

Sadržaj

Uvod	3
1 Stohastičke jednadžbe na beskonačnodimenzionalnim prostorima	9
1.1 Beskonačnodimenzionalno Brownovo gibanje	10
1.2 Stohastički integral	13
1.3 Osnovni alati	19
1.3.1 Itôova formula	19
1.3.2 Stohastički Fubinijev teorem	20
1.3.3 Girsanovljev teorem	22
1.4 Stohastičke jednadžbe	26
1.4.1 Blago, slabo i jako rješenje	26
1.4.2 Egzistencija i jedinstvenost rješenja	31
2 Uvjet konzistencije na proces Z i familiju \mathcal{G}	41
2.1 Z je Itôv	41
2.2 Primjena na Nelson-Siegelove familije	45
3 HJM model: pogled iz beskonačnodimenzionalnog prostora	51
3.1 Standarni HJM model	51
3.2 Musielina parametrizacija	52
3.3 HJM uvjet na drift	55
3.4 Što je model?	60
4 Prostori H_w	64
4.1 Definicija H_w	64
4.2 Kriterij za volatilnost	70
5 Invarijantne mnogostrukosti za stohastičku jednadžbu	72
5.1 Konačno dimenzionalne podmnogostrukosti u Banachovom prostoru .	72
5.2 Invarijantne mnogostrukosti	79
5.3 Dokazi teorema 5.16 - 5.20	82

5.4	Uvjeti konzistencije u lokalnim koordinatama	89
6	Konzistentni HJM modeli	91
6.1	Problemi konzistencije	91
6.2	Jednostavni kriterij regularnosti za G	93
6.3	Afini modeli	95
6.3.1	Vasičekov model	97
6.3.2	Cox-Ingersoll-Ross model	97
	Literatura	99
	Sažetak	101
	Summary	103

Uvod

Osnovni cilj modeliranja cijene obveznica je određivanje cijene derivativa uz uvjet da na tržištu nema arbitraže. Postoji nekoliko značajnih modela za cijene obveznica:

- Vasiček:

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t)$$

- Cox-Ingersoll-Ross (CIR):

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)}dW(t)$$

- Ho-Lee:

$$dr(t) = \Theta(t)dt + \sigma dW(t)$$

- Hull-White (poopćeni Vasiček):

$$dr(t) = (\Theta(t) - a(t)r(t))dt + \sigma(t)dW(t)$$

- Hull-White (poopćeni CIR):

$$dr(t) = (\Theta(t) - a(t)r(t))dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}dW(t)$$

Svi oni zadaju dinamiku gibanja kratkoročne stope $r(t)$ i prepostavljaju da je kratkoročna stopa Markovljev proces.

Ukoliko na tržištu nema arbitraže znamo da postoji martingalna mjera takva da su procesi $\frac{B(t, T)}{B(t)} - \mathcal{F}_t$ martingali.

$B(t, T)$ je cijena obveznice koja u trenutku T isplaćuje 1 \$, a dinamika procesa $B(t)$ je zadana sa

$$dB(t) = r(t)B(t)dt$$

Procesom $B(t)$ se također trguje i on odgovara mogućnosti neprekidnog ulaganja u obveznice koje istječu u infinitesimalnom trenutku nakon što smo novac uložili. U [16](korolar 4.8,1.poglavlje) je pokazano da tržište bez arbitraže može podnijeti

samo jedan proces volatilnosti 0. Pregled modela kratkoročnih stopa (engl. short-term interest rate models) dan je u [1] i [20].

Zašto je dovoljno zadati dinamiku kratkoročnih stopa? Kao što smo rekli ako na tržištu nema arbitraže postoji martingalna mjera \mathbb{Q} i vrijedi

$$\frac{B(t, T)}{B(t)} = E_{\mathbb{Q}} \left(\frac{B(T, T)}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right)$$

S obzirom da je $B(T, T) = 1$ dobivamo

$$B(t, T) = B(t) E_{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right)$$

$$B(t) = \left(\exp \left(\int_0^t r(s) ds \right) \right) \Rightarrow B(t, T) = E_{\mathbb{Q}} \left(\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) | \mathcal{F}_t \right) \quad (1)$$

U slučaju da je $r(t)$ Markovljev proces uvjetno očekivanje u (1) je funkcija $r(t)$ i sva slučajnost potječe od toga tj. $B(t, T) = F(t, r(t); T)$.

Ali kod kratkoročnih modela problem je u procijeni parametara koja se radi invertiranjem krivulje prinosa tj. izjednačavanjem sadašnjih teorijskih i empirijskih vrijednosti (procjene statističkom prilagodbom na podatke se ne rade jer je dinamika kratkoročnih stopa zadana u odnosu na martingalnu mjeru dok se događanja na tržištu dešavaju pod objektivnom tržišnom mjerom). Samo invertiranje krivulje prinosa zahtjeva rješavanje složenih izraza i to, što je model realističniji, izrazi su složeniji. Stoga su Heath, Jarrow i Morton u [13] uveli drugčiji pristup modeliranju cijene obveznica (HJM model). Oni prepostavljaju da je zadana cijela familija budućih stopa sa dinamikom

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t) \quad (2)$$

gdje su α i σ progresivno izmjerivi procesi; σ prima vrijednosti u \mathbb{R}^d , a W je d -dimenzionalno Brownovo gibanje.

Invertiranje krivulje prinosa sada je direktno; to je samo početni uvjet u stohastičkoj diferencijalnoj jednadžbi (2). Zadati dinamiku budućih stopa isto je što i zadati dinamiku svih obveznica jer iz definicije budućih stopa slijedi

$$B(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right) \quad (3)$$

Ali modeli koji bi zadali dinamiku $B(t, T)$ bi trebali uzeti u obzir $B(T, T) = 1$ za sve T dok kod budućih stopa taj uvjet nemamo. U HJM modelu nam dakle ostaje odgovoriti na pitanje: Uz koje uvjete na parametre α i σ na tržištu nema prilike za arbitražu. To je napravljeno u [13] i uvjet je

$$\alpha(t, T) = \sum_{i=1}^d \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s) ds \quad (4)$$

Dakako misli se da je dinamika budućih stopa (2) zadana pod martingalnom mjerom. Modeli kratkoročnih stopa inkorporirani su u HJM-modelu. Uzmimo npr. $\sigma(t, T) = \sigma$. Tada je zbog (4) $\alpha(t, T) = \sigma^2(T - t)$. Iz (2) slijedi

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t(T - \frac{t}{2}) + \sigma W(t) \quad (5)$$

Sada imamo:

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \sigma W(t) + \sigma^2 \frac{t^2}{2}$$

Dobivena jednakost odgovara Ho-Lee modelu. Detaljnije o HJM modelu se može pronaći u [1] i [20].

Procesi $f(t, T)$ definirani su na dijelu $0 \leq t \leq T$. Musiela u [19] predlaže uvođenje reparametrizacije

$$r(t, x) = f(t, t + x) \quad (6)$$

Što dobivamo tom reparametrizacijom? Osnovni razlog uvođenja reparametrizacije je što sada više nemamo uvjeta na domenu. Time otvaramo mogućnost da gledamo na $r(t)$ kao proces koji prima vrijednosti u nekom Hilbertovom prostoru (pogodno odabranom prostoru funkcija). Kako izgleda stohastička diferencijalna jednadžba za $r(t, x)$? Ovdje ćemo dati intuitivan argument

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t, x) - r(t, x) &= f(t + \Delta t, t + x + \Delta t) - f(t, t + x) \\ &= f(t + \Delta t, t + x + \Delta t) - f(t, t + x + \Delta t) \\ &\quad + f(t, t + x + \Delta t) - f(t, t + x) \end{aligned}$$

Sada vidimo da vrijedi:

$$dr(t, x) = df(t, t + x) + \frac{\partial f}{\partial T}(t, t + x)dt$$

gdje diferencijal $df(t, t + x)$ djeluje samo na prvu varijablu. Iz jednadžbe (2) slijedi

$$dr(t, x) = \alpha(t, t + x)dt + \sigma(t, t + x)dW(t) + \frac{\partial}{\partial x}r(t, x)dt \quad (7)$$

Jednadžbu (7) možemo pisati kao:

$$dr(t) = (Ar(t) + F(t))dt + B(t)dW(t) \quad (8)$$

gdje su $r(t), F(t), B(t)$ procesi koji primaju vrijednosti u nekom prostoru funkcija, $B(t)(x) = \sigma(t, t + x)$, zbog (4) $F(t)(x) = \sum_{i=1}^d \sigma_i(t, t + x) \int_0^{T-t} \sigma_i(t, t + x)dx$, a A je operator diferenciranja po varijabli x , $A = \frac{\partial}{\partial x}$.

Standarna procedura kad radimo sa konkretnim modelom može se opisati ovako:

1. u trenutku $t = 0$ upotrijebi tržišne podatke da procijeniš parametre modela
2. upotrijebi te parametre modela za dobivanje cijene derivativa
3. u trenutku $t = 1$ ponovi postupak i ponovo procijeni parametre itd.

Da napravi procjenu parametara analitičar obično mora dobiti krivulju budućih stopa za trenutak $t = 0$ tj. $\{f^*(0, T); T \geq 0\}$ iz podataka na tržistu. Ali s obzirom da imamo podatke za konačno obveznica, podaci se sastoje iz diskretnog skupa i trebaju se prilagoditi nekoj krivulji. Često se to radi na takav način da imamo neke parametrizirane familije u odnosu na koje se vrši prilagodba. Najpoznatije su Nelson-Siegel familije:

$$G_{NS}(x) = z_1 + (z_2 + z_3 x)e^{-z_4 x}$$

i Svensson familije, proširenje Nelson-Siegel

$$G_S(x) = z_1 + (z_2 + z_3 x)e^{-z_5 x} + z_4 x e^{-z_6 x}$$

Dakako da je korak 3 pomalo nelogičan. Ukoliko je model točna slika realnosti ponovna procjena parametara je suvišna jer sam model daje neku restrikciju na krivulje budućih stopa. Razlog zašto se to radi je što, naravno, nijedan model nije točna slika realnosti. Ipak trebali bismo voditi računa da kad smo već jednom odabrali model nemamo potpunu slobodu u biranju krivulja za procjenu budućih stopa. Želimo govoriti o nekoj vrsti konzistencije modela \mathcal{M} i familije krivulja budućih stopa \mathcal{G} . Reći ćemo da je par \mathcal{M}, \mathcal{G} konzistentan ako su familije krivulja budućih stopa koje proizlaze iz modela \mathcal{M} sadržane u \mathcal{G} i ako je početni uvjet iz familije \mathcal{G} .

Uzmimo npr. Ho-Lee model. Dobili smo

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma W(t)$$

Iz jednadžbe odmah vidimo da je familija $G_{A,B}(T) = AT + B$ kozistentna s Ho-Lee modelom.

Duffie i Kan u članku [8] daju odgovor na pitanje: Uz koje uvjete na parametre μ, σ je cijena obveznice dana sa:

$$B(t, T) = \exp(A(T-t) + B(T-t)X_t)$$

gdje su A i B funkcije, a proces X_t zadovoljava sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW(t)$$

gdje su $\mu : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ funkcije, a W je d -dimenzionalno Brownovo gibanje. Njihov pristup je direkstan i nisu se bavili generalizacijom. Björk i Christensen u [2] postavljaju probleme konzistencije i postavljaju sljedeće uvjete:

1. Prepostavimo da upotrebljavamo fiksni model \mathcal{M} (Ho-Lee, Vasiček, ...). Ako se već radi ponovna procjena parametara tada bi familija krivulja koja se koristi za prilagodbu podacima trebala biti konzistentna s modelom.
2. Prepostavimo da je za danu familiju \mathcal{G} uočeno da daje dobru prilagodbu podacima. Tada nam to daje informaciju o modelu koji bismo trebali izabrati na takav način da bude konzistentan s familijom \mathcal{G} .

Sada se prirodno nameće sljedeći problemi za proučavanje:

1. Ako je zadan model \mathcal{M} i familija krivulja \mathcal{G} koji su nužni i dovoljni uvjeti za konzistenciju?
2. Ako je zadana familija \mathcal{G} da li postoji model \mathcal{M} koji je konzistentan sa \mathcal{G} ?
3. Neka je zadan model \mathcal{M} . Da li postoji konačnodimenzionalna familija krivulja \mathcal{G} koja je konzistentna sa \mathcal{M} ?

U ovoj radnji odgovorit ćemo na pitanje 1 i 2, problem 3 je riješen u [3] i generaliziran u [12].

Sada ćemo se malo osvrnuti na probleme 1 i 2. Dinamika $r(t)$ kao procesa koji prima vrijednosti u nekom prostoru funkcija zadana je sa (8). Parametriziranu familiju krivulja možemo doživljavati kao mnogostruktost u tom prostoru. Pitanje je: kada je mnogostruktost \mathcal{G} invarijantna za gornju jednadžbu tj. ukoliko je $r(s) = G(z)$ za neko $s \geq 0, z \in \mathbb{R}^n$ da li je $r(t) = G(Z_t) \forall t > s$ gdje je $Z(t)$ npr. Itôv proces. Geometrijska intuicija nam nameće da bi nužni i dovoljni uvjeti trebali biti

$$B(t) \in T_{G(Z(t))} \quad (9)$$

$$Ar(t) + F(t) \in T_{G(Z(t))} \quad (10)$$

gdje je $T_{G(Z(t))}$ tangencijalni prostor na mnogostruktost u točki $G(Z(t))$.

Zaključak je netočan zbog specifičnosti Itôve formule koja daje driftu još dodatni član. Zbog toga Björk i Christensen u [2] koriste Stratonovichev, a ne Itôv integral i dolaze do rješenja. Ali oni rade pod dodatnim uvjetima na proces $r(t)$ tj. gledaju ga kao strogo rješenje jednadžbe (8), ne prave razliku između regularne i uložene mnogostrukosti te su njihovi rezultati lokalni i ne komentiraju eventualnu globalnost. Filipović u [11] daje generalni okvir, razlikuje regularnu i uloženu mnogostruktost i daje dovoljne uvjete za globalnost.

Dakle ono što želimo da vrijedi je

$$r(t, x) = G(x, Z_t) \quad (11)$$

Tu nastaju problemi konzistencije:

- (P1) Koji su uvjeti na Z i G tako da (11) daje model bez arbitraže?
- (P2) Možemo li riješiti (11) za Z ?
- (P3) Ako možemo kakav je proces Z ? Je li nužno Itôv?

Problem je u tome što $r(t)$ kao slabo (ili blago) rješenje HJM jednadžbe nije nužno Itôv proces pa direktni zaključak na Z nije moguć.

Do sada smo radili sa d -dimenzionalnim Brownovim gibanjem. To ima za posljedicu značajnu koreliranost između budućih stopa u trenutku t (u slučaju konstantnih koeficijenata možemo sve buduće stope izraziti kao funkciju njih d). Stoga uvodimo prirodnu generalizaciju i govorimo o beskonačnodimenzionalnom Brownovom gibanju želeći dati smisla jednadžbi

$$dX_t = (AX_t + F(t, X_t))dt + \sum_{j \in \mathbb{N}} B^j(t, X_t)d\beta_t^j \quad (12)$$

gdje X_t prima vrijednosti u separabilnom Hilbertovom prostoru H , a $(\beta_t)_{t \in \mathbb{N}}$ su nezavisna Brownova gibanja, $F(t, X_t)$ i $B^j(t, X_t)$ su izmjeriva preslikavanja sa $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times H$ u H ; njihovu ovisnost o ω ne pišemo i posebno ističemo ovisnost o $X_t(\omega)$ u skladu s notacijom u [5].

U prvom poglavlju ćemo definirati beskonačnodimenzionalno Brownovo gibanje i definirati rješenja stohastičke jednadžbe na separabilnom Hilbertovom prostoru. Rezultati izloženi u tom poglavlju nalaze se u [5]. Većinu rezultata nećemo dokazivati, tu su uglavnom navedeni rezultati koji će nam koristiti u sljedećim poglavljima. U drugom poglavlju ćemo riješiti (P1) te dobiveni rezultat primjeniti na Nelson-Siegel familije. Rezultati iz tog poglavlje se nalaze u [10] i [11].

U trećem poglavlju ćemo dati formalnu definiciju HJMM (Heath-Jarrow-Morton modela sa Musiela parametrizacijom), dobiti generaliziranu verziju uvjeta (4). U četvrtom poglavlju ćemo dati jedan primjer prostora funkcija koji zadovoljava tehničke uvjete iz trećeg poglavlja, a istovremeno zadovoljava i naše iskustvo kako krivulje budućih stopa izgledaju.

U petom poglavlju ćemo govoriti o invarijantnim mnogostrukostima za jednadžbu (12)- sada je W beskonačnodimenzionalno Brownovo gibanje, odvojiti ćemo regularne i uložene mnogostrukosti, prikazati ćemo rješenje (P2) i (P3) na apstraktnoj razini te dobivene nužne i dovoljne uvjete za invarijantnost (riječ je o korekciji uvjeta (9) i (10)) izraziti u lokalnim koordinatama što je pogodno za primjene.

U šestom poglavlju ćemo primjeniti rezultate iz petog na HJM-model (operator A je operator diferenciranja, imamo ovisnost $F(t, X_t)$ o $B(t, X_t) = (B^j(t, X_t))_{j \in \mathbb{N}}$ zbog HJM uveta na drift) i riješiti neke primjere. Rezultati trećeg, četvrtog, petog i šestog poglavlja su izloženi u [11].

Na kraju bih se želio zahvaliti svom mentoru prof.dr.sc. Zoranu Vondračeku na pomoći pri pisanju ove radnje.

Poglavlje 1

Stohastičke jednadžbe na beskonačnodimenzionalnim prostorima

Krajnji cilj u ovom poglavlju nam je doći do pojma rješenja i uvjeta egzistencije i jedinstvenosti za jednadžbu (12). Moramo definirati pojam beskonačnodimenzionalnog Brownovog gibanja i pojam stohastičkog integrala u odnosu na to gibanje. Navedeni rezultati se nalaze u [5]. O polugrupama operatora se može pronaći u [7]. Mi ćemo raditi na separabilnim Hilbertovim prostorima što pojednostavljuje teoriju, a dosta je za naše potrebe. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ dani potpuni filtrirani vjerojatnosni prostor čija filtracija zadovoljava uobičajene uvjete, tj. vrijedi da je \mathcal{F} \mathbb{P} -potpuna, (\mathcal{F}_t) je rastuća i neprekidna zdesna, \mathcal{F}_0 sadrži sve \mathbb{P} -nulskupove od \mathcal{F} . Uzet ćemo još da vrijedi $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty := \vee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$. Predvidljivu σ -algebru označavamo sa \mathcal{P} . Ponekad ćemo u pisanju izbaciti ovisnost slučajnih varijabli o ω kada ne može doći do zabune. Sa H označavamo separabilan Hilbertov prostor, a slučajna varijabla na H je izmjerivo preslikavanje u paru σ -algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(H))$ gdje je $\mathcal{B}(H)$ Borelova σ -algebra na H .

Neka je $I \subset \mathbb{R}_+$. Slučajan proces $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega) : I \times \Omega \rightarrow H$ ćemo pisati na razne načine: $(X_t)_{t \in I}$, X ili X_t kada je jasno što je skup indeksa I . $X_t : \Omega \rightarrow H$ je, dakle, slučajna varijabla za svaki $t \in I$. Proces $(X_t)_{t \in I}$ je verzija od $(Y_t)_{t \in I}$ ako $X_t = Y_t$, \mathbb{P} -g.s. za svaki $t \in I$. Dva procesa su nerazlučiva ako

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t, \forall t \in I] = 1.$$

Kada su dva procesa nerazlučiva jednostavno pišemo $X = Y$. Ako X i Y imaju zdesna (slijeva) neprekidne staze vrijedi da je $X = Y$ ako i samo ako je X verzija od Y .

1.1 Beskonačnodimenzionalno Brownovo gibanje

Željeli bismo proces

$$W = (\beta^j)_{j \in \mathbb{N}} \quad (1.1)$$

osmisliti na nekom Hilbertovom prostoru i zvati ga Brownovim gibanjem. (β_j) su nezavisna jednodimenzionalna Brownova gibanja. Dakako da bi to bilo prirodno učiniti na prostoru ℓ^2 .

$$\ell^2 := \left\{ v = (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|v\|_{\ell^2}^2 := \sum_{j \in \mathbb{N}} |v_j|^2 < \infty \right\}$$

Označimo sa $\{g_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ standarnu ortonormiranu bazu u ℓ^2 . Sada se lako vidi da proces $W = (\beta^j)_{j \in \mathbb{N}} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta^j g_j$ ne postoji u ℓ^2 . Naime $E\|W\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} E|\beta_t^j|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} t = \infty$. Međutim možemo ga realizirati na većem prostoru na sljedeći način: neka je $\lambda = (\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ niz strogo pozitivnih brojeva za koji vrijedi:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j < \infty.$$

Definiramo Hilbertov prostor sa težinama:

$$\ell_\lambda^2 := \left\{ v = (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|v\|_\lambda^2 := \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j |v_j|^2 < \infty \right\}.$$

Jasno da je $\ell^2 \subset \ell_\lambda^2$ sa Hilbert-Schmidtovim ulaganjem (za pregled rezultata o Hilbert-Schmidtovim i nuklearnim operatorima vidi [18]) i $e_j = (\lambda_j)^{-\frac{1}{2}} g_j$ čine ortonormiranu bazu u ℓ_λ^2 . Definiramo $Q \in L(\ell_\lambda^2)$ sa $Qe_j := \lambda_j e_j$. Očito Q je pozitivan, hermitski i nuklearan. Štoviše imamo $Q^{\frac{1}{2}}(\ell_\lambda^2) = \ell^2$ i $Q^{-\frac{1}{2}} : \ell^2 \rightarrow \ell_\lambda^2$ je izometrija jer za $u, v \in \ell^2$ imamo

$$\langle u, v \rangle_{\ell^2} = \sum_{j \in \mathbb{N}} u_j v_j = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \frac{u_j}{\sqrt{\lambda_j}} \frac{v_j}{\sqrt{\lambda_j}} = \langle Q^{-\frac{1}{2}}u, Q^{-\frac{1}{2}}v \rangle_{\ell_\lambda^2} \quad (1.2)$$

Sada bismo željeli definirati pojmove očekivanja, kovarijance, Gaussove razdiobe, uvjetnog očekivanja, martingala itd. na Hilbertovom prostoru. Rezultati su napravljeni u [5] i to na razini Banachovih prostora. Dat ćemo samo skice nekih dokaza.

Slučajnu varijablu $X : \Omega \rightarrow H$ zovemo Bochner integrabilnom ili jednostavno integrabilnom ako vrijedi:

$$\int_{\Omega} \|X(\omega)\| d\mathbb{P} < \infty$$

(uoči da je $\|X(\cdot)\|$ realna slučajna varijabla). Sada možemo definirati pojam očekivanja za takvu slučajnu varijablu: Neka je $h_i, i = 1, 2, \dots$ prebrojiva ortonormirana baza. Definiramo $EX \in H$ kao:

$$\langle EX, h_i \rangle = E\langle X, h_i \rangle$$

Lagano se vidi da tada $\langle EX, h \rangle = E\langle X, h \rangle$ za sve $h \in H$. Pojmu očekivanja možemo pristupiti i strukturalno kao što je napravljeno u [5]. No prije nam treba jedna lema koju iskazujemo na nivou metričkih prostora:

Lema 1.1. *Neka je E separabilan metrički prostor sa metrikom ρ i neka je X E -vrijednosna slučajna varijabla. Tada postoji niz $\{X_m\}$ jednostavnih slučajnih varijabli takav da za proizvoljni $\omega \in \Omega$ niz $\{\rho(X(\omega), X_m(\omega))\}$ monotono pada ka nuli.*

Dokaz. Neka je $E_0 = \{e_1, e_2, \dots\}$ prebrojiv gust podskup od E . Za $m = 1, 2, \dots$ definiramo

$$\begin{aligned}\rho_m(\omega) &= \min\{\rho(X(\omega), e_k), k = 1, \dots, m\} \\ k_m(\omega) &= \min\{k \leq m : \rho_m(\omega) = \rho(X(\omega), e_k)\} \\ X_m(\omega) &= e_{k_m(\omega)}\end{aligned}$$

Očito su X_m jednostavne slučajne varijable jer

$$X_m(\omega) \subset \{e_1, e_2, \dots, e_m\}.$$

Zbog gustoće od E_0 očito X_m -ovi zadovoljavaju tražene uvjete ■

Za jednostavne slučajne varijable na H se lagano definira pojam očekivanja kao što se i lagano provjeri $\left| \left| \int_{\Omega} X d\mathbb{P} \right| \right| \leq \int_{\Omega} |X(\omega)| d\mathbb{P}$. Neka je X integrabilna. Po lemi 1.1 postoji niz $\{X_m\}$ jednostavnih slučajnih varijabli takav da niz $\left| \left| X_m(\omega) - X(\omega) \right| \right|$ pada ka nuli za sve $\omega \in \Omega$. Slijedi da:

$$\begin{aligned}\left| \left| \int_{\Omega} X_m(\omega) d\mathbb{P} - \int_{\Omega} X_n(\omega) d\mathbb{P} \right| \right| &\leq \int_{\Omega} \left| \left| X_m(\omega) - X_n(\omega) \right| \right| d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\Omega} \left| \left| X(\omega) - X_m(\omega) \right| \right| d\mathbb{P} \\ &\quad + \int_{\Omega} \left| \left| X(\omega) - X_n(\omega) \right| \right| d\mathbb{P} \\ &\downarrow 0 \text{ kada } m, n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Sada možemo definirati

$$\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n(\omega) d\mathbb{P}.$$

Za slučajnu varijablu $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u H možemo definirati kovarijacijski operator

$$\langle \text{Cov}(X)h_i, h_j \rangle = E(\langle X - EX, h_i \rangle \langle X - EX, h_j \rangle)$$

Lako se vidi da je $\text{Cov}(X)$ pozitivan i nuklearan operator. Možemo definirati pojam uvjetnog očekivanja (vidi [5, poglavlje 1.3]) i vrijedi:

$$\|E(X|\mathcal{G})\| \leq E(\|X\| |\mathcal{G})\text{g.s}$$

Sada možemo definirati pojam martingala i lokalnog martingala analogno kao u \mathbb{R} (vidi [5, poglavlje 3.4]) i zbog gornje nejednakosti lagano se vidi da vrijedi da je $\|M_t\|$ submartingal, ukoliko je M_t martingal.

Definicija 1.2. Označimo sa $\mathcal{H}_T^2(H)$ prostor neprekidnih martingala M na $[0, T]$ s vrijednostima u H takvih da:

$$\|M\|_{\mathcal{H}_T^2(H)}^2 := E[\|M_T\|_H^2] < \infty \quad (1.3)$$

Stavimo $M_T^* := \sup_{t \in [0, T]} \|M_t\|_H$. Primjenjujući Doobovu nejednakost na submartingal $\|M_t\|$ (vidi [6]) imamo:

$$E[\|M_T^*\|^2] \leq 4\|M\|_{\mathcal{H}_T^2(H)}^2 \quad \text{za } M \in \mathcal{H}_T^2 \quad (1.4)$$

Lagano se vidi, koristeći (1.4), da je $\mathcal{H}_T^2(H)$ Hilbertov prostor sa normom (1.3). Označimo sa $\mathcal{H}_T^{0,2}(H)$ zatvoren potprostor koji se sastoji od $M \in \mathcal{H}_T^2(H)$ za koje vrijedi $M_0 = 0$.

Definicija 1.3. Za slučajnu varijablu X kažemo da je Gaussova ako je $\langle X, h \rangle$ realna Gaussova za svaki $h \in H$.

Za Gaussovou slučajnu varijablu se može pokazati da postoje $m \in H$ i simetričan, pozitivan, nuklearan operator Q takvi da:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle h, X \rangle d\mathbb{P} &= \langle m, h \rangle, \quad \forall h \in H \\ \int_H \langle h_1, X \rangle \langle h_2, X \rangle d\mathbb{P} &- \langle m, h_1 \rangle \langle m, h_2 \rangle = \langle Qh_1, h_2 \rangle \\ &\forall h_1, h_2 \in H \end{aligned}$$

Sada možemo definirati Brownovo gibanje:

Definicija 1.4. Neka je Q simetričan, pozitivan, nuklearan operator na H . Neprekidan martingal $X = (X_t; t \geq 0)$ s vrijednostima u H zovemo Q -Wienerov proces ako vrijedi:

- i) $X_0 = 0$
- ii) X ima nezavisne priraste

iii) $X_t - X_s$ je centrirana Gaussoova sa kovarijacionim operatorom $(t-s)Q$, za sve $0 \leq s \leq t$

Propozicija 1.5. *Red*

$$W = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta^j g_j$$

konvergira u $\mathcal{H}_T^{0,2}(\ell_\lambda^2)$ za sve $T \in \mathbb{R}_+$ i definira Q -Wienerov proces u ℓ_λ^2 , gdje su λ_j, Q definirani na početku odjeljka 1.1.

Primjetimo da realizacija od W kao Brownovog gibanja ovisi o λ . No ipak sama klasa integrabilnih procesa neće ovisiti o λ .

Dokaz. Fiksirajmo $T \in \mathbb{R}_+$. Definiramo $W^n \in \mathcal{H}_T^{0,2}(\ell_\lambda^2)$ sa:

$$W^n = \sum_{j=1}^n \beta^j g_j, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$

Očito $E\left[\|W_T^n - W_T^m\|_{\ell_\lambda^2}^2\right] = T \sum_{j=m+1}^n \lambda_j \rightarrow 0$ za $m, n \rightarrow \infty$. Stoga je $(W^n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyev niz u $\mathcal{H}_T^{0,2}$ koji konvergira ka W . Zbog ocjene (1.4) imamo da je konvergencija lokalno uniformna po L^2 normi. Stoga je W neprekidan martingal s vrijednostima u ℓ_λ^2 .

Za svaki $v \in \ell^2$ realne slučajne varijable $\langle W_t^n - W_s^m, v \rangle_{\ell_\lambda^2}$ su centrirane Gaussove i konvergiraju u $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ka $\langle W_t - W_s, v \rangle_{\ell_\lambda^2}$ koja je stoga isto centrirana Gaussova. Zaključujući na isti način dolazimo do zaključka da vrijedi

$$E\left[\langle W_t - W_s, e_i \rangle_{\ell_\lambda^2} \langle W_t - W_s, e_j \rangle_{\ell_\lambda^2}\right] = (t-s) \langle Qe_i, e_j \rangle_{\ell_\lambda^2}$$

Stoga vrijedi uvjet definicije iii). Na sličan se način pokaže da vrijedi ii) i očito $W_0 = 0$. ■

1.2 Stohastički integral

Za definiciju stohastičkog integrala Da Prato i Zabczyk u [5] uvode skup $L_2^0(H)$ Hilbert-Schmidtovih operatora sa ℓ_2 u H (to je također separabilan Hilbertov prostor pa s analizom nećemo imati problema). To je prostor koji se sastoji od linearnih preslikavanja $\Phi : \ell^2 \rightarrow H$ sa

$$\|\Phi\|_{L_2^0(H)}^2 := \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\Phi^j\|_H^2 < \infty \tag{1.6}$$

gdje je $\Phi^j := \Phi(g_j)$. Nadalje ćemo identificirati Φ sa $(\Phi^j)_{j \in \mathbb{N}}$. Također vrijedi i da svaki niz $(\Phi_t^j)_{j \in \mathbb{N}}$ predvidljivih procesa koji zadovoljavaju (1.6) \mathbb{P} -g.s. definira jedan $L_2^0(H)$ proces sa $\Phi_t(g_j) := \Phi_t^j$. Ovdje smo koristili činjenicu $\mathcal{B}(L_2^0(H)) = \otimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(H)$ što vrijedi zbog separabilnosti od H . Za konstrukciju stohastičkog integrala će sljedeći prostor imati važnu ulogu:

Definicija 1.6. Prostorom $\mathcal{L}_T^2(H)$ zovemo Hilbertov prostor ekvivalentnih klasa predvidljivih procesa Φ s vrijednostima u $L_2^0(H)$ s normom:

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}_T^2(H)}^2 := E \left[\int_0^T \|\Phi_t\|_{L_2^0(H)}^2 dt \right] < \infty \quad (1.7)$$

Stohastički integral prvo definiramo za elementarne procese s vrijednostima u $L(\ell_\lambda^2, H)$. Prvo primjetimo da je prostor $L(\ell_\lambda^2, H)$ uložen u prostor $L_2^0(H)$ gdje operatore iz $L(\ell_\lambda^2, H)$ gledamo restringirano na ℓ^2 . Naime vrijedi relacija:

$$\|\Phi\|_{L_2^0(H)}^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |\langle \Phi g_i, h_j \rangle|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda_i |\langle \Phi e_i, h_j \rangle|^2 = \|\Phi Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2 = \text{Tr}[\Phi Q \Phi^*] \quad (1.8)$$

Posljednji operator je nuklearni (kao umnožak dva Hilbert-Schmidtova). Inače znamo da vrijedi:

$$\|\Phi Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS} \leq \|\Phi\| \|Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}$$

gdje je sa $|\cdot|$ označena operatorska norma.(vidi [18, Teorem 5.10.15]). Također se lagano vidi da je to ulaganje gusto (gledaju se operatori koji samo konačnom broju e_j -ova pridružuju vrijednost različitu od nule). Elementarni procesi su oni za koje postoji niz $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$ i niz $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}$ slučajnih varijabli s vrijednostima u $L(\ell_\lambda^2; H)$ koji uzimaju konačno mnogo vrijednosti takvih da je $\Phi_m \mathcal{F}_{t_m}$ -izmjeriva i

$$\Phi(t) = \Phi_m \quad \text{za } t \in (t_m, t_{m+1}], \quad m = 0, 1, \dots, k-1.$$

Lako se za njih definira stohastički integral kao:

$$\int_0^t \Phi(s) dW(s) = \sum_{m=0}^{k-1} \Phi_m (W_{t_{m+1} \wedge t} - W_{t_m \wedge t}) \quad (1.9)$$

Označimo taj izraz kao $\Phi \cdot W(t), t \in [0, T]$. Izračunajmo za elementarne procese

izraz $E|\Phi \cdot W(t_m)|^2$. Definiramo $\zeta_j = W(t_{j+1}) - W(t_j)$, $j = 1, \dots, m-1$. Tada

$$\begin{aligned} E|\Phi \cdot W(t_m)|^2 &= E \left| \sum_{j=0}^{m-1} \Phi(t_j) \zeta_j \right|^2 \\ &= E \sum_{j=0}^{m-1} |\Phi(t_j) \zeta_j|^2 \\ &\quad + 2E \sum_{i>j=1}^n \langle \Phi(t_i) \zeta_i, \Phi(t_j) \zeta_j \rangle. \end{aligned}$$

Prvo ćemo pokazati da vrijedi

$$E \sum_{j=0}^{m-1} |\Phi(t_j) \zeta_j|^2 = \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) E \|\Phi(t_j)\|_{L_2^0(H)}^2, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.10)$$

Primjetimo prije da je slučajna varijabla $\Phi^*(t_j) h_i | \mathcal{F}_{t_j}$ izmjeriva (prima konačno vrijednosti) i da je ζ_j nezavisna sa \mathcal{F}_{t_j} . Stoga imamo:

$$\begin{aligned} E|\Phi(t_j) \zeta_j|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} E(|\langle \Phi(t_j) \zeta_j, h_i \rangle|^2) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E(E(|\langle \zeta_j, \Phi^*(t_j) h_i \rangle|^2 | \mathcal{F}_{t_j})) \\ &= (t_{j+1} - t_j) \sum_{i=1}^{\infty} E(\langle Q\Phi^*(t_j) h_i, \Phi^*(t_j) h_i \rangle) \\ &= (t_{j+1} - t_j) \sum_{i=1}^{\infty} E|Q^{\frac{1}{2}}\Phi^*(t_j)(h_i)|^2 \\ &= (t_{j+1} - t_j) E \|\Phi(t_j)\|_{L_2^0(H)}^2. \end{aligned}$$

Treća jednakost slijedi zbog nezavisnosti ζ_j sa \mathcal{F}_{t_j} i zbog činjenice što $\Phi^*(t_j) h_i$ prima konačno vrijednosti. Posljednja relacija vrijedi zbog (1.8). Analogno se vidi da vrijedi za proizvoljne i, j :

$$E \langle \Phi(t_i) \zeta_i, \Phi(t_j) \zeta_j \rangle = 0$$

Dakle dobivamo da je

$$E|\Phi \cdot W(t_m)|^2 = E \left[\int_0^{t_m} \|\Phi(t_j)\|_{L_2^0(H)}^2 \right]$$

Sada nam za definiciju stohastičkog integrala (kao limes jednostavnih) treba sljedeća propozicija koju nećemo dokazivati (dokaz se nalazi u [5, Propozicija 4.7]

Propozicija 1.7. *Ako je Φ predvidljiv proces s vrijednostima u $L_2^0(H)$ takav da $\|\Phi\|_{\mathcal{L}_T^2(H)} < \infty$ tada postoji niz $\{\Phi_n\}$ elementarnih procesa takav da $\|\Phi - \Phi_n\|_{\mathcal{L}_T^2(H)} < \infty$*

Uočimo da preslikavanje $\Phi \rightarrow \int_0^T \Phi dW$ sa prostora elementarnih procesa u prostor $\mathcal{H}_T^{0,2}(H)$ čuva normu. S obzirom da su elementarni procesi gusti u prostoru $\mathcal{L}_T^2(H)$ preslikavanje možemo proširiti do izometrije sa prostora $\mathcal{L}_T^2(H)$ u prostor $\mathcal{H}_T^{0,2}(H)$.

