\Gamma_{\tau_d(u)}\| \xrightarrow{P^{(u)}} 0. \end{aligned}$$

S druge strane zbog $(\Gamma_{\tau_d(u)}, \eta_u^2) \xrightarrow{d_u} (W, -W)$ i činjenice da je funkcija $h(x, y)(t) = (x(t), x(t) + ty(1))$ neprekidna na $C[0, 1] \times C[0, 1]$ imamo

$$((\Gamma_{\tau_d(u)})_{0 \leq t \leq 1}, (\Gamma_{\tau_d(u)}(t) + t\eta_u^2(1))_{0 \leq t \leq 1}) \xrightarrow{d_u} (W, \overline{W}),$$

odnosno

$$(\Gamma_{\tau_d(u)}, \eta_u^1) \xrightarrow{d_u} (W, \overline{W}),$$

čime je (2.50) dokazano.

Na kraju, pokažimo kako iz (2.50) slijedi $(\eta_u^1, \eta_u^2) \xrightarrow{d_u} (\overline{W}, -W)$. U prvom redu, zbog $(\Gamma_{\tau_d(u)}, \eta_u^2) \xrightarrow{d_u} (W, -W)$ odmah slijedi $\Gamma_{\tau_d(u)} + \eta_u^2 \xrightarrow{P^{(u)}} 0$, pa onda imamo

$$(\Gamma_{\tau_d(u)}, \eta_u^1, \Gamma_{\tau_d(u)} + \eta_u^2) \xrightarrow{d_u} (W, \overline{W}, 0),$$

te djelovanjem funkcije $h(x, y, z) = (y, z - x)$ napokon dobivamo

$$(\eta_u^1, \eta_u^2) \xrightarrow{d_u} (\overline{W}, -W)$$

što se i tražilo. \square

Već i rezultati dobiveni u ovom odjeljku imaju svoj značaj jer opisuju asimptotiku prvog prijelaza nivoa u za slučajnu šetnju kod koje i pozitivni i negativni rep distribucije prirasta eksponencijalno opada ka nuli. Mi ih, međutim, nećemo ovdje dalje komentirati, već ćemo se njima poslužiti da u idućem odjeljku dobijemo analogne rezultate za proces rizika. Pri tome ćemo se pozivati na konstrukcije već viđene u ovome odjeljku.

2.5 Primjena na proces rizika

Prisjetimo se notacije uvedene u prvom odjeljku: (X_k) predstavljaju veličine zahtjeva, a (Y_k) međuvremena čekanja. Proces rizika definiran je relacijom $U_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k = u - S_t$. Vrijeme propasti $\tau(u)$ jest prvi trenutak kada proces (S_t) pijeđe preko nivoa u . Veza između tog vremena i prvog vremena (diskretnog) prijelaza nivoa u za pripadni diskretni kostur dana je s $\tau(u) = \sum_{k=1}^{\tau_d(u)} Y_k$. U cijelom odjeljku pretpostavljamo da vrijede uvjeti (2.1) i (2.3) iz teorema 2.1.1, ili (ekvivalentno), (2.8). Momente od X_k , Y_k i Z_k označavamo s pripadnim indeksima, pa tako imamo npr. $\mu_Z = \mu_X - c\mu_Y$, $\tilde{\sigma}_Z = \tilde{\sigma}_X + c^2\tilde{\sigma}_Y$...

Neka je (W^1, W^2) dvodimenzionalno standardno Brownovo gibanje na $[0, 1]$ (dakle su W^1 i W^2 dva standardna nezavisna Brownova gibanja). Definiramo

$$\tilde{\kappa}^2 = \frac{1}{\tilde{\mu}_Z^3} (\tilde{\mu}_X^2 \tilde{\sigma}_Y^2 + \tilde{\mu}_Y^2 \tilde{\sigma}_X^2) \quad \text{i} \quad W^0 = \frac{1}{\tilde{\kappa} \sqrt{\tilde{\mu}_Z^3}} (\tilde{\mu}_X \tilde{\sigma}_Y W^2 - \tilde{\mu}_Y \tilde{\sigma}_X W^1), \quad (2.53)$$

čime je W^0 još jedno jedinično Brownovo gibanje.

Sigma algebre $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_k; k \leq n) = \sigma(X_k - cY_k; k \leq n)$ sada proširujemo i definiramo kao $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, Y_k; k \leq n)$, te $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n)$. Na sličan način kao i u prvom odjeljku ovog poglavlja slijedi da se uz uvjete (2.1) i (2.3) teorema 2.1.1 može konstruirati nova vjerojatnosna mjera \tilde{P} na \mathcal{F}_∞ , koja diskretni kostur $R_n = \sum_{k=1}^n Z_k = \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k)$ pretvara u slučajnu šetnju s pozitivnim driftom (i konačnim očekivanjem). Konstrukciju vršimo na idući način.

Označimo s F_X i F_Y distribucije od X_k i Y_k s obzirom na P , te s \hat{f}_X i \hat{f}_Y pripadne funkcije izvodnice momenata. Cramér-Lunbergov koeficijent iz teorema 2.1.1 i dalje označavamo s ν . Definiramo nove dvije vjerojatnosne funkcije distribucije relacijom

$$\tilde{F}_X(x) = \frac{1}{\hat{f}_X(\nu)} \int_{-\infty}^x e^{\nu t} dF_X(t), \quad \tilde{F}_Y(y) = \frac{1}{\hat{f}_Y(-c\nu)} \int_{-\infty}^y e^{-c\nu t} dF_Y(t). \quad (2.54)$$

Prsten skupova

$$\{\{X_1 \leq x_1, Y_1 \leq y_1, \dots, X_n \leq x_n, Y_n \leq y_n\}; n \in \mathbb{N}, x_i, y_i \in \mathbb{R}\}$$

je generirajući za \mathcal{F}_∞ . Na njemu definiramo

$$\tilde{P}(X_1 \leq x_1, Y_1 \leq y_1, \dots, X_n \leq x_n, Y_n \leq y_n) = \prod_{i=1}^n \tilde{F}_X(x_i) \tilde{F}_Y(y_i),$$

ta na jedinstven način proširujemo na \mathcal{F}_∞ . Direktno iz definicije slijedi da su tada (X_n) i (Y_n) dva međusobno nezavisna niza nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli, s distribucijama \tilde{F}_X i \tilde{F}_Y redom. Ostaje jedino pitanje što se pod ovako definiranom vjerojatnošću događa s nizom (Z_n) . Laganim računom direktno iz uvjeta (2.1) slijedi $E[e^{\nu Z_1}] = \hat{f}_X(\nu) \hat{f}_Y(-c\nu) = 1$, pa imamo

$$\begin{aligned} \tilde{P}(Z_1 \leq z) &= \tilde{P}(X_1 - cY_1 \leq z) = \int_0^{+\infty} \int_0^{z+cy} d\tilde{F}_X(x) d\tilde{F}_Y(y) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{z+cy} \frac{1}{\hat{f}_X(\nu) \hat{f}_Y(-c\nu)} e^{\nu(x-cy)} dF_X(x) dF_Y(y) = \int_0^z e^{\nu z} dG(z) = G_\nu(z), \end{aligned}$$

gdje je G distribucija od Z_1 s obzirom na P , a G_ν pripadna eksponencijalno nagnuta (vidi (2.9)). Dakle je (Z_n) niz nezavisnih jednako distribuiranih sličajnih varijabli s istom distribucijom kao i prije.

Vidimo da se \tilde{P} na "staroj" \mathcal{F}_∞ potpuno podudara s prijašnjom \tilde{P} , pa je ovdje očigledno riječ o proširenju \tilde{P} na "novu" \mathcal{F}_∞ . Stoga možemo zaključiti da vrijede svi dosadašnji rezultati koji se tiču pridružene slučajne šetnje, te ćemo ih u ovom odjeljku direktno preslikavati na nove pojmove.

Definiramo dvodimenzionalnu empirijsku funkciju distribucije relacijom

$$H_n(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k \leq t_1, Y_k \leq t_2\}},$$

te s $\tilde{F}_X \otimes \tilde{F}_Y$ označavamo (produktnu) \tilde{P} - distribuciju vektora (X_k, Y_k) . Također definiramo

$$\Gamma_n^X = \left\{ \frac{1}{\tilde{\sigma}_X \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} (X_k - \tilde{\mu}_X) \right\}_{0 \leq t \leq 1}, \quad \Gamma_n^Y = \left\{ \frac{1}{\tilde{\sigma}_Y \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} (Y_k - \tilde{\mu}_Y) \right\}_{0 \leq t \leq 1}.$$

Tada vrijedi

Teorem 2.5.1 $\|H_{\tau_d(u)} - \tilde{F}_X \otimes \tilde{F}_Y\| \xrightarrow{P(u)} 0$,

Dokaz. Isto kao i u prethodnom odjeljku, jer Glivenko-Cantellijev teorem vrijedi i za slučajne vektore.

Teorem 2.5.2 $(\Gamma_{\tau_d(u)}^X, \Gamma_{\tau_d(u)}^Y) \xrightarrow{d_u} (W^1, W^2)$ u $D[0, 1] \times D[0, 1]$.

Dokaz. Za dokaz je dovoljno dokazati

$$(\Gamma_{\tau_d(u)}^X, \Gamma_{\tau_d(u)}^Y) \xrightarrow{\tilde{d}} (W^1, W^2), \quad (2.55)$$

jer tada dokaz slijedi direktnim priključivanjem na konstrukcije iz teorema 2.4.11 i 2.4.1, kako opisujemo u nastavku. Naime, u skladu s komentarima neposredno nakon teorema 2.3.26, prirodna metrika (koja generira produktnu topologiju, pa i produktnu sigma algebru) na $D[0, 1] \times D[0, 1]$ jest upravo $d((x', y'), (x'', y'')) = d_0(x', x'') + d_0(y', y'')$, gdje je d_0 ranije definirana Skorohodova metrika na $D[0, 1]$. Dokažemo li (2.55), prema dokazu teorema 2.4.1 dovoljno je dokazati

$$d((\Gamma_{\tau_d(u)}^X, \Gamma_{\tau_d(u)}^Y, B(u)), (\Gamma_{\tau_d(u')}^X, \Gamma_{\tau_d(u')}^Y, B(u))) \xrightarrow{\tilde{P}} 0.$$

(Jednostavno, riječ je o tome da je uz gornju relaciju i (2.55) u okviru dokaza spomenutog teorema dovoljno zamijeniti $\xi_{\tau_d(u)}$ s $(\Gamma_{\tau_d(u)}^X, \Gamma_{\tau_d(u)}^Y)$ i $\xi_{\tau_d(u')}$ s $(\Gamma_{\tau_d(u')}^X, \Gamma_{\tau_d(u')}^Y)$). No za to je opet dovoljno vidjeti

$$\|\Gamma_{\tau_d(u)}^X - \Gamma_{\tau_d(u')}^X\| \xrightarrow{\tilde{d}} 0 \quad \text{i} \quad \|\Gamma_{\tau_d(u)}^Y - \Gamma_{\tau_d(u')}^Y\| \xrightarrow{\tilde{d}} 0,$$

što radimo na isti način kao i u dokazu teorema 2.4.11, budući da vrijedi $\Gamma_{\tau_d(u)}^X \xrightarrow{\tilde{d}} W^1$ i $\Gamma_{\tau_d(u)}^Y \xrightarrow{\tilde{d}} W^2$ jer dokaz teorema 2.4.10 ovisi samo o postojanju varijance.

Da bismo dokazali (2.55), prvo uočimo da prema Donskerovom teoremu vrijedi $\Gamma_n^X \xrightarrow{\tilde{d}} W^1$ i $\Gamma_n^Y \xrightarrow{\tilde{d}} W^2$, a budući da su procesi Γ_n^X i Γ_n^Y nezavisni, prema teoremu 2.3.9 vrijedi

$$(\Gamma_n^X, \Gamma_n^Y) \xrightarrow{\tilde{d}} (W^1, W^2).$$

Zato je, kao i u dokazu teorema 2.4.10 dovoljno vidjeti da niz procesa (Γ_n^X, Γ_n^Y) zadovoljava Anscombeov uvjet (2.47). Međutim oba koordinatna niza zaista zadovoljavaju taj uvjet (kako smo rekli - dovoljan uvjet za provođenje dokaza viđenog u teoremu 2.4.10 jest konačnost varijanci od X_k i Y_k). Odaberemo li $\varepsilon > 0$ proizvoljan, slijedi da za $\varepsilon/2$ postoje $\delta_1, \delta_2 > 0$ takvi da vrijedi

$$\limsup_n P\left(\max_{|i-n| \leq \delta_1 n} d_0(\Gamma_n^X, \Gamma_i^X) \geq \varepsilon/2\right) < \varepsilon/2, \quad \limsup_n P\left(\max_{|i-n| \leq \delta_2 n} d_0(\Gamma_n^Y, \Gamma_i^Y) \geq \varepsilon/2\right) < \varepsilon/2.$$

Uzmemmo li $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ imamo

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{|i-n| \leq \delta n} d((\Gamma_n^X, \Gamma_n^Y), (\Gamma_i^X, \Gamma_i^Y)) \geq \varepsilon\right) \\ & \leq P\left(\max_{|i-n| \leq \delta n} d_0(\Gamma_n^X, \Gamma_i^X) \geq \varepsilon/2\right) + P\left(\max_{|i-n| \leq \delta n} d_0(\Gamma_n^Y, \Gamma_i^Y) \geq \varepsilon/2\right) \\ & \leq P\left(\max_{|i-n| \leq \delta_1 n} d_0(\Gamma_n^X, \Gamma_i^X) \geq \varepsilon/2\right) + P\left(\max_{|i-n| \leq \delta_2 n} d_0(\Gamma_n^Y, \Gamma_i^Y) \geq \varepsilon/2\right), \end{aligned}$$

te tvrdnja slijedi uzimanjem \limsup_n obiju strana. \square

Kao korolar gornjeg teorema dobivamo aproksimaciju vjerojatnosti propasti u konačnom vremenu, kojoj od početka i težimo. Da bismo to i napravili, definicijama iz (2.53) dođajmo još i oznaku

$$\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\mu}_Y}{\tilde{\mu}_Z}. \quad (2.56)$$

U nastavku, Φ predstavlja funkciju distribucije jedinične normalne razdiobe. Kao i ranije, C je konstanta iz teorema 2.1.1, za koju smo dokazali (vidi (2.16)) $C = \lim_u \tilde{E}[e^{-\nu B(u)}] = E[e^{-\nu B(\infty)}]$.

Korolar 2.5.3 (i) $\frac{1}{\sqrt{u}}(\tau(u) - \tilde{\alpha}u) \xrightarrow{d_u} \tilde{\kappa}W^0(1)$,

$$(ii) \lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{T \geq 0} \left| e^{\nu u} \psi(u, T) - C\Phi\left(\frac{T - \tilde{\alpha}u}{\tilde{\kappa}\sqrt{u}}\right) \right| = 0.$$

Dokaz. (i) Zbog $R_{\tau_d(u)} = u + B(u)$ i $\tau(u) = \sum_{k=1}^{\tau_d(u)} Y_k$ imamo redom

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{u}}(\tau(u) - \tilde{\alpha}u) &= \frac{1}{\sqrt{u}} \left(\sum_{k=1}^{\tau_d(u)} Y_k - \tilde{\alpha}R_{\tau_d(u)} + \tilde{\alpha}B(u) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{u}} \left((1 + c\tilde{\alpha}) \sum_{k=1}^{\tau_d(u)} Y_k - \tilde{\alpha} \sum_{k=1}^{\tau_d(u)} X_k \right) + \tilde{\alpha} \frac{B(u)}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \left((1 + c\tilde{\alpha}) \tilde{\sigma}_Y \Gamma_{\tau_d(u)}^Y(1) - \tilde{\alpha} \tilde{\sigma}_X \Gamma_{\tau_d(u)}^X(1) \right) + \tilde{\alpha} \frac{B(u)}{\sqrt{u}} \\ &+ \frac{\tau_d(u)}{\sqrt{u}} ((1 + c\tilde{\alpha})\tilde{\mu}_Y - \tilde{\alpha}\tilde{\mu}_X) \\ &= \frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \left((1 + c\tilde{\alpha}) \tilde{\sigma}_Y \Gamma_{\tau_d(u)}^Y(1) - \tilde{\alpha} \tilde{\sigma}_X \Gamma_{\tau_d(u)}^X(1) \right) + \tilde{\alpha} \frac{B(u)}{\sqrt{u}}, \end{aligned}$$

jer je

$$(1 + c\tilde{\alpha})\tilde{\mu}_Y - \tilde{\alpha}\tilde{\mu}_X = \frac{(\tilde{\mu}_Z + c\tilde{\mu}_Y)\tilde{\mu}_Y - \tilde{\mu}_Y\tilde{\mu}_X}{\tilde{\mu}_Z} = \frac{\tilde{\mu}_Z\tilde{\mu}_Y - (\tilde{\mu}_X - c\tilde{\mu}_Y)\tilde{\mu}_Y}{\tilde{\mu}_Z} = 0.$$

Budući da je za proizvoljne konstante a_1, a_2 funkcija $h : D[0, 1] \times D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s $h(x, y) = a_1 x(1) - a_2 y(1)$ neprekidna na $C[0, 1] \times C[0, 1]$, prema teoremu 2.5.2 imamo (uz standardno $\tau_d(u)/u \rightarrow 1/\tilde{\mu}_Z$)

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \left((1 + c\tilde{\alpha})\tilde{\sigma}_Y \Gamma_{\tau_d(u)}^Y(1) - \tilde{\alpha}\tilde{\sigma}_X \Gamma_{\tau_d(u)}^X(1) \right) \\ & \xrightarrow{d_u} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}} \left((1 + c\tilde{\alpha})\tilde{\sigma}_Y W^2(1) - \tilde{\alpha}\tilde{\mu}_X W^1(1) \right) \\ & = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_Z^3}} \left((\tilde{\mu}_Z + c\tilde{\mu}_Y)\tilde{\sigma}_Y W^2(1) - \tilde{\mu}_Y \tilde{\sigma}_X W^1(1) \right) = \tilde{\kappa} W^0(1). \end{aligned}$$

S druge pak strane, imamo

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{u}}(\tau(u) - \tilde{\alpha}u) - \frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \left((1 + c\tilde{\alpha})\tilde{\sigma}_Y \Gamma_{\tau_d(u)}^Y(1) - \tilde{\alpha}\tilde{\sigma}_X \Gamma_{\tau_d(u)}^X(1) \right) \right| \\ & = \tilde{\alpha} \frac{B(u)}{\sqrt{u}} \xrightarrow{P(u)} 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

jer $B(u)/\sqrt{u} \xrightarrow{\tilde{P}} 0$ prema lemi 2.2.6.

