SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET

UTJECAJ PARAMETARA NUMERIČKE MREŽE NA REZULTAT SIMULACIJA STRUJANJA U PLITKIM VODAMA

Magistarski rad

Siniša Družeta

Rijeka, 2004.

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET

UTJECAJ PARAMETARA NUMERIČKE MREŽE NA REZULTAT SIMULACIJA STRUJANJA U PLITKIM VODAMA

Magistarski rad

Siniša Družeta

Mentor: Red. prof. dr. sc. Luka Sopta

Rijeka, 2004.

(odluka Fakultetskog vijeća Tehničkog fakulteta
Sveučilišta u Rijeci o odobrenju teme)

Sažetak

Parametri numeričke mreže znatno utječu na rezultat simulacija strujanja plitkih voda. Kompleksna problematika numeričkog modeliranja strujanja plitkih voda i specifičnosti numeričkog modela svakog pojedinog problema onemogućuju postavljanje jednostavnih kriterija za dovoljno gustu i dovoljno kvalitetno oblikovanu numeričku mrežu. Provedena je analiza utjecaja parametara numeričke mreže na rezultat simulacija strujanja u plitkim vodama u području praktične upotrebe numeričkog modela plitkih voda. Postupak je proveden usporedbom numeričkih rezultata sa podacima dobivenim mjerenjima na eksperimentalnim i realnim test-primjerima pucanja brana i propagacije poplavnih valova. Rezultati provedenog istraživanja pokazuju da gustoća numeričke mreže sama po sebi slabo utječe na točnost modela te se optimalnom početnom numeričkom mrežom može smatrati svaka mreža koja sa minimalnim brojem ćelija dovoljno detaljno i točno opisuje topografiju poplavnog područja, a ujedno njena rezolucija omogućuje dobro opisivanje bitnih šok-valova. Način utjecaja loše oblikovanih ćelija numeričke mreže na rezultat simulacija vrlo je složen, no umjerena nekvaliteta numeričke mreže, koju se može realno očekivati kao proizvod standardnog postupka izrade numeričke mreže, ne smanjuje značajno globalnu točnost cjelokupnog numeričkog modela.

Abstract

Numerical mesh properties significantly affect shallow water numerical model results. Due to shallow water numerical modeling complexity and model particularities of each specific problem there are no simple criteria for mesh resolution and quality. An analysis of mesh properties' influence on shallow water numerical simulations results in the context of practical application was performed. This was carried out by comparing numerical and experimental results for dam break with flood wave propagation test-cases. The investigation showed that low mesh density itself does not significantly reduce model accuracy. Therefore, optimal initial mesh proved to be the one with the lowest resolution still ensuring acceptable topology and flow properties detail. As expected, numerical tests confirmed highly complex manner of the way poorly shaped mesh elements influence model accuracy. However, it is demonstrated that limited number of poorly shaped mesh elements obtained with standard mesh generation procedure does not considerably decrease model accuracy.

Predgovor

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Luki Sopti na trajnom vodstvu kroz znanstvena istraživanja na području mehanike fluida i numeričkih metoda te smjernicama i pomoći pri izradi ovog rada. Također, veliku zahvalnost dugujem prof. dr. sc. Senki Vuković i mr. sc. Ladi Kranjčeviću na savjetima za izradu ovog rada i kontinuiranoj pomoći u mom znanstvenom i stručnom radu.

Na ovom mjestu želio bih se zahvaliti i kolegama Jerku Škifiću, mr. sc. Nelidi Črnjarić-Žic, Bojanu Crnkoviću te ostalim kolegama sa mog Zavoda, koji su mi uvijek bili spremni pružiti pomoć, kako pri izradi ovog rada, tako i uopće.

Na kraju, posebno sam zahvalan mojoj djevojci Maji na snažnoj potpori i pomoći pri izradi slika za potrebe ovog rada, kao i mojoj obitelji i prijateljima na podršci.

Sadržaj

1. Uvod

Razvoj numeričkih metoda i stalan porast mogućnosti računala definira upotrebu računalnih simulacija kao neizbježnog nasljednika bitno skupljih i vremenski dugotrajnijih laboratorijskih ispitivanja.

Upotreba dvodimenzionalnog matematičkog modela plitkih voda za opis većine realnih problema strujanja u otvorenim vodotocima sa pojavom poplavljivanja potvrdila se kao primjerena i opravdana. Brz razvoj i sve bolja praktična provjerenost dvodimenzionalnog modela te napredak u tehnologiji geodetskih mjerenja polako potiskuju u praksi rašireniji jednodimenzionalni model, koji se još uvijek smatra optimalnim jedino za opis izrazito jednodimenzionalnog strujanja, kakvo nalazimo u rijekama i kanalima.

Matematičkom modelu plitkih voda svojstven je niz tipičnih standardnih teškoća: složena priroda nelinearnih hiperboličkih sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, formiranje diskontinuiteta (šokova), transkritičnost strujanja, implementacija rubnih uvjeta i način tretiranja granice između „mokrog“ i „suhog“ dijela domene, moguća zahtjevnost geometrije terena i sl. Dvodimenzionalni model pak, uz bitno veću opću razinu kompleksnosti naspram jednodimenzionalnog modela, uvodi i dodatni „stupanj slobode“ cjelokupnog numeričkog modela: numeričku mrežu koja predstavlja digitalni model poplavnog područja.

Osnovni problem u tom smislu uzrokovan je temeljnom činjenicom da izvorni matematički model opisuje kontinuum, a ne skup (mrežu) točaka, što ima za posljedicu određen utjecaj karakteristika numeričke mreže na točnost rezultata simulacija. Ugušćivanje numeričke mreže se tako načelno smatra načinom postizanja veće točnosti, dok ograničeni računalni resursi diktiraju upotrebu numeričkih mreža sa što manjim brojem ćelija. Također, poznato je da nekvalitetno oblikovane ćelije numeričke mreže uzrokuju dodatnu numeričku grešku, ali je u kontekstu praktične primjene numeričkog modela teško procijeniti njegovu osjetljivost u tom smislu.

Upotreba nestrukturiranih numeričkih mreža podrazumijeva korištenje ćelija neuniformnih veličina i oblika. S obzirom da ne postoje *a priori* kriteriji dobro oblikovane numeričke mreže za modeliranje strujanja plitkih voda, izbor gustoće numeričke mreže i procjena kvalitete oblika njenih ćelija najčešće je potpuno prepušten osobi koja izrađuje numeričku mrežu odnosno njenom iskustvu i intuiciji.

Cilj ovog rada je analizirati utjecaj parametara numeričke mreže na rezultat simulacija strujanja u plitkim vodama u području praktične upotrebe numeričkog modela plitkih voda. Iskustva pokazuju da se praktična pouzdanost cjelokupnog numeričkog modela strujanja plitkih voda može utvrditi jedino usporedbom numeričkih rezultata sa podacima dobivenim mjerenjima, pa je analiza provedena na test-primjerima zasnovanima na eksperimentu.

U svrhu uvoda u opis provedenog istraživanja definiran je matematički model strujanja plitkih voda te numerička metoda. Predstavljen je korišteni softver Stripp12, koji je potvrđen dugogodišnjom upotrebom na realnim problemima. U posebnom poglavlju sustavno je opisana metodologija izrade numeričkih mreža za dvodimenzionalni model plitkih voda. Test-primjeri su preuzeti iz međunarodnog projekta CADAM (1998-2000), u kojem su sintetizirana svjetska dostignuća na području numeričkog modeliranja pucanja brana i propagacije poplavnih valova.

Na kraju rada dani su zaključci dobiveni na osnovu provedenog istraživanja koji mogu poslužiti kao pomoć za formiranje kriterija kvalitetne numeričke mreže za praktične potrebe simulacija strujanja plitkih voda.

2. Matematički model strujanja plitkih voda

2.1. Definicija plitkih voda

Standardne Navier-Stokesove jednadžbe koje modeliraju trodimenzionalno strujanje nestlačivog fluida moguće je reducirati na dvodimenzionalni model uz uvjet slobodne površine i pretpostavku usrednjenja brzine po dubini. U tako postavljenom modelu tlak se aproksimira hidrostatskim tlakom, a brzina se smatra konstantnom po dubini sloja.

Ovakav model sa dovoljnom točnošću opisuje nestacionarna strujanja obuhvaćena zajedničkim nazivom „strujanje plitkih voda“, pod čime se podrazumijeva takav tip strujanja vode kod kojeg je dubina vode relativno malena u usporedbi sa valnom duljinom poremećaja (npr. poplavnog vala). Pod tako definirano strujanje plitkih voda mogu spadati: strujanje vode u rijekama i kanalima, širenje poplavnog vala, pa čak i propagacija plimnih valova.

Matematički model koji opisuje strujanje plitkih voda određen je tzv. jednadžbama plitkih voda ili Saint Venantovim jednadžbama, koje su temeljene na fizikalnim zakonima očuvanja mase i količine gibanja. U prirodi postoji mnogo tipova strujanja koji se mogu dovoljno točno aproksimirati matematičkom teorijom plitkih voda, no ovaj se rad isključivo bavi onim dijelom teorije plitkih voda koji se odnosi na strujanje u otvorenim kanalima i širenje poplavnog vala.

Jednodimenzionalni (1D) model strujanja ispravno je primijeniti na strujanje vode u rijekama i otvorenim kanalima, gdje fluid struji dominantno u jednom smjeru. Ako voda struji na način da se razlijeva po terenu, tada se primjenjuje dvodimenzionalna (2D) analiza. U slučajevima kada je osim dominantnog smjera glavne struje u kanalu izraženo i sekundarno, dvodimenzionalno strujanje, nužno je analizu vršiti pomoću dvodimenzionalnog modela. Dvodimenzionalno strujanje nastaje iz više razloga: kao posljedica opstrujavanja raznih prepreka u vodi (npr. mosni stupovi), zbog same geometrije kanala (npr. zavojitost rijeke), ako postoji mogućnost nastanka vrtložnih zona, itd. Analogno tome, na mjestima u otvorenom kanalu, gdje je strujanje izrazito trodimenzionalno (npr. u zoni snažnog miješanja neposredno ispod preljeva), model plitkih voda neće moći detaljno opisati danu fizikalnu pojavu, pa je strujanje potrebno modelirati nekim od trodimenzionalnih modela strujanja sa slobodnom površinom.

Treba napomenuti da je uvijek potrebno izabrati onaj model koji je optimalan. Dvodimenzionalni model je mnogostruko složeniji i računski dugotrajniji od jednodimenzionalnog, no ponekad (npr. ovisno o dostupnosti geodetskih podataka) može biti i jednostavniji za upotrebu. S druge strane, jednodimenzionalni model je još uvijek pouzdaniji i mnogo brži za upotrebu, mada u konačnici kroz rezultat daje manje informacija. U slučajevima kada se npr. istražuju globalne karakteristike strujanja u otvorenom kanalu, ali se na manjem broju lokacija pojavljuje i izlijevanje, može se koristiti i tzv. hibridni 1D-2D model. Dakle, može se zaključiti da je potreban detaljan uvid u fizikalni problem i precizno definiranje cilja neke znanstvene analize prije nego se izabere optimalni model.

2.2. Jednodimenzionalne jednadžbe plitkih voda

Jednadžbe plitkih voda moguće je izvesti pojednostavljenjem Navier-Stokesovih jednadžbi za trodimenzionalno strujanje sa rubnim uvjetom slobodne površine. Jednodimenzionalne jednadžbe plitkih voda se tako mogu dobiti usrednjenjem Navier-Stokesovih jednadžbi po poprečnom presjeku kanala (okomito na smjer strujanja).

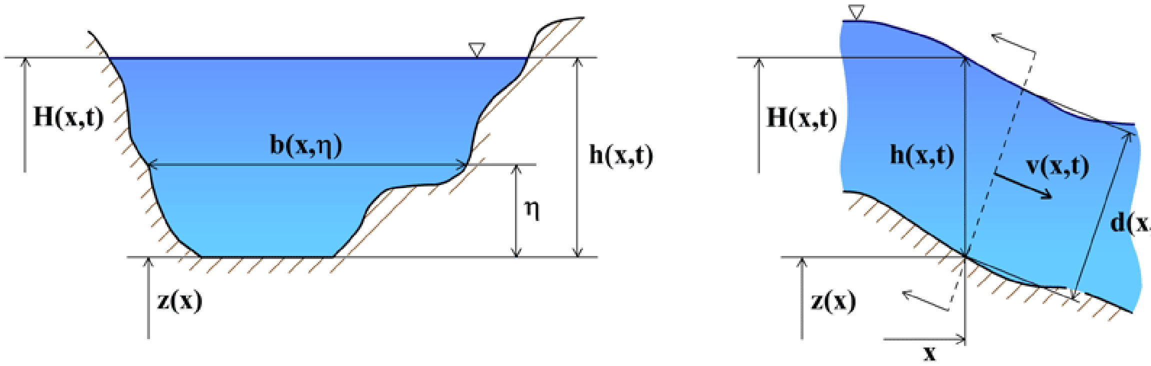
Ipak, jasniji način dobivanja jednadžbi plitkih voda je primjenom zakona očuvanja mase i zakona očuvanja količine gibanja na kontrolni volumen kanala.

Ovdje treba napomenuti da kod strujanja fluida treba razlikovati dva osnovna tipa gibanja: konvekcija i difuzija. Konvekcija se može opisno definirati kao glavna struja fluida, dok se difuzija može opisati kao vrtloženje uzrokovano viskoznošću fluida. Ukupni proces gibanja sastoji se stoga od kombinacije fenomena čiste konvekcije i difuzije, s time da je potrebno imati na umu da je, sa makroskopskog gledišta, proces konvekcije osnovni mehanizam, dok su efekti difuzije bitno nižeg reda veličine.

U nastavku opisani zakoni očuvanja stoga zanemaruju efekte viskoznosti i difuzije. Ovo pojednostavljenje pokazuje se kao opravdano, tim više što numerička greška nastala pri modeliranju konvekcije često može biti znatno veća od samog upliva fizikalne difuzije.

2.2.1. Zakoni očuvanja za strujanje u otvorenim kanalima

Strujanje u otvorenim kanalima karakterizira slobodna površina koja je izložena atmosferskom tlaku. Ovdje izvedene jednadžbe opisuju jednodimenzionalno nestacionarno strujanje fluida u otvorenom kanalu promjenjivog poprečnog presjeka. Na Slici 2.1 prikazani su poprečni i uzdužni presjeci sekcije kanala te osnovne veličine.



Slika 2.1. Poprečni i uzdužni presjek kanala

Neovisne varijable su: prostorna varijabla koja ima samo jednu komponentu x i vremenska varijabla t. Za opis strujanja koriste se dvije zavisne varijable i to brzina $v = v(x,t)$ koja se definira kao prosječna brzina u presjeku kanala na mjestu x usmjerena okomito na poprečni presjek te dubina toka $h = h(x,t)$ koja se definira kao vertikalna udaljenost najniže točke presjeka kanala na mjestu x od slobodne površine. Ponekad je praktičnije koristiti razinu slobodne površine $H = H(x,t)$ iznad određene referentne visine, gdje se obično kao referentna visina koristi nulta nadmorska visina. Pretpostavlja se da je nagib kanala relativno mali, tako da je dubina mjerena normalno na smjer strujanja $d = d(x,t)$ približno jednaka dubini toka h. Visina dna kanala označena je sa $z = z(x)$. Omočena površina poprečnog presjeka kanala (tj. površina poprečnog presjeka strujne cijevi) jest:

$$A = \int_0^h b \, d\eta \tag{2.1}$$

gdje je $b = b(x,\eta)$ širina kanala na mjestu x i visini η. Volumni protok kroz poprečni presjek $Q = Q(x,t)$ definiran je kao:

$$Q = \int_0^h v \cdot b d\eta \,. \tag{2.2}$$

Za potrebe modeliranja jednodimenzionalnog strujanja za opis stanja u poprečnom presjeku kanala bit će dovoljne dvije varijable: omočena površina poprečnog presjeka A i protok Q. (Iz ove dvije varijable u svakom se trenutku lako mogu rekonstruirati dubina vode i brzina strujanja.) Stoga su dovoljne dvije jednadžbe za analizu strujanja i to su jednadžba kontinuiteta sa jednadžbom očuvanja količine gibanja ili sa jednadžbom očuvanja energije. Jednadžba očuvanja količine gibanja i jednadžba očuvanja energije su ekvivalentne, ako su funkcije koje opisuju dubinu vode i brzinu strujanja neprekidne. No, s obzirom da strujanje može imati diskontinuitete (npr. hidraulički skok ili plimni val), bolje je koristiti jednadžbu očuvanja količine gibanja jer kod nje, za razliku od energetske jednadžbe, nije potrebno znati koliki su gubici u diskontinuitetima.

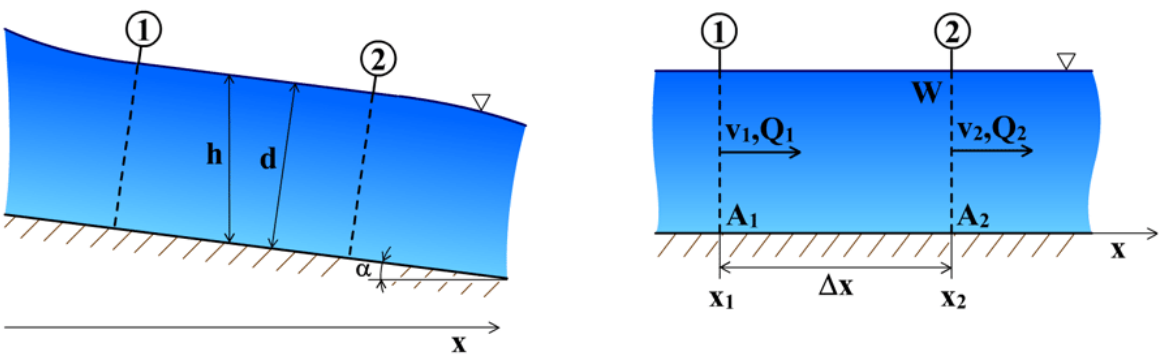
Kod izvođenja jednadžbe kontinuiteta i jednadžbe očuvanja količine gibanja za slučaj jednodimenzionalnog nestacionarnog strujanja u otvorenom kanalu koristit će se sljedeće pretpostavke:

- Raspodjela tlakova je hidrostatska. Ta pretpostavka vrijedi ukoliko strujnice nisu jako zakrivljene.
- Nagib dna kanala je dovoljno malen, tako da su dubine vode mjerene okomito na dno kanala i one mjerene vertikalno približno iste ($h \approx d$).
- Raspodjela brzina po poprečnom presjeku kanala je jednolika.
- Hidraulički gubici kod nestacionarnog toka su isti kao kod stacionarnog pri istoj brzini, tako da se mogu koristiti jednadžbe za otpore strujanja pri stacionarnom toku, kao što je npr. Manningova jednadžba.

2.2.2. Zakon očuvanja mase

Promatra se fiksirani kontrolni volumen W između presjeka 1 i 2 (Slika 2.2), duljine Δx, na koji se primjenjuje zakon očuvanja mase u integralnom obliku:

$$\frac{d}{dt}\int_W \rho dV + \int_S \rho \mathbf{vn} dA = 0 \;. \tag{2.3}$$



Slika 2.2. Kontrolni volumen

Pretpostavljen je mali nagib dna $S_b = \tan \alpha$, tako da je $h \approx d$ (Slika 2.2). Nadalje, pretpostavlja se da je fluid nestišljiv tako da se iz oba člana može izlučiti i pokratiti gustoća fluida ($\rho = const.$). Prvi član jednadžbe (2.3) predstavlja lokalnu promjenu mase u kontrolnom volumenu i s obzirom da se radi o jednodimenzionalnom strujanju uvodi se $dV = Adx$. Uzimajući u obzir da se vrši integracija po fiksiranom kontrolnom volumenu, prvi član gornje jednadžbe transformira se na sljedeći način:

$$\frac{d}{dt}\int_W dV = \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} Adx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial A}{\partial t}dx \;.$$

Drugi član jednadžbe (2.3) predstavlja protok mase kroz granicu kontrolnog volumena. S obzirom da se razmatra prosječna brzina u presjecima 1 i 2 te uz uvođenje volumnog protoka $Q = vA$ slijedi:

$$\int_S \mathbf{vn}dA = A_2v_2 - A_1v_1 = Q_2 - Q_1 \;,$$

tako da jednadžba (2.3) prelazi u:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial A}{\partial t}dx + Q_2 - Q_1 = 0 \;. \qquad (2.4)$$

Ako su funkcije $A = A(x,t)$ i $Q = Q(x,t)$ i njihove derivacije neprekidne, tada se može primijeniti teorem o srednjoj vrijednosti čiji je opći oblik:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = F(\xi)(x_2 - x_1) \qquad x_1 < \xi < x_2 \;. \qquad (2.5)$$

Sada se nakon uvrštavanja izraza

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}dx = (x_2 - x_1)\frac{\partial A(\xi_A,t)}{\partial t}$$

i

$$Q_2 - Q_1 = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}dx = (x_2 - x_1)\frac{\partial Q(\xi_Q,t)}{\partial x}$$

u jednadžbu (2.4) te dijeljenja sa $(x_2 - x_1)$, uz

$$x_1, x_2 \to x \quad \Rightarrow \quad \xi_A, \xi_B \to x$$

dobiva jednadžba kontinuiteta:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \,.$$

Može se pretpostaviti da, osim dotjecanja kroz presjek 1 i istjecanja kroz presjek 2, postoji i bočni dotok ili istjecanje, npr. uslijed kiše, ishlapljivanja ili preljevanja preko obala rijeke. Takav dotok definira se bočnim dotokom po jedinici duljine kanala $q_L = q_L(x,t)$ koji je pozitivan za utjecanje.

Uključivanjem bočnog dotoka u gornju jednadžbu dobiva se konačni izgled jednadžbe kontinuiteta u konzervativnom obliku:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q_L\,. \tag{2.6}$$

2.2.3. Zakon očuvanja količine gibanja

Prema drugom Newtonovom zakonu promjena količine gibanja u kontrolnom volumenu W mora biti jednaka sumi svih sila koje djeluju na fluid:

$$\frac{dM}{dt}=\sum F\,. \tag{2.7}$$

Nadalje, prema transportnom teoremu vrijedi

$$\frac{dM}{dt}=\frac{d}{dt}\int_W \rho\, v dV+\int_S \rho\, v\,\mathbf{v}\,\mathbf{n}\, dA\,.$$

Uz analogne transformacije kao kod zakona očuvanja mase, tj. poslije izlučivanja člana ρ = *const.* i uvođenja volumnog protoka $Q = vA$, volumni integral prelazi u

$$\frac{d}{dt}\int_W \rho\, v dV=\rho\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} vA dx=\rho\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} Q dx=\rho\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial Q}{\partial t}dx\ ,$$

dok član sa površinskim integralom, koji predstavlja protok količine gibanja kroz granicu kontrolnog volumena, nakon integracije prelazi u

$$\int_S \rho\, v\mathbf{v}\,\mathbf{n}\, dA=\rho\, v_2 A_2 v_2-\rho\, v_1 A_1 v_1=\rho\, Q_2 v_2-\rho\, Q_1 v_1\,.$$

Sada jednadžba (2.7) prelazi u

$$\sum F=\rho\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial Q}{\partial t}dx+\rho\, Q_2 v_2-\rho\, Q_1 v_1$$

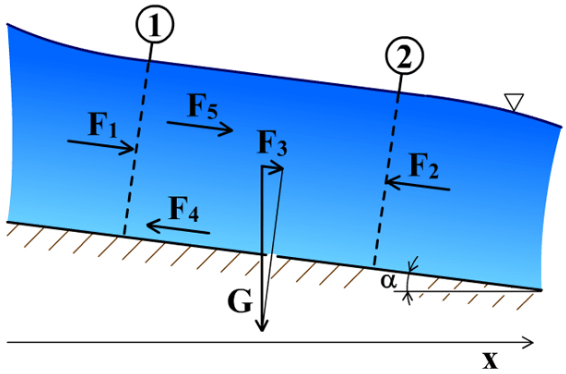
te nakon primjene teorema o srednjoj vrijednosti na isti način kao kod jednadžbe kontinuiteta

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}dx=(x_2-x_1)\frac{\partial Q(\xi_Q,t)}{\partial t}\,,$$

$$Q_2 v_2-Q_1 v_1=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial (Qv)}{\partial x}dx=(x_2-x_1)\frac{\partial (Qv)}{\partial x}$$

slijedi

$$\frac{\sum F}{\rho(x_2 - x_1)} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Qv)}{\partial x}. \qquad (2.8)$$



Slika 2.3. Sile na fluid u kontrolnom volumenu

Suma sila koje djeluju na fluid u kontrolnom volumenu predstavlja zbroj tlačne sile, sile teže, sile trenja i sile uslijed promjene poprečnog presjeka (Slika 2.3), uz zanemarivanje Coriolisovog ubrzanja i eventualnih naprezanja na slobodnoj površini uslijed vjetra i sl.

Tlačne sile predstavljaju umnožak hidrostatskog tlaka na dubini težišta površine poprečnog presjeka i površine poprečnog presjeka A, a na ulazu i izlazu kontrolnog volumena W možemo ih izraziti kao:

$$F_1 = \rho g I_{p,1}$$
$$F_2 = \rho g I_{p,2}$$

gdje je g – ubrzanje sile teže, a I_p je zadan izrazom

$$I_p = \int_0^h (h - \eta) \cdot b(x, \eta) d\eta .$$

Zbog nagiba dna kanala $S_b = S_b(x) = \tan \alpha$ postoji komponenta težine fluida u kontrolnom volumenu u smjeru osi x koja iznosi

$$F_3 = \rho g \int_{x_1}^{x_2} A S_b dx , \qquad (2.9)$$

gdje je nagib dna otvorenog vodotoka S_b:

$$S_b = -\frac{dz}{dx} .$$

Sila trenja fluida o dno i bočne stjenke kanala može se izraziti na analogan način kao i sila težine fluida preko tzv. nagiba trenja $S_f = S_f(x)$ koji je jednak nagibu energetske linije nastalom uslijed trenja (tj. gradijentu hidrauličkog gubitka nastalog uslijed trenja):

$$F_4 = \rho g \int_{x_1}^{x_2} AS_f dx \,. \tag{2.10}$$

Nagib trenja S_f i sam pojam trenja detaljnije je obrađen u zasebnom podpoglavlju (2.2.4).

Uslijed uzdužne promjene poprečnog presjeka kanala javlja se sila F_5:

$$F_5 = \rho g \int_{x_1}^{x_2} I_w dx \,,$$

gdje je I_w definirano izrazom

$$I_w = \int_0^h (h-\eta) \cdot b_x(x,\eta) \cdot d\eta \;\;,$$

a b_x izrazom:

$$b_x = \frac{\partial b}{\partial x} \,.$$

Uzmu li se u obzir orijentacije sila kao na Slici 2.3, suma svih sila iznosi:

$$\sum F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5$$

odnosno

$$\frac{\sum F}{\rho(x_2 - x_1)} = \frac{g(I_{p,1} - I_{p,2})}{x_2 - x_1} + \frac{g}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[A(S_b - S_f) + I_w \right] dx \,. \tag{2.11}$$

Nakon primjene teorema o srednjoj vrijednosti, uz $x_1, x_2 \to x$ slijedi:

$$\frac{\sum F}{\rho(x_2 - x_1)} = -g \frac{\partial I_p}{\partial x} + gA(S_b - S_f) + gI_w \;. \tag{2.12}$$

Nakon uvrštavanja izraza (2.12) u (2.8) može se formulirati konzervativni oblik jednadžbe očuvanja količine gibanja:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A} + g \cdot I_p(x,A) \right) = g \cdot I_w(x,A) + gA \cdot (S_b - S_f) \,. \tag{2.13}$$

Gornji izraz (2.13) kraće nazivamo jednadžba očuvanja količine gibanja**.**

2.2.4. Trenje

U izrazu (2.10) uveden je pojam sile trenja koja ovisi o veličini tzv. nagiba trenja S_f. Nagib trenja definiran je izrazom:

$$S_f = \frac{\lambda\, Q|Q|}{8gA^2R_H}.$$

Ovdje R_H predstavlja hidraulički radijus definiran izrazom $R_H = A/P$, gdje je P omočeni opseg kanala. Za određivanje koeficijenta hrapavosti λ koriste se dva izraza:

a) Manning-Stricklerov izraz

$$\lambda = \frac{8gn^2}{R_H^{1/3}},$$

gdje n predstavlja tzv. Manningov koeficijent trenja. Iz ovog izraza slijedi:

$$S_f = \frac{n^2\, Q|Q|}{A^2R_H^{4/3}}. \tag{2.14}$$

b) Prandtl-Colebrookov izraz

$$\frac{1}{\lambda} = -2\log\left(\frac{C_1}{R_e\sqrt{\lambda}} + \frac{e/D}{C_2}\right), \tag{2.15}$$

gdje je

$$R_e = \frac{4Q}{D\pi\nu} = \frac{vD}{\nu}$$

Reynoldsov broj, D – promjer cijevi, ν – kinematička viskoznost fluida, a e/D – relativna hrapavost. Ovaj izraz dobiven je eksperimentima provođenim na cijevima i vrijedi samo za turbulentno strujanje (R_e > 2300), dok kod laminarnog strujanja (R_e < 2300) koeficijent hrapavosti λ ovisi samo o Reynoldsovom broju i to po izrazu $\lambda = 64/R_e$.

Kako je izraz (2.15) dan u implicitnom obliku, potrebno je do vrijednosti koeficijenta hrapavosti doći iteracijski. Kao početna vrijednost obično se koristi aproksimacija prema Nackabu:

$$\lambda_0 = 0{,}0053 + 0{,}4\, R_e^{-0{,}3}.$$

Mada već nakon nekoliko iteracija greška pada unutar granice od 1%, ipak ostaje činjenica da takvo računanje koeficijenta trenja zahtijeva duže proračunsko vrijeme.

Koeficijenti C_1 i C_2 ovise o tipu cijevi odnosno kanala. U Tablici 2.1 izloženi su kako su ih predložili razni autori.

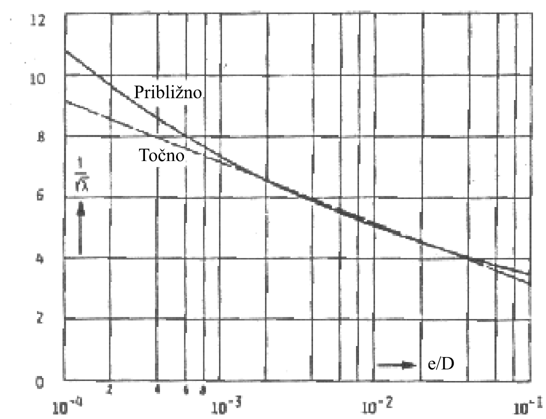
Tablica 2.1. Vrijednosti koeficijenata C_1 i C_2 za Prandtl-Colebrookov izraz

Kanal ili cijev	C_1	C_2	**Autor**	**Metoda**
Kružna cijev	2,80	3,36	Prandtl	teoretski
Kružna cijev	2,51	3,71	Nikuradse, Colebrook, White	eksperimentalno
Pravokutna cijev	2,51	-	Nikuradse	eksperimentalno
Trokutasta cijev	2,51	-	Nikuradse	eksperimentalno
Pravokutni kanal $b\to\infty$ $b\to\infty$	3,41 3,40	2,75 3,10	Reinius	teoretski eksperimentalno
Pravokutni kanal b = 4h b = 2h	- -	3,23 3,36	Reinius	teoretski teoretski
Kanal – općenito	-	3,05	Keulegan	teoretski
Pravokutni kanal – općenito	-	3,16	Keulegan	eksperimentalno
Trapezni kanal	-	3,16	Keulegan	eksperimentalno

Manning-Stricklerov izraz moguće je izvesti iz Prandtl-Colebrookove jednadžbe kao granični slučaj ($R_e=\infty$, hidraulički hrapavo područje). Pri tome se koristi izraz za ekvivalentnu apsolutnu hrapavost odnosno ekvivalentnu veličinu zrna pijeska e prema formuli:

$$e^{1/6} = 5{,}87\sqrt{2g}\ n\ .$$

Uzima se također vrijednost za koeficijent C_2 = 3,71. Na taj je način moguće tako koristiti Manning-Stricklerov izraz kao aproksimaciju fizikalno opravdanije Prandtl-Colebrookove jednadžbe, a njihov međusoban odnos prikazan je na dijagramu na Slici 2.4 [22].



Slika 2.4. Otpor trenja u potpuno hrapavom području prema Prandtl-Colebrookovom izrazu, aproksimiran upotrebom Manning-Stricklerovog izraza

Na Slici 2.4 može se uočiti da značajnije neslaganje krivulja postoji samo za kanale s pripadnom vrijednošću relativne hrapavosti $e/D<10^3$. To neslaganje postaje to manje što je veći Reynoldsov broj. Manning-Stricklerovu formulu moguće je stoga u svakom slučaju koristiti, a posebno u slučaju velike hrapavosti, što je i najčešći slučaj pri npr. problemu širenja poplavnog vala po prirodnom tlu. Prandtl-Colebrookov izraz bilo bi bolje koristiti u slučaju simulacije strujanja po relativno glatkoj površini.

U praksi se za početno određivanje Manningovog koeficijenta hrapavosti mogu koristiti fotografije kanala s poznatim vrijednostima koeficijenta n, kakve se može naći u standardnoj literaturi ([8]). U Tablici 2.2 dani su primjeri tipičnih vrsta vodotoka i pripadni im Manningov koeficijent.

Tablica 2.2. Opis vodotoka i vrijednosti Manningovog koeficijenta

Opis vodotoka	**Manningov koeficijent**
dno od pijeska i gline, obale glatke i bez vegetacije	0,030
dno od pijeska i blata, obale hrapave i jako zaraštene	0,070
dno od velikog kamenja (d_{50}=1,4 m), obale od šljunka i stijena, obrasle drvećem i grmljem	0,041
dno od vrlo velikog kamenja (d_{50}=2,2 m), obale također od velikog kamenja sa drvećem	0,075
dno od šljunka i kamenja (d_{50}=1,7 m), lijeva obala ima grmlje koje zadire u vodu, a desna drveće	0,036
dno je uglavnom grubi pijesak i šljunak, obale su dosta strme i obraštene drvećem i grmljem	0,049

Detaljan prikaz izmjerenih i kalibriranih vrijednosti Manningovog koeficijenta u ovisnosti o vrsti i obliku kanala moguće je naći u literaturi. Pri odabiru Manningovog koeficijenta potrebno je uzeti u obzir mnogo čimbenika: hrapavost dna vodotoka, obraslost korita, postojanje nanosa, godišnje doba, itd.

Potpuno precizno i konačno određivanje koeficijenta n moguće je tek na temelju višekratnih mjerenja razine vodene površine u danom vodotoku. Uspoređivanjem mjerenih i izračunatih vrijednosti razina vodene površine vrši se kalibracija Manningovih koeficijenata hrapavosti n duž čitavog korita. Tek nakon tako provedene kalibracije model se može smatrati potpuno dovršenim i daljnje simulacije na tom modelu mogu se smatrati izvorom pouzdanih predviđanja.

2.2.5. Analiza sustava 1D jednadžbi plitkih voda

Nestacionarno strujanje nestišljivog fluida u kanalu općenitog poprečnog presjeka sa slobodnom površinom opisuju jednadžba kontinuiteta (2.6) i jednadžba očuvanja količine gibanja (2.13). One čine sustav nelinearnih hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje su poznate pod nazivom jednodimenzionalne Saint Venantove jednadžbe odnosno jednodimenzionalne jednadžbe plitkih voda:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q_L \\ &\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}+g\cdot I_p(x,A)\right)=g\cdot I_w(x,A)+gA\cdot\left(S_b-S_f\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Da se doista radi o hiperboličkim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama može se dokazati ako se sustav napiše u vektorskom obliku ([9], [13], [19]):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f}(\mathbf{u})=\mathbf{g}(\mathbf{u},x) \tag{2.17}$$

gdje je **u** – vektor stanja, **f**(**u**) – fluks te **g**(**u**,*x*) – izvorni član. Njihove definicije izgledaju ovako:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Q \\ \dfrac{Q^2}{A} + gI_p(x, A) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, x) = \begin{pmatrix} q_L \\ gI_w(x, A) + gA\left(-\dfrac{dz}{dx}(x) - \dfrac{n^2(x)Q|Q|}{A^2 R_H^{4/3}(x, A)} \right) \end{pmatrix}.$$

Ovakva definicija sustava 1D jednadžbi plitkih voda omogućuje provođenje daljnje matematičke analize. Tako Jacobijeva matrica fluksa glasi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix},$$

gdje je brzina propagacije poremećaja:

$$c = \sqrt{g \frac{\partial I_p}{\partial A}(x, A)},$$

tj.

$$c = \sqrt{gh} \tag{2.18}$$

Svojstvene vrijednosti Jacobijeve matrice **A** glase:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= v - c \\ \lambda^{(2)} &= v + c \end{aligned}. \tag{2.19}$$

U skladu sa zakonitostima hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, pripadni desni svojstveni vektori definirani su kao:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{(2)} \end{pmatrix},$$

a pripadni lijevi svojstveni vektori kao:

$$\mathbf{l}^{(1)} = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} \lambda^{(2)} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{l}^{(2)} = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} -\lambda^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na kraju treba još napomenuti da je potrebno zadati početne i rubne uvjete da bi sustav uopće bio rješiv. Pod početnim uvjetom podrazumijeva se početna (u trenutku $t = 0$) razina vode i početni protok:

$$\begin{aligned} h(x,0) &= h_0(x) \\ Q(x,0) &= Q_0(x) \end{aligned} \tag{2.20}$$

duž cijele domene. Početno stanje može biti npr. stanje suhog terena ili stacionarno strujanje izračunato nekom prethodnom simulacijom i sl.

Odabir i upotreba rubnih uvjeta mogu uzrokovati velike dodatne probleme pri modeliranju, pa će posebna pažnja njima biti pridana u zasebnom podpoglavlju.

2.3. Dvodimenzionalne jednadžbe plitkih voda

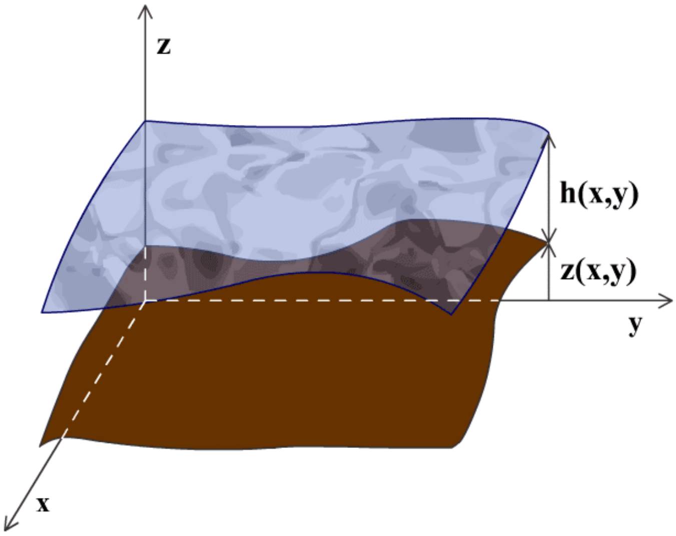
U slučaju kada voda ne struji dominantno u jednom smjeru (npr. prilikom poplavljivanja određenog područja), strujanje se ne može modelirati jednodimenzionalnim modelom. U tom slučaju, za široki spektar inženjerske upotrebe najčešće je ispravno izabrati dvodimenzionalni matematički model.

Dvodimenzionalni model strujanja u plitkim vodama temelji se na zakonu očuvanja mase i zakonu očuvanja količine gibanja za nestacionarno dvodimenzionalno strujanje vode, napisanim kao sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Ove jednadžbe nazivaju se dvodimenzionalnim jednadžbama plitkih voda ili dvodimenzionalnim Saint Venantovim jednadžbama ([2], [8], [33], [34]) i izgledaju ovako:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(v_1 h)}{\partial x} + \frac{\partial(v_2 h)}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial(v_1 h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v_1^2 h + \frac{1}{2} g h^2\right) + \frac{\partial(v_1 v_2 h)}{\partial y} = gh\left(S_{bx} - S_{fx}\right) \\ &\frac{\partial(v_1 h)}{\partial t} + \frac{\partial(v_1 v_2 h)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(v_1^2 h + \frac{1}{2} g h^2\right) = gh\left(S_{by} - S_{fy}\right) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ovdje je (Slika 2.5):

z – visina dna mjerena od zadane razine,
h – dubina vode,
t – vrijeme,
x, y – prostorne koordinate,
v_1, v_2 – x- i y-komponenta vektora brzine $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$,
g – ubrzanje sile teže.



Slika 2.5. Osnovne veličine kod dvodimenzionalnog strujanja u plitkim vodama

Nagibi dna u smjeru osi *x* i *y* definirani su izrazima:

$$S_{bx} = -\frac{\partial z}{\partial x} ,$$
$$S_{by} = -\frac{\partial z}{\partial y} ,$$

dok su nagibi trenja u smjeru osi *x* i *y* definirani kao:

$$\begin{aligned} S_{fx} &= \frac{n^2 v_1 \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}{h^{4/3}} \\ S_{fy} &= \frac{n^2 v_2 \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}{h^{4/3}} \end{aligned} , \qquad (2.22)$$

gdje je n – Manningov koeficijent hrapavosti.

2.3.1. Analiza sustava 2D jednadžbi plitkih voda

Isto kao kod jednodimenzionalnog modela, tako se i ovdje postavljeni sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (2.21) može kraće napisati u obliku koji bolje ilustrira njegovu hiperboličku prirodu ([2], [13], [19],[29]):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{u})}{\partial y} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \qquad (2.23)$$

gdje je $\mathbf{u}$ – vektor stanja, $\mathbf{f}_1(\mathbf{u})$ – komponenta fluksa u smjeru x-osi, $\mathbf{f}_2(\mathbf{u})$ – komponenta fluksa u smjeru y-osi te $\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{x})$ – izvorni član. Njihove definicije izgledaju ovako:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} h \\ hv_1 \\ hv_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} hv_1 \\ hv_1^{\ 2} + \frac{1}{2} gh^2 \\ hv_1 v_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} hv_2 \\ hv_1 v_2 \\ hv_2^{\ 2} + \frac{1}{2} gh^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh\left(S_{bx} - S_{fx}\right) \\ gh\left(S_{by} - S_{fy}\right) \end{pmatrix}.$$

Dvije komponente fluksa daju dvije Jacobijeve matrice, pa se promatra njihova linearna kombinacija:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \alpha_1 \mathbf{A}_1(\mathbf{u}) + \alpha_2 \mathbf{A}_2(\mathbf{u})$$

gdje su:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - v_1^{\ 2} & 2v_1 & 0 \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 \\ c^2 - v_2^{\ 2} & 0 & 2v_2 \end{pmatrix},$$

$c = \sqrt{gh}$ – brzina propagacije poremećaja,

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ – proizvoljan parametar.

Svojstvene vrijednosti matrice **A** glase:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v} \\ \lambda^{(2)} &= \lambda^{(1)} + |\boldsymbol{\alpha}| c \ , \\ \lambda^{(3)} &= \lambda^{(1)} - |\boldsymbol{\alpha}| c \end{aligned} \tag{2.24}$$

Pripadni desni svojstveni vektori su:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\alpha_1}{|\boldsymbol{\alpha}|}c + v_1 \\ \dfrac{\alpha_2}{|\boldsymbol{\alpha}|}c + v_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\alpha_1}{|\boldsymbol{\alpha}|}c + v_1 \\ -\dfrac{\alpha_2}{|\boldsymbol{\alpha}|}c + v_2 \end{pmatrix}.$$

a pripadni lijevi svojstveni vektori su:

$$\mathbf{l}^{(1)} = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\begin{pmatrix} \alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2 \\ -\alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{l}^{(2)} = \frac{1}{2|\boldsymbol{\alpha}|c}\begin{pmatrix} |\boldsymbol{\alpha}|c - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{l}^{(3)} = -\frac{1}{2|\boldsymbol{\alpha}|c}\begin{pmatrix} -|\boldsymbol{\alpha}|c - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Kao i kod jednodimenzionalnih jednadžbi plitkih voda, i ovdje treba zadati početne i rubne uvjete da bi sustav bio rješiv. U ovom slučaju, početni uvjeti su inicijalna razina vode i vektori brzina:

$$\begin{aligned} h(x,y,0) &= h_0(x,y) \\ \mathbf{v}(x,y,0) &= \mathbf{v}_0(x,y) \end{aligned} \qquad (2.25)$$

po cijeloj računskoj domeni.

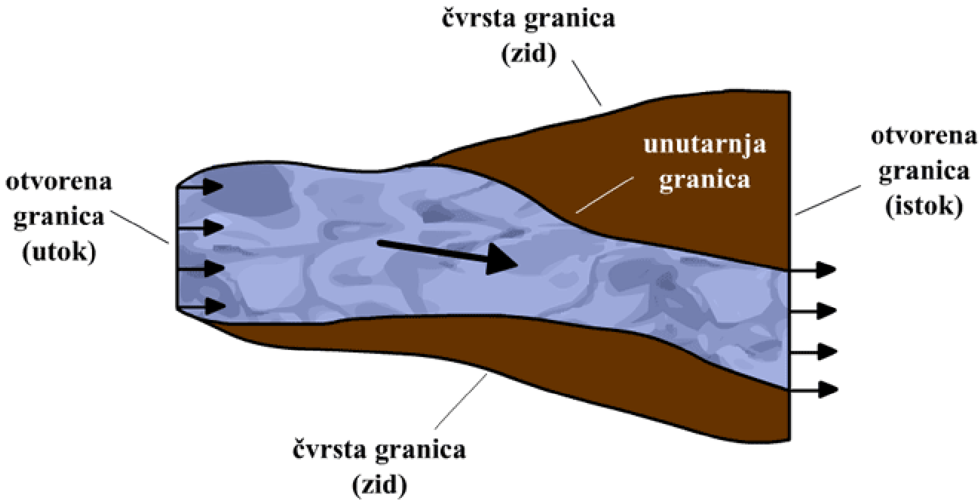
2.4. Rubni uvjeti

Jednadžbe strujanja u plitkim vodama predstavljaju mješoviti početno-rubni problem, što znači da je problem dobro postavljen tek ako su zadani i početni i rubni uvjeti. Kod hiperboličkih sustava promjena broja i vrste rubnih uvjeta može rezultirati snažnim promjenama u rješenju unutar proračunske domene. Iz te činjenice proizlazi da implementacija rubnih uvjeta u numeričkoj shemi predstavlja jednu vrlo delikatnu problematiku.