Definicija 1.8. *Neprekidan martingal s vrijednostima u H koji označavamo $(\Phi \cdot W)_{t \in [0, T]}$ se zove stohastički integral od Φ s obzirom na W i označavamo ga također sa:*

$$(\Phi \cdot W)_t = \int_0^t \Phi_s dW_s$$

Jasno je da je stohastički integral s obzirom na d -dimenzionalno Brownovo gibanje uključeno u ovaj koncept: svaki predvidljiv proces s vrijednostima u H^d $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^d)$ se može smatrati kao proces $\tilde{\Phi}$ s vrijednostima u $L_2^0(H)$ stavljajući $\tilde{\Phi}^j = \Phi^j$ ako $j \leq d$ i $\tilde{\Phi}^j \equiv 0$ za $j > d$. Lagano onda dobivamo:

$$(\Phi \cdot W^d)_t = (\tilde{\Phi} \cdot W)_t = \sum_{j=1}^d \Phi_s^j d\beta_s^j \quad (1.11)$$

Navodimo svojstva stohastičkog integrala:

Propozicija 1.9. *Neka je $\Phi \in \mathcal{L}_T^2(H)$. Vrijedi:*

i) Za svako vrijeme zaustavljanja $\tau \leq T$

$$(\Phi \cdot W)_{t \wedge \tau} = ((\Phi 1_{[0, \tau]}) \cdot W)_t. \quad (1.12)$$

ii) Sljedeći red konvergira uniformno na $[0, T]$ po vjerojatnosti

$$(\Phi \cdot W)_t = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \Phi_s^j d\beta_s^j \quad (1.13)$$

iii) Neka je $A \in L(H; E)$, gdje je E isto separabilan Hilbertov prostor. Tada je $A \circ \Phi \in \mathcal{L}_T^2(E)$ i

$$A(\Phi \cdot W) = (A \circ \Phi) \cdot W \quad (1.14)$$

Dokaz. Svojstvo i) se pokaže aproksimacijom elementarnim procesima (vidi [5, Lema 4.9.]). Svojstvo ii) slijedi iz (1.11) i činjenice da $(\Phi^1, \dots, \Phi^d, 0, \dots)$ konvergira u $\mathcal{L}_T^2(H)$ ka Φ kada $d \rightarrow \infty$. Sada imamo po Doobovoj nejednakosti:

$$E \left[\left| \sup_{t \in [0, T]} \left((\Phi \cdot W)_t - \sum_{j=1}^d \int_0^t \Phi_s^j d\beta_s^j \right) \right|^2 \right] \leq 4E \left[\int_0^T \sum_{j=d+1}^{\infty} \|\Phi_t^j\|_H^2 dt \right] \rightarrow 0$$

Zadnju tvrdnju možemo pokazati opet aproksimacijom elementarnim procesima. ■

Aproksimacijom elementarnim procesima slijede mnoge tvrdnje kao u \mathbb{R}^n . I sljedeća tvrdnja spada u takve:

Propozicija 1.10. *Neka su $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}_T^2(\mathbb{R})$ i definiramo:*

$$Z_t := \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \Phi_s^j \Psi_s^j ds.$$

Tada je $(\Phi \cdot W)(\Psi \cdot W) - Z$ neprekidan lokalni martingal. Štoviše, Z je jedinstveni neprekidan proces konačne varijacije sa ovim svojstvom. Uvodimo oznaku za Z :

$$Z_t := \langle (\Phi \cdot W), (\Psi \cdot W) \rangle_t$$

Dokaz. Primjetimo da je Z dobro definiran predvidljiv realan proces s neprekidnim trajektorijama koji je konačne varijacije. Uvedimo oznaku $X := (\Phi \cdot W)(\Psi \cdot W) - Z$, što je neprekidan realan predvidljiv proces. Aproksimiramo stohastičke integrale sa $M^d := \Phi \cdot W^d$, $N^d := \Psi \cdot W^d$ koji konvergiraju ka pravoj vrijednosti integrala u $\mathcal{H}_T^{0,2}(\mathbb{R})$. Iz konačnodimenzionalne teorije imamo da je $X^d := M^d N^d - \sum_{j=1}^d \int_0^{\cdot} \Phi_s^j \Psi_s^j ds$ martingal. Zbog činjenice da $X_t^d \rightarrow X_t$ u $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ za neki fiksni $t \in [0, T]$ imamo da je X martingal. Za jedinstvenost vidi [21, Propozicija 1.2, poglavlje IV]. ■

Kao i u konačnodimenzionalnoj teoriji zbog dobrog ponašanja u odnosu na vremena zaustavljanja možemo proširiti domenu integrabilnih procesa:

Definicija 1.11. *Prostor svih predvidivih procesa s vrijednostima u $L_2^0(H)$ takvih da vrijedi:*

$$\mathbb{P} \left[\int_0^T \|\Phi_t\|_{L_2^0(H)}^2 dt < \infty \right] = 1$$

označavamo sa $\mathcal{L}_T^{loc}(H)$

Kao i u konačnodimenzionalnoj teoriji za neki $\Phi \in \mathcal{L}_T^{loc}(H)$ postoji rastući niz vremene zaustavljanja $\tau_n \uparrow T$ takvih da $\Phi 1_{[0, \tau_n]}$ je u $\mathcal{L}_T^2(H)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada možemo proširiti pojam integrala kao u [5, stranice 94-96].

Propozicija 1.12. Neka je $\Phi \in \mathcal{L}_T^{loc}(H)$. Tada postoji jedinstven neprekidan lokalni martingal $(M_t)_{t \in [0, T]}$ sa svojstvom:

$$M_{t \wedge \tau} = ((\Phi 1_{[0, \tau]}) \cdot W)_t$$

kad god $\Phi 1_{[0, \tau]} \in \mathcal{L}_T^2(H)$. M zovemo stohastički integral od Φ s obzirom na W i pišemo:

$$M_t := (\Phi \cdot W)_t = \int_0^t \Phi_s dW_s.$$

Mnoga svojstva se prirodno nasljeđuju i na ovu klasu procesa lokalizacijom. Za prenijeti svojstva od pomoći nam je sljedeća lema:

Lema 1.13. Neka je $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz neprekidnih lokalnih martingala s vrijednostima u H . Prepostavimo da za svaki $\delta > 0$ postoji vrijeme zaustavljanja τ takvo da $\mathbb{P}[\tau < T] \leq \delta$ i $(M^n_{t \wedge \tau}) \rightarrow 0$ u $\mathcal{H}_T^2(H)$. Tada $\sup_{t \in [0, T]} \|M^n_t\|_H \rightarrow 0$ po vjerojatnosti.

Dokaz. Neka su $\delta, \varepsilon > 0$ i neka je τ kao u lemi. Tada

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|M^n_t\|_H > \varepsilon \right] \leq \delta + \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|M^n_{t \wedge \tau}\|_H > \varepsilon \right]$$

Zadnji dio ide k nuli po Doobovoj nejednakosti (1.4). ■

Upotrebljavajući lemu 1.13 možemo dokazati sljedeću propoziciju

Propozicija 1.14. Jednakost (1.11) i propozicije 1.9 i 1.10 vrijede ako $\mathcal{L}_T^2(H)$ zamjenimo sa $\mathcal{L}_T^{loc}(H)$.

Do sada smo stohastički integral definirali do konačnog vremena na intervalu $[0, T]$. Međutim možemo promatrati integrande $\mathcal{L}^2(H) := \mathcal{L}_\infty^2(H)$ (sa T u (1.7) zamijenjen sa ∞) i $\mathcal{L}^{loc}(H) := \cap_{T \in \mathbb{R}_+} \mathcal{L}_T^{loc}(H)$.

Neka je $\Phi \in \mathcal{L}^2(H)$. Pišemo $M^n := \Phi 1_{[0, n]} \cdot W$ za stohastički integral na $[0, n]$. Iz (1.12) slijedi da se M^{n+1} podudara sa M^n na $[0, n]$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Stoga možemo definirati nedvosmisleno proces $\Phi \cdot W$, stohastički integral od Φ s obzirom na W , postavljajući da je jednak M^n na $[0, n]$. Ovaj proces je očito neprekidan martingal s vrijednostima u H .

Lokalizacijom koristeći isti argument možemo pokazati da isto vrijedi za $\Phi \in \mathcal{L}^{loc}(H)$. Sada možemo definirati što je Itôv proces sa vrijednostima u H .

Definicija 1.15. Neprekidan adaptiran proces X s vrijednostima u H se zove Itôv ako je oblika:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \Phi_s dW_s \tag{1.15}$$

gdje je $\Phi \in \mathcal{L}^{loc}(H)$, b je predvidljiv proces sa vrijednostima u H takav da

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t \|b_s\|_H ds < \infty\right] = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.16)$$

i X_0 je \mathcal{F}_0 izmjeriva.

Primjetimo da Itôv proces kao suma \mathcal{F}_0 -izmjerive slučajne varijable, procesa sa konačnom varijacijom i lokalnog martingala pripada klasi semimartingala. Ta dekompozicija je jedinstvena (vidi [21, propozicija 1.2, poglavljje 4] za realan slučaj, a ovdje možemo gledati po koordinatama).

1.3 Osnovni alati

Osnovni alati stohastičke analize su: Itôva formula, stohastički Fubinijev teorem i Girsanovljev teorem. U ovom poglavljju dat ćemo njihov pregled.

1.3.1 Itôva formula

Neka je E separabilan Hilbertov prostor. O analizi na E se može vidjeti u [4]. Ovdje ćemo dati dokaz proširenja Itôve formule iz [5, Teorem 4.17].

Teorem 1.16. *Neka je X Itôv proces sa vrijednostima u H dan sa (1.15) i neka je $\Psi \in C_b^2(H; E)$. Tada $(D\Psi(X)\Phi^j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{loc}(E)$ i*

$$J_t := \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2\Psi(X_t)(\Phi_t^j, \Phi_t^j)$$

su predvidljivi procesi s vrijednostima u E takvi da:

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t (\|D\Psi(X_s)b_s\|_E + \|J_s\|_E) ds < \infty\right] = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.17)$$

Štoviše, $\Psi \circ X$ je Itôv proces sa vrijednostima u E dan sa:

$$(\Psi \circ X)_t = (\Psi \circ X)_0 + \int_0^t (D\Psi(X_s)b_s + J_s) ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t D\Psi(X_s)\Phi_s^j d\beta_s^j \quad (1.18)$$

Dokaz. Lagano se vide tvrdnje za $(D\Psi(X)\Psi^j)_{j \in \mathbb{N}}$. Konvergencija g.s. reda J_t slijedi iz (1.6) (naime vrijedi $\|D^2\Psi(X_t)(\Phi_t^j, \Phi_t^j)\|_E \leq \|D^2\Psi\| \|\Phi_t^j\|^2$). Stoga je J_t predvidljiv (kao kompozicija neprekidnog i predvidljivog preslikavanja). Integrabilnost (1.17) opet slijedi iz omeđenosti diferencijala i (1.16) zajedno sa činjenicom da je $\Phi \in$

$\mathcal{L}^{loc}(H)$. Označimo desnu stranu od (1.18) sa I_t . Pokazali smo da je (I_t) Itôv proces sa vrijednostima u E . Neka je $\{e_i | i \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza od E . Dovoljno je pokazati da jednakost (1.18) vrijedi po komponentama s obzirom na svaki e_i . Definiramo $\Psi_i(h) := \langle e_i, \Psi(h) \rangle$. Tada je $\Psi_i \in C_b^2(H; \mathbb{R})$ i možemo primjeniti [5, Teorem 4.17]. Slijedi da:

$$\begin{aligned} \langle e_i, (\Psi \circ X)_t \rangle &= (\Psi_i \circ X)_0 + \int_0^t \left(D\Psi_i(X_s)b_s + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2\Psi_i(X_s)(\Phi_s^j, \Phi_s^j) \right) ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t D\Psi(X_s)\Phi_s^j d\beta_s^j \end{aligned}$$

Zbog činjenice da je $D\Psi_i(h)(\cdot) = \langle e_i, D\Psi(h)(\cdot) \rangle$ i $D^2\Psi(h)(h_1, h_2) = \langle e_i, D^2\Psi(h)(h_1, h_2) \rangle$ i komutacije Bochnerovog i stohastičkog integrala sa neprekidnim linearnim operatom (vidi propoziciju 1.9 iii)), slijedi da je zadnji izraz jednak $\langle e_i, I_t \rangle$ čime je tvrdnja teorema dokazana. \blacksquare

1.3.2 Stohastički Fubinijev teorem

Neka je (E, \mathcal{E}) izmjeriv prostor, neka je

$$\Phi : (t, \omega, x) \rightarrow \Phi_t(\omega, x)$$

izmjerivo preslikavanje sa $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E, \mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$ u $(L_2^0(H), \mathcal{B}(L_2^0(H)))$ i neka je μ konačna pozitivna mjera na E . Dat ćemo modifikaciju dokaza teorema [5, teorem 4.18]. Za dokaz teorema nam treba sljedeća lema:

Lema 1.17. *Neka je (X, \mathcal{F}, ν) prostor s konačnom mjerom ν i neka je $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ gdje je \mathcal{A} neki poluprsten. Tada za svaki $F \in \mathcal{F}$ i $\varepsilon > 0$ postoje disjunktni $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ takvi da za $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ vrijedi*

$$\nu((A \setminus F) \cup (F \setminus A)) < \varepsilon$$

Dokaz. Konačne disjunktne unije čine prsten skupova. Lagano se sada vidi da je familija skupova za koju vrijedi tvrdnja leme d -sustav (zbog konačnosti mjerne). Tvrđnja slijedi standarnim $\pi - d$ argumentom. \blacksquare

Fiksirajmo $T > 0$. Vrijedi:

Teorem 1.18. *Pretpostavimo da :*

$$\int_E \int_0^T \|\Phi_t(x)\|_{L_2^0(H)}^2 dt \mu(dx) < \infty, \quad \mathbb{P} - g.s.$$

Tada postoji $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{E}$ izmjeriva verzija $\xi(\omega, x)$ stohastičkog integrala $\int_0^T \Phi_t(x) dW_t$ koja je μ -integrabilna \mathbb{P} -g.s. takva da

$$\int_E \xi(x) \mu(dx) = \int_0^T \left(\int_E \Phi_t(x) \mu(dx) \right) dW_t, \quad \mathbb{P} - g.s.$$

Dokaz. Lokalizacijom tvrdnju teorema možemo dobiti iz pretpostavke da vrijedi

$$\int_E \left\{ E \left[\int_0^T \|\Phi_t(x)\|_{L_2^0(H)}^2 dt \right] \right\} \mu(dx) < \infty \quad (1.19)$$

Pretpostavimo dakle (1.19). Zbog te pretpostavke postoji niz $\Phi_n(t, \omega, x)$ takav da

$$\Phi_n(t, \omega, x) = \sum_{j=1}^{k_n} H_j^n 1_{A_j^n}(t, \omega, x)$$

gdje su $H_j^n \in L_2^0(H)$, a $A_j^n \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ i vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \left\{ E \left[\int_0^T \|\Phi(t, \omega, x) - \Phi_n(t, \omega, x)\|_{L_2^0(H)}^2 dt \right] \right\} \mu(dx) = 0 \quad (1.20)$$

Zbog gustoće $L(\ell_\lambda^2, H)$ u $L_2^0(H)$ i leme 1.17 možemo pretpostaviti da su $H_j^n \in L(\ell_\lambda^2, H)$ i $A_j^n = F_j^n \times \langle s_j^n, t_j^n \rangle \times E_j^n$ gdje su $\langle s_j^n, t_j^n \rangle$ podintervali od $[0, T]$, $F_j^n \in \mathcal{F}_{s_j^n}$ i $E_j^n \in \mathcal{E}$. Procesi

$$\xi_n(\omega, x) = \int_0^T \Phi_n(t, \omega, x) dW(t)$$

su očito $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{E}$ izmjerivi, a zbog (1.20) znamo da postoji podniz Φ_{n_m} (nadalje ga označavamo sa Φ_n) i $E_0 \in \mathcal{E}$, $\mu(E_0) = 0$ takvi da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T \|\Phi(t, \omega, x) - \Phi_n(t, \omega, x)\|_{L_2^0(H)}^2 dt \right] = 0, \quad \forall x \in E \setminus E_0 \quad (1.21)$$

i vrijedi (1.20). Sada možemo definirati

$$\xi(\omega, x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \Phi_n(\omega, x) dW(t) & x \in E \setminus E_0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Tada je $\xi(\omega, x)$ $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{E}$ -izmjeriva slučajna varijabla i zbog svojstva izometričnosti stohastičkog integrala vrijedi:

$$\xi(\omega, x) = \int_0^T \Phi(t, \omega, x) dW(t)$$

za sve $x \in E \setminus E_0$ \mathbb{P} -g.s. Sad imamo izmjerivost. Mogućnost zamijene poretku integracije trivijalno se provjeri za gornje procese. Sada možemo konstatirati:

$$\begin{aligned}
& E \left| \int_E \left(\int_0^T \Phi(t, x) dW(t) \right) \mu(dx) - \int_E \left(\int_0^T \Phi_n(t, x) dW(t) \right) \mu(dx) \right| \\
& \leq \int_E \left(E \left| \int_0^T (\Phi(t, x) - \Phi_n(t, x)) dW(t) \right| \right) \mu(dx) \\
& \leq \int_E \left\{ E \left[\int_0^T \|\Phi(t, x) - \Phi_n(t, x)\|_{L_2^0(H)}^2 dt \right] \right\}^{1/2} \mu(dx) \rightarrow 0, \text{ kada } n \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{1.22}$$

gdje smo koristili $(E|X|)^2 \leq EX^2$ i svojstvo izometričnosti stohastičkog integrala. Analogno dobivamo:

$$\begin{aligned}
& E \left| \int_0^T \left(\int_E \Phi(t, x) \mu(dx) \right) dW(t) - \int_E \left(\int_0^T \Phi_n(t, x) dW(t) \right) \mu(dx) \right| \\
& E \left| \int_0^T \left(\int_E \Phi(t, x) \mu(dx) \right) dW(t) - \int_0^T \left(\int_E \Phi_n(t, x) \mu(dx) \right) dW(t) \right| \\
& = E \left| \int_0^T \left(\int_E (\Phi(t, x) - \Phi_n(t, x)) \mu(dx) \right) dW(t) \right| \\
& \leq \left\{ E \int_0^T \left\| \int_E (\Phi(t, x) - \Phi_n(t, x)) \mu(dx) \right\|_{L_2^0(H)}^2 dt \right\}^{1/2} \\
& \leq \int_E \left\{ E \left[\int_0^T \|\Phi(t, x) - \Phi_n(t, x)\|_{L_2^0(H)}^2 dt \right] \right\}^{1/2} \mu(dx) \rightarrow 0, \text{ kada } n \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Zadnja nejednakost slijedi iz nejednakosti trokuta (tj. generalizirane nejednakosti Minkowskog) gledajući $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot) - \Phi_n(\cdot, \cdot, \cdot)$ kao izmjerivo preslikavanje sa (E, \mathcal{E}, μ) u $\mathcal{L}_T^2(H)$.

Iz (1.22) i (1.23) slijedi tvrdnja. ■

1.3.3 Girsanovljev teorem

Neka je $\gamma = (\gamma^j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{loc}(\mathbb{R})$ i primjetimo da je $L_2^0(\mathbb{R}) = \ell^2$. Definiramo stohastički eksponencijal od $\gamma \cdot W$ kao

$$\mathcal{E}(\gamma \cdot W)_t := \exp \left((\gamma \cdot W)_t - \frac{1}{2} \int_0^t \|\gamma_s\|_{\ell^2}^2 ds \right) \tag{1.24}$$

Lema 1.19. Neka je γ kao gore. Tada postoji (\mathcal{F}_t) - Brownovo gibanje β^0 s vrijednostima u \mathbb{R} takvo da $(\gamma \cdot W)_t = \int_0^t \|\gamma_s\|_{\ell^2} d\beta_s^0$.

Dokaz. Fiksirajmo $a \in \ell^2$ takav da $\|a\|_{\ell^2} = 1$. Definirajmo proces δ sa:

$$\delta(s) = \begin{cases} \frac{\gamma(s)}{\|\gamma(s)\|_{\ell^2}} & \text{ako } \gamma(s) \neq 0 \\ a & \text{inače} \end{cases}$$

Proces δ je također predvidljiv i vrijedi $\|\delta(s)\|_{\ell^2} = 1$. Tada je proces

$$\beta^0(t) = (\delta \cdot W)_t$$

kvadratno integrabilan martingal čija je kvadratna varijacija t . Po Levyjevom teoremu karakterizacije (vidi [21, teorem 3.6, poglavljje 4]), $\beta^0(t)$ je Brownovo gibanje, vrijedi da je $\gamma(s) = \|\gamma(s)\|_{\ell^2} \delta(s)$ odakle slijedi tvrdnja leme. ■

Time smo teoriju sveli na realnu pa imamo:

Lema 1.20. Stohastički eksponencijal je nenegativan lokalni martingal. Martingal je ako i samo ako $E[\mathcal{E}(\gamma \cdot W)_t] = 1$ za sve $t \in \mathbb{R}_+$.

Dokaz. Vidi [21, propozicija (1.15), poglavljje 8]. ■

Lema 1.21. (Novikovljev uvjet) Ako vrijedi:

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \|\gamma_t\|_{\ell^2}^2 dt \right) \right] < \infty, \quad (1.25)$$

tada je $\mathcal{E}(\gamma \cdot W)$ uniformno integrabilan martingal. Stoga $\mathcal{E}(\gamma \cdot W)_t \rightarrow \mathcal{E}(\gamma \cdot W)_{\infty}$ u $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ za $t \rightarrow \infty$ i $\mathcal{E}(\gamma \cdot W)_{\infty} > 0$, \mathbb{P} -g.s.

Zadnja tvrdnja je direktna posljedica činjenice da $\mathcal{E}(\gamma \cdot W)_t > 0$ \mathbb{P} -g.s. na skupu $\{\int_{\mathbb{R}_+} \|\gamma_t\|_{\ell^2}^2 dt < \infty\}$ (vidi [21, propozicija 1.26, poglavljje 4]). Dokaz sljedećeg teorema nalazi se u [5, teorem 10.14]. Mi ćemo dati dokaz koristeći konačnodimenzionalni Girsanovljev teorem koji se može pronaći u [21, teorem 1.4. poglavljje 8] i [16, poglavljje 3, teorem 5.1]. Za dokaz teorema nam treba sljedeća lema:

Lema 1.22. Neka su $\xi, \xi_N, N = 1, 2, \dots$, nenegativne slučajne varijable takve da $\int_{\Omega} \xi d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \xi_N d\mathbb{P} = 1$ i $\{\xi_N\}$ konvergira ka ξ kada $N \rightarrow \infty$ po vjerojatnosti. Tada

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\xi - \xi_N| d\mathbb{P} = 0$$

Dokaz. Za dokaz uz uvjet konvergencije g.s. vidi [23, propozicija 10.18]. Tvrđnja teorema dobije se standarnim argumentom kontradikcije koristeći podniz koji konvergira g.s. \blacksquare

Teorem 1.23. (Girsanovljev teorem) Neka je $\gamma = (\gamma^j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}_T^{loc}(\mathbb{R})$ koji zadovoljava

$$M_T = E[\mathcal{E}(\gamma \cdot W)_T] = 1.$$

Tada su

$$\tilde{\beta}_t^j := \beta_t^j - \int_0^t \gamma_s^j ds, \quad t \in [0, T], \quad j \in \mathbb{N},$$

nezavisna standarna realna $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ Brownova gibanja s obzirom na mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_T \sim \mathbb{P}$ na \mathcal{F}_T danu sa:

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(\gamma \cdot W)_T$$

Dokaz. Prepostavimo najprije da $\|\gamma\|_{\ell^2} \leq K$, definirajmo

$$M_T^d = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T^d}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(\gamma^d \cdot W^d)_T$$

i označimo $M_T = \mathcal{E}(\gamma \cdot W)_T$. Za $j \leq d$ vrijedi zbog konačnodimenzionalnog Girsanovljevog teorema da su $\tilde{\beta}_t^j$ nezavisna Brownova gibanja s obzirom na mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_T^d$. Zbog leme 1.21 slijedi da je $\mathcal{E}(\gamma^d \cdot W^d) = 1$. Sada lema 1.22 i propozicija 1.9 daju da $M_T^d \rightarrow M_T$ u $L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Odatle slijedi tvrdnja.

Uzmimo sada općeniti $\gamma \in \mathcal{L}_T^{loc}$. Sada možemo koristiti argument lokalizacije. Definiramo:

$$\tau_n := T \wedge \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \int_0^t \|\gamma_s\|_{\ell^2}^2 ds \geq n \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Tada $\tau_n \uparrow T$ i definirajmo $\gamma^n := \gamma 1_{[0, \tau_n]}$. Sada znamo da su

$$\tilde{\beta}_n^j(t) := \beta_t^j - \int_0^t \gamma_s^n ds$$

nezavisna Brownova gibanja s obzirom na mjeru \mathbb{P}_T^n definiranu sa $M_T^n = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T^n}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(\gamma^n \cdot W)$ i imamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|\gamma_s - \gamma_s^n\|_{\ell^2} ds \downarrow 0 \tag{1.26}$$

Sada zbog (1.26) znamo da vrijedi $\tilde{\beta}_n^j(t) \rightarrow \beta_t^j$ g.s. i $M_T^n \rightarrow M_T$ u $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Odatle slijedi tvrdnja. \blacksquare

Sa $\tilde{\mathcal{H}}_T^{0,2}(\ell_\lambda^2)$ označimo prostor neprekidnih martingala $(M_t)_{t \in [0,T]}$ s obzirom na mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_T$ koji primaju vrijednosti u ℓ_λ^2 za koje vrijedi da je $M_0 = 0$ i $E\|M_T\|_{\ell_\lambda^2}^2 < \infty$ (vidi definiciju 1.2)

Propozicija 1.24. *Red*

$$\tilde{W} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{\beta}^j g_j$$

konvergira u $\tilde{\mathcal{H}}_T^{0,2}(\ell_\lambda^2)$ i definira Q -Wienerov proces u ℓ_λ^2 s obzirom na mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_T$. Štoviše za svaki $\Phi \in \tilde{\mathcal{L}}_T^{loc}$ imamo:

$$(\Phi \cdot \tilde{W})_t = (\Phi \cdot W)_t - \int_0^t \Phi_s(\gamma_s) ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad \mathbb{P} - g.s. \quad (1.27)$$

Dokaz. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\tilde{W}^n := \sum_{j=1}^n \tilde{\beta}^j g_j$. Po propoziciji 1.5 niz $(\tilde{W}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka \tilde{W} u $\tilde{\mathcal{H}}_T^{0,2}(H)$ i \tilde{W} je Q -Wienerov proces u ℓ_λ^2 s obzirom na mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_T$. Iz definicije od $\tilde{\beta}^j$ slijedi da:

$$\tilde{W}_t^n := W_t^n - \sum_{j=1}^n \int_0^t \gamma_s^j g_j ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Iz Doobove nejednakosti i propozicije 1.5 slijedi da desna strana konvergira ka $W_t - \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \gamma_s^j g_j ds$ uniformno na $[0, T]$ po vjerojatnosti, koji je stoga nerazlučiv od \tilde{W} na $[0, T]$. Jednakost (1.27) je sigurno istinita za elementarne procese s vrijednostima u $L(\ell_\lambda^2; H)$. Neka je $\Phi \in \tilde{\mathcal{L}}_T^{loc}(H) = \mathcal{L}_T^{loc}(H)$. Opet koristimo lokalizaciju i definiramo vremena zaustavljanja

$$\tau_n := T \wedge \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \int_0^t \|\Phi_s\|_{L_2^0(H)}^2 ds \geq n \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Tada $\tau_n \uparrow T$ i $\Phi^n := \Phi 1_{[0, \tau_n]} \in \tilde{\mathcal{L}}_T^2(H) \cap \mathcal{L}_T^2(H)$. Koristeći sljedeću lemu, (1.27) vrijedi za sve Φ^n . Iz (1.12) zaključujemo da vrijedi za Φ . ■

Lema 1.25. *Neka je $\Phi \in \tilde{\mathcal{L}}_T^2(H) \cap \mathcal{L}_T^2(H)$. Tada postoji niz $(\Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementarnih procesa s vrijednostima u $L(\ell_\lambda^2; H)$ koji konvergiraju ka Φ u $\mathcal{L}_T^2(H)$ i $\tilde{\mathcal{L}}_T^2(H)$.*

Dokaz. U standarnom teoremu aproksimacije elementarnim procesima konstruira se niz elementarnih procesa takvih da $\|\Phi_t^n - \Phi_t\|_{L_2^0(H)} \downarrow 0$ (vidi [5, propozicija 4.7.]). Za takav niz očito vrijedi tvrdnja leme. ■

1.4 Stohastičke jednadžbe

Ovaj odjeljak daje pregled rezultata iz stohastičkih diferencijalnih jednadžbi na se-parabilnim Hilbertovim prostorima. Prepostavljamo da imamo:

- Jako neprekidnu polugrupu $\{S(t)|t \in \mathbb{R}_+\}$ na H sa infinitezimalnim generatorm A . O polugrupama se može pronaći u [7, poglavlje 17].
- Dva izmjeriva preslikavanja $F(t, \omega, h)$ i $B(t, \omega, h) = (B^j(t, \omega, h))_{j \in \mathbb{N}}$ sa $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times H, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(H))$ u $(H, \mathcal{B}(H))$ tj. $(L_2^0(H), \mathcal{B}(L_2^0(H)))$
- Determinističku početnu vrijednost $h_0 \in H$

Za operator A prepostavljamo da je zatvoren s domenom $D(A)$ gustom u H

1.4.1 Blago, slabo i jako rješenje

Dat ćemo značenje stohastičkoj jednadžbi u H danoj sa:

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + F(t, X_t))dt + B(t, X_t)dW_t \\ X_0 = h_0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Zbog (1.13) ovo možemo pisati ekvivalentno:

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + F(t, X_t))dt + \sum_{j \in \mathbb{N}} B^j(t, X_t)d\beta_t^j \\ X_0 = h_0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Napomena 1.26. Primjetimo da su F i B slučajni i mogu ovisiti o ω . No u skladu s notacijom u [5] skraćeno pišemo $F(t, \omega, X_t(\omega))$ i $B(t, \omega, X_t(\omega))$ kao $F(t, X_t)$ i $B(t, X_t)$.

Prije nego što definiramo koncept rješenja treba nam sljedeća lema:

Lema 1.27. Neka je $\Phi \in \mathcal{L}^{loc}(H)$. Tada stohastička konvolucija

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t S(t-s) \Phi_s^j d\beta_s^j$$

ima predvidljivu verziju.

Dokaz. Vidi [5, propozicija 6.2.] ■

Lema 1.28. Neka je X predvidljiv proces s vrijednostima u H . Tada su skup $\{X \in D(A)\}$ i proces:

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} AX_t(\omega), & \text{ako je } X_t(\omega) \in D(A) \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (1.30)$$

predvidljivi

Dokaz. Neka su A_n Yosidine aproksimacije od A (vidi [7, dokaz teorema 3.2.1, poglavljje 17]) Imamo da je $X \in D(A)$ ako i samo ako $(A_n X)_{n \in \mathbb{N}}$ ima limes u H koji je onda jednak AX . Dokazat ćemo da je skup $D(A) := \{x \in H \mid \lim A_n x \text{ postoji u } H\}$ izmjeriv. Neka je $\{h_1, \dots, h_n, \dots\}$ prebrojivi gusti podskup u H . Vrijedi:

$$\{\lim A_n x \text{ postoji}\} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{\infty} \cap_{l=i}^{\infty} \{(A_k - A_l)x \in B(h_m, \frac{1}{n})\}$$

gdje je sa $B(h_i, \frac{1}{n})$ označena kugla oko h_i radijusa $\frac{1}{n}$. Još moramo pokazati da ako niz slučajnih varijabli $X_n \rightarrow X$ -g.s. i X_n izmjerivi da je X izmjeriva. No to lagano slijedi iz činjenice

$$\{X \in B(h_i, \frac{1}{n})\} = \cup_{j=1}^{\infty} \cap_{l=j}^{\infty} \{X_l \in B(h_i, \frac{1}{n})\}$$

Sada imamo $Y_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1_{\{X \in D(A)\}} A_n X)$ ■

Definicija 1.29. Pretpostavimo da je X predvidljiv proces s vrijednostima u H i $\tau > 0$ vrijeme zaustavljanja koje zadovoljava:

$$\mathbb{P} \left[\int_0^{t \wedge \tau} (\|X_s\|_H + \|F(s, X_s)\|_H + \|B(s, X_s)\|_{L_2^0(H)}^2) ds < \infty \right] = 1$$

za sve $t \in \mathbb{R}_+$. Kažemo da je X

i) lokalno blago rješenje od (1.28) ako sljedeća jednakost vrijedi

$$\begin{aligned} X_t &= S(t \wedge \tau)h_0 + \int_0^{t \wedge \tau} S((t \wedge \tau) - s)F(s, X_s)ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^{t \wedge \tau} S((t \wedge \tau) - s)B^j(s, X_s)d\beta_s^j, \quad \mathbb{P}\text{-g.s. } \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (1.31)$$

ii) lokalno slabo rješenje od (1.28) ako za proizvoljni $\xi \in D(A^*)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \langle \xi, X_t \rangle &= \langle \xi, h_0 \rangle_H + \int_0^{t \wedge \tau} \left(\langle A^* \xi, X_s \rangle_H + \langle \xi, F(s, X_s) \rangle_H \right) ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \langle \xi, B^j(s, X_s) \rangle_H d\beta_s^j \quad \mathbb{P}\text{-g.s. } \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{1.32}$$

iii) lokalno jako rješenje od (1.28), ako $X \in D(A)$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s.,

$$\mathbb{P} \left[\int_0^{t \wedge \tau} \|AX_s\|_H ds < \infty \right] = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \tag{1.33}$$

te vrijedi:

$$X_t = h_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \left(AX_s + F(s, X_s) \right) ds + \int_0^{t \wedge \tau} B(s, X_s) dW_s \tag{1.34}$$

\mathbb{P} -g.s. $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Predvidljiv proces iz (1.30) smo označili sa AX . Vrijeme zaustavljanja τ zovemo vremenom života od X . Ako je $\tau = \infty$ onda za X samo kažemo da je blago, slabo ili jako rješenje

Napomena 1.30. Uočimo da se integral $\int_0^{t \wedge \tau} S((t \wedge \tau) - s) B(s, X_s) dW(s)$ može shvatiti na dva načina: možemo računati proces $W_A^{B(s, X_s)}(t) := \int_0^t S(t-s) B(s, X(s)) dW(s)$ i onda tražiti $W_A^{B(s, X(s))}(t \wedge \tau)$ ili pak računati direktno $I_t := \int_0^t 1_{[0, t \wedge \tau]}(s) S((t \wedge \tau) - s) B(s, X(s)) dW(s)$ (uoči da je integrand predvidljiv proces). Lagano se pokaže da ukoliko $W_A^{B(s, X(s))}$ ima neprekidnu modifikaciju da tada $I_t = W_A^{B(s, X(s))}(t \wedge \tau)$ g.s.