(ii) Vrijedi

$$\begin{aligned} \sup_{T \geq 0} \left| e^{\nu u} \psi(u, T) - C\Phi \left(\frac{T - \tilde{\alpha}u}{\tilde{\kappa}\sqrt{u}} \right) \right| & \leq \sup_{T \geq 0} |e^{\nu u} \psi(u, T) - CP^{(u)}(\tau(u) \leq T)| \\ & + \sup_{T \geq 0} \left| CP^{(u)}(\tau(u) \leq T) - C\Phi \left(\frac{T - \tilde{\alpha}u}{\tilde{\kappa}\sqrt{u}} \right) \right| \\ & = I + II. \end{aligned}$$

Budući da konvergencija funkcija distribucije prema neprekidnom limesu povlači uniformnu konvergenciju, $II \rightarrow 0$ kada $u \rightarrow \infty$ prema (i). Nadalje, prema lemi 2.2.4 imamo

$$P^{(u)}(\tau(u) \leq T) = \frac{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)} 1_{\{\tau(u) \leq T\}}]}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]} = \frac{e^{\nu u} \tilde{E}[e^{-\nu R_{\tau_d(u)}} 1_{\{\tau(u) \leq T\}}]}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]}.$$

Sumiramo li desnu stranu po događajima $\{R_{\tau_d(u)} = n\}$, pomoću leme 2.2.3 dobivamo

$$P^{(u)}(\tau(u) \leq T) = \frac{e^{\nu u} \psi(u, T)}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]},$$

te napokon

$$I = \sup_{T \geq 0} e^{\nu u} \psi(u, T) \left| 1 - \frac{C}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]} \right| \leq e^{\nu u} \psi(u) \left| 1 - \frac{C}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]} \right| \rightarrow 0$$

kada $u \rightarrow \infty$. \square

Uz standardnu oznaku $\overline{W^0}$ za Brownov most od W^0 , u idućem teoremu umjesto S_t kao do sada radije pišemo $S(t)$ zbog bolje preglednosti. Da bismo barem malo rasteretili složen dokaz, dokažimo prvo jednu lemu.

Lema 2.5.4 *Uz $\tau_d^Y(u) = \inf\{n \in \mathbb{N}; \sum_{k=1}^n Y_k > u\}$, za proces*

$$h(t) = S \left(\sum_{k=1}^{\tau_d^Y(t)} Y_k \right) - S(t); \quad t \in [0, 1]$$

vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{u}} \sup_{t \in [0, 1]} |h(t\tau(u))| \xrightarrow{P(u)} 0.$$

Dokaz. Kao prvo primjetimo da vrijedi $\tau_d^Y(t) = N(t) + 1$, gdje je $N(t)$ Poissonov proces pristizanja zahtjeva iz početne definicije. Stoga je razlika

$$\left| S \left(\sum_{k=1}^{\tau_d^Y(t\tau(u))} Y_k \right) - S(t\tau(u)) \right| = \left| S \left(\sum_{k=1}^{N(t\tau(u))+1} Y_k \right) - S(t\tau(u)) \right|$$

upravo razlika vrijednosti procesa S između trenutaka $t\tau(u)$ i trenutka $\sum_{k=1}^{N(t\tau(u))+1} Y_k$ pristizanja idućeg zahtjeva $X_{N(t\tau(u))+1}$. Slijedi

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, 1]} |h(t\tau(u))| &\leq \sup_{t \in [0, 1]} \max\{cY_{N(t\tau(u))+1}, X_{N(t\tau(u))+1}\} \leq \max_{1 \leq k \leq \tau_d(u)} (X_k + cY_k) \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq \tau_d(u)} X_k + c \max_{1 \leq k \leq \tau_d(u)} Y_k = I + II. \end{aligned}$$

Dovoljno je dokazati da I/\sqrt{u} i $II/\sqrt{u} \xrightarrow{\tilde{P}} 0$. Dokazujemo $I/\sqrt{u} \xrightarrow{\tilde{P}} 0$ jer drugi dio slijedi na isti način. Zbog nezavisnosti, pomoću Fubinijevog teorema

$$\tilde{E} \left[\frac{1}{n} \max_{1 \leq k \leq n} X_k^2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{E} [X_k^2 1_{\{X_k = \max_{1 \leq j \leq n} X_j\}}] = \tilde{E} [X_1^2 1_{\{X_1 = \max_{1 \leq j \leq n} X_j\}}] \rightarrow 0$$

kada $n \rightarrow \infty$ jer $X_1 \in L^2$ i $\tilde{P}(X_1 = \max_{1 \leq j \leq n} X_j) = 1/n \rightarrow 0$. Stoga $\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq k \leq n} X_k \xrightarrow{\tilde{P}} 0$, pa onda i po distribuciji, što nam daje da za sve $x > 0$ vrijedi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{P} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \max_{1 \leq k \leq u} X_k \leq x \right) = \tilde{P}(X_1 \leq x\sqrt{u})^{\lfloor u \rfloor} \rightarrow 1$$

kada $u \rightarrow \infty$. Nadalje, zbog $\tau_d(u)/u \xrightarrow{\tilde{P}} 1/\tilde{\mu}_Z$ i $\tilde{\mu}_Z > 0$ slijedi da

$$\tilde{P} \left(\left| \frac{\tau_d(u)}{u} - \frac{1}{\tilde{\mu}_Z} \right| \leq \frac{1}{2\tilde{\mu}_Z} \right) = \tilde{P} \left(\tau_d(u) \in \left[\frac{1}{2\tilde{\mu}_Z}u, \frac{3}{2\tilde{\mu}_Z}u \right] \right) \rightarrow 1$$

kada $u \rightarrow \infty$. Odatle za sve $x > 0$ imamo redom

$$\begin{aligned} \tilde{P}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_d(u)}} \max_{1 \leq k \leq \tau_d(u)} X_k > x\right) &\approx \tilde{P}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_d(u)}} \max_{1 \leq k \leq \tau_d(u)} X_k > x, \tau_d(u) \in \left[\frac{1}{2\tilde{\mu}_Z}u, \frac{3}{2\tilde{\mu}_Z}u\right]\right) \\ &\leq \tilde{P}\left(\max_{1 \leq k \leq 3u/2\tilde{\mu}_Z} X_k > \frac{x\sqrt{u}}{\sqrt{2\tilde{\mu}_Z}}\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

jer je desna strana jednaka

$$1 - \tilde{P}\left(X_1 \leq \frac{x\sqrt{u}}{\sqrt{2\tilde{\mu}_Z}}\right)^{\lfloor \frac{3u}{2\tilde{\mu}_Z} \rfloor} \approx 1 - \left[\tilde{P}\left(X_1 \leq \frac{x\sqrt{u}}{\sqrt{2\tilde{\mu}_Z}}\right)^{\lfloor \frac{u}{2\tilde{\mu}_Z} \rfloor}\right]^3.$$

□

Teorem 2.5.5

$$\left(\left(\frac{S(t\tau(u)) - tu}{\sqrt{u}}\right)_{0 \leq t \leq 1}, \left(\frac{\tau(tu) - \tilde{\alpha}tu}{\sqrt{u}}\right)_{0 \leq t \leq 1}\right) \xrightarrow{d_u} \left(-\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\alpha}}\overline{W^0}, \tilde{\kappa}W^0\right)$$

Dokaz. Za dokaz se uvelike služimo konstrukcijom iz teorema 2.4.12. Slično kao i tamo prebacujemo se na $D[0, \infty)$ i definiramo

$$H_u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{\mu}_Y \tau_d(u)} \sum_{k=1}^{\lfloor t\tau_d(u) \rfloor} Y_k & ; 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\tilde{\mu}_Y \tau_d(u)} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor t\tau_d(u) \rfloor} Y_k + (t-1)\tilde{\mu}_Y \tau_d(u) \right) & ; t > 1 \end{cases},$$

$$b_u = \frac{\tilde{\sigma}_Y}{\tilde{\mu}_Y \sqrt{\tau_d(u)}}, \quad I(t) = t, \quad I_u(t) = \frac{\tau_d(u)\tilde{\mu}_Y}{\tau(u)}t \quad \text{za } t \geq 0,$$

i proširujemo Brownova gibanja W^i na $C[0, \infty)$ s $W^i(t) = W^i(1)$ za $t > 1$, $i = 0, 1, 2$. Isto radimo s $\Gamma_{\tau_d(u)}^X$ i $\Gamma_{\tau_d(u)}^Y$. Tada vrijedi

$$\frac{H_u(t) - I}{b_u} = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{\sigma}_Y \sqrt{\tau_d(u)}} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor t\tau_d(u) \rfloor} Y_k - t\tilde{\mu}_Y \tau_d(u) \right) & ; 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\tilde{\sigma}_Y \sqrt{\tau_d(u)}} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor t\tau_d(u) \rfloor} Y_k - \tilde{\mu}_Y \tau_d(u) \right) & ; t > 1 \end{cases}.$$

Kao i prije, lagano se vidi

$$d_0 \left(\left(\frac{H_u - I}{b_u} \right)_{0 \leq t \leq 1}, \Gamma_{\tau_d(u)}^Y \right) \xrightarrow{P^{(u)}} 0,$$

pa zbog teorema 2.5.2 sve skupa imamo

$$(\Gamma_{\tau_d(u)}^X, \Gamma_{\tau_d(u)}^Y, \frac{H_u - I}{b_u}) \xrightarrow{d_u} (W^1, W^2, W^2)$$

u $D[0, 1]^3$, a zbog neprekidnosti proširivanja na $D[0, \infty)$ vrijednošću u $t = 1$ i u $D[0, \infty)^3$. Nadalje, zbog

$$\frac{\tau(u)}{\tau_d(u)} = \frac{1}{\tau_d(u)} \sum_{k=1}^{\tau_d(u)} Y_k \rightarrow \tilde{\mu}_Y \quad \tilde{P} - (\text{g. s.}),$$

vrijedi $I_u^{-1}(t) = \frac{\tau(u)}{\tilde{\mu}_Y \tau_d(u)} t \xrightarrow{P^{(u)}} I$ (jer očito $I_u^{-1} \rightarrow I$ uniformno po kompaktnim intervalima $\tilde{P} - (\text{g. s.})$, pa onda i $I_u^{-1} - I \xrightarrow{\tilde{P}} 0$). Sada na isti način kao u dokazu teorema 2.4.12 (tj. pomoću leme 2.4.16 i teorema 2.4.18) dobivamo

$$(\Gamma_{\tau_d(u)}^X, \Gamma_{\tau_d(u)}^Y, \frac{H_u^{-1} \circ I_u^{-1} - I_u^{-1}}{b_u}) \xrightarrow{d_u} (W^1, W^2, -W^2)$$

u $D[0, \infty)^3$, pa onda i u $D[0, 1]^3$ jer je restrikcija na $[0, 1]$ neprekidna funkcija. Uz označku $\tau_d^Y(u) = \inf\{n \in \mathbb{N}; \sum_{k=1}^n Y_k > u\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} H_u^{-1}(t) &= \inf\{s; H_u(s) > t\} = \inf\{s; \frac{1}{\tilde{\mu}_Y \tau_d(u)} \sum_{k=1}^{\lfloor s \tau_d(u) \rfloor} Y_k > t\} = \frac{\tau_d^Y(\tilde{\mu}_Y t \tau_d(u))}{\tau_d(u)} \\ &= \frac{\tau_d^Y(I_u(t) \tau(u))}{\tau_d(u)}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{H_u^{-1} \circ I_u^{-1}(t) - I_u^{-1}(t)}{b_u} = \frac{\tilde{\mu}_Y \tau_d^Y(t \tau(u)) - t \tau(u)}{\tilde{\sigma}_Y \sqrt{\tau_d(u)}}.$$

Kako $\frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \xrightarrow{P^{(u)}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}}$ i množenje funkcija iz $D[0, 1]$ konstantom je neprekidno, na kraju dobivamo

$$\left(\Gamma_{\tau_d(u)}^X, \Gamma_{\tau_d(u)}^Y, \left(\frac{\tilde{\mu}_Y \tau_d^Y(t \tau(u)) - t \tau(u)}{\tilde{\sigma}_Y \sqrt{u}} \right)_{0 \leq t \leq 1} \right) \xrightarrow{d_u} \left(W^1, W^2, -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}} W^2 \right). \quad (2.58)$$

Definirajmo kao u prošloj lemi $h(t) = S(\sum_{k=1}^{\tau_d^Y(t)} Y_k) - S(t)$, te uvedimo novu označku $J_u(t) = \frac{\tau_d^Y(t \tau(u))}{\tau_d(u)}$. Vrijedi $J_u(t) = \frac{\tau_d^Y(t \tau(u))}{\tau_d(u)} = \frac{\tau_d^Y(t \tau(u))}{t \tau(u)} \frac{t \tau(u)}{\tau_d(u)} \rightarrow I \quad \tilde{P} - (\text{g. s.})$, pa onda i po $P^{(u)}$

vjerojatnosti u $D[0, 1]$ (jer je konvergencija očito uniformna po kompaktnim skupovima u $\langle 0, 1 \rangle$, za $t = 0$ trivijalno). Označimo li s η_u^1 proces na prvoj koordinati u iskazu, prema lemi 2.5.4 slijedi

$$\begin{aligned}\eta_u^1(t) &= \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-h(t\tau(u)) + S \left(\sum_{k=1}^{\tau_d^Y(t\tau(u))} Y_k \right) - tu \right) \approx \frac{1}{\sqrt{u}} \left(S \left(\sum_{k=1}^{\tau_d^Y(t\tau(u))} Y_k \right) - tu \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{u}} \left(R_{\tau_d^Y(t\tau(u))} - tu \right),\end{aligned}$$

gdje \approx znači približnu jednakost po $P^{(u)}$ vjerojatnosti (tj. razlika lijeve i desne strane $\xrightarrow{P^{(u)}} 0$). Uočimo

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \left(\tilde{\sigma}_X \Gamma_{\tau_d(u)}^X (J_u(t)) - c \tilde{\sigma}_Y \Gamma_{\tau_d(u)}^Y (J_u(t)) \right) + \frac{1}{\sqrt{u}} (\tilde{\mu}_Z \tau_d^Y(t\tau(u)) - tu) \\ &= \frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_d(u)}} \sum_{k=1}^{\tau_d^Y(t\tau(u))} (X_k - \tilde{\mu}_X) - c \frac{1}{\sqrt{\tau_d(u)}} \sum_{k=1}^{\tau_d^Y(t\tau(u))} (Y_k - \tilde{\mu}_Y) \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{u}} (\tilde{\mu}_Z \tau_d^Y(t\tau(u)) - tu) = \frac{1}{\sqrt{u}} \left(R_{\tau_d^Y(t\tau(u))} - tu \right),\end{aligned}$$

te slijedi

$$\begin{aligned}\eta_u^1(t) &\approx \frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \left(\tilde{\sigma}_X \Gamma_{\tau_d(u)}^X (J_u(t)) - c \tilde{\sigma}_Y \Gamma_{\tau_d(u)}^Y (J_u(t)) \right) + \frac{1}{\sqrt{u}} (\tilde{\mu}_Z \tau_d^Y(t\tau(u)) - tu) \\ &= \frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \left(\tilde{\sigma}_X \Gamma_{\tau_d(u)}^X (J_u(t)) - c \tilde{\sigma}_Y \Gamma_{\tau_d(u)}^Y (J_u(t)) \right) + \tilde{\mu}_Z \frac{\tau_d^Y(t\tau(u)) - \frac{t\tau(u)}{\tilde{\mu}_Y}}{\sqrt{u}} \\ &+ \frac{t}{\tilde{\alpha}} \left(\frac{\tau(u) - \tilde{\alpha}u}{\sqrt{u}} \right).\end{aligned}$$

Uvažimo li dokaz korolara 2.5.3 (odnosno relaciju (2.57)) i (2.58), vrijedi

$$\begin{aligned}&\left(\Gamma_{\tau_d(u)}^X, \Gamma_{\tau_d(u)}^Y, \left(\frac{\tau_d^Y(t\tau(u)) - t\tau(u)/\tilde{\mu}_Y}{\sqrt{u}} \right)_{0 \leq t \leq 1}, J_u, \frac{\tau(u) - \tilde{\alpha}u}{\sqrt{u}}, \frac{\sqrt{\tau_d(u)}}{\sqrt{u}} \right) \\ &\xrightarrow{d_u} \left(W^1, W^2, -\frac{\tilde{\sigma}_Y}{\tilde{\mu}_Y \sqrt{\tilde{\mu}_Z}} W^2, I, \tilde{\kappa} W^0(1), \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}} \right).\end{aligned}\tag{2.59}$$

Pri tome se referenca na korolar 2.5.3 odnosi na ubacivanje pete komponente u gornju konvergenciju. Argumenti u takvom zaključku istovjetni su onima kod dodavanja sedme komponente, što radimo u nastavku. Funkcija $h : D[0, 1]^4 \times \mathbb{R}^2$ definirana s

$$h(x(t), y(t), z(t), \varphi(t), a, b) = b(\tilde{\sigma}_X x(\varphi(t)) - c \tilde{\sigma}_Y y(\varphi(t))) + \tilde{\mu}_Z z(t) + \frac{t}{\tilde{\alpha}} a$$

je neprekidna na $C[0, 1]^4 \times \mathbb{R}^2$, pa iz gornje dvije relacije slijedi

$$\begin{aligned}\eta_u^1 &\xrightarrow{d_u} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_Z}} (\tilde{\sigma}_X W^1 - c \tilde{\sigma}_Y W^2) - \frac{\tilde{\sigma}_Y \sqrt{\tilde{\mu}_Z}}{\tilde{\mu}_Y} W^2 + t \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\alpha}} W^0(1) \\ &= -\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\alpha}} W^0 + t \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\alpha}} W^0(1) \\ &= -\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\alpha}} \overline{W^0},\end{aligned}$$

a iz konstrukcije je jasno da gornju relaciju možemo ubaciti u (2.59) kao sedmu komponentu. Posebno, imamo

$$\left(\eta_u^1, \frac{\tau(u) - \tilde{\alpha}u}{\sqrt{u}} \right) \xrightarrow{d_u} \left(-\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\alpha}} \overline{W^0}, \tilde{\kappa} W^0(1) \right) \quad (2.60)$$

u $D[0, 1] \times \mathbb{R}$. Ponovo se prebacujemo na $D[0, \infty)$ na već standardan način: proširivanjem s vrijednošću u $t = 1$, pa gornja konvergencija vrijedi i u $D[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Definiramo

$$H_u(t) = \begin{cases} \frac{1}{u} S(t\tau(u)) & ; 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{u} S(\tau(u)) + (t-1) & ; t > 1 \end{cases},$$

i odmah vidimo

$$\sqrt{u}(H_u(t) - t) = \begin{cases} \eta_u^1(t) & ; 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{u}}(S(\tau(u)) - u) & ; t > 1 \end{cases},$$

odnosno $\sqrt{u}(H_u(t) - t)$ je proširenje od η_u^1 na $D[0, \infty)$ vrijednošću $\eta_u^1(1)$. Ponavljajući istu tehniku kao u dokazu teorema 2.4.12, dobivamo

$$\left(\sqrt{u}(H_u(t) - t), \sqrt{u}(H_u^{-1}(t) - t), \frac{\tau(u) - \tilde{\alpha}u}{\sqrt{u}} \right) \xrightarrow{d_u} \left(-\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\alpha}} \overline{W^0}, \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\alpha}} \overline{W^0}, \tilde{\kappa} W^0(1) \right) \quad (2.61)$$

u $D[0, \infty)^2 \times \mathbb{R}$. Nadalje, imamo

$$H_u^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0; H_u(s) > t\} = \inf\{s \geq 0; S(s\tau(u)) > tu\} = \frac{\tau(tu)}{\tau(u)},$$

odnosno

$$\sqrt{u}(H_u^{-1}(t) - t) = \sqrt{u} \left(\frac{\tau(tu)}{\tau(u)} - t \right).$$

