

## OSNOVI MEHANIKE LOMA, 2. DIO: ŠIRENJE PUKOTINE

### FAKTOR INTENZITETA NAPREZANJA

U prvom dijelu ovog članka rečeno je da se u području velikih napreznja začinje više mikropukotina - i to redovito na površinskom dijelu napregnutog elementa - od kojih se najčešće samo jedna nastavlja širiti do konačnog loma, koji nastaje u trenutku kada preostali dio presjeka, nezahvaćen pukotinom, postane dovoljno malen da napreznja u njemu dostignu vrijednost statičke čvrstoće. Zbog toga, dijelovi strojeva i konstrukcija napregnuta sa vremenski promjenjivim napreznjima, imaju karakterističnu, lako i na prvi pogled prepoznatljivu lomnu površinu, koja se sastoji od dvije sasvim različite zone (Sl. 1): zonu širenja pukotine, koja je vrlo glatka (hrapavost na nivou kristalnih zrna), i zonu statičkog loma vrlo grube površine, karakteristične za statički lom. Shematski izgledi površina zamornog loma za različite vrste opterećenja prikazani su na slici 2. Treba napomenuti još jednu značajku ovog loma uslijed zamora materijala: Za razliku od čistog

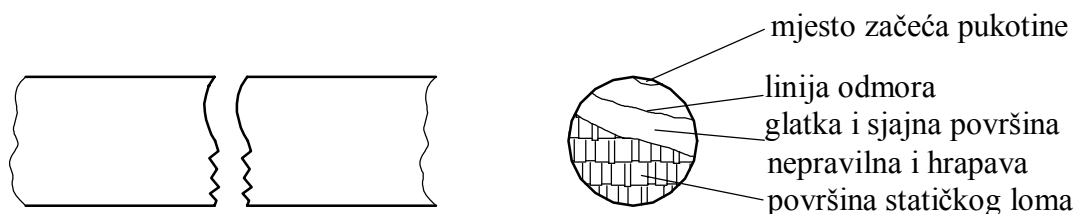
statičkog loma, nema plastičnih deformacija (dakle trajnog produljenja i kontrakcije presjeka), jer su napreznja koja uzrokuju ovaj lom, znatno ispod granice tečenja.

Temeljni faktor koji definira pukotinu - njezin nastanak, oblik, brzinu širenja itd. jest faktor intenziteta napreznja  $K$ , koji predstavlja vezu između (makro)napreznja  $\sigma$ , kojima je napregnut promatrani element, oblika elementa i duljine  $a$  same pukotine:

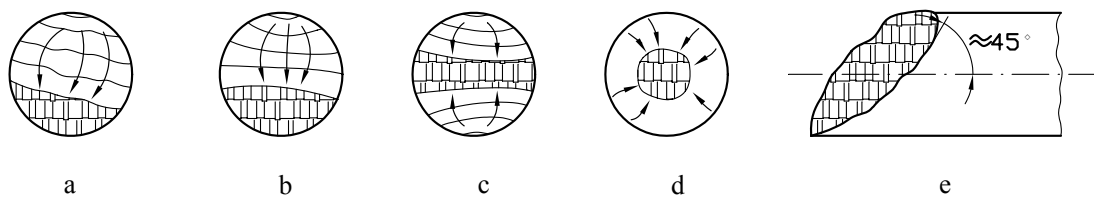
$$K = \sigma Y \sqrt{\pi a} .$$

Ovdje je  $Y$  faktor oblika, koji ovisi o geometriji elementa, tj. o omjeru njegovih dimenzija i dimenzije pukotine, te o tipu opterećenja.