Jasno je da se definicija (1.29) može proširiti za \mathcal{F}_0 izmjerive slučajne vrijednosti h_0 . Primjetimo da za vrijeme života ne zahtjevamo da bude maksimalno.

Napomena 1.31. Za stohastičke jednadžbe u konačnim dimenzijama isto razlikujemo slabo i jako rješenje. No ova definicija slabog rješenja nije generalizacija slabog rješenja u \mathbb{R}^n gdje se slabo rješenje odnosi na ovisnost rješenja o Brownovom gibanju.

Dokazat ćemo sljedeći teorem:

Teorem 1.32. Pretpostavimo da je $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ infinitezimalni generator jako neprekidne polugrupe $S(\cdot)$ u H . Tada je jako rješenje uvijek slabo rješenje i slabo rješenje je blago rješenje. Ukoliko je X blago rješenje od (1.28) i

$$E \int_0^T \|B(s, X(s))\|_{L_2^0(H)}^2 ds < \infty$$

tada je X i slabo rješenje.

Dokaz. Prepostavit ćemo da je $\tau = \infty$ i $F = 0$ (analognim razmišljanjem možemo dokazati tvrdnju i kada $\tau < \infty$ i $F \neq 0$) Neka je X slabo rješenje. Pokazujemomo da ako za proizvoljni $\xi \in D(A^*)$ i $t \in [0, T]$ vrijedi

$$\begin{aligned} \langle X(t), \xi \rangle &= \langle \xi, h_0 \rangle + \int_0^t \langle X(s), A^* \xi \rangle \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \langle \xi, \Phi^j(s) \rangle d\beta_s^j, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.} \end{aligned} \tag{1.35}$$

da tada za proizvoljnu funkciju $\xi(\cdot) \in C^1([0, T]; D(A^*))$ i $t \in [0, T]$ vrijedi:

$$\langle X(t), \xi(t) \rangle = \langle \xi(0), h_0 \rangle + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \langle \xi(s), \Phi^j(s) \rangle d\beta_s^j + \int_0^t \langle X(s), \xi'(s) + A^* \xi(s) \rangle ds. \tag{1.36}$$

Uočimo najprije zbog zatvorenosti operatora A^* da je $D(A^*)$ separabilan Hilbertov prostor s normom $\|a\|_{D(A^*)}^2 = \|a\|^2 + \|A^*a\|^2$. Sada se tvrdnja pokaže najprije za funkcije oblika $\varphi(t)a$, $\varphi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$, $a \in D(A^*)$. Naime primjenimo Itôvu formulu na proces $\langle X(t), a \rangle \varphi(s)$ i dobivamo

$$d[\langle X(s), a \rangle \varphi(s)] = \varphi(s)d\langle X(s), a \rangle + \varphi'(s)\langle X(s), a \rangle ds$$

Slijedi tvrdnja za te funkcije. Zbog toga što su njihove linearne kombinacije guste u $D(A^*)$ imamo tvrdnju (gleda se gustoća s obzirom na normu $\|\xi(s)\|_{[0, T]} = \int_0^T \|\xi(s)\|_{D(A^*)} ds + \int_0^T \|\xi'(s)\|_{D(A^*)} ds$). Sada primjenimo jednakost (1.36) na funkciju $S^*(t-s)\xi$, $s \in [0, t]$ (vrijedi, naime, $(S^*(t-s)\xi)' = -A^*S^*(t-s)\xi = -S^*(t-s)A^*\xi$ za $\xi \in D(A^*)$) i zbog gustoće $D(A^*)$ u H dobivamo ii) \Rightarrow i) Da iii) \Rightarrow ii) je očito.

Još treba pokazati posljednju tvrdnju. Označimo sa

$$W_A^\Phi(t) = \int_0^t S(t-s)\Phi(s)dW_s = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t S(t-s)\Phi^j(s)d\beta_s^j.$$

gdje je $\Phi(s) = B(s, X_s)$. Pokazat ćemo tvrdnju za stohastičku konvoluciju tj. proces W_A^Φ (prepostavili smo još da je $h_0 = 0$). Dakle, želimo pokazati da stohastička konvolucija zadovoljava jednadžbu:

$$\langle W_A^\Phi(t), \xi \rangle = \int_0^t \langle W_A^\Phi(s), A^* \xi \rangle + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \langle \xi, \Phi^j(s) \rangle d\beta_s^j, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.} \tag{1.37}$$

Zbog toga što vrijedi $\|S(t)\| \leq M e^{wt}$, za neke $w, M \in \mathbb{R}$ za sve $t \in \mathbb{R}_+$ (vidi [7, propozicija 1, poglavlje 17]) i $\Phi \in \mathcal{L}_T^2(H)$, W_A^Φ je dobro definiran i ima integrabilne trajektorije. Vrijedi:

$$\int_0^t \langle W_A^\Phi(s), A^* \xi \rangle ds = \int_0^t ds \left\langle \int_0^s S(s-\sigma) \Phi(\sigma) dW(\sigma), A^* \xi \right\rangle \quad (1.38)$$

Ispunjene su prepostavke za primjenu stohastičkog Fubinijevog teorema i imamo:

$$\int_0^t ds \left\langle \int_0^s S(s-\sigma) \Phi(\sigma) dW(\sigma), A^* \xi \right\rangle = \left\langle \int_0^t \int_\sigma^t S(s-\sigma) \Phi(\sigma) ds dW(\sigma), A^* \xi \right\rangle$$

Sada zbog dobrog ponašanja stohastičkog integrala u odnosu na zatvorene operatore (vidi [5, propozicija 4.15]) i činjenice da

$$A \int_\sigma^t S(s-\sigma) ds = S(t-\sigma) - I$$

imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle W_A^\Phi(s), A^* \xi \rangle ds &= \left\langle \int_0^t S(t-s) \Phi(s) dW(s) - \int_0^t \Phi(s) dW(s), \xi \right\rangle \\ &= \langle W_A^\Phi(t), \xi \rangle - \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \langle \xi, \Phi^j(s) \rangle d\beta_s^j \end{aligned}$$

■

S obzirom da koeficijenti F i B nisu vremenski homogeni često ćemo razmatrati pomaknutu verziju od (1.28). Neka τ_0 označava ograničeno vrijeme zaustavljanja. Tada $(\mathcal{F}_t^{(\tau_0)}) := (\mathcal{F}_{\tau_0+t})$ označava filtraciju koja zadovoljava uobičajene uvjete. Sljedeći teorem je klasični i može se pronaći u [21, teorem 3.6 ,poglavlje 4]

Lema 1.33. *Procesi:*

$$\beta_t^{(\tau_0),j} := \beta_{\tau_0+t}^j - \beta_{\tau_0}^j, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad j \in \mathbb{N},$$

su nezavisna $(\mathcal{F}_t^{(\tau_0)})$ Brownova gibanja.

Pišemo $W^{(\tau_0)} = (\beta^{(\tau_0),j})_{j \in \mathbb{N}}$. Jasno je da $W^{(\tau_0)}$ može biti shvaćen kao $(\mathcal{F}_t^{(\tau_0)})$ -Brownovo gibanje s vrijednostima u Hilbertovom prostoru. Jasno je i kako bismo trebali definirati $\mathcal{L}^{loc}(H, (\mathcal{F}_t^{(\tau_0)}))$ itd. U stvari imamo da je $(\Phi_t) \in \mathcal{L}^{loc}(H)$ ako i samo ako $(\Phi_{\tau_0+t}) \in \mathcal{L}^{loc}(H, (\mathcal{F}_t^{(\tau_0)}))$. Pomaknuta verzija od (1.28) za τ_0 sada izgleda:

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + F(\tau_0 + t, X_t))dt + B(\tau_0 + t, X_t)dW_t^{(\tau_0)} \\ X_0 = h_0 \end{cases} \quad (1.39)$$

i slično proširena ekvivalentna verzija (1.29). Lokalno blago (slabo, jako) rješenje od (1.39) ćemo označavati sa $X^{(\tau_0, h_0)}$.

Lema 1.34. Pretpostavimo da je $X = X^{(0,h_0)}$ lokalno blago (slabo, jako) rješenje od (1.28) sa vremenom života $\tau > \tau_0$. Tada je (X_{τ_0+t}) lokalno blago (slabo, jako) rješenje od (1.39) gdje je h_0 zamijenjen sa X_{τ_0} , sa vremenom života $\tau - \tau_0$.

Dokaz. Primjetimo prvo da za $\Phi \in \mathcal{L}^{loc}(H)$

$$\int_{\tau_0}^{\tau_0+t} \Phi_s dW_s = \int_0^t \Phi_{\tau_0+s} dW_s^{(\tau_0)} \quad (1.40)$$

Ovo je jasno za elementarne procese i ako τ_0 uzima samo konačno vrijednosti. Generalni slučaj slijedi iz standarne procedure lokalizacije. Ostatak slijedi direktnom provjerom. \blacksquare

U nastavku ćemo najčešće za τ_0 uzimati deterministički $t_0 \in \mathbb{R}$.

1.4.2 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

Lipschitzova neprekidnost i linearan rast igraju važnu ulogu u teoriji (stohastičkih) diferencijalnih jednadžbi. Pretpostavimo da su D i E Banachovi prostori i neka je $\Phi = \Phi(t, \omega, h) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times D \rightarrow E$ dano preslikavanje.

Definicija 1.35. Preslikavanje $\Phi(t, \omega, h)$ zovemo lokalno Lipschitz neprekidnim u h ukoliko za sve $R \in \mathbb{R}_+$ postoji broj $C = C(R)$, Lipschitzova konstanta Φ , takva da za sve $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ vrijedi

$$\|\Phi(t, \omega, h_1) - \Phi(t, \omega, h_2)\|_E \leq C \|h_1 - h_2\|_D, \quad \forall h_1, h_2 \in B_R(D) \quad (1.41)$$

gdje je $B_R(D)$ kugla radijusa R oko ishodišta. Ako C ne ovisi o R kažemo za Φ da je Lipschitz neprekidno.

Napomena 1.36. Rješenje jednadžbe (1.28) se može tražiti na $[0, T]$. Tada Lipschitzova konstanta C može ovisiti o T i onda zahtjevamo da (1.41) vrijedi za sve $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$. Tako iskazujemo teoreme egzistencije.

Definicija 1.37. Preslikavanje $\Phi(t, \omega, h)$ se zove lokalno ograničeno u h ako za sve $R \in \mathbb{R}_+$ postoji $K = K(R)$ takav da

$$\|\Phi(t, \omega, h)\|_E \leq K, \quad \forall (t, \omega, h) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times B_R(D) \quad (1.42)$$

Pretpostavimo da je $\Phi(t, \omega, h)$ lokalno Lipschitz neprekidna u h . Tada je lako za vidjeti da je Φ lokalno ograničena ako i samo ako

$$\|\Phi(t, \omega, h_0)\|_E \leq \tilde{C}, \quad \forall (t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$$

za neki $h_0 \in D$ i konstantu \tilde{C} . Prije dokaza egzistencije i jedinstvenosti rješenja trebaju nam jedna pomoćna tvrdnja:

Lema 1.38. Za svaki $r \geq 1$ i proizvoljni predvidljivi proces $\Phi(t)$ s vrijednostima u $L_2^0(H)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{s \in [0,t]} \left\| \int_0^s \Phi(\sigma) dW(\sigma) \right\|_H^{2r}\right) &\leq c_r E\left(\left\| \int_0^t \Phi(\sigma) dW(\sigma) \right\|_H^{2r}\right) \\ &\leq C_r \left(\int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0(H)}^2 ds \right)^r, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \tag{1.43}$$

gdje je

$$c_r = \left(\frac{2r}{2r-1}\right)^{2r}, \quad C_r = (r(2r-1))^r \left(\frac{2r}{2r-1}\right)^{2r^2}$$

Dokaz. Po Doobovoj nejednakosti i svojstvu izometričnosti za stohastičke integrale rezultat je točan za $r = 1$. Pretpostavimo sada da je $r > 1$, stavimo $Z(t) = \int_0^t \Phi(s) dW(s)$, $t \geq 0$ i primjenimo Itôvu formulu na $f(Z(\cdot))$ gdje je $f(x) = \|x\|_H^{2r}$, $x \in H$. S obzirom da je

$$D^2 f(x)(h, h) = 4r(r-1)\|x\|_H^{2(r-2)} \langle x, h \rangle^2 + 2r\|x\|_H^{2(r-1)} \langle h, h \rangle, \quad x \in H$$

vidimo da je

$$\|D^2 f(x)(h, h)\| \leq 2r(2r-1)\|x\|_H^{2(r-1)} \|h\|_H^2$$

Pretpostavimo da vrijedi $E\|Z(t)\|_H^{2r} < \infty$. Sada nam Itôva formula daje (uzimanjem očekivanja na obje strane):

$$\begin{aligned} E\|Z(t)\|_H^{2r} &\leq r(2r-1)E\left(\int_0^t \|Z(s)\|_H^{2(r-1)} \|\Phi(s)\|_{L_2^0(H)}^2 ds\right) \\ &\leq r(2r-1)E\left(\sup_{s \in [0,T]} \|Z(s)\|_H^{2(r-1)} \int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0(H)}^2 ds\right) \end{aligned}$$

Po Hölderovoj nednakosti uzimajući za $p = \frac{r}{r-1}$ imamo:

$$\begin{aligned} E\|Z(t)\|_H^{2r} &\leq r(2r-1) \left[E\left(\sup_{s \in [0,t]} \|Z(s)\|_H^{2(r-1)p}\right) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left[E\left(\int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0(H)}^2 ds\right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

Sada koristeći Doobovu nejednakost za submartingale (vidi [16, teorem 3.8., poglavljje 1]) imamo:

$$\begin{aligned} E\|Z(t)\|_H^{2r} &\leq r(2r-1) \left[\left(\frac{2r}{2r-1}\right)^{2r} \left(E|Z(t)|^{2r}\right) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left[E\left(\int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0(H)}^2 ds\right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

Dijeleći obje strane sa $\left(E\|Z(t)\|_H^{2r}\right)^{1-\frac{1}{r}}$ dobivamo:

$$E\|Z(t)\|_H^{2r} \leq (r(2r-1))^r \left(\frac{2r}{2r-1}\right) E\left(\int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0(H)}^2 ds\right)^r$$

Sada iz Doobove nejednakosti:

$$E\left(\sup_{s \in [0,t]} \|Z(s)\|_H^{2r}\right) \leq c_r E\|Z(t)\|_H^{2r}$$

imamo tvrdnju leme. Za općeniti slučaj kada neznamo da li je $E\|Z(t)\|_H^{2r} < \infty$ tvrdnju dobivamo lokalizacijom, definirajući niz vremena zaustavljanja $\tau_n := \inf\{s \geq 0 \mid \|Z(s)\|_H \geq n\}$, primjenjujući tvrdnju teorema na $Z(t \wedge \tau_n)$ i puštanjem $n \rightarrow \infty$. \blacksquare

Lema 1.39. *Neka je $r > 1, T > 0$ i Φ predvidljiv proces s vrijednostima u $L_2^0(H)$ takav da $E\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|_{L_2^0(H)}^{2r} ds\right) < \infty$. Tada postoji neprekidna verzija od W_A^Φ i konstanta $C_T > 0$ takva da:*

$$E\left(\sup_{t \in [0,T]} \left\| \int_0^t S(t-s)\Phi(s)dW(s) \right\|_H^{2r}\right) \leq C_T E\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|_{L_2^0(H)}^{2r} ds\right) \quad (1.44)$$

Dokaz. Upotrijebit ćemo faktorizacijsku metodu naime iskoristit ćemo činjenicu da za $0 < \alpha < 1$ vrijedi:

$$\int_\sigma^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{-\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

Mi ćemo uzeti $\alpha \in \left(\frac{1}{2r}, \frac{1}{2}\right]$. Iz stohastičkog Fubinijevog teorema slijedi:

$$W_A^\Phi(t) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S(t-s) Y(s) ds, \quad t \in [0, T] \quad (1.45)$$

gdje je

$$Y(s) = \int_0^s (s-\sigma)^{-\alpha} S(s-\sigma) \Phi(\sigma) dW(\sigma), \quad s \in [0, T] \quad (1.46)$$

Pokazat ćemo da je sa (1.45) dana neprekidna verzija od $W_A^\Phi(t)$ pa ima smisla govoriti o supremumu norme kao slučajnoj varijabli. S obzirom da je $\alpha > \frac{1}{2r}$ primjenjujući Hölderovu nejednakost na (1.45) i koristeći činjenicu da je $\|S(t)\| \leq M$ za $t \in [0, T]$ gdje je M neka konstanta dobivamo:

$$\sup_{t \in [0,T]} \|W_A^\Phi(t)\|_H^{2r} \leq C_{1,T} \int_0^T \|Y(s)\|_H^{2r} ds. \quad (1.47)$$

za neku konstantu $C_{1,T}$. Uočimo da je za neprekidnost od (1.45) dosta pokazati da je $Y(s) \in L^{2r}([0, T]; H)$ (primjena LTDK). Štoviše po prethodnoj lemi slijedi da postoji konstanta $C_{2,T}$ takva da

$$E\|Y(s)\|_H^{2r} \leq C_{2,T} E \left(\int_0^s (s-\sigma)^{-2\alpha} \|\Phi(\sigma)\|_{L_2^0(H)}^2 d\sigma \right)^r \quad (1.48)$$

Sada upotrebom Youngove nejednakosti imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^T E\|Y(s)\|_H^{2r} ds &\leq C_{2,T} E \left(\left(\int_0^T \sigma^{-2\alpha} d\sigma \right)^r \int_0^T \|\Phi(\sigma)\|_{L_2^0(H)}^{2r} d\sigma \right) \\ &\leq C_{3,T} E \left(\int_0^T \|\Phi(\sigma)\|_{L_2^0(H)}^{2r} d\sigma \right) \end{aligned}$$

Koristeći ocjenu (1.47) imamo tvrdnju. ■

Sada ćemo dokazati teorem egzistencije i jedinstvenosti

Teorem 1.40. *Pretpostavimo da su $F(t, \omega, h)$ i $B(t, \omega, h)$ na intervalu $[0, T]$ Lipschitz neprekidne po h i zadovoljavaju uvjet linearnog rasta:*

$$\|F(t, \omega, h)\|_H^2 + \|B(t, \omega, h)\|_{L_2^0(H)}^2 \leq C(1 + \|h\|_H^2),$$

za sve $(t, \omega, h) \in \mathbb{R} \times \Omega \times H$, gdje C ne ovisi o (t, ω, h) i neka je $\xi \in \mathcal{F}_0$ izmjeriva.

(i) *Tada postoji jedinstveno (do na modifikaciju) blago rješenje X od (1.28) sa početnim uvjetom ξ u klasi procesa koji zadovoljavaju*

$$\mathbb{P} \left(\int_0^T \|X(s)\|_H^2 ds \right) < \infty$$

Štoviše postoji neprekidna modifikacija rješenja.

(ii) *Za svaki $p \geq 2$ postoji konstanta $C_{p,T}$ takva da:*

$$\sup_{t \in [0, T]} E\|X(t)\|_H^p \leq C_{p,T}(1 + E\|\xi\|_H^p) \quad (1.49)$$

(iii) *Za svaki $p > 2$ postoji konstanta $\hat{C}_{p,T} > 0$ takva da:*

$$E \sup_{t \in [0, T]} \|X(t)\|_H^p \leq \hat{C}_{p,T}(1 + E\|\xi\|_H^p) \quad (1.50)$$

Dokaz. Dokažimo najprije jedinstvenost rješenja: neka su $X_1(\cdot)$ i $X_2(\cdot)$ dva procesa koja zadovoljavaju (1.29). Dokažimo da tada vrijedi $\mathbb{P}(X_1(t) = X_2(t)) = 1$ za proizvoljni $t \in [0, T]$. Za fiksni $R > 0$ definiramo:

$$\tau_i = \inf\{t \leq T : \int_0^t \|F(s, X_i(s))\|_H ds \geq R \text{ ili } \int_0^t \|B(s, X_i(s))\|_{L_2^0(H)}^2 ds \geq R\}, \quad i = 1, 2$$

$$\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$$

Stavimo $\hat{X}_i(t) = I_{[0, \tau]}(t)X_i(t)$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2$. Tada za proizvoljni $t \in [0, T]$, \mathbb{P} -g.s.

$$\begin{aligned} \hat{X}_i(t) &= I_{[0, \tau]}(t)S(t)\xi + I_{[0, \tau]}(t) \int_0^t I_{[0, \tau]}(s)S(t-s)F(s, \hat{X}_i(s))ds \\ &\quad + I_{[0, \tau]}(t) \int_0^t I_{[0, \tau]}(s)S(t-s)B(s, \hat{X}_i(s))dW(s). \end{aligned}$$

Sada imamo da za proizvoljni $t \in [0, T]$ vrijedi:

$$\begin{aligned} E\|\hat{X}_1(t) - \hat{X}_2(t)\|_H^2 &\leq 2ME\left\{\int_0^t \|F(s, \hat{X}_1(s)) - F(s, \hat{X}_2(s))\|_H^2 ds\right\}^2 \\ &\quad + 2ME\left\{\int_0^t \|B(s, \hat{X}_1(s)) - B(s, \hat{X}_2(s))\|_{L_2^0(H)}^2 ds\right\}^2 \end{aligned} \tag{1.51}$$

gdje je $M = \sup_{t \in [0, T]} S(t)$. Po definiciji vremena zaustavljanja τ, τ_1 i τ_2 dobivamo da je desna strana pa stoga i lijeva strana od (1.51) ograničena funkcija od $t \in [0, T]$. Iz Lipschitzovosti funkcija slijedi da

$$E\|\hat{X}_1(t) - \hat{X}_2(t)\|_H^2 \leq 2C_0(T+1) \int_0^t E\|\hat{X}_1(s) - \hat{X}_2(s)\|_H^2 ds$$

za neku konstantu C_0 . Ograničenost od $E\|\hat{X}_1(t) - \hat{X}_2(t)\|_H^2$ i Gronwallova lema povlače da $E|\hat{X}_1(t) - \hat{X}_2(t)|^2 = 0$. Stoga imamo da za sve $t \in [0, T]$ vrijedi $\mathbb{P}(\hat{X}_1(t) = \hat{X}_2(t)) = 1$. S obzirom da je ovo istina za proizvoljni $R > 0$, $X_1(\cdot)$ i $X_2(\cdot)$ su jednaki \mathbb{P} -g.s.

Dokaz egzistencije se zasniva na klasičnom pristupu preko teorema o fiksnoj točki. Označimo sa $\mathcal{H}_p, p > 2$, Banachov prostor svih predvidljivih procesa Y sa vrijednostima u H definiranih na intervalu $[0, T]$ takvih da:

$$\|Y\|_p = \left(\sup_{t \in [0, T]} E\|Y(t)\|_H^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Ako izjednačimo procese koji su jednaki \mathbb{P}_T g.s. onda \mathcal{H}_p sa normom $||| \cdot |||_p$ postaje Banachov prostor. Neka je \mathcal{K} definirana na \mathcal{H}_p formulom:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(Y)(t) &= S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)F(s, Y_s)ds + \int_0^t S(t-s)B(s, Y_s)dW(S) \\ &= S(t)\xi + \mathcal{K}_1(Y)(t) + \mathcal{K}_2(Y)(T), \quad t \in [0, T], Y \in \mathcal{H}_p\end{aligned}$$

Prepostavljamo da je $E(||\xi||_H^p) < \infty$ i pokazat ćemo da \mathcal{K} preslikava \mathcal{H}_p na \mathcal{H}_p . Imamo:

$$\begin{aligned}|||\mathcal{K}_1|||_p^p &\leq M^p E \left(\int_0^T ||F(s, Y_s)||_H ds \right)^p \leq T^{p-1} M^p E \int_0^T ||F(s, Y_s)||_H^p ds \\ &\leq T^{p-1} M^p C_1 E \int_0^T (1 + ||Y(s)||_H^p) ds \\ &\leq T^p M^p C_1 (1 + |||Y|||_p^p)\end{aligned}$$

Pokažimo, sada, isto svojstvo za \mathcal{K}_2 . Iskoristit ćemo lemu (1.39). Imamo:

$$\begin{aligned}|||\mathcal{K}_2(Y)|||_p^p &\leq \sup_{t \in [0, T]} E \left(\left| \left| \int_0^t S(t-s)B(s, Y_s)dW(s) \right| \right|_H^p \right) \\ &\leq M^p C_2 E \left(\int_0^T \|B(s, Y_s)\|_{L_2^0(H)}^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq M^p C_3 E \left(\int_0^T (1 + ||Y(s)||_H^2) ds \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq M^p C_3 T^{\frac{p}{2}-1} E \int_0^T (1 + ||Y(s)||_H^2)^{\frac{p}{2}} ds \\ &\leq M^p T^{\frac{p}{2}-1} C_4 E \int_0^T (1 + ||Y(s)||_H^p) ds \\ &\leq M^p C_4 T^{\frac{p}{2}-1} (T + |||Y|||_p)^p\end{aligned}$$

Neka su sada Y_1 i Y_2 proizvoljni procesi iz \mathcal{H}_2 , tada:

$$\begin{aligned}|||\mathcal{K}(Y_1) - \mathcal{K}(Y_2)|||_p &\leq |||\mathcal{K}_1(Y_1) - \mathcal{K}_1(Y_2)|||_p + |||\mathcal{K}_2(Y_1) - \mathcal{K}_2(Y_2)|||_p \\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}
I_1^p &\leq \sup_{t \in [0, T]} E \left\{ \left| \int_0^t S(t-s)(F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))) ds \right|^p_H \right\} \\
&\leq M^p \sup_{t \in [0, T]} E \left\{ \int_0^t [|F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))|_H] ds \right\}^p \\
&\leq (MC)^p T^{p-1} \left\{ \int_0^T E \|Y_1(s) - Y_2(s)\|_H^p ds \right\} \\
&\leq (MC)^p T^p \sup_{t \in [0, T]} E \{ \|Y_1(t) - Y_2(t)\|_H^p \} \\
&\leq (MC)^p T^p \|Y_1 - Y_2\|_p^p.
\end{aligned}$$

Na sličan način dobivamo, upotreboom leme (1.39),

$$\begin{aligned}
I_2^p &\leq C_5 M^p E \left\{ \int_0^T \|B(s, Y_1(s)) - B(s, Y_2(s))\|_{L_2^0}^2 ds \right\}^{\frac{p}{2}} \\
&\leq C_5 (MC)^p T^{\frac{p}{2}-1} E \left\{ \int_0^T \|B(s, Y_1(s)) - B(s, Y_2(s))\|_{L_2^0}^p ds \right\} \\
&\leq C_5 (MC)^p T^{\frac{p}{2}} \|Y_1 - Y_2\|_p^p.
\end{aligned}$$

Sumirajući ocjene dobivamo:

$$\|\mathcal{K}(Y_1) - \mathcal{K}(Y_2)\|_p \leq CM(T^p + C_5 T^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}} \|Y_1 - Y_2\|_p \quad (1.52)$$

za sve $Y_1, Y_2 \in \mathcal{K}_p$. Ako vrijedi

$$MCT(1 + C_5 T^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{p}} < 1 \quad (1.53)$$

tada \mathcal{K} ima jedinstvenu fiksnu točku u \mathcal{H}_p , koja, je rješenje jednadžbe (1.28). Dodatni uvjet na T (1.53) se može lako ukloniti gledajući jednadžbu na intervalima $[0, \hat{T}], [\hat{T}, 2\hat{T}], \dots$ sa \hat{T} koji zadovoljava (1.53). Stoga smo dokazali tvrdnju (ii) u teoremu jer (1.49) slijedi lagano iz Gronwallove leme.

Za konstrukciju rješenja za $p = 2$ kao i za proizvoljni ξ primjetimo da ako su ξ i ζ dva početna uvjeta i $X, Y \in \mathcal{H}_p$ da tada za odgovarajuća rješenja vrijedi:

$$I_\Gamma X(\cdot) = I_\Gamma Y(\cdot), \quad \mathbb{P}_T\text{-g.s.} \quad (1.54)$$

gdje je

$$\Gamma = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\}$$

Da to vidimo definirajmo:

$$X^0(t) = S(t)\xi, \quad X^{k+1}(t) = \mathcal{K}(X^k)(t), \quad t \in [0, T], k = 0, 1, 2, \dots$$

Stoga za $t \in [0, T]$, \mathbb{P} -g.s. vrijedi:

$$\begin{aligned} X^{k+1}(t) &= S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)F(s, X^k(s))ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)B(s, X^k(s))dW(s) \end{aligned}$$

S obzirom da je $I_\Gamma \mathcal{F}_0$ izmjeriv, $I_\Gamma B(\cdot, X^k(\cdot))$ je $L_2^0(H)$ predvidljiv proces i za $t \in [0, T]$ vrijedi:

$$\int_0^t S(t-s)I_\Gamma B(s, X^k(s))dW(s) = I_\Gamma \int_0^t S(t-s)B(s, X^k(s))dW(s).$$

Stoga za $t \in [0, T]$ vrijedi:

$$\begin{aligned} I_\Gamma X^{k+1}(t) &= S(t)I_\Gamma \xi + \int_0^t S(t-s)I_\Gamma F(s, X^k(s))ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)I_\Gamma B(s, I_\Gamma X^k(s))dW(s) \end{aligned} \tag{1.55}$$

Ako slično definiramo

$$Y^0(t) = S(t)\eta, \quad Y^{k+1}(t) = \mathcal{K}(Y^k)(t), \quad t \in [0, T], k = 0, 1, 2, \dots$$

imamo da za proizvoljni k vrijedi:

$$I_\Gamma X^k(\cdot) = I_\Gamma Y^k(\cdot), \mathbb{P}_T\text{-g.s.}$$

Tada također:

$$I_\Gamma F(\cdot, X^k(\cdot)) = I_\Gamma F(\cdot, Y^k(\cdot)), I_\Gamma B(\cdot, X^k(\cdot)) = I_\Gamma B(\cdot, Y^k(\cdot)), \mathbb{P}_T\text{-g.s.}$$

Stoga imamo:

$$I_\Gamma X^{k+1}(\cdot) = I_\Gamma Y^{k+1}(\cdot), \quad \mathbb{P}_T\text{-g.s.}$$

S obzirom da su procesi X i Y limesi u $\|\cdot\|_p$ normi nizova $\{X^k(\cdot)\}$ i $\{Y^k(\cdot)\}$ identitet (1.54) je istinit. Štoviše proces $I_\Gamma X(\cdot)$ zadovoljava jednadžbu (1.28) sa početnim uvjetom $I_\Gamma \xi = I_\Gamma \eta$. Sada dokazujemo egzistenciju. Definirajmo za $n = 1, 2, \dots$,

$$\xi_n = \begin{cases} \xi & \text{ako } \|\xi\|_H \leq n \\ 0 & \text{ako } \|\xi\|_H > n \end{cases}$$

i označimo sa $X_n(\cdot)$ odgovarajuće rješenje od (1.28). Po prethodnom argumentu imamo:

$$X_n(t) = X_{n+1}(t) \text{ na } \{\omega \in \Omega : \|\xi\|_H \leq n\}$$

Lako se sada vidi da je proces

$$X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t), \quad t \in [0, T]$$

definiran \mathbb{P} -g.s. i zadovoljava jednadžbu (1.28).

Da dokažemo egzistenciju neprekidne modifikacije blagog rješenja prepostavimo prvo da $E\|\xi\|_H^{2r} < \infty$ za neko $r > 1$. Iz prvog dijela teorema znamo da

$$\sup_{t \in [0, T]} E\|X(t)\|^{2r} < \infty \quad (1.56)$$

Definirajmo:

$$\Phi(t) = B(t, X_t), \quad t \in [0, T]$$

i

$$I = E \int_0^T \|\Phi(t)\|_{L_2^0(H)}^{2r} dt = E \int_0^T \|B(t, X_t)\|_{L_2^0(H)}^{2r} dt$$

Iz uvjeta teorema imamo:

$$I \leq C^{2r} E \left(\int_0^T (1 + \|X(t)\|_H)^{2r} dt \right) < \infty$$

Lema 1.39 povlači da proces

$$\int_0^t S(t-s)B(s, X(s))dW(s), \quad t \in [0, T],$$

i stoga također $X(t), t \in [0, T]$ ima neprekidnu modifikaciju Slučaj početnog uvjeta koji zadovoljava $E\|\xi\|_H^{2r} = \infty$ se može svesti na ovaj ako razmatramo sljedeće početne uvjete

$$\xi_n = \begin{cases} \xi & \text{ako } |\xi| \leq n, \\ 0 & \text{ako } |\xi| > n \end{cases}$$

kao u dokazu egzistencije. Ocjena (1.50) za $p > 2$ slijedi opet primjenom Gronwallove leme. ■

Korolar 1.41. *Prepostavimo da su $F(t, \omega, h)$ i $B(t, \omega, h)$ kao u prethodnom teoremu. Vrijedi da za svaku početnu vremensku prostornu točku $(t_0, h_0) \in \mathbb{R}_+ \times H$ postoji jedinstveno neprekidno slabo rješenje $X = X^{t_0, h_0}$ za t_0 pomaknute jednadžbe (1.29). Štoviše za $T \in \mathbb{R}_+$ postoji konstanta $C = C(T)$ takva da:*

$$\sup_{t \in [0, T]} E\|X_t\|^2 \leq C(1 + \|h_0\|_H^2)$$

Dokaz. Direktno iz teorema 1.40 i teorema 1.32. ■

Korolar 1.42. Pretpostavimo da su $F(t, \omega, h)$ i $B(t, \omega, h)$ lokalno ograničene i lokalno Lipschitz neprekidne u h . Tada za svaku vremensko prostornu točku $(t_0, h_0) \in \mathbb{R}_+ \times H$ postoji jedinstveno neprekidno lokalno slabo rješenje $X = X^{(t_0, h_0)}$ za t_0 pomaknute jednadžbe (1.29). Štoviše svako neprekidno slabo rješenje jednadžbe (1.29) je jedinstveno.

Dokaz. Pretpostavimo da je $t_0 = 0$. Neka je $h_0 \in H$. Stavimo $l := 2\|h_0\|$ i definirajmo:

$$\tilde{F}(t, \omega, h) = \begin{cases} F(t, \omega, h), & \text{ako } \|h\|_H \leq l \\ F(t, \omega, \frac{l}{\|h\|_H}h), & \text{ako } \|h\|_H > l \end{cases}$$

i slično $\tilde{B}(t, \omega, h)$. Tada \tilde{F} i \tilde{B} zadovoljavaju uvjete teorema 1.40. Stoga postoji jedinstveno neprekidno slabo rješenje od (1.28) gdje su F i B zamijenjeni sa \tilde{F} i \tilde{B} . Definirajmo vrijeme zaustavljanja $\tau := \inf\{t \geq 0 \mid \|\tilde{X}_t\|_H \geq l\}$. Tada je $\tau > 0$ i $X_t := \tilde{X}_{t \wedge \tau}$ je neprekidno lokalno slabo rješenje od (1.29) sa vremenom života τ . Ako je X neprekidno lokalno slabo rješenje od (1.28) tada je ono jedinstveno na $[0, \tau_n \wedge \tau]$, $n \geq 2$ gdje je $\tau_n := \inf\{t \geq 0 \mid \|X\|_H \geq n\|h_0\|_H\}$. Sada upotrijebimo činjenicu da $\tau_n \uparrow \tau$. ■

Napomena 1.43. Teorem 1.40 i ovi korolari pokazuju da je (lokalno) slabo rješenje pravi koncept rješenja za 1.28.