Budući da $\frac{\tau(u)}{u} = \frac{\tau(u)}{\tau_d(u)} \frac{\tau_d(u)}{u} \xrightarrow{P(u)} \tilde{\alpha}$ i

$$\frac{\tau(tu) - \tilde{\alpha}tu}{\sqrt{u}} = \frac{\tau(tu) - t\tau(u)}{\sqrt{u}} + t \frac{\tau(u) - \tilde{\alpha}u}{\sqrt{u}} = \frac{\tau(u)}{u} \sqrt{u} \left(\frac{\tau(tu)}{\tau(u)} - t \right) + t \frac{\tau(u) - \tilde{\alpha}u}{\sqrt{u}},$$

prema (2.61) slijedi

$$\left(\frac{\tau(tu) - \tilde{\alpha}tu}{\sqrt{u}} \right)_{t \geq 0} \xrightarrow{d_u} \tilde{\kappa} \overline{W^0} + (t\tilde{\kappa}W^0(1))_{t \geq 0} = \tilde{\kappa}W^0.$$

Gornji izraz možemo dodati u (2.61) kao četvrtu komponentu, pa restrikcijom na $D[0, 1]$ napokon dobivamo

$$\left(\eta_u^1, \left(\frac{\tau(tu) - \tilde{\alpha}tu}{\sqrt{u}} \right)_{0 \leq t \leq 1} \right) \xrightarrow{d_u} \left(-\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\alpha}} \overline{W^0}, \tilde{\kappa}W^0 \right),$$

što se i tražilo. \square

Odmah se vidi da je korolar 2.5.3 samo poseban slučaj ovog teorema, dobiven korištenjem teorema o neprekidnom preslikavanju. Još jedna zanimljiva direktna posljedica daje nam jači odgovor na pitanje kako izgledaju tipične trajektorije koje vode u propast, odnosno

Na koji se način događa propast?

Korolar 2.5.6

$$\left(\left(\frac{S(t\tau(u))}{\tau(u)} \right)_{0 \leq t \leq 1}, B(u) \right) \xrightarrow{d_u} (\tilde{\mu}_Z I, A),$$

gdje je I funkcija identiteta na $[0, 1]$ i A slučajna varijabla s funkcijom distribucije

$$F_A(x) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^x e^{-\nu t} dF_{B(\infty)}(t).$$

Dokaz. Budući da je preslikavanje $h : D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definirano s $h(x) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ neprekidno na $C[0, 1]$ slijedi da $\sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{S(t\tau(u)) - tu}{\sqrt{u}} \right|$ konvergira po d_u distribuciji nede-generiranom limesu, odakle odmah imamo

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{S(t\tau(u)) - tu}{u} \right| \xrightarrow{P(u)} 0,$$

odnosno

$$d_0 \left(\left(\frac{S(t\tau(u))}{u} \right)_{0 \leq t \leq 1}, I \right) \xrightarrow{P(u)} 0.$$

Iskoristimo li $\tau(u)/u \xrightarrow{P(u)} 1/\tilde{\mu}_Z$, dobivamo

$$\left(\frac{S(t\tau(u))}{\tau(u)} \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{P(u)} \tilde{\mu}_Z I.$$

Za drugi dio koristimo lemu 2.2.6 ($B(u) \xrightarrow{\tilde{d}} B(\infty)$) i lemu 2.2.4 ($\frac{dP^{(u)}}{d\tilde{P}} = \frac{e^{-\nu B(u)}}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]}$). Za proizvoljnu $g \in C_b(\mathbb{R})$ imamo redom

$$\begin{aligned} E^{(u)}[g(B(u))] &= \int g(B(u))dP^{(u)} = \frac{1}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]} \int g(B(u))e^{-\nu B(u)}d\tilde{P} \\ &= \frac{1}{\tilde{E}[e^{-\nu B(u)}]} \int g(x)e^{-\nu x}d\tilde{F}_{B(u)}(x) \rightarrow \frac{1}{C} \int g(x)e^{-\nu x}dF_{B(\infty)}(x). \end{aligned}$$

□

Navedeni se korolar može postići i u još jačem obliku. U Schmidli [42], teorem 2 i primjer 2, izračunata je zajednička asymptotska $P^{(u)}$ -distribucija slučajnog vektora $(B(u), u - S_{\tau(u)-})$ ($u - S_{\tau(u)-}$ je upravo nivo procesa rizika (U_t) neposredno prije zahtjeva koji vodi u propast). Pristup koji je baziran na integralno-diferencijalnoj jednadžbi za funkciju

$$f(u, x, y) = P(\tau(u) < \infty, B(u) > x, u - S_{\tau(u)-} > y), \quad (2.62)$$

metodom Laplaceovih transformacija daje (u slučaju malih zahtjeva)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)}(B(u) > x, u - S_{\tau(u)-} > y) = \frac{\lambda}{c - \lambda \mu_X} \int_y^{\infty} (e^{\nu t} - 1) \bar{F}(t + x) dt, \quad (2.63)$$

gdje je F distribucija veličine zahtjeva. Zahtjev koji vodi u propast $X_{\tau_d(u)}$ možemo prikazati kao $X_{\tau_d(u)} = B(u) + u - S_{\tau(u)-}$. Sada je jasno da primjenom teorema o neprekidnom preslikavanju imamo

Korolar 2.5.7

$$\left(\left(\frac{S(t\tau(u))}{\tau(u)} \right)_{0 \leq t \leq 1}, B(u), u - S_{\tau(u)-}, X_{\tau_d(u)} \right) \xrightarrow{d_u} (\tilde{\mu}_Z I, A, B, C),$$

gdje je (A, B, C) slučajni element u \mathbb{R}^3 s nedegeneriranom distribucijom.

Prvi dio gornjeg rezultata možemo pisati i u manje formalnom obliku

$$S(t\tau(u)) \approx \tilde{\mu}_Z t\tau(u) \text{ po } P^{(u)} \text{ distribuciji za veliki } u,$$

što je konzistentno s nekim ranijim rezultatima dobivenim u ovom poglavlju. Također, odmah vidimo da sve tri vrijednosti koje opisuju sam događaj propasti $B(u)$, $u - S_{\tau(u)-}$ i $X_{\tau_d(u)}$ imaju nedegeneriranu asymptotsku $P^{(u)}$ distribuciju. Zato na kraju možemo zaključiti da se propast u slučaju malih zahtjeva događa na način da se mijenja drift cijele trajektorije, i to tako da se približava driftu pridružene slučajne šetnje. Jednostavnije rečeno, propast u slučaju malih zahtjeva događa se gomilanjem velikog broja zahtjeva za

isplatu, a ne kao posljedica jednog ili više "velikih" (iako se u stvari i sama distribucija zahtjeva mijenja). Za dodatno utvrđivanje takvog zaključka skrenimo još jednom pozornost na \tilde{P} -distribucije zahtjeva X_k i međuvremena pristizanja Y_k dane relacijom (2.54). Iz oblika distribucije međuvremena vidimo da se intenzitet pripadnog Poissonovog procesa mijenja iz λ u $\lambda + c\nu$, što jasno sugerira da se broj pristiglih zahtjeva povećava. S druge strane, vjerojatnost nešto većih zahtjeva se povećava u smislu da vrijedi

$$\tilde{P}(X \in [x_0, x]) \geq P(X \in [x_0, x]),$$

gdje je x_0 takav da vrijedi $e^{\nu x_0} = \hat{f}_X(\nu)$. Ova je pojava, kako ćemo vidjeti u idućem poglavlju, u potpunom kontrastu s načinom na koji se događa propast u slučaju velikih zahtjeva, gdje ju uzrokuje jedan veliki zahtjev.

Što se tiče vjerojatnosti propasti u konačnom i beskonačnom vremenu, rezultati koje smo dokazali ne predstavljaju krajnji domet u tom smjeru. U oba se slučaja aproksimiraju mali brojevi, pa postoji rizik da faktor greške (o kojem nemamo nikakvih saznanja) bude i višestruko veći od vrijednosti koju aproksimiramo. Stoga je od interesa dobiti što je moguće bolje rezultate u tom smislu, te se istraživanje pogodnih aproksimacija nastavlja u smjeru aproksimacija difuzijom, prilagodbi unaprijed zadanoj razdiobi ili metode simulacija. Od relevantne literature koja pokriva opisanu problematiku ovom prilikom ističemo npr. Beekman [11] za aproksimaciju Gama razdiobom, dok De Vylder [17] koristi aproksimaciju procesom s eksponencijalno distribuiranim veličinama zahtjeva. Za procjenu vjerojatnosti propasti u konačnom vremenu pomoću normalne razdiobe vidi Segerdahl [43], dok se za istu tu vjerojatnost u Gerber [27] martingalnim metodama postižu određene nejednakosti. Aproksimacije sedlastom točkom proučavaju Barndorff-Nielsen i Schmidli [10]. Za aproksimaciju difuzijom vidi Grandell [29], [30]. Metodu simulacija proučava Asmussen [3] i [5], Asmussen i Rubinstein [9]. Najbolji pregled tematike pruža Asmussen [6].

Poglavlje 3

Slučaj velikih zahtjeva

U ovom se poglavlju koncentriramo na pitanje propasti u slučaju velikih zahtjeva, odnosno kada distribucija veličine zahtjeva ima tzv. teški rep. Tipične distribucije koje spadaju u tu klasu popisane su u tablici 2.2. Kako smo pokazali na primjeru Paretovе distribucije, ni za jednu od njih ne postoji Cramér-Lundbergov eksponent. Što više, lagano se vidi da neke od tih distribucija niti nemaju drugi moment, što je prvi pokazatelj prirode pojave koju u nastavku proučavamo. Ovdje valja naglasiti i to da se pokazalo kako neke distribucije iz navedene tablice zaista odgovaraju povijesnim podacima o nastalim štetama, gdje posebno ističemo Paretovу koja dobro aproksimira empirijske podatke iz npr. požarnih portfelja. Stoga i daljnje istraživanje usmjeravamo prema klasama distribucija kojima bi one pripadale.

U prvom redu pozornost valja posvetiti analitičkim svojstvima takvih distribucija. Već smo i ranije spomenuli da je ključno analitičko svojstvo brzina konvergencije repa $\bar{F}(x)$ prema 0 kada $x \rightarrow \infty$. Sasvim je jasno da ovdje ne može biti govora ni o kakvom eksponencijalnom ponašanju, pa se niti ne treba nadati da ćemo moći upotrijebiti metode slične onima u prethodnom poglavlju. S druge strane, klasa distribucija za koje je $\hat{f}(x) = \infty$ za sve $x > 0$ (vidi sliku 2.1 (3)) ipak je preširoka da bismo dobili općenite netrivijalne rezultate za vjerojatnosti propasti, te ćemo je zbog toga morati reducirati nekim dodatnim zahtjevima (oblicima), ali na način da ona ipak pokriva sve relevantne primjere distribucija velikih zahtjeva (vidi tablicu 2.2). Takva situacija vodi nas u smjeru teorije funkcija regularne varijacije i subeksponencijalnih distribucija koja se pokazuje pogodnom za opisivanje traženih svojstava.

3.1 Regularna varijacija i subeksponencijalnost

Sve definicije i rezultati koji se tiču funkcija regularne varijacije a koje ovdje iznosimo mogu se pronaći u Bingham et al. [13]. Za subeksponencijalne distribucije upućujemo na Embrechts et al. [19] i Asmussen [6].

Definicija 3.1.1 (i) Pozitivna, Lebesgue izmjeriva funkcija L na $\langle 0, \infty \rangle$ je spore varijacije u ∞ (pišemo $L \in \mathcal{R}_0$) ako

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \quad \forall t > 0. \quad (3.1)$$

(ii) Pozitivna, Lebesgue izmjeriva funkcija h na $\langle 0, \infty \rangle$ je regularne varijacije u ∞ indeksa $\alpha \in \mathbb{R}$ (pišemo $h \in \mathcal{R}_\alpha$) ako

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha, \quad \forall t > 0. \quad (3.2)$$

Tipični primjeri funkcija spore varijacije su pozitivne konstante ili funkcije koje konvergiraju prema pozitivnoj konstanti, opće potencije, logaritmi i iterirani logaritmi. Primjerice, za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcije

$$x^\alpha, \quad x^\alpha \ln(1+x), \quad (x \ln(1+x))^\alpha, \quad x^\alpha \ln(\ln(e+x))$$

su regularne varijacije indeksa α .

Već na startu imamo za nas važan rezultat koji otkriva kako je konvergencija u definiciji u stvari uniformna, odnosno vrijedi

Teorem 3.1.2 (Teorem uniformne konvergencije za funkcije regularne varijacije)
Ako je $h \in \mathcal{R}_\alpha$, gdje u slučaju $\alpha > 0$ pretpostavljamo da je za proizvoljan $x > 0$ h ograničena na intervalu $\langle 0, x]$, tada za $0 < a \leq b < \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha, \quad \text{uniformno po } t$$

- (i) na svakom $[a, b]$ ako je $\alpha = 0$,
- (ii) na svakom $\langle 0, b]$ ako je $\alpha > 0$,
- (iii) na svakom $[a, \infty)$ ako je $\alpha < 0$.

Iz gornje se definicije odmah vidi da se svaka funkcija regularne varijacije $L_1 \in \mathcal{R}_\alpha$ može prikazati u obliku $L_1(x) = x^\alpha L_2(x)$, gdje je $L_2 \in \mathcal{R}_0$ funkcija spore varijacije. S tim u vidu iskazujemo idući Karamatin rezultat koji nam, grubo govoreći, kaže da je integral funkcije regularne varijacije opet funkcija regularne varijacije.

Teorem 3.1.3 (Karamatin teorem) Neka je $L \in \mathcal{R}_0$ lokalno ograničena na $[x_0, \infty)$ za neko $x_0 \geq 0$. Tada

(i) za $\alpha > -1$,

$$\int_{x_0}^x t^\alpha L(t) dt \sim (\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

(ii) za $\alpha < -1$,

$$\int_x^\infty t^\alpha L(t) dt \sim -(\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Zaključak Karamatinog teorema može se alternativno formulirati kako slijedi: neka je $h \in \mathcal{R}_\alpha$ lokalno ograničena na $[x_0, \infty)$ za neko $x_0 \geq 0$. Tada

(i') za $\alpha > -1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{x_0}^x h(t) dt}{x h(x)} = \frac{1}{\alpha + 1},$$

(ii') za $\alpha < -1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^\infty h(t) dt}{x h(x)} = -\frac{1}{\alpha + 1}.$$

U stvari, kod teorema (3.1.3) vrijedi i obrat, za što upućujemo na Bingham et al. [13], teorem 1.6.1.

Budući da se svojstvo regularne varijacije prenosi s funkcije na njezin integral, možemo se zapitati da li analogna stvar vrijedi i za derivaciju (kada postoji). Odgovor na to daje

Teorem 3.1.4 (Teorem o monotonoj gustoći) Neka je $U(x) = \int_0^x u(y) dy$ gdje je u pri kraju monotona (tj. u je monotona na (z, ∞) za neko $z > 0$). Ako

$$U(x) \sim cx^\alpha L(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

gdje su $c \geq 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$ i $L \in \mathcal{R}_0$, tada

$$u(x) \sim c\alpha x^{\alpha-1} L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Za $c = 0$ gornja se relacija interpretira kao $U(x) = o(x^\alpha L(x))$ i $u(x) = o(x^{\alpha-1} L(x))$.

Definicija 3.1.5 (Subeksponencijalne distribucije) Za proizvoljnu funkciju distribucije F koncentriranu na $(0, +\infty)$ kažemo da je subeksponencijalna ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi relacija

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n. \tag{3.3}$$

Motivacija za ovakvu definiciju subeksponencijalnosti dolazi iz promatranja slučajne šetnje s distribucijom prirasta F . Pretpostavimo da su X_1, \dots, X_n nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije F . Označimo njihovu sumu s $S_n = X_1 + \dots + X_n$ i maksimum sa $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Tada za sve $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(S_n > x) &= \overline{F^{n*}}(x), \\ P(M_n > x) &= \overline{F^n}(x) \\ &= \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \\ &\sim n\overline{F}(x), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Uz ovu notaciju, gornja se definicija može preformulirati tako da kažemo da je F subeksponencijalna ako i samo ako

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x) \text{ kada } x \rightarrow \infty \text{ za sve } n \in \mathbb{N},$$

odnosno ako i samo ako *rep maksimuma određuje rep sume*. U stvari, uvjet iz gornje definicije može se značajno reducirati, tj. može se pokazati (vidi Embrechts et al. [19], lema 1.3.4) da je njemu ekvivalentan uvjet

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2. \tag{3.5}$$

No iako smo uvjet sveli na provjeru samo jedne relacije, proizlazi da u praksi ni to nije baš pogodno. Dovoljni uvjeti za subeksponencijalnost traže se na druge načine, pa ni mi ovom kriteriju nećemo posvetiti previše pažnje.