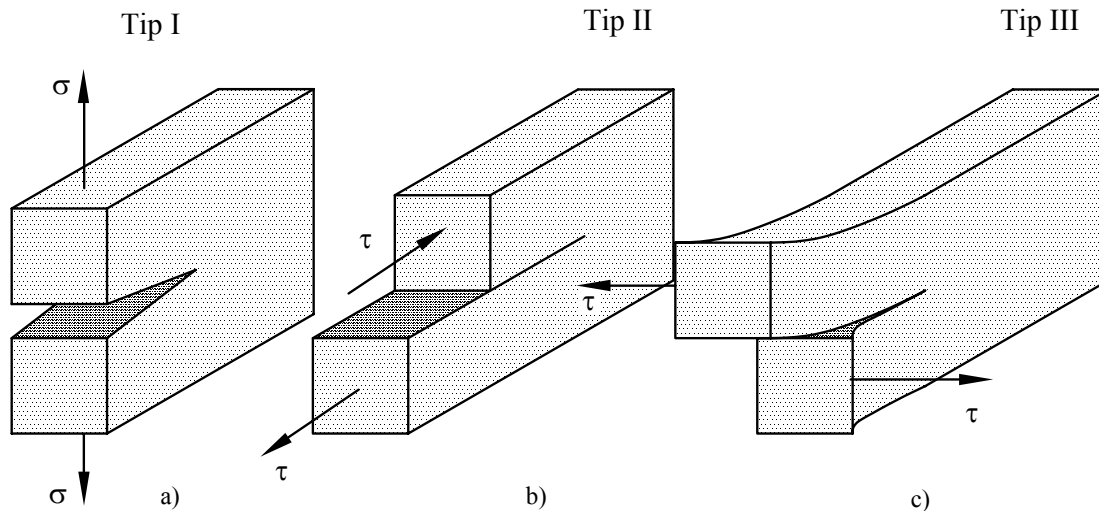
Faktor intenziteta napreznja (FIN) računa se za tri osnovna tipa opterećenja, koja - djelujući svako zasebno, formiraju tri glavna tipa pukotine (Sl. 3): Tip I, ili odcjepni, Tip II, ili klizni i Tip III, ili rascjepni. Odgovarajući FIN-ovi označavaju se kao  $K_I$ ,  $K_{II}$  i  $K_{III}$ .



Slika 1 – Opći izgled površine loma uslijed zamora materijala



Slika 2 - Prikaz zamornih lomova: a) aksijalno opterećenje, b) istosmjerno savijanje, c) izmjenično savijanje, d) kružno savijanje, e) torzija



Slika 3 - Tri osnovna tipa opterećenja s pripadajućim tipovima pukotine:  
a) odcjepni tip, b) klizni tip, c) rascjepni tip

U daljnjem izlaganju upotrebljavat će se samo FIN  $K_I$  za odcjepni tip opterećenja, ali uz napomenu da će ista ili slična razmatranja vrijediti i za ostale tipove opterećenja.

Temeljni problem u računanju FIN-a, a time i jedan od glavnih zadataka Mehanike loma jest određivanje faktora oblika  $Y$ . Danas postoje razvijene mnoge analitičke i numeričke metode za njegovo računanje, ali za grube, približne proračune, može se uzeti da je  $Y \approx 1,12$  za tip I opterećenja (vlak i savijanje) i za pukotinu začetu na površini, te  $Y \approx 1,0$  za Tip II i Tip III opterećenja (smik i torzija).

Slično naprezanjima i deformacijama, i faktori intenziteta naprezanja su zbrojivi za isti tip opterećenja tj. ukupni FIN jednak je zbroju FIN-ova od pojedinačnih opterećenja (A, B i C), koje svako za sebe tvori isti tip pukotine:

$$K_{I,uk} = K_{I,A} + K_{I,B} + K_{I,C}$$

ali

$$K_{uk} \neq K_I + K_{II} + K_{III},$$

tj. FIN-ovi različitih tipova opterećenja ne mogu se zbrajati, ali se omjeri njihovih oslobođenih energija mogu zbrajati. Za ilustraciju promatrat ćemo beskonačnu ploču jednoosno napregnutu sa  $\sigma$ , ali s podpovršinskom pukotinom duljine  $2a$  nagnutom pod kutem  $\beta$  prema "normalnom"

položaju pukotine, okomito na smjer naprezanja (Sl. 4). Ako koordinatni sustav (ili ploču) zakrenemo za kut  $\beta$ , tako da pukotina zauzme horizontalan položaj, postaje očito da pukotina doživljava normalno opterećenje Tipa I od komponente naprezanja  $\sigma_{y'y'}$  i tangencijalno naprezanje Tipa II od naprezanja  $\tau_{x'y'}$ . Kako je za beskonačnu ploču  $Y = 0$ , očito su FIN-ovi

