

FORMULAZIONE SBI-ITD PER IL CAMPO DI UN RIFLETTORE IPERBOLICO

A. Pippi¹, M. Sabbadini², S. Škokić³, S. Maci¹, R. Tiberio¹

¹Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Siena, Italia
e-mail: pippi@dii.unisi.it, macis@ing.unisi.it, tiberio@ing.unisi.it

²Electromagnetics Division, European Space Agency (ESA-ESTEC), The Netherlands
e-mail: marco.sabbadini@esa.int

³Faculty of Electrical Engineering and Computing, University of Zagreb, Croatia
e-mail: sinisa.skokic@fer.hr

Abstract

The Shadow Boundary Integral (SBI) technique provides an efficient representation of the Physical Optics (PO) field radiated by canonical reflector antennas in terms of a line diffraction integral along its rim plus the Geometrical Optics (GO) reflected field. In this paper the PO field from a hyperbolic reflector is augmented by fringe diffraction contributions, provided by the Incremental Theory of Diffraction (ITD). Both the SBI and the ITD representations of the diffracted field consist of distributed incremental contribution, numerically integrated along the edge of the actual object.

I. INTRODUZIONE

Il metodo di Integrazione sui Confini d'Ombra (Shadow Boundary Integral - SBI) è stato proposto di recente al fine di accelerare la valutazione del campo di Ottica Fisica (PO) irradiato da riflettori parabolici [1] ed iperbolici [2]. Come noto, l'onere computazionale per l'integrale di radiazione delle correnti superficiali di PO sulla parte illuminata di un oggetto è proporzionale al quadrato delle sue dimensioni in termini di lunghezze d'onda; questo approccio può quindi divenire impraticabile nel caso di riflettori molto grandi, o di sistemi di più riflettori in cascata. La tecnica SBI accelera notevolmente l'operazione riformulando il campo di PO, irradiato da un riflettore canonico con illuminazione focale, come somma del campo riflesso di Ottica Geometrica (GO) e di un integrale di linea sul bordo del riflettore. Questa rappresentazione, dal chiaro significato fisico e valida in regione di campo sia lontano che vicino, determina un notevole risparmio nei tempi di calcolo. In particolare, nel caso in cui il campo di PO di un subriflettore iperbolico sia impiegato per illuminare il riflettore principale parabolico di un sistema Cassegrain, l'integrale di radiazione di PO sul riflettore principale può essere ancora valutato con lo stesso approccio SBI, fornendo quindi uno strumento molto efficiente per il calcolo del campo irradiato dall'intero sistema di riflettori.

La rappresentazione SBI è ispirata dal lavoro di Rubinowicz [3] sulla radiazione di tipo Kirchhoff-Kottler da aperture finite. In questa sede la stessa formulazione è estesa al caso di riflettori iperbolici mediante l'applicazione del principio di equivalenza a due distinti problemi ausiliari. Nel primo, viene considerata una superficie definita proiettando all'infinito il fuoco reale attraverso il bordo del riflettore; nel secondo, la superficie è definita proiettando il fuoco immagine. Ciascuna di queste due superfici coniche coincide rispettivamente con il Confine d'Ombra (Shadow Boundary - SB) ottico di incidenza o di riflessione (Fig. 1). Il guadagno computazionale deriva dalla valutazione analitica in forma chiusa di un integrale, in ciascuno dei due integrali superficiali doppi che definiscono il campo irradiato dalle correnti equivalenti sul corrispondente SB. Gli integrali curvilinei sul bordo, così ottenuti, ricostruiscono il campo diffratto nell'ipotesi di PO.

La formulazione proposta si presta ad essere raffinata includendo contributi diffrattivi di frange, come quelli forniti dalla Teoria Incrementale della Diffrazione (ITD) [4],[5],[6]. Questa correzione del campo di PO determina un significativo incremento di accuratezza quando la direzione di osservazione si allontana dagli SB ottici di incidenza e riflessione, soprattutto per le componenti crosspolari. Oltre a questo, il contributo di frange predetto dalla ITD tende a cancellare il tipico comportamento non reciproco del campo di PO. Le espressioni esplicite qui presentate per i contributi incrementali di diffrazione di frange seguono la formulazione ITD recentemente migliorata [7]. Un vantaggio evidente è che l'aggiunta ITD di frange preserva la rappresentazione di campo in termini di integrali di linea ottenuta con l'approccio SBI: anche in questo caso, infatti, il campo irradiato dal riflettore iperbolico viene espresso come somma del campo riflesso di GO e di un integrale di linea sul bordo, in grado di fornire una stima migliore del campo diffratto. In particolare, la dipendenza dei tempi di calcolo dalle dimensioni del riflettore è ancora lineare, mantenendo quindi il relativo vantaggio computazionale.