Od sada pa nadalje klasu svih subeksponencijalnih distribucija označavamo sa \mathcal{S} . Veza koja postoji između subeksponencijalnih i distribucija s repom regularne varijacije jest

Propozicija 3.1.6 *Svaka distribucija s repom regularne varijacije indeksa $-\alpha > 0$ je ujedno i subeksponencijalna, odnosno*

$$\bigcup_{\alpha > 0} \{F; \overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Gornji smo rezultat prenijeli iz Asmussen [6], odjeljak IX.1, odakle dolazi i nekoliko idućih koji će dodatno opisati nama najbitnija matematička svojstva regularne varijacije i subeksponencijalnosti. Prvi takav jest

Propozicija 3.1.7 *Ako je $F \in \mathcal{S}$, onda*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1,$$

uniformno po kompaktnim y -podskupovima od $[0, \infty)$.

Ovo je jedno od mesta na kojima dobivamo bližu informaciju o ponašanju repa distribucija koje proučavamo: gornji će limes u slučaju npr. eksponencijalne distribucije dati po volji malu vrijednost (pogodnim odabirom y).

Iduće svojstvo vraća nas na mjesto na kojem je i počela motivacija za proučavanjem teških repova. Kao i ranije, \hat{f} označava funkciju izvodnicu momenata distribucije F .

Propozicija 3.1.8 *Ako je $F \in \mathcal{S}$, onda za sve $\varepsilon > 0$ vrijedi*

- (i) $\hat{f}(\varepsilon) = \infty$,
- (ii) $e^{\varepsilon x} \bar{F}(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty$.

Riječima kazano, funkcija izvodnica momenata subeksponencijalnih distribucija definirana je samo na $(-\infty, 0)$, dok je konvergencija prema 0 njezinog repa sporija od bilo koje eksponencijalne funkcije.

Lema 3.1.9 *Neka je $F \in \mathcal{S}$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji konstanta $K = K_\varepsilon$ takva da za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ i $x > 0$ vrijedi*

$$\overline{F^{n*}}(x) \leq K(1 + \varepsilon)^n \bar{F}(x). \quad (3.6)$$

Gornja se formula koristi u asymptotskoj ocjeni vjerojatnosti propasti u beskonačnom vremenu za slučaj subeksponencijalnih repova.

Propozicija 3.1.10 *Neka su G_1 i G_2 distribucije na $(0, +\infty)$ sa svojstvom $\overline{G_i}(x) \sim a_i \bar{F}(x)$ za neku $F \in \mathcal{S}$ i konstante $a_1, a_2 > 0$. Tada*

$$\overline{G_1 * G_2}(x) \sim (a_1 + a_2) \bar{F}(x).$$

Direktna je posljedica gornje propozicije rezultat o zatvorenosti od \mathcal{S} na ekvivalenciju repova.

Korolar 3.1.11 *Ako je $\overline{G}(x) \sim a \bar{F}(x)$ za neku $F \in \mathcal{S}$ i $a > 0$, onda je $G \in \mathcal{S}$.*

Dokaz. Uzmimo $G_1 = G_2 = G$ i $a_1 = a_2 = a$ u propoziciji 3.1.10, čime dobivamo $\overline{G^{2*}}(x) \sim 2a \bar{F}(x) \sim 2\overline{G}(x)$. Tvrđnja sada slijedi iz relacije (3.5) (ili po definiciji subeksponencijalnosti pomoću matematičke indukcije). \square

Korolar 3.1.12 *Neka je $F \in \mathcal{S}$ i G neka distribucija s laganim repom u smislu $\overline{G}(x) = o(\bar{F}(x))$. Tada je $\overline{G * F}(x) \sim \bar{F}(x)$.*

Propozicija 3.1.13 *Neka je $F \in \mathcal{S}$ i F_0 njezin integrirani rep. Tada vrijedi*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_0}(x)}{\bar{F}(x)} = \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

Dokaz. Zbog $1 \geq \overline{F}(x+y)/\overline{F}(x) \geq \overline{F}(x+a)/\overline{F}(x)$ za $y \in [0, a]$, prema propoziciji 3.1.7 slijedi $\overline{F}(x+y)/\overline{F}(x) \rightarrow 1$ kada $x \rightarrow \infty$ uniformno po $y \in [0, a]$. Slijedi

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_0(x)}{\overline{F}(x)} \geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{x+a} \overline{F}(y) dy}{\mu_F \overline{F}(x)} = \frac{a}{\mu_F},$$

pa tvrdnja slijedi puštanjem $a \rightarrow \infty$. \square

3.2 Vjerojatnost propasti u beskonačnom vremenu

Za proces rizika zadržavamo iste oznake kao ranije, pa tako F označava distribuciju veličine zahtjeva, λ intenzitet Poissonovog procesa koji opisuje njihovo pristizanje, c stopu uplata premija, $\rho = \frac{c - \lambda \mu_X}{\lambda \mu_X} > 0$ sigurnost uplate, $\psi(u)$ vjerojatnost propasti u beskonačnom vremenu uz početni kapital u itd. (vidi odjeljak 1.1).

Proučavanje distribucije rekordnih uzleta dovelo nas je do Pollaczek-Hinčinove (1.27) formule za vjerojatnost propasti u beskonačnom vremenu oblika

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda \mu_X}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda \mu_X}{c}\right)^n \overline{F}_0^{n*}(u),$$

odnosno, u malo drugaćijem obliku

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \overline{F}_0^{n*}(u).$$

Vrijedi

Propozicija 3.2.1 Ako je $F_0 \in \mathcal{S}$, onda

$$\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_0(u). \quad (3.7)$$

Dokaz. Podijelimo li gornju relaciju s $\overline{F}_0(u)$, slijedi

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F}_0(u)} = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \frac{\overline{F}_0^{n*}(u)}{\overline{F}_0(u)} \rightarrow \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} n = \rho^{-1}, \quad u \rightarrow \infty,$$

pri čemu još treba opravdati zamjenu limesa i sume. No zbog $(1 + \rho)^{-1} < 1$ postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom $(1 + \rho)^{-1}(1 + \varepsilon) < 1$. Nadalje, za tako odabran ε prema lemi 3.1.9 postoji konstanta K takva da je $\frac{\overline{F}_0^{n*}(u)}{\overline{F}_0(u)} < K(1 + \varepsilon)^n$ uniformno po u i n , što nam daje

$$(1 + \rho)^{-n} \frac{\overline{F}_0^{n*}(u)}{\overline{F}_0(u)} \leq K(1 + \rho)^{-n} (1 + \varepsilon)^n,$$

odakle slijedi da se limes i suma mogu zamijeniti. \square

I taj rezultat može se iskazati i u jačem obliku, ovdje preuzetom iz Embrechts et al. [19], teorem 1.3.8.

Teorem 3.2.2 *Iduće je ekvivalentno:*

- (i) $F_0 \in \mathcal{S}$,
- (ii) $1 - \psi \in \mathcal{S}$,
- (iii) $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{F_0(u)} = \rho^{-1}$.

Stoga je, u slučaju teškog repa, \mathcal{S} zaista prirodna klasa za promatranje što se tiče distribucije veličine zahtjeva (tj. pripadnog integriranog repa). No svakako bismo htjeli povući i vezu između F i F_0 pa se prvo pitamo da li $F \in \mathcal{S} \Rightarrow F_0 \in \mathcal{S}$? Nažalost, u općem slučaju takva tvrdnja ne vrijedi, pa treba dalje istraživati dovoljne uvjete na F koji daju $F_0 \in \mathcal{S}$. S druge strane, ni uz pretpostavku $F_0 \in \mathcal{S}$ još uvijek nije moguće dobiti neke značajnije rezultate oko načina na koji se događa propast, pa klasu distribucija koje proučavamo još malo reduciramo (opet pazeći na to da i takva reducirana klasa još sadrži sve tipične distribucije velikih zahtjeva iz tablice 2.2). U nastojanjima da odgovorimo na spomenuta dva pitanja (kada je $F_0 \in \mathcal{S}$ i kako se događa propast) na prirođan način dolazimo do pojma *maksimalne domene privlačenja*.

3.3 Konvergencija tipova i maksimalne domene privlačenja

Poznat (i riješen) problem u teoriji vjerojatnosti jest pitanje konvergencije po distribuciji uzoračkog maksimuma. Preciznije kazano, neka je F distribucija niza nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli (X_n) i $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Pitanje koje se postavlja jest: postoje li nizovi (a_n) i (b_n) takvi da $(M_n - b_n)/a_n$ konvergira po distribuciji nekoj nedegeneriranoj razdiobi, i ako da uz koje uvjete. Prevedeno na funkcije distribucije, to bi značilo da niz funkcija $F^n(a_n x + b_n)$ slabo konvergira nekoj nedegeneriranoj vjerojatnosnoj funkciji distribucije. Također, u slučaju potvrđnog odgovora od interesa jest i pitanje jedinstvenosti odgovarajućih nizova, odnosno granične distribucije. Pokazuje se da navedeni objekti, kada postoje, zaista i jesu jedinstveni u određenom smislu. Precizno formulirano, imamo

Teorem 3.3.1 (Teorem o konvergenciji tipova) *Neka je (F_n) proizvoljan niz funkcija distribucije, te (a_n) , (b_n) , (α_n) , (β_n) nizovi koji zadovoljavaju $a_n > 0$ i $\alpha_n \geq 0$ za sve n . Neka su U i V distribucije koje nisu koncentrirane u točki.*

(i) Ako vrijedi

$$F_n(a_n x + b_n) \rightarrow U(x) \quad i \quad F_n(\alpha_n x + \beta_n) \rightarrow V(x) \quad (3.8)$$

slabo, onda

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \rightarrow A > 0 \quad i \quad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \rightarrow B \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

i

$$V(x) = U(Ax + B). \quad (3.10)$$

(ii) Ako vrijedi (3.9), onda bilo koja od relacija iz (3.8) povlači onu drugu i pri tome vrijedi (3.10).

Teorem 3.3.2 (Fisher-Tippett) Neka je (X_n) niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Ako postoji nizovi normirajućih konstanti (a_n) , $a_n > 0$ i (b_n) i neka nedegenerirana funkcija distribucije H takva da vrijedi

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} H, \quad (3.11)$$

onda H pripada jednom od idućih triju tipova:

$$\text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & , x > 0 \end{cases}, \alpha > 0.$$

$$\text{Weibull: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x^\alpha)\} & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}, \alpha > 0.$$

$$\text{Gumbel: } \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}.$$

Dokaz se može pronaći u Ferguson [23], str. 97-98.

Definicija 3.3.3 Distribucije iz gornjeg teorema nazivaju se distribucijama ekstremnih vrijednosti, dok odgovarajuće slučajne varijable nazivamo ekstremnim slučajnim varijablama.

Definicija 3.3.4 Kažemo da slučajna varijabla X (funkcija distribucije F od X) pripada maksimalnoj domeni privlačenja distribucije ekstremnih vrijednosti H ako postoji konstante $a_n > 0$, b_n takve da za niz nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom F vrijedi (3.11). U tom slučaju pišemo $X \in MDA(H)$ (odnosno $F \in MDA(H)$).

Označimo li s F distribuciju niza (X_n) iz gornjeg teorema, možemo postaviti iduće pitanje: uz zadanu distribuciju ekstremnih vrijednosti H , koji su nužni (i dovoljni) uvjeti na F da bismo imali $F \in MDA(H)$? U prvom dijelu odgovora na to pitanje, opet se vraćamo na ranije spomenutu klasu funkcija regularne varijacije.

Teorem 3.3.5 (Maksimalna domena privlačenja od Φ_α) Za proizvoljno $\alpha > 0$ vrijeđi

$$F \in MDA(\Phi_\alpha) \iff \bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}.$$

U tom slučaju konstante a_n i b_n se mogu odabrat na način $b_n = 0$ i $a_n = F^{-1}(1 - n^{-1})$, gdje F^{-1} označava pripadni generalizirani inverz.

Dokaz se može pronaći u Galambos [25].

Primjer 3.3.6 (i) Paretova distribucija ima rep oblika

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + x} \right)^\alpha, \quad \alpha, \kappa > 0,$$

te za nju očigledno vrijedi $\bar{F}(x) \sim Kx^{-\alpha}$ za neke $K, \alpha > 0$ (jer su konstantne funkcije spore varijacije), pa time i gornji teorem.

(ii) Burrova distribucija

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + x^\tau} \right)^\alpha, \quad \alpha, \kappa, \tau > 0,$$

ima rep u $\mathcal{R}_{-\alpha\tau}$, pa za nju vrijedi isti zaključak.

(iii) Loggama distribucija ima gustoću

$$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Budući da je $(\ln(x))^\gamma$ funkcija spore varijacije, slijedi da se gornja gustoća nalazi u $\mathcal{R}_{-\alpha-1}$, pa primjenom Karamatinog teorema (slučaj (ii)) slijedi

$$\bar{F}(x) \sim \frac{\alpha^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha},$$

odnosno $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ i $F \in MDA(\Phi_\alpha)$.

Za proizvoljno distribuciju F uvodimo oznaku $x_F = \inf\{x \geq 0; F(x) = 1\}$. x_F nazivamo krajnjom desnom točkom distribucije F i po dogovoru uzimamo $\inf \emptyset = +\infty$.

Teorem 3.3.7 (Maksimalna domena privlačenja od Ψ_α) Za proizvoljno $\alpha > 0$ vrijeđi

$$F \in MDA(\Psi_\alpha) \iff x_F < +\infty \quad i \quad \bar{F}(x_F - x^{-1}) \in \mathcal{R}_{-\alpha}.$$

U tom slučaju konstante a_n i b_n se mogu odabrat na način $b_n = x_F$ i $a_n = x_F - F^{-1}(x_F - n^{-1})$.

Ovaj teorem (čiji se dokaz također može pronaći u Galambos [25]) navodimo tek zbog cijelovitosti priče, budući da očigledno ne zahvaća distribucije pogodne za modeliranje velikih zahtjeva (zbog uvjeta $x_F < +\infty$).

Definicija 3.3.8 Za neopadajuću funkciju U kažemo da je Γ -varirajuća ako je definirana na intervalu $\langle x_l, x_0 \rangle$, zadovoljava $\lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = +\infty$, te postoji pozitivna funkcija f definirana na $\langle x_l, x_0 \rangle$ sa svojstvom

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{U(t + xf(t))}{U(t)} = e^x, \quad \forall x \in \langle x_l, x_0 \rangle. \quad (3.12)$$

U tom slučaju funkciju f nazivamo pomoćnom funkcijom.

Lema 3.3.9 f_1 i f_2 su pomoćne funkcije za istu Γ -varirajuću U ako i samo ako $f_1 \sim f_2$.

Dokaz. Dokazujemo nužnost. Fiksirajmo $t, x > 0$ i definirajmo $F_t(x) = 1 - U(t)/U(t+x)$. F_t je (odgovarajuće proširena) očito vjerojatnosna funkcija distribucije i pretpostavka povlači $F_t(xf_i(t)) \rightarrow 1 - e^{-x}$ kada $t \rightarrow +\infty$ za $i = 1, 2$, pa tvrdnja slijedi iz teorema o konvergenciji tipova, dio (i). Za dovoljnost, pretpostavimo da je f_1 pomoćna funkcija za U te da vrijedi $f_1 \sim f_2$. Tada po definiciji imamo $F_t(xf_1(t)) \rightarrow 1 - e^{-x}$, pa prema dijelu (ii) teorema o konvergenciji tipova vrijedi $F_t(xf_2(t)) \rightarrow 1 - e^{-x}$, odnosno f_2 je pomoćna za U po definiciji. \square

Sada možemo karakterizirati i maksimalnu domenu privlačenja Gumbelove distribucije. Dokaz donjeg teorema nalazi se u de Haan [16].

Teorem 3.3.10 $F \in MDA(\Lambda)$ ako i samo ako postoji nenegativna izmjeriva funkcija f takva da za proizvoljan x vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow x_F} \frac{\bar{F}(t + xf(t))}{\bar{F}(t)} = e^{-x}, \quad (3.13)$$

odnosno ako i samo ako je funkcija $U := 1/\bar{F}$ Γ -varirajuća s pomoćnom funkcijom f . U tom slučaju, f nazivamo i pomoćnom funkcijom za F , te ju možemo odabrati na način

$$f(x) = \int_x^{x_F} \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x)}. \quad (3.14)$$

Ono što valja spomenuti kod maksimalne domene privlačenja Gumbelove distribucije jest činjenica da se u njoj nalaze distribucije s vrlo različitim ponašanjem repova. Dok su uz ostale dvije domene vezani repovi regularne varijacije (što u velikoj mjeri određuje

asimptotiku repa), Gumbelova istovremeno sadrži relativno teške (lognormalna distribucija) i lagane repove (normalna distribucija). I sama je Gumbelova distribucija laganog repa, što se vidi laganim provjerom relacije

$$1 - \Lambda(x) \sim e^{-x}.$$

Imajući i tu relaciju u vidu, ovaj dio zaključujemo generalizacijom prošlog teorema, iskazanom u formi na koju ćemo se pozivati.

Definicija 3.3.11 Neka je $0 < \alpha \leq \infty$. Za slučajnu varijablu V_α kažemo da ima generaliziranu Paretovu distribuciju G_α ako je ona pozitivna s repom

$$\overline{G}_\alpha(x) = P(V_\alpha > x) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\alpha+x}\right)^\alpha, & \alpha < \infty \\ e^{-x}, & \alpha = \infty, \end{cases} \quad x > 0. \quad (3.15)$$

Teorem 3.3.12 Neka je H_α distribucija ekstremnih vrijednosti, gdje u slučaju $\alpha < \infty$ smatramo $H_\alpha = \Phi_\alpha$ i $H_\infty = \Lambda$ kada je $\alpha = \infty$. Neka je F distribucija slučajne varijable X , sa svojstvom $x_F = +\infty$. Tada je $F \in MDA(H_\alpha)$ ako i samo ako postoji neka izmjeriva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ takva da vrijedi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P\left(\frac{X - u}{f(u)} > x \mid X > u\right) = \overline{G}_\alpha(x).$$

U tom slučaju funkcija f se može odabrati kao u (3.14).

Za dokaz vidi Geluk i de Haan [26].

3.3.1 Neki kriteriji za pripadnost maksimalnoj domeni privlačenja Gumbelove distribucije

Kako smo i vidjeli, Fréchetova i (uz transformaciju argumenta) Weibulova domena karakterizirane su pripadnošću klasi funkcija s repom regularne varijacije o kojima imamo cijeli niz rezultatata. S druge strane, to nije slučaj s Gumbelovom o kojoj u analitičkom smislu znamo najmanje. Stoga ćemo ovdje spomenuti i dva kriterija za $F \in MDA(\Lambda)$.