Poglavlje 2

Uvjet konzistencije na proces Z i familiju \mathcal{G}

U ovom poglavlju ćemo riješiti problem (P1) i dobiti restrikciju na proces Z i familiju \mathcal{G} tako da $G(x, Z_t)$ daju model koji zadovoljava uvjet "bez arbitraže". Pokazat ćemo da Nelson-Siegelove familije nisu dobre za korištenje sa HJM -modelima u smislu da imamo prevelike restrikcije na proces Z ukoliko želimo da $G(x, Z_t)$, G je Nelson-Siegel, daje model bez arbitraže.

2.1 Z je Itôv

Fiksirajmo $m \in \mathbb{N}$ i neka je \mathcal{Z} Borelov podskup od \mathbb{R}^m . Pretpostavimo da imamo zadanu parametriziranu familiju $\mathcal{G} = \{G(\cdot, z) | z \in \mathcal{Z}\}$, gdje je $G \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m)$. Zapravo, možemo zahtjevati da je G definirana i diferencijabilna na nekom otvorenom nadskupu od \mathcal{Z} . Nadalje ćemo prepostaviti da $G \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m)$. Dakle vrijedi da postoje parcijalne derivacije $\partial G / \partial x$, $\partial G / \partial z_i$, $\partial^2 G / \partial z_i \partial z_j$ i neprekidne su na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$. Promatrati ćemo Itôv proces Z s vrijednostima u \mathbb{R}^m , $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^m)$ u obliku (vidi definiciju 1.16)

$$Z_t^i = Z_0^i + \int_0^t b_s^i ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \rho_s^{ij} d\beta_s^j, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

Primjeti da $\rho_t = (\rho_t^j)_{j \in \mathbb{N}} \in L_2^0(\mathbb{R}^m)$ gdje nam vrijedi:

$$\rho_t^j = (\rho_t^{1j}, \dots, \rho_t^{mj}) \in \mathbb{R}^m$$

Neka je $a = \rho \rho^*$ tj. $a^{ij} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho^{ik} \rho^{jk}$ za $1 \leq i, j \leq m$. Tada je a pozitivno definitna matrica tipa $m \times m$ s predviđljivim koordinatnim procesima .

Neka su sada buduće stope dane sa

$$f(t, T) = G(T - t, Z_t), \quad t \leq T \quad (2.2)$$

Označimo sa

$$\Pi(x, z) := \exp \left(- \int_0^x G(\eta, z) d\eta \right) \quad (2.3)$$

Primjetimo da je $\Pi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$. Po Itôvoj formuli procesi cijena obveznica

$$B(t, T) = \Pi(T - t, Z_t), \quad t \in [0, T], \quad T \in \mathbb{R}_+ \quad (2.4)$$

su Itôvi procesi. Isto vrijedi i za proces

$$B(t) = \exp \left(\int_0^t G(0, Z_s) ds \right), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.5)$$

Mi ćemo uvjet "bez arbitraže" izraziti preko egzistencije martingalne mjere. O odnosu ta dva pojma može se pronaći u [16] i [20](osnovni teorem o određivanju cijene imovine, engl. "fundamental theorem of asset pricing").

Definicija 2.1. *Vjerojatnosna mjera $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ se zove ekvivalentna lokalno-martingalna mjera (ELMM) ako je diskontirani proces cijena obveznica*

$$\left\{ \frac{B(t, T)}{B(t)} \right\}_{t \in [0, T]} \quad (2.6)$$

\mathbb{Q} -lokalni martingal za svaki $T \in \mathbb{R}_+$. Ako je \mathbb{P} ELMM zovemo je jednostavno lokalno-martingalna mjera (LMM).

Definicija 2.2. *Za proces Z kažemo da je konzistentan sa \mathcal{G} (e-konzistentan sa \mathcal{G}) ako je $Z_t \in \mathcal{Z}$ za svaki $t \in \mathbb{R}_+$ i \mathbb{P} je LMM (postoji ELMM)*

Jasno je da konzistentnost trivijalno povlači e-konzistentnost. Mi ćemo sada izvesti nužan i dovoljan uvjet za konzistentnost. Pomoću Itôve formule možemo opisati dinamiku od (2.6) i taj proces zbog semimartingalnosti može biti rastavljen na dio koji je lokalni martingal i dio koji je konačne varijacije. Zbog toga što zahtjevamo da bude lokalni martingal njegov dio koji je konačne varijacije mora biti 0. Taj uvjet (to je zapravo HJM uvjet na drift) izražavamo sljedećom propozicijom:

Propozicija 2.3. *Proces Z s vrijednostima u \mathcal{Z} dan sa (2.1) je konzistentan sa \mathcal{G} ako i samo ako*

$$\frac{\partial G(x, Z_t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^m b^i \frac{\partial G(x, Z_t)}{\partial z_i} + \sum_{i,j=1}^m a^{ij} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(x, Z_t)}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial G(x, Z_t)}{\partial z_i} \int_0^x \frac{\partial G(\eta, Z_t)}{\partial z_j} d\eta \right) \quad (2.7)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}_+, dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s.

Dokaz. Za $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$ stavljamo:

$$\mathcal{A}_t(\omega)f(z) := \sum_{i=1}^m b_t^i(\omega) \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_t^{ij}(\omega) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial z_j}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{R}^m.$$

Upotrijebimo Itôvu formulu i dobivamo, za svaki $T \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} B(t, T) &= B(0, T) + \int_0^t (\mathcal{A}_s \Pi(T-s, Z_s) - \frac{\partial}{\partial x} \Pi(T-s, Z_s) ds \\ &\quad + \int_0^t D_z \Pi(T-s, Z_s) \rho_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

gdje D_z označava derivaciju s obzirom na z i derivirajući iz jednakosti (2.5) i (2.3) dobivamo:

$$\frac{1}{B(t)} = 1 + \int_0^t \frac{1}{B(s)} \frac{\partial}{\partial x} \Pi(0, Z_s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Za $0 \leq t \leq T$ definiramo

$$H(t, T) := \frac{\mathcal{A}_t \Pi(T-t, Z_t) - \frac{\partial \Pi(T-t, Z_t)}{\partial x} + \frac{\partial \Pi(0, Z_t)}{\partial x} \Pi(T-t, Z_t)}{B(t)} \quad (2.8)$$

i lokalni martingal

$$M(t, T) := \int_0^t \frac{1}{B(s)} D_z \Pi(T-s, Z_s) \rho_s dW_s$$

Parcijalna integracija (ili višedimenzionalna Itôva formula) daju:

$$\frac{1}{B(t)} B(t, T) = B(0, T) + \int_0^t H(s, T) ds + M(t, T), \quad 0 \leq t \leq T$$

Zbog jedinstvenosti dekompozicije semimartingala (vidi [21]) vrijedi da je Z konzistentan sa \mathcal{G} ako i samo ako

$$\int_0^t H(s, T) ds = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \mathbb{P} - g.s. \quad (2.9)$$

S obzirom da su b i ρ predvidljivi i Π je dovoljno glatka, $H(\cdot, T)$ je predvidljiv na $[0, T] \times \Omega$. Tvrđimo da je (2.9) ekvivalentno sa:

$$H(x, T) = 0, \quad \text{na } [0, T] \times \Omega, \quad dt \otimes dP\text{-g.s.} \quad (2.10)$$

Uistinu, dovoljnost od (2.10) je jasna. Obratno, pretpostavimo da vrijedi (2.9) i definiramo predvidljiv skup $N := \{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega | H(t, T)(\omega) > 0\}$. S obzirom da je $H(\cdot, T)$ pozitivan na N možemo primjeniti Fubinijev teorem

$$\int_N H(t, T)(\omega) dt \otimes dP = \int_{\Omega} \left(\int_{N_{\omega}} H(t, T)(\omega) dt \right) dP(\omega) = 0,$$

gdje je $N_{\omega} := \{t | (t, \omega) \in N\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ (Iz relacije (2.9) se standarnim $\Pi - d$ argumentom može zaključiti da relacija (2.9) vrijedi za svaki Borelov skup umjesto $[0, t]$). Stoga zaključujemo da N ima $dt \otimes dP$ -mjeru 0. Upotrebljavajući sličan argument za $-H(\cdot, T)$ dokazali smo (2.10). Primjeti da (2.10) vrijedi za svaki $T \in \mathbb{R}_+$, gdje $dt \otimes dP$ -nul skup ovisi o T . Budući da je $H(t, T)$ neprekidna u T , standardan argument daje

$$H(t, t+x)(\omega) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad dt \otimes dP - \text{g.s.}(t, \omega).$$

Množeći jednadžbu (2.8) sa $B(t)$ i upotrebljavajući izračunato možemo pisati

$$\mathcal{A}_t \Pi(T-t, Z_t) - \frac{\partial \Pi(T-t, Z_t)}{\partial x} + \frac{\partial \Pi(0, Z_t)}{\partial x} \Pi(T-t, Z_t) = 0, \quad dt \otimes dP - \text{g.s.} \quad (2.11)$$

Deriviranje daje

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathcal{A}_t G(\eta, Z) d\eta &- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a^{ij} \left(\int_0^x \frac{\partial}{\partial z_i} G(\eta, Z) d\eta \right) \left(\int_0^x \frac{\partial}{\partial z_j} G(\eta, Z) d\eta \right) \\ &- G(x, Z) + G(0, Z) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad dt \otimes dP - \text{g.s.} \end{aligned}$$

gdje smo podijelili sa $\Pi(x, Z)$, jer je $\Pi > 0$ na $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z}$. Deriviranjem po x dobijemo (2.7).

Napomena 2.4. *Uvjet (2.7) bismo eventualno mogli jednostavnije zapisati u slučaju da je Z difuzija tj. $b_t(\omega) = b(t, Z_t(\omega))$ i $\rho_t(\omega) = \rho(t, Z_t(\omega))$. No ovdje Z općenito ne treba biti Markovljev tj. b i ρ su predvidljivi procesi koji ovise o možda cjelokupnoj prošlosti od Z .*

No ni difuzijski proces ne bi dao strogu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za G na $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z}$ (nosač od Z_t bi mogao biti strogi podskup od \mathcal{Z} za neki t)

Prisjetimo se činjenice da postoji 1-1 korespondencija izmedu Itôvih procesa Z koji počinju iz Z_0 (do na nerazlučivost) i ekvivalentnih klasa od b i ρ s obzirom na $dt \otimes dP$ -nul skupove u \mathcal{P} . Sada mozemo izreći problem (P1) iz uvoda kao sljedeći problem:

(P1') Za danu familiju \mathcal{G} za koji izbor koeficijenata b i ρ dobijemo konzistentan Itôv proces Z koji počinje iz Z_0 .

U nastavku poglavlja ćemo se baviti tim pitanjem za Nelson-Siegelove familije.

2.2 Primjena na Nelson-Siegelove familije

Pokazat ćemo na primjeru Nelson-Siegelovih familija da je jednadžba (2.7) dosta restriktivna u smislu da za danu vrstu familije krivulja, ukoliko želimo da vrijedi uvjet konzistencije, jednadžba (2.7) može rezultirati velikim ograničenjem na proces Z . To slijedi iz činjenice što ona vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}_+$ na skupu pune mjere. Naime za svaki fiksni (t, ω) iz tog skupa mora vrijediti linearna zavisnost po x -u nekih parcijalnih derivacija i integrala. Sljedeći rezultati se mogu pronaći u [10].

Teorem 2.5. *Neka je Z konzistentan sa familijom $G(x, z) = z_1 + z_2 e^{-z_4 x} + z_3 x e^{-z_4 x}$, $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$, $z_4 > 0$. Tada je Z oblika:*

$$\begin{aligned} Z_t^1 &= Z_0^1 \\ Z_t^2 &= Z_0^2 e^{-Z_0^4 t} + Z_0^3 t e^{-Z_0^4 t} \\ Z_t^3 &= Z_0^3 e^{-Z_0^4 t} \\ Z_t^4 &= Z_0^4 + \left(\int_0^t b_s^4 ds + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \rho_s^{4j} d\beta_s^j \right) 1_{\Omega_0} \end{aligned}$$

za svako $0 \leq t < \infty$, gdje je $\Omega_0 := \{Z_0^2 = Z_0^3 = 0\}$

Napomena 2.6. *Na Ω_0 procesi Z^2 i Z^3 su nula. Stoga $G(x, Z_t) = Z_0^1$ na Ω_0 , tj. proces Z^4 nema utjecaja na $G(\cdot, Z_t)$ na Ω_0 . Stoga vrijedi da je pripadni proces budućih stopa kvazi-determinističan tj. sva slučajnost ostaje \mathcal{F}_0 izmjeriva.*

Napomena 2.7. *Uzeli smo stanovitu restrikciju na skup \mathcal{Z} . Iz ekonomskih razloga razumno je pretpostaviti da je $\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^m \mid \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |G(x, Z)| < \infty\}$. Stoga smo uzeli $z_4 > 0$.*

Dokaz. Neka je Z konzistentan Itôv proces dan jednadžbom

$$Z_t^i = Z_0^i + \int_0^t b_s^i ds + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \rho_s^{ij} d\beta_s^j, \quad i = 1, \dots, 4, \quad 0 \leq t < \infty \quad (2.12)$$

Dokaz teorema se zasniva na razvijanju izraza (2.7). Fiksirajmo točku (t, ω) u $[0, +\infty) \times \Omega$. Zbog jednostavnosti pišemo (z_1, z_2, z_3, z_4) za $Z_t(\omega)$, a_{ij} za $a_t^{ij}(\omega)$ i b_i za $b_t^i(\omega)$. Primjeti da je jednadžba (2.7) zapravo oblika

$$p_1(x) + p_2(x)e^{-z_4 x} + p_3(x)e^{-2z_4 x} = 0 \quad (2.13)$$

što mora vrijediti za svaku $x \geq 0$. Izrazi p_1, p_2 i p_3 označavaju neke polinome u x , koji ovise o z_i , b_i i a_{ij} . S obzirom da su funkcije $\{1, e^{-z_4 x}, e^{-2z_4 x}\}$ nezavisne nad prstenom polinoma (2.13) može biti zadovoljeno jedino ako je svaki p_i nula. To opet

daje da koeficijenti od p_i trebaju biti nula. Da nastavimo analizu popisat ćemo izraze koji se pojavljuju u jednadžbi (2.7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}G(x,z) &= (-z_2z_4 + z_3 - z_3z_4x)e^{-z_4x} \\ \nabla_z G(x,z) &= (1, e^{-z_4x}, xe^{-z_4x}, (-z_2x - z_3x^2)e^{-z_4x}) \\ \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} G(x,z) &= 0, \quad \text{za } 1 \leq i, j \leq 3 \\ \frac{\partial}{\partial z_4} \nabla_z G(x,z) &= (0, -xe^{-z_4x}, -x^2e^{-z_4x}, (z_2x^2 + z_3x^3)e^{-z_4x})\end{aligned}$$

Treba nam i relacija

$$\int_0^x \eta^m e^{-z_4\eta} d\eta = -q_m(x)e^{-z_4x} + \frac{m!}{z_4^{m+1}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

gdje je $q_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!} \frac{x^{m-k}}{z_4^{m+1}}$ polinom u x stupnja m .

Prvo ćemo analizirati p_1 . Dijelovi koji doprinose p_1 su oni koji sadrže $\frac{\partial}{\partial z_1} G(x, Z)$ i $\frac{\partial}{\partial z_1} G(x, Z) \int_0^x \frac{\partial}{\partial z_j} G(\eta, Z) d\eta$, za $1 \leq j \leq 4$. Točnije p_1 je oblika

$$p_1(x) = a_{11}x + \dots + b_1$$

gdje \dots stoji za dijelove koji ne ovise o x -u i sadrže faktore $a_{1j} = a_{j1}$ za $1 \leq j \leq 4$. Slijedi da je $a_{11} = 0$. Iz definicije matrice (a_{ij}) slijedi:

$$a_{1j} = a_{j1} = 0, \quad \text{za sve } 1 \leq j \leq 4$$

i stoga $b_1 = 0$.

Dijelovi koji doprinose p_3 su oni koji sadrže $\frac{\partial}{\partial z_i} G(x, Z) \int_0^x \frac{\partial}{\partial z_j} G(\eta, Z) d\eta$ za $2 \leq i, j \leq 4$. Primjetimo da stupanj od p_3 i p_2 ovisi o tome jesu li z_2 i z_3 jednaki nuli. Stoga razlikujemo četiri slučaja

- i) $z_2 \neq 0, z_3 \neq 0$
- ii) $z_2 \neq 0, z_3 = 0$
- iii) $z_2 = 0, z_3 \neq 0$
- iv) $z_2 = z_3 = 0$

slučaj i) : stupanj od p_3 je 4. Koeficijent uz x^4 u p_3 je a_{44} . Stoga zaključujemo $a_{44} = 0$ i

$$a_{4j} = a_{j4} = 0 \text{ za } 1 \leq j \leq 4$$

Stupanj od p_3 je sada dva. Koeficijent uz x^2 je $\frac{a_{33}}{z_4}$. Stoga $a_{3j} = a_{j3} = 0$ za $1 \leq j \leq 4$. Ostaje $p_3(x) = \frac{a_{22}}{z_4}$. Stoga je difuzijska matrica (a_{ij}) nula. Sada možemo pisati za p_2 :

$$p_2(x) = -b_4 z_3 x^2 + (b_3 - b_4 z_2 + z_3 z_4)x + b_2 + z_2 z_4 - z_3$$

Slijedi da je $b_4 = 0$ i

$$\begin{aligned} b_2 &= z_3 - z_2 z_4 \\ b_3 &= -z_3 z_4 \end{aligned}$$

Za druge slučajeve treba nam sljedeća lema koja je direktna posljedica formule o vremenu boravka koja se može pronaći u [21, korolar (1.6), poglavlje 6]

Lema 2.8. *Neka je proces Z zadan sa (2.12). Tada za $1 \leq i \leq 4$ vrijedi*

$$a^{ii} 1_{\{Z^i=0\}} = b^i 1_{\{Z^i=0\}} = 0, \quad dt \otimes d\mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Dokaz. Po formuli o vremenu boravka vrijedi:

$$\int_0^t 1_{Z_s^i=0} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\rho_s^{ij})^2 \right) ds = 0, \quad \text{za svaki } t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Iz toga slijedi $a^{ii} 1_{Z_i=0} = 0 dt \otimes d\mathbb{P}\text{-g.s.}$ Sada bismo htjeli zaključiti da i $b^i = 0 dt \otimes d\mathbb{P}\text{-g.s.}$ Iz neprekidnosti procesa Z^i slijedi da postoji niz vremena zaustavljanja (S_n) i (T_n) , $S_n \leq T_n$, t.d. $[S_m, T_m] \cap [S_n, T_n] = \emptyset$ ili $[S_m, T_m] \cap [S_n, T_n] = \{+\infty\}$ za sve $m \neq n$ i

$$\{Z=0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [S_n, T_n], \quad dt \otimes d\mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Postupamo analogno kao u [15, propozicija 1.32]. Definiramo niz $S(n, 1) := \inf\{t > 0 | Z_t^i = 0\}$, $T(n, p) := \inf\{t > S(n, p) | |Z_t^i| > 0\}$ i induktivno:

$$\begin{aligned} S(n, p+1) &= \inf\{t > S(n, p) \mid Z_t^i = 0 \\ &\quad \text{i } \sup_{S(n, p) \leq s \leq t} |Z_s^i| > 2^{-n}\} \end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti procesa Z^i vrijedi $\lim_{p \rightarrow \infty} S(n, p) = \infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i slijedi da $\{Z^i = 0\} = \bigcup_{n, p \in \mathbb{N}} [S(n, p), T(n, p)]$. Sada definiramo S_n i T_n na sljedeći način: poredamo $S(n, p)$ u niz; označimo taj niz sa K_n . Tada je skup $C_n = \bigcap_{0 \leq m \leq n-1} \{K_m \neq K_n\} \cup \mathcal{F}_{K_n}$ (o vremenima zaustavljanja vidi u [17]). Definiramo $S_1 := K_1$ i

$$S_n := \begin{cases} K_n, & \omega \in C_n \\ +\infty, & \text{inače} \end{cases}$$

Analogno definiramo T_n . Sada po prethodnom vrijedi:

$$\int_{S_n \wedge t}^{T_n \wedge t} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_s^{ij} d\beta_s^j \right) = 0, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Stoga:

$$0 = Z_{T_n \wedge t}^i - Z_{S_n \wedge t}^i = \int_{S_n \wedge t}^{T_n \wedge t} b_s^i ds, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

i zaključujemo da vrijedi:

$$\int_0^t 1_{Z_s^i=0} b_s^i ds = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{S_n \wedge t}^{T_n \wedge t} b_s^i ds = 0$$

za svaki $t \in \mathbb{R}_+$, \mathbb{P} -g.s. Sada opet koristeći $\pi - d$ argument dolazimo do željenog zaključka. \blacksquare

S obzirom da karakteriziramo a i b do na $dt \otimes d\mathbb{P}$ -nulskup, možemo pretpostaviti da $z_i = 0$ povlači $a_{ij} = a_{ji} = b_i = 0$, za $1 \leq j \leq 4$ i $i = 2, 3$.

slučaj ii) : Imamo $\nabla_z G(x, z) = (1, e^{-z_4 x}, x e^{-z_4 x}, -z_2 x e^{-z_4 x})$. Stoga je stupanj od p_3 2. S obzirom da je $a_{3j} = a_{j3} = b_3 = 0$ za $1 \leq j \leq 4$ koeficijent od x^2 dolazi od

$$-a_{44} \frac{\partial}{\partial z_4} G(x, z) \int_0^x \frac{\partial}{\partial z_4} G(\eta, z) d\eta = a_{44} \frac{z_2^2}{z_4} x^2 e^{-2z_4 x} + \dots$$

gdje \dots sadrži članove stupnja manjeg od 2. Stoga je $a_{4j} = a_{j4} = 0$, za $1 \leq j \leq 4$. Polinom p_3 se svodi na $p_3(x) = \frac{a_{22}}{z_4}$. Dakle slijedi da je i u ovom slučaju difuzijska matrica nula.

slučaj iii) : S obzirom da je $a_{2j} = a_{j2} = b_2 = 0$, za $1 \leq j \leq 4$, slobodni koeficijent od p_2 je $-z_3$. Zaključujemo da $z_2 = 0$ povlači $z_3 = 0$ pa ovaj slučaj odbacujemo.

slučaj iv) U ovom slučaju je $a_{ij} = b_k = 0$, za sve $(i, j) \neq (4, 4)$ i $k \neq 4$. U ovom slučaju vrijedi i $\frac{\partial}{\partial z_4} G(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, z) = 0$. Stoga $p_2(x) = p_3(x) = 0$, nezavisno od izbora b_4 i a_{44}

Sumirajući sva 4 slučaja zaključujemo da jednadžba (2.7) povlači:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 & b_3 &= -z_3 z_4 \\ b_2 &= z_3 - z_2 z_4 & a_{ij} &= 0, \quad \text{za } (i, j) \neq (4, 4) \end{aligned}$$

Koeficijenti b_4 i a_{44} su proizvoljni realni pozitivni brojevi kad god $z_2 = z_3 = 0$. Inače $b_4 = a_{44} = 0$. Ovo mora vrijediti $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. Stoga je Z jedinstveno (na bitnom

skupu) određen i zadovoljava:

$$\begin{aligned} Z_t^1 &= Z_0^1 \\ Z_t^2 &= Z_0^2 + \int_0^t (Z_s^3 - Z_s^2 Z_s^4) ds \\ Z_t^3 &= Z_0^3 - \int_0^t Z_s^3 Z_s^4 \\ Z_t^4 &= Z_0^4 + \int_0^t b_s^4 ds + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \rho_s^{4j} d\beta_s^j \end{aligned}$$

za neke predvidljive procese b^4 i ρ^{4j} , $j = 1, 2, \dots$ za koje vrijedi $\int_0^t |b_s| + \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_s^{4j}|^2 < \infty$, \mathbb{P} -g.s. za sve konačne t i koji su nula van skupa $\{(t, \omega) | Z_t^2(\omega) = Z_t^3(\omega) = 0\}$. Primjeti da Z^2 i Z^3 zadovoljavaju (po stazama) sistem ODJ sa neprekidnim koeficijentima. Zbog jedinstvenosti rješenja oni su 0 na Ω_0 , $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. Stoga je teorem pokazan na Ω_0 . Ostaje ga pokazati na $\Omega_1 := \Omega \setminus \Omega_0$. Uvedimo vrijeme zaustavljanja $\tau := \inf\{s > 0 | Z_s^2 = Z_s^3 = 0\}$. Upravo smo argumentirali da $\Omega_0 \subset \{\tau = 0\}$. Zaustavljeni proces $Z^\tau =: Y$ zadovoljava (po stazi) sljedeći sistem stohastičkih integralnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= Z_0^1 \\ Y_t^2 &= Z_0^2 + \int_0^{t \wedge \tau} (Y_s^3 - Y_s^2 Z_0^4) ds \\ Y_t^3 &= Z_0^3 + \int_0^{t \wedge \tau} Y_s^3 Z_0^4 ds \\ Y_t^4 &= Z_0^4, \quad \text{za } 0 \leq t < \infty \end{aligned} \tag{2.14}$$

Upotrijebili smo činjenicu da $b^4 = b^4 1_{[\tau, \infty]}$ i $\rho^4 = \rho^4 1_{[\tau, \infty]}$. Tada zadnja jednakost slijedi iz sljedećeg elementarnog svojstva:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{t \wedge \tau} \rho_s^{4j} d\beta_s^j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t (\rho_s^{4j} 1_{[\tau, \infty]}) 1_{[0, \tau]} d\beta_s^j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \rho_s^{4j} 1_{[\tau]} d\beta_s^j = 0$$

po neprekidnosti od β^j . Sistem (2.14) ima jedinstveno rješenje za $0 \leq t \leq \infty$. S obzirom da je $Z = Y$ na slučajnom intervalu $[0, \tau]$ i s obzirom da je $Y_t \neq 0, \forall t < \infty$, \mathbb{P} -g.s. na Ω_1 , iz neprekidnosti od Z slijedi da je $\Omega_1 = \{\tau > 0\} = \{\tau = \infty\}$. Sada je teorem dokazan i na Ω_1 ■

Cijelo vrijeme smo radili pod pretpostavkom da je \mathbb{P} martingalna mjera tj. Z je konzistentan sa \mathcal{G} . Prirodno se i pitati: što ako uzmemo Z takav da je Itôv proces pod objektivnom mjerom tj. e-konzistentan sa \mathcal{G} ? U slučaju da je naša filtracija \mathcal{F}_t ona koja je generirana sa Brownovim gibanjem imamo sljedeći rezultat.

Teorem 2.9. Neka je $(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t^W)$. Tada teorem (2.5) ostaje valjan ako konzistentnost zamjenimo sa e-konzistentnošću. Posebno vrijedi da je odgovarajući proces budućih stopa deterministički.

Dokaz. Neka je Z e-konzistentan Itôv proces pod \mathbb{P} i neka je \mathbb{Q} odgovarajuća martingalna mjera. Označimo sa:

$$D_t := \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}_t}$$

gdje su \mathbb{Q}_t i \mathbb{P}_t odgovarajuće mjere restringirane na \mathcal{F}_t . D_t je uniformno integrabilan martingal. Koristeći rezultat vezan za Girsanovljev teorem iz [21] (prop. 1.2, poglavljje 8) zaključujemo da je D strogo pozitivan \mathbb{P} -g.s. Sada znamo da postoji jedinstven neprekidan lokalni martingal L takav da:

$$D_t = \exp \left(L_t - \frac{1}{2} \langle L, L \rangle_t \right)$$

(vidi [21, Propozicija 1.6 poglavljje 8]). S obzirom da je $(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t^W)$ slijedi da svi \mathbb{P} -martingali imaju predvidljivu reprezentaciju (vidi [21] poglavljje 5-rezultati se prirodno prošire i za beskonačnodimenzionalni W), pa to možemo primjeniti i na L_t , tj. postoji predvidljiv proces $H_s \in \mathcal{L}^{\text{loc}}$ takav da $L_t = \int_0^t H_s dW_s$. Sada koristeći Girsanovljevu transformaciju imamo da je Z Itôv proces i pod mjerom \mathbb{Q} .

S obzirom da se \mathcal{F}_0^W sastoji od skupova mjere 0 ili 1 procesi Z^1, Z^2 i Z^3 su (nakon promjene Z_0^i na skupu mjere 0) čisto deterministički i stoga i procesi $B(t, T)$. ■

U ovom poglavljju smo pokazali da Nelson-Siegelove familije nisu dobre za korištenje u HJM modelima (ukoliko koristimo Itôv proces za parametar). Može se pokazati i da puno općenitija familija krivulja također daje sličan rezultat (tzv. eksponencijalno-polinomijalne familije koje sadrže u sebi i Nelson-Siegel i Svensson familije). Dokaz je napravljen u [11] i tehnički je dosta složen iako ne koristi druge ideje osim onih koje su korištene pri dokazu od (2.5).

Poglavlje 3

HJM model: pogled iz beskonačnodimenzionalnog prostora

Ovo poglavlje ćemo posvetiti definiciji HJM modela. Proces budućih stopa ćemo zadati na nekom separabilnom Hilbertovom prostoru i dobiti neke tehničke uvjete na taj prostor da bi naš model imao smisla. Na samom početku ćemo pokazati da je blago rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe pravi koncept za generalizaciju HJM modela iz [13]. Na kraju ćemo komentirati na koji su način standarni modeli iz uvoda (Vasiček, CIR, ...) inkorporirani u HJM model.

3.1 Standarni HJM model

Neka je $W = (\beta^j)_{j \in \mathbb{N}}$ beskonačnodimenzionalno (\mathcal{F}_t) -Brownovo gibanje i definiramo podskup od \mathbb{R}^2 :

$$\Delta^2 := \{(t, T) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq T\}$$

Neka su $\alpha(t, T, \omega)$ odnosno $(\sigma^j(t, T, \omega))_{j \in \mathbb{N}}$ izmjeriva preslikavanja sa $(\Delta^2 \times \Omega, \mathcal{B}(\Delta^2) \otimes \mathcal{F})$ u $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ odnosno $(\ell^2, \mathcal{B}(\ell^2))$. Pretpostavljamo da je za svaki $T \in \mathbb{R}_+$, $\sigma(\cdot, T) \in \mathcal{L}_T^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ i $(\alpha(t, T))_{t \in [0, T]}$ predvidljiv takav da $\alpha(\cdot, T) \in L^1([0, T])\mathbb{P}\text{-g.s.}$ Pretpostavimo da za fiksni, ali proizvoljni $T \in \mathbb{R}_+$, buduće stope s vremenom dospijeća T slijede Itôv proces:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \sigma^j(s, T) d\beta_s^j, \quad t \in [0, T] \quad (3.1)$$

Ovdje je $f(0, \cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ neslučajna početna krivulja budućih stopa. U klasičnom modelu imamo $\sigma^j \equiv 0$ za $j > d$, za neki $d \in \mathbb{N}$.

Sistem (3.1) predstavlja sistem beskonačno mnogo Itôvih procesa indeksiranih sa $T \in \mathbb{R}_+$. Ovdje pokušavamo taj proces transformirati u jedan beskonačnodimenzijski proces. Heath, Jarrow i Morton daju u [13] dovoljne tehničke uvjete da procesi $B(t, T)$ i $B(t)$ slijede Itôv proces. Ovdje ćemo to napraviti koristeći aparate funkcionalne analize

3.2 Musielina parametrizacija

U uvodu smo vec govorili o koristi od Musieline parametrizacije. Neka je $r_t(x) = f(t, x + t)$ gdje $x \geq 0$ označava vrijeme do dospijeća. Sada ćemo vidjeti kako HJM se dinamika (3.1) može izraziti na jeziku stohastičke jednadžbe na beskonačnodimenzijsnom prostoru. Neka $\{S(t)|t \in \mathbb{R}_+\}$ označava polugrupu desnih pomaka koja je definirana sa $S(t)f(x) = f(x + t)$, gdje je $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Fiksirajmo $t, x \in \mathbb{R}_+$. Tada se (3.1) može zapisati kao

$$\begin{aligned} f(t, x + t) &= S(t)f(0, x) + \int_0^t S(t-s)\alpha(s, x+s)ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t S(t-s)\sigma^j(s, x+s)d\beta_s^j \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdje $S(t)$ djeluje na $f(0, x)$, $\alpha(s, x+s)$ i $\sigma^j(s, x+s)$ kao funkcije po x . Prepostavit ćemo da funkcije čine Hilbertov prostor sa nekim skalarnim produktom. Radit ćemo aksiomatskim pristupom stavljajući minimalne zahtjeve na Hilbertov prostor H tako da možemo dati značenje jednadžbi (3.2) gdje je

$$r_t := f(t, . + t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

smatran H -vrijednosnim procesom. Također trebamo ponovno izvesti HJM uvjet na drift. Posebno to znači da $(B(t, T))_{t \in [0, T]}$ i $B(t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ moraju slijediti Itôv proces. Da bi procesi $B(t, T)$ bili dobro definirani, jasno je da mora vrijediti $H \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Primjetimo da jednakost (3.2) vrijedi po točkama za svaki $x \in \mathbb{R}_+$. Stoga izračunavanje po točkama mora biti dobro definirano za svaki $h \in H$. U dokazu teorema morat ćemo mijenjati redoslijed integriranja i izračunavanja po točkama pa postavljamo sljedeći uvjet (prepostavke na prostor označavamo sa H , uvjete na parametre za egzistenciju rješenja sa C).

- (H1)** Funkcije $h \in H$ su neprekidne i izračunavanje po točkama $\mathcal{J}_x(h) := h(x)$ je neprekidan linearan funkcional na H , za svaki $x \in \mathbb{R}_+$

Sada ćemo dati direktnu posljedicu prepostavke **(H1)**.

Lema 3.1. Za svaki $u \in \mathbb{R}_+$ postoji konstanta $k(u)$ takav da:

$$\|\mathcal{J}_x\|_H \leq k(u), \quad x \in [0, u]$$

Nadalje preslikavanje $(x, h) \rightarrow \mathcal{J}_x(h) : \mathbb{R}_+ \times H \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidno.

Dokaz. Neka je $u \in \mathbb{R}_+$. Po pretpostavci **(H1)**, $\sup_{x \in [0, u]} |\mathcal{J}_x(h)| < \infty$ za svaki $h \in H$. Sada Banach-Steinhausov teorem (vidi [22] teorem 2.6) daje egzistenciju konstante $k(u)$.