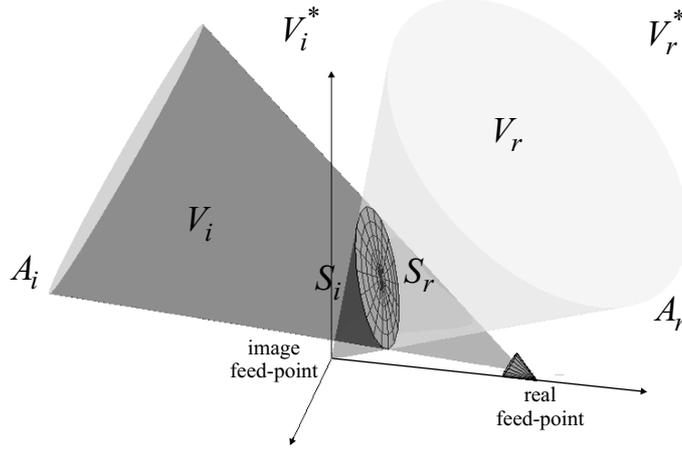


Fig. 1. Confini d'Ombra conici di incidenza e riflessione per un riflettore iperbolico con illuminazione focale.

II. FORMULAZIONE SBI

Si consideri un riflettore iperbolico illuminato da una sorgente il cui centro di fase coincide con il fuoco interno (reale) (Fig. 1); tale illuminazione è equivalente a quella di una sorgente virtuale posta nel fuoco esterno (immagine). Sia S_i la faccia della superficie del riflettore rivolta verso il fuoco immagine, ed A_i la superficie dello SB conico di incidenza, passante attraverso il bordo e troncata da S_i . In maniera analoga, S_r indica l'altra faccia della superficie del riflettore, ed A_r è la superficie conica troncata dello SB di riflessione. Siano infine, rispettivamente, V_i e V_i^* i volumi interno ed esterno alla superficie $S_i + A_i$; allo stesso modo sono definiti V_r e V_r^* rispetto ad $S_r + A_r$.

In base all'approccio SBI, il campo di PO irradiato dal riflettore iperbolico in un punto di osservazione \mathbf{r} viene formulato come:

$$\mathbf{E}^{SBI}(\mathbf{r}) \approx -\mathbf{E}_r^\ell(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_i^\ell(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_r^{GO}(\mathbf{r})U_r(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_i^{GO}(\mathbf{r})U_i(\mathbf{r}) \quad . \quad (1)$$

Nella (1) \mathbf{E}_i^{GO} and \mathbf{E}_r^{GO} indicano rispettivamente il campo incidente di GO in assenza del riflettore ed il campo riflesso di GO. Nella formulazione SBI il dominio di esistenza di ciascuno di questi contributi ottici è limitato alla regione interna del rispettivo cono di SB, ovvero a V_i oppure V_r ; le relative funzioni caratteristiche sono indicate con U_i e U_r . I campi \mathbf{E}_i^ℓ e \mathbf{E}_r^ℓ sono generati dalle correnti equivalenti sui due SB conici; la loro somma, essendo pari alla differenza tra i campi di PO e GO, assume l'attraente significato fisico di campo diffratto sul bordo del riflettore, nell'ipotesi di PO.

Come mostrato in [2], i campi diffratti di PO, \mathbf{E}_i^ℓ e \mathbf{E}_r^ℓ , possono essere ridotti in forma esatta ad integrali di linea sul bordo del riflettore ℓ . Si consideri ad esempio \mathbf{E}_r^ℓ , che rappresenta il contributo dominante nella regione del riflettore principale di un sistema Cassegrain. I contributi incrementali al campo di PO possono essere espressi in una conveniente forma analitica introducendo un opportuno sistema di riferimento locale in ciascun punto sul bordo del riflettore. Sia perciò $\mathbf{r}_{o,r}$ il vettore posizione, rispetto al fuoco immagine F_2 , del generico punto O su ℓ (Fig. 2a). Si definisce un sistema di riferimento sferico locale (R_o, θ_s, ϕ_s) , con origine in O ed asse z_s orientato lungo $\hat{r}_{o,r}$, in direzione radiale da F_2 . I relativi versori sono dati da

$$\hat{R}_o = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{o,r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{o,r}|} \quad , \quad \hat{\phi}_s = \frac{\hat{r}_{o,r} \times \hat{R}_o}{|\hat{r}_{o,r} \times \hat{R}_o|} \quad , \quad \hat{\theta}_s = \hat{\phi}_s \times \hat{R}_o \quad . \quad (2)$$