Također, potpuno praktično pitanje izbora prikladnih rubnih uvjeta može se pokazati vrlo složenim. Ponekad čak i mogućnost proizvoljnog izbora lokacije ruba domene i rubnog uvjeta (npr. u slučaju modeliranja vodotoka koji nije fizički ograničen preljevom, branom, jezerom ili sl.) može uzrokovati probleme i nesigurnost pri modeliranju ([11]). Primjena numeričkog modeliranja na realne probleme pokazuje da je bez većeg iskustva često gotovo nemoguće pravilno izabrati i upotrijebiti rubne uvjete.

Numeričko tretiranje rubnih uvjeta ovisi o uvjetima strujanja na rubu domene te o samom tipu ruba (granice). Granice možemo podijeliti na sljedeće osnovne tipove (Slika 2.6):

- čvrsta granica (zid)
- otvorena granica (utok, istok)
- unutarnja granica (granica između mokrog i suhog područja)



Slika 2.6. Mogući izgled domene i raspored njenih granica

Nametanje rubnih uvjeta primarno ovisi o načinu definicije numeričkih fluksova kroz rub tj. vanjsku stranicu elementa numeričke mreže. Za tu se potrebu, kod većine numeričkih shema, uvodi jedan fiktivni vanjski (*ghost*) niz elemenata. Određivanje vrijednosti u tim vanjskim elementima ovisi o vrsti rubnog uvjeta.

Nakon implementacije rubnih uvjeta potrebno je ispitati njihov utjecaj na rezultat proračuna. Često je pogodnije granicu utoka ili istoka iz domene nešto udaljiti od izvornog područja interesa kako bi se na taj način smanjio njen nerealan utjecaj na rješenje. Udaljavanje numeričke granice, drugim riječima, znači povećanje numeričke domene, što opet rezultira povećanjem potrebnog proračunskog vremena. Stoga je potrebno lokaciju granice odrediti optimalno.

2.4.1. Čvrsta granica

Čvrsta granica služi za modeliranje neprostrujivih objekata kao što su brane, nasipi, zidovi (građevine), itd. Kroz čvrstu granicu nema protoka, tj. normalna brzina jednaka je nuli svugdje po čvrstoj granici. Dodatno treba definirati tangencijalnu brzinu, tangencijalno (smično) naprezanje ili odnos između tangencijalne brzine i tangencijalnog naprezanja primjenom *slip*, *semi-slip* ili *no-slip* uvjeta.

Slip uvjet na rubnom numeričkom čvoru dopušta samo tangencijalnu komponentu brzine uz nulto smično naprezanje. Time se ujedno pretpostavlja da na čvrstoj granici nema trenja. Ovaj uvjet se obično primjenjuje u slučaju kada čvrsta granica modelira vertikalni zid uz koji su dubine vode male ili čija je površina zanemarive hrapavosti. Takav rubni uvjet se, za potrebe praktičnog modeliranja plitkih voda, pokazuje kao potpuno primjeren, pa se najčešće i koristi pod nazivom „rubni uvjet zida“.

Semi-slip uvjet primjenjuje se na čvrstoj granici na način da dopušta strujanje tangencijalno na granicu (kao i kod *slip* uvjeta), ali se dodatno definira trenje na granici prema nekom izrazu za trenje. Jedan mogući način zadavanja trenja na čvrstoj granici ([5]) je sljedećom modifikacijom izraza (2.22) za nagib trenja:

$$
\begin{aligned}
S_{fx} &= v_1\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}\left(\frac{n^{3/2}}{h}+\frac{n_w^{3/2}l_w}{S}\right)^{4/3} \\
S_{fy} &= v_2\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}\left(\frac{n^{3/2}}{h}+\frac{n_w^{3/2}l_w}{S}\right)^{4/3}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

gdje je n_w – Manningov koeficijent trenja na čvrstoj granici, l_w – duljina stranice rubnog elementa na kojoj je zadan rubni uvjet čvrste granice i S – površina dotičnog rubnog elementa na čijoj je stranici zadan rubni uvjet čvrste granice.

Semi-slip uvjet koristi se kada se u modelu želi zadržati utjecaj na fluid koji zid vrši trenjem, pa se on, zapravo, može nazvati „rubni uvjet hrapavog zida“. Najčešće je upotreba *semi-slip* rubnog uvjeta ipak suvišna, jer je za realne slučajeve strujanja u otvorenim vodotocima utjecaj hrapavosti zida na sliku strujanja obično potpuno zanemariv.

No-slip uvjet postiže se postavljanjem brzine u rubnom čvoru na nulu, čime je zadovoljen i uvjet neprotjecanja kroz granicu. Ovaj uvjet obično se koristi kada je poznato da su brzine strujanja uz granicu jako malene te, kao takav, nema širu primjenu u modeliranju strujanja u plitkim vodama.

2.4.2. Otvorena granica

Otvorena granica predstavlja onaj dio ruba numeričke mreže kroz koji voda utječe u proračunsku domenu (ulazna granica) ili pak istječe iz nje (izlazna granica). Zadavanje rubnih uvjeta na takvoj granici ovisi o tome je li granica ulazna ili izlazna te o tipu strujanja na dotičnom rubu, koje može biti:

- podkritično ($Fr \le 1$)
- nadkritično ($Fr \ge 1$)

Fr predstavlja Froudov broj koji je definiran kao

$$Fr = \frac{|\mathbf{v}|}{c}$$

i predstavlja odnos intenziteta brzine strujanja i brzine propagacije poremećaja.

Sam tip strujanja ponekad je moguće predvidjeti uvidom u konfiguraciju terena (strmi padovi dna vodotoka tipično uzrokuju nadkritično strujanje), a ako to nije moguće, potrebno je provesti testne simulacije na osnovu kojih će se identificirati tip strujanja na granici.

Broj potrebnih rubnih uvjeta za dvodimenzionalni model strujanja, ovisno o tipu otvorene granice i tipu strujanja na granici, dan je u sljedećoj tablici:

Tablica 2.3. Potreban broj zadanih rubnih uvjeta u dvodimenzionalnom modelu

Vrsta strujanja	Ulazna granica	Izlazna granica
Podkritično	2	1
Nadkritično	3	0

Stvaran broj korištenih rubnih uvjeta pri primjeni u numeričkom modelu često je veći ili manji od onog koji se smatra teoretski ispravnim (Tablica 2.3). U slučaju premalog broja zadanih informacija, najčešće se primjenjuje tzv. nulti gradijent na granici što rezultira istim vrijednostima varijabli stanja na granici i susjednim unutarnjim čvorovima. Ova metoda u najviše slučajeva vodi k dobrom i stabilnom rješenju.

U slučaju podkritičnog strujanja na ulaznoj granici potrebno je definirati dva rubna uvjeta. Najprikladnije je definirati protok i smjer strujanja, s time da se smjer strujanja često može jednostavno zadati normalnim na utočnu granicu. Umjesto protoka, na ulaznom rubu moguće je zadati i razinu vodnog lica.

U slučaju nadkritičnog strujanja potrebno je definirati tri rubna uvjeta na ulaznoj granici, tj. potrebno je zadati sve parametre strujanja. U praksi to znači da treba zadati protok, razinu vode i smjer strujanja, s time da se ponekad protok ili razina vode mogu uspješno aproksimirati na neki način.

Na istoku iz područja potrebno je, pri podkritičnom strujanju, definirati samo jedan rubni uvjet. Ako je moguće, najbolje je definirati protok ili razinu vode. Kompromisno rješenje je zadavanje tzv. konsumpcijske krivulje, tj. *Q-H* dijagrama.

Često su parametri strujanja na izlaznoj granici potpuno nepoznati, pa se tada izlazna granica definira kao „slobodni istok“. Tada je najčešće na izlaznoj granici najbolje zadati tzv. apsorpcijski rubni uvjet koji funkcionira na način da vrijednosti dubina i brzina vode u vanjskim fiktivnim elementima drži jednakima onima na unutrašnjoj strani granice. Ovakav rubni uvjet uvjetuje istjecanje iz domene sa vektorima brzina približno okomitim na izlaznu granicu te konstantan hidrostatski tlak (tj. konstantnu razinu vode) na granici. To kod istjecanja u more ili jezero može biti zadovoljeno pod uvjetom da proračunska domena dovoljno duboko zadire u dotično more ili jezero, tako da se na samoj izlaznoj granici više ne osjeća propagacija vodnih valova iz unutrašnjosti domene. S obzirom da ovakav rubni uvjet na izlazu iz domene nameće uniformno strujanje, eksperimentalne simulacije iz [11] pokazuju da u slučajevima kada takvo strujanje nije realno ili sigurno (npr. kada domena modelira segment rijeke), izlazni rub treba znatno udaljiti od specifičnih interesnih područja u domeni.

U slučaju nadkritičnog strujanja na izlaznoj granici nije potrebno zadavati nikakav uvjet. U tom slučaju svi parametri strujanja dolaze iz unutrašnjosti domene, tj. informacije sa nizvodne (vanjske) strane istočnog ruba ne utječu na sliku strujanja uzvodno (u samoj domeni).

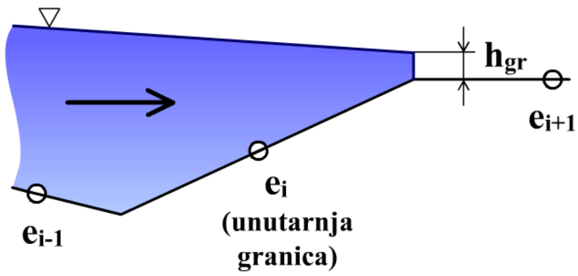
2.4.3. Unutarnja granica

Pod pojmom unutarnje granice podrazumijeva se granica između suhog i poplavljenog dijela domene. Tijekom numeričke simulacije ta se granica pomiče, pa tako, u određenom vremenskom trenutku, do tada „suha“ (neaktivna) ćelija numeričke mreže postaje „poplavljena“ (aktivna).

Tehnike modeliranja plavljenja i sušenja ćelija numeričke mreže (*wetting-drying*) mogu biti vrlo zahtjevne i delikatne, a posebne teškoće se javljaju kod simulacija poplavljivanja jako varirajućeg terena. Mada je moguće propagirajuću vodenu frontu definirati upotrebom pomične numeričke mreže (*moving mesh*), takvu metodu izuzetno je teško programski implementirati i njena upotrebna vrijednost je ograničena. Stoga se pribjegava relativno jednostavnoj metodi koja se temelji na dvjema fazama propagacije unutarnje granice:

1) Kad god je minimalna dubina vode na poplavljenom elementu manja od predefinirane minimalne (granične) dubine vode h_{gr} , numerički element puni se vodom, ali se brzina strujanja vode u njemu drži jednakom nuli.

2) Kada minimalna dubina vode na poplavljenom elementu prelazi graničnu dubinu h_{gr} , protok kroz poplavljeni element računa se slobodno, tj. dopušta se vodi u dotičnom elementu da se pokrene (Slika 2.7).



Slika 2.7. Numerički element na unutarnjoj granici u trenutku prelaska iz faze 1 u fazu 2

Jednostavno je primijetiti da bi ovakav način tretiranja unutarnje granice mogao usporavati propagaciju vodnog vala. Praktična iskustva, kao što su npr. rezultati CADAM-projekta, to i potvrđuju. Naime, pokazuje se da je prisutno sustavno kašnjenje korištenih dvodimenzionalnih numeričkih modela u usporedbi sa realnim propagacijama vodnih valova, što je vjerojatno dijelom uzrokovano i nesavršenom tehnikom tretiranja unutarnje granice. (Više o CADAM-projektu u 5. poglavlju.) Stoga se može zaključiti da je, u nedostatku bolje metode modeliranja propagacije unutarnje granice, minimalnu dubinu vode h_{gr} načelno potrebno zadati što manjom.

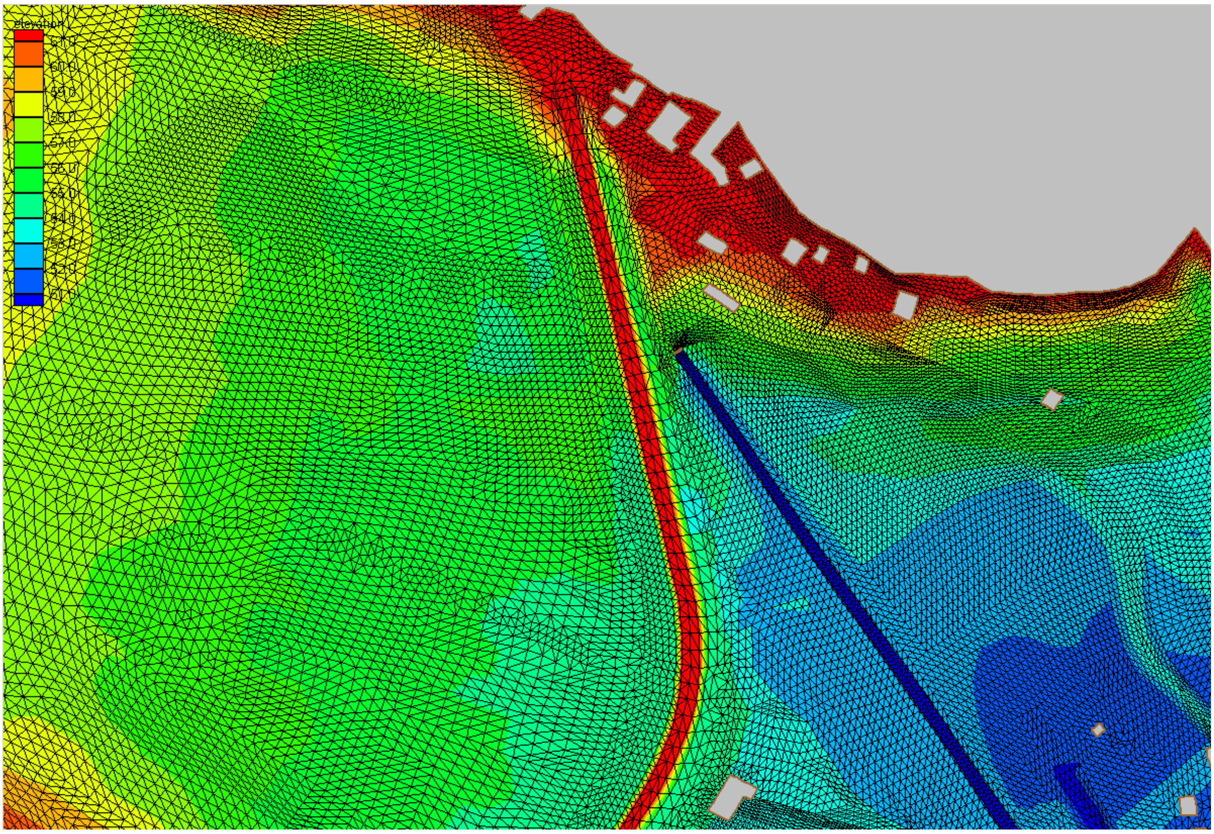
Izbor vrijednosti za graničnu dubinu ovisi o obliku terena i veličini numeričkih elemenata, pa tako gušća numerička mreža i ravniji teren omogućuju zadavanje manje vrijednosti h_{gr} . Olakotna okolnost leži u činjenici da prevelika vrijednost h_{gr} najčešće samo usporava napredovanje vodene fronte, a ne kvari pouzdanost dobivenih brzina i razina vode. Praktična iskustva pokazuju da je za jako neravan teren vrijednost granične dubine vode prikladno inicijalno postaviti na ne više od 5 cm. Ako je moguće, poželjno je smanjivati tu vrijednost do granice izdržljivosti korištene numeričke sheme.

Zaključno treba naglasiti da pravilan izbor rubnih uvjeta i njihova kvalitetna implementacija u numeričkom modelu predstavljaju vrlo značajni dio problematike izgradnje i upotrebe numeričkih modela uopće. Iskustva pokazuju da neprimjereno upotrebljeni rubni uvjeti mogu dati potpuno nerealna rješenja, pa je stoga problematici rubnih uvjeta potrebno pristupati maksimalno promišljeno i pažljivo.

2.5. Modeliranje građevinskih struktura

Dok se u jednodimenzionalnom modelu strujanja u plitkim vodama mnogi građevinski objekti poput zapornica, preljeva, brana itd. moraju na neki način modelirati specifičnim tzv. unutarnjim rubnim uvjetima, većinu njih u dvodimenzionalnom modelu nije potrebno posebno tretirati. Naime, pažljivim i finim dvodimenzionalnim približnim oblikovanjem terena može ih se kvalitetno reprezentirati unutar same geometrije modeliranog područja (npr. preljev, brana – Slika 2.8).

Naprednije tehnike omogućavaju i modeliranje promjenjive geometrije što se može koristiti za modeliranje građevinskih struktura koje tokom vremena mijenjaju oblik i propusnost (npr. brana koja se urušava kroz određeno vrijeme).



Slika 2.8. Segment brane Tribalj potpuno oblikovane u dvodimenzionalnoj numeričkoj mreži

Jedan izuzetak su propusti (eng. *culvert*) koji služe za propuštanje vode ispod autoputova, željezničkih pruga, nasipa ili drugih građevinskih pregrada te ih, kao takve, uvijek treba posebno modelirati posebnim unutarnjim rubnim uvjetom. Propusti se, u principu, ne mogu nikako opisati modelom plitkih voda jer voda kroz njih tipično ne struji sa slobodnom površinom, već pod tlakom. S druge strane, najčešće dio vode struji kroz propust, dok ostatak po terenu iznad propusta, pa je i u tom smislu onemogućeno korištenje modela plitkih voda.

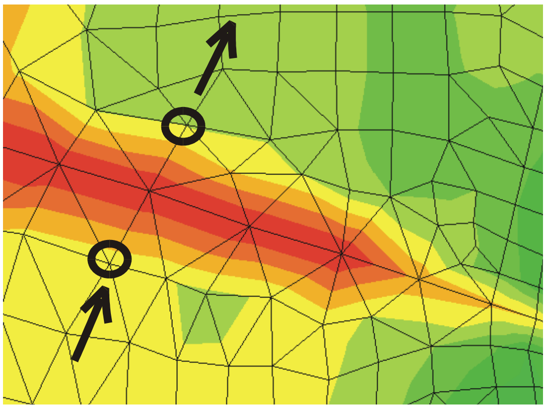
Drugi izuzetak su mostovi, koji se mogu modelirati oblikovanjem mosnih stupova u numeričkoj mreži (Slike 4.4 i 4.7) jedino ako ih simulirani vodni val ne preplavljuje toliko da razina vode dostiže razinu mosta. Kada se to desi, ispod mosta se uspostavlja strujanje pod tlakom, a iznad mosta strujanje sa slobodnom površinom. Tada se problem modeliranja mosta u suštini svodi na problem modeliranja propusta.

2.5.1. Modeliranje propusta i mostova

Propuste je najčešće prirodno modelirati jednodimenzionalno, što se u praksi pokazuje i dovoljno dobrim, dok je strujanje ispod mostova moguće modelirati jednodimenzionalnim ili dvodimenzionalnim modelom. Ako je širina mosta (tj. prolaza ispod mosta) velika u odnosu na širinu kanala ili plavnog područja, tada će on biti modeliran dvodimenzionalno. Suprotno tome, ako je pak širina mosta mala i ako u neposrednoj njegovoj okolini nije potreban detaljan izračun slike strujanja, tada je most dovoljno modelirati jednodimenzionalnim modelom.

Svaki se propust općenito na numeričkoj mreži definira sa dva čvora: ulaznim (uzvodnim) i izlaznim (nizvodnim). (Iznimno, ako se samo jedan kraj propusta nalazi unutar domene, tada se propust definira samo na tom čvoru numeričke mreže.) Voda koja protječe kroz propust u numeričkom smislu „ponire“ u uzvodnom čvoru i ponovo „izvire“ u nizvodnom čvoru, pa se može reći da se propust, zapravo, modelira ponorom i izvorom koji su u vezi.

Na Slici 2.9 prikazan je primjer zadavanja propusta na numeričkoj mreži. Osnovne geometrijske osobine propusta (uzdužni nagib i duljina) definirane su samim koordinatama uzvodnog i nizvodnog čvora.



Slika 2.9. Definicija propusta na numeričkoj mreži

Protočnost kroz propust ovisi o dubinama vode na ulazu i izlazu iz propusta, ali i o geometriji propusta, obliku ulaznog dijela, duljini, uzdužnom nagibu te hrapavosti. Protok kroz propust dijeli se na dva tipa, ovisno o tome da li je on određen primarno karakteristikama ulazne ili izlazne strane. Hidraulički kapacitet propusta računa se različito za ta dva tipa kontrole.

Kada je strujanje kroz propust određeno samo uvjetima na ulazu u propust, tada uvjeti strujanja na izlaznom dijelu, kao i duljina i hrapavost propusta, ne utječu na protok kroz propust. Nagib propusta tada također ima zanemariv utjecaj na protok te se zanemaruje. Ova metoda modeliranja propusta podrazumijeva da propust nije potpuno ispunjen vodom, pa je treba i koristiti samo onda kada je potvrđeno da se tako dobiven protok kroz propust kreće unutar vrijednosti koje odgovaraju takvom strujanju.

U drugom slučaju, kada se uvjeti strujanja kroz propust kontroliraju i ulazom i izlazom iz propusta, podrazumijeva se da je propust potpuno ispunjen vodom po cijeloj dužini. Ovaj način je primjereniji općoj upotrebi za modeliranje propusta.

Pojednostavljeni izgled propusta i osnovne veličine za računanje protoka kroz propust prikazane su na Slici 2.10. Vrijednost protoka kroz propust računa se po sljedećim izrazima ([17]):

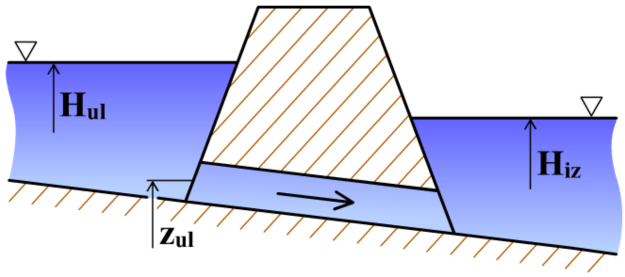
$$Q_c = \begin{cases} C_c A_c \sqrt{2g\left(H_{ul} - z_{ul}\right)} & \text{za ulaznu definiciju} \\ C_c A_c \sqrt{2g\left(H_{ul} - H_{iz}\right)} & \text{za ulazno} - \text{izlaznu definiciju} \end{cases}$$

gdje je C_c koeficijent protoka, koji se za ulaznu definiciju računa kao:

$$C_c = \frac{1}{\sqrt{1 + k_e + \dfrac{2gn^2 l_c}{R_H^{4/3}}}} \quad ,$$

a za ulazno-izlaznu definiciju kao:

$$C_c = \frac{1}{\sqrt{1 + k_e}} \quad .$$



Slika 2.10. Strujanje kroz propust

Ostale veličine u gornjim izrazima su:

H_{ul} – razina vodene površine na uzvodnom dijelu,
H_{iz} – razina vode na nizvodnom dijelu,
z_{ul} – visina na kojoj se nalazi os ulaznog otvora propusta,
A_c – površina poprečnog presjeka,
k_e – koeficijent ulaznih gubitaka,
n – Manningov koeficijent hrapavosti,
l_c – duljina propusta,
R_H – hidraulički radijus.

Koeficijenti ulaznih gubitaka k_e kreću se za npr. betonske cijevi unutar intervala od 0,1 do 0,7 (detaljniji popis koeficijenata ulaznih gubitaka može se pronaći u [12]).

Dvodimenzionalno strujanje ispod mosta modelira se kao normalno strujanje plitkih voda sve dok voda ne dođe u kontakt s donjom površinom mosta, tj. stropom mosnog otvora. Kada razina vodnog lica dostigne mosni strop, režim strujanja sa slobodnom površinom prestaje i strujanje lokalno postaje tlačno. Stoga je potrebno modificirati jednadžbe plitkih voda uvođenjem varijabli tlaka.

Jednadžbe za po dubini usrednjeno tlačno strujanje bez bočnog dotoka i uz pretpostavku blagog nagiba dna izgledaju ovako:

$$\frac{\partial(uh_m)}{\partial x}+\frac{\partial(vh_m)}{\partial y}=0$$

$$h_m\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2h_m+gh_m p-\frac{1}{2}gh_m^2-vh_m\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(uvh_m-vh_m\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$
$$=g(h_m-p)S_{cx}+gpS_{bx}-gh_m\left(S_{fx}+S_{fcx}\right)$$

$$h_m\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(uvh_m-vh_m\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v^2h_m+gh_m p-\frac{1}{2}gh_m^2-vh_m\frac{\partial v}{\partial y}\right)=$$
$$=g(h_m-p)S_{cy}+gpS_{by}-gh_m\left(S_{fy}+S_{fcy}\right)$$

gdje su novouvedene varijable:

p – tlak izražen u metrima vodenog stupca,
S_{cx}, S_{cy} – komponente nagiba mosnog stropa u x i y smjeru,
S_{fcx}, S_{fcy} – komponente nagiba trenja (smičnog naprezanja) na mosnom stropu u x i y smjeru,
S_{fx}, S_{fy} – komponente nagiba trenja (smičnog naprezanja) na dnu mosnog otvora u x i y smjeru,
h_m – visina otvora ispod mosta od dna korita do mosnog stropa.

Nagib trenja koji se pojavljuje uslijed kontakta vode sa mosnim stropom (S_{fcx} i S_{fcy}) računa se istim jednadžbama kao i nagib trenja na dnu (2.14).

Hidraulički otpor mosnih stupova može se u modelu nadoknaditi povećanjem hrapavosti površine na elementima numeričke mreže na kojima se nalaze stupovi. Proporcionalno veličini mosnog stupa modificiraju se i vrijednosti nagiba trenja S_{fx} i S_{fy} na dnu pod mostom:

$$\widetilde{S}_{fx} = S_{fx} + \frac{1}{2} C_d \rho \, u \sqrt{u^2 + v^2} \left(\frac{A_p}{A_e} \right),$$

$$\widetilde{S}_{fx} = S_{fx} + \frac{1}{2} C_d \rho \, u \sqrt{u^2 + v^2} \left(\frac{A_p}{A_e} \right),$$

gdje je:

A_p – površina projekcije podvodnog dijela mosnog stupa normalno na smjer struje,
A_e – površina elementa numeričke mreže unutar kojeg se nalazi stup,
C_d – koeficijent otpora nastrujavanju.

Na kraju treba dodati da je svakako najjednostavniji način modeliranja mosta ugradnja šupljina u numeričkoj mreži na mjestima gdje se mosni stupovi nalaze (Slike 4.4 i 4.7) te zadavanje rubnog uvjeta zida na granicama tih šupljina. Hidraulički gubici na mosnim stupovima, koji ne mogu biti potpuno opisani modelom plitkih voda, mogu se modelirati namjenskim povećanjem Manningovog koeficijenta trenja na području numeričke mreže oko mosta.

Ovakav način modeliranja mostova može se pokazati kao sasvim dovoljan, tim više što najčešće prilikom praktičnog simuliranja poplavljivanja slika strujanja oko određenog mosta obično nije od posebnog značaja. Naravno, opisana tehnika može se upotrebljavati samo dok razina vode pod mostom ne dosegne razinu samog mosta, ili pak eventualno u slučaju kada postoje saznanja da utjecaj mosta ne mijenja značajno sliku strujanja na bitnim dijelovima domene.

3. Numerička shema i softver

Simulacije za potrebe ovog rada provedene su na softveru Stripp12, koji je afirmiran kroz dugogodišnju upotrebu na raznim projektima ([26], [27], [28]). Korištena numerička metoda je metoda konačnih volumena, s obzirom da se ona standardno koristi za modeliranje strujanja u plitkim vodama te je kao takva i implementirana u softver korišten za potrebe ovog rada. Numerička shema izabrana za simulacije provedene u sklopu ovog rada je balansirana Q-shema.

Izbor pouzdane numeričke sheme i softvera bio je vrlo važan jer je cilj ovog rada bio pokušati izolirati utjecaj parametara numeričke mreže te istražiti ga, što ne bi bilo moguće ako bi numerička shema ili softver djelovali kao generator problema i nestabilnosti, koji bi dodatno kvarili rezultate simulacija.

Diskretizacijska metoda, numerička shema te računalni program Stripp12 detaljno su opisani u sljedećim podpoglavljima.

3.1. Diskretizacijska metoda

Model plitkih voda matematički je opisan preko nelinearnog sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Analitičko rješenje moguće je samo za mali broj idealiziranih slučajeva i, u suštini, nema nikakvu praktičnu vrijednost. Stoga, za praktičnu primjenu ovog modela, preostaje jedino numeričko rješavanje problema.

Preduvjet za numeričko rješavanje problema je diskretizacija zakona očuvanja. Pri tome je potrebno posebno provesti prostornu i vremensku (temporalnu) diskretizaciju, za što postoji više različitih metoda. Primjena određene numeričke sheme u principu slijedi nakon izbora odgovarajuće diskretizacijske metode.

Osnovne i najraširenije su sljedeće diskretizacijske metode:

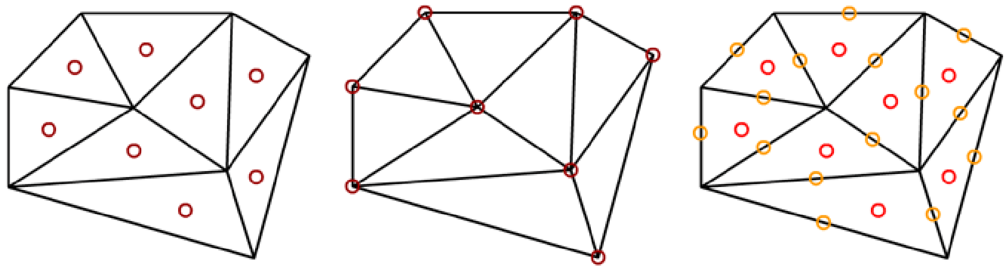
- metoda konačnih razlika
- metoda konačnih volumena
- metoda konačnih elemenata

Prostorna diskretizacija provodi se definiranjem numeričke mreže, a u skladu sa odabranom diskretizacijskom metodom koja uvjetuje vrstu (kvadratični, linearni) i tip mreže (strukturirana, nestrukturirana). Tako je npr. za metodu konačnih razlika najprikladnija ekvidistantna kartezijska numerička mreža. O numeričkim mrežama biti će više riječi u sljedećem (4.) poglavlju.

Vremenska diskretizacija provodi se najčešće metodom konačnih razlika, koja se temelji na aproksimaciji kroz razvoj Taylorovog reda. Vremenska diskretizacija može biti eksplicitna ili implicitna, s time da se za izrazito nestacionarne događaje daje prednost korištenju eksplicitne vremenske diskretizacije.

Kod metode konačnih volumena domena je podijeljena na konačan broj kontrolnih volumena, za svaki od kojih se računaju jednadžbe očuvanja. (U slučaju dvodimenzionalne domene, konačni „volumen" je zapravo konačna površina.) U težištu svakog kontrolnog volumena nalazi se proračunski čvor u kojem se računaju vrijednosti varijabli stanja, dok se stanja na granicama kontrolnog volumena dobivaju interpolacijom.

Metoda konačnih volumena kao osnovu koristi integralnu formu jednadžbe očuvanja. Integracija se provodi po kontrolnom volumenu s time da se volumni integrali primjenom Gaussovog integralnog teorema transformiraju u plošne. Tako se dobivaju plošni integrali koji predstavljaju konvekcijske i difuzijske fluksove, odnosno opisuju strujanje kroz granicu kontrolnog volumena. Dobiveni plošni integrali približno se rješavaju uvođenjem polinoma željenog stupnja u tzv. diskretnoj formi.



Slika 3.1. Tipovi numeričke mreže konačnih volumena

Moguće je razlikovati tri tipa metode konačnih volumena s obzirom na smještaj numeričkog čvora u kontrolnom volumenu (Slika 3.1). Numerički čvorovi se tako mogu nalaziti:

- u centru konačnog volumena
- na vrhovima konačnog volumena
- u centru i na stranicama konačnog volumena

Treba napomenuti da ova podjela prvenstveno opisuje način na koji diskretizacijska metoda interpretira i koristi jednom izrađenu numeričku mrežu. Drugim riječima, različita vrsta diskretizacije ne podrazumijeva i različit postupak izrade numeričke mreže.

Numerička mreža sa čvorovima u centru i na stranicama konačnog volumena naziva se *staggered grid*, a njeni elementi se nazivaju kvadratičnima. U ovom slučaju neke varijable stanja smještene su na stranice konačnog volumena, a neke u centar konačnog volumena.

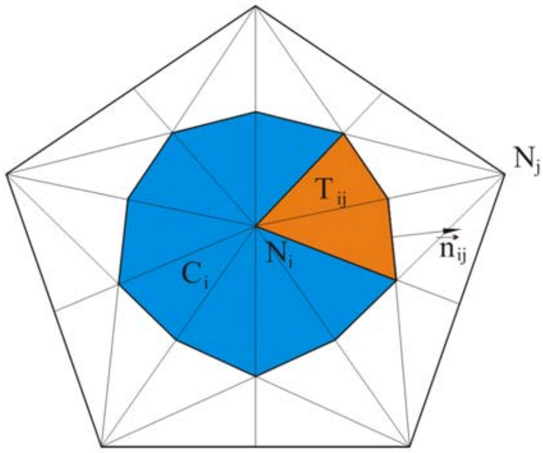
Pri metodi konačnih elemenata rješenje se također aproksimira polinomima određenog stupnja. Polinomi se definiraju lokalno za svaki pojedini element numeričke mreže, tj. od elementa do elementa se koeficijenti polinoma odabiru na način da se postigne najbolje približenje za pojedini element. Koeficijenti polinoma za pojedine elemente mogu se određivati po više različitih kriterija, što vodi k više različitih formulacija metoda konačnih elemenata.

Metoda konačnih elemenata je najsveobuhvatnija metoda u smislu da se formulacije metode konačnih razlika i konačnih volumena mogu dobiti specijalizacijom metode konačnih elemenata.

Metoda konačnih volumena i metoda konačnih elemenata imaju vrlo važno svojstvo da ih je moguće primijeniti bez obzira na (ne)strukturiranost numeričke mreže. Osim što je ta osobina u praksi vrlo korisna (omogućuje lakšu i točniju prilagodbu numeričke mreže na realnu geometriju terena), ujedno je bila i nužna za potrebe izrade ovog rada. Naime, istraživanje utjecaja oblika ćelija numeričke mreže, koje je opisano u ovom radu (podpoglavlje 6.2.), ne bi bilo moguće provesti na ekvidistantnim strukturiranim mrežama koje same diktiraju konstantan oblik ćelija mreže.

Za rješavanje hiperboličkih sustava jednadžbi, pa tako i jednadžbi plitkih voda, najviše se koriste metode konačnih razlika i konačnih volumena, s time da je metoda konačnih volumena najprirodnija zbog integralne forme zakona očuvanja. Iz tih razloga i korišteni softver Stripp12 upotrebljava metodu konačnih volumena.

Ovdje treba napomenuti da računalni program Stripp12 omogućuje uporabu mreže konačnih volumena koja se podudara s izvornom triangulacijom ili pak uporabu sekundarne mreže. Sekundarna mreža nema ćelije iz početne triangulacije već se iz početnih trokutastih ćelija formiraju nove, tzv. medijanske ćelije. Te nove ćelije su mnogokuti dobiveni spajanjem segmenata težišnica elemenata oko njihovog zajedničkog vrha (Slika 3.2).



Slika 3.2. Dualna mreža: primarne i sekundarna medijanska ćelija

Upotreba ovakve mreže (obično se naziva dualnom) omogućava postavljanje numeričkih čvorova u centar konačnog volumena, što se pokazuje kao najprirodnije rješenje za numeričko modeliranja strujanja plitkih voda. Stoga je dualna mreža i korištena za sve simulacije provedene u sklopu ovog rada.

3.1.1. Courant-Friedrichs-Lewyjev uvjet stabilnosti

Kod eksplicitnih numeričkih shema (kakva je i Q-shema) korak vremenske diskretizacije uvjetovan je gustoćom prostorne diskretizacije. Ovaj uvjet egzaktno definira bezdimenzionalna pozitivna veličina C_{cfl} , koja se naziva Courantov broj ili Courant-Friedrichs-Lewy broj (kraće CFL broj):

$$C_{cfl} = \frac{\text{max. brzina propagacije poremecaja}}{\text{"brzina num. mreže"}} \tag{3.1}$$

Najveća brzina propagacije poremećaja jednaka je:

$$\left| \mathbf{vn} \pm c \right|_{\max} = \left| \mathbf{vn} \right| + c \ ,$$

gdje je **n** – normala na rub ćelije. „Brzina mreže“ predstavlja odnos prostornog i vremenskog koraka ($\Delta x/\Delta t$). Sada se, uz (2.18), Courant-Friedrichs-Lewy broj može napisati kao:

$$C_{cfl} = \frac{\left| \mathbf{vn} \right| + \sqrt{gh}}{\Delta x / \Delta t} \tag{3.2}$$

Courant-Friedrichs-Lewyjev uvjet kazuje da brzina propagacije poremećaja mora u svakom trenutku i po cijeloj domeni biti manja od „brzine mreže“. To znači da ni u jednoj ćeliji numeričke mreže nema poremećaja koji u vremenu Δt prođe udaljenost jednaku ili veću od Δx. Drugim riječima, prostorno-vremenska diskretizacija mora biti takva da vrijedi:

$$C_{cfl} \leq 1 \ .$$

Gornji uvjet naziva se Courant-Friedrichs-Lewyjev uvjet stabilnosti i kao takav je nužan (mada ne i dovoljan) za stabilnost eksplicitne numeričke sheme. On, zapravo, uvjetuje da gušća numerička mreža (tj. manji prostorni korak) zahtijeva i gušću vremensku diskretizaciju (tj. manji vremenski korak) te je ovako izrečen i intuitivno razumljiv.

U izrazu za CFL broj (3.2) vidljivo je da je on lokalnog karaktera. U slučaju nestrukturirane numeričke mreže, prostorni korak (tj. udaljenost između numeričkih čvorova) mijenja se po domeni, dok se brzina i dubina vode općenito mijenjaju kako po domeni tako i u vremenu. S druge strane, vremenski korak Δt nije lokalnog karaktera, već je jedinstven i mora zadovoljavati Courant-Friedrichs-Lewyjev uvjet uvijek i svuda. Stoga se svaki sljedeći vremenski korak određuje na osnovu brzina i dubina vode izračunatih u prethodnom vremenskom koraku i to iz CFL uvjeta na kritičnoj ćeliji numeričke mreže:

$$\Delta t^{n+1} = C_{cfl} \left(\frac{\Delta x_{ij}}{\left| \mathbf{v}_i^n \mathbf{n}_{ij} \right| + \sqrt{g h_i^n}} \right)_{\min} , \tag{3.3}$$

gdje se podindeksi odnose na ćeliju numeričke mreže, a nadindeksi na vremenski trenutak.

Može se reći da je restrikcija u smislu stabilnosti po CFL uvjetu zapravo restrikcija na vremenski korak.

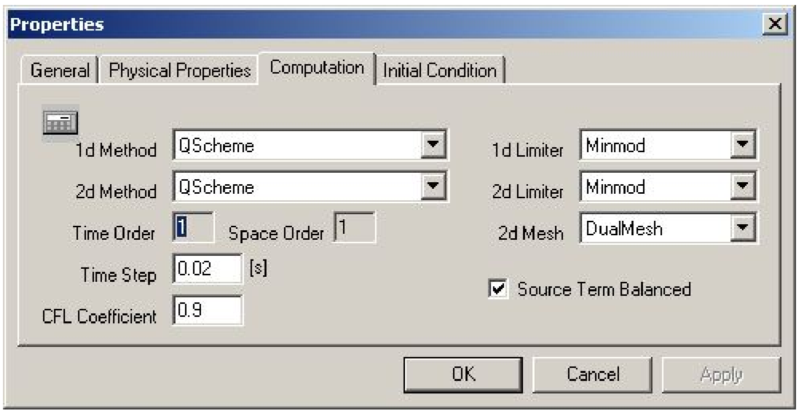
Načelno se može reći da je numerička shema tim efikasnija čim je CFL broj bliži jedinici. Praktična iskustva govore da se optimalne vrijednosti CFL broja za eksplicitne numeričke metode pri primjeni na realne probleme kreću u intervalu od 0,7 do 0,9.

Za razliku od eksplicitnih shema, CFL broj kod implicitnih shema nema utjecaj na izbor vremenskog koraka, pa je moguće korištenje proizvoljno velikog vremenskog koraka, s time da jedinu restrikciju na njegovu veličinu postavlja činjenica da se točnost numeričke sheme smanjuje s povećanjem vremenskog koraka.

3.2. Numerička shema

U računalnom programu Stripp12 moguće je birati između više ponuđenih numeričkih shema (Slika 3.3). Neke od tih shema su sljedeće:

- Q-shema prvog reda
- Hubbardova shema
- MUSCL sheme: MUSCL-Hancock i MUSCL-Q
- kinetička shema



Slika 3.3. Odabir numeričkih shema u programu Stripp12

Numerička shema korištena za potrebe izrade ovog rada je Q-shema s Van Leerovim usrednjenjem i egzaktnim očuvanjem mirne vode, uz balansiranje izvornog člana.

Između mnogih numeričkih shema do danas razvijenih i implementiranih u korišteni softver, izabrana je baš Q-shema jer se ona pokazala kao jedna od najrobusnijih i najpouzdanijih s obzirom da je do danas ekstenzivno testirana i korištena u praktičnoj primjeni ([26], [27], [28]). Balansirana verzija te sheme omogućuje kvalitetno i pouzdano modeliranje vrlo zahtjevnih geometrija (npr. tereni sa velikim gradijentima visine dna).

3.2.1. Dobro balansirana Q-shema za jednodimenzionalne jednadžbe plitkih voda

Formulacija dobro balansirane Q-sheme za jednadžbe jednodimenzionalnog strujanja u plitkim vodama (2.16)-(2.17) glasi:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{f}_{i+1/2}^n - \mathbf{f}_{i-1/2}^n\right) + \Delta t\left(\mathbf{g}_{i+1/2}^{n,L} + \mathbf{g}_{i-1/2}^{n,R}\right), \tag{3.4}$$

$$\mathbf{f}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}_i^n + \mathbf{f}_{i+1}^n\right) - \frac{1}{2}\left|\mathbf{Q}_{i+1/2}^n\right|\left(\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n\right) - \frac{1}{2}\left|\mathbf{Q}_{i+1/2}^n\right|{\mathbf{Q}_{i+1/2}^n}^{-1}\mathbf{V}_{i+1/2}^n\Delta x \tag{3.5}$$

$$\mathbf{g}_{i+1/2}^{n,L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} - \left|\mathbf{Q}_{i+1/2}^n\right|{\mathbf{Q}_{i+1/2}^n}^{-1}\right)\mathbf{G}_{i+1/2}^n, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{g}_{i+1/2}^{n,R} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} + \left|\mathbf{Q}_{i+1/2}^n\right|{\mathbf{Q}_{i+1/2}^n}^{-1}\right)\mathbf{G}_{i+1/2}^n. \tag{3.7}$$

U gornjim izrazima podindeksi se odnose na prostornu, a nadindeksi na vremensku diskretizaciju. Točnije, podindeks i označava srednju vrijednost neke veličine u i-toj ćeliji $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $i = 0,\ldots,N$, a podindeks $i+1/2$ vrijednost neke veličine na mjestu $x_{i+1/2} = (i+1/2)\Delta x$, gdje je Δx prostorni korak. Nadindeks n znači da je neka veličina evaluirana u vremenskom trenutku t^n. Pored toga nadindeks L (odnosno R) označava lijevi (odnosno desni) *upwind* dio numeričke aproksimacije izvornog člana $\mathbf{g}(\mathbf{u},x)$.

U jednakostima (3.5)-(3.7) matrica $\mathbf{Q}_{i+1/2}^n$ numerička je aproksimacija Jacobijeve matrice fluksa $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ i to u usrednjenom stanju $\mathbf{u}_{i+1/2}^n$ definiranom proširenim Roeovim uvjetom:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_{i+1/2}^n\right)\cdot\left(\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n\right) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\left(\mathbf{u}_{i+1/2}^n\right)\left(x_{i+1} - x_i\right) = \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_{i+1}^n\right) - \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_i^n\right). \tag{3.8}$$

U istim izrazima rabi se i oznaka:

$$\left|\mathbf{Q}_{i+1/2}^n\right| = \mathbf{R}_{i+1/2}^n\left|\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}^n\right|{\mathbf{R}_{i+1/2}^n}^{-1},$$

gdje je $\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}^n$ matrica svojstvenih vrijednosti, a $\mathbf{R}_{i+1/2}^n$ matrica desnih svojstvenih vektora matrice $\mathbf{Q}_{i+1/2}^n$.