Teorem 3.3.13 $F \in MDA(\Lambda)$ ako i samo ako

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{\overline{F}(x) \int_x^{x_F} \int_y^{x_F} \overline{F}(t) dt dy}{\left(\int_x^{x_F} \overline{F}(t) dt \right)^2} = 1, \quad (3.16)$$

gdje su svi integrali u gornjem izrazu konačni. U tom slučaju vrijedi da je $1/\bar{F}$ Γ-varirajuća, te za pomoćnu funkciju f možemo odabrati

$$f(x) = \frac{\int_x^{x_F} \int_y^{x_F} \bar{F}(t) dt dy}{\int_x^{x_F} \bar{F}(t) dt} \quad \text{ili} \quad f(x) = \frac{\int_x^{x_F} \bar{F}(t) dt}{\bar{F}(x)}.$$

Teorem 3.3.14 Neka je F apsolutno neprekidna u lijevoj okolini od x_F s gustoćom F' .

(i) Ako vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{F'(x) \int_x^{x_F} \bar{F}(t) dt}{\bar{F}(x)^2} = 1, \quad (3.17)$$

onda je $F \in MDA(\Lambda)$ i možemo uzeti $f(x) = \int_x^{x_F} \bar{F}(t) dt / \bar{F}(x)$.

(ii) Ako je F' nerastuća i $F \in MDA(\Lambda)$, vrijedi (3.17).

Posljednja dva rezultata preuzeta su iz Resnick [39], str 48 i 64.

3.3.2 Maksimalne domene privlačenja i integrirani repovi

Podsjećamo na pitanje postavljeno na strani 99: kakva je veza između distribucije F i njezinog integriranog repa F_0 ? Postoje li neke klase distribucija u kojima se istovremeno nalaze i originalna distribucija i njezin integrirani rep? Ako postoji, kako izgledaju i da li su podskupovi od \mathcal{S} ?

Dvije ćemo takve klase ovdje identificirati, pri čemu se jedna zaista nalazi u \mathcal{S} a druga ne.

Propozicija 3.3.15 Neka je $\alpha > 0$. Tada vrijedi $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$ (tj. $F \in MDA(\Phi_{\alpha+1})$) ako i samo ako $\bar{F}_0 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ (tj. $F_0 \in MDA(\Phi_\alpha)$).

Dokaz. Prepostavimo li $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$, činjenica $\bar{F}_0 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ slijedi direktno iz Karamatinog teorema 3.1.3 (ii). Prepostavimo li $\bar{F}_0 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, tvrdnja slijedi iz teorema o monotonoj gustoći 3.1.4. □

Iz gornjeg rezultata vidimo da su distribucije s repom regularne varijacije indeksa < 0 zatvorene na integriranje repa, pri čemu zadržavanje svojstva subeksponecijalnosti slijedi iz propozicije 3.1.6. Druga klasa zatvorena na integriranje repa, a koja se ne sastoji samo od subeksponecijalnih distribucija je $MDA(\Lambda)$.

Propozicija 3.3.16 $F \in MDA(\Lambda) \iff F_0 \in MDA(\Lambda)$.

Dokaz. Dokazujemo nužnost. Prema teoremu 3.3.13 vrijedi relacija (3.16) iz iskaza. Uvrstimo li u nju $\bar{F}(x) = \mu_F F'_0(x)$, slijedi

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{F'_0(x) \int^{x_F} \bar{F}_0(t) dt}{\bar{F}_0(x)^2} = 1,$$

pa je tvrdnja posljedica teorema 3.3.14 (i). Za dokaz dovoljnosti uočavamo da je gustoća $F'_0 = \bar{F}/\mu_F$ nerastuća, pa prema teoremu 3.3.14 (ii) vrijedi relacija (3.17) s F_0 na mjestu F . Budući da uvrštavanjem dobivamo upravo relaciju (3.16), tvrdnja slijedi prema teoremu 3.3.13. \square

Za naše su potrebe najzanimljivije one distribucije iz $MDA(\Lambda)$ čiji su integrirani repovi subeksponecijalni, pa bismo stoga htjeli i neke uvjete za pripadnost $MDA(\Lambda) \cap \mathcal{S}$. Jedan takav jest rezultat na koji ćemo se kasnije pozivati, preuzet iz Goldie i Resnick [28].

Propozicija 3.3.17 *Neka je F distribucija sa svojstvom $f(x) := \mu_F \bar{F}_0(x)/\bar{F}(x) \rightarrow \infty$ i $f'(x) \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow \infty$, te neka je f pri kraju neopadajuća. Nadalje, neka za neko $t > 1$ vrijedi*

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} > 1.$$

Tada je $F \in MDA(\Lambda)$ i $F_0 \in \mathcal{S}$.

3.4 Asimptotski opis događaja propasti

Još nam je preostalo odgovoriti na pitanje kako se propast događa u slučaju velikih zahtjeva. Već smo opisali slučaj malih zahtjeva gdje se događa to da se trajektorije koje vode u propast lagano zakrivljuju, te se propast događa gomilanjem velikog broja zahtjeva (koji uvjetovano na događaj propasti imaju nešto drugčiju distribuciju, vidi str. 91). S druge strane, u slučaju teškog repa pokazuje se da je propast trenutni događaj koji je relativno neovisan o dotadašnjem izgledu trajektorije.

Tvrđnje takve vrste potkrijepit ćemo rezultatima vezanim uz dvije fiksne vrijednosti koje se mogu opaziti kod događaja propasti. Zadržavajući notaciju iz prethodnog poglavlja, definiramo

$$Z(u) = -S_{\tau(u)-} \tag{3.18}$$

kao zadnju vrijednost pripadnog procesa (S_t) prije propasti s okrenutim predznakom, odnosno

$$Y(u) = S_{\tau(u)} \tag{3.19}$$

kao nivo procesa (i istovremeno pripadnog diskretnog kostura) neposredno nakon propasti. Za definicije i razlike među slučajnim vremenima $\tau(u)$ i $\tau_d(u)$ pogledati str. 33. Glavni rezultat iz kojeg crpimo zaključke jest idući teorem. Sve postavke modela su jednake

onima u uvodu, te s F označavamo distribuciju skokova. Nadalje, neka je (V_α, T_α) slučajni vektor s distribucijom

$$P(V_\alpha > x, T_\alpha > y) = \overline{G}_\alpha(x + y), \quad (3.20)$$

gdje je \overline{G}_α generalizirana Paretova distribucija (očito su marginalne distribucije od V_α i T_α upravo \overline{G}_α , te je u slučaju $\alpha = \infty$ riječ o nezavisnim slučajnim varijablama).

Teorem 3.4.1 Neka je $a(u)$ funkcija sa svojstvom $a(u) \sim \int_u^\infty \overline{F}(x)dx/\overline{F}(u)$. Ako vrijedi neki od uvjeta

(i) $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$ za neko $0 < \alpha < \infty$

(ii) $F \in MDA(\Lambda)$ i $F_0 \in \mathcal{S}$,

onda

$$\left(\frac{Z(u)}{a(u)}, \frac{Y(u) - u}{a(u)} \right) \xrightarrow{P^{(u)}} (V_\alpha, T_\alpha), \quad u \rightarrow \infty, \quad (3.21)$$

gdje je u slučaju (ii) $\alpha = \infty$.

Ovdje odmah uočimo da je za valjanost gornjeg rezultata važno *isključivo* ponašanje distribucije veličine zahtjeva u beskonačnosti. To je zato što su sve tri u iskazu spomenute klase distribucija zatvorene s obzirom na asimptotsku ekvivalentnost. Za funkcije regularne varijacije to slijedi iz definicije, za subeksponencijalne iz korolara 3.1.11, dok za $MDA(\Lambda)$ imamo teorem 3.3.10.

Označimo li veličinu skoka koji vodi u propast s

$$W(u) = Z(u) + Y(u), \quad (3.22)$$

iz gornjeg rezultata lagano dobivamo

Korolar 3.4.2 (i) Ako je $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$ za neko $0 < \alpha < \infty$, onda

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)} \left(\frac{W(u)}{u} > x \right) = \left[1 + \alpha \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] x^{-\alpha}.$$

(ii) Ako je $F \in MDA(\Lambda)$ i $F_0 \in \mathcal{S}$, onda

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)} \left(\frac{W(u) - u}{a(u)} > x \right) = (1 + x)e^{-x},$$

gdje je $a(u) \sim \int_u^\infty \overline{F}(x)dx/\overline{F}(u)$.

Detaljnije komentare ipak ćemo sačuvati za kraj, ali odmah podvucimo ono što je vidljivo: u gore opisanim slučajevima, propast se događa vrlo velikim skokom. To slijedi iz činjenice da se nedegenerirana asimptotska $P^{(u)}$ -distribucija postiže tek reskaliranjem funkcijom koja teži u ∞ (u (i) očigledno, za (ii) slijedi iz propozicije 3.1.13).

Odavde pa nadalje cilj je dokazati spomenuti teorem i pripadni korolar. Za početak definiramo uvjetnu vjerojatnost

$$P^{(u, z)}(\cdot) = P^{(u)}(\cdot \mid Z(u) = z) = P(\cdot \mid \tau(u) < \infty, Z(u) = z).$$

Neka je A proizvoljna slučajna varijabla i F_A pripadna funkcija distribucije. S $F_A^{(u)}$ označimo distribuciju preskoka preko nivoa u , odnosno

$$F_A^{(u)}(x) = P(A \leq u + x \mid A > u) = \frac{F_A(u + x) - F_A(u)}{\overline{F}_A(u)} = 1 - \frac{\overline{F}_A(u + x)}{\overline{F}_A(u)}. \quad (3.23)$$

Lema 3.4.3 *Uvjetna $P^{(u, z)}$ distribucija od $Z(u) = u$ jest $F^{(u+z)}$.*

Dokaz. Izračunajmo prvo $P^{(u)}$ distribuciju slučajne varijable $Z(u)$. Označimo li s G distribuciju slučajnog vektora $(R_1, \dots, R_{n-1}, -(R_n - X_n))$, za proizvoljan $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ imamo

$$\begin{aligned} P^{(u)}(Z(u) \in B) &= \frac{1}{\psi(u)} \sum_{n=1}^{\infty} P(R_1 \leq u, \dots, R_{n-1} \leq u, R_n > u, -(R_n - X_n) \in B) \\ &= \frac{1}{\psi(u)} \sum_{n=1}^{\infty} \int 1_{(-\infty, u]^{n-1}}(r_1, \dots, r_{n-1}) 1_B(z) 1_{\{x>u+z\}} dF(x) dG(r_1, \dots, r_{n-1}, z) \\ &= \frac{1}{\psi(u)} \sum_{n=1}^{\infty} \int 1_{(-\infty, u]^{n-1}}(r_1, \dots, r_{n-1}) 1_B(z) P(X > u + z) dG(r_1, \dots, r_{n-1}, z) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Desnom stranom od (3.24) dobro je definirana vjerojatnosna mjera φ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, i to je točno ona inducirana $P^{(u)}$ distribucijom od $Z(u)$. Lagano se pokazuje da vrijedi

$$\begin{aligned} E^{(u)}[g(Z(u))] &= \int_{\mathbb{R}} g(z) P^{(u)}(Z(u) \in dz) = \\ &= \frac{1}{\psi(u)} \sum_{n=1}^{\infty} \int 1_{(-\infty, u]^{n-1}}(r_1, \dots, r_{n-1}) g(z) P(X > u + z) dG(r_1, \dots, r_{n-1}, z). \end{aligned}$$

Stoga slijedi

$$P^{(u)}(S_{\tau(u)} \leq u + x, Z(u) \in B) = \frac{1}{\psi(u)} \sum_{n=1}^{\infty} P(R_1 \leq u, \dots, R_{n-1} \leq u, -(R_n - X_n) \in B,$$

$$\begin{aligned}
& u - (R_n - X_n) < X_n \leq u + x - (R_n - X_n)) = \\
&= \frac{1}{\psi(u)} \sum_{n=1}^{\infty} \int 1_{(-\infty, u]^{n-1}}(r_1, \dots, r_{n-1}) 1_B(z) P(u + z < X \leq u + z + x) dG(r_1, \dots, r_{n-1}, z) \\
&= \int_B P(X \leq u + z + x \mid X > u + z) P^{(u)}(Z(u) \in dz),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

što se i tražilo. \square

Definicija 3.4.4 Varijacija realne mjere μ na izmjerivom prostoru (X, \mathcal{M}) jest pozitivna mjera $|\mu|$ definirana s $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, gdje su μ^+ i μ^- pozitivne mjere iz Jordanove dekompozicije od μ . Totalna varijacija mjere μ je broj $||\mu|| = |\mu|(X)$.

Lema 3.4.5 Neka su $(\lambda_u; u \geq 0)$ i $(\eta_u; u \geq 0)$ dvije familije realnih mjer na izmjerivom prostoru (X, \mathcal{M}) . Tada vrijedi $||\lambda_u - \eta_u|| \rightarrow 0$ kada $u \rightarrow \infty$ ako i samo ako $\sup_{A \in \mathcal{A}} |\lambda_u(A) - \eta_u(A)| \rightarrow 0$ kada $u \rightarrow \infty$.

Dokaz. Za dokaz nužnosti imamo redom

$$\begin{aligned}
\sup_{A \in \mathcal{A}} |\lambda_u(A) - \eta_u(A)| &= \sup_{A \in \mathcal{A}} |(\lambda_u - \eta_u)^+(A) - (\lambda_u - \eta_u)^-(A)| \\
&\leq \sup_{A \in \mathcal{A}} |(\lambda_u - \eta_u)^+(A) + (\lambda_u - \eta_u)^-(A)| \\
&\leq |\lambda_u - \eta_u|(X) = ||\lambda_u - \eta_u|| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Da bismo dokazali dovoljnost, označimo s P_u i N_u pozitivni i negativni skup za $\lambda_u - \eta_u$ iz Hahnove dekompozicije. Tada

$$\begin{aligned}
(\lambda_u - \eta_u)^-(X) &= -(\lambda_u - \eta_u)(X \cap N_u) = |(\lambda_u - \eta_u)(X \cap N_u)| \\
&= |\lambda_u(X \cap N_u) - \eta_u(X \cap N_u)| \leq \sup_{A \in \mathcal{A}} |\lambda_u(A) - \eta_u(A)| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Zamijenimo li $-$ s $+$ i N_u s P_u na isti način vidimo $(\lambda_u - \eta_u)^+(X) \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$ pa tvrdnja slijedi iz činjenice $||\lambda_u - \eta_u|| = (\lambda_u - \eta_u)^+(X) + (\lambda_u - \eta_u)^-(X)$. \square

Lema 3.4.6 (i) Ako su $(A(u); u \geq 0)$ i $(\tilde{A}(u); u \geq 0)$ događaji za koje vrijedi $P(A(u) \Delta \tilde{A}(u)) = o(P(\tilde{A}(u)))$, onda

$$||P(\cdot \mid A(u)) - P(\cdot \mid \tilde{A}(u))|| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

(ii) Ako su $(P_u; u \geq 0)$ i $(Q_u; u \geq 0)$ familije vjerojatnosnih mjer takve da $||P_u - Q_u|| \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$, onda za svaku Markovljevu jezgru (uvjetnu vjerojatnost) $K(\omega, F)$ vrijedi

$$\left\| \int K(\omega, \cdot) dP_u(\omega) - \int K(\omega, \cdot) dQ_u(\omega) \right\| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

(iii) Ako su $(K(u); u \geq 0)$, K diskretne slučajne varijable takve da $P(K(u) = k) \rightarrow P(K = k)$, $u \rightarrow \infty$ za sve k , onda

$$\|P(K(u) \in \cdot) - P(K \in \cdot)\| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

Dokaz. (i) Imamo redom

$$\begin{aligned} |P(A(u)) - P(\tilde{A}(u))| &= |P(A(u) \setminus \tilde{A}(u)) + P(A(u) \cap \tilde{A}(u)) - P(\tilde{A}(u) \setminus A(u)) - \\ &\quad - P(\tilde{A}(u) \cap A(u))| \leq P(A(u) \setminus \tilde{A}(u)) + P(\tilde{A}(u) \setminus A(u)) \\ &= P(A(u) \Delta \tilde{A}(u)) = o(P(\tilde{A}(u))), \end{aligned}$$

odakle zaključujemo $P(A(u)) \sim P(\tilde{A}(u))$. Sada za proizvoljan događaj B vrijedi

$$\begin{aligned} |P(B | A(u)) - P(B | \tilde{A}(u))| &= \left| \frac{P(B \cap (A(u) \setminus \tilde{A}(u))) + P(B \cap (A(u) \cap \tilde{A}(u)))}{P(A(u))} \right. \\ &\quad \left. - \frac{P(B \cap (\tilde{A}(u) \setminus A(u))) + P(B \cap (\tilde{A}(u) \cap A(u)))}{P(\tilde{A}(u))} \right| \leq \frac{P(A(u) \setminus \tilde{A}(u))}{P(A(u))} + \\ &\quad + \frac{P(\tilde{A}(u) \setminus A(u))}{P(\tilde{A}(u))} + P(A(u) \cap \tilde{A}(u)) \left| \frac{1}{P(A(u))} - \frac{1}{P(\tilde{A}(u))} \right|. \end{aligned}$$

Prva dva sumanda na desnoj strani očigledno $\rightarrow 0$, dok je treći odozgo omeđen s

$$P(A(u)) \left| \frac{1}{P(A(u))} - \frac{1}{P(\tilde{A}(u))} \right| = \left| 1 - \frac{P(A(u))}{P(\tilde{A}(u))} \right| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

(ii) Lako se može provjeriti da za dvije vjerojatnosne mjere P i Q i slučajnu varijablu $X \geq 0$ vrijedi

$$\int X dP - \int X dQ = \int X d(P - Q)^+ - \int X d(P - Q)^-, \quad (3.26)$$

u smislu da ako su integrali s lijeve strane konačni, onda su konačni i integrali s desne strane i vrijedi gornja jednakost. Nadalje, za proizvoljan događaj B vrijedi

$$\begin{aligned} \int K(\omega, B) d(P_u - Q_u)^{+,-}(\omega) &\leq \int K(\omega, \Omega) d(P_u - Q_u)^{+,-}(\omega) \\ &\leq \int d(P_u - Q_u)^{+,-}(\omega) = (P_u - Q_u)^{+,-}(\Omega). \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
& \sup_B \left| \int K(\omega, B) dP_u(\omega) - \int K(\omega, B) dQ_u(\omega) \right| \\
&= \sup_B \left| \int K(\omega, B) d(P_u - Q_u)^+(\omega) - \int K(\omega, B) d(P_u - Q_u)^-(\omega) \right| \\
&\leq \sup_B \int K(\omega, B) d(P_u - Q_u)^+(\omega) + \sup_B \int K(\omega, B) d(P_u - Q_u)^-(\omega) \\
&\leq (P_u - Q_u)^+(\Omega) + (P_u - Q_u)^-(\Omega) = |P_u - Q_u|(\Omega) \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