Usando questa notazione, \mathbf{E}_r^ℓ può essere espresso come:

$$\mathbf{E}_r^\ell(\mathbf{r}) = \int_{\ell} [\mathbf{e}_{J,r}(\mathbf{r}, \ell) + \mathbf{e}_{M,r}(\mathbf{r}, \ell)] d\ell \quad , \quad (3)$$

dove ℓ è l'ascissa curvilinea sul contorno del bordo, di versore $\hat{\ell}$, ed i contributi incrementali di campo $\mathbf{e}_{J,r} d\ell$ e $\mathbf{e}_{M,r} d\ell$,

$$\mathbf{e}_{J,r}(\mathbf{r}, \ell) = \zeta \left\{ \hat{n} \times \mathbf{H}_r^{GO}(\ell) \right\} |\hat{r}_{o,r} \times \hat{\ell}| \frac{e^{-jkR_o}}{4\pi R_o} \left(-\frac{\hat{R}_o}{jkR_o} + \cot \frac{\theta_s}{2} \hat{\theta}_s \right) \quad (4)$$

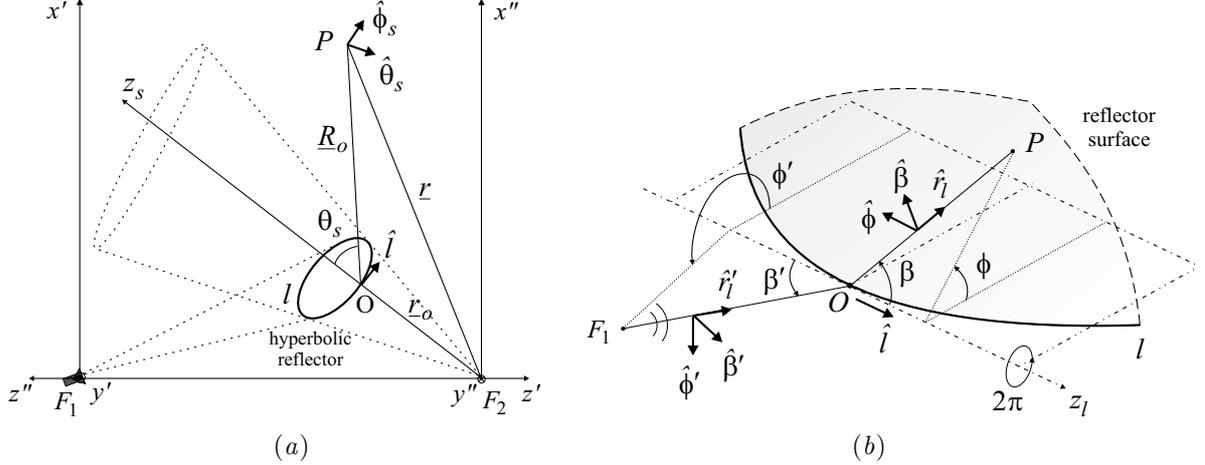


Fig. 2. Sistemi di riferimento sferici locali centrati nel generico punto O sul bordo ℓ del riflettore, adottati: (a) per la formulazione SBI del campo diffratto di PO; (b) per la formulazione ITD del campo diffratto di fringe.

$$\mathbf{e}_{M,r}(\mathbf{r}, \ell) = \left\{ -\mathbf{E}_r^{GO}(\ell) \times \hat{\mathbf{n}} \right\} |\hat{\mathbf{r}}_{o,r} \times \hat{\ell}| \frac{e^{-jkR_o}}{4\pi R_o} \cot \frac{\theta_s}{2} \hat{\phi}_s \quad , \quad (5)$$

sono irradiati da strisce semiinfinite trapezoidali (comprese tra due generatrici del cono e con base di larghezza $d\ell$) di correnti equivalenti, elettriche o magnetiche, disposte radialmente. I campi riflessi di GO nelle (4) e (5) sono valutati nel generico punto O sul bordo.