Konačno, vektor $\mathbf{V}_{i+1/2}^n$ u (3.5) numerička je aproksimacija za:

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ g\left(I_2 - hD\right) \end{pmatrix},$$

a $\mathbf{G}^n_{i+1/2}$ u izrazima (3.6) i (3.7) numerička je aproksimacija za izvorni član $\mathbf{g}(\mathbf{u},x)$ u istom usrednjenom stanju (3.8). Točnije, za numeričku aproksimaciju dijela izvornog člana koji modelira trenje dovoljno je uzeti evaluaciju u *i*-toj ćeliji, dok se za preostalo, da bi se dobilo svojstvo egzaktnog očuvanja mirne vode, uzima:

$$\mathbf{V}^n_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ g\left(I^n_{2,i+1/2} - h^n_{i+1/2} D^n_{i+1/2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}^n_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(gI^n_{2,i+1/2} - gA^n_{i+1/2} \dfrac{z_{i+1} - z_i}{\Delta x} \right) \end{pmatrix},$$

gdje je:

$$I^n_{2,i+1/2} = \frac{I^n_{1,i+1} - I^n_{1,i}}{\Delta x} - A^n_{i+1/2} \frac{h^n_{i+1} - h^n_i}{\Delta x},$$

$$D^n_{i+1/2} = \frac{A^n_{i+1} - A^n_i}{\Delta x} - b\left(x_{x+1/2}, h^n_{i+1/2}\right) \frac{h^n_{i+1} - h^n_i}{\Delta x}.$$

3.2.2. Dobro balansirana Q-shema za dvodimenzionalne jednadžbe plitkih voda

S obzirom da se u ovom radu ispituje utjecaj parametara numeričke mreže na točnost rezultata simulacija strujanja plitkih voda, korišteni model je dvodimenzionalni model plitkih voda. Formulacija dobro balansiranih Q-shema za dvodimenzionalne jednadžbe plitkih voda (2.21)-(2.23) glasi:

$$\mathbf{u}^{n+1}_i = \mathbf{u}^n_i - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in K_i} |\mathbf{n}_{ij}| \mathbf{F}^n_{ij} + \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in K_i} |T_{ij}| \mathbf{g}^n_{ij}, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{F}^n_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^n_i \cdot \mathbf{n}_{ij} + \mathbf{F}^n_j \cdot \mathbf{n}_{ij}\right) - \frac{1}{2}\left|\mathbf{Q}^n_{ij}\right|\left(\mathbf{u}^n_j - \mathbf{u}^n_i\right), \tag{3.10}$$

$$\mathbf{g}^n_{ij} = \left(\mathbf{I} - \left|\mathbf{Q}^n_{ij}\right| \mathbf{Q}^{n\,-1}_{ij}\right) \mathbf{G}^n_{ij}. \tag{3.11}$$

U skladu sa standardnom notacijom, podindeksi se odnose na prostornu, a nadindeksi na vremensku diskretizaciju. Točnije, podindeks *i* znači srednju vrijednost neke veličine u *i*-toj ćeliji C_i, koja ima središte u čvoru N_i, a podindeks *ij* vrijednost neke veličine na rubu između *i*-te i *j*-te ćelije. Nadindeks *n* znači da je neka veličina evaluirana u trenutku t^n.

Pored toga, u izrazima (3.9)-(3.11) uvedene su sljedeće veličine (vidi Sliku 3.2):

K_i – skup svih susjednih ćelija *i*-te ćelije,

T_{ij} – *j*-ta podćelija *i*-te ćelije,

$|C_i|$ – površina ćelije C_i,

$|T_{ij}|$ – površina podćelije T_{ij},

$\mathbf{n}_{ij}$ – normalni vektor na rub između *i*-te i *j*-te ćelije te

$\left|\mathbf{n}_{ij}\right|$ – duljina ruba između *i*-te i *j*-te ćelije.

U jednakostima (3.10)-(3.11) matrica $\mathbf{Q}_{ij}^n$ numerička je aproksimacija Jacobijeve matrice fluksa:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = (\mathbf{A}_1(\mathbf{u}), \mathbf{A}_2(\mathbf{u})),$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - v_1^2 & 2v_1 & 0 \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 \\ c^2 - v_2^2 & 0 & 2v_2 \end{pmatrix}.$$

Točnije,

$$\mathbf{Q}_{ij}^n = \mathbf{A}\left(\mathbf{u}_{ij}^n\right) \cdot \mathbf{n}_{ij},$$

gdje je $\mathbf{u}_{ij}^n$ Roeovo usrednjenje:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_{ij}^n\right) \cdot \left(\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n\right) = \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_j^n\right) - \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_i^n\right), \tag{3.12}$$

Ovdje treba napomenuti da je $\mathbf{G}_{ij}^n$ u izrazu (3.11) numerička aproksimacija za izvorni član $\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{x})$ u istom usrednjenom stanju (3.12). To znači da je za numeričku aproksimaciju dijela izvornog člana koji modelira trenje dovoljno uzeti evaluaciju u *i*-toj ćeliji. Da bi se dobilo svojstvo egzaktnog očuvanja mirne vode, za preostali dio uzima se:

$$\mathbf{G}_{ij}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ -g h_{ij}^n \dfrac{z_j - z_i}{l_{ij}} n_{ij,1} \\ -g h_{ij}^n \dfrac{z_j - z_i}{l_{ij}} n_{ij,2} \end{pmatrix},$$

gdje je l_{ij} – visina podćelije T_{ij}.

3.3. Rad u računalnom programu Stripp12

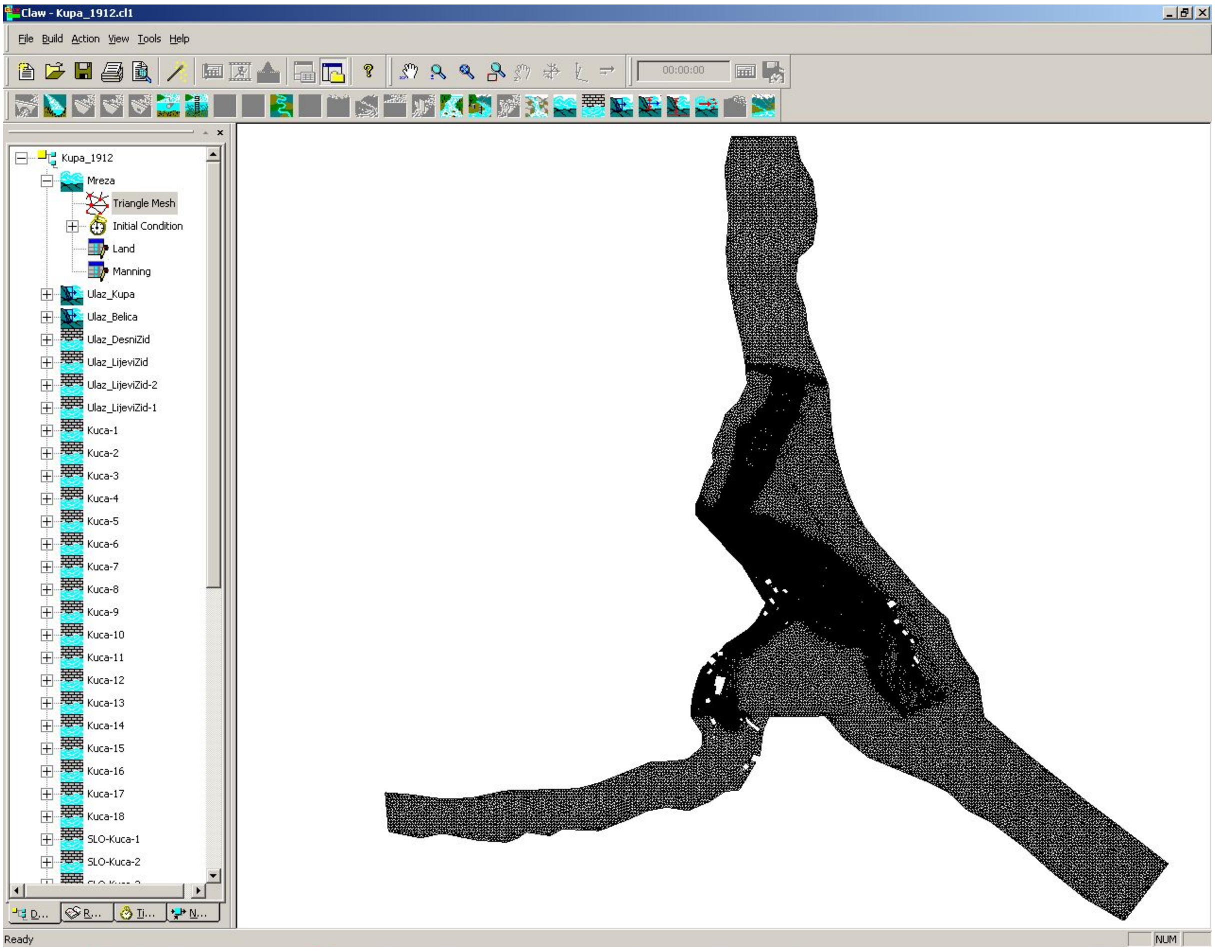
Stripp12 je računalni program koji omogućava simulacije strujanja u složenim sustavima otvorenih vodotoka uključujući i plavljenja okolnih terena. Temeljen je na matematičkim modelima nestacionarnih jednodimenzionalnih i dvodimenzionalnih plitkih voda s velikim skupom različitih rubnih uvjeta. Osim osnovnih rubnih uvjeta (zid, rubni uvjet protoka, razine vodnog lica i sl.), omogućava korištenje i rubnih uvjeta koji modeliraju brojne moguće objekte na takvim sustavima vodotoka (preljevi, ispusti, brane, zapornice, čvorišta itd.).

U program Stripp12 ugrađene su *state-of-the-art* numeričke sheme objavljene u vrhunskim svjetskim časopisima i kao takav je testiran na svim relevantnim akademskim test-primjerima. Osim toga, Stripp12 je primijenjen u izradi mnogih praktičnih projekata.

3.3.1. Postupak izgradnje modela

Izgradnja svakog dvodimenzionalnog računalnog modela vodotoka počinje unošenjem numeričke mreže koja u svakom čvoru sadrži informaciju o visini terena. Numeričku mrežu se može izraditi u nekom od programa za generaciju numeričkih mreža, a više o procesu izgradnje numeričke mreže bit će riječi u sljedećem poglavlju.

Jedan potpuno izgrađeni model (ušće rijeke V. Belice u Kupu u mjestu Kuželj, [26]) i njegova numerička mreža terena prikazani su na Slici 3.4.



Slika 3.4. Numerička mreža korita Kupe, V. Belice i poplavnih područja u programu Stripp12

Osim same numeričke mreže terena, potrebno je unijeti i vrijednosti Manningovog koeficijenta hrapavosti u svakom čvoru numeričke mreže. U programu Stripp12 to se radi tako da se učita posebna numerička mreža koja ima čvorove na istim mjestima kao i mreža terena, ali oni ovdje nisu podignuti na pripadnu im geodetsku visinu, već na „visinu“ vrijednosti Manningovog koeficijenta.

Takvu mrežu sa Manningovim koeficijentima relativno je jednostavno izraditi. Izvornu numeričku mrežu terena potrebno je preoblikovati na način da se točkama unutar područja određene hrapavosti ručno pridoda vrijednost Manningovog koeficijenta hrapavosti umjesto izvornih geodetskih visina.

Sljedeći korak je zadavanje početnih uvjeta. Za dvodimenzionalno strujanje u plitkim vodama potrebno je zadati početnu razinu vode i početne vektore brzina po cijeloj domeni. To početno stanje može biti npr. stanje suhog terena ili stacionarno strujanje izračunato nekom prethodnom simulacijom.

U slučaju da se simulira pucanje brane ili sl., moguće je početnu razinu vode unijeti u program u vidu nove numeričke mreže. Ovakva numerička mreža može se izraditi potpuno analogno kao mreža sa Manningovim koeficijentima hrapavosti. Tako dobivena mreža će, umjesto visina terena, u svojim čvorovima imati geodetsku visinu razine vodnog lica.

Osim početnih uvjeta, potrebno je zadati i rubne uvjete. Tipično su to rubni uvjeti na utocima u domenu (najčešće rubni uvjet poznatog protoka ili poznate razine vodnog lica) te rubni uvjeti zida pomoću kojih se modeliraju objekti u domeni. Za svaki pojedini rubni uvjet potrebno je identificirati niz točaka na koje se dotični rubni uvjet želi primijeniti te parametri koji se na taj rubni uvjet odnose. Nizove točaka treba unaprijed odrediti prilikom izrade numeričke mreže.

Za rubne uvjete protoka i razine vodnog lica potrebno je zadati pripadne im hidrograme. Hidrogrami se zadaju tablično, tj. po točkama koje opisuju funkciju ovisnosti protoka odnosno razine vodnog lica o vremenu ($Q(t)$, $H(t)$).

Izlazni rubni uvjet (na mjestu istjecanja vode iz domene) nije potrebno posebno zadavati. Naime, na rubnim ćelijama numeričke mreže automatski se u programu Stripp12 primjenjuje apsorpcijski rubni uvjet. Za ispravno funkcioniranje ovog rubnog uvjeta potrebno je jedino osigurati da numerička mreža bude tako izgrađena da sam izlazni rub bude okomit na smjer gibanja fluida.

Nakon što su zadani svi početni i rubni uvjeti, potrebno je još zadati globalne parametre za simulaciju, kao što su izabrana numerička shema, CFL broj, duljina prvog vremenskog koraka, itd. (Slika 3.3). Duljinu prvog vremenskog koraka nužno je zadati jer se on kod propagacije poplavnog vala po inicijalno suhom području ne može automatski izračunati po formuli (3.3).

3.3.2. Provođenje simulacija i analiza dobivenih rezultata

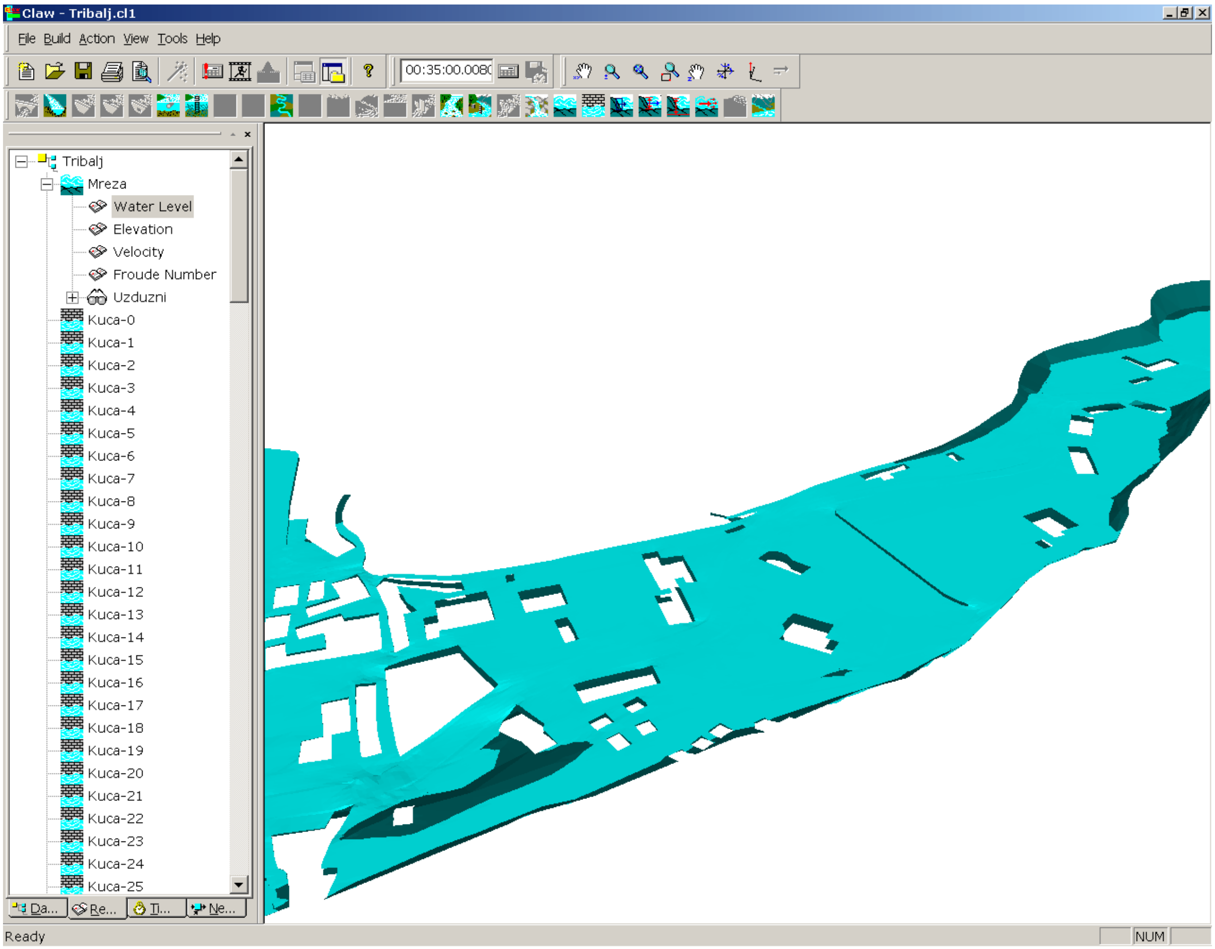
Nakon zadavanja svih potrebnih podataka, vrši se njihova obavezna provjera postupkom tzv. „kreiranja“ modela. Kada program uspješno provede „kreiranje“ modela, može se početi sa simulacijama.

Za provođenje simulacije potrebno je samo unijeti proračunsko vrijeme za koje se želi izračunati slika strujanja i pokrenuti proračun. Najčešće se koristi i opcija zadavanja vremenskog intervala snimanja izračunatih međustanja, tako da se na kraju proračuna dobiva niz snimljenih stanja od početnog trenutka (t = 0 s), pa do zadanog krajnjeg vremena. Rezultati se mogu prikazivati za svako pojedino izračunato stanje, ili animirati na način da se određena veličina prikazuje za niz stanja koja se automatski učitavaju kronološkim redoslijedom.

Kod programa Stripp12 posebnu pogodnost za analiziranje dobivenih rezultata simulacija omogućuje instaliranje virtualnih mjernih stanica na posebnim mjestima u domeni. Ta mjesta mogu biti točke ili nizovi točaka i na njima se dobiva grafikone koji prikazuju promjene standardnih izračunatih veličina u vremenu (za mjernu točku) odnosno duž niza točaka u zadanom trenutku (za mjernu liniju).

Virtualne mjerne stanice sustavno su korištene u analizi rezultata simulacija opisanih u ovom radu, s obzirom da je bilo potrebno uspoređivati izmjerene i izračunate vrijednosti na specificiranim mjernim točkama.

Na Slikama 3.4-3.5 vidljiv je izgled grafičkog sučelja programa Stripp12, koje je razvijeno do stupnja koji omogućuje kako određeno predprocesiranje tako i brz i jednostavan uvid u zadane podatke i dobivene rezultate simulacija. Tako se npr. dobiveno vodno lice, osim bojama u plošnom prikazu, može prikazati i u plastičnom 3D prikazu (Slika 3.5 – simulacija poplavljivanja grada Crikvenice). Brzine se tipično prikazuju vektorima u čvorovima numeričke mreže.



Slika 3.5. Vodno lice u 3D prikazu programa Stripp12

Program Stripp12 omogućava različite načine ekstrahiranja podataka što daje dodatne mogućnosti prikaza i analize rezultata proračuna u drugim računalnim programima. Tako je moguće dobiti datoteke pogodne za učitavanje u računalni program SMS (vidi podpoglavlje 4.2.), kao i tekstualne datoteke općenito pogodne za učitavanje u tablične kalkulatore (kao npr. Excel), gdje se može vršiti postprocesiranje dobivenih rezultata. Upravo spomenuta dva računalna programa korištena su za potrebe izrade ovog rada.

4. Tehnologija izrade numeričkih mreža za model plitkih voda

Može se reći da je izrada numeričke mreže za potrebe simulacija strujanja u plitkim vodama jedan poluautomatiziran proces. Softveri koji omogućuju automatsku triangulaciju (tj. „mreženje“ trokutastim ćelijama, s time da se termin može se koristiti i za „mreženje“ općenito) samo djelomično pojednostavnjuju postupak i rijetko im se u potpunosti može prepustiti izrada mreže.

Temeljni problem kod izrade numeričke mreže predstavlja vrsta i količina dostupnih geodetskih podataka i tek kada se dobivanje tih podataka u potpunosti automatizira i prilagodi potrebama matematičkih modela, moći će se automatizirati i tehnologija izrade numeričkih mreža.

Novija dostignuća u tehnologiji geodetskih mjerenja, kao što su avionske ortofoto-karte, radarske snimke (LIDAR – *Laser Induced Direction And Ranging*) i druga, daju vrlo guste rastere izmjerenih geodetskih točaka. To omogućuje praktički direktnu automatsku izradu vrlo točne uniformne mreže. Određena ograničenja ovih metoda svakako ostaju prisutna (npr. ograničena mogućnost definiranja konfiguracije terena koji se nalazi ispod gusto pošumljenog područja i sl.), no činjenica je da je tehnološki razvoj na ovom području vrlo brz te da će se u budućnosti uslijed njega mijenjati i metode izrade numeričkih mreža.

Izrada numeričke mreže (posebno neautomatska) prepušta izrađivaču donošenje mnogih neugodnih odluka i procjena, što u konačnici smanjuje pouzdanost i točnost samog modela. U tom smislu jest i cilj ovog rada bio istražiti utjecaj glavnih parametara numeričke mreže (određivanje kojih se obično prepušta iskustvu izrađivača mreže i modela), kao i pokušati definirati određene smjernice za njihovo određivanje.

Sadašnja tehnologija izrade numeričke mreže u svim svojim fazama opisana je u sljedećim podpoglavljima.

4.1. Prikupljanje podataka

Prije nego što se počne sa samom izradom numeričke mreže potrebno je analizirati dostupnu dokumentaciju te utvrditi njenu aktualnost. Izvori podataka o konfiguraciji terena mogu biti različiti: geodetske točke dobivene mjerenjem, geografske karte, ortofoto-snimke, fotografije, građevinski nacrti itd.

Svaki od pojedinih izvora mogu biti dani u tiskanom obliku (geodetske knjižice, karte) ili pak digitalnom (skenirane karte, vektorizirane karte, digitalne baze podataka). S obzirom da se numeričke mreže izrađuju na računalima, najčešće je potrebno većinu podataka koji nisu dani u digitalnom obliku prebaciti u taj oblik.

Geografske karte različitih mjerila čest su izvor podataka za izgradnju dvodimenzionalne numeričke mreže. Geografske karte je potrebno vektorizirati, jer ih se tek tako može potpuno iskoristiti; samim skeniranjem može ih se koristiti tek kao pomoćno sredstvo u postupku izrade numeričke mreže. Pod vektorizacijom geografske karte podrazumijeva se konstrukcija računalnog trodimenzionalnog nacrta zadanog terena na osnovu dvodimenzionalne slike dane u samoj karti uz ekstrakciju upisanih informacija o nadmorskoj visini. U praksi to znači na računalu (u nekom prigodnom alatu, npr. AutoCAD-u) preko skenirane karte iscrtati izohipse, geodetske točke, građevinske strukture itd. te im pridružiti pripadne nadmorske visine, što može biti vrlo mukotrpan i spor proces. Stoga je svakako najpovoljnije ako postoje već gotove vektorske karte zadanog terena.

Vrlo često se podaci prikupljeni s geografskih karata moraju naknadno nadopuniti podacima dobivenim geodetskom izmjerom pojedinih, posebno važnih, dijelova terena. Tipičan takav slučaj je kada je potrebno u domenu unijeti izmjerene poprečne profile vodotoka, jer geografske karte obično ne daju mnogo informacija o samim vodotocima.

Podaci dobiveni geodetskom izmjerom terena obično predstavljaju grupe izmjerenih bitnih dijelova terena. Obično su ti podaci dani u vidu digitalnih tabličnih datoteka, tj. baza podataka (npr. Excel ili slična datoteka, ili obična tekstualna datoteka) sa popisom točaka i njihovim koordinatama ili vektorskih računalnih nacrta.

Kao pomoćni izvor informacija često se koriste fotografije, ortofoto-karte, građevinski nacrti i sl. Često ih je potrebno koristiti za provjeru i korekciju ili pak ažuriranje dostupnih geografskih karata koje znaju biti stare i po nekoliko desetaka godina.

Informacije o hrapavosti terena najčešće se prikuplja iz fotografija te fizičkim obilaskom i pregledom terena. Naravno, mnogo je povoljnije ako postoje ortofoto-karte (ili štogod slično) koje se mogu podmetnuti ispod numeričke mreže terena. Tada se relativno jednostavno može vizualno identificirati područja različitih hrapavosti terena te pripadnim područjima numeričke mreže pridružiti odgovarajući Manningov koeficijent hrapavosti.

Konačni proizvod cjelokupnog postupka prikupljanja podataka je digitalna baza podataka koja predstavlja skup realnih terenskih točaka dobivenih obradom i superponiranjem svih dostupnih geodetskih informacija. Polazeći od tih digitaliziranih podataka o terenu, uporabom nekog od računalnih programa, kreira se 2D numerička mreža koja predstavlja geometrijsku osnovu numeričkog modela.

4.2. Postupak triangulacije

Na samom početku je potrebno napomenuti da postoji više vrsta numeričkih mreža za plitke vode, sa raznim vrstama elemenata (linearni, kvadratični – u skladu sa diskretizacijskom metodom, vidi podpoglavlje 3.2.), koji pak mogu biti trokutni ili četverokutni. No, najčešće se koriste linearni elementi, dok se svaka četverokutasta mreža može vrlo jednostavno transformirati u trokutastu (raspolavljanjem četverokuta). Iz tih razloga također i softver korišten za potrebe izrade ovog rada (Stripp12) koristi trokutastu numeričku mrežu linearnih elemenata, pa je takva numerička mreža korištena i za simulacije opisane u ovom radu.

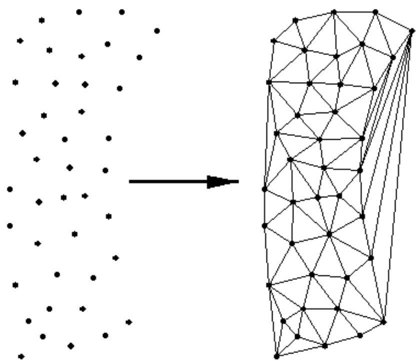
Postoji cijeli niz specijaliziranih računalnih programa za automatsko generiranje numeričkih mreža. No, s obzirom na specifičnosti postupka izrade numeričkih mreža za simulacije strujanja u plitkim vodama (neravnomjernost distribucije geodetskih podataka te izražena nepravilnost proračunske domene), potrebno je koristiti uže specijalizirane mrežne generatore (SMS, Mike, QuickSurf, itd.). Iako su takvi programi namijenjeni upravo za izgradnju numeričke mreže nepravilnog prirodnog terena, ipak ih je potrebno koristiti izuzetno oprezno i uz strogu kontrolu.

Za izradu, modifikaciju i pregled numeričkih mreža za potrebe simulacija opisanih u ovom radu korišten je računalni program Surface-Water Modelling System – SMS [23]. On sadrži module koji omogućuju interaktivnu izradu dvodimenzionalne numeričke mreže uz više načina automatske triangulacije, koja je prilagođena topografskim podacima riječnih korita i poplavnih terena. Slične mogućnosti pružaju i ostali specijalizirani programi tako da se u nastavku opisani postupci automatske triangulacije, kontrole i poboljšanja numeričke mreže mogu shvatiti kao općeniti postupci.

U principu najjednostavniji način triangulacije je direktna triangulacija zadanih geodetskih točaka gdje se zadane točke direktno umrežavaju (Slika 4.1). Na taj način se ne uvode nove točke u domenu, nego upravo izvorne točke čine čvorove tj. vrhove elemenata numeričke mreže. Ovaj tip triangulacije ima smisla provoditi samo u slučaju kada su zadane točke donekle ravnomjerno distribuirane i ovako dobivena mreža naziva se trokutasta neregularna mreža (TIN – *triangular irregular network*).

Sam algoritam ovakve triangulacije zadovoljava osnovni uvjet, tzv. Delauneyev kriterij, koji definira da kružnica opisana elementu mreže – trokutu ne zatvara u sebi niti jedan susjedni čvor. Dobivena numerička mreža je, u pravilu, neregularna, tj. s elementima nejednake veličine i oblika, pa je na tako dobivenom dijelu mreže potrebno redovito provesti kontroliranu relaksaciju, koja može biti i višekratna. (Relaksacijom se čvorovi mreže razmiču tako da se dobiju ravnomjerniji kutovi i veličine trokuta.)

Dodatni nedostatak ovakve numeričke mreže su nepotrebni rubni elementi, obično vrlo izduženog oblika (Slika 4.1), koji nastaju kao posljedica algoritma za generaciju TIN-mreže koji pokušava formirati zaobljenu, konveksno zatvorenu domenu. Osim što dobiveni oblik numeričke mreže može biti vrlo neprirodan i neprilagođen obliku same realne domene, nekvalitetni oblik spomenutih rubnih elemenata može štetiti numeričkoj stabilnosti proračuna i pouzdanosti rezultata simulacija. Stoga te elemente najčešće treba ručno odstraniti iz numeričke mreže.

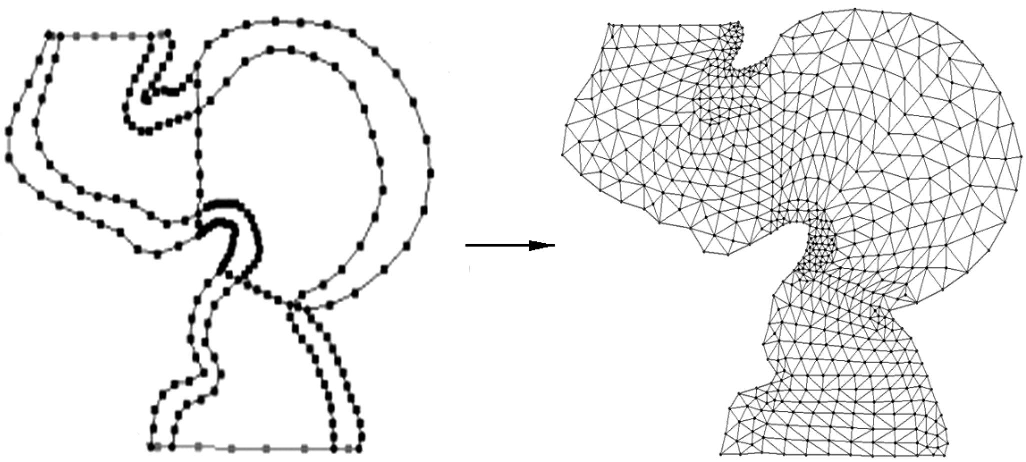


Slika 4.1. Direktna triangulacija i izgled dobivene mreže

Drugi mogući način triangulacije je složeniji, ali zato primjenjiv bez obzira na količinu ili vrstu dostupnih topografskih informacija. Ovakva triangulacija provodi se u dva osnovna koraka:

1) izrada ravne (neoblikovane po visini) numeričke mreže
2) oblikovanje („gužvanje“) numeričke mreže na temelju geodetskih točaka

U prvom koraku definiraju se tzv. omreženi poligoni koji prekrivaju određene dijelove terena, ali ne nose u sebi nikakve topografske informacije. Obzirom na karakteristiku i složenost dijela terena na koji će biti apliciran određeni mrežni poligon, potrebno je pažljivo definirati raspored i gustoću rubnih točaka poligona, na osnovu kojih će generator mreže premrežiti određeni poligon. Tako dobivena mreža je puno boljeg, „uniformnijeg“ oblika od TIN-mreže, gustoća elemenata je kontrolirana i nema nekvalitetnih rubnih elemenata (Slika 4.2).



Slika 4.2. Kontrolirana triangulacija i izgled dobivene mreže

U drugom koraku se prema realnim topografskim točkama terena omreženi poligoni deformiraju u plohu koja modelira realni teren. Ovaj postupak se u programu SMS provodi automatski i temelji se na interpolaciji topografskih točaka na mrežni poligon, koju je moguće provesti na više različitih načina:

- linearna interpolacija
- interpolacija sa težinskim faktorom obrnuto proporcionalnom udaljenosti
- interpolacija kriterijem prirodnog susjeda

Analizom svih navedenih kriterija izabran je kriterij linearne interpolacije koji se pokazao optimalan obzirom na najčešće oblike zadanih terena. Linearna shema interpolacije pretpostavlja da se visina mijenja linearno duž pojedinog trokuta te mreža po trokutima opisuje linearnu plohu koja interpolira zadane topografske točke.

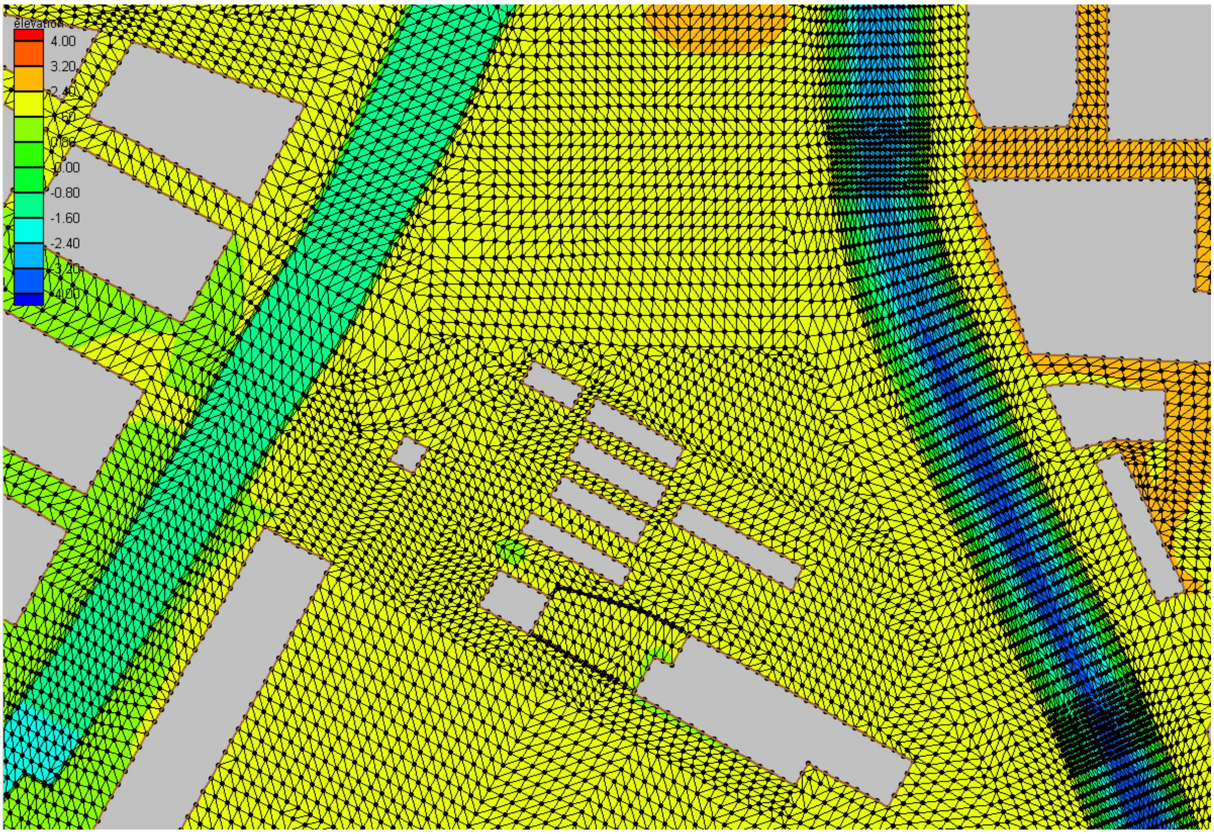
Na kraju ovog postupka provodi se vizualna kontrola dobivene numeričke mreže. Tada je najčešće potrebno korigirati određena područja domene kod kojih se primijeti da zadani teren nije dovoljno dobro modeliran, što se, tipično, dešava zbog nejednolike distribucije geodetskih točaka. Popravci se na takvim mjestima vrše ručnim pomicanjem čvorova ili brisanjem postojećih elemenata te ručnim kreiranjem novih.

U posljednjoj fazi identificiraju se značajniji građevinski objekti koji se modeliraju kao šupljine u domeni na čijim rubovima se kasnije zadaje rubni uvjet zida.

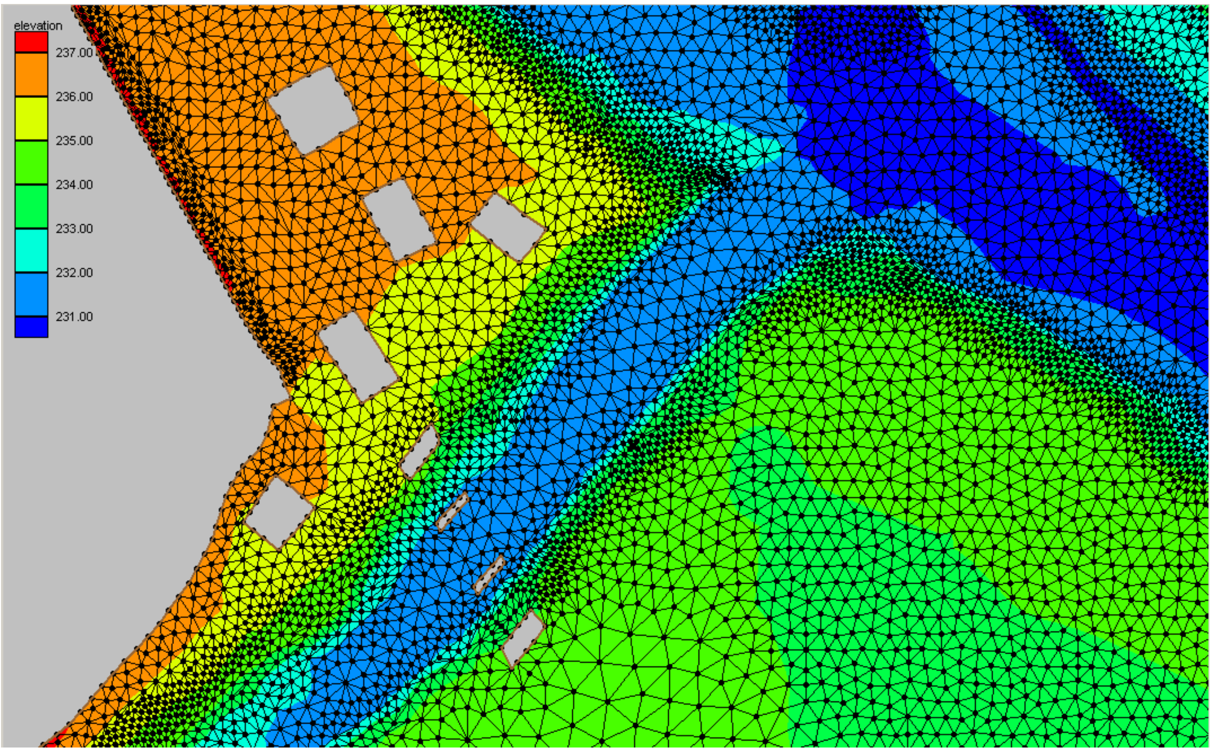
Konačno dobivena numerička mreža zadovoljavat će svoju namjenu, ako su prilikom njene izrade poštivane temeljne smjernice za izradu kvalitetne mreže:

- U području gdje se topografija terena naglo mijenja (tj. gradijenti visina su relativno veliki), mreža treba biti finija, tj. elementi manji, kako bi se teren što vjernije modelirao. Prelasci iz područja finije u područja grublje mreže poželjno je da su izvedeni postupno i kontrolirano.
- Definiranju mreže unutar korita rijeke, kanala i jezera treba biti posvećena posebna pozornost. Elementi mreže moraju po presjeku vodotoka biti raspoređeni tako da precizno prate dno korita i nagib obale. Taj dio mreže triangulira se s posebnom pažnjom i postupno, a pri postupku triangulacije linija elemenata koja opisuje prirodno riječno korito ostaje glatka krivulja.
- Elementi numeričke mreže koji opisuju poplavne zone mogu biti potpuno anizotropni. Potrebno je da su onoliko veliki koliko se na tim područjima traži precizan rezultat, s time da je najčešće načelno dobro da su ipak što manji. Time se postiže vjernije modeliranje terena i, u principu, točniji rezultat numeričke metode.

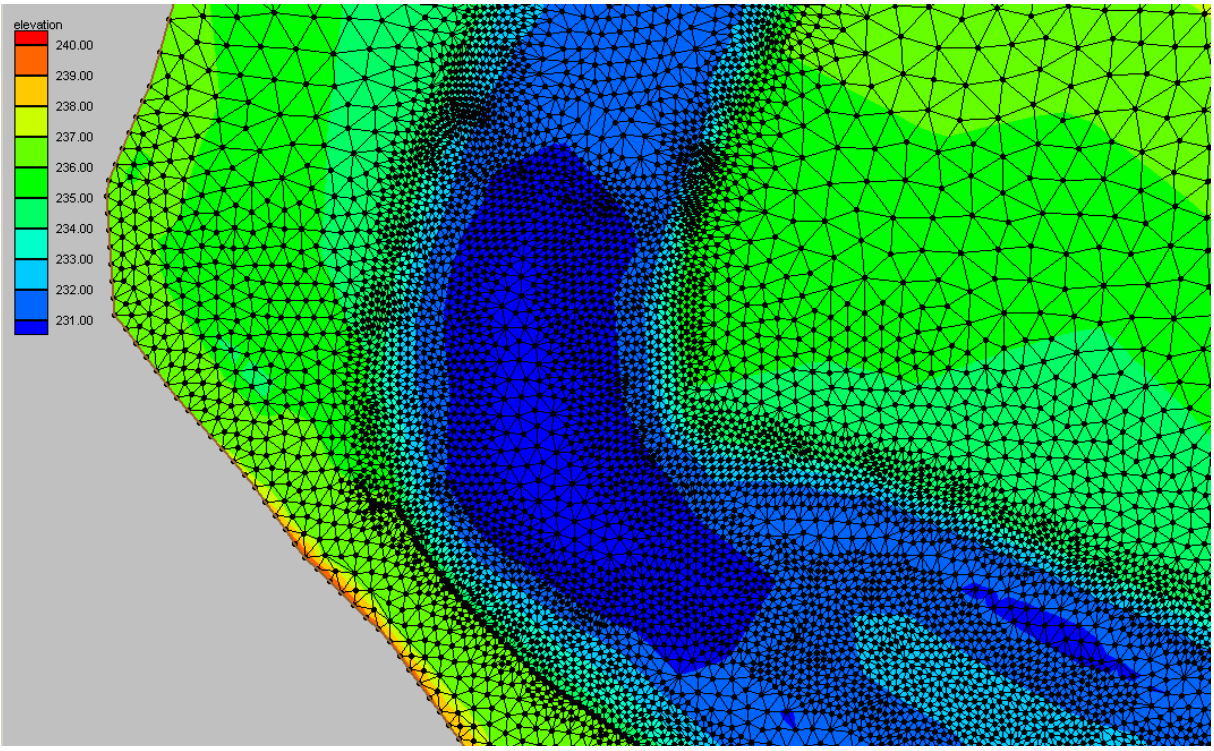
Složenost i sposobnost prilagodbe 2D numeričke mreže obliku terena može se uočiti na detaljima numeričkih mreža izrađenih za potrebe realnih primjera, prikazanih na Slikama 4.3-4.6.