(iii) Slijedi direktno iz Scheffé-ovog teorema (vidi npr. Billingsley [12], str. 224). \square

Lema 3.4.7 Neka je $(Y_k; k \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom $H \in \mathcal{S}$ i $n \in \mathbb{N}$ fiksani. Za proizvoljno $u \geq 0$ definiramo događaje $A(u) = \{Y_1 + \dots + Y_{n-1} \leq u, Y_1 + \dots + Y_n > u\}$. Tada

$$\left| P((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n - u) \in \cdot \mid A(u)) - H^{\otimes(n-1)} \otimes H^{(u)} \right| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

Dokaz. Prvo dokazujemo

$$P(\{Y_1 + \dots + Y_n > u\} \Delta \{\max(Y_1, \dots, Y_n) > u\}) = o(\overline{H}(u)). \quad (3.27)$$

Zbog $\{\max(Y_1, \dots, Y_n) > u\} \subseteq \{Y_1 + \dots + Y_n > u\}$ imamo

$$\begin{aligned}
P(\{Y_1 + \dots + Y_n > u\} \Delta \{\max(Y_1, \dots, Y_n) > u\}) &= P(Y_1 + \dots + Y_n > u) \\
&- P(\max(Y_1, \dots, Y_n) > u),
\end{aligned}$$

odakle zbog $H \in \mathcal{S}$ slijedi

$$\begin{aligned}
& \frac{P(\{Y_1 + \dots + Y_n > u\} \Delta \{\max(Y_1, \dots, Y_n) > u\})}{\overline{H}(u)} = \frac{\overline{H}^{n*}(u) - \overline{H}^n(u)}{\overline{H}(u)} \\
&= \frac{\overline{H}^{n*}(u)}{\overline{H}(u)} - (1 + H(u) + \dots + H^{n-1}(u)) \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Definiramo li $\tilde{A}(u) = \{Y_n > u\}$, odmah vidimo

$$\begin{aligned}
& P(A(u) \Delta \tilde{A}(u)) = P(A(u) \setminus \tilde{A}(u)) + P(\tilde{A}(u) \setminus A(u)) \\
&= P(Y_1 + \dots + Y_{n-1} \leq u, Y_1 + \dots + Y_n > u, Y_n \leq u) + P(Y_n > u, Y_1 + \dots + Y_{n-1} > u) \\
&\leq P(Y_1 + \dots + Y_n > u, \max(Y_1, \dots, Y_n) \leq u) + P(Y_n > u)P(Y_1 + \dots + Y_{n-1} > u) \\
&= P(\{Y_1 + \dots + Y_n > u\} \Delta \{\max(Y_1, \dots, Y_n) > u\}) + \overline{H}(u)\overline{H}^{(n-1)*}(u) = o(\overline{H}(u)) \\
&= o(P(\tilde{A}(u))).
\end{aligned}$$

Prema lemi 3.4.6 (i) zaključujemo

$$\|P(\cdot \mid A(u)) - P(\cdot \mid \tilde{A}(u))\| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty,$$

odnosno

$$\left\| P((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n - u) \in \cdot \mid A(u)) - P((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n - u) \in \cdot \mid \tilde{A}(u)) \right\| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

Tvrđnja sada slijedi iz činjenice

$$\begin{aligned} & P((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n - u) \leq (x_1, \dots, x_n) \mid \tilde{A}(u)) \\ &= \frac{P(Y_1 \leq x_1, \dots, Y_{n-1} \leq x_{n-1}, 0 < Y_n - u \leq x_n)}{P(Y_n > u)} = H^{\otimes(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes H^{(u)}(x_n), \end{aligned}$$

jer je svaka vjerojatnosna mjera na \mathbb{R}^n jednoznačno određena djelovanjem na π -sistemu $\{\langle -\infty, x \rangle; x \in \mathbb{R}^n\}$. \square

Uz istu notaciju kao i u definiciji 1.1.2 definiramo slučajnu varijablu

$$K(u) = \inf\{n \in \mathbb{N}; R_{\tau_+(n)} > u\} = \inf\{n \in \mathbb{N}; \mathcal{H}_n > u\}, \quad (3.28)$$

koju nazivamo *indeks prvog rekordnog uzleta koji nadmaši nivo u*. Ona je definirana samo na događaju $\{\tau(u) < \infty\}$ i vrijedi $\{K(u) = n\} = \{\mathcal{H}_{n-1} \leq u, \mathcal{H}_n > u\} \subseteq \{\tau_+(n) < \infty\}$.

Lema 3.4.8 *Uz pretpostavku $F_0 \in \mathcal{S}$, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$P^{(u)}(K(u) = n) \rightarrow \psi(0)^{n-1}(1 - \psi(0)), \quad u \rightarrow \infty.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} P(K(u) = n) &= P(\mathcal{H}_{n-1} \leq u, \mathcal{H}_n > u) \\ &= P(\tau_+(n) < \infty) P(\mathcal{H}_{n-1} \leq u, \mathcal{H}_n > u \mid \tau_+(n) < \infty) \\ &= \psi(0)^n P(Y_1 + \dots + Y_{n-1} \leq u, Y_1 + \dots + Y_n > u), \end{aligned}$$

gdje su Y_1, \dots, Y_n nezavisne slučajne varijable s distribucijom F_0 (drugim riječima, P -distribucija od Y_k odgovara $P(\cdot \mid \tau_+(n) < \infty)$ -distribuciji od $\mathcal{H}_k - \mathcal{H}_{k-1}$). Uz iste oznake kao u lemi 3.4.7 imamo

$$P(K(u) = n) = \psi(0)^n P(A(u)). \quad (3.29)$$

Iz dokaza navedene leme također vidimo $P(A(u) \Delta \tilde{A}(u)) = o(P(\tilde{A}(u)))$, odakle prema dokazu leme 3.4.6 slijedi $P(A(u))/P(\tilde{A}(u)) \rightarrow 1$, $u \rightarrow \infty$. Prema (1.24) vrijedi

$$\frac{1 - \psi(0)}{\psi(0)} = \frac{1 - \frac{\lambda\mu_X}{c}}{\frac{\lambda\mu_X}{c}} = \frac{c - \lambda\mu_X}{\lambda\mu_X} = \rho,$$

pa dijeljenjem (3.29) s $\psi(u)$ prema propoziciji 3.2.1 dobivamo

$$P^{(u)}(K(u) = n) = \psi(0)^n \frac{P(A(u))}{P(\tilde{A}(u))} \frac{\overline{F}_0(u)}{\psi(u)} \rightarrow \psi(0)^n \rho = \psi(0)^n \frac{1 - \psi(0)}{\psi(0)} = \psi(0)^{n-1}(1 - \psi(0)).$$

□

Uočimo odmah da se ovdje dobivena situacija razlikuje od one u slučaju malih zahtjeva. Kod slučaja malih zahtjeva proces rekordnih uzleta ($\mathcal{H}_k - \mathcal{H}_{k-1}$, $k \geq 1$) čini proces obnavljanja s nedefektom \tilde{P} -distribucijom. Budući da je ovako definirana varijabla $K(u)$ jednaka ukupnom broju obnavljanja u intervalu $[0, u]$ (brojimo i obnavljanje u 0), pomoću elementarnog teorema obnavljanja slijedi $K(u)/u \rightarrow 1/\tilde{h}$ \tilde{P} -g.s., pa onda i po $P^{(u)}$ -vjerojatnosti (pri tome je $\tilde{h} = \tilde{E}[\mathcal{H}_1]$). Dakle u slučaju malih zahtjeva umjesto gornje leme imamo $K(u) \xrightarrow{d_u} +\infty$.

Lema 3.4.9 *Ako je $F_0 \in \mathcal{S}$, onda za proizvoljnu distribuciju G koncentriranu na $\langle -\infty, 0 \rangle$ vrijedi*

$$\left\| F_0^{(u)} - F_0^{(u)} * G \right\| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty,$$

gdje gornji izraz označava totalnu varijaciju mjere dobivene razlikom mjera generiranih s $F_0^{(u)}$ i $F_0^{(u)} * G$.

Dokaz. Prema (3.23) vrijedi

$$\overline{F_0^{(u)}}(x) = \frac{\overline{F}_0(u+x)}{\overline{F}_0(u)} = \frac{\int_{u+x}^{+\infty} \overline{F}(y) dy}{\int_u^{+\infty} \overline{F}(y) dy} = \frac{\int_x^{+\infty} \overline{F}(u+y) dy}{\int_u^{+\infty} \overline{F}(y) dy},$$

odakle slijedi da je $F_0^{(u)}$ apsolutno neprekidna s gustoćom

$$f^{(u)}(x) = \frac{\overline{F}(u+x)}{\int_u^{+\infty} \overline{F}(y) dy}$$

koja je očito opadajuća. Također, $f^{(u)}(x) = 0$ za $x < 0$. Odaberimo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zbog

$$F_0^{(u)} * G(A) = \int_{-\infty}^0 F_0^{(u)}(A-a) dG(a) = \int_{-\infty}^0 \int_A f^{(u)}(x-a) dx dG(a)$$

$$\begin{aligned}
& \left| F_0^{(u)}(A) - F_0^{(u)} * G(A) \right| = \left| \int_{-\infty}^0 \int_A (f^{(u)}(x) - f^{(u)}(x-a)) dx dG(a) \right| \\
& \leq \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}} |f^{(u)}(x) - f^{(u)}(x-a)| dx dG(a) \\
& = \int_{-\infty}^0 \left(\int_a^0 f^{(u)}(x-a) dx + \int_0^{+\infty} f^{(u)}(x) dx - \int_0^{+\infty} f^{(u)}(x-a) dx \right) dG(a) \\
& = \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-a} f^{(u)}(x) dx + \int_0^{+\infty} f^{(u)}(x) dx - \int_{-a}^{+\infty} f^{(u)}(x) dx \right) dG(a) \\
& = 2 \int_{-\infty}^0 F_0^{(u)}(-a) dG(a) \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

jer $F_0^{(u)}(x) \rightarrow 0$ kada $u \rightarrow \infty$ za sve $x \in \mathbb{R}$ prema propoziciji 3.1.7. \square

Teorem 3.4.10 Ako je $F_0 \in \mathcal{S}$ onda

$$\left\| P^{(u)}(Z(u) \in \cdot) - F_0^{(u)} \right\| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

Dokaz. Za $n \geq 1$ definiramo $Y_n = S_{\tau_+(n)} - S_{\tau_+(n-1)}$ i $Z_n = S_{\tau_+(n-1)} - S_{\tau_+(n)-}$. To su očigledno dva niza nenegativnih slučajnih varijabli i za fiksno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da su s obzirom na $P(\cdot \mid \tau_+(n) < \infty)$ varijable Y_1, \dots, Y_n nezavisne jednako distribuirane s distribucijom F_0 . Uz takve označke vrijedi

$$Z(u) = Z_{K(u)} - Y_1 - \dots - Y_{K(u)-1}. \quad (3.30)$$

Kao i ranije, stavimo

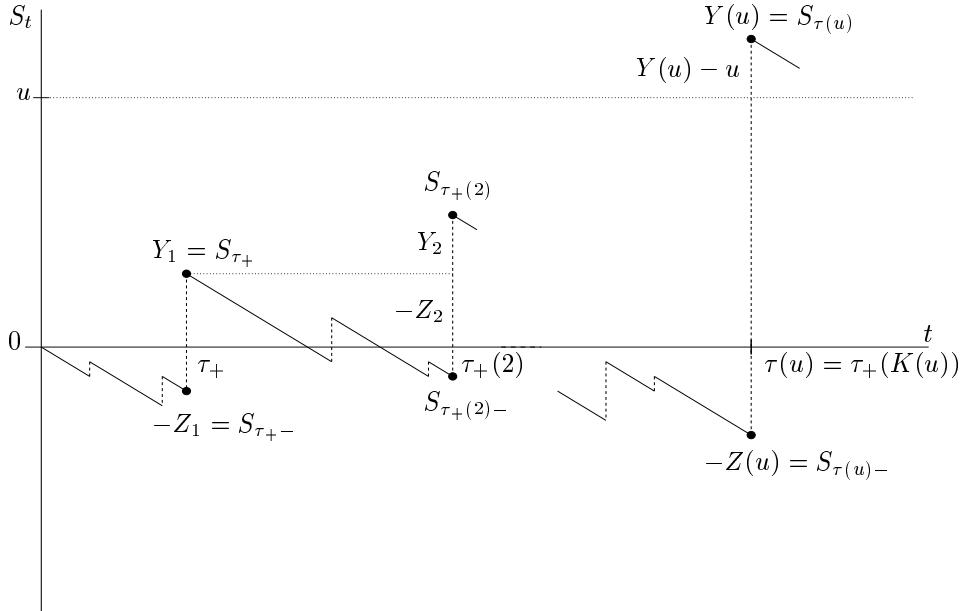
$$A(u) = \{Y_1 + \dots + Y_{n-1} \leq u, \quad Y_1 + \dots + Y_n > u\}, \quad \tilde{A}(u) = \{Y_n > u\}.$$

Uz označku $P_n(\cdot) = P(\cdot \mid \tau_+(n) < \infty)$ vrijedi

$$P_n(\cdot \mid A(u)) = P(\cdot \mid A(u)) \quad \text{i} \quad P_n(\cdot \mid \tilde{A}(u)) = P(\cdot \mid \tilde{A}(u)) \quad (3.31)$$

jer $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P_{A_2}(\cdot \mid A_1) = P(\cdot \mid A_1)$. Tvrđimo

$$\left\| P((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Z_n) \in \cdot \mid A(u)) - F_0^{\otimes(n-1)} \otimes F_0^{(u)} \right\| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty. \quad (3.32)$$



Slika 3.1: Vrijednosti vezane uz događaj propasti.

Iz leme 3.4.7 direktno slijedi

$$\left\| P_n \left((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n - u) \in \cdot \mid A(u) \right) - F_0^{\otimes(n-1)} \otimes F_0^{(u)} \right\| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

Budući da smo u dokazu iste leme dokazali i $P_n(A(u) \triangle \tilde{A}(u)) = o(P_n(\tilde{A}(u)))$, pomoću leme 3.4.6 (i) dobivamo

$$\left\| P_n \left((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n - u) \in \cdot \mid \tilde{A}(u) \right) - F_0^{\otimes(n-1)} \otimes F_0^{(u)} \right\| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty. \quad (3.33)$$

Pokušajmo sada izračunati uvjetne distribucije

$$\begin{aligned} D_{1,n}^{(u)}(x_1, \dots, x_n) &= P_n((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n - u) \leq (x_1, \dots, x_n) \mid \tilde{A}(u)) \quad \text{i} \\ D_{2,n}^{(u)}(x_1, \dots, x_n) &= P_n((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Z_n) \leq (x_1, \dots, x_n) \mid \tilde{A}(u)). \end{aligned}$$

Prvu možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} D_{1,n}^{(u)}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{P_n(\tilde{A}(u))} P_n(Y_1 \leq x_1, \dots, Y_{n-1} \leq x_{n-1}, u < Y_n \leq u + x_n) \\ &= \frac{1}{F_0(u)} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \int_u^{u+x_n} dF_0(t_n) dF_0(t_{n-1}) \dots dF_0(t_1). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Prije nego krenemo računati drugu, uočimo da potpuno istim tehnikama kao i u dokazu teorema 1.1.3 možemo dokazati iduću činjenicu: za fiksno $n \in \mathbb{N}$, s obzirom na vjerojatnost P_n , slučajni vektori $(S_{\tau_+}, -S_{\tau_+-}), (S_{\tau_+(2)} - S_{\tau_+}, S_{\tau_+} - S_{\tau_+(2)-}), \dots, (S_{\tau_+(n)} - S_{\tau_+(n-1)}, S_{\tau_+(n-1)} - S_{\tau_+(n)-})$ su nezavisni i jednako distribuirani s distribucijom jednakom $P^{(0)}$ -distribuciji vektora $(S_{\tau_+}, -S_{\tau_+-})$ (koja je izračunata u teoremu 1.3.5). U skladu s gore uvedenim oznakama, spomenute vektore možemo pisati i kao $(Y_1, Z_1), \dots, (Y_n, Z_n)$. Uvažavajući gornje argumente i koristeći teorem 1.3.5 (i) u trećem koraku, možemo pisati redom

$$\begin{aligned}
D_{2, n}^{(u)}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{P_n(\tilde{A}(u))} P_n(Y_1 \leq x_1, \dots, Y_{n-1} \leq x_{n-1}, Y_n > u, Z_n \leq x_n) \\
&= \frac{1}{\bar{F}_0(u)} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_{n-1}} P_n(Y_n > u, Z_n \leq x_n) dF_0(t_{n-1}) \dots dF_0(t_1) \\
&= \frac{1}{\bar{F}_0(u)} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_{n-1}} P^{(0)}(S_{\tau_+} > u, -S_{\tau_+-} \leq x_n) dF_0(t_{n-1}) \dots dF_0(t_1) \\
&= \frac{1}{\bar{F}_0(u)} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \left(\int_u^{+\infty} dF_0(t_n) - \int_{u+x_n}^{+\infty} dF_0(t_n) \right) dF_0(t_{n-1}) \dots dF_0(t_1) \\
&= \frac{1}{\bar{F}_0(u)} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \int_u^{u+x_n} dF_0(t_n) dF_0(t_{n-1}) \dots dF_0(t_1).
\end{aligned}$$

Usporedimo li dobiveno s (3.34), vidimo da za proizvoljne $u \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $D_{1, n}^{(u)} \equiv D_{2, n}^{(u)}$, pa uvrštavanjem u (3.33) dobivamo

$$\left| \left| P_n \left((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Z_n) \in \cdot \mid \tilde{A}(u) \right) - F_0^{\otimes(n-1)} \otimes F_0^{(u)} \right| \right| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

Ponovnim korištenjem $P_n(A(u) \Delta \tilde{A}(u)) = o(P_n(\tilde{A}(u)))$ i leme 3.4.6 (i) slijedi

$$\left| \left| P_n \left((Y_1, \dots, Y_{n-1}, Z_n) \in \cdot \mid A(u) \right) - F_0^{\otimes(n-1)} \otimes F_0^{(u)} \right| \right| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty,$$

što je ekvivalentno relaciji (3.32) zbog (3.31).