Mediante equazioni analoghe alle (3) e (4)-(5) si può esprimere anche \mathbf{E}_i^ℓ , di modo da completare la rappresentazione (1) di \mathbf{E}^{SBI} in termini di integrali di linea. Nelle espressioni per \mathbf{E}_i^ℓ vanno ovviamente considerati i campi incidenti di GO; inoltre, in ciascun contributo incrementale al campo diffratto di PO, il sistema di coordinate sferico locale va riferito alla direzione $\hat{\mathbf{r}}_{o,i}$, che emerge radialmente dal fuoco reale F_1 .

III. CORREZIONE ITD DI FRINGE

La metodologia ITD si basa sulla definizione di contributi incrementali di campo mediante un processo trasformata di Fourier/convoluzione. Per il principio di località in alta frequenza tali contributi sono dedotti dalla soluzione esatta di problemi canonici tangenti locali. Il processo di localizzazione consiste nell'associare, alla rappresentazione della soluzione canonica come integrale spettrale, il corrispondente integrale spaziale di convoluzione. In questo modo viene stabilita una relazione di trasformata di Fourier tra il campo del problema canonico ed il contributo incrementale proveniente dal punto di tangenza locale. Il contributo così definito viene distribuito adiabaticamente sulla linea effettiva di discontinuità del problema reale, ed integrato numericamente.

Lo stesso approccio può anche essere impiegato per ottenere una formulazione di campo di fringe che consente di migliorare l'approssimazione di PO. A tal fine, lo stesso processo di localizzazione della ITD viene applicato ad una rappresentazione come integrale spettrale della soluzione del relativo problema canonico per il campo di PO. Il contributo incrementale al campo diffratto di PO è poi sottratto a quello totale, determinando così il contributo incrementale al campo di fringe.

La correzione ITD di fringe è applicata al campo di PO predetto dall'approccio SBI, di modo da ottenere una più accurata descrizione degli effetti diffrattivi mediante un semplice termine addizionale all'interno dell'integrale di linea. Combinando le formulazioni SBI e ITD di fringe, il campo totale è espresso nella forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{SBI}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^f(\mathbf{r}) \quad (6)$$

dove \mathbf{E}^{SBI} è dato dalla (1), ed il campo di fringe totale è ottenuto come:

$$\mathbf{E}^f(\mathbf{r}) = \int_{\ell} \mathbf{e}^f(\mathbf{r}, \ell) d\ell \quad . \quad (7)$$

Espressioni diadiche esplicite dei coefficienti di diffrazione incrementali, per una configurazione di semipiano locale, vengono derivate in [7]. Il corrispondente contributo incrementale ITD al campo di fringe vale:

$$\mathbf{e}^f(\mathbf{r}, \ell) = \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \underline{\underline{D}}^f(\beta, \beta', \phi, \phi') \cdot \mathbf{E}_i^{GO}(\ell) \quad (8)$$

dove il campo incidente (nello specifico di GO) è valutato nel punto di ascissa ℓ sul bordo del riflettore. Il coefficiente diadico di diffrazione dipende esplicitamente dalle direzioni di incidenza (β', ϕ') e osservazione (β, ϕ) , ed è dato da:

$$\underline{\underline{D}}^f(\beta, \beta', \phi, \phi') = D_{11}^f(\beta, \beta', \phi, \phi') \hat{\beta} \hat{\beta}' + D_{12}^f(\beta, \beta', \phi, \phi') \hat{\beta} \hat{\phi}' + D_{22}^f(\beta, \beta', \phi, \phi') \hat{\phi} \hat{\phi}' \quad (9)$$

dove

$$\begin{aligned} D_{11}^f(\beta, \beta', \phi, \phi') &= d_2^f(\beta, \beta', \phi - \phi') - d_2^f(\beta, \beta', \phi + \phi') \\ D_{22}^f(\beta, \beta', \phi, \phi') &= d_2^f(\beta, \beta', \phi - \phi') + d_2^f(\beta, \beta', \phi + \phi') \\ D_{12}^f(\beta, \beta', \phi, \phi') &= \text{sgn}(z_\ell + z'_\ell) \sqrt{1 - \sin \beta \sin \beta'} \quad , \end{aligned} \quad (10)$$

$$d_2^f(\beta, \beta', \Phi) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\sin \beta \sin \beta'} \cos \frac{\Phi}{2}}{\sin \frac{\beta + \beta'}{2} + \sqrt{\sin \beta \sin \beta'} \sin \frac{\Phi}{2}} \quad . \quad (11)$$