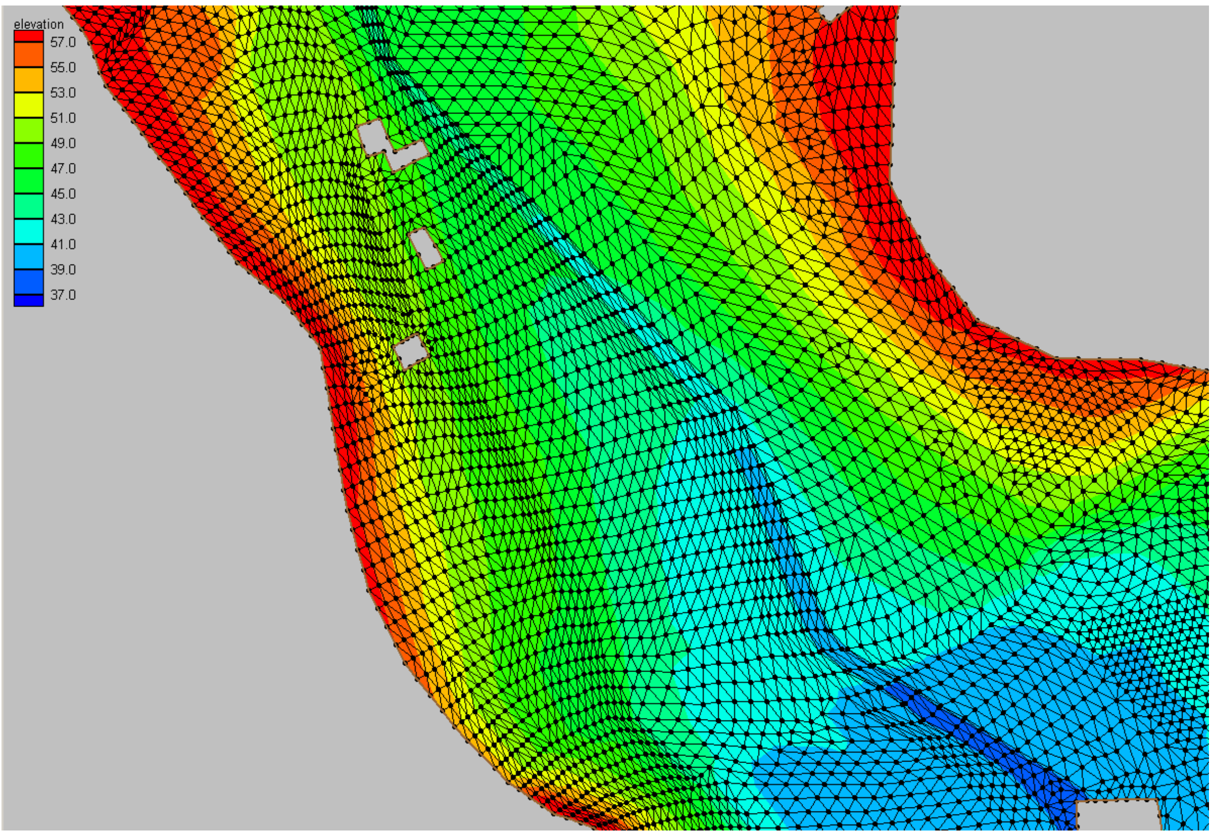
Slika 4.3. Detalj numeričke mreže korita rijeke Rječine i okolnog područja u gradu Rijeci



Slika 4.4. Detalj numeričke mreže ušća rijeke V. Belice u rijeku Kupu



Slika 4.5. Detalj numeričke mreže korita rijeke Kupe u mjestu Kuželj

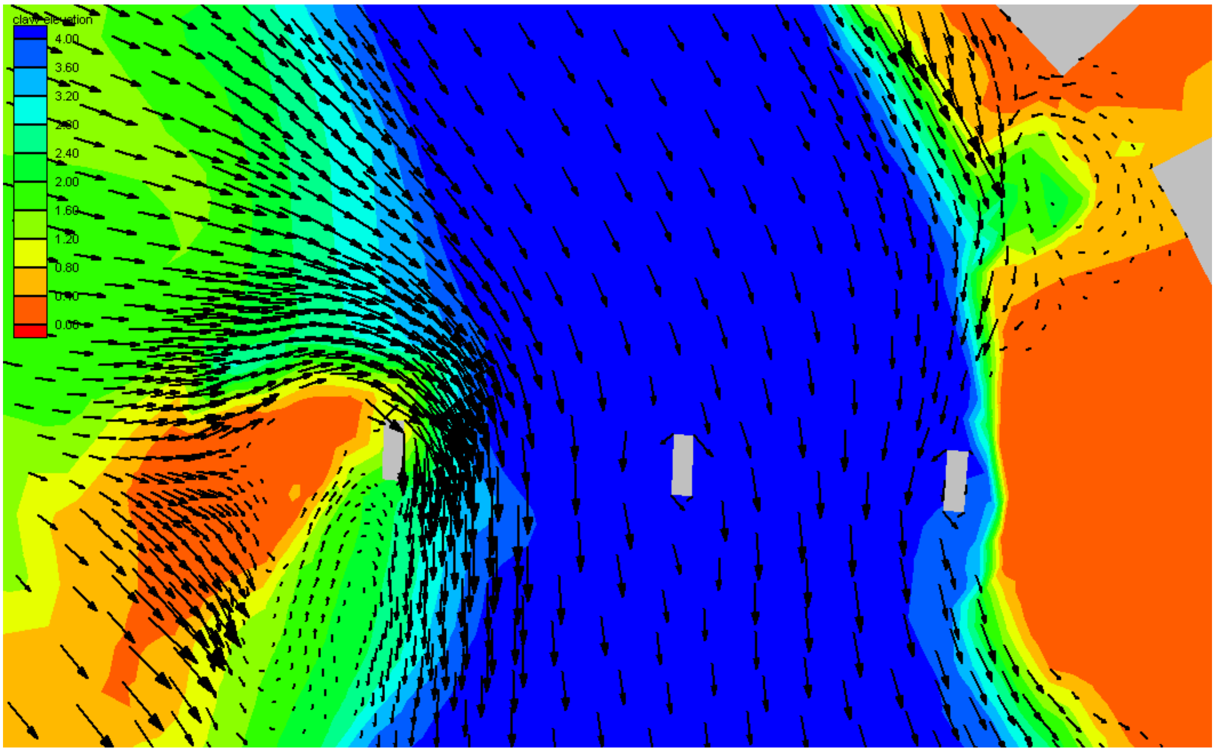


Slika 4.6. Detalj numeričke mreže korita rijeke Dubračine i okolnog poplavnog područja

Na samom kraju postupka izrade numeričke mreže treba još identificirati točke na kojima će se kasnije zadavati rubne uvjete. Točke koje pripadaju određenom rubnom uvjetu se tako povezuju u niz (*nodestring*), što u konačnici znači da u numeričkoj mreži ujedno treba biti definirano i točno onoliko nizova točaka koliko će naknadno biti zadano rubnih uvjeta.

4.3. Post-procesiranje i prikaz rezultata

Jednom izrađena numerička mreža koristi se i za prikazivanje rezultata simulacija. Tako se na numeričkoj mreži bojom i vektorima najčešće prikazuju izračunate dubine vode te intenziteti i smjerovi brzina u čvorovima mreže. Osim tih podataka, na ovaj način mogu se prikazivati i apsolutna razina površine vode, Froudovi brojevi, itd. Na Slici 4.7 prikazan je jedan tipičan mogući način prikaza rezultata simulacija, dobiven korištenjem programa SMS.



Slika 4.7. Razine vode i vektori brzina kod mosta na rijeci Kupi u mjestu Kuželj

Osim plošnih prikaza, numerička mreža može se koristiti i za prostorni prikaz rezultata, gdje takvi trodimenzionalni prikazi daju vrlo plastične slike vodnog lica (Slika 3.5). Osim za prikaz vodnog lica, ovakav način prikazivanja može se koristiti i za prikazivanje same numeričke mreže, tj. vodotoka i poplavnog područja.

Numerička mreža može se posebnim programima prevesti u format čitljiv u računalnim alatima kao što su AutoCAD, 3D Studio, IDEAS i drugi. Time se dobivaju dodatne naprednije raznovrsne mogućnosti trodimenzionalnog prikaza modela terena i dobivenih rezultata proračuna. Dobiven prostorni model moguće je dalje raznim alatima učiniti preglednijim ili čak animirati.

4.4. Numeričke mreže izrađene za potrebe ovog rada

Za cjelokupni proces kreiranja numeričkih mreža korištenih za potrebe ovog rada korišten je računalni program SMS.

Numeričke mreže korištene u podpoglavlju 6.1. kreirane su postupkom kontrolirane triangulacije. Naime, kako je cilj tog dijela rada bio istraživanje utjecaja gustoće numeričke mreže na kvalitetu rezultata simulacija, a jedino kontrolirana triangulacija omogućuje kontroliranu gustoću numeričke mreže, to je bio ujedno i jedini ispravni način.

Numeričke mreže korištene u podpoglavljima 6.2. i 6.3. izrađene su direktnom triangulacijom, jer su topografski podaci za dotični test-primjer bili zadani kao gusti raster geodetskih točaka. Tim postupkom dobivena numerička mreža je, za potrebe istraživanja opisanog u podpoglavlju 6.2., naknadno kontrolirano distorzirana pomoću specijalnog programa.

U nekim slučajevima geometrija računske domene bila je vrlo jednostavna pa se oblikovanje plohe numeričke mreže po visini moglo vršiti ručno, tj. selektiranjem točaka i pridruživanjem njima pripadne elevacije. Na ovaj način izrađivane su numeričke mreže za potrebe test-primjera opisanog u podpoglavlju 6.1. Oblikovanje po visini numeričkih mreža u podpoglavljima 6.2. i 6.3. provođeno je automatskom linearnom interpolacijom na osnovu zadanog rastera geodetskih točaka.

5. CADAM-projekt

Međunarodni projekt CADAM (eng. *Concerted Action on Dambreak Modelling* – mogući prijevod bio bi „zajednički poduhvat na modeliranju pucanja brana“) financirala je Europska komisija. Projekt je trajao oko dvije godine, od veljače 1998. do siječnja 2000. godine, a u tom periodu održana su četiri sastanka s ciljem prezentacije i analize dobivenih rezultata testnih slučajeva za matematičko modeliranje pucanja brana te posljedičnih poplava i kretanja sedimenta.

Glavni ciljevi CADAM-projekta bili su:

- razmjena informacija o modeliranju pucanja brana među sudionicima, sa posebnim naglaskom na povezivanje sveučilišta, istraživačkih organizacija i industrije
- provedba usporedbe numeričkih modela pucanja brana i postupaka modeliranja sa analitičkim, eksperimentalnim i terenskim podacima
- provedba usporedbe i vrednovanja softvera koji su korišteni ili razvijeni od strane sudionika
- organizacija i promocija kooperativnog istraživanja na modeliranju pucanja brana

Među mnogim publikacijama koje su nastale u toku projekta, objavljen je i rad pod naslovom „Dambreak Modelling – Guidelines and Best Practice“ ([7]), gdje su glavni zaključci kategorizirani i prezentirani kao smjernice za postupak provođenja simulacija pucanja brana i propagacije poplavnih valova te budući razvoj matematičkih modela.

Kao rezultat projekta dobiveni su rezultati simulacija za realne test-primjere koji su uspoređeni sa eksperimentalnim ili terenskim podacima, što je omogućilo opsežnu i sustavnu analizu mogućnosti i ograničenja upotrebljenih numeričkih modela odnosno računalnih programa. S obzirom da su potkrijepljeni mjerenjima, ovi test-primjeri pokazuju se kao vrlo pogodni i za istraživanje osjetljivosti modela s obzirom na njegove ulazne podatke. Tako su i za potrebe istraživanja utjecaja parametara numeričke mreže na kvalitetu rezultata simulacija u ovom radu korišteni upravo neki od test-primjera iz CADAM-projekta.

5.1. Osnovni zaključci CADAM-projekta

Temeljnu poteškoću u razvoju matematičkih modela predstavlja nedostatak dovoljno opsežnih podataka o dosadašnjim pucanjima brana i poplavama čija bi statistička analiza omogućila veću pouzdanost procjene utjecaja takvih nesreća. Dostupnost kvalitetnih podataka o realnim pucanjima brana i poplavama direktno bi imala za posljedicu brži razvoj tehnologije matematičkog modeliranja i računalnog simuliranja tih pojava.

Rezultati CADAM-projekta pokazali su da još ima neriješenih problema u metodologiji računalnog simuliranja pucanja brana i preljevanja akumulacijskih jezera (*overtopping*) koji iziskuju daljnja istraživanja. Pokazalo se da nije moguće istaknuti jedan model ili tip modela koji bi potpuno odgovarao za neki ili sve moguće uvjete pod kojima se odvija pucanje brane.

CADAM-projekt u cjelini omogućio je uočavanje niza čimbenika koji utječu na točnost rezultata matematičkih modela. U tom smislu, između ostalih formulirani su i sljedeći zaključci ([20]):

- Modeli pokazuju da je brzina kretanja poplavnog vala vrlo često loše predviđena. 1D modeli često precijene, a 2D modeli imaju tendenciju podcjenjivanja brzine kretanja poplavnog vala.

- Nužno je uzeti u obzir potrebe korisnika kako bi se rezultati prezentirali u odgovarajućem formatu i s dovoljno detalja. 1D modeli mogu se koristiti za modeliranje dvodimenzionalnog strujanja, ali to zahtijeva vrlo veliko iskustvo i spretnost.
- Razvoj novih numeričkih metoda za modeliranje poplava koncentriran je uglavnom na 2D modele, za koje korisničko sučelje još uvijek nije tako dobro razvijeno kao za 1D modele. Kako se povećava sposobnost obrade velike količine podataka, ograničenja 2D modela će se smanjivati. Hibridni 1D-2D modeli za simuliranje poplava možda će se pokazati kao najbolje rješenje za praktičnu upotrebu.
- Općenito se pokazuje korisnim izraditi više modela sa raznim pretpostavkama i početnim uvjetima te analizom rezultata preliminarnih simulacija odabrati najprikladniju opciju.
- Točnost modela pucanja brana ne bi se trebala uspoređivati s normalnim tokom vode. Uvjeti u kojima se pucanje brane odvija presloženi su i podaci za ocjenjivanje modela su ograničeni. U modeliranje pucanja brana trebali bi se upuštati samo ljudi koji imaju iskustvo sa uvjetima pucanja brana i korištenim računalnim programom.
- Pitanje točnosti još uvijek ostaje općenito neodgovoreno jer je teško govoriti o razini točnosti kada postoji toliko nepoznanica. Prave procjene točnosti neće biti postignute dok se ne donesu jasne smjernice i propišu zahtijevane razine točnosti.
- Može se zaključiti da je točnost numeričkih modela u predviđanju globalnih uvjeta strujanja relativno dobra u usporedbi s ostalim metodama proučavanja pucanja brana. Sposobnost predviđanja kompleksnih pojava toka u urbanim sredinama je relativno slaba.
- Gustoća mreže je u nekim slučajevima znatno utjecala na rezultate modeliranja pa je nužno osigurati da utjecaj veličine ćelija mreže ne utječe znatno na rezultate modela tj. da su topografske varijacije vjerno predstavljene u modelu.
- Nesigurnosti kod modeliranja procesa samog pucanja brane vjerojatno najviše pridonose nesigurnosti cjelokupne analize pucanja brane i propagacije poplavnog vala. Procjenjuje se da se maksimalni protok prilikom pucanja brane može odrediti s točnošću od ±50%, dok je točnost predviđanja trenutka realizacije maksimalnog protoka vjerojatno i manja.
- Trenutno ne postoji preporučeni model samog pucanja brane. Iako se US NWS BREACH model vrlo često koristi, poznato je da taj model ima znatna ograničenja. Postoji jasna potreba integriranja znanja iz hidraulike i mehanike tla da bi se poboljšali modeli na ovom području.
- Za obranu od poplava važno je i predviđanje mjesta pucanja brane odnosno nasipa. Trenutno ne postoji način predviđanja tog mjesta pucanja i jedini mogući izvor informacija su lokalna istraživanja slabih mjesta u strukturi same građevine. Pokazuje se da mehanizmi širenja pukotina na riječnim nasipima i branama nisu jednaki.
- Poznavanje mehanizama popuštanja betonskih i kamenih građevina je također vrlo slabo. Zbog ograničene točnosti preporučljivo je predvidjeti protok kroz pukotinu korištenjem više metoda, te provesti analizu osjetljivosti za razinu vode i vrijeme dolaska poplavnog vala, barem za važnija područja.
- Kod pucanja brane velika je vjerojatnost da će doći do odnošenja materijala (ostaci uništenih građevina, stabla, itd.) i sedimenata golemih razmjera, što će dovesti do većih varijacija u topologiji poplavnog područja. U perspektivi ove pojave moraju postati dio analize.
- Veće sposobnosti modeliranja kretanja sedimenta i formiranja pukotina prilikom pucanja brana vjerojatno će imati za posljedicu povećanja točnosti i pouzdanosti predviđanja. Trenutno je nejasno da mogu li današnji morfološki modeli prikladno simulirati kretanje vodene mase prilikom pucanja brane. Pokazalo se da vrlo gusti tok sedimenta može znatno utjecati na brzinu kretanja poplavnog vala i uzrokovati dodatnu nesigurnost u predviđanju takvih pojava.
- Jasno je da baze podataka i sustavi za praćenje igraju važnu ulogu u smanjivanju rizika i povećavanju sigurnosti brana, ali potrebno je imati podatke o svim aspektima ponašanja brane da bi postojala dovoljna potpora za razvoj takvih sustava. Ovako upotrijebljeni,

današnji sofisticirani alati za informacijske sustave trebali bi vlasniku brane omogućiti iskorištavanje i tuđih iskustava.

- Posljednjih godina pojavili su se veliki pomaci u korištenju, obradi i prezentaciji velikih količina podataka. Informacijski sustavi bit će ključni u razvijanju aplikacija za analizu pucanja brana. Poboljšani alati za modeliranje kretanja nanosa i formiranja pukotina u brani vjerojatno neće biti dostupni u skorijoj budućnosti.

5.2. Numerički testovi

U sklopu CADAM-projekta proveden je niz eksperimenata koji su naknadno rekonstruirani računalnim simulacijama upotrebom raznih numeričkih metoda i računalnih programa. Osim takvih testova, provedene su i računalne simulacije pucanja brane Malpasset, za koju postoje realni podaci o propagaciji poplavnog vala.

Dobiveni računalni rezultati uspoređivani su sa eksperimentalnim odnosno realnim podacima. Veći broj testova i široki spektar korištenih modela i metoda omogućio je donošenje kvalitetnih zaključaka o mogućnostima i problemima numeričkih modela pucanja brana.

Provedeni su sljedeći testovi:

- pucanje brane u kanalu s pregibom od 90° i 45° (laboratorijski eksperiment)
- pucanje brane na rijeci Toce (laboratorijski eksperiment na fizikalnom modelu realnog slučaja)
- pucanje brane Malpasset (realni slučaj)

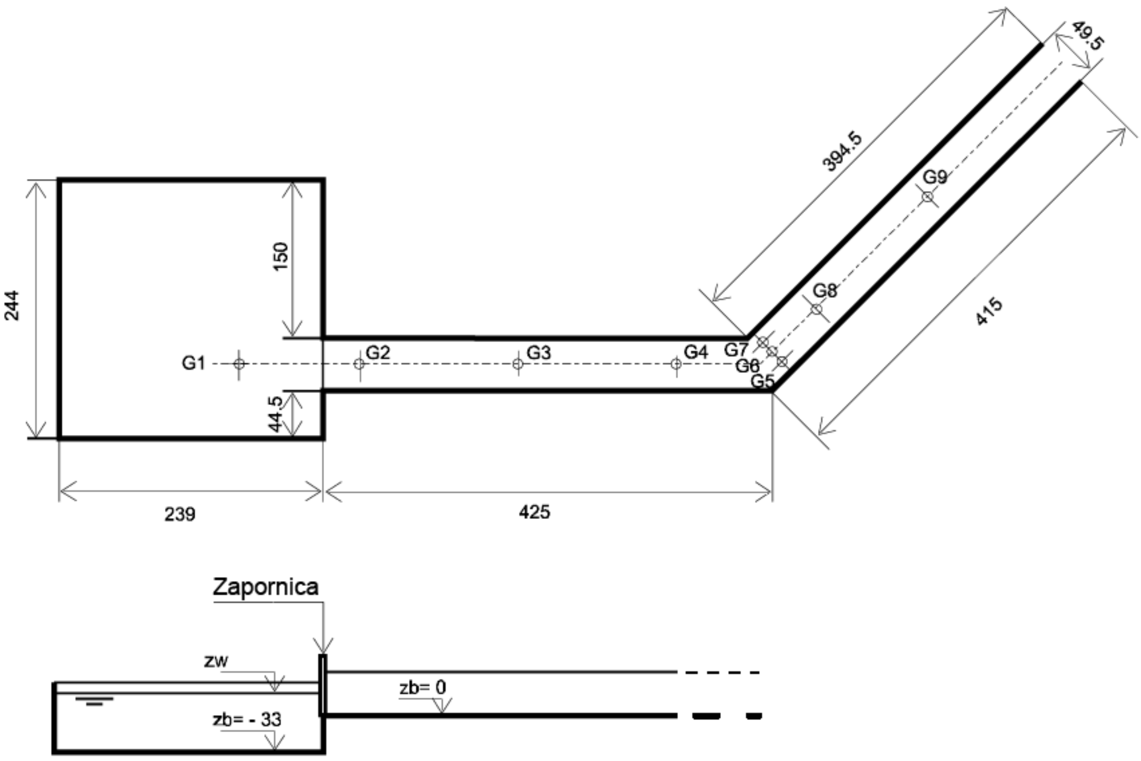
Rezultati provedenih eksperimenata u vidu izmjerenih vrijednosti razina vode na mjernim točkama dostupni su u digitalnom obliku na CD-ROM-u koji je objavljen u sklopu CADAM-projekta ([6]).

Ispitivanje utjecaja parametara numeričke mreže na kvalitetu rezultata simulacija u ovom radu provedeno je na test-primjeru kanala sa pregibom od 45° te na test-primjeru brane Toce. Stoga su dotična dva primjera detaljno opisana u nastavku.

5.2.1. Pucanje brane u kanalu s pregibom od 45°

U svrhu dobivanja pouzdanih podataka na temelju kojih će se ocijeniti numeričke metode za modeliranje toka vode pri pucanju brane, u sklopu CADAM-projekta provedeni su i eksperimenti na laboratorijskom kanalu s pregibom od 45°.

Eksperiment je proveden na kanalu s pregibom na koji se nadovezuje kvadratni rezervoar (Slika 5.1). Rezervoar ima dimenzije 2,44 m × 2,39 m, s time da je dno kanala 0,33 m više od dna rezervoara. Brana je predstavljena zapornicom, pa je pucanje brane simulirano naglim otvaranjem zapornice.



Slika 5.1. Oblik kanala s pregibom od 45^o (kotirano u centimetrima)

Stjenke kanala su izvedene od stakla, dok je dno čelično (Slika 5.2). U cilju otklanjanja mogućih loših procjena Manningovih koeficijenata trenja u matematičkim modelima, eksperimentalno su određene njihove vrijednosti. Tako su dobiveni Manningovi koeficijenti trenja od 0,0095 za dno te 0,0195 za stjenke kanala ([24]).

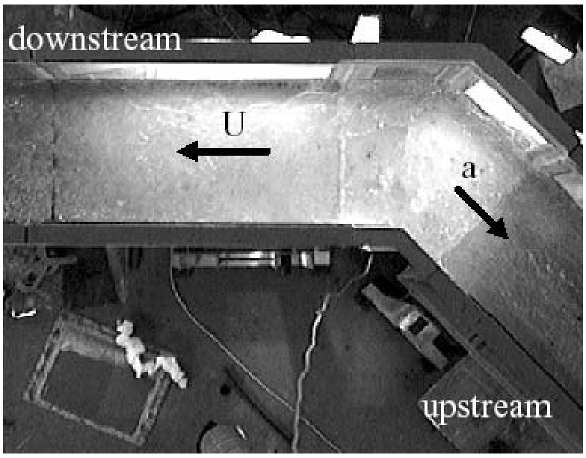
Na mjernim točkama G1-G9 (smještaj točaka vidljiv je na Slici 5.1) postavljeni su instrumenti za mjerenje koji 10 puta u sekundi mjere razinu vode.

Kada tok vode prolazi pregibom korita, razina vode podiže se na vanjskoj obali te se spušta na unutarnjoj. Kako brzina poplavnog vala ovisi o obliku korita, takva nagla promjena toka može izazvati značajno usporenje propagacije vala. Stoga ovakva geometrija definira slučaj pucanja brane pri kojem dolazi do izražaja problematika predviđanja brzine poplavnog vala koji nastaje prilikom istjecanja vode iz rezervoara u korito. Dodatni zanimljiv učinak pregiba u kanalu je formiranje povratnog vala koji se kreće uzvodno.

Na ovom kanalu provedena su dva eksperimenta. U prvom eksperimentu simulirano je pucanje brane sa suhim koritom, a u drugom sa inicijalnim slojem vode u kanalu od 1 cm. Razina vode u rezervoaru za oba slučaja je 25 cm viša od dna kanala.

Slika 5.2. Strujanje kroz kanal i reflektirani val koji se formira na pregibu (pogled nizvodno)

Eksperiment počinje u trenutku kada se zapornica naglo odstrani. Voda tada poteče kanalom i stiže do pregiba nakon približno 3 s. Na pregibu se voda reflektira od stjenke kanala i formira val koji putuje uzvodno prema rezervoaru, što se vidi na fotografijama na Slikama 5.2 i 5.3. Reflektirani val stiže do rezervoara za 20 s gdje nestaje, nakon čega se tok vode smiruje i razina vode se posvuda postupno smanjuje.



Slika 5.3. Smjer strujanja vode (U) i smjer propagacije reflektiranog vala (a)

Zbog asimetrične pozicije zapornice s obzirom na rezervoar, u samom rezervoaru pojavljuju se složeni dvodimenzionalni efekti reflektiranja i oscilacija u valu razrjeđenja. Eksperiment je pokazao da ti fenomeni ne utječu znatno na tok vode u samom kanalu. Tok u kanalu je između zapornice i pregiba kanala dominantno jednodimenzionalni, dok se nizvodno od pregiba pojavljuju mnogi manji valovi koji se odbijaju od zidova kanala (Slika 5.4). Ovi valovi nastaju kao posljedica refleksije frontalnog vala od stijenki nizvodnog dijela kanala i zbog njih se strujanje u ovom dijelu kanala mora smatrati dvodimenzionalnim.

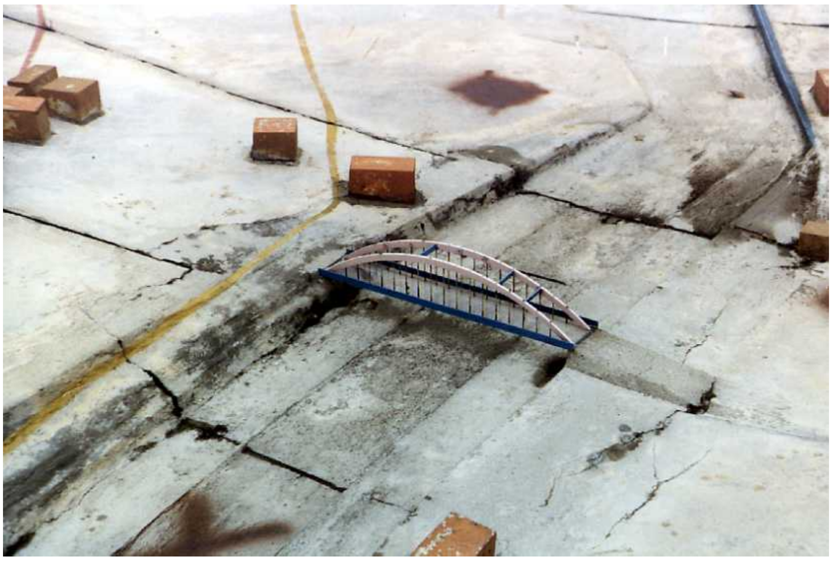
Slika 5.4. Valovi koji u kanalu nastaju nizvodno od pregiba

5.2.2. Pucanje brane na rijeci Toce

Fizikalni model za ovaj eksperimentalni test izgrađen je u laboratoriju ENEL u Milanu i njegov izgled je prikazan fotografijama na Slikama 5.5, 5.7 i 5.9-5.11. Uzvodni dio modela predstavlja poplavnu dolinu koja se prostire s obje strane rijeke. Otprilike na polovici dužine modela nalazi se poprečni akumulacijski rezervoar koji u slučaju katastrofalne poplave može zadržati dio vode. Nešto nizvodnije od njega nalazi se mala brana (pregrada) na rijeci, a dalje nizvodno rijeka skreće u uži kanjon.

Slika 5.5. Fizikalni model doline rijeke Toce (uzvodni dio)

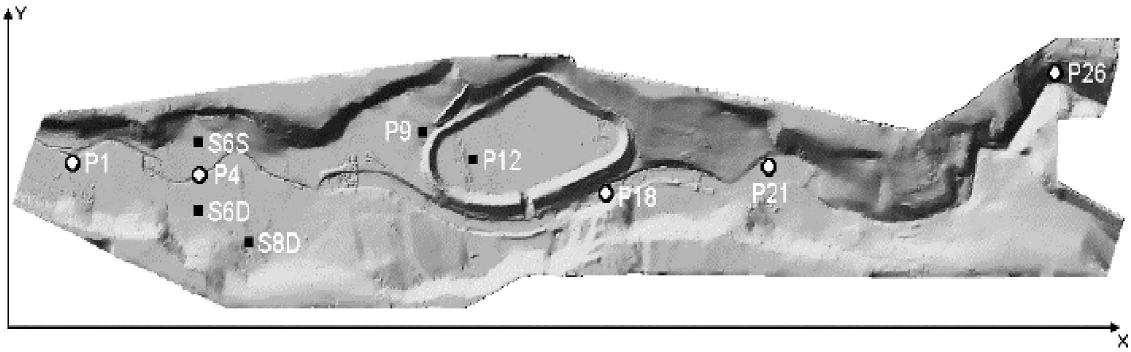
Model je nastao kao reprodukcija 5 km toka rijeke Toce smještene u sjevernim Alpama, što u mjerilu 1:100 daje dimenzije modela 55 m × 13 m. Izmjerena su 72 poprečna presjeka doline, na temelju kojih su postavljeni drveni elementi. Na drvenim elementima betonom je kasnije modelirana cjelokupna površina riječne doline, da bi na kraju na betonsku površinu bili postavljeni i modeli mostova i sela (Slika 5.6). Model ima potporu spremnika za utjecanje i otjecanje vode te jednu pumpu koju kontrolira računalo i koja može realizirati protok vode do 0,5 m^3/s.



Slika 5.6. Modeliranje mostova i građevina u fizikalnom modelu

Pogodnost modeliranja upravo ovakve geometrije leži u činjenici da je zbog morfologije graničnih presjeka strujanje na ulazu i izlazu iz modela nadkritično. Nadkritično strujanje na izlaznoj granici omogućava modeliranje strujanja bez straha od mogućeg utjecaja uvjeta strujanja nizvodno od domene.

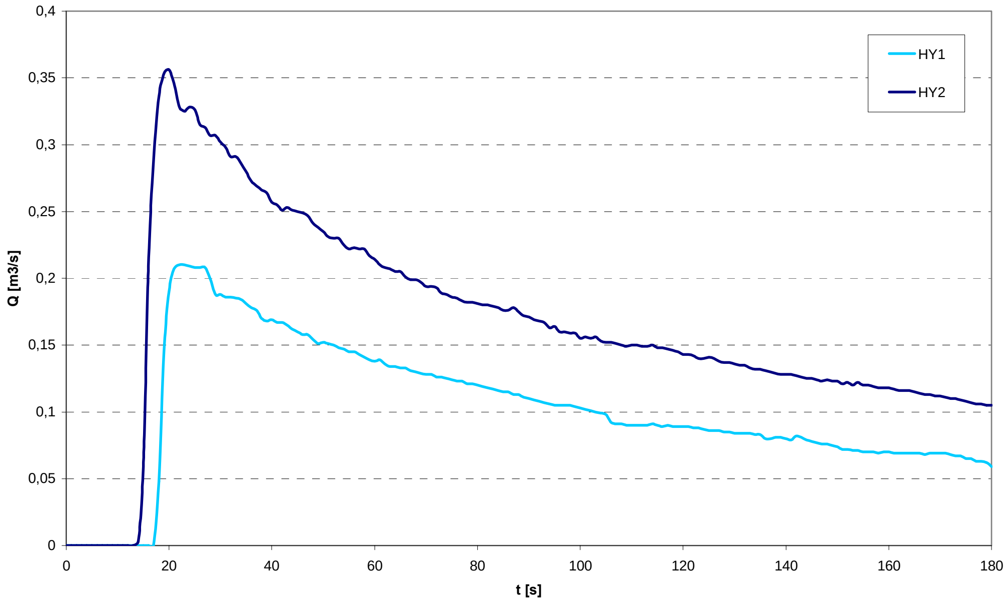
Tlak vode mjeren je na 28 mjernih točaka, a raspored nekih od njih prikazan je na Slici 5.7.



Slika 5.7. Smještaj nekih mjernih točaka u modelu

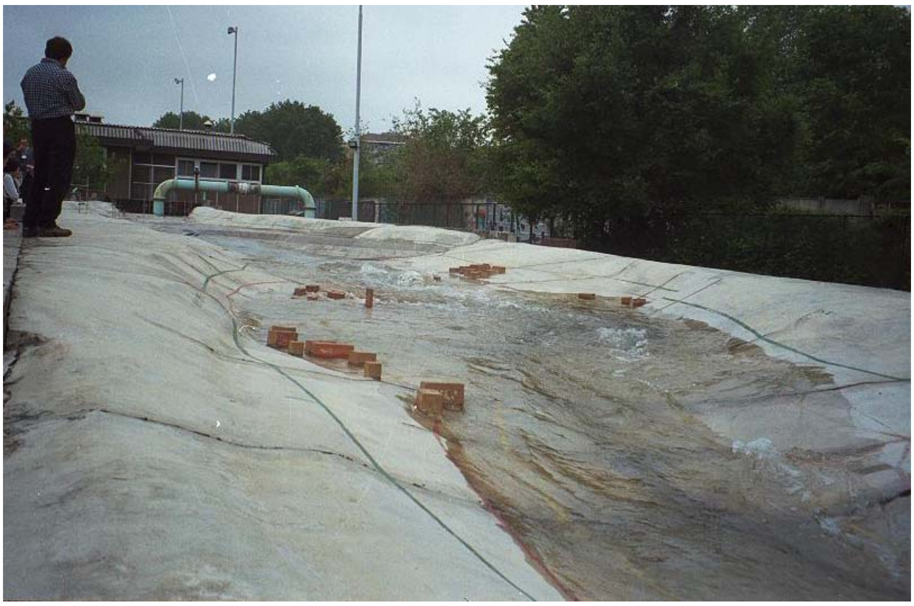
Za simulaciju ekstremne poplave u dolini rijeke Toce izabrana su dva hidrograma utoka vode u model: hidrogram HY1, čiji je vrhunac protoka oko 0,2 m^3/s te hidrogram HY2, čiji je vrhunac protoka oko 0,35 m^3/s (Slika 5.8). Ovi hidrogrami se realiziraju pomoću pumpe koja je pod kontrolom računala. Pumpa po zadanom hidrogramu puni spremnik koji se nalazi na ulazu u model, a koji je inicijalno napunjen vodom do razine dna doline u modelu. Model je u početku suh i nema početnog toka u rijeci.

Utočni hidrogrami su dimenzionirani tako da hidrogram HY1 ne izazove preljevanje nasipa akumulacijskog rezervoara u sredini domene, dok hidrogram HY2 uzrokuje punjenje tog istog rezervoara do vrha tako da voda ostaje u njemu do kraja eksperimenta.



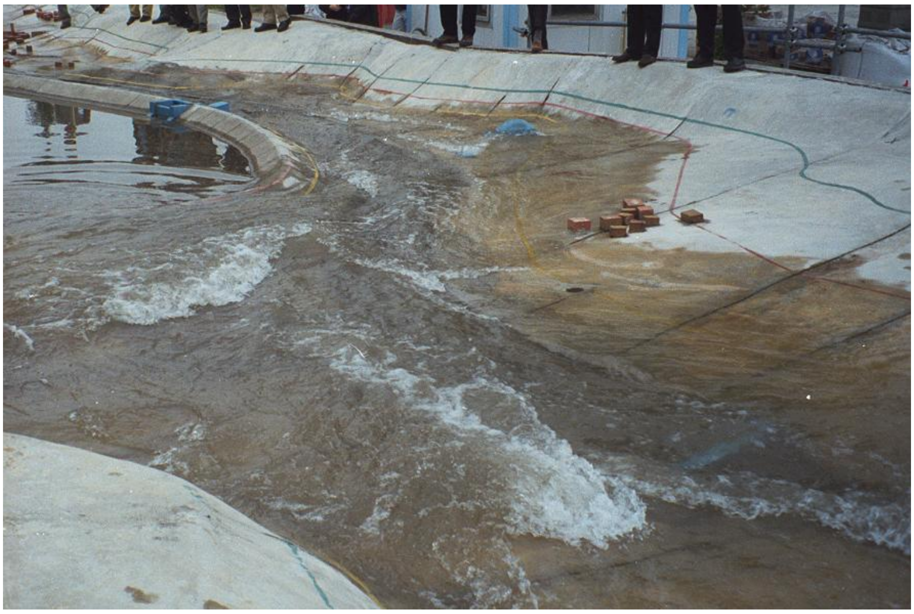
Slika 5.8. Dva hidrograma utoka na uzvodnom rubu modela

Tokom eksperimenta voda se slije u poplavnu dolinu te potpuno potopi mostove i građevine (Slike 5.9-5.11). Do akumulacijskog rezervoara valna fronta ne prati meandriranje rijeke već je njeno kretanje gotovo jednodimenzionalno širinom cijele doline. U suženom dijelu doline, kod akumulacijskog rezervoara, valna fronta prati korito rijeke, da bi dalje nizvodno voda opet preplavila cijelu dolinu. Mala brana na rijeci (smještena blizu mjerne točke P21, Slika 5.7) također je potpuno preplavljena. Zbog višestrukih refleksija o mostove i građevine, tok u nizvodnom dijelu razvija izrazito dvodimenzionalnu strukturu. Slika 5.11 prikazuje preljevanje vode u akumulacijski rezervoar tijekom poplave generirane hidrogramom HY2.



Slika 5.9. Poplavljivanje uzvodnog djela modela

Slika 5.10. Poplavljivanje nizvodnog dijela modela, potopljeni most i građevine



Slika 5.11. Poplavni val ulazi u akumulacijski rezervoar (pogled sa uzvodne strane)

Simulacija poplavljivanja doline rijeke Toce predstavlja vrlo važan korak u dinamici CADAM-projekta. Nakon prijašnjih simulacija strujanja u idealiziranim kanalima s pojednostavljenom geometrijom, ovim test-slučajem se postupak numeričkog modeliranja primjenjuje na modeliranje realnih problema. U tom smislu najvažnija je razlika, vjerojatno, u tome što granice domene nisu definirane vertikalnim zidovima, već su definirane stvarnom topografijom poplavnog područja što dovodi do niza interakcija „mokrih“ i „suhih“ područja domene.

6. Utjecaj parametara numeričke mreže

Poznato je da numerička mreža može svojim određenim karakteristikama bitno utjecati na rezultat numeričke simulacije. Fundamentalni uzrok te osjetljivosti krije se u činjenici da numerički modeli inherentno u sebi nose nesavršenost radi samog diskretizacijskog postupka, s obzirom da izvorni matematički model opisuje kontinuum, a ne skup (mrežu) točaka. Numeričke sheme pak mogu uzrokovati dodatno kvarenje rezultata ako produciraju numeričku grešku koja ovisi o određenim osobinama numeričke mreže. Kod simulacija realnih slučajeva strujanja u otvorenim vodotocima i poplavljivanja neizbježan je i dodatni problem točnosti geometrije računalnog modela domene (tj. numeričke mreže terena) koja je uvijek ograničena.

Za potrebe ovog rada ispitan je utjecaj sljedećih parametara dvodimenzionalne numeričke mreže na točnost rezultata simulacija strujanja u plitkim vodama:

1) gustoća mreže (tj. broj ćelija po jedinici površine)
2) oblik ćelija (tj. minimalni unutarnji kut ćelija)

Moguće je definirati još nekoliko drugih karakteristika numeričke mreže koje zasigurno imaju određene utjecaje na rezultat simulacija (npr. blizina relativno velikih i relativno malih ćelija, odstupanje od strukturiranosti, itd.). Ipak, odabrani su gore navedeni zbog toga što su vrlo elementarni i očiti, kao i zbog toga što njihov utjecaj ima veliki praktični značaj. Prilikom izrade svake pojedine numeričke mreže iznova se postavlja pitanje kriterija njene kvalitete, a navedena tri parametra zapravo dominantno određuju taj kriterij.

S obzirom na ograničenje računalnih resursa (tj. proračunskog vremena), potrebno je izraditi što bolju numeričku mrežu sa što manjim brojem ćelija. S obzirom da do danas nema eksplicitno definiranog kriterija za numeričku mrežu koju se može smatrati dovoljno gustom, on se može odrediti jedino na osnovu širokog i dugogodišnjeg iskustva u izradi mreža i provedbi simulacija. No, i dalje ostaje pitanje postizanja pravog optimuma po ovom pitanju.

Drugi problem predstavlja numerička greška uzrokovana neprimjereno oblikovanim ćelijama numeričke mreže. Kako praktični univerzalni *a priori* kriteriji dobro oblikovane mreže ne postoje, kontrola i ovog parametra numeričke mreže najčešće se prepušta intuiciji i iskustvu osobe koja je izrađuje.

Ovaj rad pokušava dati određena saznanja o gore spomenutim problemima putem istraživanja utjecaja parametara numeričke mreže na rezultat simulacija strujanja u plitkim vodama. Potrebno je naglasiti da je cilj bio utvrditi ovaj utjecaj prvenstveno na eksperimentalnim i realnim test-primjerima i to usporedbom numeričkih rezultata sa podacima dobivenim mjerenjima. Testiranjem na analitičkim primjerima može se istraživati osjetljivost numeričke sheme, ali se jedino realnim test-primjerima može utvrditi praktična, realna osjetljivost cjelokupnog numeričkog modela. U tom smislu, saznanja dobivena u ovom istraživanju mogla bi poslužiti kao pomoć za formiranje kriterija kvalitetne numeričke mreže za praktične potrebe simulacija strujanja u plitkim vodama.

Za istraživanje utjecaja parametara numeričke mreže korišteni su test-primjeri iz CADAM-projekta opisani u 5. poglavlju. Dotični primjeri opisuju strujanja uslijed pucanja brana, pa su zbog toga posebno zahtjevni i delikatni za modeliranje. Iz toga slijedi da bi točnost modela kod simuliranja manje zahtjevnih, tj. ne tako ekstremnih slučajeva strujanja, trebala načelno biti jednaka ili veća od točnosti numeričkih rezultata simuliranja pucanja brane, što dosadašnja iskustva i potvrđuju ([20]). Upravo iz tog razloga odabrani su test-primjeri povoljni za opisano istraživanje, jer bi oni trebali jasnije i jače ukazati na osjetljivosti modela plitkih voda s obzirom na parametre numeričke mreže. Dodatni i ne manje važni razlog korištenja upravo primjera iz CADAM-projekta za potrebe izrade ovog rada predstavlja činjenica da su ovi primjeri zapravo laboratorijski eksperimenti te su kao takvi vrlo dobro definirani i potkrijepljeni detaljnim mjerenjima.

Izabrani test-primjeri numerički su modelirani korištenjem nestrukturiranih numeričkih mreža. Upotreba nestrukturiranih mreža se zbog jednostavnijeg postupka njihove izgradnje i boljeg modeliranja topografije u praksi smatra poželjnijom, pa je stoga primijenjena i ovdje.

Ispitivanje utjecaja navedenih parametara numeričke mreže izvedeno je tako da su simulacije na odabranom test-primjeru provođene sa različitim numeričkim mrežama, kojima je kontrolirano variran izabrani parametar. Usporedbom dobivenih rezultata i analizom odstupanja od eksperimentalnih podataka (dostupnih na [6]), dobivena su konkretna saznanja o snazi i načinu utjecaja izabranog parametra numeričke mreže.

Validacija računalnih modela strujanja u plitkim vodama tipično se provodi analizom sljedećih informacija dobivenih iz rezultata simulacija:

- hidrogrami na odabranim mjestima unutar vodotoka
- poplavne linije koje opasuju poplavno područje
- distribuirane vrijednosti brzina i dubina vode u odabranim točkama domene

U hidrološkoj praksi najčešće se koriste hidrogrami, pa se tako i računalni modeli tipično kalibriraju i vrednuju usporedbom izračunatih i izmjerenih hidrograma na određenim mjestima, za određeni hidrološki događaj. Izmjereni hidrogrami dobivaju se na osnovu mjerenja limnigrafima postavljenim u koritima vodotoka, što znači da se u principu hidrogrami mogu koristiti samo kao informacija o slici strujanja unutar korita rijeke. Bolju informaciju o ukupnoj slici strujanja daju poplavne linije, ali one tipično uopće nisu dostupne kao realni podaci iz mjerenja, tako da se mogu koristiti samo za internu validaciju i analizu osjetljivosti modela (kao npr. u [30]). S obzirom da su CADAM test-primjeri poduprti izmjerenim razinama vode na više dobro distribuiranih mjernih mjesta, bilo je prirodno koristiti te podatke za analizu dobivenih rezultata simulacija. Istraživanja pokazuju da se upravo ovaj način analize rezultata može smatrati najstrožim jer demonstrira svu složenost problematike modeliranja strujanja u plitkim vodama, za razliku od validacije na temelju izlaznih hidrograma, koji govore vrlo malo o cjelokupnoj slici strujanja ([30]).

Dobiveni rezultati nisu dovoljni za postavljanje jasnih i konačnih kriterija za kvalitetnu numeričku mrežu, ali indiciraju dimenziju i složenost ove problematike te mogu ukazati na smjer daljnjih istraživanja.

Sve numeričke mreže za potrebe ovdje opisanog istraživanja izrađene su uz pomoć računalnog programa SMS, dok su svi proračuni vršeni upotrebom softvera za simuliranje strujanja u plitkim vodama Stripp12.

Kao numerička shema za sve proračune korištena je dobro balansirana Q-shema. Izabrana je zbog svoje dobre testiranosti, robusnosti, brzine i provjerenog ponašanja na realnim problemima. Balansiranje izvornog člana osigurava dobro tretiranje sila na fluid uslijed promjena u topografiji terena, što može snažno utjecati na rezultat. Tretiranje numeričkog fluksa je kod svih praktično upotrebljavanih numeričkih shema uglavnom riješeno na zadovoljavajući način, pa se može ustvrditi da je utjecaj izbora numeričke sheme na rezultate simulacija u praksi minoran, dok god je izabrana shema dobro balansirana ([20]).

6.1. Utjecaj gustoće numeričke mreže

Može se reći da je utjecaj gustoće numeričke mreže na točnost rezultata simulacija inherentan metodologiji numeričkog modeliranja. Numeričke metode počivaju na diskretizaciji domene, što principijelno unosi nesavršenost u postupak modeliranja jer matematički model plitkih voda vrijedi za kontinuum, a ne za diskretizirani prostor. Pogreška uzrokovana ovom nesavršenošću naziva se pogreška diskretizacije.

Ovdje treba naglasiti da pogreška diskretizacije teoretski ne bi smjela predstavljati prepreku u dostizanju točnog rješenja. Lax-Wendroffovim teoremom ([18]) matematički je dokazano da sa usitnjavanjem prostorne i vremenske diskretizacije:

$$\Delta t, \Delta x \to 0$$

aproksimacija hiperboličkog sustava jednadžbi zakona očuvanja metodom konačnih volumena konvergira k slabom rješenju sustava, pod uvjetom da aproksimacija uopće konvergira. Mada ovaj teorem ne garantira ni postojanje konvergencije niti ne kazuje prema kojem od više mogućih slabih rješenja aproksimacija konvergira, on je vrlo značajan. Njime se dokazuje da se rezultat dobiven numeričkom mrežom bilo koje gustoće (ako ne pokazuje nelogičnosti uzrokovane mogućim numeričkim nestabilnostima) može smatrati ispravnom aproksimacijom pravog slabog rješenja hiperboličkog sustava.

Pogrešku diskretizacije može se procijeniti na način da se provede niz proračuna sa sve gušćim numeričkim mrežama, do trenutka kada više daljnje ugušćivanje ne utječe vidljivo na rezultat. Odstupanje u rezultatu od pojedine mreže do završne (najgušće) mreže predstavlja pogrešku diskretizacije. Jasno je da za praktične probleme ovakva analiza ne dolazi u obzir, zbog cijene proračunskog truda koji zahtijeva.