Drugi dio leme slijedi iz činjenice da je:

$$|\mathcal{J}_{x_n}(h_n) - \mathcal{J}_x(h)| \leq \|\mathcal{J}_{x_n}\|_H \|h_n - h\|_H + |\mathcal{J}_{x_n}(h) - \mathcal{J}_x(h)|$$

Prvi dio desne strane teži u nulu zbog prvog dijela leme, a drugi dio zbog pretpostavke **(H1)**. ■

Također zbog egzistencije rješenja zahtjevamo i sljedeće:

(H2) Polugrupa $\{S(t) | t \in \mathbb{R}_+\}$ je jako neprekidna u H . Njen infinitezimalni generator označavamo sa A

Za svako $h \in D(A)$ imamo $\frac{d}{dt}S(t)h = S(t)Ah$ u H za svako $t \in \mathbb{R}_+$ (vidi [7] propozicija 3, poglavlje 17). Po **(H1)** je $\frac{d}{dt}h(t) = (Ah)(t)$ za svako $t \in \mathbb{R}_+$. Slijedi $Ah = h' \in H$. Međutim ovo povlači $h \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Stoga smo pokazali:

Lema 3.2. Pod pretpostavkama **(H1)** i **(H2)** vrijedi:

$$D(A) \subset \{h \in H \cap C^1(\mathbb{R}_+) | h' \in H\}$$

Za koeficijente u (3.2) pišemo $\alpha_t(\omega) := \alpha(t, \omega, . + t)$ i $\sigma = (\sigma^j)_{j \in \mathbb{N}}$ gdje $\sigma_t^j := \sigma^j(t, \omega, . + t)$, te stavljamo sljedeće uvjete (u skladu sa [5])

(C1) $r_0 = f(0, .)$ leži u H

(C2) Procesi α i σ su H -, odnosno $L_2^0(H)$ -vrijednosni predvidljivi i vrijedi

$$P \left[\int_0^t \left(\|\alpha_s\| + \|\sigma_s\|_{L_2^0(H)}^2 \right) ds < \infty \right] = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Sada (3.2) možemo pisati za svaki $t, x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_x(r_t) &= \mathcal{J}_x(S(t)r_0) + \int_0^t \mathcal{J}_x(S(t-s)\alpha_s) ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \mathcal{J}_x(S(t-s)\sigma_s^j) d\beta_s^j \\ &= \mathcal{J}_x \left(S(t)r_0 + \int_0^t S(t-s)\alpha_s ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t S(t-s)\sigma_s^j d\beta_s^j \right), \quad \mathbb{P} - \text{g.s.} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Zadnja jednakost vrijedi zbog komutacije integrala i neprekidnog operatora. Za fiksani t u jednakosti (3.3) \mathbb{P} -nulskup ovisi o x . Budući da su obje strane neprekidne u x (po **(H1)**) standardan argument daje jedan \mathbb{P} -nulskup za svaki $x \in \mathbb{R}_+$. Jednakost po točkama daje jednakost funkcija:

$$r_t = S(t)r_0 + \int_0^t S(t-s)\alpha_s ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t S(t-s)\sigma_s^j d\beta_s^j, \quad \mathbb{P} - \text{g.s.} \quad (3.4)$$

Po lemi 1.27 znamo da desna strana ima predvidljivu verziju, koju opet označavamo sa r_t . Dakle, r bi bio blago rješenje stohastičke jednadžbe:

$$\begin{cases} dr_t &= (Ar_t + \alpha_t)dt + \sum_{j \in \mathbb{N}} \sigma_t^j d\beta_t^j \\ r_0 &= f(0, .) \end{cases} \quad (3.5)$$

Stavljamo dodatnu pretpostavku:

(C3) Postoji neprekidna verzija od r kao funkcije vremena, koju opet označavamo sa r

Uvjet **(C3)** je zadovoljen ako je $S(t)$ kontrakcijska polugrupa, vidi [5, Teorem 6.10.] ili ako postavimo uvjete na σ iz leme 1.39. Primjetimo da r nije općenito Itôv proces.

Napomena 3.3. *Kombinirajući **(C2)** i **(C3)** i Lemu 3.1 zaključujemo da su slučajne varijable $r_t(\omega, x), \alpha_t(\omega, x), \sigma_t^j(\omega, x)$ $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -izmjeriva i $r_t(\omega, x)$ je neprekidno po (t, x) za \mathbb{P} -g.s. ω .*

Do sada smo promijenili klasični *HJM* okvir u duhu Musieliane parametrizacije stavljajući pri tome tehničke uvjete **(C1)** i **(C2)** na koeficijente. Proces r definiran kao neprekidno blago rješenje od (3.5) je povezan sa budućim stopama preko jednadžbe

$$r_t(x) = f(t, x + t) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Od sada su procesi cijena obveznica i proces rasta novca dani sa:

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \exp \left(- \int_0^{T-t} r_s(x) dx \right), \quad (t, T) \in \Delta^2 \\ B(t) &= \exp \left(\int_0^t r_s(0) ds \right), \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

3.3 HJM uvjet na drift

S obzirom da r nije općenito H -vrijednosni Itôv proces ne možemo direktno koristiti Itôvu formulu za dobiti dinamiku od $B(t, T)$. Ovdje radimo manipulacije sa slučajnim procesom $(r_t(x))_{t,x \in \mathbb{R}_+}$ i primjenjujemo stohastički Fubinijev teorem koji nam govori kada možemo zamijeniti stohastički i običan integral. Također dajemo i dovoljne uvjete za egzistenciju ELMM.

Na početku ćemo uvesti funkcional \mathcal{I}_u na H definiran sa:

$$\mathcal{I}_u(h) := \int_0^u h(x)dx, \quad u \in \mathbb{R}_+$$

Kao direktnu posljedicu od **(H1)** dobivamo:

Lema 3.4. *Linearan funkcional \mathcal{I}_u je neprekidan na H . Posebno:*

$$||\mathcal{I}_u|| \leq uk(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}_+,$$

gdje je $k(u)$ konstanta iz leme 3.1.

Nadalje, preslikavanje $\mathcal{I}_u(h) : \mathbb{R}_+ \times H \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidno.

Dokaz. Ocjena je trivijalna. Dokaz za drugu ocjenu slijedi dokaz leme 3.1 ■

Iz uvjeta **(C3)** i leme 3.4 slijedi da je $B(t, T) = \exp(-\mathcal{I}_{T-t}(r_t)) \mathcal{F}_t$ -izmjerivo i neprekidno po $(t, T) \in \Delta^2$. Fiksirajmo $(t, T) \in \Delta^2$. Tada imamo po (3.4), lemi 3.4:

$$\begin{aligned} I &:= -\log B(t, T) \\ &= \mathcal{I}_{T-t}(S(t)r_0) + \int_0^t \mathcal{I}_{T-t}(S(t-s)\alpha_s)ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \mathcal{I}_{T-t}(S(t-s)\sigma_s^j)d\beta_s^j \\ &= \mathcal{I}_T(r_0) - \mathcal{I}_t(r_0) + \int_0^t (\mathcal{I}_{T-s}(\alpha_s) - \mathcal{I}_{t-s}(\alpha_s))ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t (\mathcal{I}_{T-s}(\sigma_s^j) - \mathcal{I}_{t-s}(\sigma_s^j))d\beta_s^j, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.} \end{aligned}$$

gdje smo uzeli u obzir jasnu relaciju $\mathcal{I}_u \circ S(t) = \mathcal{I}_{t+u} - \mathcal{I}_t$. Procesi $(\mathcal{I}_{T-s}(\sigma_s^j))_{s \in [0, T]}$ su predvidljivi i :

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\mathcal{I}_{T-s}(\sigma_s^j(\omega))|^2 \leq (Tk(T))^2 \sum_{j \in \mathbb{N}} ||\sigma_s^j(\omega)||_H^2 < \infty, \quad \forall (s, \omega) \in [0, T] \times \Omega$$

Stoga je $(\mathcal{I}_{T-s} \circ \sigma_s)_{s \in [0, T]}$ ℓ^2 -vrijednosni predvidljiv. Slično dobijemo:

$$\mathbb{P} \left[\int_0^T \sum_{j \in \mathbb{N}} |\mathcal{I}_{T-s}(\sigma_s^j)|^2 ds < \infty \right] = 1,$$

te stoga $(\mathcal{I}_{T-s} \circ \sigma_s) \in \mathcal{L}_T^{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Zamijenjujući T sa t također vidimo $(\mathcal{I}_{t-s} \circ \sigma_s)_{s \in [0,t]} \in \mathcal{L}_t^{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Zbog linearnosti možemo razdvojiti integrale i pisati

$$I = I_1 - I_2, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

gdje je

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{I}_T(r_0) + \int_0^t \mathcal{I}_{T-s}(\alpha_s) ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \mathcal{I}_{T-s}(\sigma_s^j) d\beta_s^j \\ I_2 &= \mathcal{I}_t(r_0) + \int_0^t \mathcal{I}_{t-s}(\alpha_s) ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \mathcal{I}_{t-s}(\sigma_s^j) d\beta_s^j. \end{aligned}$$

Integrale u I_2 trebamo transformirati. Uvodimo preslikavanja :

$$\tilde{\sigma}_s^j(\omega, u) := \begin{cases} \sigma_s^j(\omega, u-s), & \text{ako } s \leq u \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Zamijenjujući $u = x + s$ imamo:

$$\mathcal{I}_{t-s}(\sigma_s^j) = \int_0^{t-s} \sigma_s^j(x) dx = \int_s^t \sigma_s^j(u-s) du = \int_0^t \tilde{\sigma}_s^j(u) du.$$

Zbog napomene 3.3, $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_s^j)_{j \in \mathbb{N}}$ je izmjerivo sa $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ u $(\ell^2, \mathcal{B}(\ell^2))$. Po lemi 3.1 i **(C2)** imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^t \|\tilde{\sigma}_s\|_{\ell^2}^2 duds &= \int_0^t \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{N}} |\tilde{\sigma}_s^j(u)|^2 duds \\ &= \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\int_0^{t-s} |\sigma_s^j(x)|^2 dx \right) \\ &\leq t(k(t)^2 \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\sigma_s^j\|_H^2 ds) < \infty \end{aligned}$$

Stohastički Fubinijev teorem 1.18 sada povlači:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \mathcal{I}_{t-s}(\sigma_s^j) d\beta_s^j &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \left(\int_0^t \tilde{\sigma}_s^j(u) du \right) d\beta_s^j \\ &= \int_0^t \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \tilde{\sigma}_s^j(u) d\beta_s^j \right) du \\ &= \int_0^t \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^u \sigma_s^j(u-s) d\beta_s^j \right) du, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Upotrijebljavajući obični Fubinijev teorem zaključujemo:

$$\int_0^t \mathcal{I}_{t-s}(\alpha_s) ds = \int_0^t \left(\int_0^u \alpha_s(u-s) ds \right) du, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.} \quad (3.7)$$

Kombinirajući (3.6) i (3.7) možemo pisati:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^t \mathcal{J}_0 \left(S(u)r_0 + \int_0^t S(u-s)\alpha_s ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^u S(u-s)\sigma_s^j d\beta_s^j \right) du \\ &= \int_0^t r_u(0) du, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Uzimajući u obzir $\mathcal{I}_T(r_0) = -\log B(0, T)$ dolazimo do sljedeće reprezentacije:

$$\begin{aligned} \log B(t, T) &= \log B(0, T) + \int_0^t (r_s(0) - \mathcal{I}_{T-s}(\alpha_s)) ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t (-\mathcal{I}_{T-s}(\sigma_s^j)) d\beta_s^j, \quad \mathbb{P}\text{-g.s., } \forall (t, T) \in \Delta^2 \end{aligned}$$

S obzirom da je $B(t, T)$ neprekidna na $(t, T) \in \Delta^2$, \mathbb{P} -nulskup može biti izabran za svaki $T \in \mathbb{R}_+$ neovisno o $t \in [0, T]$. Slijedi da je $(\log B(t, T))_{t \in [0, T]}$ realan Itôv proces. Stoga je i proces $(\log B(t, T) - \log B(t))_{t \in [0, T]}$ realan Itôv. Primjenjujući Itôvu formulu na funkciju e^x dobivamo jednadžbu za proces cijena obveznica:

$$\begin{aligned} B(t, T) &= B(0, T) + \int_0^t B(s, T) \left(r_s(0) - \mathcal{I}_{T-s}(\alpha_s) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mathcal{I}_{T-s}(\sigma_s^j))^2 \right) ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t B(s, T) (-\mathcal{I}_{T-s}(\sigma_s^j)) d\beta_s^j, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Za diskontirani proces cijena obveznica $Z(t, T) := B(t, T)/B(t)$ imamo

$$\begin{aligned} Z(t, T) &= B(0, T) + \int_0^t Z(s, T) \left(-\mathcal{I}_{T-s}(\alpha_s) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mathcal{I}_{T-s}(\sigma_s^j))^2 \right) ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t Z(s, T) (-\mathcal{I}_{T-s}(\sigma_s^j)) d\beta_s^j, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sljedeće preslikavanje će igrati važnu ulogu. Za neprekidnu funkciju f na \mathbb{R}_+ definiramo neprekidnu funkciju $\mathcal{S}f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sa

$$(\mathcal{S}f)(x) := f(x) \int_0^x f(\eta) d\eta, \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (3.11)$$

Lema 3.5. Neka je $\Phi = (\Phi^j)_{j \in \mathbb{N}} \in L_2^0(H)$. Tada je $f(x) := \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mathcal{I}_x(\Phi^j))^2$ neprekidno diferencijabilna funkcija po $x \in \mathbb{R}_+$ sa derivacijom

$$f'(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}\Phi^j)(x)$$

Oba reda konvergiraju uniformno po x na kompaktima.

Dokaz. Stavimo $f_n(x) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathcal{I}_x(\Phi^j))^2$ što je očito neprekidno diferencijabilna funkcija po $x \in \mathbb{R}_+$ sa:

$$f'_n(x) = \sum_{j=1}^n (\mathcal{S}\Phi^j)(x)$$

Štoviše, za $m, n \in \mathbb{N}, m < n$ imamo:

$$|f_n(x) - f_m(x)| + |f'_n(x) - f'_m(x)| \leq (\|\mathcal{I}_x\|_H^2 + \|\mathcal{J}_x\|_H \|\mathcal{I}_x\|_H) \sum_{j=m+1}^n \|\Phi^j\|_H^2$$

što teži u nulu za $m, n \rightarrow \infty$ uniformno po x na kompaktima po lemmama (3.1) i (3.4). Sada slijedi da funkcija $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ postoji i da je neprekidno diferencijabilna po $x \in \mathbb{R}_+$ sa derivacijom $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ ■

Znamo da pod martingalnom mjerom \mathbb{Q} procesi $(Z(t, T))_{t \in [0, T]}$ čine lokalni martingal.

Lema 3.6. Diskontirani proces cijena obveznica $(Z(t, T))_{t \in [0, T]}$ slijedi lokalni martingal, za svaki $T \in \mathbb{R}_+$, ako i samo ako vrijedi:

$$\alpha = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{S}\sigma^j, \quad dt \otimes d\mathbb{P}\text{-g.s.} \quad (3.12)$$

Dokaz. Neka je $T \in \mathbb{R}_+$. Po [21, Propozicija (1.2)], $(Z(t, T))_{t \in [0, T]}$ je lokalni martingal ako i samo ako je integral uz ds u (3.10) jednak 0. S obzirom da je $Z(s, T) > 0$ to je ekvivalentno sa:

$$\mathcal{I}_{T-t}(\alpha_t) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mathcal{I}_{T-t}(\sigma_t^j))^2, \quad dt \otimes d\mathbb{P}\text{-g.s.} \quad (3.13)$$

(vidi dokaz od (2.10)). $dt \otimes d\mathbb{P}$ -nulskup ovisi o T . Standarnim argumentom, gledajući racionalne T , nalazimo $dt \otimes d\mathbb{P}$ i gusti podskup $A \subset \mathbb{R}_+$ takav da $\mathcal{N} \in \mathcal{P}$ i:

$$\mathcal{I}_x(\alpha_t(\omega)) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mathcal{I}_x(\sigma_t^j(\omega)))^2, \quad \forall (t, \omega, x) \in \mathcal{N}^c \times A$$

Po lemi 3.5 je desna strana diferencijabilna po x , a očito je to i lijeva. Dakle jednakost vrijedi za svaki x . Deriviranje daje tvrdnju leme. ■

Primjetimo da lema (3.6) zbog uvjeta na koeficijente **(C2)** zahtjeva dodatne pretpostavke na izmjjerivost i integrabilnost na $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{S}\sigma^j$. Njihova valjanost slijedi iz sljedećih pretpostavki:

(C4) Procesi $\mathcal{S}\sigma^j$ su H -vrijednosni i predvidljivi

(H3) Postoji konstanta K takva da:

$$\|\mathcal{S}h\|_H \leq K\|h\|_H^2$$

za svako $h \in H$ takvo da $\mathcal{S}h \in H$.

Inače ćemo razlikovati objektivnu mjeru \mathbb{P} i martingalnu mjeru \mathbb{Q} i smatrati ćemo da se događaji na tržištu dešavaju pod objektivnom mjerom \mathbb{P} . Sljedeći uvjet osigurava egzistenciju ELMM:

(C5) Postoji ℓ^2 -vrijednosni predvidljivi proces $\gamma = (\gamma^j)_{j \in \mathbb{N}}$ koji zadovoljavaju Novikovljev uvjet

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma^j \sigma^j = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{S}\sigma^j - \alpha, \quad dt \otimes d\mathbb{P}\text{-g.s.} \quad (3.14)$$

Po Hölderovoju nejednakosti i lemi (3.1), red

$$\mathcal{J}_x \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma_t^j \sigma_t^j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma_t^j \mathcal{J}_x(\sigma_t^j)$$

konvergira uniformno po x na kompaktima. Uzimajući u obzir lemu (3.5), integriranjem iz (3.14) dobivamo:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma_t^j \mathcal{I}_{T-t}(\sigma_t^j) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\mathcal{I}_{T-t}(\sigma_t^j) \right)^2 - \mathcal{I}_{T-t}(\alpha_t), \quad \forall T \geq t, \quad dt \otimes d\mathbb{P}\text{-g.s.} \quad (3.15)$$

Postoji intuitivna interpretacija od $-\gamma$ kao tržišne cijena rizika (vidi [1]). Naime promatrajući proces cijena obveznica (3.9) vidimo da možemo interpretirati desnu stranu od (3.14) kao razliku između prosječnog porasta relativne vrijednosti $E\left[\frac{dB(t, T)}{B(t, T)}\right]$ i kratkoročne stope $r_t(0)$. Stoga za $-\gamma_t^j$ kažemo da je tržišna cijena rizika mjerena u jedinicama volatilnosti.

Uvjet **(C5)** dopušta primjenu Novikovljevog kriterija. Definiramo mjeru $\mathbb{Q} \curvearrowright \mathbb{P}$ sa:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(\gamma \cdot W)_\infty,$$

Girsanovljev teorem sada daje da je:

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \gamma_s ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

Wienerov proces pod mjerom \mathbb{Q} gdje je $\tilde{W}_t \equiv (\tilde{\beta}_t)$.

Propozicija 3.7. *Pod gornjim uvjetima r zadovoljava*

$$r(t) = S(t)r_0 + \int_0^t \left(S(t-s) \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{S} \sigma_s^j \right) ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t S(t-s) \sigma_s^j d\tilde{\beta}_s^j \quad (3.16)$$

s obzirom na \mathbb{Q} . Dakle \mathbb{Q} je ELMM.

Dokaz. Tvrđnja za r_t slijedi kombinirajući (3.4) i (3.14). Lema (3.6) daje tvrdnju za \mathbb{Q} . ■

3.4 Što je model?

Za model želimo koristiti opis budućih stopa r kao rješenja stohastičke diferencijske jednadžbe (3.5) sa koeficijentima $\alpha_t(\omega) = \alpha(t, \omega, r_t(\omega))$ i $\sigma_t(\omega) = \sigma(t, \omega, r_t(\omega))$ s proizvoljnom početnom krivuljom budućih stopa r_0 .

Da ne bismo ulazili u pitanja egzistencije stohastičke eksponencijalne funkcije (vidi [20, Poglavlje 10]) zadajemo volatilnost σ i tržišnu vrijednost rizika $-\gamma$. Drift nam je tada definiran sa (3.14). Propozicija 3.7 osigurava egzistenciju ELMM. Kao što vidimo iz (3.16), γ se ne pojavljuje u \mathbb{Q} -dinamici od r .

Stoga, umjesto da riješavamo (3.5) direktno radije počinjemo sa Wienerovim procesom pod \mathbb{Q} , riješimo (3.16) i transformiramo $\tilde{W} \rightsquigarrow W$ po Girsanovom teoremu i dobijemo dinamiku od r pod \mathbb{P} . Na taj će način objektivna tržišna mjera \mathbb{P} i Wienerov proces W ovisiti o r preko $\gamma_t(\omega) = \gamma(t, \omega, r_t(\omega))$. No ipak će W biti adaptiran na \mathcal{F}_t . U ovom poglavlju ionako nismo trebali da filtracija \mathcal{F}_t bude ona generirana sa W .

Dakle, neka je dan potpun vjerojatnosni prostor

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{Q})$$

sa filtracijom koja zadovoljava uobičajene uvjete (posebno vrijedi $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$). Mjera \mathbb{Q} će biti martingalna mjera. Neka je $\tilde{W} = (\tilde{\beta}^j)_{j \in \mathbb{N}}$ beskonačnodimenzionalno (\mathcal{F}_t)-Brownovo gibanje pod \mathbb{Q} . Slučajna preslikavanja $\sigma(t, \omega, h)$ (volatilnost) i $-\gamma(t, \omega, h)$ (tržišna cijena rizika) su zadani sljedećim uvjetima:

- (D1) Preslikavanja σ i γ su izmjeriva sa $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times H, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(H))$ u $(L_2^0(H), \mathcal{B}(L_2^0(H)))$, odnosno $(\ell^2, \mathcal{B}(\ell^2))$

(D2) Preslikavanja $\mathcal{S}\sigma^j$ su izmjeriva sa $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times H, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(H))$ u $(H, \mathcal{B}(H))$

(D3) Postoji funkcija $\Gamma \in L^2(\mathbb{R}_+)$ takva da:

$$\|\gamma(t, \omega, h)\|_{\ell^2} \leq \Gamma(t), \quad \forall (t, \omega, h) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times H$$

Primjetimo da pretpostavke **(D1)-(D2)** zajedno sa **(H3)** povlače da je:

$$\alpha_{HJM}(t, \omega, h) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{S}\sigma^j(t, \omega, h) \quad (3.17)$$

izmjerivo preslikavanje sa $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times H, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(H))$ u $(H, \mathcal{B}(H))$.

Definicija 3.8. Pod *HJMM jednadžbom* (*HJM jednadžba sa Musielinom parametrizacijom*) mislimo na sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu u H

$$\begin{cases} dr_t &= (Ar_t + \alpha_{HJM}(t, r_t))dt + \sigma(t, r_t)d\tilde{W}_t \\ r_0 &= h_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Definicija 3.9. Neka σ, γ zadovoljavaju **(D1)-(D3)** i neka je $I \subset H$ skup početnih krivulja budućih stopa. (σ, γ, I) zovemo (*lokalnim*) *HJM modelom* u H ako za svaku početnu točku $(t_0, h_0) \in \mathbb{R}_+ \times I$ postoji jedinstveno (*lokalno*) blago rješenje $r = r^{(t_0, h_0)}$ za t_0 pomaknutu *HJMM jednadžbu* (3.18).

Definicija je opravdana sljedećim rezultatom:

Teorem 3.10. Neka je (σ, γ, I) *HJM model*. Tada svaka točka $(t_0, h_0) \in \mathbb{R}_+ \times I$ određuje mjeru $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ i Wienerov proces W s obzirom na $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^{t_0})_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ takve da **(C1)-(C5)** vrijede za:

$$\begin{aligned} \alpha_t(\omega) &= \alpha_{HJM}(t_0 + t, \omega, r_t(\omega)) - \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma^j(t_0 + t, \omega, r_t(\omega))\sigma^j(t_0 + t, \omega, r_t(\omega)) \\ \sigma_t(\omega) &= \sigma(t_0 + t, \omega, r_t(\omega)) \\ \gamma_t(\omega) &= \gamma(t_0 + t, \omega, r_t(\omega)) \end{aligned}$$

gdje je $r = r^{(t_0, h_0)}$. Tada je \mathbb{Q} *ELMM* za \mathbb{P} .

Dokaz. Neka je $r = r^{(t_0, h_0)}$ neprekidno blago rješenje za t_0 -pomaknutu verziju od (3.18). Iz **(D3)** zaključujemo da:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \| -\gamma(t_0 + s, \omega, r_s(\omega)) \|_{\ell^2}^2 ds \leq \| \Gamma \|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 < \infty, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.19)$$

Stoga možemo primjeniti lemu 1.21 i možemo definirati mjeru $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ sa:

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \mathcal{E}(-\gamma \cdot \tilde{W}^{t_0})_\infty \quad (3.20)$$

(primjeti da $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_\infty^{(t_0)}$). Po Girsanovljevom teoremu sada imamo da je:

$$W_t = \tilde{W}_t^{t_0} + \int_0^t \gamma_s ds$$

Wienerov proces pod \mathbb{P} . Po **(H3)** i Hölderovo nejednakosti imamo:

$$\|\alpha_t\|_H \leq K \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\sigma_t^j\|_H^2 + \|\gamma_t\|_{\ell^2} \|\sigma_t\|_{L_2^0(H)} \leq (K + \frac{1}{2}) \|\sigma_t\|_{L_2^0(H)}^2 + \frac{1}{2} \|\gamma_t\|_{\ell^2}^2$$

Sada (3.19) daje **(C2)** jer je $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathcal{L}^{\text{loc}}(H)$ po definiciji blagog rješenja. Upotrebjavajući (1.27) proces r je neprekidno blago rješenje od (3.5) gdje je $f(0, .)$ zamjenjeno sa h_0 i stoga vrijedi **(C3)**. Uvjeti **(C4)-(C5)** slijede iz **(D1)-(D3)** i \mathbb{Q} je očito ELMM. ■

Napomena 3.11. Sam način na koji smo došli do formule (3.5) kao i teoremi egzistencije rješenja nam govore da je blago rješenje pravi koncept za HJM jednadžbu. Stoga je potrebno rezultate iz [2] izvesti uz mnogo blaže uvjete tj. u okvirima teorema 3.10.

Napomena 3.12. Iako su lokalni HJM modeli nekorisni za određivanje cijene derivativa, ponekad možemo dokazati samo egzistenciju lokalnog rješenja. S obzirom da ćemo ovdje govoriti o invarijantnim mnogostrukostima u lokalnom smislu za određenu stohastičku diferencijalnu jednadžbu ostavljamo u definiciji modela mogućnost za postojanje samo lokalnog rješenja.

Zadavanje početnih vrijednosti krivulja budućih stopa I nam omogućava da i klasični modeli iz uvoda budu sadržani u ovom našem modelu. Uzmimo npr. Vasičekov model iz uvoda:

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW$$

gdje je $r(t)$ kratkoročna stopa u trenutku t , a b, σ, a realni brojevi $a > 0$. U [1, Propozicija 17.3] je pokazano da odgovarajući proces cijena obveznica izgleda ovako

$$B(t, T) = e^{K_1(t, T) - K_2(t, T)r(t)}$$

gdje

$$\begin{aligned} K_1(t, T) &= \frac{1}{a} \{1 - e^{-a(T-t)}\} \\ K_2(t, T) &= \frac{\{K_1(t, T) - T + t\}(ab - \frac{1}{2}\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 K_1^2(t, T)}{4a} \end{aligned}$$

Iz jednadžbi vidimo da zadavanje dinamike kratkoročnih stopa daje određenu restrikciju i na to kako mogu izgledati početne krivulje budućih stopa. Drugim riječima kada Vasičekov model prevodimo u okvir HJM modela ne samo da moramo voditi računa o koeficijentima HJM jednadžbe već i o početnom uvjetu. Slična stvar vrijedi i za CIR model kao i za sve druge koji stavljačju restrikciju na početni uvjet (Ho-Leejev model nije takav kao što smo vidjeli u uvodu).

Poglavlje 4

Prostori H_w

Želimo ponuditi prostor(e) koji zadovoljavaju svojstva iz prethodnog poglavlja i koji su razumni da bi bili prostori krivulja budućih stopa. Želimo imati i lako provjerljiv kriterij da volatilnost daje lokalni HJM model. Dakako da ćemo koristiti teoreme egzistencije i provjeravati Lipschitzovost i lokalnu ograničenost. Ali ako je $\sigma(t, \omega, h)$ lokalno ograničena i lokalno Lipschitz neprekidna u h , što možemo reći o $\alpha_{HJM}(t, \omega, h)$ (vidi (3.17)). U ovom poglavlju uvodimo klasu Hilbertovih prostora H_w koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- H_w zadovoljavaju prepostavke **H1-H3** iz prethodnog poglavlja
- H_w nije proturječan sa našim znanjem kako izgledaju krivulje budućih stopa
- H_w je pogodan za provjeravanje lokalne egzistencije i jedinstvenosti za HJMM jednadžbu (3.18)

4.1 Definicija H_w

Razumno je za krivulje budućih stopa prepostaviti da imaju kvadratno integrabilne derivacije tj. da vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}_+} |r'_t(x)|^2 < \infty$$

To se podudara sa našom intuicijom da se krivulja izravnava kada x ide u beskonačno. Mi ćemo još dodati i težine tj. za neku rastuću funkciju w sa svojstvom $w(x) \geq 1$ ćemo prepostaviti da vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}_+} |r'_t(x)|^2 w(x) < \infty$$

Međutim to ne definira normu jer ne razlikujemo konstantne funkcije. Stoga dodajemo kvadrat kratkoročne stope $|r_t(0)|^2$. Dat ćemo formalni pristup. Podsjetimo se

nekih činjenica iz analize. Neka je $h \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Slaba derivacija $h' \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ od h , ako postoji, je jedinstveno određena sa svojstvom:

$$\int_{\mathbb{R}_+} h(x)\phi'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}_+} h'(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1((0, \infty))$$

Ako h ima slabu derivaciju h' , tada postoji apsolutno neprekidni predstavnik od h , kojeg isto označavamo sa h , takav da

$$h(x) - h(y) = \int_y^x h'(u)du, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad (4.1)$$

Sljedeća definicija ima smisla:

Definicija 4.1. Neka je $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$ neopadajuća C^1 -funkcija takva da je:

$$w^{-\frac{1}{3}} \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad (4.2)$$

Pišemo

$$\|h\|_w^2 := |h(0)|^2 + \int_{\mathbb{R}_+} |h'(x)|^2 w(x)dx$$

i definiramo:

$$H_w := \{h \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+) \mid \exists h' \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+) \text{ i } \|h\|_w < \infty\}$$

Teorem 4.2. Skup H_w sa normom $\|\cdot\|_w$ čini separabilan Hilbertov prostor koji zadovoljava **(H1)-(H3)**.

Prije dokaza teorema dat ćemo primjere dopuštenih funkcija w koje zadovoljavaju uvjet (4.2).

Primjer 4.3. $w(x) = e^{\alpha x}$, za $\alpha > 0$

Primjer 4.4. $w(x) = (1+x)^\alpha$, za $\alpha > 3$

Dokaz. Jasno je da je $\|\cdot\|_w$ norma. Promotrimo separabilan Hilbertov prostor $\mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}_+)$ opremljen normom $(|\cdot|^2 + \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2)^{\frac{1}{2}}$. Linearan operator $T : H_w \rightarrow \mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}_+)$ dan sa:

$$Th = \left(h(0), h'w^{\frac{1}{2}} \right), \quad h \in H_w$$

je izometrija sa inverzom:

$$(T^{-1}(u, f))(x) = u + \int_0^x f(\eta)w^{-\frac{1}{2}}(\eta)d\eta, \quad (u, f) \in \mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}_+)$$

Stoga je H_w separabilan Hilbertov prostor.

Tvrđimo da je

$$\mathcal{D}_0 := \{f \in C^2(\mathbb{R}_+) \mid f' \in C_c^1(\mathbb{R}_+)\}$$

gust u H_w . Zaista, s obzirom da je $C_c^1(\mathbb{R}_+)$ gust u $L^2(\mathbb{R}_+)$, možemo za fiksni $h \in H_w$ odabratи aproksimirajući niz (f_n) od $h'w^{\frac{1}{2}}$ u $L^2(\mathbb{R}_+)$ takav da $f_n \in C_c^1(\mathbb{R}_+)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Stavimo $h_n := T^{-1}(h(0), f_n)$. Očito je $h_n \in \mathcal{D}_0$ i $h_n \rightarrow h$ u H_w . Odатле slijedi tvrdnja.

Budući da je w^{-1} ograničena (4.2) povlači da je $w^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Sljedeće Sobovljeve nejednakosti su ključne. Nadalje nam h označava funkciju u H_w , a konstante C_1 do C_4 su univerzalne i ovise samo o w .

Prvo dokažimo:

$$\|h'\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq C_1 \|h\|_w \quad (4.3)$$

To možemo ustanoviti iz Hölderove nejednakosti:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} |h'(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}_+} |h'(x)| w^{\frac{1}{2}}(x) w^{-\frac{1}{2}}(x) dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} |h'(x)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} w^{-1}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|h\|_w \|w^{-1}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Važna posljedica od (4.3) je da $h(x)$ konvergira ka limesu $h(\infty) \in \mathbb{R}$ za $x \rightarrow \infty$ zbog (4.1). To je dakako željeno svojstvo za krivulje budućih stopa. Za $C_2 = 1 + C_1$ lako slijedi iz (4.1) i (4.3) da:

$$\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq C_2 \|h\|_w \quad (4.4)$$

Sada uvedimo:

$$\Pi(x) := \int_x^\infty w^{-1}(\eta) d\eta$$

Zbog monotonost od w imamo:

$$\Pi(x) \leq w^{-\frac{2}{3}}(x) \int_x^\infty w^{-\frac{1}{3}}(\eta) d\eta \leq w^{-\frac{2}{3}}(x) \|w^{-\frac{1}{3}}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

i stoga iz (4.2) slijedi:

$$\|\Pi^{\frac{3}{2}} w\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \|w^{-\frac{1}{3}}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{\frac{3}{2}} < \infty \quad (4.5)$$

Štoviše

$$\|\Pi^{\frac{1}{2}}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq \|w^{-\frac{1}{3}}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^2 < \infty \quad (4.6)$$

Na isti način kao i gore pišemo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} |h(x) - h(\infty)| dx &= \int_{\mathbb{R}_+} \left| \int_x^\infty h'(\eta) w^{\frac{1}{2}}(\eta) w^{-\frac{1}{2}}(\eta) d\eta \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_x^\infty |h'(\eta)|^2 w(\eta) d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \Pi^{\frac{1}{2}}(x) dx \\ &\leq \|h\|_w \|\Pi^{\frac{1}{2}}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}\end{aligned}$$

Stoga iz (4.6) imamo:

$$\|h - h(\infty)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq C_3 \|h\|_w \quad (4.7)$$

Ponovnom upotreboom Hölderove nejednakosti možemo konačno dati ocjenu:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} |h(x) - h(\infty)|^4 w(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+} \left| \int_x^\infty h'(\eta) w^{\frac{1}{2}}(\eta) w^{-\frac{1}{2}}(\eta) d\eta \right|^4 w(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |h'(\eta)|^2 w(\eta) d\eta \right)^2 \Pi^2(x) w(x) dx \\ &\leq \|h\|_w^4 \|\Pi^{\frac{3}{2}} w\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \|\Pi^{\frac{1}{2}}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}\end{aligned}$$

Stoga, po (4.5)-(4.6) imamo:

$$\|(h - h(\infty))^4 w\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq C_4 \|h\|_w^4 \quad (4.8)$$

Sada možemo dokazati **(H1)-(H3)**. Procjena (4.4) daje neprekidnost linearne funkcionala \mathcal{J}_x za sve $x \in \mathbb{R}_+$. S obzirom da se H_w sastoji od neprekidnih funkcija (vidi (4.1)) dokazali smo **(H1)**.

