

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODJEL

Tomislav Fratrović

**MATEMATIČKI MODEL TOKA KRVI
KROZ ARTERIJU**

- MAGISTARSKI RAD -

Zagreb, 2005.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODJEL

Tomislav Fratrović

**MATEMATIČKI MODEL TOKA KRVI
KROZ ARTERIJU**

- MAGISTARSKI RAD -

Voditelj rada:
Prof.dr.sc. Eduard Marušić-Paloka

Zagreb, veljača 2005.

Zahvale

Za odricanja i potporu u nerijetkim trenucima nesigurnosti, hvala Kristini.

Za motivaciju, hvala Mateju.

Za tvrdoglavost, upornost i čvrste temelje znanja, hvala Vesni i Vladimiru, mojim roditeljima.

Za primjer, pomoć i sigurno vodstvo, hvala Eduardu, mom mentoru.

Predgovor

U ovome radu proučavamo i opisujemo matematički model koji predstavlja tok krvi kroz usku arteriju. Tema obuhvaća izvod efektivnih jednadžbi koje modeliraju tok viskoznog inkompresibilnog fluida kroz dugačku elastičnu cijev, uz dokaz egzistencije rješenja i ocjenu pogreške tih rješenja. Elastičnost se očituje u popustljivosti bočnih stijenki, što dobro opisuje fizikalna svojstva krvnih žila. Tok fluida je uzrokovan unaprijed zadanim padom tlaka, odnosno razlikom tlakova na ulaznoj i izlaznoj granici. Pretpostavljamo da pad tlaka ovisi (samo) o vremenu i da je dovoljno mali tako da se radi o polaganom laminarnom toku, bez turbulencija. Za modeliranje toka koristimo Stokesove jednadžbe za viskozni inkompresibilni fluid, a za modeliranje stijenske – jednadžbe zakrivljene linearno elastične membrane. Time dobivamo dvojni sustav fluid-stijenka i jednadžbe koje opisuju njegovo ponašanje. To ponašanje proučavamo na limesu kada odnos karakteristične širine (polumjer krvne žile) i karakteristične duljine (duljina krvne žile) teži k nuli. Asimptotičkom analizom dobivamo viskoelastične jednadžbe za efektivni tlak i efektivne otklone stijenske. Aproksimativni postupak je strogo opravdan rezultatom o slaboj konvergenciji i ocjenama pogreške rješenja efektivnih jednadžbi uz modifikaciju rubnim slojem na izlaznoj granici.

Ključni dio u ovome radu je opis interakcije fluida i elastične stijenske. Razlog tome je taj što je modeliranje popustljive stijenske (u našem slučaju stijenske krvnih žila) već samo po sebi kompleksan problem. Kako bismo pojednostavili model, zanemarujemo anizotropno ponašanje stijenske, kao i kutne deformacije. U tom slučaju možemo kao model koristiti linearne Navierove jednadžbe za zakrivljenu membranu. Važno je također naglasiti da u trenutku pisanja ovog rada, problem analize nelinearnog spoja jednadžbi toka, tj. potpunih Navier-Stokesovih jednadžbi, i ponašanja stijenske još nije u potpunosti bio riješen. Linearni model uz korištenje Stokesovih jednadžbi, koji opisujemo u ovoj radnji temelji se na radu S. Čanić i A. Mikelić, te predstavlja dobar uvod u navedenu tematiku.

U Karlovcu, listopad 2004.

Tomislav Fratrović

Sadržaj

- Pregled oznaka

1	Teorijske osnove	1
1.1	Temeljne postavke problema	1
1.2	Krivocrtni koordinatni sustav	1
1.3	Elementi mehanike kontinuuma	5
1.4	Elementi teorije elastičnosti	6
1.5	Elementi mehanike fluida	10
1.6	Funkcijski prostori	13
1.7	Asimptotička analiza	24
2	Model arterije i krvnog toka	25
2.1	Navierove jednadžbe elastične zakrivljene membrane	25
2.2	Parametri i fiziološka svojstva krvi i arterijske stijenke	29
2.3	Sparivanje jednadžbi toka i gibanja arterijske stijenke	30
3	Asimptotička analiza jednadžbi toka	33
3.1	Formulacija problema u terminima malog parametra	33
3.2	Slaba formulacija problema	35
3.3	Energetske ocjene	37
3.4	Reskalirani problem i asimptotički razvoj	49
3.5	Reducirani problem	55
3.5.1	Reducirani problem sa zanemarivim modulom smicanja	60
3.5.2	Reducirani problem u obliku tlak-brzina	62
3.6	Teorem o konvergenciji	63
3.7	Ocjena pogreške	70
4	Zaključak	78
-	Životopis	
-	Sažetak / Summary	