Zbog neizbježne diskretizacijske pogreške, načelno će svi numerički modeli davati bolje rezultate budu li imali gušću numeričku mrežu. Točnije, to će biti tako sve dok se ne dostigne kritična gustoća od koje daljnje ugušćivanje neće imati utjecaja, i to zbog jednog ili više sljedećih razloga:

- u numerički model ugrađena su pojednostavljenja u vidu raznih rješenja određenih problema u tretiranju rubnih uvjeta, početnih uvjeta i sl.
- nagomilava se uvijek prisutna numerička greška korištenih rješavača, pa se tako npr. usitnjavanjem vremenskog koraka rezultat kroz duži vremenski period kvari
- sam matematički model plitkih voda nastao je pojednostavljenjem Navier-Stokesove jednadžbe, što ograničava njegove mogućnosti

U praktičnoj upotrebi računalnog modeliranja strujanja u plitkim vodama problem određivanja gustoće numeričke mreže može biti vrlo neugodan. Teško je procijeniti (kako *a priori* tako i uopće) može li se numerička mreža smatrati dovoljno gustom, a pokušaj utvrđivanja nizom numeričkih eksperimenata može biti vrlo dug i proračunski zahtjevan. U tom smislu ni uputa iz zaključaka CADAM-projekta, da se prilikom izrade svakog numeričkog modela obavezno ispita osjetljivost modela na gustoću numeričke mreže te da se upotrebljava numerička mreža čije daljnje ugušćivanje ne utječe na rezultat ([20]), u praksi nije od velike koristi.

Tipični, još uvijek prihvaćeni, kriterij za određivanje potrebne gustoće numeričke mreže određuje da veličina ćelija numeričke mreže mora biti reda veličine valne duljine modeliranog poremećaja (npr. poplavnog vala). Drugim riječima, rezolucija mreže ne smije biti manja od minimalne rezolucije koja će omogućiti dobro „ocrtavanje“ modelirane pojave. Ova ideja jest intuitivna, ali se iz nje najčešće ne može direktno odrediti potrebnu gustoću numeričke mreže. Osim toga, ostaje pitanje koliko se može rezultat poboljšati daljnjim ugušćivanjem i koja se gustoća numeričke mreže može smatrati optimalnom.

Značaj ovog problema potvrđuju i dosadašnja istraživanja koja su pokazala da gustoća numeričke mreže utječe na rezultat snažnije nego tipični kalibracijski parametar – Manningov koeficijent trenja ([14]).

6.1.1. Test-primjer

Istraživanje utjecaja gustoće numeričke mreže provedeno je na test-primjeru pucanja brane u kanalu s pregibom od 45°, koji je opisan u podpoglavlju 5.2.1. Ovaj test-primjer izabran je upravo za ovo istraživanje iz više razloga:

- ima jednostavnu geometriju (Slika 5.1), što eliminira eventualna odstupanja modela od stvarnosti zbog nesavršenog modeliranja same domene
- maksimalno simplificirana topografija (domena je podijeljena na dvije ravnine koje se diraju na samo jednoj dužini) također osigurava da rezultat neće biti podložan numeričkim greškama i nestabilnostima uslijed gradijenata terena
- ima pouzdano i jasno definirane rubne uvjete (cijela domena obrubljena je zidovima, osim izlaza koji je nadkritičan), što minimizira opasnost od pojave numeričkih nestabilnosti uzrokovanih rubnim uvjetima
- mada se modelira propagacija poplavnog vala po suhoj domeni, unutarnja granica kod ovog test-slučaja formira se isključivo na samoj fronti poplavnog vala (koja je ujedno i relativno kratka) i to samo do trenutka dostizanja izlaza iz domene, što minimizira numeričke probleme uslijed interakcije suhih i mokrih područja

Da bi se utvrdio utjecaj gustoće numeričke mreže na rezultat simulacija, bilo je potrebno izraditi više numeričkih mreža različitih gustoća. Ukupno su izrađene četiri numeričke mreže i to postupkom kontrolirane triangulacije u programu SMS koji je općenito opisan u podpoglavlju 4.2.

Računska domena (tj. tlocrt rezervoara i kanala sa pregibom) nacrtana je na računalu u programu SMS, na osnovu nacrta prikazanog na Slici 5.1. Jednom ucrtana domena podijeljena je na dva poligona; jedan koji pokriva područje rezervoara i drugi koji pokriva kanal. Na rubovima tih poligona zadana je gustoća točaka buduće mreže. Tako pripremljene poligone je automatski generator mreže u programu SMS omrežio kvalitetnom trokutastom mrežom, sa gotovo uniformnom distribucijom unutarnjih točaka.

Drugi korak u izgradnji numeričke mreže je njeno oblikovanje po visini. Pošto je geometrija domene takva da je dno cijelog rezervoara na razini -0,33 m, a dno duž cijelog kanala na razini 0 m, točkama unutar ta dva područja jednostavno je ručno pridodana pripadna geodetska visina.

Da bi numerička mreža bila spremna za korištenje u programu Stripp12, bilo je potrebno još i definirati niz točaka po svim granicama domene, osim po izlaznoj granici. Na tako definiranom nizu točaka kasnije je postavljen rubni uvjet zida. Da bi se osigurao nadkritični izlaz, kakav je u eksperimentu i bio, na izlaznoj granici je dodan još kratki niz elemenata sa vrlo strmim padom.

Mjerenja razine vodnog lica u eksperimentu su vršena na 9 mjernih točaka, prikazanih na Slici 5.1 i točno određenih u Tablici 6.1 (ishodište za ove koordinate je u donjem lijevom kutu domene). Da bi se osiguralo računanje vodnog lica upravo na tim mjestima, čvorovi numeričke mreže najbliži mjernim točkama pomaknuti su točno na koordinate mjernih točaka. Tako je učinjeno kod sve četiri mreže, pa je tako osigurana usporedivost rezultata simulacija sa eksperimentalnim rezultatima, kao i njihova međusobna usporedivost.

Tablica 6.1. Mjerne točke za eksperiment pucanja brane u kanalu s pregibom od 45°

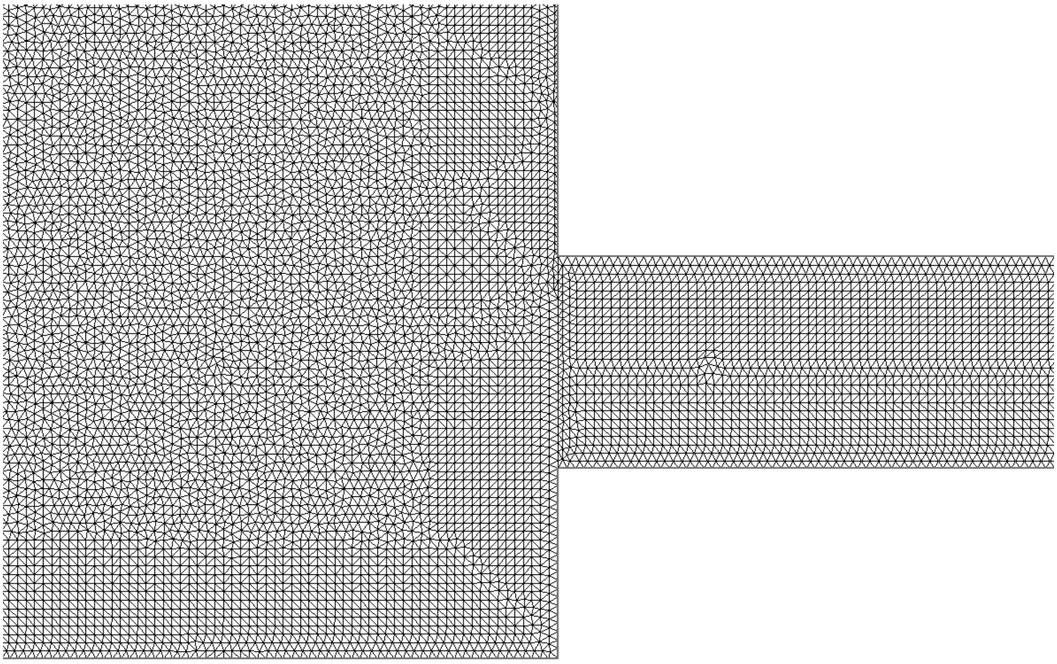
Mjerna točka	x [m]	y [m]
G1	1,59	0,69
G2	2,74	0,69
G3	4,24	0,69
G4	5,74	0,69
G5	6,74	0,72
G6	6,65	0,80
G7	6,56	0,89
G8	7,07	1,22
G9	8,13	2,28

Opisani postupak je ponovljen za svaku od četiri izgrađene numeričke mreže (Tablica 6.2). Numeričke mreže A, B, C i D prikazane su na Slikama 6.1-6.4.

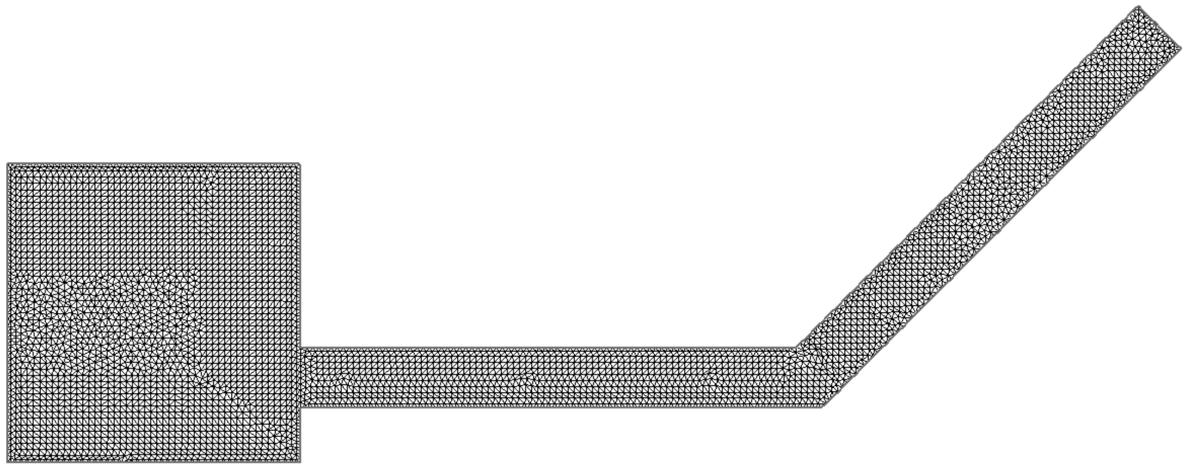
Tablica 6.2. Numeričke mreže različitih gustoća

Numerička mreža	Približni srednji prostorni korak $\Delta\overline{x}$ [m]	Približni srednji broj čvorova mreže po širini kanala
A	0,02	24,75
B	0,05	9,90
C	0,1	4,95
D	0,3	1,65

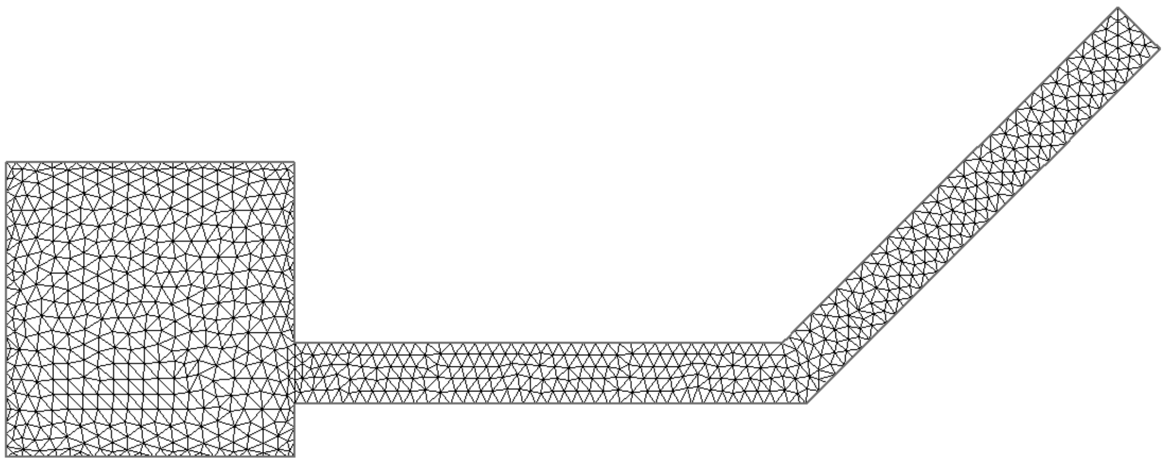
Iz izgleda numeričke mreže A (detalj mreže dan je na Slici 6.1) vidi se da je to jedna vrlo fina mreža. Ovu mrežu može se smatrati gustom tim više što su svuda osim na spoju rezervoara i kanala gradijenti terena jednaki nuli. Sa druge strane, numerička mreža D (Slika 6.4) je očito vrlo rijetka i unaprijed je jasno da bi numerička mreža rjeđa od mreže D davala vrlo nisku rezoluciju proračunate slike strujanja, što bi cijeli numerički model ovog test-slučaja činilo neupotrebljivim.



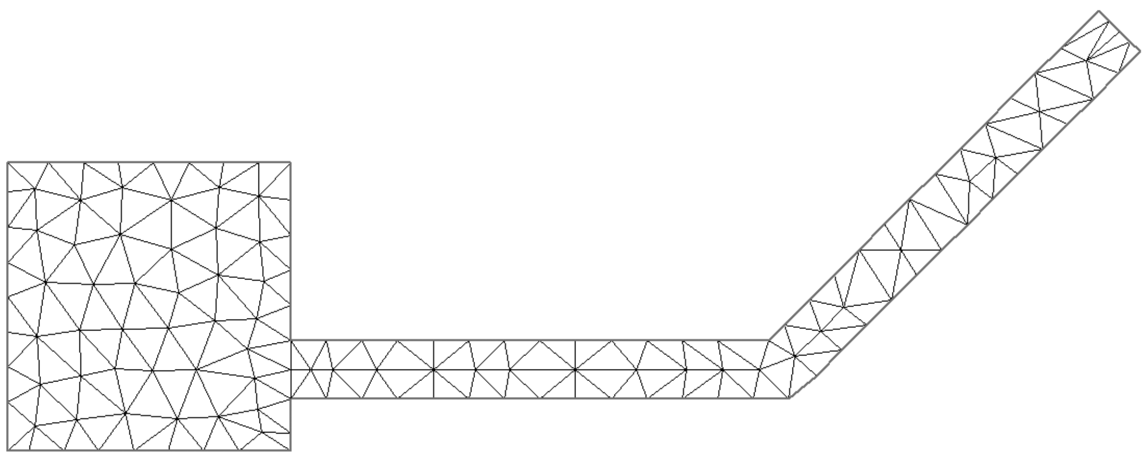
Slika 6.1. Numerička mreža A (detalj spoja rezervoara i kanala)



Slika 6.2. Numerička mreža B



Slika 6.3. Numerička mreža C



Slika 6.4. Numerička mreža D

Računalni model test-primjera izgrađen je u računalnom programu Stripp12 učitavanjem numeričke mreže te zadavanjem početnih i rubnih uvjeta te ostalih potrebnih podataka za pokretanje proračuna.

Duž svih granica domene, osim na izlaznoj granici, zadan je rubni uvjet hrapavog zida koji je implementiran u programu Stripp12 na način kako je opisano u podpoglavlju 2.4.1. Vrijednosti Manningovog koeficijenta trenja za zid i dno kanala preuzete su od autora samog eksperimenta ([24]).

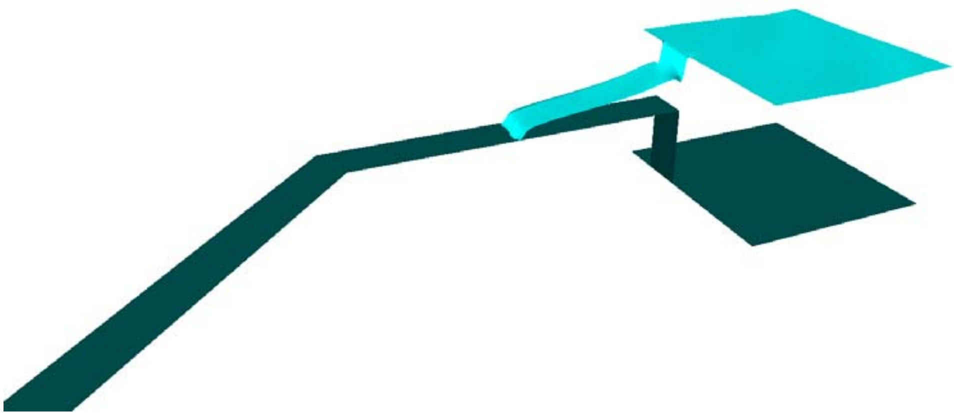
Na izlazu iz domene nije bilo potrebno zadavati nikakav rubni uvjet, jer strmi pad dodanih ćelija na izlaznoj granici osigurava nadkritično strujanje.

Za početne uvjete postavljene su nulte brzine strujanja po cijeloj domeni te razina vode u rezervoaru na 0,25 m, u skladu sa inicijalnim uvjetima u eksperimentu.

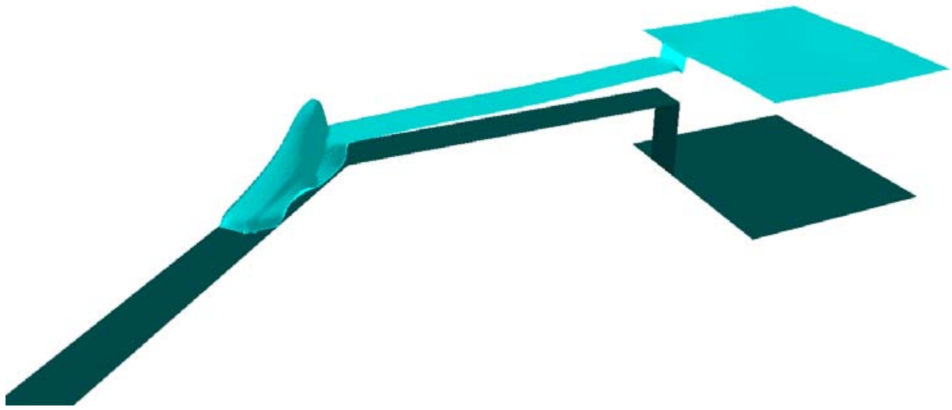
Poznato da vrijednost granične dubine vode h_{gr} (vidi podpoglavlje 2.4.3.) utječe na brzinu propagacije vodnog vala u numeričkom modelu, i to na način da veća vrijednost h_{gr} ima za posljedicu sporije napredovanje vode. Stoga je, za svaku od četiri korištene numeričke mreže, eksperimentalnim simulacijama utvrđena približno najmanja (a to je ujedno i optimalna) vrijednost h_{gr} koja ne dovodi do „pucanja" proračuna. Dobivene optimalne vrijednosti kreću se u intervalu od 0,0006 m, za najgušću numeričku mrežu (A) do 0,002 m, za najrjeđu numeričku mrežu (D). Time je minimiziran negativni utjecaj vrijednosti granične dubine vode na točnost rezultata.

CFL broj je za sve proračune bio definiran kao C_{cfl} = 0,7, što je u skladu sa standardnom praksom. Aktivirana je opcija korištenja dualne mreže, što povećava numeričku stabilnost proračuna.

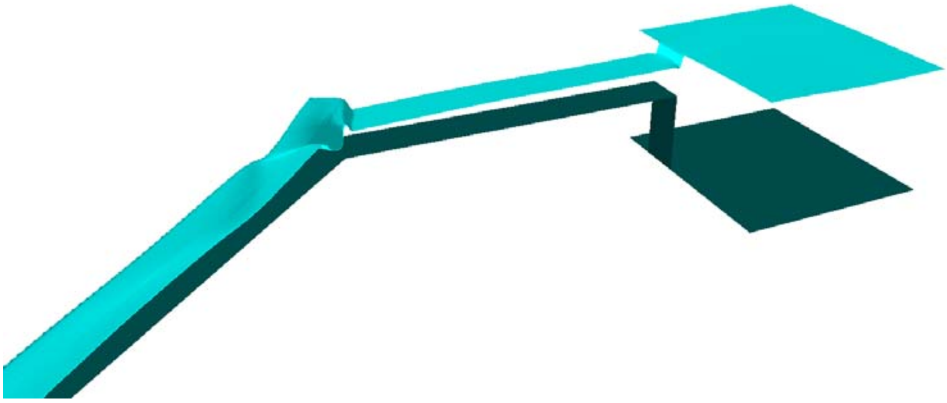
Nakon što su u programu Stripp12 zadani svi potrebni podaci, pokretani su proračuni za četiri simulacije sa numeričkim mrežama A-D. Izgled vodnog lica u nekoliko karakterističnih trenutaka izračunatog na numeričkoj mreži A prikazan je na Slikama 6.5-6.9.



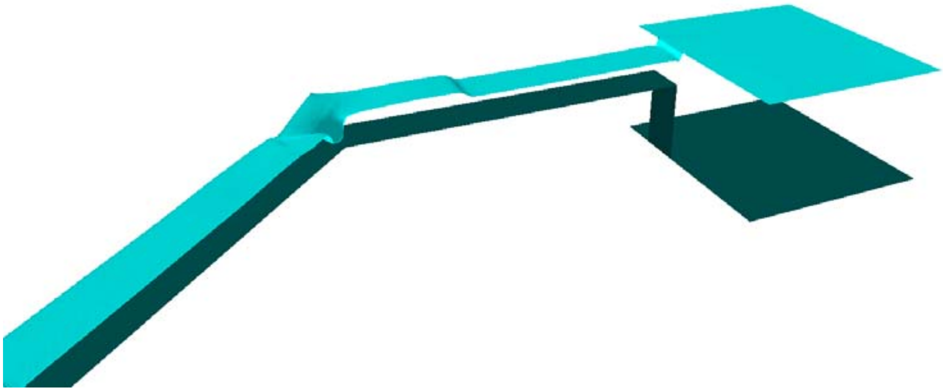
Slika 6.5. Početak propagacije vodnog vala (t = 1 s)



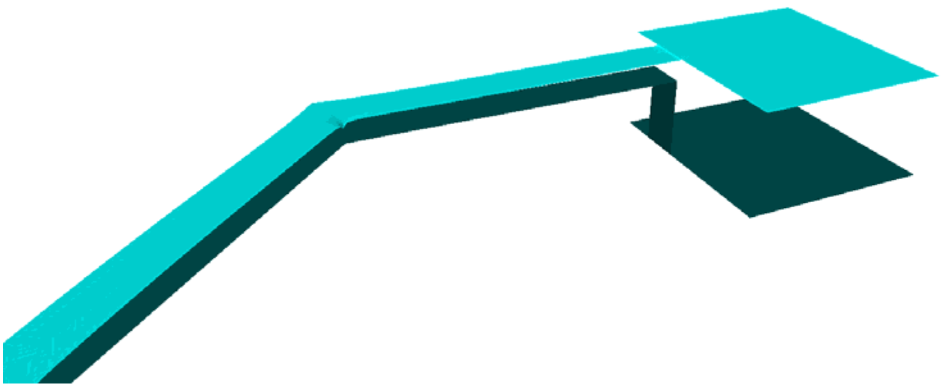
Slika 6.6. Prolazak poplavnog vala kroz pregib kanala (t = 3 s)



Slika 6.7. Poplavljenost cijelog kanala i formiranje povratnog vala (t = 5 s)



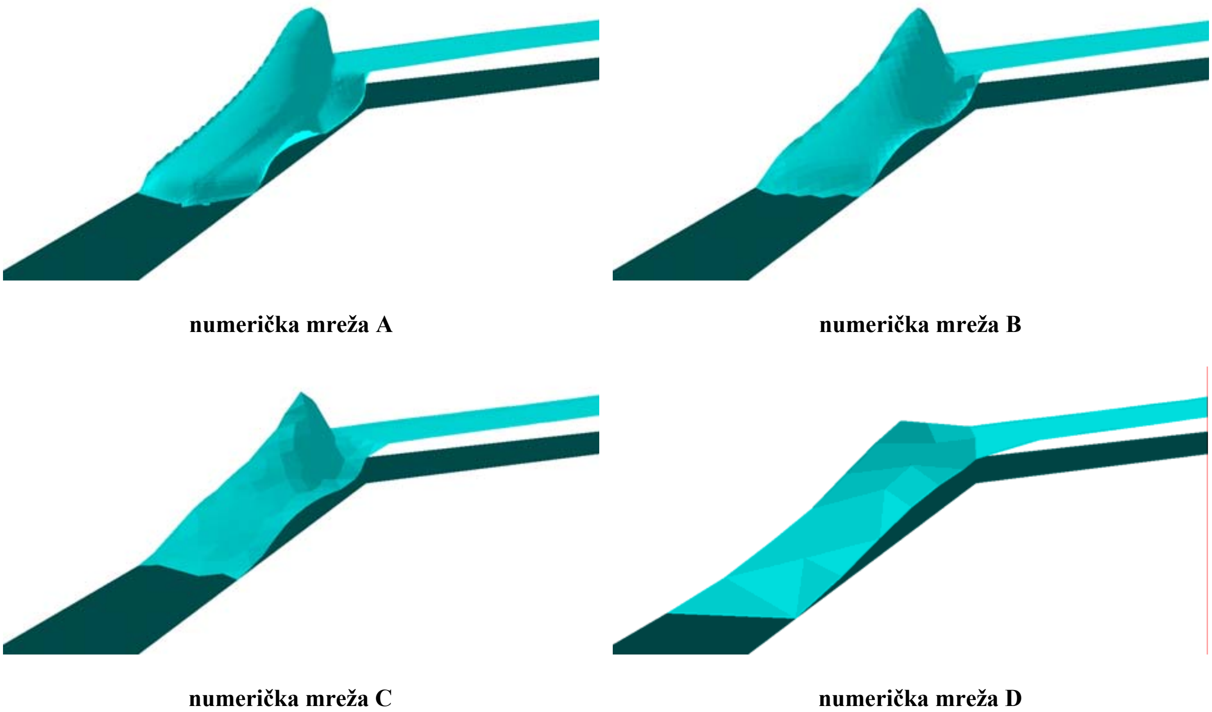
Slika 6.8. Uzvodno kretanje povratnog vala (t = 10 s)



Slika 6.9. Izravnavanje vodnog lica uz njegovo postepeno spuštanje (t = 20 s)

Na Slici 6.8 može se vidjeti dobro formiran očekivani povratni val, koji nastaje uslijed pregiba u kanalu (Slike 5.2 i 5.3, podpoglavlje 5.2.1.).

Detalji proračunatih vodnih lica pri prolasku poplavnog vala kroz sam pregib kanala za sve četiri testirane mreže mogu se vidjeti na Slici 6.10.

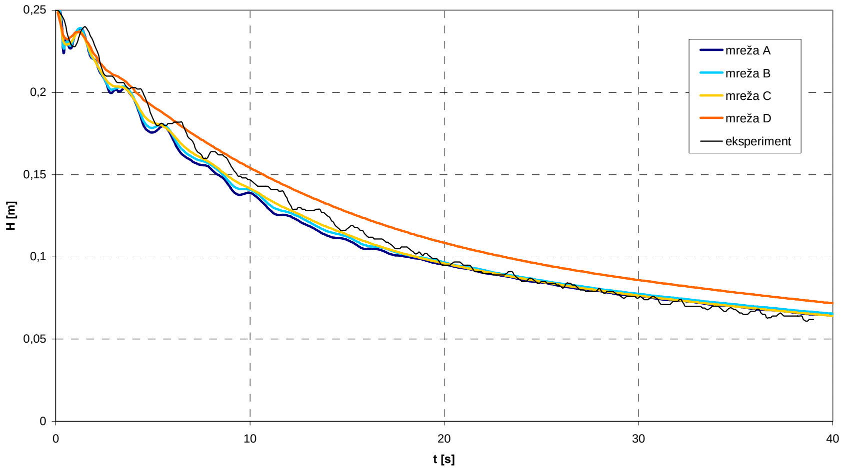


Slika 6.10. Vodno lice u pregibu kanala (t = 3 s) za numeričke mreže A-D

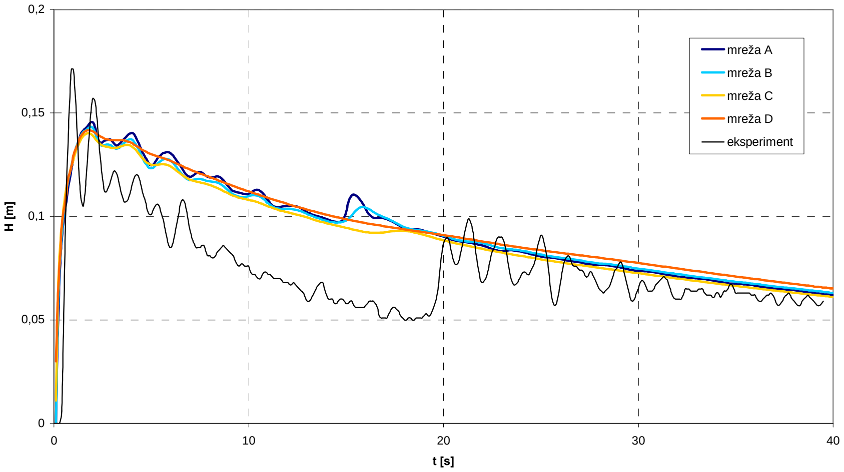
6.1.2. Analiza dobivenih rezultata i diskusija

Kao što je rečeno na početku ovog poglavlja, istraživanje utjecaja parametara numeričke mreže na točnost rezultata simulacija provedeno je analizom točnosti proračunatih razina vode na mjernim mjestima za koje postoje eksperimentalni podaci.

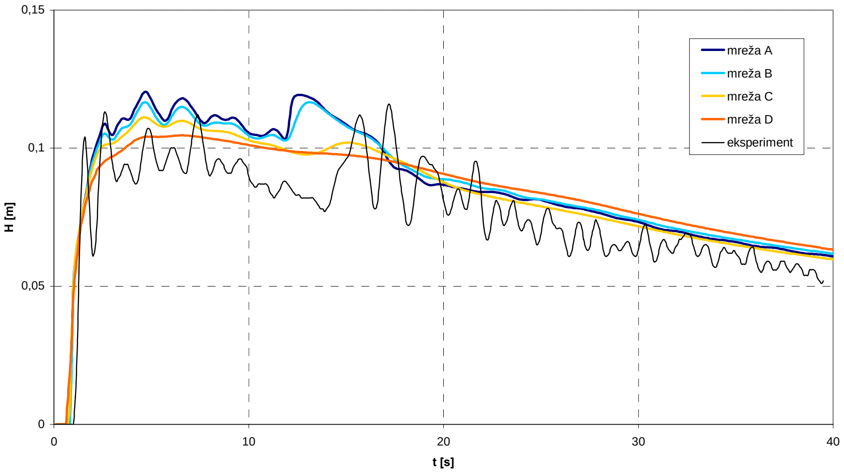
Iz proračunatih razina vodnog lica na mjernim mjestima G1-G9 konstruirani su hidrogrami koji pokazuju promjenu razine vodnog lica u vremenu. Usporedbe dobivenih hidrograma po mjernim mjestima za četiri testirane numeričke mreže dane su na Slikama 6.11-6.19. Na hidrogramima za mjerna mjesta G5 i G7 nema rezultata za mrežu D, jer ona, zbog svoje niske rezolucije, u sebi sadrži samo numerički čvor na mjernom mjestu G6 (mjerna mjesta G5, G6 i G7 smještena su vrlo blizu jedno drugom, Slika 5.1).



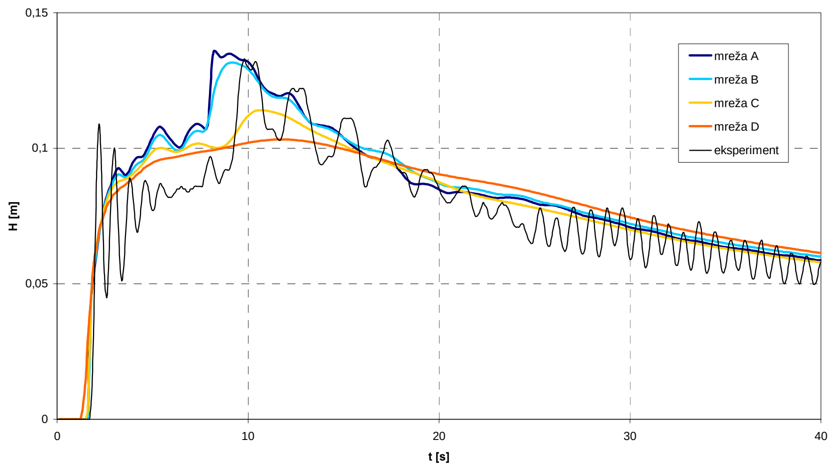
Slika 6.11. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki G1



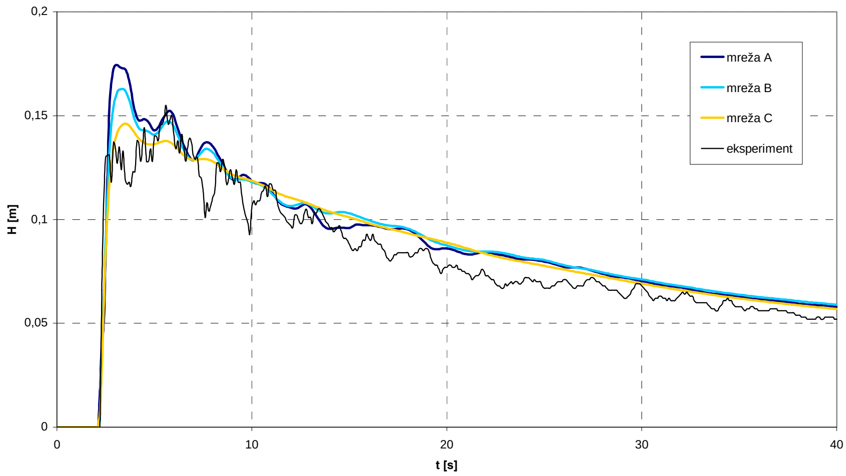
Slika 6.12. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki G2



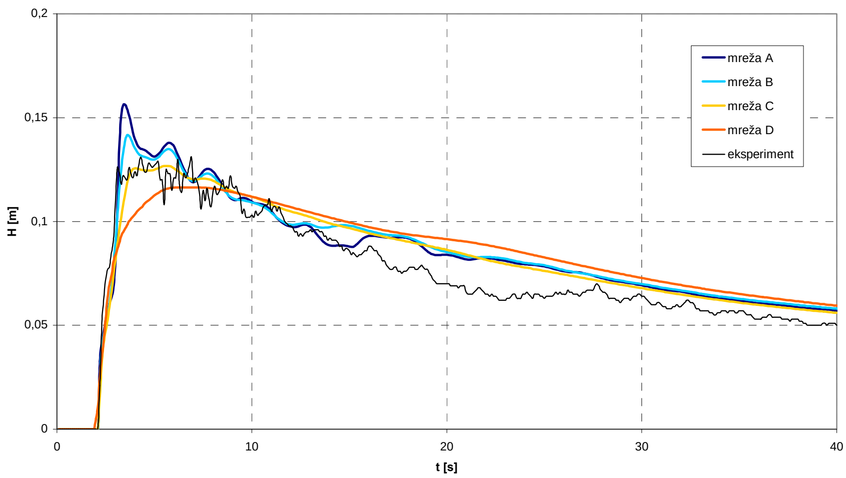
Slika 6.13. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki G3



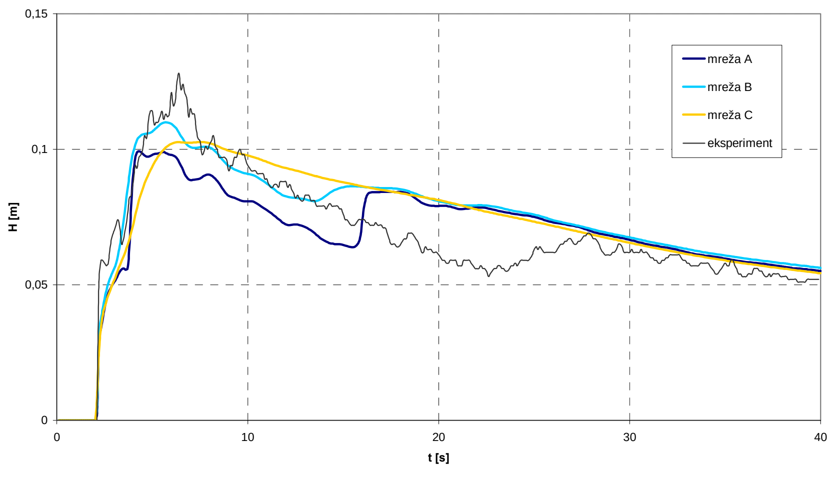
Slika 6.14. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki G4



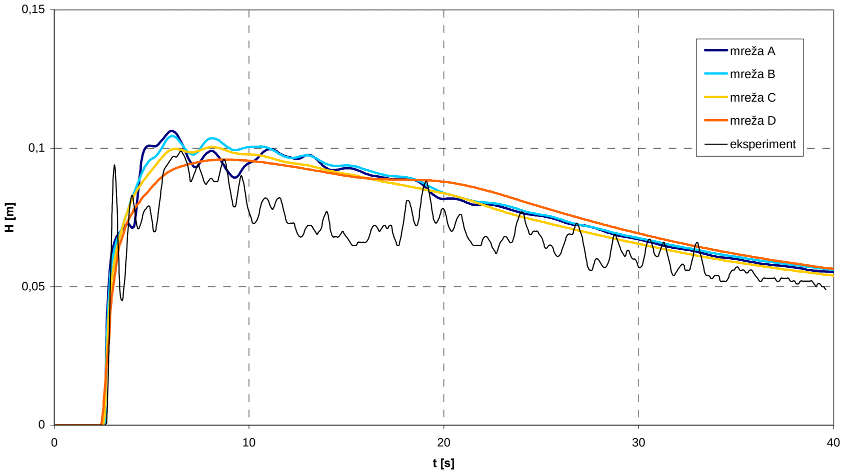
Slika 6.15. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki G5



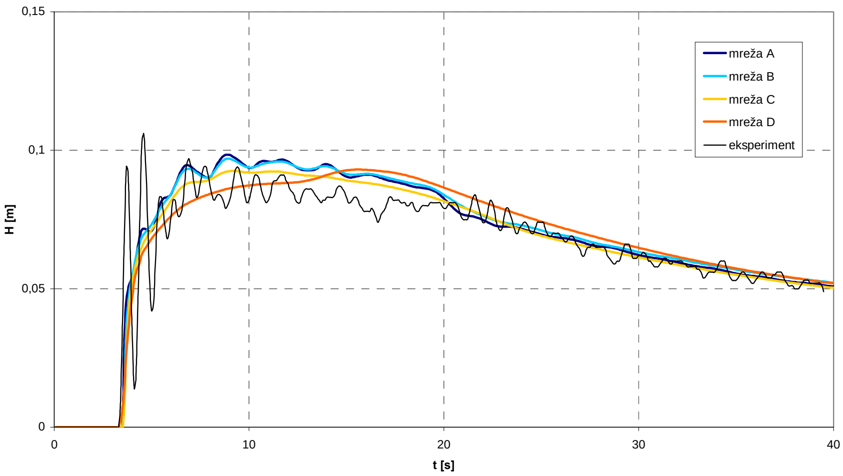
Slika 6.16. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki G6



Slika 6.17. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki G7



Slika 6.18. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki G8



Slika 6.19. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki G9

Općim uvidom u gore prikazane hidrograme može se ustvrditi da je poklapanje rezultata numeričkih simulacija i eksperimentalno izmjerenih vrijednosti u načelu vrlo dobro. U tom smislu može se zaključiti da se model plitkih voda pokazuje kao dobar i primjeren za modeliranje ovakvih pojava.

Prije nego što se krene u detaljniju analizu gore prikazanih hidrograma treba napomenuti da snažne oscilacije u mjerenim razinama vode nastaju dominantno kao posljedica oscilacija tlaka uslijed trodimenzionalnih efekata strujanja. To znači da od modela plitkih voda uopće, pa tako ni od rezultata opisanih simulacija, ne treba očekivati da uspješno rekonstruiraju takve visokofrekventne poremećaje vodnog lica. Stoga treba dobivene rezultate simulacija valorizirati prvenstveno uspoređujući oblik i uprosječene vrijednosti razina vode u mjerenim i izračunatim hidrogramima. (Unatoč toj činjenici, prikladna statistička obrada na temelju izvornih mjerenih hidrograma može se provoditi; jedan takav mogući način analize korišten je u ovom radu.)

Kvalitativnom analizom hidrograma danih na Slikama 6.11-6.19 može se doći do sljedećih zaključaka o osjetljivosti rezultata na izbor numeričke mreže:

- Gustoća numeričke mreže ne utječe vidljivo na brzinu propagacije vodnog vala, koja je općenito vrlo dobro predviđena.

- Rezultati ne pokazuju nikakvu jasnu opću dosljednost u odnosu gustoće numeričke mreže i visine proračunatog vodnog vala. Na mjernim mjestima G1 i G2 (Slike 6.11 i 6.12) mreža D daje najviši hidrogram duž cijelog intervala, dok na ostalim mjestima daje obično na početku najniže vrijednosti, a u drugoj polovici hidrograma najviše. Drugi primjer može biti mreža A koja na većini mjernih mjesta u prvoj polovici hidrograma daje uvjerljivo najviše vrijednosti, da bi na mjestu G7 upravo u prvoj polovici hidrograma dala najniže vrijednosti (Slika 6.17).
- Unatoč gore navedenom zaključku, rezultati daju djelomičnu podršku rezultatima nekih istraživanja koja su pokazala direktnu povezanost gustoće numeričke mreže i visine proračunatog vodnog vala na izlaznom rubu domene ([14]). Naime, na samom kraju svih hidrograma (u trenutku t = 40 s) najrjeđa mreža (D) daje sustavno najveće razine vode, dok najgušća mreža (A) daje uvijek niže vrijednosti. Ta činjenica upućuje da bi se kod stacionarnog strujanja možda moglo pokazati da gušće numeričke mreže daju niže vrijednosti razine vode. Doduše, sustavno najniže vrijednosti na kraju svih hidrograma daje mreža C, što ipak upozorava da po srijedi nije jednostavna linearna zavisnost.
- Pri kraju svih hidrograma proračunate vrijednosti razina vode za sve četiri numeričke mreže snažno se približavaju, što upućuje na zaključak da bi kod stacionarnih stanja (i strujanja sa sporijim tranzijentima) utjecaj gustoće numeričke mreže na vrijednost razine vode trebao biti puno manji nego kod propagacije snažnih poplavnih valova.
- Većina mjernih mjesta pokazuje da su proračunati hidrogrami konzistentno međusobno slični i bliski, čak i u vremenskim trenucima u kojima se snažnije udaljavaju od izmjerenih vrijednosti (Slike 6.12 i 6.18). Ovaj zaključak je vrlo važan jer pokazuje da je utjecaj gustoće numeričke mreže na točnost rezultata proračuna u principu manjeg reda veličine od utjecaja nekih drugih nesavršenosti cjelokupnog numeričkog modela. Iz toga slijedi da odgovornost za točnost modela dominantno leži na matematičkom modelu odnosno numeričkoj shemi.
- Gušće numeričke mreže formiraju određene oscilacije u proračunatom vodnom licu, no očito je da te oscilacije ne predstavljaju rekonstrukciju realnih oscilacija u vodnom licu. Oscilacije dobivene proračunom prisutne su samo u prvoj polovici hidrograma i uglavnom ne odgovaraju mjerenjima ni po frekvenciji (koja nije osjetljiva na gustoću mreže) ni po amplitudi (koja je veća kod gušćih mreža, što je vidljivo npr. na Slici 6.16). Ovo potvrđuje prethodno izrečenu tvrdnju da model plitkih voda uopće ne može modelirati takve visokofrekventne poremećaje uzrokovane trodimenzionalnim strujanjem. Ipak, zanimljiva je činjenica da se dotične oscilacije uopće pojavljuju u rezultatima proračuna.
- Najrjeđa numerička mreža (D) ne „osjeća“ gore spomenute oscilacije, ali svojim glatkim hidrogramima uglavnom ne odstupa bitno od srednjih vrijednosti razina vode dobivenih finijim mrežama (najbolji primjer je mjerno mjesto G2, Slika 6.12).
- Povratni val, koji nastaje uslijed pregiba na polovici kanala, jasno rekonstruiraju samo mreže A i B, što se može vidjeti na mjernim mjestima G2, G3 i G4 (Slike 6.12-6.14). Simulacijom dobiveni povratni val ima manju amplitudu i putuje brže od realnog.

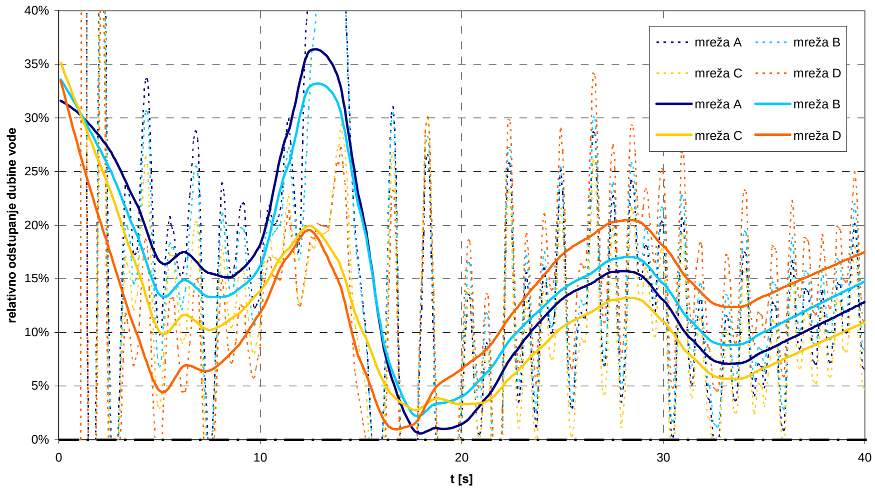
U cilju dobivanja kvantitativnih informacija o veličini odstupanja proračunatih vodnih lica od eksperimentom dobivenih vrijednosti, za korištene numeričke mreže formirani su dijagrami relativne pogreške izračunate dubine vode u vremenu, po mjernim mjestima. Relativna pogreška u trenutku t dobivena je po izrazu:

$$\Delta h_{rel}^{t} = \frac{h_{num}^{t} - h_{eksp}^{t}}{h_{eksp}^{t}} \tag{6.1}$$

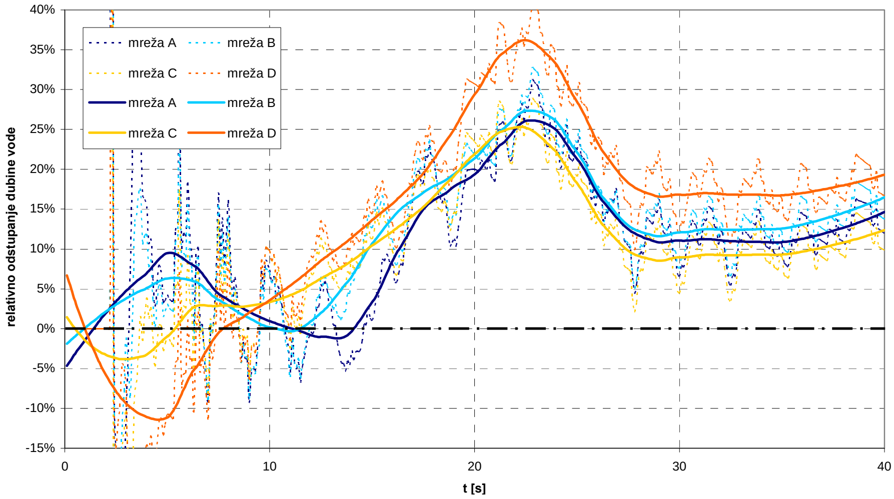
gdje je h^t_{num} – dubina vode u trenutku t dobivena numeričkim modelom, a h^t_{eksp} – dubina vode u trenutku t izmjerena u eksperimentu. Ovdje treba napomenuti je da na svim mjernim mjestima, osim na mjestu G1, razina vode H jednaka dubini vode h, zbog nulte geodetske visine dna kanala.