Stoga za nezavisne slučajne varijable $Z^{(u)}, V_1, V_2, \dots$ takve da je P -distribucija od V_i dana s F_0 , a P -distribucija od $Z^{(u)}$ s $F_0^{(u)}$ vrijedi

$$\left| \left| P(Z_n - Y_1 - \dots - Y_{n-1} \in \cdot \mid A(u)) - P(Z^{(u)} - V_1 - \dots - V_{n-1} \in \cdot) \right| \right| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty. \quad (3.35)$$

Neka je K nezavisna od $Z^{(u)}, V_1, V_2 \dots$ s geometrijskom distribucijom s parametrom $\psi(0)$ s obzirom na P , tj. $P(K = n) = \psi(0)^{n-1}(1 - \psi(0))$. Tada prema lemi 3.4.6 (iii) i lemi 3.4.8 vrijedi

$$\left| P^{(u)}(K(u) \in \cdot) - P(K \in \cdot) \right| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty.$$

Stoga

$$\begin{aligned} & \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| P^{(u)}(Z(u) \in B) - P(Z^{(u)} - V_1 - \dots - V_{K-1} \in B) \right| \\ &= \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \int P^{(u)}(Z(u) \in B \mid K(u) = y) dP^{(u)}(K(u) = y) \right. \\ &\quad \left. - \int P(Z^{(u)} - V_1 - \dots - V_{K-1} \in B \mid K = y) dP(K = y) \right| \\ &= \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \int P^{(u)}(Z(u) \in B \mid K(u) = y) dP^{(u)}(K(u) = y) \right. \\ &\quad \left. - \int P^{(u)}(Z(u) \in B \mid K(u) = y) dP(K = y) \right. \\ &\quad \left. + \int P^{(u)}(Z(u) \in B \mid K(u) = y) dP(K = y) \right. \\ &\quad \left. - \int P(Z^{(u)} - V_1 - \dots - V_{K-1} \in B \mid K = y) dP(K = y) \right| \\ &\leq \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \int P^{(u)}(Z(u) \in B \mid K(u) = y) dP^{(u)}(K(u) = y) \right. \\ &\quad \left. - \int P^{(u)}(Z(u) \in B \mid K(u) = y) dP(K = y) \right. \\ &\quad \left. + \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \int P^{(u)}(Z(u) \in B \mid K(u) = y) dP(K = y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int P(Z^{(u)} - V_1 - \dots - V_{K-1} \in B \mid K = y) dP(K = y) \right| \right| \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Kada $u \rightarrow \infty$, $I \rightarrow 0$ prema lemi 3.4.6 (iii), dok za drugi dio imamo

$$\begin{aligned} II &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(Z_n - Y_1 - \dots - Y_{n-1} \in B \mid A(u)) \\ &\quad - P(Z^{(u)} - V_1 - \dots - V_{n-1} \in B)| \psi(0)^{n-1}(1 - \psi(0)) \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty \end{aligned}$$

zbog (3.35). Time smo dobili

$$\left| P^{(u)}(Z(u) \in \cdot) - P(Z^{(u)} - V_1 - \dots - V_{K-1} \in \cdot) \right| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty,$$

pa tvrdnja teorema slijedi korištenjem leme 3.4.9. \square

U idućem teoremu V_α je slučajna varijabla s distribucijom danom s (3.20).

Teorem 3.4.11 (i) Ako je $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$ za $\alpha > 0$, onda

$$\alpha \frac{Z(u)}{u} \xrightarrow{d_u} V_\alpha \quad u \rightarrow \infty.$$

(ii) Ako je $F \in MDA(\Lambda)$ i $F_0 \in \mathcal{S}$ onda

$$\frac{Z(u)}{a(u)} \xrightarrow{d_u} V_\infty \quad u \rightarrow \infty,$$

$$\text{gdje je } a(u) \sim \int_u^\infty \bar{F}(x) dx / \bar{F}(u).$$

Dokaz. (i) Zbog pretpostavke $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$ vrijedi $\bar{F}(u) = u^{-\alpha-1}L(u)$, gdje je L funkcija spore varijacije. Prema Karamatinom teoremu slijedi

$$\bar{F}_0(u) \sim \frac{1}{\alpha \mu_F} u^{-\alpha} L(u), \quad u \rightarrow \infty,$$

posebno $\bar{F}_0 \in \mathcal{R}_{-\alpha} \subseteq \mathcal{S}$ prema propoziciji 3.1.6. Iz definicije regularne varijacije slijedi

$$\frac{\bar{F}_0(u(1+\frac{x}{\alpha}))}{\bar{F}_0(u)} \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\alpha+x} \right)^\alpha = \bar{G}_\alpha(x), \quad u \rightarrow \infty.$$

Stoga zbog teorema 3.4.10 imamo

$$P^{(u)} \left(\alpha \frac{Z(u)}{u} > x \right) \approx \bar{F}_0^{(u)} \left(\frac{ux}{\alpha} \right) = \frac{\bar{F}_0(u(1+\frac{x}{\alpha}))}{\bar{F}_0(u)} \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\alpha+x} \right)^\alpha = \bar{G}_\alpha(x), \quad u \rightarrow \infty.$$

Pri tome \approx znači da razlika lijeve i desne strane teži u 0 kada $u \rightarrow \infty$.

(ii) Pretpostavka $F \in MDA(\Lambda)$ preko propozicije 3.3.16 povlači $F_0 \in MDA(\Lambda)$, te pri tome vrijede i zaključci teorema 3.3.13 (odnosno pomoćne funkcije od F i F_0 su jednake). Primjenom teorema 3.4.10 kao gore i teorema 3.3.12 slijedi

$$P^{(u)} \left(\frac{Z(u)}{a(u)} > x \right) \approx \bar{F}_0^{(u)}(a(u)x) = \frac{\bar{F}_0(u+a(u)x)}{\bar{F}_0(u)} \rightarrow e^{-x} = \bar{G}_\infty(x), \quad u \rightarrow \infty.$$

Uočimo na kraju i to da tvrdnju (i) možemo pisati na isti način kao i (ii) jer za distribucije s repom regularne varijacije indeksa $-\alpha - 1$, $\alpha > 0$ očito vrijedi $a(u) = \mu_F \bar{F}_0(u) / \bar{F}(u) \sim u/\alpha$. \square

Primjer 3.4.12 (i) Paretova distribucija

$$\overline{F}(x) = \left(1 + \frac{x}{\kappa}\right)^{-\alpha-1}, \quad x > 0, \alpha, \kappa > 0.$$

U tom slučaju imamo

$$\overline{F}_0(x) = \frac{\kappa}{\mu_F \alpha} \left(1 + \frac{x}{\kappa}\right)^{-\alpha}, \quad x > 0,$$

te slijedi

$$\overline{F}_0^{(u)}(x) = \frac{\overline{F}_0(u+x)}{\overline{F}_0(u)} = \frac{\left(1 + \frac{u+x}{\kappa}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{u}{\kappa}\right)^{-\alpha}} = \left(\frac{\kappa+u+x}{\kappa+u}\right)^{-\alpha} = \left(1 + \frac{x}{\kappa+u}\right)^{-\alpha},$$

odnosno $\overline{F}_0^{(u)}$ je opet Paretova distribucija s parametrima α i $\kappa+u$. Nadalje, vrijedi $a(u) = \mu_F \overline{F}_0(u)/\overline{F}(u) = (\kappa+u)/\alpha$, pa zaključujemo

$$\overline{F}_0^{(u)}(a(u)x) = \overline{F}_0^{(u)}\left(\frac{\kappa+u}{\alpha}x\right) = \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha} = \overline{G}_\alpha(x), \quad u \geq 0,$$

odnosno

$$\frac{\alpha \cdot Z(u)}{\kappa+u} \xrightarrow{d_u} V_\alpha.$$

Ta je relacija zbog $a(u) \sim u/\alpha$ ekvivalentna onoj iz teorema 3.4.11 (i).

(ii) Weibullova distribucija

$$\overline{F}(x) = e^{-cx^\alpha}, \quad x > 0, c > 0, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$$

zadovoljava uvjete teorema 3.4.11 (ii), što dokazujemo pomoću propozicije 3.3.17. Laganom primjenom L'Hospitalovog pravila dobivamo

$$\frac{c\alpha u^{\alpha-1} \int\limits_u^{+\infty} e^{-cx^\alpha} dx}{e^{-cu^\alpha}} \rightarrow 1, \quad u \rightarrow \infty$$

odnosno $\overline{F}_0(u) \sim \overline{B}_0(u) := \frac{1}{c\mu_F \alpha} u^{1-\alpha} e^{-cu^\alpha}$. Stavimo

$$a(u) = \frac{\mu_B \overline{B}_0(u)}{\overline{B}(u)} = \frac{\mu_B \overline{B}_0(u)}{-\mu_B \overline{B}'_0(u)} = \frac{u}{\alpha cu^\alpha + \alpha - 1}.$$

Očigledno $a(u) \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$ i lako se može izračunati

$$a'(u) = \frac{(1-\alpha)(\alpha cu^\alpha - 1)}{(\alpha cu^\alpha + \alpha - 1)^2}.$$

Slijedi $a'(u) \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$, $a'(u) > 0$ za velike u tj. $a(u)$ je pri kraju neopadajuća i za svako $t > 1$ vrijedi $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{a(tu)}{a(u)} = t^{1-\alpha} > 1$. Stoga prema propoziciji 3.3.17 zaključujemo $B \in MDA(\Lambda)$ i $B_0 \in \mathcal{S}$. Zbog $F_0(u) \sim B_0(u)$ prema korolaru 3.1.11 vrijedi $F_0 \in \mathcal{S}$. Za ispunjenje uvjeta teorema 3.4.11 još je preostalo vidjeti $F \in MDA(\Lambda)$. Za to se koristimo relacijom (3.17) iz teorema 3.3.14, odnosno imamo

$$\frac{F'(u) \int_u^{+\infty} \overline{F}(x) dx}{\overline{F}(u)^2} = \frac{c\alpha u^{\alpha-1} e^{-cu^\alpha} \int_u^{+\infty} e^{-cx^\alpha} dx}{(e^{-cu^\alpha})^2} = \frac{c\alpha u^{\alpha-1} \int_u^{+\infty} e^{-cx^\alpha} dx}{e^{-cu^\alpha}} \rightarrow 1, \quad u \rightarrow \infty.$$

Napokon, stavimo li $a(u) := \mu_F \overline{F}_0(u) / \overline{F}(u) = \int_u^{+\infty} e^{-cx^\alpha} dx / e^{-cu^\alpha}$ slijedi $a(u) \sim \frac{u^{1-\alpha}}{c\alpha}$, odnosno

$$\frac{c\alpha Z(u)}{u^{1-\alpha}} \xrightarrow{d_u} V_\infty.$$

(iii) Lognormalna distribucija

$$F(x) = N\left(\frac{\ln x - b}{a}\right), \quad x > 0, \quad a, b > 0,$$

gdje je N jedinična normalna distribucija. Činjenice $F \in MDA(\Lambda)$ i $F_0 \in \mathcal{S}$ nećemo dokazivati jer bi nas to odvelo predaleko. Dokaz prve može se pronaći u Resnick [39], odjeljak 1.1, dok za drugu upućujemo na Klüppelberg [36]. Što se tiče funkcije $a(u)$, pomoću relacije (3.17) i serije primjena L'Hospitalovog pravila može se pokazati

$$a(u) = \frac{\mu_F \overline{F}_0(u)}{\overline{F}(u)} \sim \frac{\overline{F}(u)}{\overline{F}'(u)} \sim \frac{a^2 u}{\ln u - b} \sim \frac{a^2 u}{\ln u}.$$

Stoga zaključujemo

$$\frac{\ln u Z(u)}{a^2 u} \xrightarrow{d_u} V_\infty.$$

Dokaz teorema 3.4.1. Dokaz zasnivamo na činjenici (vidi Billingsley [12], str. 18) da u \mathbb{R}^n skupovi oblika $\langle a, b]$ gdje su $a, b \in \mathbb{R}^n$ takvi da vrijedi $a \leq b$ formiraju familiju koja određuje konvergenciju. Posebno, u slučaju \mathbb{R}^2 dovoljno je dokazati konvergenciju pripadnih mjera na skupovima oblika $\langle s, \infty \rangle \times \langle t, \infty \rangle$ zbog činjenice $\langle a, b] = \langle a_1, \infty \rangle \times \langle a_2, \infty \rangle \setminus \langle b_1, \infty \rangle \times \langle b_2, \infty \rangle$.

(i) Uz pretpostavku $F \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$, $\alpha > 0$, prema lemi 3.4.3 slijedi

$$\begin{aligned} P^{(u)} \left(\frac{\alpha(Y(u) - u)}{u} > t \middle| \frac{\alpha Z(u)}{u} = v \right) &= P^{(u)} \left(Y(u) - u > \frac{ut}{\alpha} \middle| Z(u) = \frac{uv}{\alpha} \right) \\ &= P^{(u, uv/\alpha)} \left(Y(u) - u > \frac{ut}{\alpha} \right) = \frac{\overline{F} \left(u \left(1 + \frac{v+t}{\alpha} \right) \right)}{\overline{F} \left(u \left(1 + \frac{v}{\alpha} \right) \right)} \rightarrow \frac{\left(1 + \frac{v+t}{\alpha} \right)^{-\alpha-1}}{\left(1 + \frac{v}{\alpha} \right)^{-\alpha-1}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

kada $u \rightarrow \infty$ po definiciji regularne varijacije. No želimo dokazati i to da je konvergencija u gornjem izrazu za fiksne t , $\alpha > 0$ uniformna po $v \in [0, \infty)$. Dijeljenjem varijable s $1 + \frac{v}{\alpha} > 0$ slijedi

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(u(1 + \frac{v+t}{\alpha}))}{\overline{F}(u(1 + \frac{v}{\alpha}))} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}\left(u \frac{1+\frac{v+t}{\alpha}}{1+\frac{v}{\alpha}}\right)}{\overline{F}(u)},$$

pa prema teoremu 3.1.2 vrijedi da je ta konvergencija uniformna po

$$\frac{1 + \frac{v+t}{\alpha}}{1 + \frac{v}{\alpha}} = \frac{\alpha + v + t}{\alpha + v} \in [1, \infty).$$

S obzirom da su α i t fiksni i pozitivni, slijedi da je konvergencija uniformna po svim $v \in [0, \infty)$ jer za svaki takav v vrijedi $\frac{\alpha+v+t}{\alpha+v} > 1$. Stoga za fiksne s , $t > 0$

$$\begin{aligned} & P^{(u)} \left(\frac{\alpha(Y(u) - u)}{u} > t, \frac{\alpha Z(u)}{u} > s \right) \\ &= \int_s^{+\infty} P^{(u)} \left(\frac{\alpha(Y(u) - u)}{u} > t \mid \frac{\alpha Z(u)}{u} = v \right) dP^{(u)} \left(\frac{\alpha Z(u)}{u} = v \right) \\ &= \int_s^{+\infty} \left[P^{(u)} \left(\frac{\alpha(Y(u) - u)}{u} > t \mid \frac{\alpha Z(u)}{u} = v \right) - \frac{(1 + \frac{v+t}{\alpha})^{-\alpha-1}}{(1 + \frac{v}{\alpha})^{-\alpha-1}} \right] dP^{(u)} \left(\frac{\alpha Z(u)}{u} = v \right) \\ &+ \int_s^{+\infty} \frac{(1 + \frac{v+t}{\alpha})^{-\alpha-1}}{(1 + \frac{v}{\alpha})^{-\alpha-1}} P^{(u)} \left(\frac{\alpha Z(u)}{u} \in dv \right) \rightarrow \int_s^{+\infty} \frac{(1 + \frac{v+t}{\alpha})^{-\alpha-1}}{(1 + \frac{v}{\alpha})^{-\alpha-1}} dG_\alpha(v) \\ &= \int_s^{+\infty} \left(1 + \frac{v+t}{\alpha} \right)^{-\alpha-1} dv = \left(1 + \frac{s+t}{\alpha} \right)^{-\alpha} = \overline{G}_\alpha(s+t), \end{aligned}$$

gdje smo koristili činjenice da je konvergencija u (3.36) uniformna po $v \in [s, \infty)$, $\frac{\alpha Z(u)}{u} \xrightarrow{d_u} V_\alpha$ i neprekidnost od $\frac{(1 + \frac{v+t}{\alpha})^{-\alpha-1}}{(1 + \frac{v}{\alpha})^{-\alpha-1}}$ po v .