Pregled oznaka

Standardne oznake

\mathbf{R}^n standardna oznaka za n-dimenzionalni realni euklidski/vektorski prostor

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Kartezijev koordinatni sustav

$(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ cilindrični koordinatni sustav

$\mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{e}(\mathbf{v})$ tenzor deformacija/brzine deformacije u mehanici kontinuuma

E, ν, G konstante u teoriji elastičnosti: Youngov modul, Poissonov omjer i modul smicanja

λ, μ Laméove konstante u teoriji elastičnosti

μ dinamička viskoznost u mehanici fluida

$C(\Omega), C^k(\Omega)$ vektorski prostori neprekinutih odn. k-puta neprekinuto diferencijabilnih funkcija na Ω

$C^\infty(\Omega)$ vektorski prostor beskonačno puta neprekinuto diferencijabilnih funkcija

$C(\bar{\Omega})$ vektorski prostor uniformno neprekinutih funkcija na Ω

$\mathcal{D}(\Omega) \equiv C_c^\infty(\Omega)$ prostor test funkcija - C^∞ funkcije s kompaktnim nosačem

$L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ prostor p-integrabilnih funkcija s pripadajućom normom

$L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ prostor bitno omeđenih funkcija s pripadajućom normom

$(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ skalarni produkt u prostoru $L^2(\Omega)$

$V' \langle \cdot, \cdot \rangle_V$ dualnost prostora V' i V , oznaka za djelovanje funkcionala na vektor

$\mathcal{D}'(\Omega)$ prostor distribucija na Ω

$W^{m,p}(\Omega), W_0^{m,p}(\Omega)$ Soboljevljevi prostori (s tragom nula)

$H^m(\Omega), H_0^m(\Omega)$ Soboljevljevi prostori $W^{m,2}(\Omega), W_0^{m,2}(\Omega)$

$W^{-m,p'}(\Omega), H^{-m}(\Omega)$ dualni prostori $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ odn. $(H_0^m(\Omega))'$

\mathcal{S} Schwartzov prostor

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ Fourierova pretvorba odn. inverzna Fourierova pretvorba

$V \hookrightarrow W$ ulaganje odn. neprekinuta injekcija s prostora V u prostor W

$u_n \rightharpoonup u$ slaba konvergencija

$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ slaba* konvergencija

Nestandardne oznake

- η, ζ radijalni odn. longitudinalni otklon stijenke krvne žile (str. 26)
 $A^\varepsilon(t), A(t)$ pad tlaka u krvnoj žili (str. 35, 39)
 Ω_ε promatrano cilindrično područje - unutrašnjost krvne žile (str. 33)
 Σ_ε rub promatranog područja - stijenka krvne žile (str. 33)
 ω^ε karakteristična frekvencija vremenskog skaliranja (str. 39, 45)
 V^ε, V prostor test funkcija za promatrani problem (str. 35, 50)
 $\nabla_\varepsilon, \mathbf{e}_\varepsilon, \operatorname{div}_\varepsilon$ skalirani operatori (str. 49)
 $\mathcal{V}^\varepsilon, \mathcal{V}$ prostor rješenja za promatrani problem (str. 36, 50)
 $\mathcal{E}_\mu, \mathcal{E}_{el}, \mathcal{E}_f$ respektivno viskozna energija, elastična energija i energija koja odgovara padu tlaka (str. 37)
 E_0, G_0 parametri promatranog problema na limesu kada $\varepsilon \rightarrow 0$ (str. 34)
 \tilde{V} prostor test funkcija kojima divergencija nije nužno nula (str. 52)
 $W, \|\cdot\|_W, W_r, \|\cdot\|_{W_r}$ pomoćni prostori funkcija (str. 63)
 w, π brzina i tlak u rubnom sloju (str. 71)
 $\bar{p}(\varepsilon), \bar{\mathbf{v}}(\varepsilon), \bar{\eta}(\varepsilon), \bar{\zeta}(\varepsilon)$ pogreške za brzinu, tlak i otklone stijenke (str. 72)