Zbog oscilacija prisutnih u izmjerenim vrijednostima razine vodnog lica, ali i onih slabijih prisutnih u proračunatim hidrogramima, ovako dobiveni dijagrami pokazuju vrlo snažne titraje. S obzirom da je upitno koliko ove oscilacije u principu uopće mogu biti modelirane modelom plitkih voda, a njihov je red veličine premali da bi imale neki značaj u praktičnom modeliranju, dijagrami relativnih pogrešaka izglađeni su tako da su filtrirani svi visokofrekventni titraji. Filtriranje je provedeno regresijom nizom lokaliziranih kvadratnih parabola te su na taj način dobivene regresijske krivulje koje su posebno korisne za jasnije određivanje mjere relativne pogreške proračunate dubine vode. Karakteristični dijagrami relativnih pogrešaka u proračunatoj dubini vode sa pripadnim regresijskim krivuljama za mjerna mjesta G3, G6 i G9 dani su na Slikama 6.20-6.22.

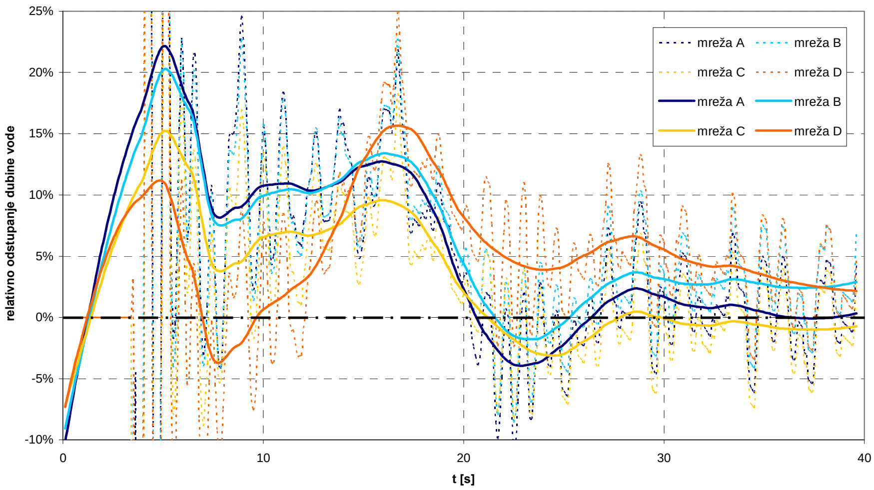
Prije svega treba napomenuti da pogreške u proračunatoj dubini vode, prikazane na ovim dijagramima (Slike 6.20-6.22), ne treba tumačiti kao indikaciju općenite mjere točnosti numeričkih modela plitkih voda. U praktičnoj primjeni modeliranja strujanja u realnim vodotocima i poplavnim područjima gdje dubina vode iznosi po nekoliko metara, proračunata razina vodnog lica obično se smatra zadovoljavajuće točnom, ako njeno odstupanje od izmjerenih vrijednosti ne prelazi oko 0,1 m. Ima li se na umu da je ovaj test-primjer temeljen na laboratorijskom eksperimentu u kojemu maksimalna dubina vode u kanalu iznosi 0,18 m, jasno je da se kvantitativni podaci o pogrešci numeričkog modela ne mogu direktno preslikavati na realne primjere.



Slika 6.20. Relativna greška proračunatog vodnog lica na mjernoj točki G3



Slika 6.21. Relativna greška proračunatog vodnog lica na mjernoj točki G6



Slika 6.22. Relativna greška proračunatog vodnog lica na mjernoj točki G9

Pri analiziranju ovih dijagrama treba uzeti u obzir da odstupanja na samom početku svih hidrograma nastaju dominatno kao posljedica nesavršenog poklapanja trenutka dolaska vodnog vala u eksperimentu i numeričkom modelu. Zbog naglog skoka u razini vode, mala pogreška u predviđenom trenutku nailaska vodnog vala uzrokuje veliku relativnu pogrešku u predviđenoj dubini vode. Analogno, velika greška za numeričke mreže A i B na mjernom mjestu G3 (Slika 6.20) direktna je posljedica prerano predviđenog trenutka pojave povratnog vala (Slika 6.13).

Uvidom u gornje dijagrame može se ustvrditi da se odstupanja od eksperimentom dobivenih podataka kreću u intervalu -10% do +35%. Taj podatak jasno pokazuje da numerički model načelno pokazuje tendenciju precjenjivanja razine vodnog lica, što se, sa praktičnog stanovišta, ukoliko precjenjivanje nije preveliko, može smatrati boljim rezultatom od jednako velikog podcjenjivanja razine vodnog lica. Ovdje treba ponoviti da se navedeni interval pogreške ne može smatrati apsolutnom procjenom pogreške numeričkog modela plitkih voda. Da bi se sa sigurnošću procijenila veličina pogreške modela, trebalo bi ovakvu analizu provesti na velikom broju test-primjera raznih vrsta.

Analizom dijagrama na Slikama 6.20-6.22 te hidrograma po svim mjernim mjestima (Slike 6.11-6.19), može se doći do sljedećih zaključaka o utjecaju gustoće numeričke mreže na odstupanje vodnog lica:

- Finije numeričke mreže (A i B) uspijevaju modelirati povratni val, no ne čine to dovoljno točno. Osim toga, one formiraju određene oscilacije u vodnom licu, što sve zajedno ima za posljedicu veća odstupanja od izmjerenih razina vode nego kod grubljih mreža (C i D).
- Najgrublja numerička mreža (D) u prvim dijelovima hidrograma daje vrlo dobre rezultate, no u drugoj polovici mjerenog intervala pokazuje sustavno najjače precjenjivanje razine vodnog lica od svih korištenih mreža.
- Najbolje rezultate daje numerička mreža C. Čini se da njena rezolucija omogućuje dobro modeliranje dominantnih (niskofrekventnih) promjena u vodnom licu te u isto vrijeme onemogućuje stvaranje snažnijih oscilacija, koje kvare rezultat kod mreža A i B.

Proračunati hidrogrami po mjernim mjestima mogu se, također, usporediti sa eksperimentalnim vrijednostima i jednostavnom statističkom analizom. Za te potrebe računata je tzv. standardna pogreška koja pokazuje mjeru greške u predviđanju niza brojeva. Primijenjena na dobivene hidrograme razine vodnog lica, ona daje srednje odstupanje proračunatog hidrograma od izmjerenog hidrograma te se za svako mjerno mjesto računa po formuli:

$$\Delta H_{SG} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left(\sum_t \left(H^t_{num} - \overline{H}_{num}\right)^2 - \frac{\left(\sum_t \left(H^t_{eksp} - \overline{H}_{eksp}\right)\left(H^t_{num} - \overline{H}_{num}\right)\right)^2}{\sum_t \left(H^t_{eksp} - \overline{H}_{eksp}\right)^2}\right)} \qquad (6.2)$$

gdje je H^t_{num} – razina vodnog lica na danom mjernom mjestu u trenutku *t* dobivena numeričkim modelom, H^t_{eksp} – razina vodnog lica na danom mjernom mjestu u trenutku *t* izmjerena u eksperimentu, $\overline{H}_{num}$ – srednja razina vodnog lica dobivena numeričkim modelom na danom mjernom mjestu, $\overline{H}_{eksp}$ – srednja razina vodnog lica izmjerena u eksperimentu na danom mjernom mjestu te *n* – broj točaka u hidrogramu za dano mjerno mjesto.

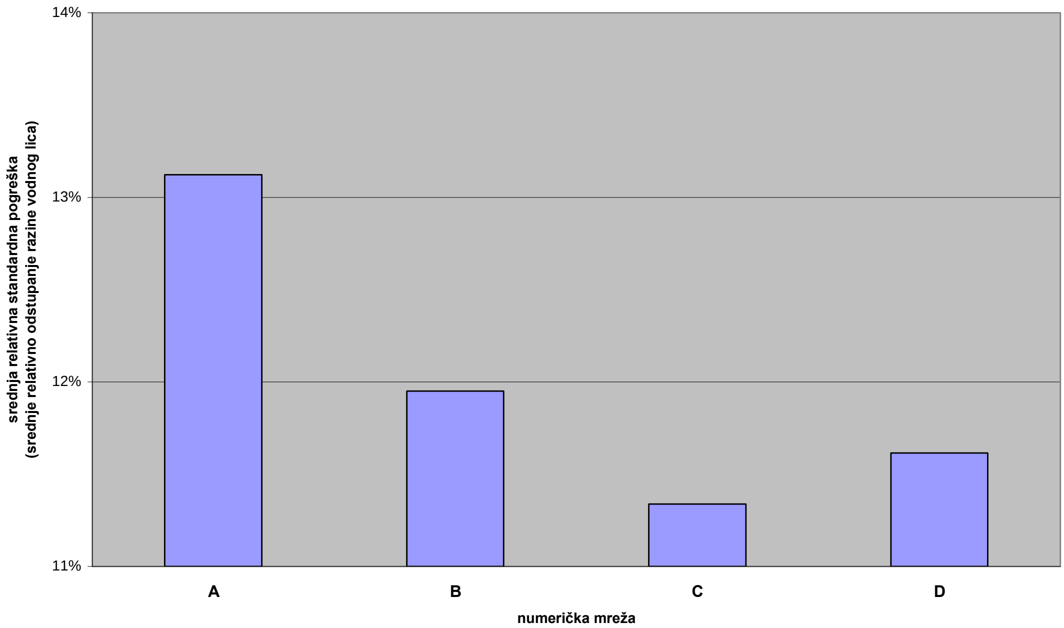
Korištenje standardne pogreške za procjenu greške u proračunatom vodnom licu pogodno je za primjenu na hidrograme u ovom test-primjeru zbog toga što ovako dobivena statistička greška sama provodi osrednjavanje podataka te nije osjetljiva na oscilacije u njima. (Tako na primjer standardna pogreška pravca $y = 0$ u odnosu na krivulju $y = \sin(x)$ iznosi nula.) Ovo svojstvo standardne pogreške omogućuje da se ona računa direktno na izvornim vrijednostima razina vode, tj. nema potrebe za izglađivanjem podataka.

Izračunate vrijednosti standardne pogreške i njene relativne vrijednosti prema srednjoj dubini vode izmjerenoj u eksperimentu $\overline{h}_{eksp}$, za svih 9 mjernih mjesta i za sve četiri korištene numeričke mreže dane su u Tablici 6.3.

Tablica 6.3. Standardna pogreška po mjernim mjestima za korištene numeričke mreže

Numerička mreža	A		B		C		D	
Mjerna točka	ΔH_{SG} [m]	$\Delta H_{SG}/\bar{h}_{eksp}$ [%]	ΔH_{SG} [m]	$\Delta H_{SG}/\bar{h}_{eksp}$ [%]	ΔH_{SG} [m]	$\Delta H_{SG}/\bar{h}_{eksp}$ [%]	ΔH_{SG} [m]	$\Delta H_{SG}/\bar{h}_{eksp}$ [%]
G1	0,004771	1,06	0,004278	0,96	0,003318	0,74	0,002538	0,57
G2	0,017243	23,00	0,016176	21,63	0,016015	21,41	0,015400	20,59
G3	0,011477	15,05	0,010432	13,68	0,008903	11,67	0,007722	10,12
G4	0,011817	15,41	0,010590	13,81	0,008998	11,73	0,009002	11,74
G5	0,008895	11,18	0,007493	9,42	0,006695	8,41	-	-
G6	0,007433	9,99	0,006637	8,92	0,006565	8,82	0,009399	12,64
G7	0,010611	15,77	0,008808	13,09	0,009459	14,06	-	-
G8	0,009046	14,18	0,008597	13,48	0,008250	12,93	0,008101	12,70
G9	0,008065	12,37	0,008179	12,54	0,007965	12,21	0,008424	12,92
Srednja vrijednost	**0,0099**	**13,12**	**0,0090**	**11,96**	**0,0085**	**11,34**	**0,0087**	**11,61**

U gornjoj tablici može se vidjeti da najmanju statističku pogrešku ima numerička mreža C, čime se potvrđuje već dani zaključak po kojem najbolje rezultate daje numerička mreža C. Isto se može vidjeti na grafikonu srednje relativne standardne pogreške prikazanom na Slici 6.23.



Slika 6.23. Srednja relativna standardna pogreška razine vodnog lica dobivene numeričkog modelom

Grafikon na Slici 6.23 zorno ilustrira zanimljivu činjenicu da se, unatoč relativno malim razlikama između rezultata dobivenih različitim numeričkim mrežama, jasno vidi da najbolji rezultat daje numerička mreža koja je relativno rijetka. Vidljivo je također da daljnje ugušćivanje numeričke mreže počinje kvariti rezultat, što se može smatrati neočekivanim s obzirom da čak i najgušća numerička mreža (A) nije ekstremno gusta (prostorni korak joj iznosi 0,02 m, što čini tek oko 25 numeričkih čvorova po širini kanala).

Mogućnost da mreža gušća od mreže A daje točniji rezultat nije realna, na što upućuje sličnost među rezultatima za sve četiri numeričke mreže, a posebno sličnost između rezultata za mreže A i B.

Tako je, na primjer, trenutak dolaska povratnog vala u mjerne točke G2 i G3 (Slike 6.12 i 6.13) jednako prerano procijenjen i kod mreže A i kod mreže B.

Potrebno je također primijetiti da je najrjeđa numerička mreža (D) dala vrlo dobar rezultat, unatoč svojoj vrlo niskoj rezoluciji (ima svega 147 numeričkih čvorova!). Ipak, jasno je da bi numerička mreža rjeđa od mreže D davala lošiji rezultat jer ne bi uopće mogla vjerno modelirati oblik poplavnog vala. Stoga se može zaključiti da je, za ovaj test-primjer, optimalna gustoća numeričke mreže ona u mreži C.

Time ovaj rezultat ohrabruje upotrebu rijetkih numeričkih mreža koje inače uvjetuju bitno skromnije računalne resurse, kako za njihovu izradu, tako i za provedbu simulacija. Naravno, upotreba relativno rijetkih numeričkih mreža moguća je samo ako jednostavnost topografije terena domene, tj. njeni mali gradijenti visine to dopuštaju, jer se ne može očekivati dobar rezultat sa rijetkom mrežom ako ona zbog svoje niske rezolucije neuspješno modelira poplavno područje. Slijedi da u praksi numerička mreža može biti onoliko rijetka, koliko nužnost dobrog oblikovanja topografije to dopušta.

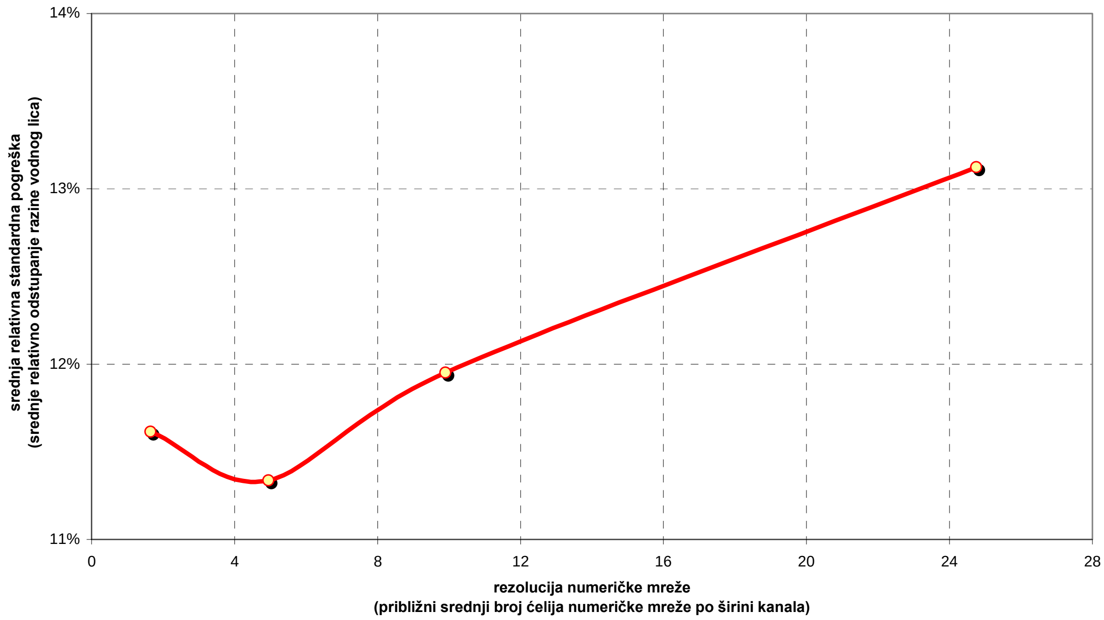
6.1.3. Zaključak

Određivanje optimalne gustoće numeričke mreže ostaje važan problem, pogotovo u domeni modeliranja realnih problema. Utvrđivanje optimuma za svaki pojedini slučaj moglo bi se, eventualno, provesti eksperimentalnim simulacijama na sve gušćim mrežama. No, ovdje treba imati na umu da mreža sa upola manjim prostornim korakom ima četiri puta više ćelija te će, zbog Courant-Friedrichs-Lewyjevog uvjeta, zahtijevati upola manji vremenski korak (3.3), što pak, u principu, povećava ukupno vrijeme računanja osam puta. Iz tog razloga, ovaj način još uvijek u praksi nije prihvatljiv zbog ograničenih računalnih resursa.

Rezultati opisani u ovom podpoglavlju općenito ukazuju da gustoća numeričke mreže, sama po sebi, slabo utječe na točnost rezultata simulacija strujanja u plitkim vodama. Pokazano je da je utjecaj gustoće numeričke mreže relativno mali i čak da ugušćivanje može kvariti rezultat. Time je, unatoč teoretskim osnovama numeričkog modeliranja koje upućuju na veću točnost modeliranja gušćim numeričkim mrežama, njihova upotreba u praksi donekle dovedena u pitanje.

Ovaj rezultat donekle potvrđuju i rezultati drugih istraživanja, koji također nisu uspjeli ustanoviti jednostavne relacije između gustoće numeričke mreže i točnosti rezultata simulacije. Tako ni validacija proračunatih brzina strujanja u odabranim točkama domene ne daje nikakvu principijelnu prednost gustim numeričkim mrežama ([14]).

Pokuša li se pokazati utjecaj rezolucije numeričke mreže na srednju ukupnu pogrešku rezultata numeričkog modela, na osnovu rezultata dobivenih u korištenom test-primjeru može se konstruirati krivulja prikazana na dijagramu na Slici 6.24.



Slika 6.24. Utjecaj rezolucije numeričke mreže na pogrešku numeričkog modela

Porast pogreške sa ugušćivanjem numeričke mreže, koji je s obzirom na gomilanje numeričke greške i očekivan, počinje se dešavati već od numeričke mreže sa rezolucijom od 5 ćelija po širini vodotoka. Krivulju konstruiranu na Slici 6.24 nije moguće (iz niza razloga) upotrebljavati kao opći kriterij optimalne gustoće numeričke mreže, no ona jasno ukazuje da optimalna mreža može biti vrlo rijetka, dok god ona, kao takva, dobro modelira topografiju domene. Ovaj zaključak potvrđen je i drugim istraživanjima ([10]).

Također, iz Slike 6.24 može se zaključiti da je pri izradi numeričke mreže najbolje krenuti od najrjeđe moguće te ju ugušćivati do one gustoće kod koje se rezultat počne kvariti. Istraživanje na korištenom test-primjeru ukazuje da će dodatno, daljnje ugušćivanje vjerojatno sustavno sve više kvariti rezultat.

Eventualna upotreba ekstremno gustih numeričkih mreža, čak i ako bi mogla donekle popraviti rezultat, nije praktično opravdana. Pokazuje se da je utjecaj gustoće numeričke mreže u principu malog reda veličine, pa zato i rijetke numeričke mreže mogu davati rezultat zadovoljavajuće točnosti.

Kao zaključak ovog podpoglavlja može se ustanoviti da je problematika utjecaja gustoće numeričke mreže na točnost rezultata simulacija strujanja u plitkim vodama vrlo složena. Da bi se sa sigurnošću eliminirala gustoća numeričke mreže kao potencijalni uzrok pogreške u rezultatu simulacije, potrebno je eksperimentalnim simulacijama odrediti najmanju gustoću numeričke mreže za koju daljnje ugušćivanje ne utječe vidljivo na rezultat.

Ukoliko provođenje takvog postupka nije moguće, kao dobru početnu numeričku mrežu može se smatrati otprilike najrjeđa mreža koja dovoljno detaljno i točno opisuje topografiju poplavnog područja, a ujedno njena rezolucija omogućuje numeričku stabilnost te dobro opisivanje šok-valova. U slučaju numeričke mreže neuniformne gustoće ovaj kriterij može se shvatiti lokalno.

6.2. Utjecaj oblika ćelija numeričke mreže

Poznato je da oblik ćelija numeričke mreže utječe na točnost rezultata simulacija. U tom smislu, u praktičnoj primjeni se vrlo uske ćelije smatraju lošim i mnogi generatori numeričke mreže ih kao takve i prepoznaju te omogućuju njihov popravak npr. postupcima relaksacije.

Postoje razne metode identifikacije loše oblikovanih elemenata numeričke mreže ([16]), kao i mnoge metode povećavanja kvalitete numeričke mreže. Dosadašnji teoretski radovi na temu procjene pogreške diskretizacije ograničavaju se samo na hiperboličke probleme bez složenih izvornih članova

([3]), a istraživanja utjecaja oblika ćelija numeričke mreže na rezultat simulacija realnih problema strujanja teško je (ako uopće moguće) naći. Iz tog razloga ne postoje ni jasni praktični kriteriji koji bi definirali najlošiji oblik ćelija koji se može smatrati podnošljivim s obzirom na utjecaj na točnost rezultata simulacija.

Kvalitetnom numeričkom mrežom smatra se numerička mreža čije ćelije imaju kvalitetan oblik. Kvantificiranje pojma kvalitete oblika ćelije numeričke mreže vrši se definiranjem presudnog geometrijskog svojstva ćelije, a neki od mogućih su ([15]):

- odnos stranica ćelije
- površina ćelije
- minimalni kut ćelije
- maksimalni kut ćelije
- odnos površina ćeliji upisanog i opisanog kruga
- metrika veličine i oblika ćelije dobivena na osnovu „Jacobijeve“ matrice ([16])

Za potrebe ovog rada izabran je minimalni kut ćelije numeričke mreže kao parametar čiji se utjecaj na točnost rezultata simulacija ispituje. U tom smislu, kvaliteta numeričke mreže obrnuto je proporcionalna udjelu ćelija sa minimalnim unutarnjim kutom manjim od zadanog graničnog kuta. Ovakav način određivanja kvalitete 2D numeričke mreže povijesno je prvi uveden i još se uvijek koristi s obzirom da su razna nezavisna istraživanja potvrdila da upravo ćelije sa malim unutarnjim kutovima povećavaju numeričku grešku modela ([21]).

S obzirom da se u ovom radu koriste isključivo numeričke mreže trokutastih ćelija, može se kriterij minimalnog kuta ćelija nazvati i kriterijem suženosti ćelija numeričke mreže.

Uske trokutaste ćelije numeričke mreže vrlo su izdužene, što znači da su im vrhovi relativno jako udaljeni jedan od drugog. Godunovljeve numeričke sheme, pa tako i ovdje korištena Q-shema, podrazumijevaju konstantno stanje po cijeloj ćeliji što kod ćelija sa velikim radijusom opisane kružnice može biti posve nerealno.

U posebnim slučajevima, kada su ćelije izdužene upravo u smjeru konstantnog stanja, tj. kada su stranice ćelija paralelne sa linijama konstantnog stanja, anizotropne numeričke mreže ekstremno uskih ćelija mogu dati najbolje rezultate ([4]). Upotreba takvih numeričkih mreža podrazumijeva iterativno adaptivno regeneriranje mreže, što je kod modeliranja realnih problema strujanja plitkih voda za sada potpuno nepraktično.

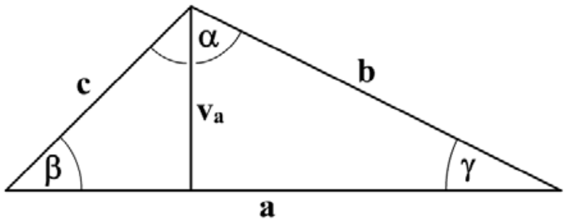
Kao što paralelnost stranica ćelija i linija konstantnog stanja popravlja rezultat, tako ga i njihova otklonjenost donekle kvari. Numerička mreža strukturirana na način da su joj sve ćelije orijentirane u istom smjeru može tako imati za posljedicu zakretanje linija konstantnog stanja u rezultatu sa ciljem smanjenja kuta koji one zatvaraju sa najdužim stranicama ćelija. Tako npr. kod linearne propagacije vodnog vala ovaj efekt uzrokuje blago ali vidljivo zakretanje proračunate vodne fronte. Ovaj problem se uspješno rješava korištenjem nestrukturiranih numeričkih mreža ili izbjegavanjem jednolične orijentacije ćelija.

Dio problema nastalih uslijed nekvalitetnog oblika ćelija numeričke mreže može se riješiti upotrebom sekundarne mreže. Tako se opasnost nastanka numeričke nestabilnosti uslijed susjedstva vrlo malih i vrlo velikih ćelija dramatično smanjuje korištenjem medijanskih ćelija koje samim načinom svoje izgradnje usrednjuju veličinu ćelija numeričke mreže (Slika 3.2).

Sa druge strane, analiza pogreške zaokruživanja u numeričkoj shemi uslijed nepotpunih razvoja u Taylorov red (*truncation error*) kod upotrebe medijanskih ćelija u metodi konačnih volumena za rješavanje hiperboličkih problema provedena u [31] pokazuje da, kod uskih trokutastih ćelija, numerička stabilnost rezultata ovisi o parametru

$$M = \frac{a^2}{v_a} \tag{6.3}$$

gdje je a – najduža stranica trokuta, a v_a – visina na stranicu a. Vidljivo je da ovaj omjer snažno raste za jako uske trokutaste ćelije, i prihvati ga li se kao mjeru kvalitete oblika ćelije numeričke mreže, može ga se shvatiti kao varijantu kriterija odnosa stranica ćelije. No, jednostavnom analizom geometrije uskog trokuta (Slika 6.25) može se pokazati da ovakav kriterij u sebi sadrži i kriterij minimalnog kuta ćelije.



Slika 6.25. Geometrija uske trokutaste ćelije numeričke mreže

Računanje površine trokuta pokazuje da je visina v_a najkraća visina trokuta ako je a najduža stranica trokuta. Također stoji da je nasuprotni kut najduže stranice α ujedno i najveći kut trokuta, što znači da je najmanji kut trokuta jedan od preostalih kutova β i γ. Iz Slike 6.25 može se lako vidjeti da vrijedi:

$$v_a = b\sin\gamma = c\sin\beta \ ,$$

što se može iskoristiti za preformuliranje izraza za mjeru suženosti ćelije M (6.3):

$$M = \frac{a^2}{b\sin\gamma} = \frac{a^2}{c\sin\beta} \ .$$

Odabere li se nomenklatura stranica i kutova trokuta kao na Slici 6.25, tj. takva da je $\gamma = \min(\beta, \gamma)$, što automatski ima za posljedicu da je $b = \max(b, c)$, vidljivo je da mjera M raste sa porastom omjera a^2/b (gdje je a – najduža stranica trokuta, a b – stranica koja sa stranicom a zatvara najmanji kut trokuta), ali i sa smanjenjem najmanjeg kuta γ i to po izrazu:

$$M_\gamma(\gamma) = \frac{1}{\sin\gamma} \ . \qquad (6.4)$$

U tom smislu se ukupna mjera M može napisati kao

$$M = M_\gamma \frac{a^2}{b} \ ,$$

gdje treba napomenuti da se za γ = *const.* odnos a/b može kretati jedino u intervalu $\langle 1,2 \rangle$, što pak znači da M dominatno ovisi o dužini najduže stranice trokuta a te veličini najmanjeg kuta γ uz nju.

Analizom pogreške zaokruživanja za jednadžbe plitkih voda diskretizirane metodom konačnih razlika utvrđeno je da je ona proporcionalna sa $\cos\gamma/\sin^2\gamma$ ([21]), što jasno pokazuje sličnost sa mjerom (6.4). U tom smislu može se zaključiti da pogreška zaokruživanja univerzalno raste sa smanjenjem unutarnjeg kuta ćelija po zakonu $\cos^m\gamma/\sin^n\gamma$, gdje su m i n parametri koji ovise o diskretizacijskoj metodi i sl., s time da je $n > m$.

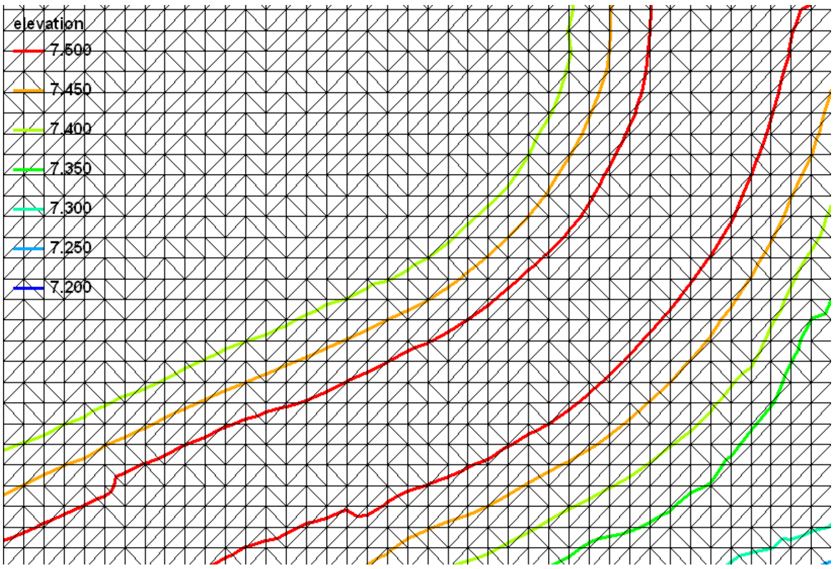
Na temelju ovog zaključka te provedenih istraživanja utjecaja oblika ćelija numeričke mreže može se sa sigurnošću zaključiti da točnost numeričkog modela ovisi o veličini najmanjeg unutarnjeg kuta (u daljnjem tekstu: γ). Istraživanje opisano u ovom podpoglavlju pokušat će indicirati osjetljivost numeričkog 2D modela plitkih voda na kvalitetu numeričke mreže po tom kriteriju i to u području praktične upotrebe modela.

6.2.1. Test-primjer

Za potrebe istraživanja utjecaja oblika ćelija numeričke mreže korišten je CADAM test-primjer poplavljivanja modela doline rijeke Toce. U ovom se test-primjeru numeričkim modelom rekonstruira eksperiment poplavljivanja modela doline rijeke Toce, koji je detaljno opisan u podpoglavlju 5.2.2. Ovaj test-primjer izabran je upravo za ovo istraživanje iz sljedećih razloga:

- geometrija betonskog modela poplavnog područja dana je iznimno precizno (raster geodetskih točaka rezolucije 0,05 m), što eliminira eventualna odstupanja modela od stvarnosti zbog nesavršenog modeliranja same domene
- vrlo precizno zadana topografija poplavnog područja omogućuje upotrebu vrlo guste numeričke mreže kojoj se može kontrolirano narušavati kvaliteta oblika ćelija bez da se dovede u pitanje vjernost modeliranja geometrije terena
- topografija domene je potpuno realna jer modelira pravu dolinu rijeke, što omogućuje istraživanje praktičnog utjecaja oblika ćelija numeričke mreže na točnost rezultata simulacija

Inicijalna numerička mreža modela doline rijeke Toce dobivena je postupkom direktne triangulacije u računalnom programu SMS koji je općenito opisan u podpoglavlju 4.2. Direktna triangulacija provedena je na izvornom rasteru geodetskih točaka 5 × 5 cm (koordinate kojih su dostupne u tekstualnoj datoteci na [6]), čime je dobivena kartezijska numerička mreža sa 279733 elemenata i 140985 čvorova. Mada sve njene ćelije nisu jednako orjentirane, ova se numerička mreža može nazvati strukturiranom i uniformnom jer su, uslijed jedinstvenog prostornog koraka, sve ćelije oblikovane kao pravokutni jednakokračni trokuti jednake površine (detalj prikazan na Slici 6.26). Takav oblik ćelija je u ovom istraživanju definiran kao najbolji mogući (γ = *const.* = 45°), a dotičnoj numeričkoj mreži pridodana je oznaka Q1.



Slika 6.26. Detalj inicijalne kartezijske numeričke mreže Q1

Dobivena numerička mreža spremna je za korištenje u programu Stripp12 tek nakon definiranja niza točaka na ulaznoj granici domene na kojemu će se kasnije zadati rubni uvjet protoka. Sama geometrija poplavnog područja osigurava nadkritično strujanje na izlazu, pa na izlaznoj granici nije potrebno zadavati nikakav rubni uvjet.

Da bi se utvrdio utjecaj oblika ćelija numeričke mreže na rezultat simulacija, bilo je potrebno izraditi više numeričkih mreža različitih stupnjeva kvalitete. One su dobivene kontroliranim distorziranjem ćelija izvorne numeričke mreže Q1 pomoću malog računalnog programa nazvanog Dist2dm, izrađenog u programskom jeziku C specijalno za potrebe ovog rada.

Program Dist2dm distorzira numeričku mrežu na način da pomiče njene čvorove u x- i/ili y-smjeru za slučajno generiranu udaljenost koja je limitirana odabranim koeficijentom:

$$\hat{\xi}_i = \xi_i + k_{D,\xi} \cdot \Delta x \cdot 2(R - 0,5)$$

gdje je ξ_i – izabrana (x ili y) koordinata i-tog čvora numeričke mreže, $k_{D,\xi}$ – koeficijent distorzije numeričke mreže u smjeru koordinate ξ te R – slučajno generirana vrijednost u intervalu <0,1>. Prostorni korak Δx odnosi se na inicijalnu numeričku mrežu Q1 i iznosi $\Delta x = \Delta y = 0,05$ m. Program Dist2dm na ovaj način pomiče sve čvorove numeričke mreže osim rubnih, čime je osiguran nepromijenjen izgled granica domene. Korištenje slučajno generiranih vrijednosti osigurava ravnomjernu distribuciju loše oblikovanih ćelija po cijeloj numeričkoj mreži.

Kontrolom koeficijenata $k_{D,x}$ i $k_{D,y}$ dobivene su 4 nove numeričke mreže, različitih klasa kvalitete oblika ćelija. Svaka od tih numeričkih mreža provjerena je na moguće preklapanje elemenata te u programu SMS oblikovana po visini na osnovu geodetskih točaka (više o ovom postupku u podpoglavlju 4.2.).

Alternativu ovakvom postupku moglo bi predstavljati anizotropno ugušćivanje inicijalne numeričke mreže smanjivanjem npr. Δy što bi imalo za posljedicu izduživanje ćelija i smanjivanje najmanjeg unutarnjeg kuta γ. Nedostatak ove metode je drastično povećavanje već ionako velikog broja ćelija i čvorova, kao i činjenica da se u praksi mreža takvog oblika (strukturirana sa izduženim elementima) koristi samo na manjim područjima domene gdje se očekuje jednodimenzionalno strujanje (tipično u kanalima i rijekama).

Mjerenja razine vodnog lica u eksperimentu vršena su na ukupno 26 mjernih točaka (smještaj nekih prikazan je na Slici 5.7). S obzirom na veliki broj mjernih točaka, za potrebe ovog istraživanja odabrano je 10 točaka, navedenih u Tablici 6.4. Da bi se osiguralo računanje vodnog lica upravo na tim mjestima, čvorovi numeričke mreže najbliži mjernim točkama pomaknuti su točno na koordinate mjernih točaka. Tako je učinjeno kod svih korištenih mreža, pa je time osigurana pouzdana usporedivost rezultata simulacija sa eksperimentalnim rezultatima, kao i njihova međusobna usporedivost.

Tablica 6.4. Mjerne točke za test-primjer poplavljivanja modela doline rijeke Toce

Mjerna točka	x [m]	y [m]
P1	2,917	6,895
S4	4,860	5,986
P5	11,264	6,083
P8	16,297	5,773
P9	17,722	7,355
P13	20,879	4,130
P19	27,692	5,926
P21	33,115	6,090
P23	38,853	4,213
P26	45,794	9,437

Numerički model izgrađen je u računalnom programu Stripp12 učitavanjem numeričke mreže te zadavanjem početnih i rubnih uvjeta te ostalih potrebnih podataka za pokretanje proračuna.

Treba napomenuti da građevinski objekti prisutni u poplavnom području fizikalnog modela (Slika 5.6) nisu ugrađeni u numerički model. U većini simulacija provedenih u sklopu CADAM-projekta građevine također nisu modelirane, a rezultati ([25]) su pokazali da je, globalno gledano, utjecaj tog pojednostavljenja nižeg reda veličine od utjecaja drugih parametara numeričkog modela. Mogući uzrok toga je činjenica da većina građevinskih objekata (tj. kuća u selima) ne biva poplavljena ili se pak nalazi na samom rubu poplavne zone (Slike 5.9-5.11), gdje su dubine vode i brzine strujanja male, pa strujanje u tim područjima slabo utječe na glavninu toka ([1]). U svakom slučaju, ova problematika nije bitna za temu ovog rada; cilj ovdje opisanog istraživanja je utvrditi osjetljivost numeričkog modela na kvalitetu oblika ćelija numeričke mreže, koja u principu predstavlja nezavisan „stupanj slobode“ numeričkog modela.

Duž ulazne granice domene zadan je rubni uvjet poznatog protoka, što se u CADAM-projektu pokazalo najboljim mogućim rješenjem ([25], [1]). Dodatnu sigurnost u izbor ulaznog rubnog uvjeta daje šira analiza rezultata simulacija provedenih na ovom test-primjeru, koja je pokazala da način tretiranja utočnog rubnog uvjeta ima zanemariv utjecaj na rezultat ([25]). Vrijednosti protoka na utoku definirane su hidrogramom HY1 (Slika 5.8) koji ne izaziva preljevanje nasipa akumulacijskog rezervoara u sredini domene (više u podpoglavlju 5.2.2.). Smjer utjecanja postavljen je okomito na ulaznu granicu.

Na izlazu iz domene nije bilo potrebno zadati nikakav rubni uvjet jer geometrija na izlazu osigurava nadkritično strujanje. Na ostalim granicama također nije trebalo zadavati rubne uvjete jer voda tokom simulacije ne dostiže do njih.

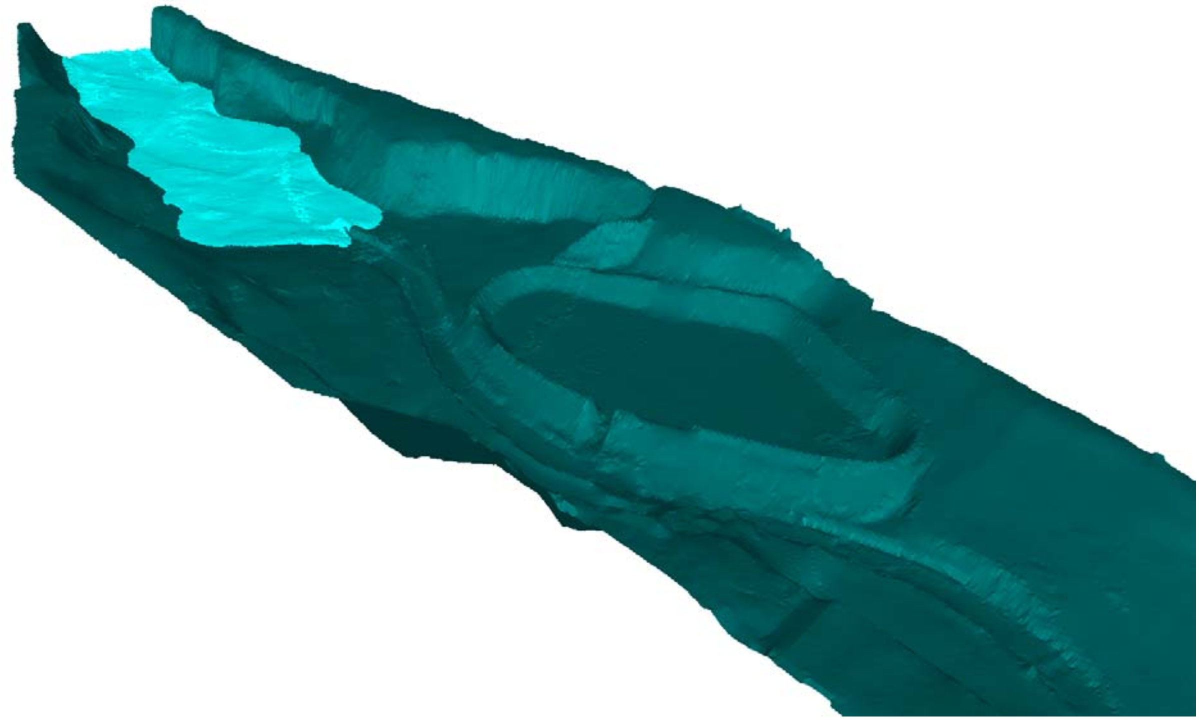
Vrijednosti Manningovog koeficijenta trenja postavljene su po cijeloj domeni uniformno na 0,01, što je unutar vrijednosti preporučenih od strane autora samog eksperimenta ([6]).

Za početne uvjete postavljene su nulte dubine i brzine strujanja po cijeloj domeni, tj. inicijalno suho poplavno područje.

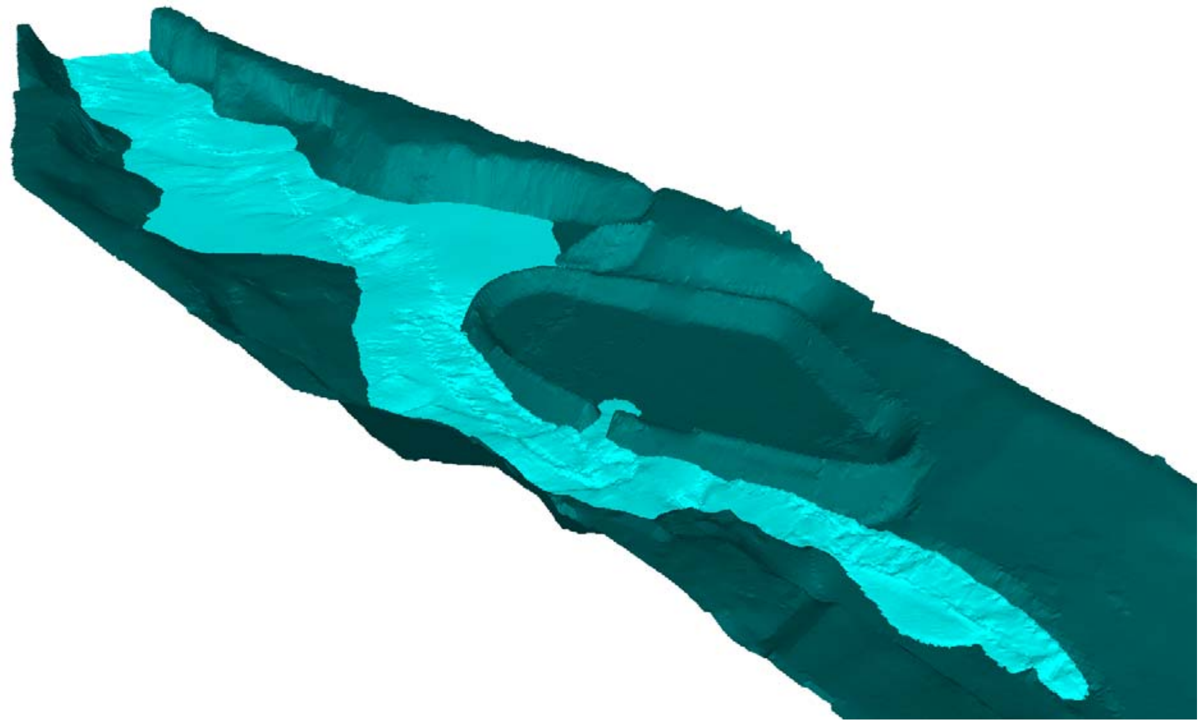
Da bi se, kao i u podpoglavlju 6.1.1., minimizirao negativan utjecaj granične dubine vode h_{gr} (vidi podpoglavlje 2.4.3.) na brzinu propagacije vodnog vala u numeričkom modelu, vrijednost h_{gr} je postavljena na približno najmanju koja ne dovodi do „pucanja“ proračuna. Primijenjena vrijednost granične dubine vode h_{gr} za sve simulacije ovog test-primjera iznosi 0,002 m.