Neka je $h \in H_w$ i neka je $\phi \in C_c^1((0, \infty))$. Tada polugrupa pomaka zadovoljava:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} S(t) h(x) \phi'(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+} h(x) \phi'(x-t) dx = - \int_{\mathbb{R}_+} h'(x) \phi(x-t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+} h'(x+t) \phi(x) dx\end{aligned} \quad (4.9)$$

s obzirom da je $\phi(\cdot - t) \in C_c^1((t, \infty))$. Stoga vidimo da $(S(t)h)'$ postoji i da je jednako $S(t)h'$. Sada iz (4.3) slijedi:

$$\|S(t)h\|_w^2 = |h(t)|^2 + \int_{\mathbb{R}_+} |h'(x+t)|^2 w(x) dx \leq (C_2^2 + 1) \|h\|_w^2 \quad (4.10)$$

Upotrijebili smo monotonost od w . Stoga je $S(t)h \in H_w$ i $S(t)$ je ograničena za sve $t \in \mathbb{R}_+$.

Moramo pokazati jaku neprekidnost od $S(t)$. Počinjemo sa sljedećom primjed bom. Iz (4.1) slijedi:

$$h(x+t) - h(x) = t \int_0^1 h'(x+st)ds, \quad h \in H_w \quad (4.11)$$

Neka je $g \in \mathcal{D}_0$. S obzirom da je $g' \in H_w$, (4.10) i (4.11) daju:

$$\begin{aligned} \|S(t)g - g\|_w^2 &= |g(t) - g(0)|^2 + \int_{\mathbb{R}_+} |g'(x+t) - g'(x)|^2 w(x) dx \\ &\leq |g(t) - g(0)|^2 + t^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} |g''(x+st)|^2 w(x) dx ds \\ &\leq |g(t) - g(0)|^2 + t^2 \int_0^1 \|S(st)g'\|_w^2 ds \rightarrow 0 \text{ za } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Stoga je $S(t)$ jako neprekidna na \mathcal{D}_0 . Ali za proizvoljni $h \in H_w$ i $\varepsilon > 0$ postoji $g \in \mathcal{D}_0$ takav da $\|h - g\|_w \leq \frac{\varepsilon}{4(C_2 + 1)}$. Kombinirajući to sa (4.10) dobivamo:

$$\begin{aligned} \|S(t)h - h\|_w &\leq \|S(t)(h - g)\|_w + \|S(t)g - g\|_w + \|g - h\|_w \\ &\leq (C_2 + 1) \frac{\varepsilon}{4(C_2 + 1)} + \|S(t)g - g\|_w + \frac{\varepsilon}{4(C_2 + 1)} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

za t dovoljno mali. Zaključujemo da je $S(t)$ jako neprekidna na H_w , stoga vrijedi **(H2)**.

Ostaje pokazati valjanost ojcene u **(H3)**. Neka je $h \in H_w$. Slično kao u (4.9) možemo pokazati da $(\mathcal{S}h)'(x)$ postoji i da vrijedi:

$$(\mathcal{S}h)'(x) = h'(x) \int_0^x h(\eta) d\eta + h^2(x)$$

Definiramo:

$$H_w^0 := \{h \in H_w | h(\infty) = 0\} \quad (4.12)$$

Po (4.4) H_w^0 je zatvoren podskup od H_w . Tvrdimo da:

$$\mathcal{S}h \in H_w \iff h \in H_w^0 \quad (4.13)$$

Prepostavimo da $h(\infty) > 0$. Tada postoji $x_0 \in \mathbb{R}_+$ takav da $h(x) \geq \frac{h(\infty)}{2}$ za sve $x \geq x_0$. Ali tada:

$$\mathcal{S}h(x) \geq h(x) \int_0^{x_0} h(\eta) d\eta + \left(\frac{h(\infty)}{2} \right)^2 (x - x_0), \quad \forall x \geq x_0$$

što teži u beskonačnost za $x \rightarrow \infty$. Isto razmišljanje možemo primjeniti ako $h(\infty) < 0$. Odatle nužnost u (4.13)

Obratno, pretpostavimo da je $h(\infty) = 0$. Upotrebljavajući (4.7) i (4.8) ocjenjujemo:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}h\|_w^2 &= \int_{\mathbb{R}_+} \left| h'(x) \int_0^x h(\eta) d\eta + h^2(x) \right|^2 w(x) dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}_+} \left\{ |h'(x)|^2 \left(\int_0^x |h(\eta)| d\eta \right)^2 + h^4(x) \right\} w(x) dx \\ &\leq 2(\|h\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^2 \|h\|_w^2 + C_4 \|h\|_w^4) \leq 2(C_3^2 + C_4) \|h\|_w^4 \end{aligned}$$

Stoga je $\mathcal{S}h \in H_w$ i (4.13) je pokazano. Štoviše zaključujemo da **(H3)** vrijedi sa $K = \sqrt{2(C_3^2 + C_4)}$. ■

Sada možemo identificirati generator A od $S(t)$ u H_w .

Korolar 4.5. Vrijedi $D(A) = \{h \in H_w | h' \in H_w\}$ i $Ah = h'$

Dokaz. Stavimo $\mathcal{D} := \{h \in H_w | h' \in H_w\}$. Po lemi 3.2, $D(A) \subset \mathcal{D}$. Obratno, neka je $h \in \mathcal{D}$. Primjenjujući (4.11) dobivamo:

$$\frac{h'(x+t) - h'(x)}{t} - h''(x) = \int_0^1 (h''(x+st) - h''(x)) ds$$

Stoga:

$$\begin{aligned} n(t) &:= \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{h'(x+t) - h'(x)}{t} - h''(x) \right|^2 w(x) dx \\ &\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} |h''(x+st) - h''(x)|^2 w(x) dx ds \\ &\leq \int_0^1 \|S(st)h' - h'\|_w^2 ds \rightarrow 0 \text{ za } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

po teoremu o dominiranoj konvergenciji. S obzirom da je h' neprekidna na \mathbb{R} zaključujemo da:

$$\left\| \frac{S(t)h - h}{t} - h' \right\|_w^2 = \left| \frac{h(t) - h(0)}{t} - h'(0) \right|^2 + n(t) \rightarrow 0 \text{ za } t \rightarrow 0,$$

te je stoga $h \in D(A)$ ■

Važan za HJMM jednadžbu je sljedeći rezultat:

Korolar 4.6. Preslikavanje $\mathcal{S} : H_w^0 \rightarrow H_w^0$ je lokalno Lipschitz neprekidno, to jest:

$$\|\mathcal{S}g - \mathcal{S}h\| \leq C_5(\|g\|_w + \|h\|_w)\|g - h\|_w \quad \forall g, h \in H_w^0$$

gdje konstanta C_5 ovisi samo o w .

Dokaz. Iz definicije od $\mathcal{S}h$ vidimo da je $\mathcal{S}h \in H_w^0$ za sve $h \in H_w^0$. Neka su $g, h \in H_w^0$. Upotrebljavajući Hölderovu nejednakost i (4.7)-(4.8) možemo izračunati:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}g - \mathcal{S}h\|_w^2 &= \int_{\mathbb{R}_+} \left| g'(x) \int_0^x g(\eta) d\eta - h'(x) \int_0^x h(\eta) d\eta \right. \\ &\quad \left. + g^2(x) - h^2(x) \right|^2 w(x) dx \\ &\leq 3 \int_{\mathbb{R}_+} |g'(x)|^2 \left| \int_0^x (g(\eta) - h(\eta)) d\eta \right|^2 w(x) dx \\ &\quad + 3 \int_{\mathbb{R}_+} \left| \int_0^x h(\eta) d\eta \right|^2 |g'(x) - h'(x)|^2 w(x) dx \\ &\quad + 3 \int_{\mathbb{R}_+} (g(x) + h(x))^2 w^{\frac{1}{2}}(x) (g(x) - h(x))^2 w^{\frac{1}{2}}(x) dx \\ &\leq 3(\|g\|_w^2 \|g - h\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^2 + \|h\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^2 \|g - h\|_w^2) \\ &\quad + 3\|(g + h)^4 w\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{\frac{1}{2}} \|(g - h)^4 w\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 3(C_3^2 + 2C_4)(\|g\|_w^2 + \|h\|_w^2) \|g - h\|_w^2 \end{aligned}$$

gdje smo upotrijebili nejednakost:

$$|x_1 + \cdots + x_k|^2 \leq k(|x_1|^2 + \cdots + |x_k|^2), \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.14)$$

Stavljujući $C_5 = \sqrt{3(C_3^2 + 2C_4)}$ dobivamo rezultat. ■

4.2 Kriterij za volatilnost

Radeći u prostoru H_w možemo dati jednostavan kriterij za $\sigma(t, \omega, h)$ da omogući (lokalni) HJM model.

Uvjet **(D2)** i (4.13) nas prisiljavaju da stavimo $\sigma^j \in H_w^0$. Sada nam korolar (4.6) daje sljedeći rezultat:

Lema 4.7. Neka σ zadovoljava **(D1)** sa $H = H_w$ i $L_2^0(H)$ zamijenjeno sa $L_2^0(H_w^0)$. Tada je **(D2)** također zadovoljeno.

Od sada sa σ označavamo izmjerivo preslikavanje sa $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times H_w, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(H_w))$ u $(L_2^0(H_w^0), \mathcal{B}(H_w^0))$. Za lokalnu egzistenciju i jedinstvenost dovoljno je zahtjevati lokalnu ograničenost i lokalnu Lipschitzovu neprekidnost od $\sigma(t, \omega, h)$ i $\alpha_{HJM}(t, \omega, h)$ u h . Izbor H_w dobiva na značenju zbog sljedećeg svojstva:

Lema 4.8. *i) Pretpostavimo da je $\sigma(t, \omega, h)$ lokalno ograničena i lokalno Lipschitz neprekidna u h . Tada to isto vrijedi za $\alpha_{HJM}(t, \omega, h)$.*

ii) Pretpostavimo da je $\sigma(t, \omega, h)$ Lipschitz neprekidna u h i uniformno ograničena

$$\|\sigma(t, \omega, h)\|_{L_2^0(H_w)} \leq C, \quad \forall (t, \omega, h) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times H_w \quad (4.15)$$

za neku konstantu C . Tada isto vrijedi i za α_{HJM} .

Dokaz. Zbog jednostavnosti notacije napuštamo privremeno pisanje ovisnosti σ i α_{HJM} o (t, ω) .

Neka su $h_1, h_2 \in B_R(H_w)$ i stavimo $\Delta := \|\alpha_{HJM}(h_1) - \alpha_{HJM}(h_2)\|_w$. Po koralaru (4.6) i Hölderovoje nejednakosti imamo:

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\mathcal{S}\sigma^j(h_2) - \mathcal{S}\sigma^j(h_1)\|_w \\ &\leq C_5 \sum_{j \in \mathbb{N}} (\|\sigma^j(h_1)\|_w + \|\sigma^j(h_2)\|_w) \|\sigma^j(h_1) - \sigma^j(h_2)\|_w \\ &\leq C_5 (\|\sigma(h_1)\|_{L_2^0(H_w)} + \|\sigma(h_2)\|_{L_2^0(H_w)}) \|\sigma(h_1) - \sigma(h_2)\|_{L_2^0(H_w)} \\ &\leq C_5 C(R) (\|\sigma(h_1)\|_{L_2^0(H_w)} + \|\sigma(h_2)\|_{L_2^0(H_w)}) \|h_1 - h_2\|_w \end{aligned}$$

Time su dokazane prve tvrdnje u i) i ii). Tvrđnje o ograničenosti za α_{HJM} slijede iz **(H3)**. ■

Kombinirajući leme 4.7- 4.8 sa teorema egzistencije dobivamo naš glavni rezultat za $HJMM$ jednadžbu. Označimo sa $-\gamma$ tržišnu cijenu rizika koja zadovoljava pretpostavke **(D1)** i **(D3)**

Teorem 4.9. *i) Neka je $\sigma(t, \omega, h)$ lokalno ograničena i lokalno Lipschitz neprekidna u h . Tada je (σ, γ, H_w) lokalni HJM model u H_w*

ii) Neka je $\sigma(t, \omega, h)$ Lipschitz neprekidna u h i uniformno ograničena, to jest vrijedi (4.15). Tada je (σ, γ, H_w) HJM model u H_w i svako blago rješenje $r^{(t_0, h_0)}$ za t_0 pomaknute $HJMM$ jednadžbe (3.18) je također slabo rješenje, gdje je $(t_0, h_0) \in \mathbb{R}_+ \times H_w$

Poglavlje 5

Invarijantne mnogostrukosti za stohastičku jednadžbu

U ovom poglavlju govorit ćemo o invarijantnim konačnodimenzionalnim mnogostrukostima za linearnu stohastičku diferencijalnu jednadžbu s vrijednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru. Motivaciju za taj pristup smo dali u uvodu, ali navedeni rezultati su općeniti. U prvom dijelu dat ćemo kratak pregled rezultata iz diferencijalne geometrije (konačno dimenzionalne mnogostrukosti na Banachovim prostorima) gdje nam je osnovni cilj doći do zgodne parametrizacije za mnogostruktost. U drugom dijelu ćemo navesti nužne i dovoljne uvjete za invarijantnost i vidjet ćemo da invarijantnost povlači regularnost to jest da je slabo rješenje koje živi na glatkoj konačnodimenzionalnoj mnogostrukosti nužno i jako. Na kraju ćemo uvjete za invarijantnost napisati u lokalnim koordinatama što će nam koristiti u sljedećem poglavlju gdje rješavamo problem iz uvoda.

5.1 Konačno dimenzionalne podmnogostrukosti u Banachovom prostoru

Glavni alat kojeg ćemo koristiti iz beskonačnodimenzionalne analize je teorem o inverznom preslikavanju. Dokaz tog teorema se može pronaći u [4, propozicija 4.3.1]. Neka je E refleksivan Banachov prostor, a E' njegov dual. Sa $\langle e', e \rangle$ označavamo djelovanje funkcionala e' na vektor e . Kada imamo direktnu sumu zatvorenih podprostora (vidi [18]) $E = E_1 \oplus E_2$ sa $\Pi_{(E_2, E_1)}$ označavamo odgovarajuću projekciju na E_1 . Neka su $k, m \in \mathbb{N}$. Počinjemo sa važnim korolarom teorema o inverznom preslikavanju.

Propozicija 5.1. *Neka je $\phi \in C^k(V, E)$ za neki otvoreni skup $V \subset \mathbb{R}^m$. Pretpostavimo da je $D\phi(y_0)$ injektivno za neki $y_0 \in V$. Tada je $D\phi(y_0)\mathbb{R}^m$ m-dimenzi-*

onalan potprostor od E i postoji zatvoren potprostor E_2 od E takav da vrijedi

$$E = D\phi(y_0)\mathbb{R}^m \oplus E_2$$

Štoviše postoje dvije otvorene okoline V' od $(y_0, 0)$ u $V \times E_2$ i U od $\phi(y_0)$ u E , i C^k difeomorfizam $\Psi : U \rightarrow V'$ takav da

$$\Psi \circ \phi(y) = (y, 0), \quad \forall y \in V_1 := \Pi_{\mathbb{R}^m}(V' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})) \quad (5.1)$$

gdje je $\Pi_{\mathbb{R}^m}$ projekcija na \mathbb{R}^m . Nadalje, $D\phi(y)$ je injekcija i vrijedi

$$D\phi(y)^{-1} = D\Psi(\phi(y))|_{D\phi(y)\mathbb{R}^m} \quad \forall y \in V \cap \mathbb{R}^m \quad (5.2)$$

Dokaz. Neka je $\{e_1, \dots, e_m\}$ baza od $D\phi(y_0)\mathbb{R}^m$. Svaki $z \in D\phi(y_0)\mathbb{R}^m$ ima jedinstvenu reprezentaciju $z = z_1e_1 + \dots + z_me_m$. Stavimo $\alpha_i(z) := z_i$. Svaki α_i se proširuje do neprekidnog linearog funkcionala e'_i od E' po Hahn-Banachovom teoremu. Definiramo E_2 kao presjek jezgri od e'_i . Tada je $E = D\phi(y_0)\mathbb{R}^m \oplus E_2$ i

$$\Pi_{(E_2, D\phi(Y_0)\mathbb{R}^m)} = \langle e'_1, \cdot \rangle e_1 + \dots + \langle e'_m, \cdot \rangle e_m.$$

Definiramo $\Phi : V \times E_2 \rightarrow E$ sa $\Phi(y, z) := \phi(y) + z$. Tada je $\Phi \in C^k(V \times E_2; E)$ i $D\Phi(y, z)(v_1, v_2) = D\phi(y)v_1 + v_2$ za $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^m \times E_2$. Sada je $D\Phi(y_0, 0) : \mathbb{R}^m \times E_2 \rightarrow E$ linearno, bijektivno i neprekidno, pa je i izomorfizam po teoremu o otvorenom preslikavanju (vidi [18]). Sada teorem o inverznom preslikavanju daje egzistenciju U i V' takvih da je $\Phi : V' \rightarrow U$ C^k difeomorfizam sa inverzom Ψ .

Dakle $\Psi \circ \phi(y) = \Psi \circ \Phi(y, 0) = (y, 0)$ za $y \in V_1$. Teorem o diferencijalu kompozicije daje $D\Psi(\phi(y))D\phi(y) = Id|_{\mathbb{R}^m}$. Stoga je $D\phi$ 1-1 preslikavanje i vrijedi (5.2). ■

Definicija 5.2. Preslikavanje ϕ iz Propozicije 5.1 se zove C^k ulaganje u točki y_0 . Ako je ϕ C^k ulaganje u svakoj točki $y_0 \in V$ samo kažemo da je ϕ C^k ulaganje. Ako je $\phi : V \rightarrow E$ injektivno C^k ulaganje, $V \subset \mathbb{R}^m$ otvoren, kažemo da je $\mathcal{M} := \phi(V)$ uložena m -dimenzionalna C^k mnogostruktura od E .

Definicija 5.3. Podskup $\mathcal{M} \subset E$ je m -dimenzionalna regularna C^k podmnogostruktura od E , ako za svaki $h \in \mathcal{M}$ postoji okolina U u E , otvoren podskup $V \subset \mathbb{R}^m$ i C^k preslikavanje $\phi : V \rightarrow E$ takvi da:

i) $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ je homeomorfizam

ii) $D\phi(y)$ je injektivno za svako $y \in V$

Preslikavanje ϕ se zove parametrizacija u h .

\mathcal{M} je linearna podmnogostruktura ako za svaku $h \in \mathcal{M}$ postoji linearna parametrizacija u obliku $\phi(y) = h + \sum_{i=1}^m y_i e_i$ u h .

Neka je $\phi : V \rightarrow E$ injektivno C^k ulaganje, $V \subset \mathbb{R}^m$ otvoren, tada je $\mathcal{M} = \phi(V)$ uložena mnogostruktost. Po notaciji propozicije 5.1 imamo po (5.1) da je $\phi : V_1 \rightarrow \phi(V_1)$ homeomorfizam i stoga je $\phi(V_1)$ regularna podmnogostruktost. Ipak općenito $\phi : V \rightarrow \mathcal{M}$ nije homeomorfizam. Drugim riječima biti uložena mnogostruktost ne povlači regularnu mnogostruktost. Kasnije ćemo dati primjer uložene mnogostrukosti koja nije regularna, te ćemo objasniti zašto razlikujemo ta dva pojma.
U onome što slijedi \mathcal{M} označava regularnu m -dimenzionalnu C^k podmnogostruktost od E . Kao direktnu posljedicu Propozicije 5.1 i definicije 5.3 imamo sljedeću lemu:

Lema 5.4. *Neka su $\phi_i : V_i \rightarrow U_i \cap \mathcal{M}, i = 1, 2$, dvije parametrizacije takve da $W := U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$. Tada je zamjena parametara*

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_2 : \phi_2^{-1}(W) \rightarrow \phi_1^{-1}(W)$$

C^k difeomorfizam.

Dokaz. Naravno da je $\phi_1^{-1} \circ \phi_2 : \phi_2^{-1}(W) \rightarrow \phi_1^{-1}(W)$ homeomorfizam. Neka je $y \in \phi_2^{-1}(W)$ i $r = \phi_1^{-1} \circ \phi_2(y)$. Tada je $E = D\phi_1(r)\mathbb{R}^m \oplus E_2$ po propoziciji 5.1. Stoviš postoji dvije otvorene okoline $V'_1 \subset V_1 \times E_2$ od $(r, 0)$ i $U' \subset E$ od $\phi_1(r)$ i C^k difeomorfizam $\Psi : U' \rightarrow V'_1$ takvi da $\phi_1 = \Psi^{-1}$ na $V'_1 \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Sada opet koristimo činjenicu da je ϕ_1 homeomorfizam. Stoga postoji otvoren skup $U'' \subset E$ takav da $\phi_1(\Pi_{\mathbb{R}^m}(V'_1 \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}))) = U'' \cap \mathcal{M}$. Stavimo $U := U' \cap U''$. Stoga $\phi_1^{-1} = \Psi$ na $U \cap \mathcal{M}$. Zbog neprekidnosti ϕ_2 postoji otvorena okolina $V'_2 \subset \phi_2^{-1}(W)$ od y takva da $\phi_2(V'_2) \subset U \cap \mathcal{M}$. Onda je $\phi_1^{-1} \circ \phi_2|_{V'_2} = \Psi \circ \phi_2|_{V'_2}$ C^k u $\phi_2^{-1}(W)$. Po simetriji tvrdnja slijedi. ■

Definicija 5.5. Za $h \in \mathcal{M}$ tangencijalan prostor na \mathcal{M} u h je potprostor $T_h\mathcal{M} := D\phi(y)\mathbb{R}^m$, $y = \phi^{-1}(h)$ gdje je $\phi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}$ parametrizacija u h .

Po lemi 5.4 definicija od $T_h\mathcal{M}$ je nezavisna od izbora parametrizacije.

Definicija 5.6. Vektorsko polje Δ na \mathcal{M} je preslikavanje koje svakoj točki h u \mathcal{M} pridruži element $\Delta(h)$ od $T_h\mathcal{M}$.

Vektorsko polje Δ možemo lokalno reprezentirati kao

$$\Delta(h) = D\phi(y)\alpha(y), \quad y = \phi^{-1}(h), \quad \forall h \in U \cap \mathcal{M} \tag{5.3}$$

gdje je $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ parametrizacija i α je vektorsko polje na V s vrijednostima u \mathbb{R}^m . Tako glatkoću vektorskog polja na \mathcal{M} možemo definirati preko glatkoće vektorskog polja na \mathbb{R}^m .

Definicija 5.7. Vektorsko polje Δ je klase $C^r, 0 \leq r < k$ ako je odgovarajuće vektorsko polje α iz (5.3) klase C^r .

Ponovno po lemi 5.4 ova definicija je dobra. Da se ne bismo mučili s domenama možemo parametrizaciju proširiti tako da joj domena bude cijeli \mathbb{R}^m . Neka je $h \in \mathcal{M}$ i neka je $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ parametrizacija u h . Stavimo $y = \phi^{-1}(h)$. S obzirom da je V okolina od y , postoji $\varepsilon > 0$ takav da je otvorena kugla $B_{2\varepsilon} = \{v \in \mathbb{R}^m \mid |y-v| < 2\varepsilon\}$ sadržana u V . Na $\overline{B_\varepsilon}(y)$ definiramo funkciju $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m; [0, 1])$ koja zadovoljava uvjete $\psi \equiv 1$ na $\overline{B_\varepsilon}(y)$ i $\text{supp}(\psi) \subset B_{2\varepsilon}(y)$. S obzirom da je ϕ homomorfizam postoji otvorena okolina U' od h u E takva da $\phi(B_\varepsilon(y)) = U' \cap \mathcal{M}$. Stavimo $\tilde{\phi} := \psi\phi$. Tada je $\tilde{\phi} \in C_b^k(\mathbb{R}^m; E)$ i $\tilde{\phi}|_{B_\varepsilon(y)} := \phi|_{B_\varepsilon(y)} : B_\varepsilon(y) \rightarrow U' \cap \mathcal{M}$ je parametrizacija u h . Pokazali smo sljedeće:

Napomena 5.8. Možemo pretpostaviti da se parametrizacija $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ proširuje do $\phi \in C_b^k(\mathbb{R}^m; E)$.

Neka je $h \in \mathcal{M}$. Kao što je pokazano tangencijalni podprostor $T_h\mathcal{M}$ ima zatvoren komplement u E , $E_2 = \bigcap_{i=1}^m \ker(e'_i)$, gdje je $\{e_1, \dots, e_m\}$ baza za $T_h\mathcal{M}$ i $\langle e'_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Sljedeća lema nam daje zgodnu parametrizaciju za \mathcal{M} .

Lema 5.9. Postoji parametrizacija $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ u h takva da:

$$\phi(\langle e'_1, z \rangle, \dots, \langle e'_m, z \rangle) = z, \quad \forall z \in U \cap \mathcal{M}$$

Dokaz. Neka je $\psi : V_1 \rightarrow U_1 \cap \mathcal{M}$ parametrizacija u h i pišemo $y = \psi^{-1}(h)$. Označimo sa $I_{T_h\mathcal{M}} : T_h\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ kanonski izomorfizam

$$I_{T_h\mathcal{M}} := (\langle e'_1, \cdot \rangle, \dots, \langle e'_m, \cdot \rangle)$$

Tada je preslikavanje $r := I_{T_h\mathcal{M}} \circ \Pi_{(E_2, T_h\mathcal{M})} \circ \psi : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ klase C^k i $Dr(y) = I_{T_h\mathcal{M}} \circ D\psi(y)$ je injektivno. Po teoremu o inverznom preslikavanju postaje otvorene okoline $W \subset V_1$ od y i $V \subset \mathbb{R}^m$ od $r(y)$ takve da je $r : W \rightarrow V$ C^k difeomorfizam. S obzirom da je ψ homeomorfizam postoji otvorena okolina $U \subset E$ od h takva da $\psi(W) = U \cap \mathcal{M}$. Tada je preslikavanje $\phi := \psi \circ r^{-1} : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ tražena parametrizacija u h . ■

Sljedeći rezultat je ključan za našu kasniju diskusiju i kaže nam da malo možemo nagnuti ravninu iz prethodne propozicije, a da rezultat vrijedi:

Propozicija 5.10. Neka je $D \subset E'$ gust podskup. Tada za svaki h u \mathcal{M} postoje elementi f'_1, \dots, f'_m u D i parametrizacija $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ u h takva da

$$\phi(\langle f'_1, z \rangle, \dots, \langle f'_m, z \rangle) = z, \quad \forall z \in U \cap \mathcal{M}$$

Ako je \mathcal{M} ravnina, tada je ϕ linearan: $\phi(v) = e_0 + \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^m N_{ij} v_j) e_i$, za $v \in V$, gdje je N matrica definirana na kraju dokaza propozicije.

Dokaz. Ideja je da se pronađe dekompozicija $E = F_1 \oplus F_2$, $\dim F_1 = m$, takva da F_1 nije predaleko od $T_h\mathcal{M}$ i takva da

$$\Pi_{(F_2, F_1)} = \langle f'_1, \cdot \rangle f_1 + \cdots + \langle f'_m, \cdot \rangle f_m$$

sa $f'_1, \dots, f'_m \in D$. Izraz "nije predaleko" u našem kontekstu znači da je $\Pi_{(F_2, F_1)}|_{T_h\mathcal{M}} : T_h\mathcal{M} \rightarrow F_1$ izomorfizam.

Neka je $\{e_1, \dots, e_m\}$ baza za $T_h\mathcal{M}$ i $\psi : V_1 \rightarrow U_1 \cap \mathcal{M}$ parametrizacija u h iz leme (5.9). Stavimo $y = \psi^{-1}(h)$. Možemo pretpostaviti da je $\|e_i\|_E = 1$, za $1 \leq i \leq m$. S obzirom da je D gust u E' , postoje elementi f'_1, \dots, f'_m u D takvi da $\|f'_i - e'_i\|_{E'} < 2^{-m}$, $i = 1, \dots, m$. Primjeti da po definiciji $\langle e'_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Stoga vrijedi:

$$|\langle f'_i, e_j \rangle| \leq |\langle e'_i, e_j \rangle| + |\langle f'_i - e'_i, e_j \rangle| < 2^{-m}, \quad \text{ako je } i \neq j$$

i

$$|\langle f'_i, e_i \rangle| \geq |\langle e'_i, e_i \rangle| - |\langle f'_i - e'_i, e_i \rangle| > 1 - 2^{-m}$$

Matrica $M := (\langle f'_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}$ ima elemente koji imaju velike težine u smjeru vektora kanonske baze u \mathbb{R}^m pa je stoga invertibilna. Za dokaz te tvrdnje nam treba sljedeća lema.

Lema 5.11. Neka je $\alpha = (\alpha_{i,j})$ $n \times n$ -matrica, $n \in \mathbb{N}$, koja je dijagonalno dominantna tj.

$$\begin{aligned} |\alpha_{i,i}| &\geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |\alpha_{i,j}| \\ |\alpha_{i,i}| &> \sum_{j=i+1}^n |\alpha_{i,j}| \end{aligned}$$

za sve $1 \leq i \leq n$. Tada je α regularna.

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti matematičkom indukcijom. Po pretpostavci $|\alpha_{1,1}| > \sum_{j=2}^n |\alpha_{1,j}| \geq 0$, posebno $\alpha_{1,1} \neq 0$. Ako je $n = 1$ onda smo gotovi. Ako je $n > 1$ stavimo

$$\alpha_{i,j}^{(1)} := \alpha_{i,j} - \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} \alpha_{1,j}, \quad 2 \leq i, j \leq n.$$

To nas vodi do $(n-1) \times (n-1)$ matrice $\alpha^{(1)} = (\alpha_{i,j}^{(1)})_{2 \leq i, j \leq n}$. Pokazat ćemo da $\alpha^{(1)}$ je dijagonalno dominantna. Ako je $\alpha_{i,1} = 0$ tada nemamo što dokazivati za i -ti redak. Neka je $\alpha_{i,1} \neq 0$, za neki $2 \leq i \leq n$. Imamo

$$|\alpha_{i,j}^{(1)}| \geq |\alpha_{i,j}| - \left| \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} \right| |\alpha_{1,j}|, \quad 2 \leq j \leq n.$$

Stoga

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i+1}^n |\alpha_{i,j}^{(1)}| &\leq \sum_{j=2, j \neq i}^n |\alpha_{i,j}^{(1)}| = \sum_{j=2, j \neq i}^n \left| \alpha_{i,j} - \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} \alpha_{1,j} \right| \leq \sum_{j=2, j \neq i}^n |\alpha_{i,j}| + \left| \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} \right| \sum_{j=2, j \neq i}^n |\alpha_{1,j}| \\
&= \sum_{j=1, j \neq i}^n |\alpha_{i,j}| - |\alpha_{i,1}| + \left| \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} \right| \left(\sum_{j=2}^n |\alpha_{1,j}| - |\alpha_{1,i}| \right) \\
&< |\alpha_{i,i}| - |\alpha_{i,1}| + \left| \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} \right| (|\alpha_{1,1}| - |\alpha_{1,i}|) \\
&= |\alpha_{i,i}| - \left| \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} \right| |\alpha_{1,i}| \leq |\alpha_{i,i}^{(1)}|.
\end{aligned}$$

■

Sada možemo zaključiti da je familija $\{f'_1, \dots, f'_m\}$ linearno nezavisan skup u E' . S obzirom da je E refleksivan po Hahn-Banachovom teoremu postoji linearno nezavisan skup $\{f_1, \dots, f_m\}$ u E takav da $\langle f'_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$. Stavimo $F_1 := \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$. Tada f'_i i f_i induciraju dekompoziciju $E = F_1 \oplus F_2$ sa projekcijom $\Pi_{(F_2, F_1)} = \langle f'_1, \cdot \rangle f_1 + \dots + \langle f'_m, \cdot \rangle f_m$. S obzirom da je:

$$\Pi_{(F_2, F_1)} e_j = \sum_{i=1}^m M_{ij} f_i, \text{ za } 1 \leq j \leq m$$

vidimo da je $\Pi_{(F_2, F_1)}|_{T_h \mathcal{M}} : T_h \mathcal{M} \rightarrow F_1$ izomorfizam. Neka je $I_{F_1} : F_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ kanonski izomorfizam $I_{F_1} := (\langle f'_1, \cdot \rangle, \dots, \langle f'_m, \cdot \rangle)$. Tada je preslikavanje $h := I_{F_1} \circ \Pi_{(F_2, F_1)} \circ \psi : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^k i $Dh(y) = I_{F_1} \circ \Pi_{(F_2, F_1)} \circ D\psi(y)$ je injektivno. Sada možemo nastaviti kao u lemi 5.9 da dobijemo željenu parametrizaciju ϕ u h takvu da $\phi^{-1} = I_{F_1} \circ \Pi_{(F_2, F_1)}$ na $U \cap \mathcal{M}$, za neku okolinu U od h .

Ako je \mathcal{M} linearan biramo $\psi(u) = h + \sum_{i=1}^m u_i e_i$. Lagano se vidi da je dobivena parametrizacija u ovoj lemi dana sa:

$$\phi(v) = \left(h - (\Pi_{(F_2, F_1)}|_{T_h \mathcal{M}})^{-1} \circ \Pi_{(F_2, F_1)} h \right) + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m N_{ij} v_j \right) e_i$$

gdje je $N := M^{-1}$. Stavimo sada $e_0 := h - (\Pi_{(F_2, F_1)}|_{T_h \mathcal{M}})^{-1} \circ \Pi_{(F_2, F_1)} h$ i dokaz je gotov. ■

Može se pokazati da za komplement prostora E_2 iz leme 5.9 možemo uzeti bilo koji tangencijalni potprostor $T_z \mathcal{M}$, $z \in U \cap \mathcal{M}$.

Lema 5.12. Neka je $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ parametrizacija. Ako postoje elementi e'_1, \dots, e'_m u E' takvi da

$$\phi(\langle e'_1, h \rangle, \dots, \langle e'_m, h \rangle) = h, \quad \forall h \in U \cap \mathcal{M}$$

tada su e'_1, \dots, e'_m linearne nezavisne u E' i:

$$E = T_h \mathcal{M} \oplus E_2, \quad \forall h \in U \cap \mathcal{M}$$

gdje je $E_2 := \cap_{i=1}^m \ker(e'_i)$. Štoviše inducirane projekcije su dane sa

$$\Pi_{(E_2, T_h \mathcal{M})} = D\phi(y)(\langle e'_1, \cdot \rangle, \dots, \langle e'_m, \cdot \rangle), \quad y = \phi^{-1}(h), \quad \forall h \in U \cap \mathcal{M} \quad (5.4)$$

Dokaz. Definiramo $\Lambda := (\langle e'_1, \cdot \rangle, \dots, \langle e'_m, \cdot \rangle) \in L(E; \mathbb{R}^m)$. Fiksirajmo $h \in U \cap \mathcal{M}$ i neka je $y = \phi^{-1}(h)$. Po pretpostavci $\Lambda \circ \phi(v) = v$ na V , stoga $\Lambda \circ D\phi(y) = Id|_{\mathbb{R}^m}$. Sada imamo da je $\Lambda|_{T_h \mathcal{M}} : T_h \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ izomorfizam. Dakle e'_1, \dots, e'_m su nezavisni u E' .

Preslikavanje $\Pi := D\phi(y) \circ \Lambda$ zadovoljava (i) $\Pi \in L(E)$ (ii) $\ker(\Pi) = \ker(\Lambda) = E_2$, (iii) $\Pi(E) = T_h \mathcal{M}$ i (iv) $\Pi^2 = \Pi$, stoga $E = T_h \mathcal{M} \oplus E_2$ i Π je tražena projekcija. S obzirom da je $h \in U \cap \mathcal{M}$ bio proizvoljan dokaz je gotov \blacksquare

Sada ćemo izvesti rezultat koji će nam trebati za dokaze invarijantnosti. Nadalje pretpostavljamo da je \mathcal{M} C^2 mnogostruktura. Neka $B \in C^1(E)$ ima svojstvo:

$$B(h) \in T_h \mathcal{M}, \quad \forall h \in \mathcal{M}$$

t.j. $B|_{\mathcal{M}}$ je C^1 vektorsko polje na \mathcal{M} .