1 Teorijske osnove

1.1 Temeljne postavke problema

Uzimajući u obzir značajke anatomije krvnih žila i općenito kardiovaskularnog sustava, dolazimo do sljedećih fizikalno opravdanih pretpostavki. Promatramo dugačko i usko osno simetrično cilindrično područje čija je bočna stijenka tanka, ili preciznije, kod kojeg je debljina bočne stijenke mala u odnosu na promjer poprečnog presjeka. Također uzimamo da je promjer tog poprečnog presjeka malen u usporedbi s duljinom područja. Naš model bitno pojednostavljuje pretpostavka da je stijenka linearno elastičan izotropni materijal. To znači da se ona deformira proporcionalno silama koje na nju djeluju, da se prilikom rasterećenja potpuno vraća u prvobitni oblik i da njena elastična svojstva ne ovise o smjeru. Trebalo bi svakako naglasiti da zanemarujemo određena anizotropna svojstva koja se u dovoljno maloj mjeri ipak pojavljuju kod stijenki krvnih žila.

Uzrok gibanja fluida kroz zadano područje je pad tlaka između ulazne i izlazne otvorene granice, koji je zadan kao funkcija vremena, dok za bočnu stijenku pretpostavljamo da je elastična odnosno popustljiva, ali nepropusna. Poznato je i eksperimentalno utvrđeno (v. [23]) da u malim arterijama viskozna svojstva krvi dominiraju nad inercijalnim učinkom, što rezultira polaganim tokom (tzv. *creeping flow*) i opravdava korištenje Stokesovih jednadžbi odnosno zanemarivanje nelinearnog člana. Budući da se radi o polaganom toku i malim otklonima bočne stijenke, mi u jednadžbama toka lineariziramo međudjelovanje fluida i stijenke i pretpostavljamo da granica u svakom trenutku ima položaj jednak onome u referentnoj konfiguraciji. Pozornost otklonima stijenke, koje rastavljamo na radijalni i longitudinalni dio, posvećujemo tek u Navierovim jednadžbama za membranu, gdje se javljaju kao posljedica sila uzrokovanih gibanjem fluida.

1.2 Krivocrtni koordinatni sustav

Često je, zbog fizikalnih svojstava problema, korisno i prirodno uvesti krivocrtni koordinatni sustav. Kartezijevom se koordinatnom sustavu $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

osim jednostavnosti, ne pridaju nikakve druge prednosti, barem što se fizikalnih zakona tiče. Oni i jesu iskazani tako da ne ovise o određenom koordinatnom sustavu. Slijedi pregled općih krivocrtnih ili krivolinijskih koordinata.

Položaj točke T u prostoru potpuno je određen radijvektorom $\vec{r} = \overrightarrow{OT}$. U kartezijskim koordinatama $\vec{r} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, a točka T je sjecište triju koordinatnih ravnina $x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$ i $x_3 = \text{const.}$ Točku T možemo također dobiti i kao presjek nekih triju drugih površina, zakrivljenih ili ravnih, pomoću sustava jednadžbi $q_1 = \text{const.}$, $q_2 = \text{const.}$ i $q_3 = \text{const.}$ Sjecište dviju takvih koordinatnih površina nazivamo *koordinatnom linijom*.

Pretpostavimo da vrijede funkcionalni odnosi

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3) \quad \text{i} \quad x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3$$

tako da je $\det\left[\frac{\partial x_i(q)}{\partial q_j}\right] \neq 0$ za svako q . Radijvektor točke možemo sada promatrati kao funkciju od $q = (q_1, q_2, q_3)$

$$\vec{r}(q) = x_1(q)\vec{i} + x_2(q)\vec{j} + x_3(q)\vec{k}.$$

Zbog uvjeta determinante, vektori $\vec{E}_i(q) \equiv \frac{\partial \vec{r}(q)}{\partial q_i}$ su linearno nezavisni u svakoj točki i tangencijalni na koordinatne linije. Kada su još i međusobno okomiti, govorimo o ortogonalnom krivocrtnom koordinatnom sustavu koji označavamo na primjer s $(O' ; \vec{E}_1(q), \vec{E}_2(q), \vec{E}_3(q))$. Za novi koordinatni sustav definiramo *metrički tenzor* $G(q) \equiv [g_{ij}(q)]_{i,j=1,2,3}$ kao Gramovu matricu tangencijalnih vektora, dok vrijednosti

$$g_{ij}(q) \equiv \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \frac{\partial \vec{r}(q)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}(q)}{\partial q_j} \quad i, j = 1, 2, 3$$

nazivamo *metrički koeficijenti*. Za ortogonalni krivocrtni koordinatni sustav vrijedi