CFL broj je za sve proračune bio definiran kao C_{cfl} = 0,8. Aktivirana je opcija korištenja dualne mreže, što povećava numeričku stabilnost proračuna.

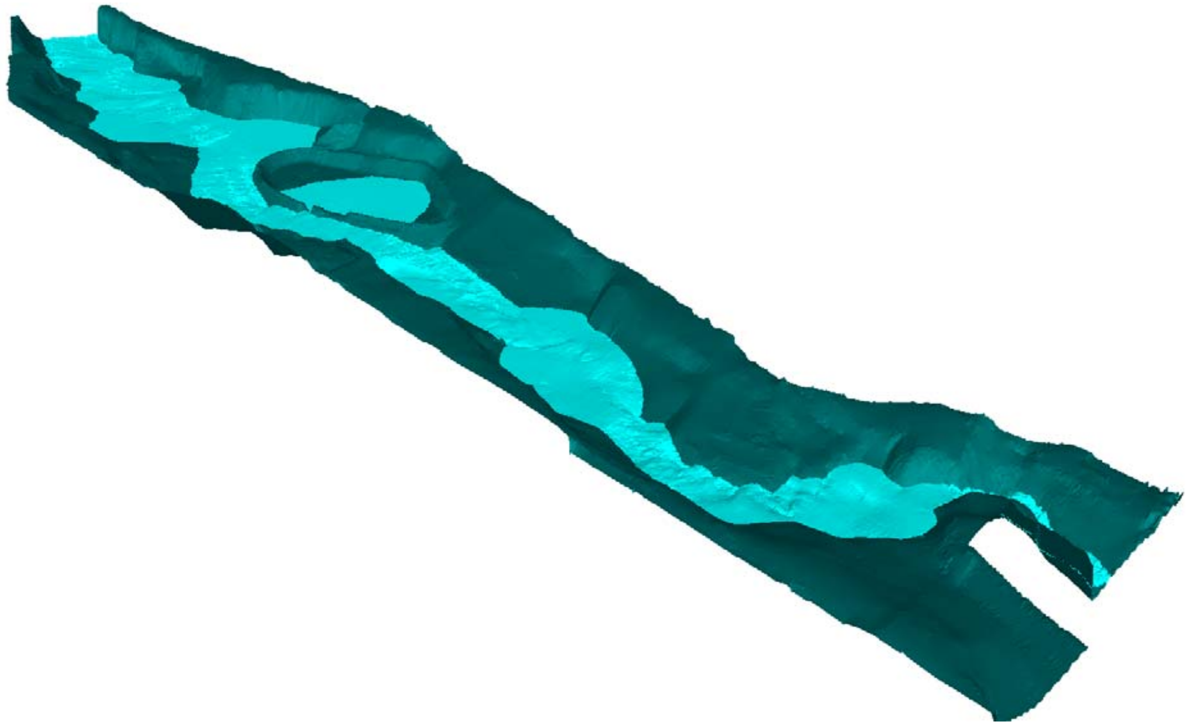
Nakon što su u programu Stripp12 zadani svi potrebni podaci, pokretani su proračuni za simulacije sa dobivenim numeričkim mrežama. Izgled vodnog lica u nekoliko karakterističnih trenutaka izračunatog na numeričkoj mreži Q1 prikazan je na Slikama 6.27-6.30.



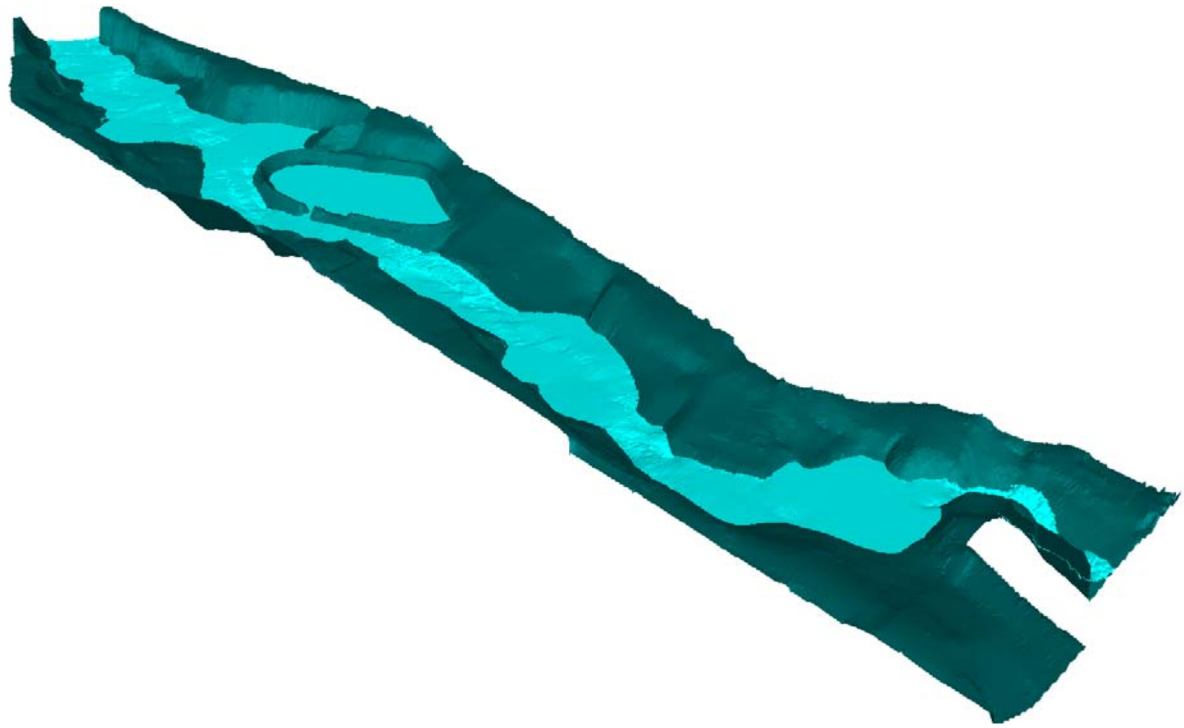
Slika 6.27. Napredovanje poplavnog vala (t = 30 s)



Slika 6.28. Početak prodiranja vode u akumulaciju (t = 50 s)



Slika 6.29. Dolazak poplavnog vala do izlazne granice modela (t = 80 s)



Slika 6.30. Poplavljenost doline na kraju simuliranog scenarija (t = 180 s)

Nakon provedenih simulacija, posebnim računalnim programom, napisanim u programskom jeziku C specijalno za potrebe ovog istraživanja, iz dobivenih rezultata utvrđen je udio „mokrih“ ćelija numeričke mreže čiji je najmanji unutarnji kut:

- $30° < \gamma \leq 60°$
- $20° < \gamma \leq 30°$
- $10° < \gamma \leq 20°$
- $0° < \gamma \leq 10°$

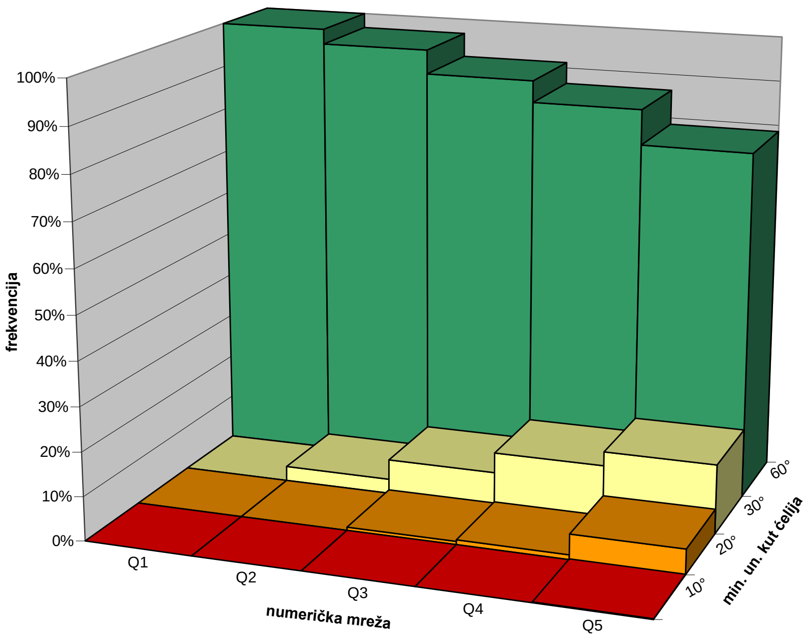
S obzirom da „suhe“, neaktivne ćelije numeričke mreže ne sudjeluju u proračunu, provjeravanje samo „smočenih“ ćelija bilo je nužno za dobru procjenu utjecaja oblika ćelija numeričke mreže na točnost rezultata simulacije.

Dobiveni podaci o distribuciji najmanjih kutova ćelija u korištenim numeričkim mrežama, po gore definiranim kategorijama, izneseni su u Tablici 6.5.

Tablica 6.5. Udio ćelija numeričke mreže po najmanjem unutarnjem kutu

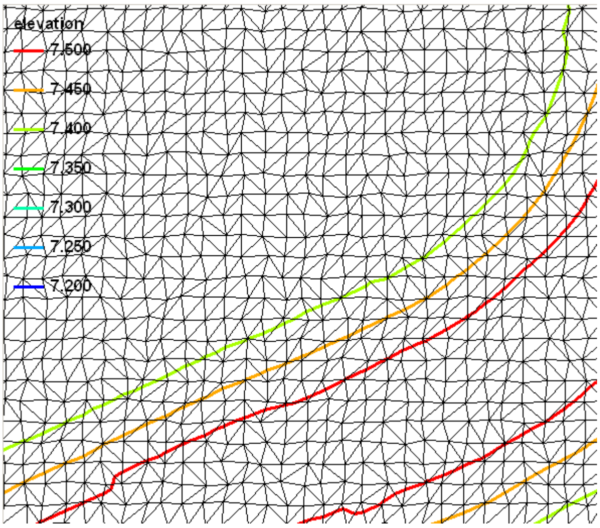
Numerička mreža	Udio ćelija numeričke mreže [%]			
	$0° < \gamma \leq 10°$	$10° < \gamma \leq 20°$	$20° < \gamma \leq 30°$	$30° < \gamma \leq 60°$
Q1	0,0000	0,0024	0,0106	99,9870
Q2	0,0000	0,0016	3,3384	96,6600
Q3	0,0020	0,7780	7,9480	91,2720
Q4	0,0008	1,0792	12,4992	86,4208
Q5	0,1700	5,6400	15,6700	78,5200

Na osnovu ovih podataka dobiveni su histogrami minimalnog unutarnjeg kuta ćelija svake pojedine numeričke mreže. Time je omogućeno razvrstavanje korištenih numeričkih mreža na klase kvalitete oblika ćelija Q2-Q5. Histogrami za numeričke mreže Q1-Q5 dani su na trodimenzionalnom dijagramu na Slici 6.31.

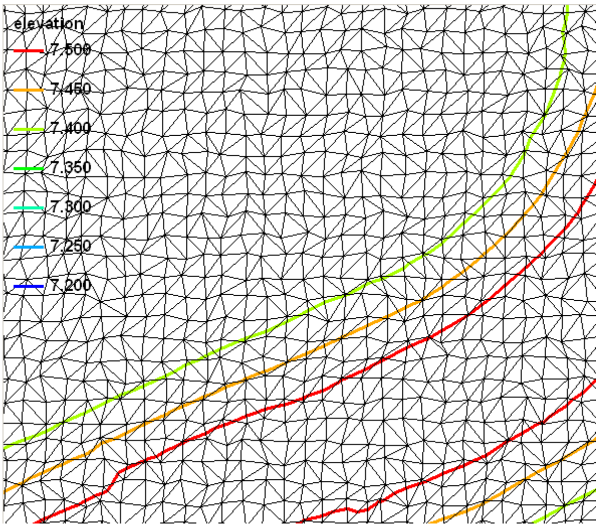


Slika 6.31. Histogrami minimalnog unutarnjeg kuta ćelija numeričkih mreža Q1-Q5

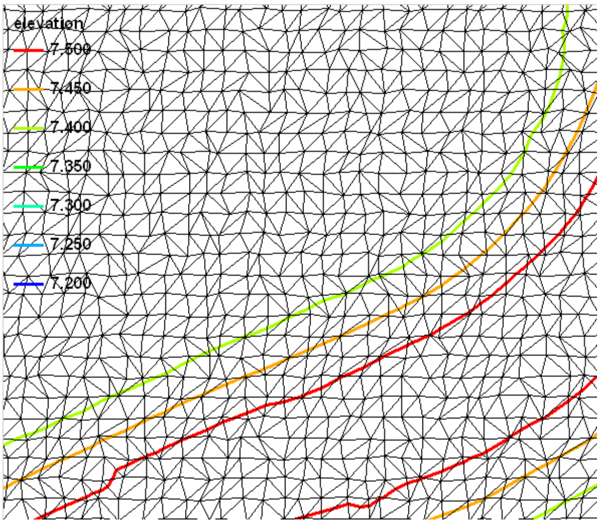
Izgled ćelija numeričkih mreža Q2-Q5 prikazan je detaljima na Slici 6.32. Na ovoj slici može se vidjeti sustavno smanjivanje prosječne vrijednosti γ što ima za posljedicu povećavanje udjela degeneriranih ćelija od mreže Q2 do mreže Q5.



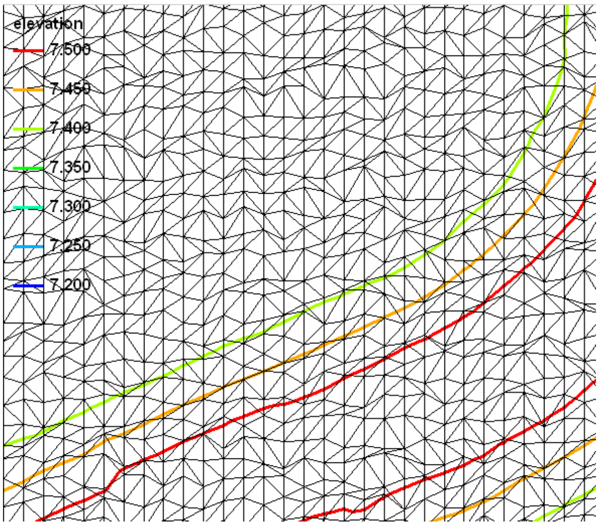
numerička mreža Q2



numerička mreža Q3



numerička mreža Q4



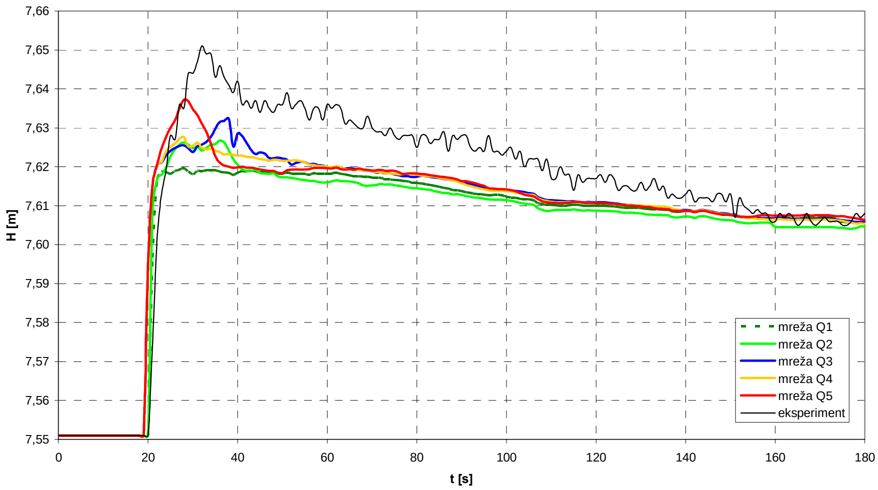
numerička mreža Q5

Slika 6.32. Detalji numeričkih mreža Q2-Q5

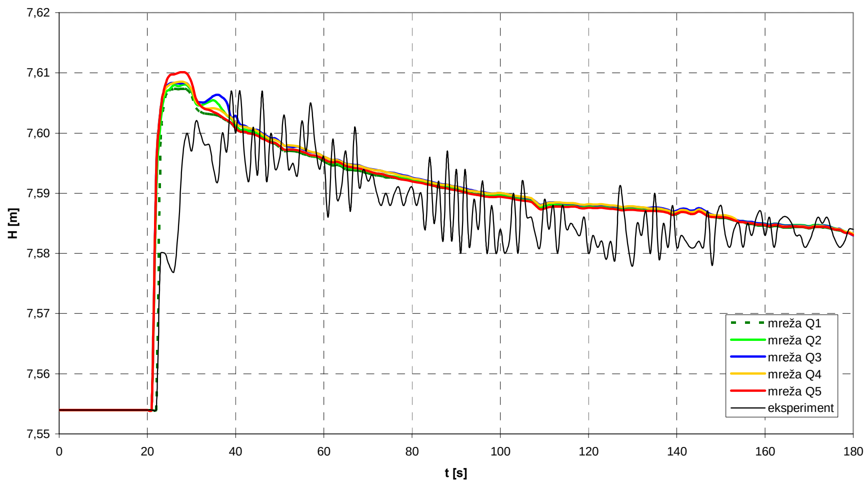
6.2.2. Analiza dobivenih rezultata i diskusija

Istraživanje utjecaja oblika ćelija numeričke mreže na točnost rezultata simulacija provedeno je analizom točnosti proračunatih razina vode na mjernim mjestima za koje postoje eksperimentalni podaci.

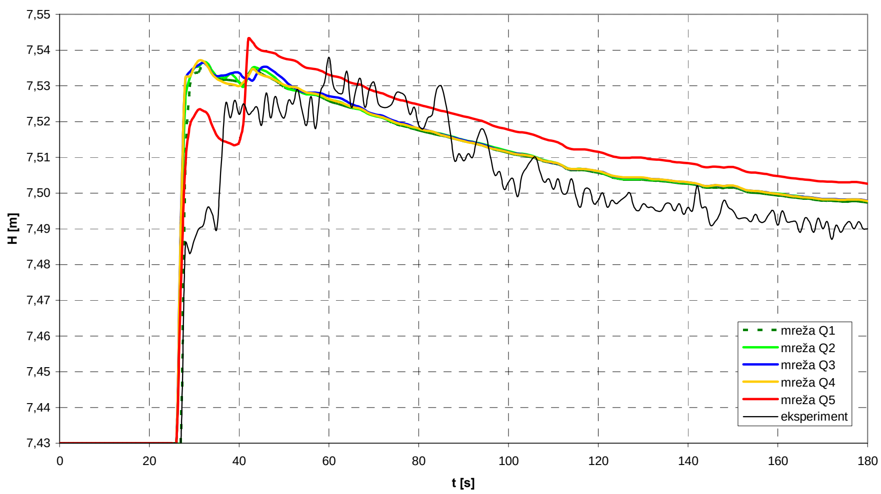
Iz proračunatih razina vodnog lica na odabranim mjernim mjestima (Tablica 6.4) konstruirani su hidrogrami koji pokazuju promjenu razine vodnog lica u vremenu. Usporedbe dobivenih hidrograma po izabranim mjernim mjestima za pet testiranih numeričkih mreža dane su na Slikama 6.33-6.42.



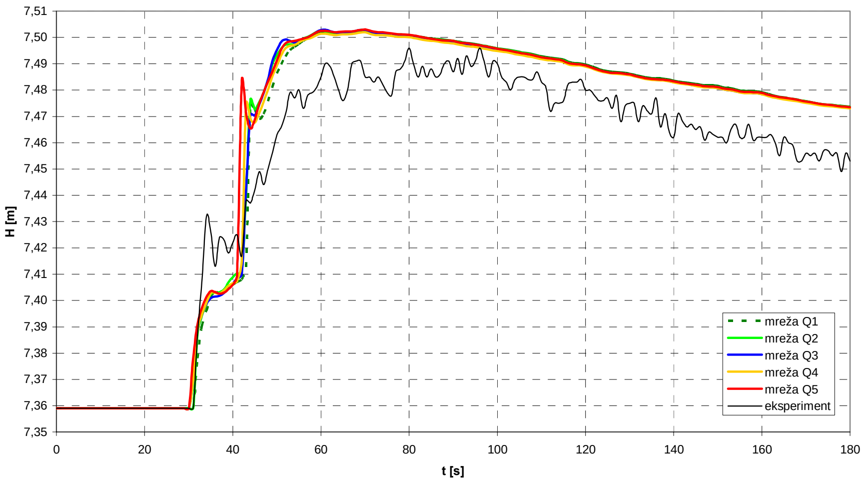
Slika 6.33. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki P1



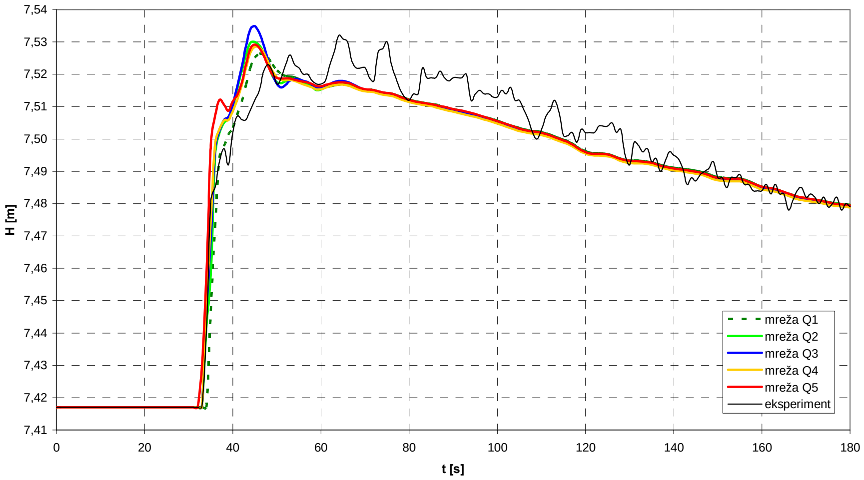
Slika 6.34. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki S4



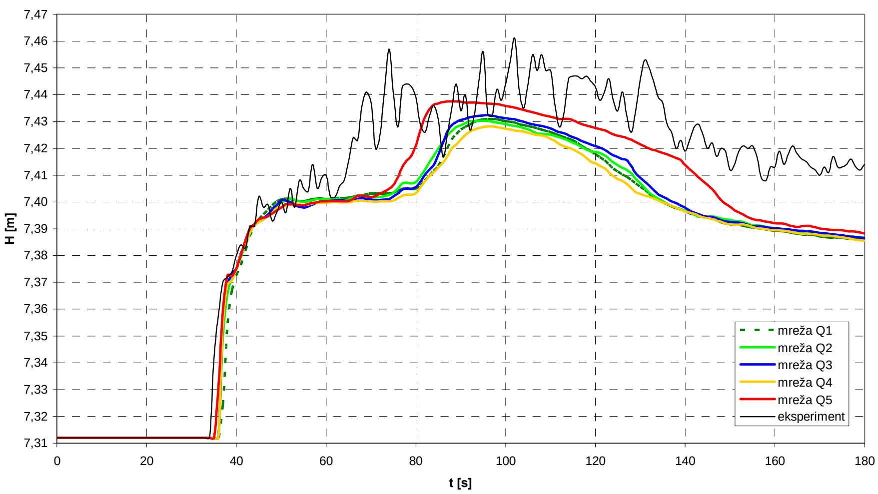
Slika 6.35. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki P5



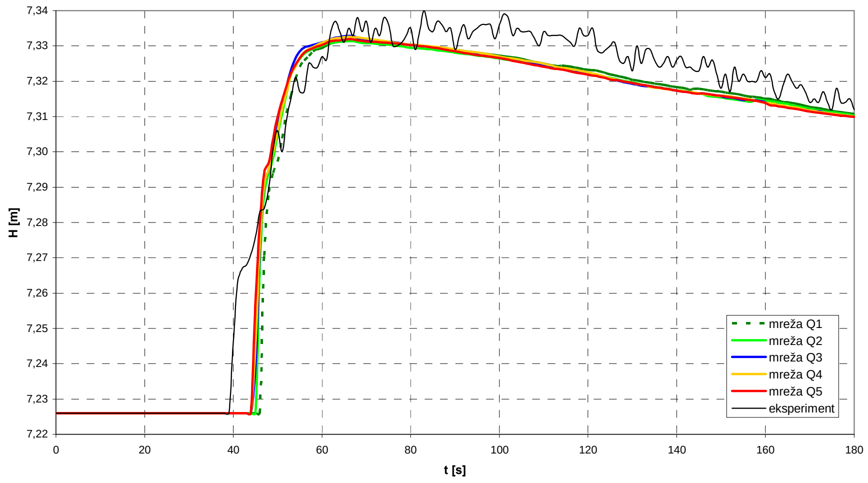
Slika 6.36. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki P8



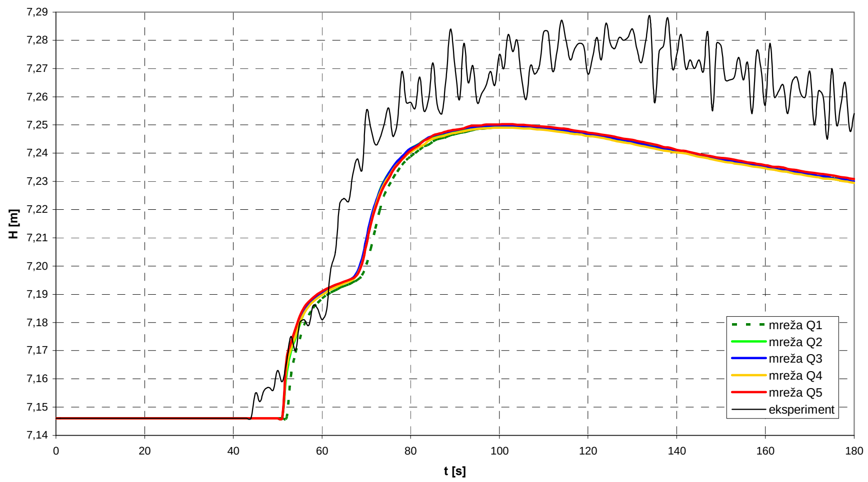
Slika 6.37. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki P9



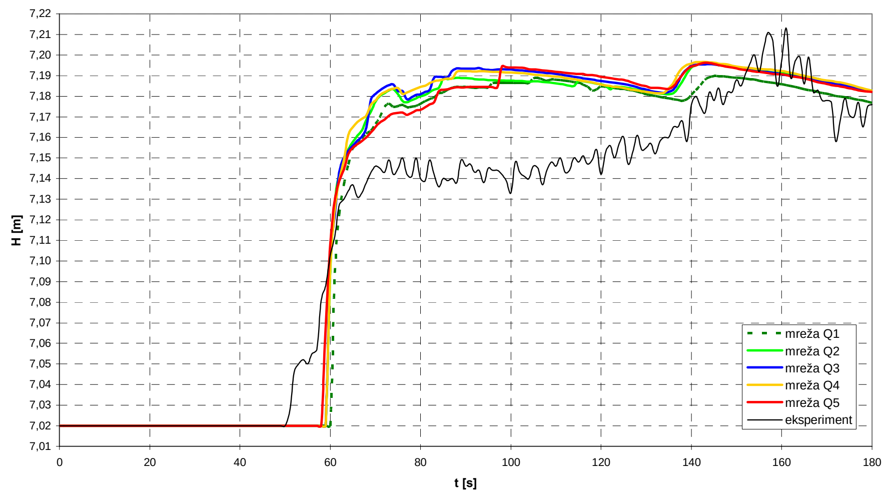
Slika 6.38. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki P13



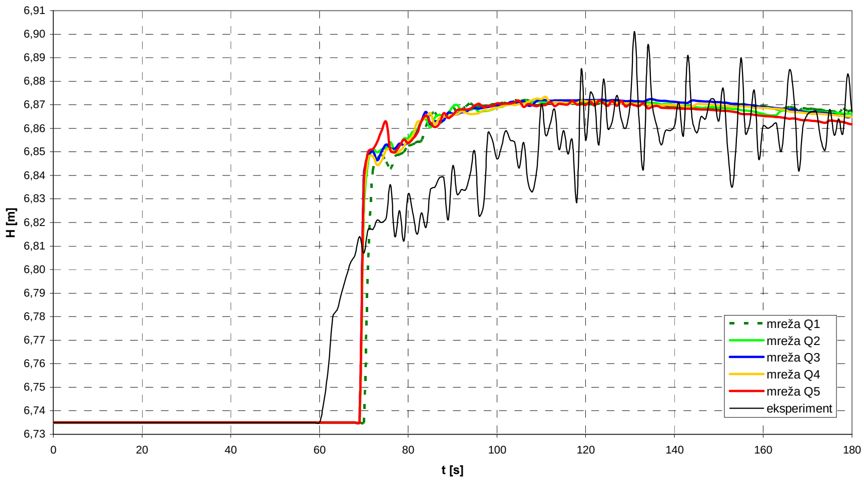
Slika 6.39. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki P19



Slika 6.40. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki P21



Slika 6.41. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki P23



Slika 6.42. Usporedba proračunatih i eksperimentalnih hidrograma na mjernoj točki P26

Gornji hidrogrami pokazuju da je poklapanje rezultata numeričkih simulacija i eksperimentalno izmjerenih vrijednosti u principu vrlo dobro, kao i kod test-primjera korištenog u podpoglavlju 6.1. Ovaj zaključak može se smatrati vrlo važnim zbog komparativne složenosti ovdje upotrijebljenog test-primjera, čija je geometrija neusporedivo zahtjevnija te stoga i djelomično pojednostavljena u numeričkom modelu (građevinski objekti nisu modelirani). Ima li se to na umu, vidljivo je da ovaj rezultat u potpunosti potvrđuje praktičnu primjenjivost modela plitkih voda.

Kao što je već komentirano u podpoglavlju 6.1.2, svrha modela plitkih voda nije rekonstrukcija visokofrekventnih oscilacija u mjerenim razinama vode. Stoga treba proračunate razine vodnog lica uspoređivati jedino sa usrednjenim (tj. filtriranim) vrijednostima razina vode u mjerenim hidrogramima.

Sustavno kašnjenje u vremenu dolaska poplavnog vala do nizvodnih mjernih mjesta očekivano je s obzirom na trenutne mogućnosti 2D modela plitkih voda. Ispitivanja pokazuju da 2D model plitkih voda podcjenjuje brzinu propagacije vodnog vala ([20]), što pokazuju i hidrogrami na Slikama 6.38-6.42.

Uvidom u izgled hidrograma prikazanih na Slikama 6.33-6.42 može se doći do sljedećih zaključaka o utjecaju kvalitete oblika ćelija numeričke mreže na proračunate vrijednosti razine vodnog lica:

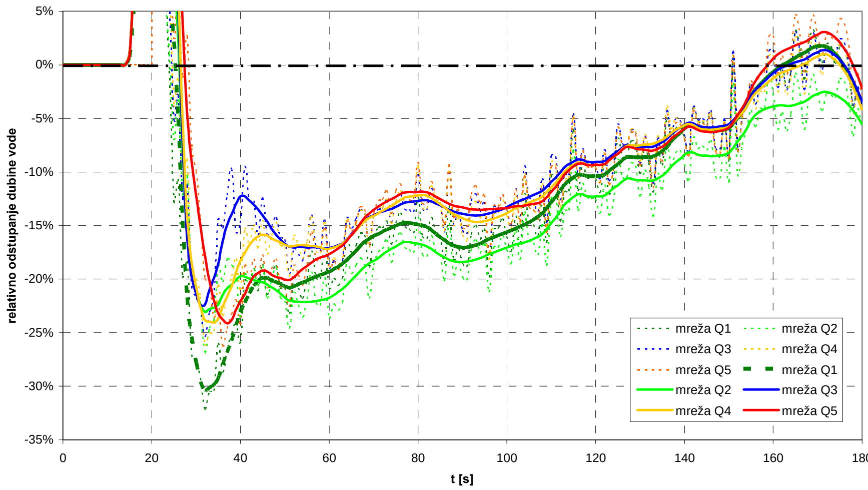
- Utjecaj oblika ćelija numeričke mreže na rezultate simulacija upotrebljenog test-primjera jasno je vidljiv, ali vrlo kompleksan te nije moguće ustanoviti jednostavne relacije u tom smislu.
- Smanjenje kvalitete oblika ćelija numeričke mreže ima za posljedicu blago, ali konzistentno povećanje brzine propagacije vodnog vala. Mada je ubrzanje gotovo zanemarivo (razlika dostiže najviše 2 s, što odgovara oko 3% brzine propagacije poplavnog vala za numeričku mrežu Q1), ono je sustavno prisutno na svim mjernim mjestima. Sa druge strane, najbolji rezultat CADAM-projekta za upravo ovdje korišteni test-primjer daje kašnjenje od 10 s prema ukupnom vremenu potrebnom za poplavljivanje cijele domene ([25]), što odgovara i ovdje dobivenim rezultatima (Slika 6.42). Stoga se može zaključiti da je ovo neočekivano svojstvo numeričkih mreža relativno nekvalitetnog oblika ćelija, mada donekle korisno, ipak marginalno i zanemarivo u odnosu na ozbiljan problem prespore propagacije poplavnog vala u 2D numeričkom modelu.
- Proračunati hidrogrami su, u principu, međusobno vrlo slični i bliski, što vrijedi i za mjerna mjesta na kojima se proračunate vrijednosti osjetno udaljavaju od izmjerenih (Slike 6.40 i 6.41). Ova činjenica pokazuje da je utjecaj oblika ćelija numeričke mreže na točnost rezultata proračuna relativno niskog reda veličine. U tom smislu može se i ovdje potvrditi

zaključak već iznesen u podpoglavlju 6.1.2.: odgovornost za točnost modela dominantno leži na matematičkom modelu odnosno numeričkoj shemi.

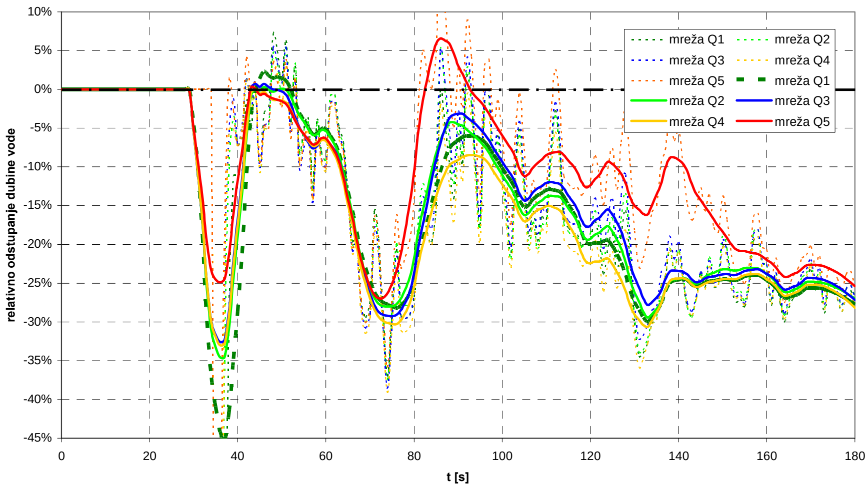
- Međusobnom usporedbom numerički dobivenih hidrograma može se vidjeti da se hidrogrami izračunati na numeričkoj mreži Q5 ponekad snažno udalje od ostalih, koji gotovo uvijek ostaju blizu jedan drugoga (Slike 6.35 i 6.38). Na osnovu toga može se zaključiti da numerička greška uslijed loše oblikovanih ćelija kod numeričke mreže Q5 dostiže značajan red veličine, dok je kod ostalih korištenih mreža bitno niža i praktički zanemariva. Kako numerička mreža Q5 ima najveći udio ćelija sa malim γ, ovaj rezultat može se interpretirati kao pokazatelj da bi numeričke mreže sa velikim udjelom loše oblikovanih ćelija mogle generirati veliku numeričku pogrešku.
- Ne postoji nikakva jasna globalna veza između kvalitete oblika ćelija numeričke mreže i proračunatih razina vodnog lica. Numerička mreža najniže kvalitete (Q5) na gore spomenutim mjernim mjestima daje vidljivo višu razinu vode od ostalih mreža, no ne može se govoriti o sustavnoj vezi između kvalitete numeričke mreže i proračunate razine vodnog lica.
- Oblik dobivenih hidrograma u principu nije osjetljiv na kvalitetu numeričke mreže. Iznimku donekle predstavlja najuzvodnija mjerna točka P1 (Slika 6.33), na kojoj je oblik hidrograma u prvih 15-ak sekundi od nailaska poplavnog vala pod vidljivim utjecajem numeričke mreže. S obzirom da se dotično mjerno mjesto nalazi najbliže ulaznoj granici, moguće je da relativno loš oblik ćelija numeričke mreže na neki način povećava osjetljivost modela na utjecaj ulaznog rubnog uvjeta.
- Visina čela poplavnog vala često je najveća za numeričku mrežu Q5 (pogotovo na uzvodnim mjernim točkama), ali rezultati dobiveni ostalim numeričkim mrežama ne potvrđuju postojanje eventualne zavisnosti između kvalitete numeričke mreže i visine čela vala.
- Pri kraju gotovo svih hidrograma proračunate vrijednosti razina vode snažno se približavaju (iznimke su mjerne točke P5, P23 i P26). To upućuje na zaključak da bi kod stacionarnih stanja (i strujanja sa sporijim tranzijentima) utjecaj oblika ćelija numeričke mreže na vrijednost razine vode trebao biti puno manji nego kod propagacije snažnih poplavnih valova. S obzirom da je u podpoglavlju 6.1.2. donesen isti zaključak o utjecaju gustoće numeričke mreže, može se ustvrditi da ovaj zaključak vrijedi i općenito za utjecaj parametara numeričke mreže na rezultat simulacija strujanja plitkih voda.

Kao i kod istraživanja utjecaja gustoće numeričke mreže, tako je i ovdje provedena kvantitativna analiza odstupanja proračunatih dubina vode od eksperimentom dobivenih vrijednosti.

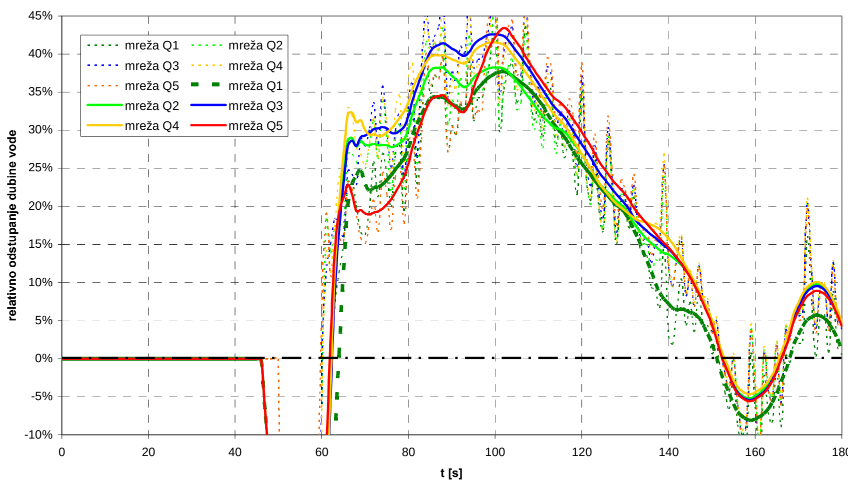
Dijagrami relativne pogreške dobivene po izrazu (6.1) za mjerna mjesta P1, P13 i P23 dani su na Slikama 6.43-6.45. Filtriranje dobivenih dijagrama relativnog odstupanja proračunate dubine vode od eksperimentalnih podataka provedeno je na način koji je već korišten i opisan u podpoglavlju 6.1.2.



Slika 6.43. Relativna greška proračunatog vodnog lica na mjernoj točki P1



Slika 6.44. Relativna greška proračunatog vodnog lica na mjernoj točki P13



Slika 6.45. Relativna greška proračunatog vodnog lica na mjernoj točki P23

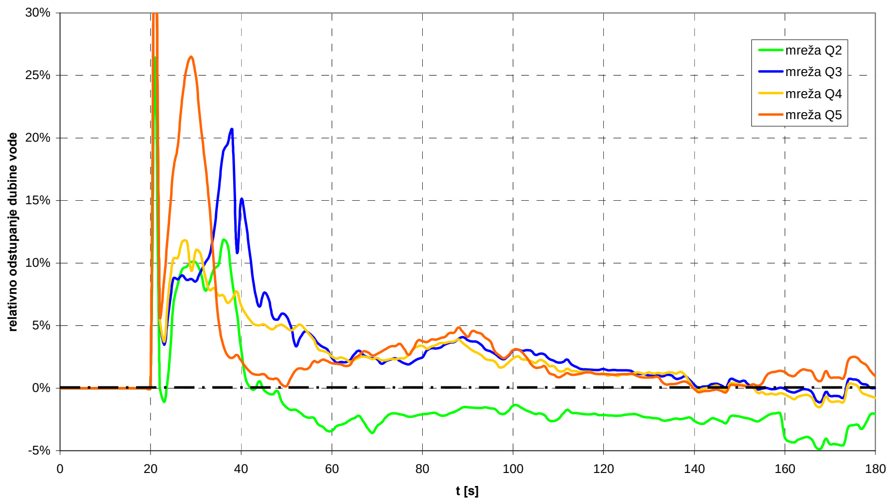
Vrijednosti relativne pogreške u proračunatim dubinama vode, koje su prikazane na gornjim dijagramima, treba pažljivo interpretirati. Mada je ovaj test-primjer temeljen na realnom strujanju u dolini rijeke Toce, ipak se radi o rekonstrukciji eksperimenta provedenog na fizikalnom modelu dotične doline. Stoga su dobivene vrijednosti dubina vode (maksimum je 0,20 m, Slika 6.41) ipak mnogo manje od tipičnih vrijednosti kod realnih problema, koje obično iznose po više metara. Iz tog razloga nije moguće točnost ovdje diskutiranih rezultata smatrati općenito važećom za model plitkih voda.

Velika relativna greška prisutna na početku svih dijagrama uzrokovana je vremenskim pomakom između trenutka nailaska poplavnog vala dobivenog numeričkim modelom i onog izmjerenog u eksperimentu. Tako i relativno malo nepoklapanje u vremenskoj dimenziji ima za posljedicu snažnu pogrešku u proračunatim dubinama vode. U tom smislu može se potpuno zanemariti relativno odstupanje dubine vode na početku hidrograma, što je, radi preglednosti, učinjeno i na dijagramima na Slikama 6.43 i 6.45.

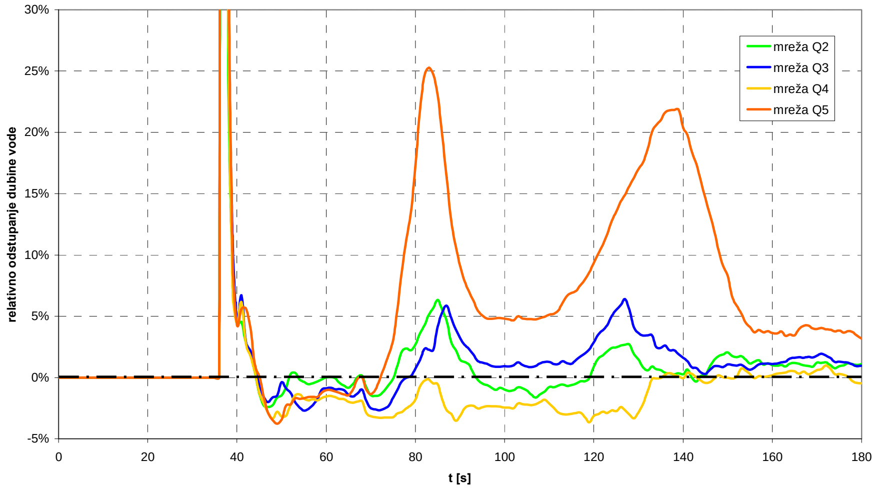
Na osnovu dijagrama prikazanih na Slikama 6.43-6.45 može se utvrditi da se relativna pogreška numeričkog modela za ovaj test-primjer kreće u intervalu -30% do +45%. Takav rezultat je potpuno u skladu sa rezultatima dobivenim u sklopu CADAM-projekta ([25]) te se, kao takav, može smatrati vrlo dobrim, tim više ako se uzme u obzir oblik proračunatih hidrograma, koji je uglavnom uspješno rekonstruiran. Dobru ocjenu dobivenih rezultata omogućuje i zahtjevnost samog test-primjera te činjenica da su građevinski objekti u numeričkom modelu potpuno zanemareni.

Analizom dijagrama danih na Slikama 6.43-6.45 te hidrograma prikazanih na Slikama 6.33-6.42, može se zaključiti da je utjecaj kvalitete oblika ćelija numeričke mreže na točnost rezultata simulacija vrlo kompleksan. Mada je očito da postoji određen utjecaj oblika ćelija numeričke mreže na rezultat simulacija, nije moguće utvrditi nikakvu konzistentnu zavisnost između udjela loše oblikovanih ćelija i točnosti proračunatih dubina vode.