Per descrivere in forma conveniente i coefficienti di diffrazione, nelle (8)-(11) è stato introdotto un ulteriore sistema di riferimento sferico locale, (r, β, ϕ) , centrato ancora nel generico punto O sul bordo. Il relativo asse z_ℓ è ora localmente tangente al bordo, parallelo ad $\hat{\ell}$; la coordinata ϕ è misurata in senso antiorario rispetto alla direzione z_ℓ (Fig. 2b). In questo sistema di riferimento la sorgente (focale) è individuata da $(r'_\ell = r_{o,i}, \beta', \phi')$, e l'osservatore \mathbf{r} da (r_ℓ, β, ϕ) ; come è comune nei problemi di diffrazione, l'angolo β' è misurato dalla parte negativa dell'asse z_ℓ , ed \hat{r}'_ℓ è orientato dal punto sorgente F_1 verso il punto O su ℓ . I versori nella (9) sono definiti da:

$$\begin{aligned} \hat{r}'_\ell = \hat{r}_{o,i} \quad , \quad \hat{\phi}' = -\frac{\hat{\ell} \times \hat{r}_{o,i}}{|\hat{\ell} \times \hat{r}_{o,i}|} \quad , \quad \hat{\beta}' = \hat{\phi}' \times \hat{r}_{o,i} \quad ; \\ \hat{r}_\ell = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{o,i}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{o,i}|} \quad , \quad \hat{\phi} = \frac{\hat{\ell} \times \hat{r}_\ell}{|\hat{\ell} \times \hat{r}_\ell|} \quad , \quad \hat{\beta} = \hat{\phi} \times \hat{r}_\ell \quad . \end{aligned} \quad (12)$$

Inoltre, nella terza delle (10), $\text{sgn}(\cdot)$ indica il segno dell'argomento, e si considera il valore principale della radice, come nella (11), di modo che D_{12}^f cambi segno al cambiare del verso dell'asse z_ℓ ; nella (11) si ha anche $\Phi = \phi \pm \phi'$. Da ultimo, vale la pena evidenziare che la formulazione ITD di frange qui adottata rimane regolare per ogni direzione di incidenza ed osservazione, comprese $\beta' = 0$ e $\beta = 0$.

IV. CONCLUSIONI

L'introduzione nella tecnica SBI della correzione ITD di frange fornisce una formulazione più raffinata in grado di dare stime più accurate dei campi reirradiati in regione d'ombra. Tale miglioramento dovrebbe rivelarsi particolarmente significativo nel calcolo delle componenti crosspolari. Le simulazioni hanno provato che, nella maggior parte dei casi di interesse, la metodologia SBI garantisce un'accuratezza equivalente a quella della PO, e diviene più efficiente della PO classica per riflettori di diametro superiore a circa 20 lunghezze d'onda. La correzione ITD di frange incrementa l'accuratezza senza aumentare significativamente l'onere numerico. I relativi risultati numerici saranno discussi nel corso della presentazione.

REFERENCES

- [1] L. Infante, S. Maci, "Near-Field Line-Integral Representation of the Kirchhoff-Type Aperture Radiation for a Parabolic Reflector", *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, December 2003.
- [2] A. Caruso, A. Pippi, M. Sabbadini, S. Maci, "Line-Integral Representation of the PO Radiation Integral from a Cassegrain Subreflector", *Conf. Proc. of the 26th ESA Antenna Technology Workshop on Satellite Antenna Modelling and Design Tools*, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, November 12-14, 2003.
- [3] A. Rubinowicz, "Geometric Derivation of the Miyamoto-Wolf Formula for the Vector Potential Associated with a Solution of the Helmholtz Equation", *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 52, n. 6, pp. 717-718, June 1962.
- [4] R. Tiberio and S. Maci, "An Incremental Theory of Diffraction: Scalar Formulation", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol 42, no. 5, May 1994.
- [5] R. Tiberio, S. Maci and A. Toccafondi, "An Incremental Theory of Diffraction: Electromagnetic Formulation", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol 43, no. 1, January 1995.
- [6] R. Tiberio, S. Maci and A. Toccafondi, "Incremental Diffraction Coefficients for Source and Observation at Finite Distance from an Edge", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol 44, no. 5, May 1996.
- [7] R. Tiberio, A. Toccafondi, A. Polemi, S. Maci, "Incremental Theory of Diffraction: a New Improved Formulation", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Sept. 2004.