$$K_I = \sigma_{y'y'} \sqrt{\pi a}$$

$$K_{II} = \tau_{x'y'} \sqrt{\pi a}.$$

Uz pomoć Mohrove kružnice, ovo se može pisati kao

$$K_I = \sigma \cos^2 \beta \sqrt{\pi a}$$

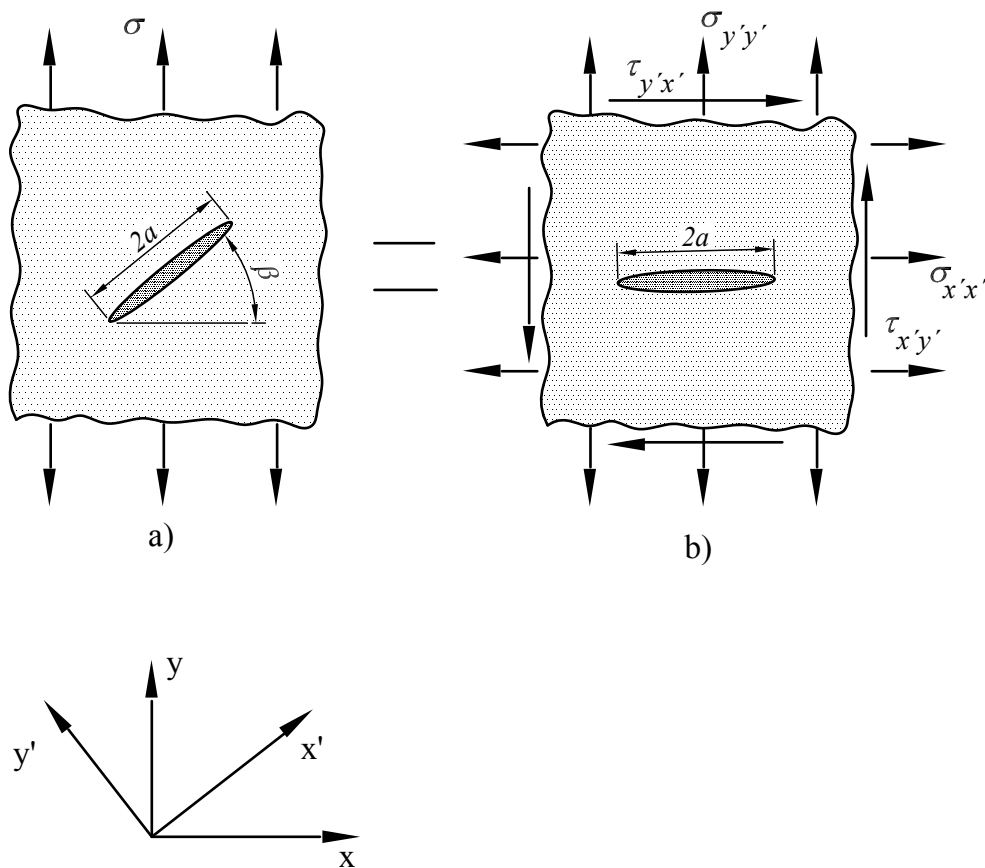
$$K_{II} = \sigma \cos \beta \sin \beta \sqrt{\pi a}.$$

Na osnovi utvrđene činjenice da se faktori oslobođene energije  $\mathcal{G}_{I,II,III}$  za svaki tip opterećenja mogu zbrajati tj. ukupni faktor oslobođene energije (faktor gustoće energije) je

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_I + \mathcal{G}_{II} + \mathcal{G}_{III} \text{ tj.}$$

$$\mathcal{G} = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 + \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1}{2\nu} K_{III}^2,$$

gdje je  $E$  modul elastičnosti, a  $\nu$  Poissonov koeficijent materijala, dolazi se do izraza za



Slika 4 - Opći slučaj podpovršinske pukotine u beskonačnoj ploči kada jednoosno naprezanje nije okomito na ravninu pukotine

duljinu ekvivalentne pukotine Tipa I, koja ima isti faktor intenziteta naprezanja i isti faktor oslobođene energije kao pukotina orijentirana pod kutem  $\beta$ , a koja se širi pod kutem  $\alpha^*$ , za koji faktor oslobođene energije ima maksimalnu vrijednost

$$a_e = a \cdot f(\beta, \alpha^*) .$$

Funkcija  $f(\beta, \alpha^*)$  se lako može odrediti ili pronaći u literaturi.