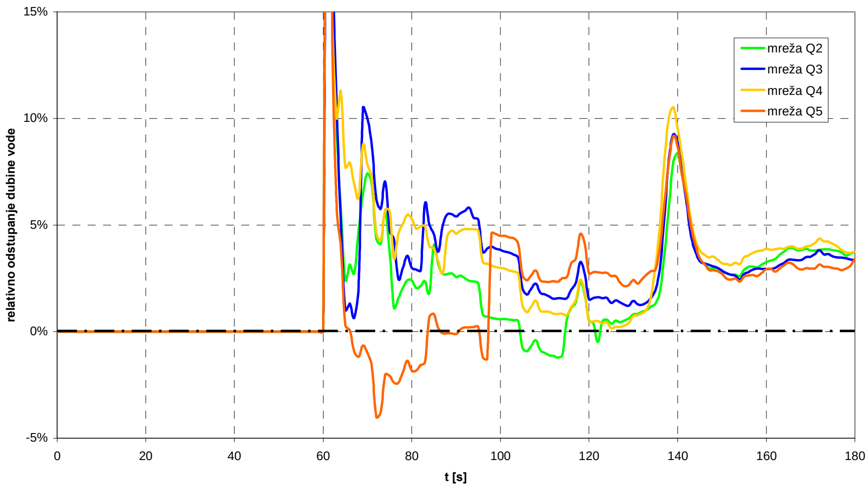
S obzirom da postoji referentna numerička mreža najbolje moguće kvalitete (Q1), korisno je usporediti rezultate dobivene na njoj sa onima dobivenim na ostalim testiranim numeričkim mrežama. Ova usporedba provedena je na isti način kao i kod gornjih dijagrama (Slike 6.43-6.45), a time su dobivene relativne vrijednosti odstupanja proračunatih dubina vode dobivenih na numeričkim mrežama Q2-Q5 od onih dobivenih na mreži Q1. Kako kod ovih dijagrama nema snažnijih visokofrekventnih oscilacija, nije bilo potrebno provoditi zaglađivanje podataka. Dijagrami za mjerna mjesta P1, P13 i P23 dobiveni opisanim postupkom prikazani su na Slikama 6.46-6.48.



Slika 6.46. Relativno odstupanje dubine vode od rezultata za mrežu Q1, na mjernoj točki P1



Slika 6.47. Relativno odstupanje dubine vode od rezultata za mrežu Q1, na mjernoj točki P13



Slika 6.48. Relativno odstupanje dubine vode od rezultata za mrežu Q1, na mjernoj točki P23

Iz već više puta navedenog razloga, snažan skok u odstupanju proračunate dubine vode vidljiv na početku gornjih dijagrama može se potpuno zanemariti.

Analizom dijagrama na Slikama 6.46-6.48, može se doći do sljedećih zaključaka o utjecaju kvalitete oblika ćelija numeričke mreže na odstupanje vodnog lica:

- Numerička mreža sa najvećim udjelom nekvalitetno oblikovanih ćelija (Q5) daje uglavnom najveće odstupanje od rezultata dobivenih na inicijalnoj mreži.
- Nekvalitetne numeričke mreže imaju za posljedicu pretežno precjenjivanje razine vodnog lica. Intenzitet tog precjenjivanja nije direktno u funkciji udjela ćelija sa malim minimalnim unutarnjim kutom γ.
- Utjecaj oblika ćelija numeričke mreže na proračunate vrijednosti dubine vode kreće se u intervalu od -5% do +25%. Ovaj raspon indicira osjetljivost modela na kvalitetu numeričke mreže koja, kao takva, nije zanemariva, ali je bitno manja od mjere odstupanja rezultata numeričkog modela od realnih podataka.
- Najbolji rezultat daje mreža Q2, što je s obzirom na njenu kvalitetu oblika ćelija i očekivano. Mreže Q3 i Q4 daju rezultate vrlo slične točnosti, koja nije bitno niža od rezultata dobivenog na mreži Q2.

Proračunati hidrogrami po mjernim mjestima mogu se statističkom analizom usporediti sa eksperimentalnim vrijednostima. Računanjem po izrazu (6.2) dobije se standardna pogreška koja daje srednje odstupanje proračunatog hidrograma od izmjerenog hidrograma. U Tablici 6.6 dane su vrijednosti standardne pogreške i njene relativne vrijednosti prema srednjoj dubini vode izmjerenoj u eksperimentu, za 10 korištenih mjernih mjesta odnosno pet testiranih numeričkih mreža.

Tablica 6.6. Standardna pogreška po mjernim mjestima za korištene numeričke mreže

Numer. mreža	Q1		Q2		Q3		Q4		Q5	
Mjerna točka	ΔH_{SG} [m]	$\Delta H_{SG}/\bar{h}_{eksp}$ [%]	ΔH_{SG} [m]	$\Delta H_{SG}/\bar{h}_{eksp}$ [%]	ΔH_{SG} [m]	$\Delta H_{SG}/\bar{h}_{eksp}$ [%]	ΔH_{SG} [m]	$\Delta H_{SG}/\bar{h}_{eksp}$ [%]	ΔH_{SG} [m]	$\Delta H_{SG}/\bar{h}_{eksp}$ [%]
P1	0,005571	10,22527	0,005137	9,428994	0,005959	10,93723	0,006122	11,23656	0,006685	12,26964
S4	0,005578	17,14367	0,00618	18,99486	0,006424	19,74474	0,006359	19,54368	0,006488	19,9401
P5	0,009687	26,67101	0,010607	29,20278	0,011015	30,32643	0,01099	30,2592	0,00846	23,29242
P8	0,00941	13,47264	0,00929	13,30155	0,009453	13,53378	0,009175	13,13581	0,010217	14,62787
P9	0,005495	5,422655	0,005782	5,706608	0,006089	6,009443	0,005444	5,372525	0,006185	6,104044
P13	0,010538	15,62917	0,010152	15,0569	0,010363	15,37051	0,009789	14,51892	0,010307	15,28756
P19	0,00856	11,78741	0,00792	10,90897	0,007753	10,67909	0,007484	10,30808	0,007425	10,22704
P21	0,007459	6,054286	0,007401	6,007603	0,007442	6,040503	0,007344	5,96147	0,007526	6,108962
P23	0,021731	30,76943	0,019951	28,24831	0,021287	30,14078	0,020794	29,44189	0,019508	27,62178
P26	0,020066	32,6758	0,019663	32,01821	0,019602	31,9202	0,019519	31,78458	0,020078	32,69512
Srednja vrijednost	**0,0104**	**16,99**	**0,0102**	**16,89**	**0,0105**	**17,47**	**0,0103**	**17,16**	**0,0103**	**16,82**

U gornjoj tablici vidljivo je da je utjecaj kvalitete oblika ćelija relativno vrlo mali, tj. bitno nižeg reda veličine od integralne točnosti numeričkog modela. Statistička se pogreška proračunatih razina vode sa povećanjem udjela ćelija sa malim γ mijenja, no relativno vrlo malo (±1%) i ne pokazuje sustavan rast. Slabim utjecajem kvalitete oblika ćelija treba tumačiti i ukupno najmanju srednju standardnu pogrešku dobivenu na numeričkoj mreži sa najnižom kvalitetom oblika ćelija (Q5).

Moguće je izračunati i standardnu pogrešku hidrograma proračunatih numeričkim mrežama Q2-Q5 u odnosu na hidrograme dobivene referentnom najkvalitetnijom mrežom Q1. Ova standardna pogreška ($\Delta H_{SG,Q1}$) također se računa po izrazu (6.2), s time da se, umjesto sa vrijednostima razine vodnog lica iz eksperimenta, računa sa vrijednostima dobivenim za numeričku mrežu Q1. Relativna vrijednost $\Delta H_{SG,Q1}$ dobiva se normiranjem na srednju dubinu vode proračunatu na numeričkoj mreži Q1 ($\bar{h}_{Q1}$). Na ovaj način dobivene vrijednosti standardne pogreške dane su u Tablici 6.7.

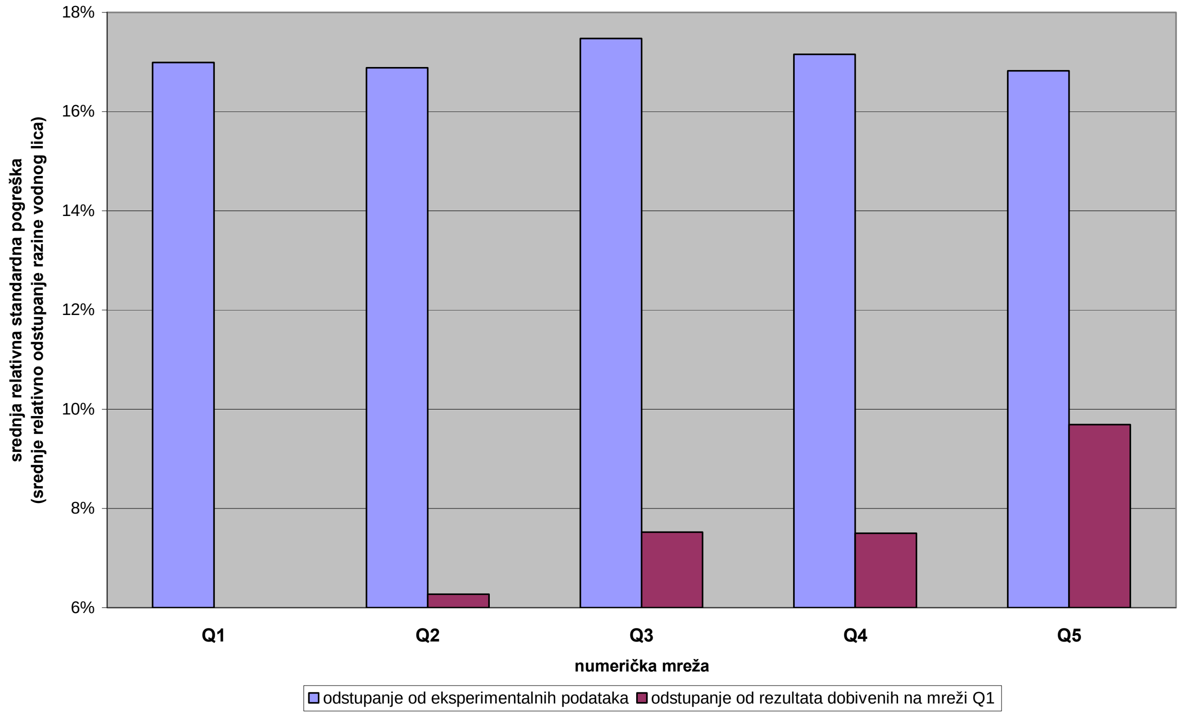
Tablica 6.7. Standardna pogreška za numeričke mreže Q2-Q5 prema rezultatu numeričke mreže Q1, po mjernim mjestima

Numerička mreža	Q2		Q3		Q4		Q5	
Mjerna točka	$\Delta H_{SG,Q1}$ [m]	$\Delta H_{SG,Q1}/\bar{h}_{Q1}$ [%]	$\Delta H_{SG,Q1}$ [m]	$\Delta H_{SG,Q1}/\bar{h}_{Q1}$ [%]	$\Delta H_{SG,Q1}$ [m]	$\Delta H_{SG,Q1}/\bar{h}_{Q1}$ [%]	$\Delta H_{SG,Q1}$ [m]	$\Delta H_{SG,Q1}/\bar{h}_{Q1}$ [%]
P1	0,002386	4,380091	0,004214	7,735509	0,003852	7,069583	0,004634	8,50627
S4	0,002717	8,35047	0,003059	9,402535	0,003002	9,227539	0,00301	9,25082
P5	0,003969	10,92689	0,005028	13,84247	0,004936	13,58942	0,006452	17,76404
P8	0,00258	3,694306	0,003004	4,301565	0,004884	6,993127	0,007343	10,51377
P9	0,003154	3,112461	0,003986	3,933951	0,003918	3,866763	0,005862	5,78549
P13	0,002468	3,660079	0,002957	4,385852	0,002711	4,020318	0,006637	9,844314
P19	0,003622	4,988757	0,004252	5,856277	0,00435	5,992084	0,005252	7,2335
P21	0,002025	1,643481	0,002313	1,877228	0,002114	1,71634	0,002284	1,853628
P23	0,006812	9,645757	0,006973	9,873365	0,006836	9,678407	0,008436	11,9444
P26	0,007542	12,28175	0,008588	13,9837	0,007886	12,84191	0,008732	14,21875
Srednja vrijednost	**0,0037**	**6,27**	**0,0045**	**7,52**	**0,0044**	**7,50**	**0,0059**	**9,69**

Tek na osnovu ove analize postaje jasno vidljivo da se sa kvarenjem kvalitete numeričke mreže sustavno kvari točnost rezultata simulacija. Činjenica da numeričke mreže Q3 i Q4 daju približno jednaku grešku pokazuje da je priroda osjetljivosti numeričkog modela na loše oblikovane ćelije numeričke mreže vrlo složena, što onemogućava postavljanje jednostavnog praktičnog kriterija kvalitete numeričke mreže.

Najveća mjera numeričke greške dobivena je za mrežu sa najvećim udjelom ćelija sa malim γ (Q5) i treba očekivati nastavak njenog rasta za numeričke mreže sa još više takvih ćelija. No, važno je primijetiti da čak i dotična numerička mreža u prosjeku uzrokuje grešku u proračunatim razinama vodnog lica manju od 10% u odnosu na rezultat dobiven s najboljom mogućom mrežom. Rezultati ovog test-primjera pokazuju da je opća netočnost numeričkog modela bitno veća (oko 17%), što omogućava donošenje zaključka da umjereno loša kvaliteta numeričke mreže ne predstavlja veću opasnost po točnost rezultata simulacija, što je, uostalom, vidljivo i iz proračunatih hidrograma (Slike 6.33-6.42).

Dijagram na Slici 6.49 još jednom pokazuje rezultat iz Tablica 6.6 i 6.7 te jasno ilustrira relativnu i apsolutnu osjetljivost proračunatih razina vodnog lica na loš oblik ćelija numeričke mreže.



Slika 6.49. Osjetljivost numeričkog modela na loš oblik ćelija numeričke mreže

Treba napomenuti da bi za potpunu analizu bilo potrebno testirati i numeričke mreže sa vrlo velikim udjelom uskih ćelija, jer i najlošija ovdje korištena mreža (Q5) ima „tek“ oko 21,5% ćelija sa minimalnim unutarnjim kutom γ < 30°. Ipak, kako ni automatski generatori mreže, kao ni ispravno proveden cjelokupni standardni postupak izgradnje numeričke mreže (detaljno opisan u 4. poglavlju) najčešće neće generirati veliki broj loše oblikovanih ćelija, ovaj prag može se smatrati dobro odabranim.

6.2.3. Zaključak

Nepostojanje strožih *a priori* kriterija kvalitetnog oblika ćelija numeričke mreže predstavlja ozbiljan problem u praktičnoj primjeni numeričkog modeliranja strujanja plitkih voda. U tipičnom slučaju sam je proces izgradnje numeričke mreže modeliranog područja vrlo zahtjevan i bez posebnog obraćanja pažnje na kvalitetu oblika ćelija. Stoga se u praksi kontrola oblika ćelija numeričke mreže prepušta iskustvu i intuiciji osobe koja izrađuje mrežu te algoritmima za identifikaciju loše oblikovanih ćelija (obično se prepoznaju uski trokuti) i njihov popravak metodama relaksacije i sl. koji mogu biti integrirani u softver za generiranje mreže.

Metodologija koja upućuje da se loš oblik ćelija često može popraviti jednostavnim lokalnim ugušćivanjem numeričke mreže od male je praktične koristi iz istog razloga kao i određivanje optimalne gustoće numeričke mreže eksperimentalnim simulacijama na sve gušćim mrežama. Naime, takav iterativni način utvrđivanja optimalno kvalitetne numeričke mreže računski je vrlo zahtjevan i nepraktičan.

Možda najveći problem predstavlja činjenica da postoji vrlo malo istraživanja utjecaja oblika ćelija numeričke mreže na točnost rezultata simulacija u kontekstu realnih problema. To može dati dojam da je taj problem minorne važnosti, ali također ostavlja određenu nesigurnost u tom smislu.

Teoretska analiza tvrdi da je pogreška zaokruživanja u numeričkoj shemi uslijed nepotpunih razvoja u Taylorov red općenito jednakog reda veličine kao i pogreška diskretizacije ([32]). To u praktičnom smislu znači da gušće mreže smanjuju osjetljivost na minimalni kut ćelija numeričke mreže, što rezultati određenih istraživanja i potvrđuju ([21]). Rezultati dobiveni u ovom radu pokazuju da utjecaj kuta, mada relativno slab, može biti jasno vidljiv čak i kod vrlo gustih mreža, kakva je upotrijebljena u korištenom test-primjeru.

Ovdje dobiveni rezultati pokazuju da relativno nekvalitetno oblikovana numerička mreža može osjetno kvariti točnost rezultata, mada nije za očekivati da će tako uzrokovana numerička greška predstavljati značajan dio integralne pogreške numeričkog modela. Da bi se ovaj zaključak što jasnije ilustrirao, potrebno je kvalitetu cjelokupne numeričke mreže definirati jedinstvenim parametrom. Najjednostavnija mogućnost je izražavanje kvalitete numeričke mreže pomoću prosječne vrijednosti γ za cijelu mrežu, no takav parametar ne govori ništa o razdiobi vrijednosti γ. Stoga se predlaže uvođenje parametra G_{15}, definiranog kao ekvivalentni udio ćelija sa najmanjim unutarnjim kutom γ = 15° (takve ćelije se objektivno može smatrati uskima) koji, ukupno gledano, uzrokuje numeričku grešku jednaku kao i sve ćelije sa $\gamma \leq 30°$ zajedno:

$$M_\gamma(15°)\cdot G_{15} = \sum_i M_\gamma(\gamma_i)\cdot N_i$$

gdje je N_i – broj ćelija sa vrijednosti $\gamma = \gamma_i \leq 30°$. S obzirom da su za korištene numeričke mreže poznati brojevi ćelija sa $\gamma \in \langle 20°,30°]$, $\gamma \in \langle 10°,20°]$ i $\gamma \in \langle 0°,10°]$, gornji izraz računat će se na sljedeći način:

$$M_\gamma(15°)\cdot G_{15} = M_\gamma(25°)\cdot N_{\langle 20°,30°]} + M_\gamma(15°)\cdot N_{\langle 10°,20°]} + M_\gamma(5°)\cdot N_{\langle 0°,10°]},$$

gdje je $N_{\langle \gamma_1,\gamma_2]}$ – broj ćelija numeričke mreže sa $\gamma \in \langle \gamma_1,\gamma_2]$. Uvede li se u gornji izraz definicija mjere numeričke greške M_γ (6.4), on poprima sljedeći oblik:

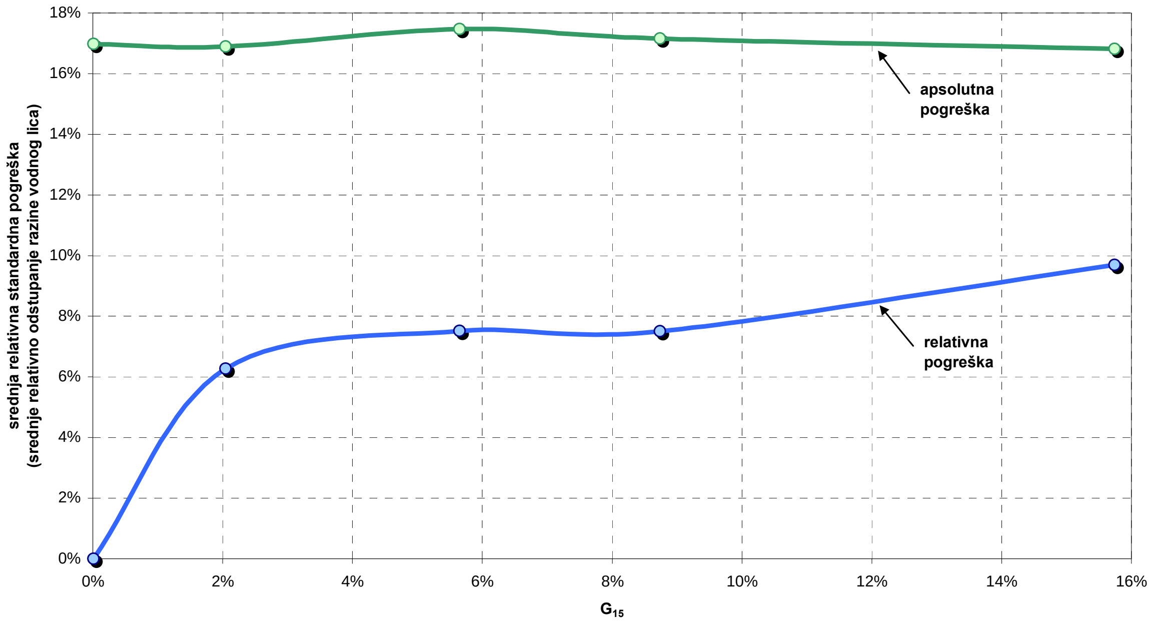
$$\frac{G_{15}}{\sin 15°} = \frac{N_{\langle 20°,30°]}}{\sin 25°} + \frac{N_{\langle 10°,20°]}}{\sin 15°} + \frac{N_{\langle 0°,10°]}}{\sin 5°}. \tag{6.5}$$

Na osnovu izraza (6.5) dobivene su vrijednosti G_{15} za svih pet testiranih numeričkih mreža, koje su iznesene u Tablici 6.8.

Tablica 6.8. Vrijednosti parametra G_{15} za korištene numeričke mreže

Numerička mreža	Ekvivalentni udio ćelija sa γ = 15° G_{15} [%]
Q1	0,01
Q2	2,05
Q3	5,65
Q4	8,74
Q5	15,74

Korištenjem parametra G_{15} može se na osnovu rezultata dobivenih u korištenom test-primjeru pokazati utjecaj najmanjeg kuta ćelija na srednju ukupnu pogrešku rezultata numeričkog modela. Tako dobivene krivulje za apsolutnu numeričku grešku te onu relativnu s obzirom na rezultat dobiven numeričkom mrežom Q1, prikazane su na dijagramu na Slici 6.50.



Slika 6.50. Utjecaj suženosti ćelija numeričke mreže na pogrešku numeričkog modela

Treba napomenuti da gore dobivene krivulje nije moguće koristiti za opću procjenu utjecaja prisutnosti ćelija numeričke mreže sa malim unutarnjim kutom na točnost rezultata simulacija, jer bi za tako nešto bilo potrebno provesti veliki broj simulacija na raznovrsnim test-primjerima. Ipak, gornji dijagram pokazuje da se sa porastom udjela loše oblikovanih ćelija rezultat vidljivo udaljava od onog dobivenog na numeričkoj mreži bez loše oblikovanih ćelija.

Također, vidljivo je da apsolutna točnost numeričkog modela na korištenom test-primjeru nije bitno osjetljiva na kvarenje oblika ćelija numeričke mreže, tj. ne pokazuje osjetljivost za udio loše oblikovanih ćelija $G_{15} \leq 16\%$. Eventualno moguće osjetnije kvarenje točnosti rezultata za veće udjele loše oblikovanih ćelija numeričke mreže zahtijeva daljnje istraživanje, no u području praktičnog numeričkog modeliranja strujanja plitkih voda nije za očekivati korištenje tako loše generiranih numeričkih mreža. U slučaju da se postupkom izrade numeričke mreže dobije veliki udio uskih ćelija, on se može smanjiti metodama relaksacije.

Dijagram na Slici 6.50, između ostalog, pokazuje i da relativno mali broj loše oblikovanih ćelija ($G_{15} \approx 2\%$) uzrokuje mjerljivu promjenu u rezultatu simulacija. Mada je ta promjena bitno nižeg reda veličine od ukupne točnosti numeričkog modela, ona ilustrira postojanje određene labilnosti numeričkog modela naspram prisustva loše oblikovanih ćelija u numeričkoj mreži.

Na kraju se može zaključiti da utjecaj oblika ćelija numeričke mreže na točnost rezultata simulacija strujanja plitkih voda predstavlja vrlo kompleksan problem koji nije moguće do kraja riješiti jednostavnim analizama, što potvrđuju i rezultati drugih istraživanja. (Istraživanje provedeno u [21] pokazuje da proračunate brzine strujanja i dubine vode pokazuju sličnu osjetljivost na oblik ćelija numeričke mreže, što eliminira mogućnost neprimjerenosti temeljenja ovakve analize samo na proračunatim razinama vodnog lica.)

Nepostojanje znatne numeričke greške uzrokovane lošom kvalitetom oblika ćelija može se sa sigurnosti utvrditi jedino *a posteriori*: eksperimentalnim simulacijama na numeričkim mrežama različitog stupnja relaksiranosti. S obzirom da ograničeni računalni resursi takav postupak najčešće čine potpuno neprimjerenim, potrebno je što pažljivije provesti postupak izgradnje numeričke mreže prije provođenja simulacija.

Standardni postupak izrade numeričke mreže neće imati za posljedicu značajan udio loše oblikovanih ćelija, a ovdje provedena analiza pokazuje da numerički model neće biti bitno osjetljiv na oblik ćelija tako dobivene numeričke mreže. Stoga se može zaključiti da se praktična upotreba numeričkih mreža umjerene (standardne) kvalitete može smatrati primjerenom i pouzdanom.

7. Zaključak

Praktična primjenjivost numeričkih simulacija strujanja u vodotocima sa slobodnom površinom vrlo je velika, tim više što su one bitno jeftinije i jednostavnije za provedbu od simulacija na tradicionalnim fizikalnim modelima. Iz tog razloga, upotreba računalnih alata za numeričko simuliranje temeljenih na matematičkom modelu plitkih voda postaje standard za modeliranje strujanja u rijekama i kanalima te modeliranje propagacije poplavnih valova. To ne bi bilo moguće bez intenzivnog razvoja numeričkih shema i napretka informatičke tehnologije koja omogućava razvoj softverskih rješenja i komercijalnih računalnih alata.

Po nekim procjenama, s obzirom na današnji visok stupanj razvijenosti numeričkih shema, čak 80% odgovornosti za točan rezultat numeričkog modela strujanja u plitkim vodama leži na dobrom modeliranju poplavnog područja, numeričkoj mreži te rubnim uvjetima ([10]). Ovaj podatak ilustrira značaj numeričke mreže za pouzdanost numeričkog modela i opravdava izradu ovakvog rada na temu utjecaja parametara numeričke mreže na točnost rezultata simulacija strujanja plitkih voda.

Zbog kompleksnosti problematike numeričkog modeliranja i specifičnosti numeričkog modela svakog pojedinog problema, *a priori* kriteriji za dovoljno gustu i dovoljno kvalitetno oblikovanu numeričku mrežu ne postoje. Kako se integralna kvaliteta numeričke mreže može mjeriti jedino na osnovu točnosti rezultata simulacije, u praksi ju se ne može ocijeniti dok se simulacija ne provede. Činjenica da u praksi najčešće nema mjerenih podataka o slici strujanja koju se numeričkim modelom želi rekonstruirati, čini ovaj problem još većim.

U ovom je radu izvršen sustavni pregled tehnologije numeričkog modeliranja strujanja plitkih voda na svim njenim razinama: od matematičkog modela, numeričke sheme, softvera, pa do postupka izgradnje numeričke mreže. U drugom dijelu rada uspješno je provedena analiza utjecaja gustoće i kvalitete oblika ćelija numeričke mreže na rezultat simulacija, koja je omogućila donošenje određenih zaključaka.

Ispitivanjem osjetljivosti numeričkog modela plitkih voda na rezoluciju numeričke mreže ustanovljeno je da:

- gustoća numeričke mreže sama po sebi slabo utječe na točnost modela, što ide u prilog pouzdanosti i robusnosti cjelokupnog numeričkog modela
- pretjerano ugušćivanje numeričke mreže može smanjiti točnost modela, vjerojatno zbog nagomilavanja numeričke greške
- optimalna gustoća numeričke mreže može biti vrlo niska (za korišteni test-primjer ona iznosi oko 5 čvorova numeričke mreže po širini pravokutnog kanala), dok god ona kao takva omogućava dobro modeliranje topografije domene

Na osnovu ovih zaključaka može se optimalnom početnom numeričkom mrežom smatrati ona mreža koja sa minimalnim brojem ćelija dovoljno detaljno i točno opisuje topografiju poplavnog područja, a ujedno njena rezolucija omogućuje dobro opisivanje bitnih šok-valova.

Analiza utjecaja kvalitete oblika ćelija numeričke mreže na rezultat numeričkog modela plitkih voda pokazala je da:

- način utjecaja loše oblikovanih ćelija numeričke mreže na rezultat simulacija vrlo je složen i nepredvidljiv i u tom smislu nema očitih jednostavnih pravilnosti
- čak i relativno mali broj uskih ćelija (u korištenom test-primjeru 2%) uzrokuje mjerljivu promjenu u rezultatu simulacija; iako je njen utjecaj na globalnu točnost numeričkog modela

zanemariv, ona ukazuje na određenu labilnost numeričkog modela naspram prisustva loše oblikovanih ćelija u numeričkoj mreži

- porast broja ćelija sa malim najmanjim kutom u načelu ima za posljedicu povećanje numeričke greške uzrokovane numeričkom mrežom, ali je ona ispod reda veličine globalne točnosti numeričkog modela (za korišteni test-primjer, 16% uskih ćelija uzrokuje relativnu standardnu pogrešku u proračunatoj dubini vode od oko 10%, dok globalna pogreška iznosi oko 17%)

Na osnovu gornjih zaključaka može se ustvrditi da numerička mreža zadovoljavajuće kvalitete, koju se može realno očekivati kao proizvod standardnog postupka izrade numeričke mreže, može donekle kvariti točnost rezultata. No, nije za očekivati da će numerička greška uzrokovana relativno malim brojem loše oblikovanih ćelija numeričke mreže značajno smanjiti globalnu točnost cjelokupnog numeričkog modela. Na osnovu toga se praktična upotreba numeričkih mreža standardne kvalitete može smatrati primjerenom i pouzdanom.

Ovdje treba napomenuti da zaključke iznesene u gornjem tekstu nije moguće smatrati konačnima niti ih koristiti za definiranje univerzalnih kriterija dobro oblikovane numeričke mreže za dvodimenzionalni numerički model plitkih voda. Za tako nešto bilo bi potrebno provesti veliki broj simulacija na mnoštvu raznovrsnih test-primjera, kao i temeljitu teoretsku analizu numeričke pogreške za razne varijante diskretizacijskih metoda i numeričkih shema.

Između ostalog, rezultati prezentirani u ovom radu pokazuju da ovo relativno novo i dinamično znanstveno područje daje izvrsna i vrlo primjenjiva dostignuća. Intenzivan razvoj i stalne inovacije rješavaju prijašnje teškoće te otvaraju nove i veće mogućnosti, u sklopu čega se javljaju i pitanja na koja je ovaj rad pokušao barem djelomično odgovoriti.

Objektivna složenost problematike utjecaja parametara numeričke mreže na točnost rezultata modela plitkih voda zahtijeva daljnje istraživanje u tom smjeru, kako na teoretskoj razini, tako i na području praktične primjene.

8. Literatura

[1] Alcrudo, F., *Sensitivity analysis of Toce river dam break flood simulation performed with sw2d code*, Proceedings of the CADAM meetings, Wallingford, Munich, Milan, Zaragoza, 1998-1999.

[2] Bermudez, A., Derviex, A., Desideri, J.-A., Vazquez, M. E., *Upwind Schemes for the Two-Dimensional Shallow Water Equations with Variable Depth Using Unstructured Meshes*, Rapport de recherche No 2738, INRIA, Sophia Antipolis, 1995.

[3] Berzins, M., Durbeck, L. J. K., *Unstructered Mesh Solvers for Hyperbolic PDEs with Source Terms: Error Estimates and Mesh Quality*, iz "Godunov Methods: Theory and Applications Conference and Short Course", Numeritek Ltd., Oxford, 1999.

[4] Berzins, M., Jimack, P. K., Walkley, M., *Mesh Quality and Moving Meshes for 2D and 3D Unstructured Mesh Flow Solvers*, iz "31st Lecture Series on Computational Fluid Mechanics", Von Karman Institute for Fluid Mechanics, (Eds) N.P.Weatherill and H.Deconink, Rhode st Genessee, Brussels, 2000.

[5] Brufau, P., Garcia-Navarro, P., *Two-dimensional Dam Break Flow Simulation*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 33, pp. 35-57, 2000.

[6] CADAM CD ROM, ed. Soares Frazao, S., Morris, M. W., Zech, Y., Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, 2000.

[7] *CADAM: Dambreak Modelling – Guidelines and Best Practice*, ed. Morris, M. W., J. C. Galland, HR Wallingford, Wallingford, 1999.

[8] Chaudhry, M. H., *Open-Channel Flow*, Prentice Hall, Englewood Clifs, New Jersey, 1993.

[9] Courant, R., Friedrichs, K. O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[10] Crowder, D. W., *Reproducing and Quantifying Spatial Flow Patterns of Ecological Importance with Two-Dimensional Hydraulic Models*, disertacija, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 2002.

[11] Družeta, S., Črnjarić-Žic, N., Kranjčević, L., *Influence of the Outflow Boundary Conditions in the Open Channel and Shallow Water Models*, Proceedings of the 4th International Congress of Croatian Society of Mechanics, pp. 137-144, ed. Franjo Matejiček, ISBN 953-96243-4-7, Croatian Society of Mechanics, Zagreb, 2003.

[12] Froehlich D.C., *Finite Element Surface-Water Modeling System*, FESWMS-Users Manual, Environmental Hydraulics Inc., Lexington, USA

[13] Godlewski, E., Raviart, P.-A., *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[14] Hardy, R. J., Bates, P. D., Anderson, M. G., *The importance of spatial resolution in hydraulic models for floodplain environments*, Journal of Hydrology, 216, pp. 124-136, 1999.

[15] Kerr, R. A., Benzley, S. E., White, D. R., Mitchell, S., *A Method For Controlling Skew On Linked Surfaces*, Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable, pp. 377-385, South Lake Tahoe, 1999.

[16] Knupp, P. M., *Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes*, Finite Elements in Analysis and Design, 39, pp. 217-241, 2003.

[17] Kranjčević, L., *Računalne simulacije strujanja u otvorenim vodotocima*, magistarski rad, Rijeka, 2001.

[18] Leveque, R. J., *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[19] Leveque, R. J., *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhauser Verlag, Basel, 1992.

[20] Morris, M. W., *CADAM Final Report*, HR Wallingford, Wallingford, 2000.

[21] Sankaranarayanan, S., Spaulding, M. L., *A study of the effects of grid non-orthogonality on the solution of shallow water equations in boundary-fitted coordinate systems*, Journal of Computational Physics, 184, pp. 299-320, 2003.

[22] Schröder, R.C.M., *Hydraulische Methoden zur Erfassung von Rauheiten*, DVWK Schriften, Heft 92, Hamburg-Berlin, Parey, 1990.

[23] *SMS (Surface-Water Modeling System) Reference Manual*, BOSS International, coo and Bringham Young University, 1997.

[24] Soares Frazao, S., Sillen, X., Zech, Y., *Dam-break Flow through Sharp Bends Physical Model and 2D Boltzmann Model Validation*, Proceedings of the CADAM meetings, Wallingford, Munich, Milan, Zaragoza, 1998-1999.

[25] Soares Frazao, S., Testa, G., *3rd CADAM meeting – The Toce River test case: Numerical results analysis*, Proceedings of the CADAM meetings, Wallingford, Munich, Milan, Zaragoza, 1998-1999.

[26] Sopta, L., Vuković, S., Črnjarić-Žic, N., Družeta, S., Škifić, J., Bukovac, O., *Matematički model rijeke Kupe i V. Belice u mjestu Kuželj*, Sopex d.o.o. – Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2003.

[27] Sopta, L., Vuković, S., Družeta, S., Pintar, S., Škifić, J., *Matematički model rijeke Rječine od izvora do Tvornice papira*, Rijeka, 2002.

[28] Sopta, L., Vuković, S., Pintar, S., Škifić, J., *Matematički model pucanja brane Valići i propagacije poplavnog vala*, Rijeka, 2001.

[29] Tan, W., *Shallow Water Hydrodynamics*, Elsevier, Amsterdam, 1992.

[30] Taylor, A., *Does detailed channel form information significantly increase the accuracy of*

2D numerical river inundation models?, University of Bristol, Bristol, 1998.

[31] Viozat, C., Held, C., Mer, K., Dervieux A., *On Vertex-Centered Unstructered Finite-Volume Methods for Stretched Anisotropic Triangulations*, Rapport de recherche No. 3464, INRIA, Sophia Antipolis, 1998.

[32] Vreugdenhil, C. B. *Numerical methods for shallow-water flow*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[33] Yang, J. Y., Hsu, C. A., *Computations of Free Surface flows,* Journal of Hydraulic Research, vol. 31, 1993.

[34] Zhao, D. H., Shen, H. W., Tabios III, G. Q., Lai, J. S., Tan, W. Y., *Finite-Volume Two-Dimensional Unsteady-Flow Model for River Basins*, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 120, No. 7, 1994.

9. Popis oznaka, slika i tablica

9.1. Popis oznaka

A	omočena površina poprečnog presjeka kanala
$\mathbf{A}$	Jacobijeva matrica fluksa
b	širina kanala
C_1, C_2	koeficijenti za Prandtl-Colebrookov izraz
C_c	koeficijent protoka kroz propust
C_{cfl}	Courant-Friedrichs-Lewy broj
C_d	koeficijent otpora nastrujavanju na mosni stup
c	brzina propagacije poremećaja
d	dubina protočnog presjeka
d_{50}	srednji promjer zrna
D	promjer cijevi
e	srednja visina neravnina na stjenci cijevi
F	sila na fluid
Fr	Froudov broj
$\mathbf{f}$	numerički fluks
G_{15}	ekvivalentni udio ćelija sa najmanjim unutarnjim kutom $\gamma = 15°$
$\mathbf{G}$	numerička aproksimacija izvornog člana
g	ubrzanje sile teže
$\mathbf{g}$	izvorni član
H	razina vodnog lica
h	dubina vode
h_m	visina otvora ispod mosta
I_p	član sile hidrostatskog tlaka
I_w	član sile uslijed promjene poprečnog presjeka kanala
K_i	skup svih susjednih ćelija i-te ćelije
k_D	koeficijent distorzije numeričke mreže
k_e	koeficijenti ulaznih gubitaka kod strujanja kod propust
l	duljina
$\mathbf{l}$	lijevi svojstveni vektor
M	mjera numeričke pogreške
n	Manningov koeficijent trenja
$\mathbf{n}$	vektor normale
N	broj ćelija
P	omočeni opseg kanala
p	tlak
Q	volumni protok
$\mathbf{Q}$	numerička aproksimacija Jacobijeve matrice fluksa
q_L	bočni dotok po jedinici duljine kanala
R	slučajno generirana vrijednost
R_H	hidraulički radijus

R_e	Reynoldsov broj
$\mathbf{R}$	matrica desnih svojstvenih vektora matrice **Q**
$\mathbf{r}$	desni svojstveni vektor
S	površina
S_b	nagib dna kanala
S_f	nagib trenja
T_{ij}	j-ta podćelija i-te ćelije
t	vremenska varijabla
$\mathbf{u}$	vektor stanja
V	volumen
$\mathbf{V}$	numerička aproksimacija prostorne derivacije fluksa
v	brzina vode u smjeru jedne prostorne varijable, intenzitet brzine
$\mathbf{v}$	vektor brzine
x	prostorna varijabla
y	prostorna varijabla
z	prostorna varijabla, geodetska visina
α	parametar linearne kombinacije Jacobijevih matrica
γ	najmanji unutarnji kut ćelije numeričke mreže
$\mathbf{\Lambda}$	matrica svojstvenih vrijednosti
λ	koeficijent hrapavosti
$\lambda^{(i)}$	svojstvena vrijednost matrice **A**
η	visina od dna kanala
ρ	gustoća fluida
ν	kinematička viskoznost fluida
ξ	prostorna varijabla

9.2. Popis slika

9.3. Popis tablica

Životopis

Siniša Družeta rođen je u Puli, 5. listopada 1975. godine. Osnovnu školu pohađao je u Pazinu, kao i Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Jurja Dobrile. Nakon završetka gimnazije 1994. godine upisuje sveučilišni studij strojarstva na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. U toku studija obavlja stručnu praksu u brodogradilištu Lisnave-Mitrena u Lisabonu i ukupno četiri puta prima fakultetsku nagradu za uspjeh. Diplomirao je sa izvrsnom ocjenom 1999. godine radom pod nazivom „Hidraulička analiza rashladnog sustava morske vode u TE Rijeka“, čime je stekao naziv dipl. ing. strojarstva. Početkom 2000. godine zapošljava se u tvrtci Sopex d.o.o. na poslovima razvoja i primjene numeričkog simuliranja strujanja fluida, da bi 1. veljače 2001. godine bio zaposlen kao znanstveni novak na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. Poslijediplomski studij računarske mehanike upisuje 2000. godine, također na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. Od 2003. godine zaposlen je na mjestu mlađeg asistenta pri istoj ustanovi. Do sada je kao koautor sudjelovao u izradi četiri znanstvena članka i devet znanstvenih i stručnih studija. Aktivno se služi engleskim jezikom.

PODACI O AUTORU I MAGISTARSKOM RADU

1. AUTOR	
Ime i prezime:	Siniša Družeta, dipl,ing.
Datum i mjesto rođenja:	5. listopada 1975., Pula
Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, studij strojarstva, 1999.
Naziv fakulteta, smjera i godina završetka poslijediplomskog studija:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, računarska mehanika, 2004.
Sadašnje zaposlenje:	Mlađi asistent
2. MAGISTARSKI RAD	
Naslov:	Utjecaj parametara numeričke mreže na rezultat simulacija strujanja u plitkim vodama
Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka:	vi+106 stranica, 83 slike, 11 tablica, 34 bibliografska podatka
Znanstveno polje i grana	Druge temeljne tehničke znanosti, Tehnička mehanika i mehanika fluida
Voditelj rada:	Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, dipl.ing.
Fakultet na kojem je rad obranjen:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci
3. OBRANA I OCJENA	
Datum prijave teme:	9. svibnja 2003.
Datum predaje rada:	15. travnja 2004.
Datum prihvaćanja ocjene rada:	28. svibnja 2004.
Sastav povjerenstva za ocjenu:	Izv. prof. dr. sc. Senka Vuković, predsjednik Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, član Red. prof. dr. sc. Zoran Mrša, član (svi sa Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci) Red. prof. dr. sc. Ivica Kožar, član (Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci)
Datum obrane:	4. lipnja 2004.
Sastav povjerenstva za obranu:	Izv. prof. dr. sc. Senka Vuković, predsjednik Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, član Red. prof. dr. sc. Zoran Mrša, član (svi sa Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci) Red. prof. dr. sc. Ivica Kožar, član (Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci)
Datum promocije:	

Oznaka: MR Tekući broj: M-81-T/252-2004 UDK 532.53:519.876.5:519.63(043)

Utjecaj parametara numeričke mreže na rezultat simulacija strujanja u plitkim vodama

Siniša Družeta

Sveučilište u Rijeci
Tehnički fakultet
Hrvatska

Ključne riječi: strujanje u otvorenim kanalima, matematički model plitkih voda, numerička mreža

Sažetak: Provedena je analiza utjecaja parametara numeričke mreže na rezultat simulacija strujanja u plitkim vodama u području praktične upotrebe numeričkog modela plitkih voda. Postupak je proveden usporedbom numeričkih rezultata sa podacima dobivenim mjerenjima na eksperimentalnim test-primjerima pucanja brana i propagacije poplavnih valova. Rezultati provedenog istraživanja pokazuju da gustoća numeričke mreže sama po sebi slabo utječe na točnost modela. Način utjecaja loše oblikovanih ćelija numeričke mreže na rezultat simulacija vrlo je složen, no numeričke mreže dobivene standardnim postupkom izrade ne smanjuju značajno globalnu točnost cjelokupnog numeričkog modela.

Rad nije objavljen.

Mentor:	Red. prof. dr. sc. Luka Sopta
Povjerenstvo za ocjenu:	Izv. prof. dr. sc. Senka Vuković, predsjednik Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, član Red. prof. dr. sc. Zoran Mrša, član (svi sa Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci) Red. prof. dr. sc. Ivica Kožar, član (Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci)
Povjerenstvo za obranu:	Izv. prof. dr. sc. Senka Vuković, predsjednik Red. prof. dr. sc. Luka Sopta, član Red. prof. dr. sc. Zoran Mrša, član (svi sa Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci) Red. prof. dr. sc. Ivica Kožar, član (Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci)
Datum obrane:	4. lipnja 2004.
Datum promocije:	

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.
(vi+106 stranica, 83 slike, 11 tablica, 34 bibliografska podatka, hrvatski jezik)

MR UDK 532.53:519.876.5:519.63(043)

1. Utjecaj parametara numeričke mreže na rezultat simulacija strujanja u plitkim vodama

I Družeta, S.

II Sveučilište u Rijeci
Tehnički fakultet
Hrvatska

Strujanje u otvorenim kanalima
Matematički model plitkih voda
Numerička mreža

Code: MR No. M-81-T/252-2004 UDC 532.53:519.876.5:519.63(043)

Influence of Numerical Mesh Properties on Shallow Water Simulation Results

Siniša Družeta

University of Rijeka
Faculty of Engineering
Croatia

Keywords: open channel flow, shallow water model, numerical mesh

Summary: Numerical mesh properties significantly affect shallow water numerical model results. Sensitivity analysis of shallow water model in the context of practical application was performed by comparing numerical and experimental results for dam break test-cases. The investigation showed that low mesh density itself does not significantly reduce model accuracy, enabling the use of mesh with the lowest resolution still ensuring acceptable topology and flow properties detail. Highly complex manner of the way poorly shaped mesh elements influence model accuracy was found, but it was demonstrated that numerical mesh obtained with standard mesh generation procedure does not considerably decrease model accuracy.

The thesis has not been published.

Mentor:	Red. prof. dr. sc. Luka Sopta
Advisors:	Izv. prof. dr. sc. Senka Vuković Red. prof. dr. sc. Luka Sopta Red. prof. dr. sc. Zoran Mrša (all of Faculty of Engineering, University of Rijeka) Red. prof. dr. sc. Ivica Kožar (Faculty of Civil Engineering, University of Rijeka)
Reviewers:	Izv. prof. dr. sc. Senka Vuković Red. prof. dr. sc. Luka Sopta Red. prof. dr. sc. Zoran Mrša (all of Faculty of Engineering, University of Rijeka) Red. prof. dr. sc. Ivica Kožar (Faculty of Civil Engineering, University of Rijeka)
Presentation:	June 4, 2004
Degree conferred:	

The thesis is deposited in the library of the University of Rijeka, Faculty of Engineering.
(vi+106 pages, 83 figures, 11 tables, 34 references, Croatian)

MR UDC 532.53:519.876.5:519.63(043)

1. Influence of Numerical Mesh Properties on Shallow Water Simulation Results

I Družeta, S.
II University of Rijeka
Faculty of Engineering
Croatia

Open channel flow
Shallow water model
Numerical mesh