Fiksirajmo $h \in \mathcal{M}$ i neka je $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ parametrizacija u h . Stavimo $y = \phi^{-1}(h)$. Za $\delta > 0$ dovoljno mali krivulja:

$$c(t) := \phi(y + tD\phi(y)^{-1}B(h)), \quad t \in \langle -\delta, \delta \rangle$$

je dobro definirano i zadovoljava:

$$c : (-\delta, \delta) \rightarrow U \cap \mathcal{M}, \quad c \in C^1((-\delta, \delta); E), \quad c(0) = h, \quad c'(0) = B(h) \quad (5.5)$$

Stoga

$$\frac{d}{dt} B(c(t))|_{t=0} = DB(h)B(h) \quad (5.6)$$

Prepostavimo sada da ϕ zadovoljava pretpostavke leme 5.12. Da skratimo notaciju pišemo $\langle e', \cdot \rangle$ umjesto $(\langle e'_1, \cdot \rangle, \dots, \langle e'_m, \cdot \rangle)$.

Iz (5.4) slijedi

$$B(c(t)) = D\phi(\langle e', c(t) \rangle)(\langle e', B(c(t)) \rangle), \quad \forall t \in (-\delta, \delta) \quad (5.7)$$

Sada ćemo navesti dvije tehničke leme koje će nam trebati za računanje nekih diferencijala.

Lema 5.13. Neka su E_1 i E_2 Banachovi prostori i neka su $f : E_1 \rightarrow E_2$ i $g : E_1 \rightarrow E_2$ preslikavanja klase C^1 . Tada je i $(f, g) : E_1 \rightarrow E_2 \times E_2$ preslikavanje klase C^1 i vrijedi

$$D(f, g)(e_1)(h_1) = (Df(e_1)(h_1), Dg(e_1)(h_1))$$

Dokaz. Direktno gledajući razlike prirasta. ■

Lema 5.14. Neka su f i g kao u lemi 5.13 i $\phi : E_2 \rightarrow E_3$ preslikavanje klase C^2 . Tada je preslikavanje $k : E_1 \rightarrow E_3$ definirano sa $k(e_1) = D\phi(f(e_1))(g(e_1))$ klase C^1 i vrijedi:

$$Dk(e_1)(h_1) = D^2\phi(e_1)(Df(e_1)(h_1), g(e_1)) + D\phi(e_1)(Dg(e_1)(h_1))$$

Dokaz. Najprije primjetimo da preslikavanje $s : E_2 \times E_2 \rightarrow E_3$ određeno sa: $s(e_2, f_2) = D\phi(e_2)(f_2)$ ima diferencijal: $Ds(e_2, f_2)(h_2, k_2) = D^2\phi(e_2)(h_2, e_3) + D\phi(e_2)(k_2)$ što se provjeri direktno. Naše preslikavanje možemo gledati kao kompoziciju $s \circ (f, g)$ gdje je (f, g) preslikavanje iz prethodne leme. Koristeći sada lančano pravilo imamo tvrdnju leme. ■

Vratimo se sada izrazu (5.7). Deriviranje po t daje (koristeći prethodnu lemu i $y = \phi^{-1}(h) = \langle e', h \rangle$) :

$$\frac{d}{dt}B(c(t))|_{t=0} = D^2\phi(y)(\langle e', B(h) \rangle, \langle e', B(h) \rangle) + D\phi(y)\langle e', DB(h)B(h) \rangle \quad (5.8)$$

Kombinirajući (5.4), (5.6) i (5.8) imamo sljedeću propoziciju:

Propozicija 5.15. Neka su \mathcal{M} regularna C^2 mnogostruktost, B tangencijalno vektorsko polje klase C^1 i $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ kao iz leme 5.12. Tada je:

$$DB(h)B(h) = D\phi(y)\langle e', DB(h)B(h) \rangle + D^2\phi(y)(\langle e', B(h) \rangle, \langle e', B(h) \rangle),$$

gdje je $y = \phi^{-1}(h)$, i to je dekompozicija od vektora $DB(h)B(h)$ po $E = T_h\mathcal{M} \oplus E_2$, za sve $h \in U \cap \mathcal{M}$

5.2 Invarijantne mnogostrukosti

Neka je \mathcal{M} regularna m -dimenzionalna C^2 mnogostruktost u separabilnom Hilbertovom prostoru H . S obzirom da je H separabilan postoji prebrojiv otvoren pokrivač $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ od \mathcal{M} i za svaki k parametrisacija $\phi_k : V_k \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U_k \cap \mathcal{M}$, gdje je $\phi_k \in C_b^2(\mathbb{R}^m; H)$ (vidi [24, Lema 1.9, 1.11]). Neka je A infinitezimalni generator jako neprekidne polugrupe. Upotrebljavajući činjenicu da je $D(A^*)$ gust u H , po

propoziciji (5.10) možemo pretpostaviti da za svaki k postoji linearne nezavisane skup $\{\zeta_{k,1}, \dots, \zeta_{k,m}\}$ u $D(A^*)$ takav da:

$$\phi_k(<\zeta_{k,1}, h>, \dots, <\zeta_{k,m}, h>) = h, \quad \forall h \in U_k \cap \mathcal{M} \quad (5.9)$$

Da pojednostavimo notaciju pisat ćemo $<\zeta_k, h>$ umjesto $(<\zeta_{k,1}, h>, \dots, <\zeta_{k,m}, h>)$ i preskočiti indeks k kada nema dvosmislenosti. Također ćemo pretpostaviti da je X lokalno slabo rješenje jednadžbe:

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + F(t, X_t))dt + B(t, X_t)dW_t \\ X_0 = h_0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Iako smo rekli da je blago rješenje prava generalizacija HJM modela uvjet za slabost je tehničke prirode, a i imamo dobre teoreme egzistencije. Glavni rezultati ovog poglavlja vrijede uz neke uvjete na regularnost koje ovdje navodimo:

(A1) Postoji neprekidna verzija od X koju i dalje označavamo sa X

(A2) $B(t, \omega, \cdot) \in C^1(H, L_2^0(H))$ za svaki $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$

(A3) Za svako $t \in \mathbb{R}_+$ imamo:

$$E\left[\int_0^t (||X_s||_H + ||F(s, X_s)||_H + ||B(s, X_s)||_{L_2^0}^2)ds\right] < \infty$$

(A4) Preslikavanja $F(t, \omega, h)$ i $B(t, \omega, h)$ su lokalno ograničena i lokalno Lipschitz neprekidna u h

(A5) Prelikavanja $F(t, \omega, h)$ i $B(t, \omega, h)$ su zdesna neprekidna u t za sve $h \in H$ i $\omega \in \Omega$

Primjeti da **(A2)** povlači $B^j(t, \omega, \cdot) \in C^1(H; H)$ za bilo koje $j \in \mathbb{N}$ i vrijedi:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} ||DB^j(t, \omega, h)B^j(t, \omega, h)||^2 \leq ||DB(t, \omega, h)||_{L(H; L_2^0(H))}^2 ||B(t, \omega, h)||_{L_2^0}^2 < \infty$$

Sljedeći teoremi su ključni za ovaj rad. Prvo ćemo ih navesti, a potom u sljedećem odjeljku dokazati.

Teorem 5.16. *Neka je X lokalno slabo rješenje od (5.10) sa vremenom života τ , te pretpostavimo **(A1)** i*

$$X_{t \wedge \tau} \in \mathcal{M}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.11)$$

*Tada postoji vrijeme zaustavljanja $0 < \tau' \leq \tau$, takvo da je X lokalno jako rješenje od (5.10) sa vremenom života τ' . Ukoliko još vrijedi $\tau = \infty$ i **(A3)**, tada je X jako rješenje od (5.10).*

Ovaj nam teorem govori da ukoliko rješenje ostaje na mnogostruktosti da to povlači regularnost rješenja. Sada ćemo dati dovoljne uvjete da bi slabo rješenje X ležalo na \mathcal{M} . Uvodimo sljedeće uvjete konzistencije:

$$\mu(t, \omega, h) := Ah + F(t, \omega, h) - \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} DB^j(t, \omega, h)B^j(t, \omega, h) \in T_h\mathcal{M} \quad (5.12)$$

$$B^j(t, \omega, h) \in T_h\mathcal{M}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (5.13)$$

Primjeti da je $\mu(t, \omega, h)$ iz (5.12) dobro definirano za bilo koje $h \in D(A)$ kad god vrijedi **(A2)**.

Teorem 5.17. *Neka je X slabo rješenje od (5.10) i neka vrijedi $h_0 \in \mathcal{M}$. Pretpostavimo još **(A1)**, **(A2)** i **(A4)**. Ako je \mathcal{M} zatvorena mnogostruktost, leži u $D(A)$ i zadovoljeni su uvjeti konzistencije (5.12) i (5.13) za $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, za sve $h \in \mathcal{M}$, tada (5.11) vrijedi za $\tau = \infty$.*

Štoviše A je neprekidan na \mathcal{M} . Stoga (5.12) i (5.13) vrijede za sve $h \in \mathcal{M}$, za sve $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Dakle vidimo da uvjeti (5.12) i (5.13) zamjenjuju uvjete (9) i (10). Uvjet (5.13) je očekivan, a uvjet (5.12) dolazi zbog Itôove formule- $\mu(t, \omega, h)$ je drift u Stratonovichevom smislu (za taj pristup vidi [2]). Jasno je da je uvjet (5.11) preslab da bi povlačio uvjete (5.12) i (5.13). Umjesto toga zahtjevamo da (5.11) vrijedi za svaku prostorno-vremensku koordinatu (t_0, h_0) . Stoga imamo sljedeću definiciju:

Definicija 5.18. *Podskup $V \subset H$ zovemo lokalno invarijantnim za (5.10) ako za svaki $(t_0, h_0) \in \mathbb{R}_+ \times V$ postoji lokalno slabo rješenje $X^{(t_0, h_0)}$ od*

$$\begin{cases} dX_t &= (AX_t + F(t_0 + t, X_t))dt + B(t_0 + t, X_t)dW_t^{t_0} \\ X_0 &= h_0 \end{cases} \quad (5.14)$$

sa vremenom života $\tau = \tau(t_0, h_0)$ takvo da:

$$X_{t \wedge \tau}^{(t_0, h_0)} \in V, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Sada konačno možemo izreći ciljni teorem

Teorem 5.19. *Pretpostavimo **(A2)**, **(A4)** i **(A5)**. Tada su sljedeći uvjeti ekvivalentni:*

- i) \mathcal{M} je lokalno invarijantan za (5.10)
- ii) $\mathcal{M} \subset D(A)$ i (5.12)-(5.13) vrijede $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, za sve $h \in \mathcal{M}$
- iii) $\mathcal{M} \subset D(A)$ i (5.12)-(5.13) vrijede za sve $(t, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M}$, za \mathbb{P} -g.s. $\omega \in \Omega$.

Dakle sada imamo da je lokalna invarijantnost ekvivalentna sa uvjetima (5.12)-(5.13). Tvrđnju (iii) iz prethodnog teorema izvući ćemo iz tvrđnje (ii) standarnim odabiranjem gustog podskupa. Posebno interesantan slučaj je kada je \mathcal{M} linearna podmnogostruktur. Tada gornje rezultate možemo dobiti uz slabije uvjete.

Teorem 5.20. *Ako je \mathcal{M} m-dimenzionalna linearna podmnogostruktur, tada teoremi 5.17 i 5.19 vrijede bez pretpostavke **(A2)** i $\mu(t, \omega, h)$ u (5.13) je dan sa*

$$\nu(t, \omega, h) := Ah + F(t, \omega, h).$$

5.3 Dokazi teorema 5.16 - 5.20

Dokaz. (teorema 5.16) Prepostavimo da je X slabo rješenje, da je $\tau = \infty$ i da vrijedi **(A3)**. Fiksirajmo $T > 0$. Znamo da postoji rastući niz predvidljivih vremena zaustavljanja (vidi [9, lema 3.5]), $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T$ takvih da $\sup_n T_n = T$ i na svakom od intervala

$$[T_n, T_{n+1}] \cap \{T_{n+1} > T_n\}$$

proces X uzima vrijednosti u nekom $U_{\alpha(n)}$. Ovo vrijedi zbog **(A1)**. Sada neka je $n \in \mathbb{N}_0$ i $k = \alpha(n)$. Analizirat ćemo X lokalno na U_k . Zbog jednostavnosti izostaviti ćemo indeks k za ϕ_k, U_k, V_k i ζ_k . Definiramo sljedeće predvidljive procese s vrijednostima u \mathbb{R}^m

$$\begin{aligned} b_t &:= \langle A^* \zeta, X_t \rangle + \langle \zeta, F(t, X_t) \rangle \\ \rho_t^j &:= \langle \zeta, B^j(t, X_t) \rangle \end{aligned}$$

gdje $\langle A^* \zeta, X_t \rangle$ stoji za $(\langle A^* \zeta_1, X_t \rangle, \dots, \langle A^* \zeta_m, X_t \rangle)$. Po definiciji slabog rješenja X zaključujemo da je

$$Y_t := \langle \zeta, X_t \rangle = \langle \zeta, h_0 \rangle + \int_0^t b_s ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \rho_s^j d\beta_s^j$$

Itôv proces s vrijednostima u \mathbb{R}^m . Stoga možemo primjeniti Itôvu formulu na $\phi \circ Y$. S obzirom da $Y_{(T_n+t) \wedge T_{n+1}}$ uzima vrijednosti u V na $\{T_{n+1} > T_n\}$ imamo:

$$X_{(T_n+t) \wedge T_{n+1}} = (\phi \circ Y)_{(T_n+t) \wedge T_{n+1}} \quad \text{na } \{T_{n+1} > T_n\} \quad (5.15)$$

Kombinirajući sada (1.32) i (5.15) imamo za $\xi \in D(A^*)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{T_n}^{(T_n+t) \wedge T_{n+1}} \left(\langle A^* \xi, X_s \rangle + \langle \xi, F(s, X_s) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \xi, D\phi(Y_s) b_s + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2 \phi(Y_s)(\rho_s^j, \rho_s^j) \rangle \right) ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{T_n}^{(T_n+t) \wedge T_{n+1}} (\langle \xi, B^j(s, X_s) \rangle - \langle \xi, D\phi(Y_s) \rho_s^j \rangle) d\beta_s^j \end{aligned} \quad (5.16)$$

Primjetimo da red u prvom integralu konvergira g.s. i definira predvidljiv proces s vrijednostima u H (vidi teorem 1.16). Posljednji komad u (5.16) je neprekidan lokalni martingal s obzirom na filtraciju (\mathcal{F}_{T_n+t}) . Stoga

$$\langle A^* \xi, X_t \rangle = \langle \xi, -F(t, X_t) + D\phi(Y_t) b_t + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2 \phi(Y_t)(\rho_t^j, \rho_t^j) \rangle \quad (5.17)$$

na $[T_n, T_{n+1}] \cap \{T_{n+1} > T_n\}, dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. Zbog separabilnosti od H postoji gust prebrojiv skup $\mathcal{D} \subset D(A^*)$ takav da (5.17) vrijedi za sve $\xi \in \mathcal{D}$ i za sve $(t, \omega) \in [T_n, T_{n+1}] \cap \{T_{n+1} > T_n\}$ izvan skupa $dt \otimes d\mathbb{P}$ mjere nula. Neka je (t, ω) točka iz tog skupa. Tada je $\xi \mapsto \langle A^* \xi, X_t \rangle$ linearan funkcional na $D(A^*)$, koji je ograničen na \mathcal{D} zbog (5.17). Stoga je ograničen na $D(A^*)$. S obzirom da je $A^{**} = A$ (vidi [18, Teorem 8.6.8]) zaključujemo da je $X_t(\omega) \in D(A)$ i upotrebljavajući ponovno punu notaciju imamo:

$$\begin{aligned} AX_t + F(t, X_t) &= D\phi(Y_t) \left(\langle A^* \zeta, X_t \rangle + \langle \zeta, F(t, X_t) \rangle \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2 \phi(Y_t) (\langle \zeta, B^j(t, X_t) \rangle \langle \zeta, B^j(t, X_t) \rangle) \end{aligned} \quad (5.18)$$

na $[T_n, T_{n+1}] \cap \{T_{n+1} > T_n\}, dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. Sada još iz (5.16) dobivamo zbog gustoće \mathcal{D} u H

$$B^j(t, X_t) = D\phi(Y_t) \langle \zeta, B^j(t, X_t) \rangle, \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (5.19)$$

na $[T_n, T_{n+1}] \cap \{T_{n+1} > T_n\}, dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. Zbog **(A3)** imamo:

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^T \left(\|D\phi(Y_s) b_s\|_H + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} \|D^2 \phi(Y_s)(\rho_s^j, \rho_s^j)\|_H + \sum_{j \in \mathbb{N}} \|D\phi(Y_s) \rho_s^j\|_H^2 \right) ds \right] \\ \leq C_1 E \left[\int_0^T \left(\|b_s\|_{\mathbb{R}^m} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\rho_s^j\|_{\mathbb{R}^m}^2 \right) ds \right] \\ \leq C_2 E \left[\int_0^T \left(\|X_s\|_H + \|F(s, X_s)\|_H + \|B(s, X_s)\|_{L_2^0}^2 \right) ds \right] < \infty \end{aligned} \quad (5.20)$$

gdje C_1 i C_2 ovise samo o n (primjetimo da za ϕ smatramo da ima domenu \mathbb{R}^m). Sumirajući za $0 \leq n \leq N - 1$ dobivamo iz (5.18) i (5.20):

$$E \left[\int_0^{T_N} \|AX_s\|_H ds \right] < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(prebacimo $F(t, X_t)$ u (5.18) na desnu stranu jednakosti te djelujmo na jednakost normom i integralom). S obzirom da $\uparrow \lim_N T_N = T$ imamo

$$\mathbb{P} \left[\int_0^t \|AX_s\|_H ds < \infty \right] = 1, \quad \forall t < T$$

Sada iz (5.18), (5.19) i formule (5.15) dobivamo

$$X_t = h_0 + \int_0^t (AX_s + F(s, X_s)) ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t B^j(s, X_s) d\beta_s^j$$

S obzirom da je T proizvoljan drugi dio teorema je dokazan.

Pretpostavimo sada da je X lokalno slabo rješenje sa vremenom života τ . Neka je $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ standarna parametrizacija u h_0 . Po **(A1)** postoji vrijeme zaustavljanja $T_1 > 0$, takvo da $X_{t \wedge \tau}$ uzima vrijednosti u U na $[0, T_1]$. Stavimo $\tau' := \tau \wedge T_1$

Ostatak dokaza ide kao prije samo što ne smijemo koristiti ocjenu (5.20). Dat ćemo skicu. Definiramo:

$$\begin{aligned} b_t &:= \left(\langle A^* \zeta, X_{t \wedge \tau'} \rangle + \langle \zeta, F(t, X_{t \wedge \tau'}) \rangle \right) 1_{[0, \tau']} (t) \\ \rho_t^j &:= \langle \zeta, B^j(t, X_{t \wedge \tau'}) \rangle 1_{[0, \tau']} (t) \\ X_{t \wedge \tau'} &= (\phi \circ Y)_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{5.21}$$

gdje

$$Y_t := \langle \zeta, X_{t \wedge \tau'} \rangle = \langle \zeta, h_0 \rangle + \int_0^t b_s ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \rho_s^j d\beta_s^j \tag{5.22}$$

O Y imamo samo da je Itôv proces s vrijednostima u \mathbb{R}^m . Kombinirajući (5.21) i Itôvu formulu imamo relacije (5.18) i (5.19) za X na $[0, \tau']$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. Posebno $X_{t \wedge \tau'} \in D(A)$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. Stoga iz (1.17) i (5.18) možemo zaključiti (1.33) i (1.34). ■

Ključan korak za dokaz teorema 5.17- 5.20 je sljedeća lema:

Lema 5.21. Prepostavimo **(A2)** i **(A4)**. Neka je $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ parametrizacija koja zadovoljava (5.9). Prepostavimo da $U \cap \mathcal{M} \subset D(A)$. Tada (5.12) i (5.13) vrijede za svaki $h \in U \cap \mathcal{M}$ za $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. (t, ω) ako i samo ako vrijedi

$$\begin{aligned} Ah + F(t, \omega, h) &= D\phi(y) \left(\langle A^* \zeta, h \rangle + \langle \zeta, F(t, \omega, h) \rangle \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2 \phi(y) (\langle \zeta, B^j(t, \omega, h) \rangle, \langle \zeta, B^j(t, \omega, h) \rangle) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$B^j(t, \omega, h) = D\phi(y) \langle \zeta, B^j(t, \omega, h) \rangle, \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (5.24)$$

gdje $y = \langle \zeta, h \rangle$ za $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. (t, ω) , za svaki $h \in \mathcal{M}$. Dakle, A je neprekidan na $U \cap \mathcal{M}$.

Napomena 5.22. Ova lema nam daje uvjete (5.12) i (5.13) zapisane preko parametrizacije u lokalnim koordinatama, ali nam kaže i više; naime u iskazu ti uvjeti vrijede $\forall h \in U \cap \mathcal{M}$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. gdje taj skup ovisi o h . Zaključak je da možemo izvući i više - skup koji je dobar i vrijedi za sve h .

Dokaz. Ekvivalencija po točkama od (5.13) i (5.24) te (5.12) i relacije:

$$\begin{aligned} Ah + F(t, \omega, h) - \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} DB^j(t, \omega, h) B^j(t, \omega, h) \\ = D\phi(y) \langle \zeta, Ah + F(t, \omega, h) \rangle - \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} DB^j(t, \omega, h) B^j(t, \omega, h) \end{aligned} \quad (5.25)$$

slijedi iz leme 5.12 (točnije relacije (5.4)). Prepostavimo stoga (5.12) i (5.13)- i stoga (5.23) i (5.24) za svaki $h \in U \cap \mathcal{M}$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. Ali obje strane u (5.24) su neprekidne po h zbog **(A2)**. Stoga postoji $dt \otimes d\mathbb{P}$ -nulskup $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$, takav da je (5.24) istina za sve $h \in U \cap \mathcal{M}$ i $(t, \omega) \in \mathcal{N}^c$.

Zbog **(A2)** možemo primjeniti propoziciju (5.15) i posljednji sumand u (5.23) je jednak

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} DB^j(t, \omega, h) B^j(t, \omega, h) - \frac{1}{2} D\phi(y) \langle \zeta, \sum_{j \in \mathbb{N}} DB^j(t, \omega, h) B^j(t, \omega, h) \rangle$$

Stoga (5.23) vrijedi za $(t, \omega, h) \in \mathcal{N}_1^c \times (U \cap \mathcal{M})$ ako i samo ako vrijedi (5.25) za $(t, \omega, h) \in \mathcal{N}_1^c \times (U \cap \mathcal{M})$, gdje je \mathcal{N}_1 neki $dt \otimes d\mathbb{P}$ nulskup.

Ostaje pokazati valjanost od (5.23) $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. za sve $h \in U \cap \mathcal{M}$. Skraćeno pišemo desnu stranu od (5.23) kao $R(t, \omega, h)$. Tada to možemo čitati kao

$$Ah = -F(t, \omega, h) + R(t, \omega, h) \quad (5.26)$$

za svaki $h \in \mathcal{M}$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. Iz **(A4)** slijedi da je desna strana od (5.26) neprekidna u h . Stoga za bilo koji niz $h_n \rightarrow h$ u $U \cap \mathcal{M}$ imamo $Ah_n \rightarrow Ah$. Drugim riječima A restringiran na $U \cap \mathcal{M}$ je neprekidan. Sada na isti način kao za relaciju (5.24) pronalazimo $dt \otimes d\mathbb{P}$ nulskup \mathcal{N}_1 takav da relacija (5.23) vrijedi za sve $(t, \omega, h) \in \mathcal{N}_1^c \times (U \cap \mathcal{M})$. \blacksquare

Dokaz. **(teorema 5.17)** Definiramo vrijeme zaustavljanja

$$\tau_0 = \inf\{t \geq 0 | X_t \notin \mathcal{M}\}$$

Iz zatvorenosti od \mathcal{M} i **(A1)** imamo da vrijedi $X_{\tau_0} \in \mathcal{M}$ na $\{\tau_0 < \infty\}$. Tvrđimo $\tau_0 = \infty$. Pretpostavimo da je $\mathbb{P}[\tau_0 < K] > 0$ za neki $K \in \mathbb{N}$. Zbog prebrojivosti pokrivača (U_k) postoji parametrizacija $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ koja zadovoljava (5.9) i $\mathbb{P}[X_{\tau_0} \in U \text{ i } \tau_0 < K] > 0$. Definirajmo ograničeno vrijeme zaustavljanja $\tau_1 := \tau_0 \wedge K$ i stavimo $Y_0 := \langle \zeta, X_{\tau_1} \rangle$. Zbog **(A4)** i zbog činjenice da je $\phi \in C_b^2(\mathbb{R}^m; H)$ preslikavanja

$$\begin{aligned} b(t, \omega, h) &:= \langle A^* \zeta, \phi(y) \rangle + \langle \zeta, F(\tau_1(\omega) + t, \omega, \phi(y)) \rangle \\ \rho^j(t, \omega, y) &:= \langle \zeta, B^j(\tau_1(\omega) + t, \omega, \phi(y)) \rangle \end{aligned}$$

s vrijednostima u \mathbb{R}^m odnosno $L_2^0(\mathbb{R}^m)$ su ograničena i globalno Lipschitz neprekidna u y na $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^m$ za sve $T \in \mathbb{R}_+$. Po korolaru 1.41 stohastička jednadžba u \mathbb{R}^m :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s, Y_s) ds + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \rho^j(s, Y_s) d\beta_s^{(\tau_1), j} \quad (5.27)$$

ima jedinstveno neprekidno rješenje Y .

Sada $\mathbb{P}[Y_0 \in V | \tau_0 < K] \cdot \mathbb{P}[\tau_0 < K] = \mathbb{P}[Y_0 \in V, \tau_0 < K] > 0$ i distribucija od Y_0 pod $\mathbb{P}[\cdot | \tau_0 < K]$ je regularna. Stoga postoje otvoreni skupovi V_0, V_1 takvi da $\overline{V}_0 \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset V$ i $\mathbb{P}[Y_0 \in \overline{V}_0, \tau_0 < K] > 0$. Definiramo $\mathcal{F}_t^{(\tau_1)}$ vrijeme zaustavljanja

$$\tau_2 = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 | Y_t \notin V_1\}, & \text{ako } Y_0 \in \overline{V}_0 \text{ i } \tau_0 < K \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (5.28)$$

Tada po neprekidnosti od Y imamo $\mathbb{P}[\tau_2 > 0] = \mathbb{P}[Y_0 \in \overline{V}_0 \text{ i } \tau_0 < K] > 0$ i

$$Y \in V \quad \text{na } < 0, \tau_2] \quad (5.29)$$

Iz ograničenosti od b i ρ dobivamo:

$$E \left[\int_0^t \left(\|b(s, Y_s)\|_{\mathbb{R}^m} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\rho^j(s, Y_s)\|_{\mathbb{R}^m}^2 \right) ds \right] < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.30)$$

Stavimo $\tilde{X} := \phi \circ Y$. Pretpostavke teorema 1.16 su zadovoljene i stoga je:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t &= X_{\tau_1} + \int_0^t \left(D\phi(Y_s)b(s, Y_s) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2\phi(Y_s)(\rho^j(s, Y_s), \rho^j(s, Y_s)) \right) ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t D\phi(Y_s)\rho^j(s, Y_s)d\beta_s^{(\tau),j}, \quad \text{na } [0, \tau_2] \cap \{\tau_2 > 0\},\end{aligned}\tag{5.31}$$

dobro definiran Itôv proces s vrijednostima u H . Štoviše iz (5.29) imamo

$$\tilde{X} \in U \cap \mathcal{M} \subset D(A) \quad \text{na } [0, \tau_2] \cap \{\tau_2 > 0\}\tag{5.32}$$

Stoga iz **(A2)** i **(A4)** koristeći lemu 5.21 imamo:

$$\begin{aligned}A\tilde{X}_t + F(\tau_1 + t, \tilde{X}_t) &= D\phi(Y_t)b(t, Y_t) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2\phi(Y_t)(\rho^j(t, Y_t), \rho^j(t, Y_t)) \\ B^j(\tau_1 + t, \tilde{X}_t) &= D\phi(Y_t)\rho^j(t, Y_t), \quad \forall j,\end{aligned}$$

na $[0, \tau_2] \cap \{\tau_2 > 0\}$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. Ovo skupa sa (5.30) i (5.31) povlači (možemo pretpostaviti da je \tilde{V}_1 kompaktan):

$$\mathbb{P} \left[\int_0^{t \wedge \tau_2} \|A\tilde{X}_s\|_H ds < \infty \right] = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

i

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{t \wedge \tau_2} &= X_{\tau_1} + \int_0^{t \wedge \tau_2} \left(A\tilde{X}_s + F(\tau_1 + s, \tilde{X}_s) \right) ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^{t \wedge \tau_2} B^j(\tau_1 + s, \tilde{X}_s) d\beta_s^{(\tau),j}, \quad \text{na } \{\tau_2 > 0\}\end{aligned}$$

Znamo iz korolara 1.42 da je (X_{τ_1+t}) jedinstveno neprekidno slabo rješenje jednadžbe (5.10) pomaknute za vrijeme zaustavljanja τ_1 . Stoga $\tilde{X}_t = X_{\tau_1+t}$ na $[0, \tau_2] \cap \{\tau_2 > 0\}$. Budući da vrijedi (5.32) imamo $X_{\tau_1+\tau_2} \in \mathcal{M}$. Po konstrukciji $\{\tau_0 < K\} = \{\tau_0 < K\} \cap \{\tau_0 = \tau_1\}$ i

$$0 < \mathbb{P}[\tau_2 > 0] \leq \mathbb{P}[\{\tau_1 + \tau_2 > \tau_1\} \cap \{\tau_0 < K\}] \leq \mathbb{P}[\tau_1 + \tau_2 > \tau_0],$$

što je kontradikcija. Stoga $\tau_0 = \infty$. Posljednja tvrdnja slijedi iz leme 5.21. \blacksquare

Dokaz. (**teorema 5.19**) i) \Rightarrow ii): Fiksirajmo $(t_0, h_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M}$ i označimo sa $X = X^{(t_0, h_0)}$ neprekidno lokalno slabo rješenje od (1.39) sa vremenom života τ . Nastavljamo kao u dokazu teorema 5.16 i prilagođavamo notaciju . Definiramo $(\mathcal{F}_t^{(t_0)})$ -vrijeme zaustavljanja $T_1 > 0$ sa svojstvom da $X_{t \wedge \tau'}$ uzima vrijednosti u $U_{\alpha(0)}$ za $\tau' = \tau \wedge T_1$. Analogno kao što smo izveli (5.17) možemo izvesti jednakost:

$$\begin{aligned} \langle A^* \xi, X_t \rangle &= \left\langle \xi, -F(t_0 + t, X_t) + D\phi(Y_t) \left(\langle A^* \zeta, X_t \rangle + \langle \zeta, F(t_0 + t, X_t) \rangle \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2 \phi(Y_t) (\langle \zeta, B^j(t_0 + t, X_t) \rangle, \langle \zeta, B^j(t_0 + t, X_t) \rangle) \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.33)$$

za sve $\xi \in D(A^*)$ na $[0, \tau']$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ -g.s. S obzirom da vrijedi **(A4)** i **(A5)** obje strane od (5.33) su neprekidne zdesna u t i po (1.6) i LTDK možemo zamijeniti limes $t \downarrow 0$ sa sumacijom po j . Nije teško vidjeti da su stoga obje strane u (5.33) jednakе u $t = 0$, \mathbb{P} -g.s. Argumentirajući kao za (5.18) zaklučujemo da je $h_0 \in D(A)$ i

$$\begin{aligned} Ah_0 + F(t_0, \omega, h_0) &= D\phi(y_0) \left(\langle A^* \zeta, h_0 \rangle + \langle \xi, F(t_0, \omega, h_0) \rangle \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2 \phi(y_0) (\langle \zeta, B^j(t_0, \omega, h_0) \rangle, \langle \zeta, B^j(t_0, \omega, h_0) \rangle), \end{aligned}$$

\mathbb{P} -g.s. Slično

$$B^j(t_0, \omega, h_0) = D\phi(y_0) \langle \xi, B^j(t_0, \omega, h_0) \rangle, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P} - g.s.$$

S obzirom da je (t_0, h_0) bio proizvoljan lema 5.21 daje uvjet ii).

ii) \Rightarrow i): Neka je $(t_0, h_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M}$ i neka je $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ parametrizacija u h_0 koja zadovoljava (5.9). Kao u dokazu teorema (5.17) (stavljujući $\tau_0 = \tau_1 = 0$) imamo jedinstveno neprekidno rješenje Y za:

$$\begin{aligned} Y_t &= \langle \zeta, h_0 \rangle + \int_0^t \left(\langle A^* \zeta, \phi(Y_s) \rangle + \langle \zeta, F(t_0 + s, \phi(Y_s)) \rangle \right) ds \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t \langle \zeta, B^j(t_0 + s, \phi(Y_s)) \rangle d\beta_s^{(t_0), j} \end{aligned}$$

Vrijeme zaustavljanja τ_2 dano sa (5.28) je strogo pozitivno i $Y_{t \wedge \tau_2} \in V$. Analiza slična onoj u dokazu teorema 5.17 daje da je $X_t^{(t_0, h_0)} := (\phi \circ Y)_{t \wedge \tau_2}$ neprekidno lokalno rješenje od (1.39) sa vremenom života τ_2 i $X_t^{(t_0, h_0)} \in U \cap \mathcal{M}$, za sve $t \in \mathbb{R}_+$ ii) \Leftrightarrow iii) : to je direktna posljedica leme 5.21 i **(A5)** ■

Dokaz. (**teorema 5.20**) Po propoziciji 5.10 možemo izabrati parametrizaciju u (5.9) takvu da $D^2 \phi_k \equiv 0$ na V_k . Sada iz dokaza vidimo da lema 5.21 i teoremi 5.17 i 5.19 ostaju valjani pod uvjetima ovog teorema. ■

5.4 Uvjeti konzistencije u lokalnim koordinatama

Rezultate ovog odjeljka primjenit ćemo u sljedećem poglavlju kada budemo primjenjivali rezultate ovog na HJM jednadžbu i familije krivulja kao što su afine i Nelson-Siegel koje su zapravo zadane u lokalnim koordinatama tj. nekom svojom parametrizacijom. U ovom odjeljku vrijede pretpostavke teorema 5.19 i \mathcal{M} je lokalno invarijantna za (5.10). Identificirat ćemo proces Y koji je zapravo projekcija na konačnodimenzionalnu mnogostrukturu. Dakle neka je $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ neka parametrizacija. Pretpostavljamo da vrijedi (5.1) i (5.2) za sve $y \in V$. Po teoremu 5.19 vrijedi:

$$\mu(t, \omega, \phi(y)) = D\phi(y)\tilde{b}(t, \omega, y) \quad (5.34)$$

$$B^j(t, \omega, \phi(y)) = D\phi(y)\rho^j(t, \omega, y), \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (5.35)$$

za sve $(t, \omega, y) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times V$ (nakon uklanjanja \mathbb{P} -nulskupa), gdje je \tilde{b} i ρ^j su jedinstveno određena izmjeriva preslikavanja sa $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times V, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(V))$ u $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ (vidi (5.3)). Pišemo $\rho(t, \omega, y) = (\rho^j(t, \omega, y))_{j \in \mathbb{N}}$. Da pojednostavimo notaciju nećemo pisati ω u nekim slučajevima. Zbog **(A2)** i (5.2) imamo:

$$\rho(t, \cdot) = D\Psi(\phi(\cdot)) \circ B(t, \phi(\cdot)) \in C^1(V; L_2^0(\mathbb{R}^m)) \quad (5.36)$$

Fiksirajmo $(t, y) \in V$. Znamo da vrijedi (vidi (5.6)):

$$DB^j(t, \phi(y))B^j(t, \phi(y)) = \frac{d}{ds}B^j(t, c(s))|_{s=0}$$

gdje je $c(s) := \phi(y + s\rho^j(t, y))$. S druge strane, zbog (5.35)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}B^j(t, c(s))|_{s=0} &= \frac{d}{ds}(D\phi(y + s\rho^j(t, y))\rho^j(t, y + s\rho^j(t, y)))|_{s=0} \\ &= D^2\phi(y)(\rho^j(t, y), \rho^j(t, y)) + D\phi(y)(D\rho^j(t, y)\rho^j(t, y)), \end{aligned}$$

Ubacujući ovo u (5.34) dobivamo:

$$A\phi(y) + F(t, \phi(y)) - \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2\phi(y)(\rho^j(t, y), \rho^j(t, y)) = D\phi(y)b(t, y), \quad (5.37)$$

gdje smo stavili:

$$b(t, \omega, y) := \tilde{b}(t, \omega, y) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D\rho^j(t, \omega, y)\rho^j(t, \omega, y) \quad (5.38)$$

Sada koristeći (5.36) imamo:

$$\begin{aligned} D\rho^j(t, y)\rho^j(t, y) &= D^2\Psi(\phi(y))(B^j(t, \phi(y)), B^j(t, \phi(y))) \\ &\quad + D\Psi(\phi(y))DB^j(t, \phi(y))B^j(t, \phi(y)), \end{aligned} \quad (5.39)$$

Sada kombinirajući (5.34), (5.38) i (5.39) dobivamo:

$$\begin{aligned}
b(t, y) &= D\Psi(\phi(y)) \left(A\phi(y) + F(t, \phi(y)) - \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} DB^j(t, \phi(y))B^j(t, \phi(y)) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D\rho^j(t, y)\rho^j(t, y) \\
&= D\Psi(\phi(y))(A\phi(y) + F(t, \phi(y))) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} D^2\Psi(\phi(y))(B^j(t, \phi(y))), B^j(t, \phi(y))) \\
&\tag{5.40}
\end{aligned}$$

Primjetimo da zbog (5.36) i **(A2)** svi redovi konvergiraju apsolutno i neprekidni su po y .