Sada se mogu odrediti faktori intenziteta naprezanja i za dvoosno (ravninsko) stanje naprezanja (Sl. 5). Naime, superpozicijom FIN-ova za svako od narinutih naprezanja  $\sigma_I$

i  $\sigma_2$ , prema izrazima iz prethodnog primjera, dobiju se izrazi za vrijednosti FIN-ova za Tip I i Tip II opterećenja:

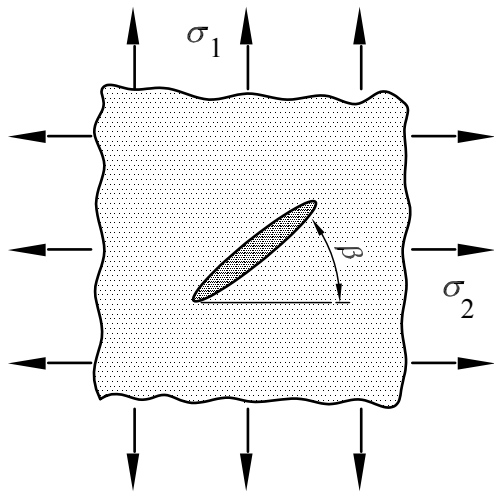
$$K_I = K_{I,0} (\cos^2 \beta + B \sin^2 \beta)$$

$$K_{II} = K_{I,0} \sin \beta \cos \beta (1 - B)$$

gdje je  $K_{I,0}$  FIN za Tip I opterećenja kada je  $\beta = 0$ , a  $B$  je omjer naprezanja

$$B = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \leq 1 .$$

Jedan od najboljih alata za određivanje FIN-a jesu **težinske funkcije**, koje opisuju kako se pomaci oko pukotine mijenjaju sa promjenom



Slika 5 - Pukotina u dvoosno napregnutoj beskonačnoj ploči

duljine pukotine. Jednom kada se odredi težinska funkcija za određeni element stroja ili konstrukcije - za nekakvo opterećenje, tada ona vrijedi za bilo kakvo opterećenje, a FIN se lako odredi jednostavnom integracijom. Za prikaz odnosa između FIN-a i težinske funkcije treba odrediti promjenu energije, koja nastaje pojavom nove pukotine. Na slici 6 prikazana je polubeskonačna ploča jednoosno opterećena s kontinuiranim opterećenjem, koje se mijenja u smjeru osi x, a zbog kojega na mjestu buduće

pukotine egzistira opterećenje  $p(x)$ , okomito na smjer širenja pukotine (Sl. 6a). Nakon pojave pukotine, njene plohe se jednako razmaknu od osi x, pa su međusobno udaljene za  $v(x, a)$  - Sl. 6b). Temeljem principa superpozicije, ovaj nastanak pukotine možemo shvatiti kao posljedicu djelovanja istog opterećenja  $p(x)$ , ali suprotnog smjera, duž površina pukotine. Pri tome je energija deformacije na proizvoljnom mjestu x jednaka umnošku infinitezimalne sile  $p(x)dx$  i deformacije  $v(x, a)$ , pa je ukupna energija deformacije duž pukotine

$$U = \int_0^a p(x) \cdot v(x, a) dx$$

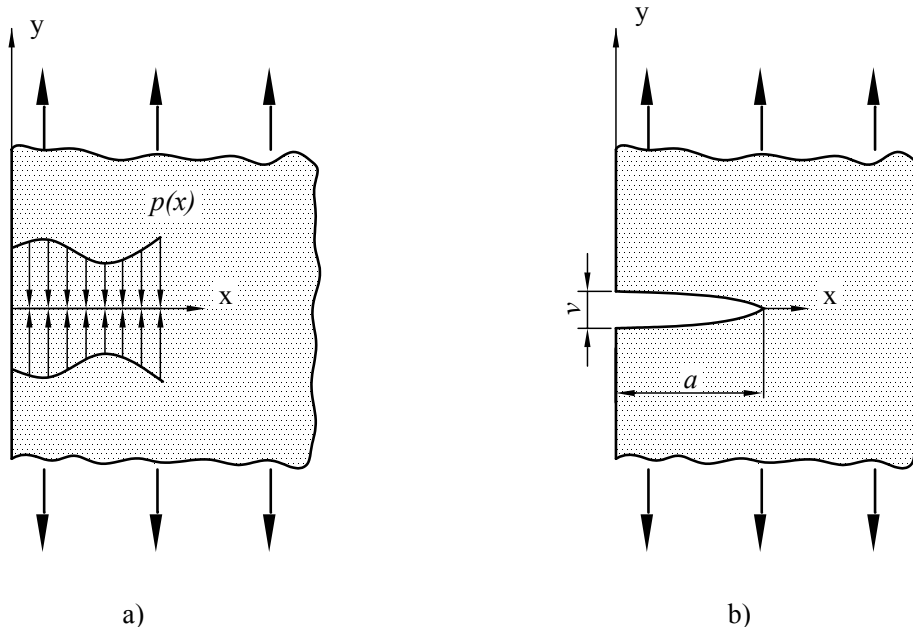
Kako se faktor gustoće energije može izraziti kao