(ii) Prepostavimo li $F \in MDA(\lambda)$ i $F_0 \in \mathcal{S}$ za fiksno $t > 0$ imamo

$$\begin{aligned} & P^{(u)} \left(\frac{\alpha(Y(u) - u)}{a(u)} > t \mid \frac{Z(u)}{a(u)} = v \right) = P^{(u, v/a(u))}(Y(u) - u > ta(u)) \\ &= \frac{\overline{F}(u + (v+t)a(u))}{\overline{F}(u + va(u))} = \frac{\frac{\overline{F}(u + (v+t)a(u))}{\overline{F}(u)}}{\frac{\overline{F}(u + va(u))}{\overline{F}(u)}} \rightarrow \frac{e^{-v-t}}{e^{-v}} = e^{-t} \end{aligned}$$

prema teoremu 3.3.12. Pri tome brojnik i nazivnik konvergiraju prema e^{-v-t} , odnosno e^{-v} uniformno po v jer konvergencija funkcija distribucije prema neprekidnom limesu povlači

uniformnu konvergenciju. U idućem koraku želimo dokazati da za fiksno $s > 0$ cijeli kvocijent konvegira prema e^{-t} uniformno po $v \in [0, s]$. Uvedimo oznake

$$f_u(v) = \frac{\bar{F}(u + (v+t)a(u))}{\bar{F}(u)}, \quad g_u(v) = \frac{\bar{F}(u + va(u))}{\bar{F}(u)}, \quad f(v) = e^{-v-t}, \quad g(v) = e^{-v}.$$

Tada zbog $f_u(v)/g_u(v) \leq 1$ i $1/g(v) \leq e^s$ na $[0, s]$ imamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_u(v)}{g_u(v)} - \frac{f(v)}{g(v)} \right| &= \left| \frac{f_u(v)g(v) - f_u(v)g_u(v) + f_u(v)g_u(v) - f(v)g_u(v)}{g(v)g_u(v)} \right| \\ &\leq \frac{f_u(v)|g_u(v) - g(v)|}{g_u(v)} + \frac{|f_u(v) - f(v)|}{g(v)} \\ &\leq \frac{1}{g(v)}(|f_u(v) - f(v)| + |g_u(v) - g(v)|) \\ &\leq e^s(|f_u(v) - f(v)| + |g_u(v) - g(v)|) \quad \forall v \in [0, s]. \end{aligned}$$

Odaberimo $\varepsilon > 0$ proizvoljan i u_0 dovoljno velik da za sve $u \geq u_0$ vrijedi

$$\sup_{v \in [0, s]} |f_u(v) - f(v)| < e^{-s}\varepsilon/2, \quad \sup_{v \in [0, s]} |g_u(v) - g(v)| < e^{-s}\varepsilon/2.$$

Tada iz gornje relacije direktno slijedi

$$\sup_{v \in [0, s]} \left| \frac{f_u(v)}{g_u(v)} - \frac{f(v)}{g(v)} \right| < \varepsilon,$$

što se i tražilo. Koristeći argument uniformne konvergencije na sličan način kao i u (i) vidimo

$$\begin{aligned} P^{(u)} \left(\frac{Y(u) - u}{a(u)} > t, \frac{Z(u)}{a(u)} \leq s \right) &= \int_0^s P^{(u)} \left(\frac{Y(u) - u}{a(u)} > t \mid \frac{Z(u)}{a(u)} = v \right) dP^{(u)} \left(\frac{Z(u)}{a(u)} = v \right) \\ &= \int_0^s \frac{\bar{F}(u + (v+t)a(u))}{\bar{F}(u + va(u))} dP^{(u)} \left(\frac{Z(u)}{a(u)} = v \right) \\ &\rightarrow \int_0^s e^{-t} dG_\infty(v) = e^{-t}(1 - e^{-s}). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Nadalje, uzimanjem limesa po u u relaciji

$$\begin{aligned} P^{(u)} \left(\frac{Y(u) - u}{a(u)} > t, \frac{Z(u)}{a(u)} \leq s \right) &\leq P^{(u)} \left(\frac{Y(u) - u}{a(u)} > t \right) \\ &\leq P^{(u)} \left(\frac{Y(u) - u}{a(u)} > t, \frac{Z(u)}{a(u)} \leq s \right) + P^{(u)} \left(\frac{Z(u)}{a(u)} > s \right) \end{aligned}$$

slijedi

$$e^{-t}(1 - e^{-s}) \leq \lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)} \left(\frac{Y(u) - u}{a(u)} > t \right) \leq e^{-t}(1 - e^{-s}) + e^{-s},$$

pa uzimanjem limesa po s dobivamo

$$P^{(u)} \left(\frac{Y(u) - u}{a(u)} > t \right) \rightarrow e^{-t}, \quad u \rightarrow \infty.$$

Kombiniramo li to s (3.37), slijedi

$$P^{(u)} \left(\frac{Y(u) - u}{a(u)} > t, \frac{Z(u)}{a(u)} > s \right) \rightarrow e^{-(s+t)} = \overline{G_\infty}(s+t),$$

što se i tražilo. \square

Dokaz korolara 3.4.2 (i) Primjenom teorema o neprekidnom preslikavanju na rezultat teorema 3.4.1 slijedi

$$\frac{W(u) - u}{a(u)} \xrightarrow{d_u} V_\alpha + T_\alpha,$$

pa još preostaje izračunati distribuciju slučajne varijable na desnoj strani.

(i) Gustoća slučajnog vektora (V_α, T_α) dana je s

$$\begin{aligned} f_{(V_\alpha, T_\alpha)}(v, t) &= \frac{\partial}{\partial t \partial v} \left[\left(1 + \frac{v+t}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[-\alpha \left(1 + \frac{v+t}{\alpha} \right)^{-\alpha-1} \frac{1}{\alpha} \right] \\ &= \frac{\alpha+1}{\alpha} \left(1 + \frac{v+t}{\alpha} \right)^{-\alpha-2}. \end{aligned}$$

Funkcija $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definirana s $g(x, y) = (x, x+y)$ je bijekcija između skupova $L = \langle 0, +\infty \rangle^2$ i $T = \{(x, y); y \geq x \geq 0\}$, te za nju vrijedi $g^{-1}(x, y) = (x, y-x)$ i $|Dg^{-1}|(x, y) = 1$. Slijedi

$$f_{(V_\alpha, V_\alpha+T_\alpha)}(v, w) = \frac{\alpha+1}{\alpha} \left(1 + \frac{w}{\alpha} \right)^{-\alpha-2} 1_T(v, w),$$

pa integriranjem dobivamo

$$f_{V_\alpha+T_\alpha}(w) = \int_0^w \frac{\alpha+1}{\alpha} \left(1 + \frac{w}{\alpha} \right)^{-\alpha-2} dw = \frac{\alpha+1}{\alpha} w \left(1 + \frac{w}{\alpha} \right)^{-\alpha-2}.$$

Odatle uz $a(u) = u/\alpha$ parcijalnom integracijom dobivamo

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)} \left(\frac{\alpha W(u)}{u} - \alpha > x \right) = \int_x^{+\infty} \frac{\alpha+1}{\alpha} w \left(1 + \frac{w}{\alpha} \right)^{-\alpha-2} dw$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha+1}{\alpha} \left[\frac{-\alpha}{\alpha+1} w \left(1 + \frac{w}{\alpha} \right)^{-\alpha-1} \Big|_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha+1} \left(1 + \frac{w}{\alpha} \right)^{-\alpha-1} dw \right] \\
&= x \left(1 + \frac{x}{\alpha} \right)^{-\alpha-1} + \left(1 + \frac{x}{\alpha} \right)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)} \left(\frac{W(u)}{u} > x \right) &= \lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)} \left(\frac{\alpha W(u)}{u} > \alpha x \right) = \lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)} \left(\frac{\alpha W(u)}{u} - \alpha > \alpha(x-1) \right) \\
&= \alpha(x-1)x^{-\alpha-1} + x^{-\alpha} = x^{-\alpha} \left[1 + \alpha \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right].
\end{aligned}$$

(ii) Krenuvši od gustoće

$$f_{(V_\alpha, T_\alpha)}(v, t) = e^{-v-t}$$

na isti način kao i u (i) dobivamo

$$f_{V_\alpha + T_\alpha}(w) = we^{-w}.$$

Parcijalnom integracijom slijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow \infty} P^{(u)} \left(\frac{W(u) - u}{a(u)} > x \right) &= \int_x^{+\infty} we^{-w} dw = -we^{-w} \Big|_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-w} dw = xe^{-x} + e^x \\
&= (1+x)e^{-x}.
\end{aligned}$$

□

Na kraju, pokušajmo rezimirati rezultate teorema 3.4.1 i korolara 3.4.2 i uočiti razlike u odnosu na slučaj malih zahtjeva. Kako smo već i komentirali, korolar 3.4.2 potvrđuje da se u slučaju velikog početnog kapitala u propast događa vrlo velikim skokom što se vidi iz činjenice da graničnu $P^{(u)}$ -distribuciju dobivamo tek kada vrijednost skoka podijelimo s funkcijom $a(u)$ koja teži u $+\infty$. Ista je situacija i s preskokom $Y(u) - u$ preko nivoa u , odakle zaključujemo da kod događaja propasti jednog portfelja osim same propasti možemo dobiti i veliki dug, što nanosi mnogo veću štetu osiguravajućoj kući. Situacija je dakle potpuno drukčija nego ona u slučaju malih zahtjeva kada su i sam skok koji vodi u propast i preskok preko nivoa u imali graničnu $P^{(u)}$ -distribuciju. Nadalje, iz teorema 3.4.1 na isti način vidimo i to da je za velike u vrijednost $u + Z(u) = u - S_{\tau(u)-}$ koja predstavlja količinu sredstava neposredno prije propasti također velika (jer $u + Z(u) \geq Z(u)$ i $Z(u)/a(u)$ konvergira po $P^{(u)}$ -distribuciji). To nam daje naslutiti da događaju propasti ne prethodi nagnjanje cijele trajektorije, što je opet suprotno situaciji u slučaju malih zahtjeva. Iz svega navedenog zaključujemo da propast u slučaju velikih zahtjeva nije posljedica velikog broja nepovoljnih događaja nego posljedica jednog velikog zahtjeva.

Što se tiče alternativnih metoda izračuna vjerojatnosti propasti (u konačnom i beskonačnom vremenu), daljni pokušaji idu uglavnom u smjeru simulacija, čija je osnova baš Pollaczek-Hinčinova formula. Od relevantne literature istaknimo npr. Asmussen i Bin-
swanger [7], Asmussen [5], Asmussen i Rubinstein [9]. S druge strane Furrer, Michna i Weron [24] predlažu aproksimaciju stabilnim Lévyjevim procesom. Najbolji pregled postignutih rezultata i odgovarajućih referenci može se pronaći u Asmussen [6].

Literatura

- [1] Aldous, D.J. (1978) Weak convergence of randomly indexed sequences of random variables. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **83**, 117-126.
- [2] Asmussen, S. (1987) *Applied Probability and Queues*. Wiley, Chichester.
- [3] Asmussen, S. (1984) Approximations for the probability of ruin within finite time. *Scand. Actuar. J.*, 31-57.
- [4] Asmussen, S. (1982) Conditioned limit theorems relating a random walk to its associate, with applications to risk reserve process and GI/G/1 queue. *Adv. Appl. Probab.* **14**, 143-170.
- [5] Asmussen, S. (1985) Conjugate processes and the simulation of ruin problems. *Stoch. Proc. Appl.* **20**, 213-229.
- [6] Asmussen, S. (1996) *Ruin Probabilities*. World Scientific, Singapore.
- [7] Asmussen, S. i Binswanger, K. (1997) Simulation of ruin probabilities for subexponential claims. *ASTIN Bulletin* **27**, 297-318.
- [8] Asmussen, S. i Klüppelberg, C. (1996) Large deviation results for subexponential tails, with applications to insurance risk. *Stoch. Proc. Appl.* **64**, 103-125.
- [9] Asmussen, S. i Rubinstein, R.Y. (1999) Sensitivity analysis of insurance risk models. *Management Science*, **45**, 1125-1141.
- [10] Barndorff-Nielsen, O. i Schmidli, H. (1995) Saddlepoint approximations for the probability of ruin in finite time. *Scand. Act. J.* **1995**, 169-186.
- [11] Beekman, J. (1969) A ruin function approximation. *Trans. Soc. Actuaries* **21**, 41-48, 275-279.
- [12] Billingsley, P. (1968) *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York.
- [13] Bingham, N. H., Goldie, C. M. i Teugels, J. L. (1987) *Regular Variation*. Cambridge University Press, Cambridge.

- [14] Bühlmann, H. (1989) Tendencies of development in risk theory. Iz: *Celebration of the Actuarial Profession in North America, vol. 2.* Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.
- [15] Cramér, H. (1930) On the Mathematical Theory of Risk. Iz: A. Martin Löf, ed, *Skandia Jubilee Volume*, Stockholm. Reprint u H. Cramér (1994), *Collected Works*. Springer, Berlin.
- [16] de Haan, L. (1970) *On Regular Variation and Its Application to Weak Convergence of Sample Extremes.* CWI Tract. **32**, Amsterdam.
- [17] De Vylder, F. (1977) A practical solution to the problem of ultimate ruin probabilities. *Scand. Actuar. J.*, 114-119.
- [18] Dudley, R.M. (1968) Distances of probability measures and random variables. *Ann. Math. Statistics* **39**, 1563-1572.
- [19] Embrechts, P., Klüppelberg, C. i Mikosch, T. (1997) *Modelling Extreme Events.* Springer–Verlag, New York.
- [20] Embrechts, P. i Veraverbeke, N. (1982) Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. *Insurance: Math. Economics* **1**, 55-72.
- [21] Ethier, S.N. i Kurtz, T.G. (1986) *Markov Processes: Characterisation and Convergence.* Wiley, New York.
- [22] Feller, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and its Applications II.* Wiley, New York.
- [23] Ferguson, T.S. (1996) *A Course in Large Sample Theory.* Chapman & Hall, New York.
- [24] Furrer, H., Michna, Z. i Weron, A. (1997) Stable Lévy motion approximation in collective risk theory. *Insurance: Math. Economics* **15**, 97-114.
- [25] Galambos, J. (1978) *Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics.* Wiley, New York.
- [26] Geluk, J.L. i de Haan, L. (1987) Regular Variation, Extentions and Tauberian Theorems, CWI Tract 40. *CWI, Amsterdam.*
- [27] Gerber, H.U. (1973) Martingales in risk theory. *Mitt. Ver. Schweiz. Vers. Math.* **73**, 205-216.

- [28] Goldie, C.M. i Resnick, S.I. (1988) Distributions that are both subexponential and in the domain of attraction of an extreme-value distribution. *Adv. Appl. Probab.* **20**, 706-718.
- [29] Grandell, J. (1977) A class of approximations of ruin probabilities. *Scand. Act. J., Suppl.*, **1977**, 37-52.
- [30] Grandell, J. (1978) A remark on 'A class of approximations of ruin probabilities'. *Scand. Act. J.*, **1978**, 77-78.
- [31] Grandell, J. (1991) *Aspects of Risk Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [32] Grandell, J. (1997) *Mixed Poisson Processes*. Chapman & Hall, London.
- [33] Halmos, P.R. (1950) *Measure Theory*. D. van Nostrand, New York.
- [34] Hogg, R. V. i Klugman, S. A. (1984) *Loss Distributions*. Wiley, New York.
- [35] Karatzas, I. i Shreve, S.E. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York.
- [36] Klüppelberg, C. (1987) Estimation of ruin probabilities by means of hazard rates. *Insurance: Math. Economics* **8**, 279-285.
- [37] Pyke, R. (1968) The weak convergence of the empirical process of random sample size. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **64**, 155-160.
- [38] Resnick, S.I. (1992) *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser, Boston.
- [39] Resnick, S.I. (1987) *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer-Verlag, New York.
- [40] Sarapa, N. (1992) *Teorija vjerojatnosti*. Školska knjiga, Zagreb.
- [41] Sato, K.-I. (1999) *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [42] Schmidli, H. (1999) On the distribution of the surplus prior and at ruin. *ASTIN Bulletin* **29**, 227-244.
- [43] Segerdahl, C.-O. (1955) When does ruin occur in in the collective risk theory? *Skand. Aktuar Tidsskr.* **1955**, 22-36.
- [44] Sharpe, M. (1988) *General Theory of Markov Processes*. Academic Press Inc. , San Diego.
- [45] Vervaat, W. (1972) Functional central limit theorems for processes with positive drift and their inverses. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **23**, 245-253.

Sažetak

Predmet ovog rada je klasični Cramér-Lundbergov model rizika kojim se modelira jedan portfelj neživotnog osiguranja neke osiguravajuće tvrtke. Rad se sastoji od tri poglavlja.

U prvom poglavlju definiramo model i vjerojatnost propasti kao odgovarajuću mjeru za njegovu rizičnost. S $\psi(u)$ označavamo vjerojatnost propasti u beskonačnom vremenu portfelja koji kreće od početnog kapitala u , dok s $\psi(u, T)$ označavamo vjerojatnost propasti u konačnom vremenu T . Pokazuje se da je pripadni slučajni proces (S_t) Lévyjev, pa odgovarajućim tehnikama dobivamo Pollaczek-Hinčinovu formulu reprezentacije za $\psi(u)$, kao i eksplisitni izraz za $\psi(0)$. Ključni korak u tom smjeru jest izvod distribucije rekordnih uzleta za proces (S_t) . Na kraju prvog poglavlja izvodimo distribucije još nekih vrijednosti vezanih uz događaj propasti za slučaj $u = 0$.

U drugom poglavlju uočavamo da $\psi(u)$ ovisi o ponašanju repa distribucije kojom se modeliraju isplate iz portfelja. U nastavku poglavlja se koncentriramo na distribucije malih zahtjeva (odnosno distribucije čiji rep teži u 0 eksponencijalno brzo), za koje postoji Cramér-Lundbergov koeficijent. Pokazuje se da u tom slučaju možemo dobiti eksponencijalnu gornju granicu za $\psi(u)$, kao i eksponencijalnu asymptotsku jednakost. Drugim riječima, u slučaju distribucija malih zahtjeva vjerojatnost propasti je eksponencijalno malena. U nastavku poglavlja dajemo asymptotski opis načina na koji se događa propast za navedeni slučaj. Pokazuje se da je ona uzrokovana gomilanjem velikog broja zahtjeva koji pristižu jačim intenzitetom. Također, iz takvih razmatranja proizlazi i asymptotski izraz za $\psi(u, T)$. On nam pokazuje da je za veliki u i ta vjerojatnost eksponencijalno malena. Za dokazivanje navedenih rezultata uvelike koristimo teoriju slabe konvergencije mjera.

U trećem poglavlju razmatramo slučaj velikih zahtjeva, odnosno slučaj kada rep distribucije isplata konvergira u 0 sporije od bilo koje eksponencijalne funkcije. Tipične predstavnike nalazimo u klasi subeksponencijalnih distribucija, odnosno klasi distribucija s repom regularne varijacije. Pokazuje se da se u tom slučaju $\psi(u)$ asymptotski ponaša kao rep integriranog repa distribucije isplata, pa tako konvergira u 0 sporije od bilo koje eksponencijalne funkcije. Dodatnim asymptotskim rezultatima podupiremo tezu da se kod takvih portfelja propast događa kao posljedica jedne jedine velike isplate, što je u kontrastu sa slučajem malih zahtjeva.

Summary

The main topic of this work is the classical Cramér-Lundberg risk model which describes non-life insurance portfolio of an insurance company. The work is divided into three chapters.

In the first chapter we present the model and introduce probabilities of ruin $\psi(u)$ in infinite time and $\psi(u, T)$ in finite time T for a portfolio starting with initial capital u as basic measures of risk. We derive Pollaczek-Hinčin representation formula for the probability of ruin $\psi(u)$.

In the second chapter we study the small claims case: the tail of the claim size distribution decreases to 0 exponentially. We obtain an exponential upper bound for $\psi(u)$, as well as asymptotic expression which is also exponential. We also give an asymptotic description of the ruin event itself, leading to an asymptotic expression for $\psi(u, T)$.

In the third chapter we study the large claims case with special emphasis on subexponential claim size distributions. It turns out that $\psi(u)$ decays to 0 much slower than in the small claims case. We also show that in this case typical ruin event occurs as a consequence of one large claim.

Životopis

Rođen sam 23. ožujka 1975. u Splitu, gdje sam završio osnovnu školu, te pohađao srednju školu matematičko-informatičkog usmjerenja. U jesen 1993. godine upisao sam studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-Matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, profil diplomirani inžinjer matematike, smjer *matematička statistika i računarstvo*. Diplomirao sam 13. srpnja 1998. s temom *Teorija rizika* pod vodstvom prof. dr. sc. Zorana Vondračeka.

Zajednički poslijediplomski studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-Matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu upisao sam 1998. godine, te sam sudjelovao u radu *Seminara za teoriju vjerojatnosti*.

Od 12. listopada 1998. godine zaposlen sam kao znanstveni novak na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-Matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.