Sada ćemo pokazati kako se jednadžba (1.39) može zapisati u lokalnim koordinatama. Primjetimo da je, općenito, $b(t, \omega, y)$ neprekidno, ali ne i Lipschitz neprekidno u y , na $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times V$. Lipschitz neprekidnost možemo dobiti ako je ϕ na primjer klase C^3 . No ipak je jednadžba (5.41) jedinstveno riješiva. Zaista neka $X^{(t_0, h_0)}$ označava jedinstveno neprekidno lokalno rješenje t_0 pomaknute stohastičke jednadžbe (1.39) za neki $(t_0, h_0) \in \mathbb{R}_+ \times (U \cap \mathcal{M})$ s vrijednostima u $U \cap \mathcal{M}$. Itôova formula, zajedno sa (5.36) i (5.40), daje da je $\Psi \circ X^{(t_0, h_0)}$ neprekidno lokalno rješenje t_0 pomaknute stohastičke jednadžbe s vrijednostima u V :

$$\begin{cases} dY_t = b(t_0 + t, Y_t)dt + \sum_{j \in \mathbb{N}} \rho^j(t_0 + t, Y_t)d\beta_t^{(t_0), j} \\ Y_0 = y_0 \end{cases} \tag{5.41}$$

gdje je $y_0 = \phi^{-1}(h_0)$. Obratno, svako neprekidno lokalno (jako jer smo na konačnodimenzionalnom prostoru) rješenje $Y^{(t_0, h_0)}$ od (5.41) je po Itôvoj formuli, upotrebljavajući (5.35) i (5.37) neprekidno lokalno strogo rješenje t_0 pomaknute stohastičke jednadžbe (1.39) sa $h_0 = \phi(y_0)$ i stoga jedinstveno

Teorem 5.23. *Neka je $\phi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ neka parametrizacija klase C^2 , te neka su $\tilde{b}(t, \omega, y)$, $\rho(t, \omega, y)$ i $b(t, \omega, y)$ dani jednakostima (5.34), (5.35) i (5.38). Tada uvjeti konzistencije (5.12) i (5.13) vrijede za sve $(t, \omega, h) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times (U \cap \mathcal{M})$ ako i samo ako (5.37) i (5.35) vrijede za sve $(t, \omega, y) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times V$.*

Jednadžba (1.39) se transformira lokalno u jednadžbu (5.41) tj. $X^{(t_0, h_0)}$ je neprekidno lokalno rješenje od (1.39) u $U \cap \mathcal{M}$ ako i samo ako je $\phi^{-1} \circ X^{(t_0, h_0)}$ od (5.41) u V , gdje je $y_0 = \phi^{-1}(h_0)$. Koeficijenti $b(t, \omega, y)$ i $\rho(t, \omega, y)$ su lokalno ograničeni i neprekidni po $y \in V$. Oni su i Lipschitz neprekidni ako je ϕ klase C^3 .

Ako je ϕ linearno preslikavanje ($D^2\phi \equiv 0$) onda svi zaključci vrijede bez pretpostavke **(A2)**.

Poglavlje 6

Konzistentni HJM modeli

S alatima razvijenim u prethodnom poglavlju možemo riješiti probleme konzistencije **(P2)-(P3)** iz uvoda. Posebno invertirat ćemo jednadžbu (11). Definirat ćemo konzistentne HJM modele i dati prikaz afinih modela.

6.1 Problemi konzistencije

Uzet ćemo kao zadanu parametriziranu familiju krivulja $\mathcal{G} = \{G(\cdot, z) | z \in \mathcal{Z}\}$ funkcija u H_w . Nadalje ćemo pretpostaviti da je parametarski skup $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^m$ otvoren. Upotrijebit ćemo samo slovo G za oznaku preslikavanja $z \mapsto G(\cdot, z) : \mathcal{Z} \rightarrow H_w$. Parametar z se bira na način da krivulja $x \mapsto G(x, z)$ optimalno odgovara podacima na tržištu. To znači da promatramo gibanje krivulje budućih stopa $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ po vremenu t na način da promatramo koordinatni proces Z_t koji prima vrijednosti u skupu \mathcal{Z}

$$G(Z_t) = r_t \quad (6.1)$$

Relacija (6.1) povlači da je $r_t \in \mathcal{G}$. Ako pretpostavimo da je (σ, γ, I) model u H_w to zahtjeva, kao što smo komentirali u uvodu, stanovitu konzistenciju između (σ, γ, I) i familije \mathcal{G} . Terminologija iz prethodnog odjeljka nam dopušta da reformuliramo probleme iz uvoda **(P2)** i **(P3)**:

- (P4)** Koji su uvjeti na HJM model (σ, γ, I) takvi da je skup $\mathcal{G} \cap I$ lokalno invariantan za HJMM jednadžbu (3.18).

Sva ta pitanja odnose se na mogućnost invertiranja jednadžbe (6.1).

Definicija 6.1. *Lokalni HJM model (σ, γ, I) u H_w se zove konzistentnim sa \mathcal{G} ako:*

i) $\mathcal{G} \subset I$

ii) \mathcal{G} je lokalno invarijantan za HJMM jednadžbu (3.18) sa danim σ

Ova definicija odgovara problemu (**P4**)

Napomena 6.2. Sjetimo se naše konvencije da je \tilde{W} , koji se pojavljuje u HJMM jednadžbi (3.18) beskonačnodimenzionalno Brownovo gibanje s obzirom na rizično neutralnu mjeru \mathbb{Q} , dok su opservacije od Z u (6.1) pod objektivnom mjerom \mathbb{P} danoj sa (3.20). No očito je da pojam konzistencije ne ovisi o zamjeni mjere ekvivalentnom.

Sad ćemo dati strožu verziju definicije 6.1, koja odgovara problemu (**P3**).

Definicija 6.3. Lokalni HJM model (σ, γ, I) se u H_w se zove r -konzistentan sa \mathcal{G} ako

i) $\mathcal{G} \subset I$

ii) Za svaki $(t_0, h_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{G}$ postoji $(\mathcal{F}_t^{(t_0)})$ -Itôv proces

$$Z_t = Z_t^{(t_0, h_0)} = Z_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \rho_s d\tilde{W}_s^{(t_0)} \quad (6.2)$$

takav da je $G(Z)$ lokalno blago rješenje za t_0 pomaknute HJMM jednadžbe sa danim σ i početnim uvjetom $G(Z_0) = h_0$.

Jasno je da r -konzistentnost povlači konzistentnost. Zaista prepostavimo da je lokalni HJM model (σ, γ, I) r -konzistentan sa \mathcal{G} . Iz jedinstvenosti lokalnog blagog rješenja $r = r^{(t_0, h_0)}$ imamo da je lokalno $r_t = G(Z_t) \in \mathcal{G}$ gdje je $Z = Z^{(t_0, h_0)}$ dan sa (6.2). Stoga je (σ, γ, I) konzistentan sa \mathcal{G} .

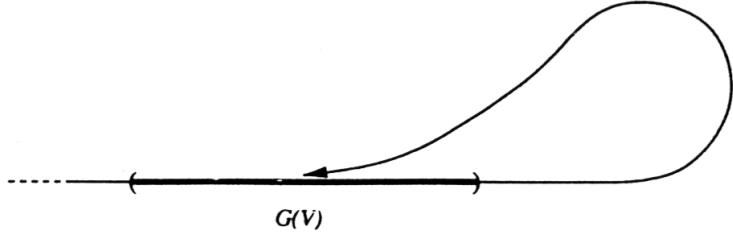
Obrat općenito ne vrijedi, ali ćemo dati dovoljne uvjete kada vrijedi. Od sada nam σ označava izmjerivo preslikavanje sa $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times H_w, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(H_w))$ u $(L_2^0(H_w^0), \mathcal{B}(L_2^0(H_w^0)))$. Sada koristeći korolar 4.6 i lemu 4.8 možemo izreći u jeziku prethodnog poglavљa sljedeću lemu (gdje smo F i B zamijenili sa α_{HJM} i σ)

Lema 6.4. Prepostavimo da je σ lokalno ograničena i lokalno Lipschitz neprekidna u h . Tada je zadovoljeno (**A4**). Ako još vrijedi i da je $\sigma(t, \omega, h)$ zdesna neprekidna u $t \in \mathbb{R}_+$, za sve $h \in H_w$ i $\omega \in \Omega$, tada je zadovoljeno i (**A5**).

Dokaz. Sve tvrdnje su jasne. Neprekidnost zdesna po t od $\alpha_{HJM}(t, \omega, h)$ slijedi iz korolara 4.6. ■

Sada možemo ponovno izreći teorem 5.23.

Teorem 6.5. Neka σ zadovoljava (**A2**) i prepostavke leme 6.4. Prepostavimo da je \mathcal{G} m-dimenzionalna (regularna) C^2 mnogostruktost od H_w . Tada je konzistencija od (σ, γ, I) sa \mathcal{G} ekvivalentna sa r -konzistencijom. Ako je \mathcal{G} linearan isti se zaključak može izvesti i bez prepostavke (**A2**).



Slika 6.1: uložena mnogostruktost

Postoji ipak važna razlika kada je \mathcal{G} regularna ili uložena mnogostruktost. Znamo iz propozicije 5.1 da postoji otvorena okolina V od z_0 iz \mathcal{Z} takva da je $G(V)$ m -dimenzionalna C^2 regularna podmnogostruktost u H_w i $G : V \rightarrow G(V)$ je parametrizacija. Ali \mathcal{G} može imati točke presjeka ili točke gomilanja

Da to vidimo, zamislimo da je naš objekt, označimo ga sa \mathcal{O} , na slici 6.1 pravac uložen u \mathbb{R}^2 . Tada nije teško konstruirati proces koji prima vrijednosti na \mathcal{O} , ali čije trajektorije se granaju u točki gomilanja. Stoga naš proces, iako konzistentan sa \mathcal{G} , nije konzistentan sa $G(V)$. Isti primjer možemo upotrijebiti da pokažemo da konzistencija ne povlači nužno r -konzistenciju. Naš proces Z bi, dakle, u slučaju grananja trebao imati skokove što nije slučaj za Itôv proces.

S druge strane jasno je da r -konzistencija sa \mathcal{G} povlači r -konzistenciju sa $G(V)$. Ako još σ zadovoljava pretpostavke teorema 6.5 možemo uvjete konzistencije (5.12) i (5.13) izraziti u lokalnim koordinatama (vidi teorem 6.7 koji slijedi).

6.2 Jednostavni kriterij regularnosti za \mathbf{G}

Prepostavimo da $G \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z})$. Možemo dati jednostavan kriterij regularnosti za diferencijabilnost od G u H_w . Neka je ξ_1, \dots, ξ_m standarna baza u \mathbb{R}^m i neka je $z_0 \in \mathcal{Z}$. Parcijalna derivacija $D_i G(z_0)$ je derivacija preslikavanja $s \mapsto G(z_0 + s\xi_i) : \mathbb{R} \rightarrow H_w$ u $s = 0$. Po prepostavci **(H1)** imamo:

$$\mathcal{J}_x \left(\frac{d}{ds} G(z_0 + s\xi_i) \Big|_{s=0} \right) = \frac{d}{ds} \mathcal{J}_x(G(z_0 + s\xi_i)) \Big|_{s=0} = \partial_{z_i} G(x, z_0), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

Stoga $D_i G(z_0) = \partial_{z_i} G(\cdot, z_0)$.

Lema 6.6. *Neka je $\tilde{w} : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty)$ neopadajuća funkcija takva da je $w\tilde{w}^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ i neka je V otvoren podskup od \mathcal{Z} . Prepostavimo da:*

$$\sup_{(x,z) \in \mathbb{R}_+ \times V} |\partial_{z_i} \partial_x G(x, z)|^2 \tilde{w}(x) < \infty, \text{ za sve } i$$

Tada parcijalne derivacije $D_i G(z)$ postoje za sve $z \in V$ i $z \mapsto D_i G(z)$ je neprekidno sa V u H_w , za sve $1 \leq i \leq m$. Stoga vrijedi da je $G \in C^1(V; H_w)$ i

$$DG(z) = (\partial_{z_1} G(\cdot, z), \dots, \partial_{z_m} G(\cdot, z)) \in L(\mathbb{R}^m; H_w). \quad (6.3)$$

Dokaz. Neka je $z \in V$. Stavimo $\varepsilon_i = \varepsilon \xi_i$ gdje je $\varepsilon > 0$. Moramo pokazati da

$$T(\varepsilon) := \left\| \frac{G(z + \varepsilon_i) - G(z)}{\varepsilon} - \partial_{z_i} G(\cdot, z) \right\|_w^2 \rightarrow 0 \text{ za } \varepsilon \rightarrow 0$$

Rastavljam T(ε) = T₁(ε) + T₂(ε), gdje:

$$T_1(\varepsilon) := \left\| \frac{G(0, z + \varepsilon_i) - G(z)}{\varepsilon} - \partial_{z_i} G(0, z) \right\|^2 \rightarrow 0 \text{ za } \varepsilon \rightarrow 0$$

i

$$\begin{aligned} T_2(\varepsilon) &:= \int_{\mathbb{R}_+} \left\| \frac{\partial_x G(x, z + \varepsilon_i) - \partial_x G(x, z)}{\varepsilon} - \partial_{z_i} \partial_x G(x, z) \right\|^2 w(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^1 \left\| \partial_{z_i} \partial_x G(x, z + s\varepsilon_i) - \partial_{z_i} \partial_x G(x, z) \right\|^2 w(x) ds dx \end{aligned}$$

Za ε dovoljno mali imamo da je $z + s\varepsilon_i \in V$ za sve $s \in [0, 1]$ i po prepostavci:

$$\left\| \partial_{z_i} \partial_x G(x, z + s\varepsilon_i) - \partial_{z_i} \partial_x G(x, z) \right\|^2 w(x) \leq C w(x) \tilde{w}^{-1}(x) \in L^1([0, 1] \times \mathbb{R}_+)$$

gdje je C neovisno o x i ε . Stoga $T_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ za $\varepsilon \rightarrow 0$, po teoremu o dominiranoj konvergenciji. Zaključujemo da $D_i G(z)$ postoji. Neprekidnost od $z \mapsto D_i G(z) : V \rightarrow H_w$ slijedi slično. Ovo dokazuje prvi dio leme. Druga tvrdnja slijedi iz prve (vidi [4, propozicija 3.7.2]). ■

Po [4, propozicija 5.2.1] $G \in C^2(\mathcal{Z}; H_w)$ ako i samo ako $D_i G \in C^1(\mathcal{Z}; H_w)$ za $1 \leq i \leq m$, što se može opet provjeriti po lemi 6.6. Štoviše:

$$D^2 G(z) = (\partial_{z_i} \partial_{z_j} G(\cdot, z))_{1 \leq i, j \leq m} \quad (6.4)$$

što je bilinearno preslikavanje sa $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ u H_w .

Teorem 6.7. Pretpostavimo da je $G \in C^2(\mathcal{Z}; H_w)$ i da su $\partial_{z_1} G(\cdot, z_0), \dots, \partial_{z_m} G(\cdot, z_0)$ linearne nezavisne funkcije za neki $z_0 \in \mathcal{Z}$. Tada je G C^2 ulaganje u z_0 . Označimo sa V otvorenu okolinu od z_0 u \mathcal{Z} takvu da je $G : V \rightarrow G(V)$ parametrizacija. Neka su prvi i drugi diferencijal od G na V dani sa (6.3) odnosno sa (6.4). Pretpostavimo da je (σ, γ, I) r-konzistentan sa \mathcal{G} i da σ zadovoljava prepostavke teorema 6.5. Tada koordinatni proces (6.2) ima koeficijente $b(t, \omega, z)$ i $\rho(t, \omega, z)$ koji su lokalno ograničeni

i neprekidni u $z \in V$. Koeficijenti su lokalno Lipschitz neprekidni u $z \in V$ ako $G \in C^3(\mathcal{Z}; H_w)$. Štoviše, nakon uklanjanja skupa mjere nula vrijedi:

$$\begin{aligned} \partial_x G(x, z) &= \sum_{i=1}^m b^i(t, \omega, z) \partial_{z_i} G(x, z) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^m a^{k,l}(t, \omega, z) \partial_{z_k} \partial_{z_l} G(x, z) \\ &\quad - \sum_{k,l=1}^m a^{k,l}(t, \omega, z) \partial_{z_k} G(x, z) \int_0^x \partial_{z_l} G(\eta, z) d\eta \end{aligned} \tag{6.5}$$

za sve $(t, \omega, z) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times V$. Ovdje je $a^{k,l} := \sum_{j \in \mathbb{N}} \rho^{j,k} \rho^{j,l}$.

Dokaz. Po teoremu 5.19 nužno $G(V) \in D(A)$. Kombinirajući (6.3) i (6.4) sa teoremom 5.23 dobivamo tvrdnju. Relacija (6.5) je samo relacija (5.37) napisana na drugi način. ■

Napomena 6.8. Primjeti da smo zapravo došli do relacije (2.7). Ipak (6.5) je jači uvjet jer je po točkama. To je zbog činjenice što Itôv Z daje proces $r = G(Z)$ koji živi na \mathcal{G} . No naš pojam r -konzistencije zahtjeva lokalnu invarijantnost za \mathcal{G} što je mnogo jači koncept.

Ako je $\mathcal{G} = G(\mathcal{Z})$ regularna podmnogostruktost tada uvjet (6.5) možemo upotrijebiti da provjerimo da li uopće postoji i jedan lokalni HJM model koji je konzistentan sa \mathcal{G} . U nekim slučajevima to vodi do kompletne karakterizacije svih konzistentnih lokalnih HJM modela.

6.3 Afini modeli

U ovom odjeljku ćemo primjeniti teorem 6.7 da bismo identificirali lokalne affine HJM modele tj. one lokalne HJM modele koji su konzistentni sa konačnodimenzionalnim linearnim podmnogostrukostima. Zahtjevamo da σ zadovoljava pretpostavke leme 6.4. Pretpostavimo da je \mathcal{M} m -dimenzionalna linearna podmnogostruktost od H_w koja je lokalno invarijantna za HJMM jednadžbu (3.18). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je \mathcal{M} povezana. Tada postoji globalna parametrizacija $\phi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}$ određena sa $\phi(y) = g_0 + \sum_{i=1}^m y_i g_i$ gdje su zbog teorema 5.20 $g_0, \dots, g_m \in D(A)$ linearne nezavisne. Jasno da je $D\phi(y) \equiv (g_1, \dots, g_m)$. Primjenjujući teorem 6.7 dobivamo:

$$g'_0 + \sum_{i=1}^m y_i g'_i = \sum_{i=1}^m b^i(t, \omega, y) g_i - \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^m a^{i,j}(t, \omega, y) G_i G_j \right)' \tag{6.6}$$

za sve $(t, \omega, y) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times V$ (nakon uklanjanja skupa \mathbb{Q} mjere nula iz Ω) gdje je $G_i(x) = \int_0^x g_i(\eta) d\eta$. Da skratimo notaciju pišemo ' umjesto ∂_x .

Stavimo $\gamma_i = g_i(0)$. Integrirajući (6.6) dobivamo:

$$g_0 - \gamma_0 + \sum_{i=1}^m y_i(g_i - \gamma_i) = \sum_{i=1}^m b^i(t, \omega, y) G_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a^{i,j}(t, \omega, y) G_i G_j \quad (6.7)$$

Sada ako su G_i i $G_i G_j$, $1 \leq i, j \leq m$, linearno nezavisne funkcije, zbog jedinstvenosti rastava i neovisnosti lijeve strane o t i ω imamo da koeficijenti $b^i(t, w, y)$ i $a^{i,j}(t, \omega, y)$ ne ovise o t i ω . Također s obzirom da je lijeva strana afina u y možemo zaključiti da su koeficijenti $b^i(y)$ i $a^{i,j}(y)$ također afini u y . Drugim riječima možemo pisati:

$$\begin{aligned} b^i(y) &= b^i + \sum_{j=1}^m \beta^{i,j} y_j, \quad 1 \leq i \leq m \\ a^{i,j}(y) &= a^{i,j} + \sum_{k=1}^m \alpha^{i,j,k} y_k \quad 1 \leq i, j \leq m. \end{aligned}$$

Sada, izjednjačavajući koeficijente uz y_i , dobivamo sljedeće jednadžbe za G_i :

$$\begin{aligned} G'_0 &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^m b^k G_k - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^m a^{k,l} G_k G_l \\ G'_i &= \gamma_i + \sum_{k=1}^m \beta^{k,i} G_k - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^m \alpha^{k,l,i} G_k G_l, \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (6.8)$$

sa početnim uvjetima $G_0(0) = \dots = G_m(0) = 0$.

Stoga smo izveli rezultate iz [8] kao speacijalan slučaj ovog našeg generalnog pogleda. Jasno da teorem 6.7 postavlja još i uvjete da $\rho(y)$ bude lokalno ograničena i lokalno Lipschitz neprekidna (s obzirom da je jasno da je ϕ C^3 preslikavanje i $b(y)$ jest lokalno ograničeno i Lipschitz neprekidno).

Zbog jednostavnosti ćemo uzeti da je $m = 1$ i da je \tilde{W} jednodimenzionalno Brownovo gibanje i neka je

$$\begin{aligned} b(y) &= b + \beta y \\ a(y) &= a + \alpha y \end{aligned}$$

Stoga je

$$\rho(y) = \sqrt{a + \alpha y}$$

Ponovno ćemo napisati diferencijalne jednadžbe za G_0 i G_1 :

$$\begin{aligned} G'_0 &= \gamma_0 + bG_1 - \frac{1}{2}aG_1^2, & G_0(0) = 0, \\ G'_1 &= \gamma_1 + \beta G_1 - \frac{1}{2}\alpha G_1^2, & G_1(0) = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

S obzirom da prirasti rastu s kvadratima u jednadžbi (6.9) može doći do eksplozije. Može se pokazati da jednadžba (6.9) daje neeksplodirajuće rješenje ako i samo ako $\alpha\gamma_1 \geq 0$ ili oboje $\alpha\gamma_1 < 0$ i $\beta \leq -\sqrt{2|\alpha\gamma_1|}$. Pretpostavimo da je $\alpha > 0$. Teorem 6.7 nam kaže da $y \rightarrow \sqrt{a + \alpha y}$ mora biti lokalno Lipschitz neprekidno na V . Stoga $a + \alpha y$ mora biti izvan nule. Stoga $V \subset [\frac{\varepsilon-a}{\alpha}, \infty)$ za neko $\varepsilon > 0$. Dinamika koordinatnog procesa (označimo ga sa Y) zadana sa (5.41) je dana sljedećom jednadžbom:

$$dY_t = (b + \beta Y_t)dt + \sqrt{a + \alpha Y_t}d\tilde{W}_t, \quad Y_0 \in V \quad (6.10)$$

Može se pokazati da jednadžba (6.10) (vidi [14, stranica 221] i supstituiraj $X := Y + \frac{a}{\alpha}$) ima jedinstveno globalno neprekidno rješenje na $[\frac{-a}{\alpha}, \infty)$ ako $b \geq \frac{a}{\alpha}\beta$. Ako je $\alpha < 0$ tada zahtjevamo da $V \subset (-\infty, \frac{\varepsilon-a}{\alpha}]$ za neki $\varepsilon > 0$, a jednadžba (6.10) ostaje valjana.

6.3.1 Vasičekov model

Uzmimo $\alpha = 0$ pa dobivamo da je Y Gaussov proces i nemamo nikakvih uvjeta na V . Za $\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1, b \geq 0$ i $\beta < 0$ imamo rješenja:

$$G_1(x) = \frac{1}{\beta}(e^{\beta x} - 1)$$

i:

$$G_0(x) = b \int_0^x G_1(\eta)d\eta - \frac{1}{2}a \int_0^x G_1^2(\eta)d\eta$$

Očito je $g_0 = bG_1 - \frac{1}{2}aG_1^2 \in H_w$ i $g_1(x) = e^{\beta x} \in H_w^0$ za w iz primjera 4.4. Ako pogledamo dinamiku od $r(t) := r(t, 0) = g_0(0) + Y_t g_1(0) = Y_t$ vidimo da smo u Vasičekovom modelu.

6.3.2 Cox-Ingersoll-Ross model

Za $\alpha > 0, \gamma_1 = 1$ i $a = \gamma_0 = 0$ (i stoga $b \geq 0$) dobivamo CIR model (opet $r(t, 0) = Y_t$). Postoji formula za rješenje jednadžbe (6.9):

$$G_1(x) = \frac{2(e^{(\sqrt{\beta^2+2\alpha})x} - 1)}{(\sqrt{\beta^2+2\alpha} - \beta)(e^{(\sqrt{\beta^2+2\alpha})x} - 1) + 2\sqrt{\beta^2+2\alpha}}$$

i

$$G_0(x) = b \int_0^x G_1(\eta) d\eta.$$

Možemo provjeriti da $g_0 = G'_0 = bG_1 \in H_w$ i $g_1 = G'_1 \in H_w^0$ za svaki polinomijalni w iz primjera 4.4. Stoga je CIR model također dio našeg razmatranja. Iz identiteta $y = g_0(0) + yg_1(0) = \mathcal{J}_0(\phi(y))$ i relacije (5.35) dobivamo:

$$\sigma(t, \omega, h) \equiv \sigma^1(h) = \sqrt{\alpha \mathcal{J}_0(h)} g_1, \quad h \in \phi(0, \infty).$$

Sa $\tilde{\sigma} : H_w \rightarrow H_w^0$ označimo izmjerivo proširenje od σ . Neka je Y neprekidno rješenje od (6.10) sa $Y_0 > \varepsilon$ i stavimo $\tau_\varepsilon = \inf\{t | Y_t \leq \varepsilon\}$. Sada iz teorema 5.23 slijedi da je $(r_{t \wedge \tau_\varepsilon}) = (\phi(Y_{t \wedge \tau_\varepsilon}))$ sa $r_0 = \phi(Y_0)$ jedinstveno neprekidno lokalno strogo rješenje HJMM jednadžbe (3.18) gdje je volatilnost zadana sa $\tilde{\sigma}$. Ali znamo da se $\sigma(h)$ pa stoga ni $\sigma(\tilde{h})$ ne mogu proširiti do Lipschitz neprekidne funkcije u nuli. Stoga iako je $\phi(Y)$ lokalno strogo rješenje HJMM jednadžbe (3.18) ne možemo ništa reći o globalnoj egzistenciji i jedinstvenosti. Jedinstvenost ipak slijedi za strogo pozitivna rješenja Y po prethodnoj diskusiji.

Literatura

- [1] T.Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, 1998
- [2] T.Björk, B.J. Christensen, *Interest rate dynamics and consistent forward rate curves*, Mathematical Finance, 9:323-348, 1999.
- [3] T.Björk, L.Svensson. *On the existence of finite dimensional realizations for nonolninear forward rate models*, Mathematical Finance, 11:205-243,2001
- [4] H. Cartan, *Differentialrechnung*, Bibliographsches Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1974
- [5] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press, 1992
- [6] K.L.Chung, *A course in probability theory*, Academic Press, third edition, San Diego, 2001
- [7] R.Dautray, J.L. Lions, *Mathematical analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Volume 5, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992
- [8] D.Duffie, R.Kan, *A yield-factor model of interest rates*, Mathematical Finance 6:379-406, 1996
- [9] M.Emery, *Stochastic calculus in manifolds*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989
- [10] D.Filipović, *A note on the Nelson-Siegel family*, Mathematical Finance, 9(4):349-359, 1999
- [11] D.Filipović, *Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2001
- [12] D.Filipović, J. Teichmann, *On finite-dimensional term structure models*, Working paper, Princeton University, 2002.

- [13] D.Heath, R.Jarrow, A.Morton, *Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claim valuation*, Econometrica,60:77-105, 1992
- [14] N.Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic Differential equations and Diffusion Processes*, North-Holland, Amsterdam, 1981
- [15] J.Jacod, A. N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, Springer-Verlag, second edition, Berlin-Heidelberg-New York, 2002
- [16] I. Karatzas, S.E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, New York, 1998
- [17] I.Karatzas, S. E.Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, New York, second edition, 1991
- [18] S.Kurepa, *Funkcionalna analiza-elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [19] M.Musiela, *Stochastic PDEs and term structure models*, Journées Internationales de Finance, IGR-AFFI, La Baule, 1993
- [20] M.Musiela, M.Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1997
- [21] D. Revuz, M. Yor, *Continous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, third edition, Berlin-Heidelberg-Neww York, 1998
- [22] W.Rudin. *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1991, second edition
- [23] N.Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, drugo izdanje, Zagreb, 1992.
- [24] F.W.Warner, *Foundations of Differentiable manifolds and Lie groups*, Scott-Foresman and Company, London, 1970

Sažetak

U ovom radu govorimo o konzistenciji određenog modela kretanja cijena budućih stopa (npr. Vasičekov model, Ho-Leejev model) i određene parametrizirane familije krivulja (npr. Nelson-Siegel familije). Za model pretpostavljamo da je dan u okviru HJM načina modeliranja. Koristeći Musielinu parametrizaciju prirodno je HJM jednadžbu analizirati u okviru separabilnih Hilbertovih prostora (na nekom prostoru funkcija).

U prvom poglavlju dajemo prikaz osnovnih rezultata iz stohastičke analize na separabilnim Hilbertovim prostorima; definiramo pojam beskonačnodimenzionalnog Brownovog gibanja i definiramo pojam stohastičkog integrala predvidljivog procesa s vrijednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru s obzirom na beskonačnodimenzionalno Brownovo gibanje. Nadalje govorimo o pojmu rješenja za stohastičku diferencijalnu jednadžbu i dajemo prikaz nekih teorema egzistencije. Slično kao i u determinističkoj teoriji lokalna Lipschitzovost i lokalna ograničenost u koeficijentima su dovoljne za egzistenciju neprekidnog lokalnog slabog rješenja.

U drugom poglavlju je pokazano da već sama činjenica što parametrizirana familija krivulja mora davati model koji zadovoljava HJM uvjet (ako za koeficijente pretpostavimo da se kreću po Itôvom procesu) daje određenu restrikciju na familiju krivulja. Nadalje, pokazano je da Nelson-Siegel familija nije konzistentna ni sa jednim realnim modelom; naime krivulje budućih stopa ostaju \mathcal{F}_0 izmjerive.

U trećem poglavlju analiziramo HJM model i pokazujemo put od standarnog HJM modela do odgovarajuće stohastičke jednadžbe u separabilnom Hilbertovom prostoru H . Sama činjenica što prelazimo na te prostore traži određene pretpostavke na prostor H i stoga u četvrtom poglavlju dajemo primjere prostora koji zadovoljavaju te pretpostavke kao i naše iskustvo kako krivulje budućih stopa izgledaju.

U petom poglavlju dajemo nužne i dovoljne uvjete kada stohastička diferencijalna jednažba ima rješenje koje ostaje na mnogostrukosti (to je matematička formulacija konzistencije), preciznije, uvodimo pojam lokalne invarijantnosti i pokazujemo nužne i dovoljne uvjete da bi mnogostruktost bila lokalno invarijantna za stohastičku diferencijalnu jednadžbu u H . Nadalje identificiramo odgovarajući koordinatni proces za proizvoljnu glatku parametrizaciju mnogostrukosti. Peto poglavlje ključni je dio ove radnje.

U šestom poglavlju koristimo rezultate iz petog u primjeni na HJM jednadžbu, dobivamo jednadžbu koju mora zadovoljavati glatka parametrizacija i koeficijenti koordinatnog procesa da bi mnogostrukost bila lokalno invarijantna za HJM jednadžbu i taj dobiveni uvjet koristimo da bismo identificirali neke affine modele.

Summary

In this work we present the consistency problems for modelling the prices of forward rates; in fact we are talking about the consistency between the model (for example Vasicek model, Ho-Lee model,...) and the parameterized family of curves. We suppose that the forward rates models are given in HJM framework.

In the first chapter we present the basic results from stochastic analysis in separable Hilbert space; we define infinite dimensional Brownian motion and stochastic integral of the predictable process which takes values in separable Hilbert space H where the underlying martingale is infinite dimensional Brownian motion. We also give the definition of the solution of stochastic differential equation in H and we present sufficient conditions on the coefficients of the equation that provide the existence results. Similarly, as in the deterministic case, locally Lipschitz and locally bounded coefficients give continuous, local weak solution.

In the second chapter we give the restriction on the family of curves which guarantees non-arbitrage models. We also analyze Nelson-Siegel families which are shown to be inconsistent with any real model because forward rates are then \mathcal{F}_0 measurable.

In the third chapter we analyze the HJM model and we show the way from standard HJM model to the stochastic equation in H . To translate the HJM model in the language of the stochastic equations requires some conditions on the space H and so in the fourth chapter we give some examples of the spaces which satisfy these conditions.

In the fifth chapter we present necessary and sufficient conditions when stochastic equation has the solution which stays on the manifold (that is the mathematical formulation of the consistency), in fact we introduce the notion of local invariance and we present the necessary and sufficient conditions on the manifold to be locally invariant for the stochastic equation in H . Also we identify the underlying coordinate process for a given smooth parametrization of the manifold. The fifth chapter is the main chapter of this work.

In the sixth chapter we use the results from the fifth to give conditions on the manifold to be locally invariant for the HJM equation and we use these conditions to identify some affine models.

Životopis

Rođen sam 27.3.1978. u Splitu, gdje sam završio osnovnu školu te pohađao Treću (matematičku) gimnaziju. U jesen 1996. upisao sam studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, profil diplomirani inžinjer matematike, smjer teorijska matematika. Diplomirao sam 13. lipnja 2001. s temom *Brownovo gibanje* pod vodstvom prof. dr. sc. Zorana Vondračeka.

Zajednički poslijediplomski studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta upisao sam 2001. godine, te sam sudjelovao u radu *Seminara za teoriju vjerojatnosti*. Od 1. rujna 2001. godine sam zaposlen kao znanstveni novak na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.