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E} = \frac{\partial U}{\partial a}$$

dobiva se izraz za računanje FIN-a:

$$K_I = \int_0^a p(x) \cdot m(x, a) dx$$

gdje se izraz



Slika 6 - Polubeskonačna ploča kontinuirano opterećena:  
a) prije i b) poslije nastanka pukotine

$$m(x, a) = \frac{E}{2K_I} \frac{\partial v(x, a)}{\partial a}$$

naziva težinskom funkcijom. Ona je jedinstvena za geometriju iz koje se izvodi. U praksi, težinske funkcije se izračunavaju (analitički ili numerički) za vrlo jednostavne slučajeve opterećenja, a jednom kada je određena, bilo koji drugi slučaj opterećenja se može postaviti na istu geometriju. Težinske funkcije se obično izračunavaju za beskonačna područja uz pomoć kompleksne matematičke analize, a aproksimativno se mogu odrediti numeričkim metodama za konačna područja.

### ŠIRENJE PUKOTINE POD CIKLIČKIM OPTEREĆENJEM

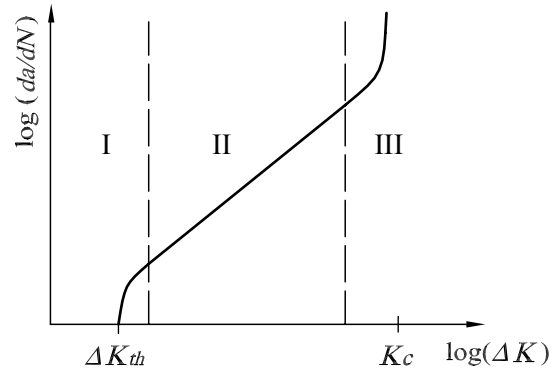
Da li će se pod cikličkim opterećenjem začeta pukotina početi širiti- sve do konačnog lomavisi o tzv. **pragu širenja pukotine**, kako nazivamo graničnu vrijednost raspona faktora intenziteta naprezanja

$$\Delta K_{th} = K_{max} - K_{min} = \Delta \sigma Y \sqrt{\pi a_0},$$

gdje je  $a_0$  duljina začete pukotine, a  $\Delta \sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 2\sigma_a$ . Ako i kad  $\Delta K$  premaši vrijednost  $\Delta K_{th}$ , pukotina se počinje širiti. Testiranjem normiranih uzoraka (ponekad i samih elemenata), mjeri se porast duljine pukotine po ciklusu  $da/dN$  (brzina širenja pukotine) u ovisnosti o  $\Delta K$ . Tipičan rezultat takvog eksperimenta prikazan je na Sl. 7 u logaritamskim koordinatama. Uočljivo je da je širenje pukotine na početku (točka  $\Delta K_{th}$ ) ubrzano (područje I), zatim prelazi u fazu stabilnog rasta (područje II), da bi konačno prešlo u fazu kritičnog širenja pukotine (područje III), koje vodi do ubrzanog loma. Vrijednost raspona FIN-a  $\Delta K_c$ , kod kojega dolazi do konačnog loma ( $da/dN \rightarrow \infty$ ), je kritična vrijednost

$$\Delta K_c = K_c - K_{min} = \Delta \sigma Y \sqrt{\pi a_c},$$

čija sastavnica  $K_c$  je kritična vrijednost FIN-a, koja se naziva lomna žilavost i predstavlja jednu od najvažnijih konstanti Mehanike loma. Iz gornje relacije može se izračunati kritična duljina pukotine  $a_c$  u trenutku loma za poznatu lomnu žilavost i obratno. U području II brzina širenja pukotina raste linearno, pa se može opisati jednadžbom



Slika 7- Tipična krivulja rasta pukotine u metalima

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^n$$

koja u logaritamskim koordinatama predstavlja pravac s koeficijentom smjera  $n$ . Ova zakonitost poznata je kao Parisov zakon u kojem su  $C$  i  $n$  konstante materijala, koje se određuju eksperimentalno. Parisov zakon, tj. članak u kojem se pojavio 1960. g., je jedan od najcitiranijih članaka iz područja tehničkih znanosti općenito. Iako strogo vrijedi samo u području II, i dandanas je to zakon, koji se u inženjerskoj praksi najčešće upotrebljava za određivanje preostalog vijeka trajanja elemenata strojeva i konstrukcija, na osnovi izmjerene duljine pukotine, ili dopuštene duljine pukotine za predviđeni vijek trajanja. Naime, integracijom Parisove jednadžbe dobiva se vijek trajanja do loma izražen u broju ciklusa

$$N_f = \int_a^{a_c} \frac{da}{\Delta K^n},$$

kojeg prosječan pogonski inženjer u održavanju može lako izračunati, ako se faktor oblika  $Y$  aproksimira konstantom (npr.  $Y = 1,12$ ):

$$N_f = \frac{1}{a^{(n-2)/2}} - \frac{1}{a_c^{(n-2)/2}}}{(n-2)C \left[ Y (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \sqrt{\pi} \right]^n}.$$

I u protivnom se integral može izračunati, ako ne analitički, onda zasigurno numerički. Pri tome se duljina pukotine, ako nije izmjerena, može lako izračunati iz izraza za  $\Delta K$ :

$$a = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\Delta K}{Y(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})} \right]^2.$$

Ukoliko se računa ukupan vijek trajanja, od začea pukotine do loma, onda se po ovoj jednadžbi računa inicijalna duljina pukotine uvrštavajući

$$\Delta K = \Delta K_{th} = K_{th} - K_{\min},$$

te kritična duljina pukotine, uvrštavajući

$$\Delta K = \Delta K_c = K_c - K_{\min}.$$

Pored nepreciznosti, jer u područjima I i III vrijedi samo približno, glavni nedostatak Parisove formule jest njena neovisnost o asimetriji ciklusa  $r = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = K_{\min}/K_{\max}$ . Zato je već više od dvije dekade u širokoj primjeni Formanova formula za rast pukotine

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^n}{(1-r)K_c - \Delta K},$$

koja usto vrijedi i za područja II i III.

U novije vrijeme, temeljem opsežnih, pretežno eksperimentalnih istraživanja, predloženo je nekoliko formula za rast pukotine, koje se mogu primijeniti na sva tri područja, od praga širenja pukotine, do konačnog loma u točki  $\Delta K_c$ . Po svemu sudeći, najbolje rezultate daje McEvilyjeva formula

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left( 1 + \frac{\Delta K}{K_c - K_{\max}} \right)$$

iako je temeljena na prilično jednostavnom fizikalnom modelu.

Većina ovih formula sadrži četiri konstante materijala:  $C$ ,  $n$ ,  $K_c$  i  $\Delta K_{th}$ , tako da za određeni materijal rast zamorne pukotine ovisi samo o parametrima opterećenja  $\Delta K$  i  $r$ . Jedini problem jest doći do vrijednosti konstanti. Naime, ukoliko ih ne uspijemo pronaći u literaturi, njihovo eksperimentalno određivanje je naporno i skupo. No, najveći nedostatak im je što nijedna od njih ne uzima u obzir uticaj povijesti opterećenja tj. vrijede samo za naprezanja konstantne amplitude. O načinima prevazilaženja ovog problema bit će riječi u završnom članku iz ove serije članaka.

U održavanju strojeva i vitalnih konstrukcija nekog tehničkog sistema, ipak, važnije od proračuna vijeka trajanja, ili bilo kakvog drugog proračuna, jest na vrijeme otkriti nastalu pukotinu, te zaustaviti njezino širenje, kako bi se spriječio katastrofičan lom, koji neizbježno donosi velike materijalne, a možebitno i ljudske gubitke. O tome će biti govora u idućem članku iz serije.