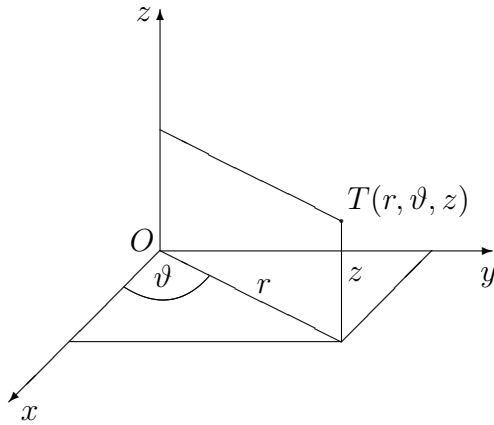
$$G = \begin{bmatrix} H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3^2 \end{bmatrix},$$

gdje smo uveli standardne oznake $H_i \equiv \|\vec{E}_i\|$, $i = 1, 2, 3$. U tom slučaju možemo napisati izraze za jedinične vektore iz baze novog krivocrtnog ortogonalnog koordinatnog sustava kao:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\vec{E}_1, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2}\vec{E}_2, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{H_3}\vec{E}_3.$$

Primjer.(Cilindrični koordinatni sustav)

U modeliranju našeg problema toka krvi koristit ćemo upravo ovaj koordinatni sustav. Najkraće ga možemo opisati kao proširenje polarnog koordinatnog sustava na tri dimenzije. Naime, za lociranje točke u xy ravnini koristimo ravninske polarne koordinate r i ϑ , koje predstavljaju udaljenost od ishodišta i kut između radijvektora točke i pozitivnog dijela x -osi, a treća koordinata z predstavlja visinu iznad/ispod xy ravnine. Izborom jedne određene točke u prostoru za ishodište (označimo je na primjer s O), dobivamo cilindrični koordinatni sustav u oznaci $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_z)$, gdje smo ujedno uveli i oznake za jedinične vektore iz baze.



Svaka točka iz \mathbf{R}^3 jednoznačno je određena uređenom trojkom (r, ϑ, z) , s komponentama u rasponu $r \in [0, +\infty)$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbf{R}$ i vezom s kartezijskim koordinatama:

$$x = r \cos \vartheta,$$

$$y = r \sin \vartheta,$$

$$z = z.$$

Radijvektor i tangencijalni vektori izraženi kao funkcije novih koordinata su:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(r, \vartheta, z) = r \cos \vartheta \vec{i} + r \sin \vartheta \vec{j} + z \vec{k}, \\ \vec{E}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \vartheta \vec{i} + \sin \vartheta \vec{j}, \\ \vec{E}_2 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = -r \sin \vartheta \vec{i} + r \cos \vartheta \vec{j}, \\ \vec{E}_3 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}, \end{aligned}$$

a metrički tenzor je

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo zapisati izraze za jedinične vektore iz baze cilindričnog koordinatnog sustava:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &\equiv \vec{e}_1 = \vec{E}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \vartheta \vec{i} + \sin \vartheta \vec{j}, \\ \vec{e}_\vartheta &\equiv \vec{e}_2 = \frac{1}{r} \vec{E}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \vec{i} + \cos \vartheta \vec{j}, \\ \vec{e}_z &\equiv \vec{e}_3 = \vec{E}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}. \end{aligned}$$

Izrazimo još u cilindričnim koordinatama i neke diferencijalne operatore koje ćemo kasnije trebati. (v. [1] i [2])

GRADIJENT

Neka je $U(\vec{r})$ glatka skalarna funkcija. Tada za $i = 1, 2, 3$ vrijedi

$$\begin{aligned} [\mathbf{grad} U(\vec{r})]_i &= [\mathbf{grad} U(\vec{r}(r, \vartheta, z))]_i = \mathbf{grad} U(\vec{r}) \cdot \vec{e}_i(q) = \\ &= \frac{1}{H_i(q)} \mathbf{grad} U(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{H_i(q)} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} (U(\vec{r})), \end{aligned}$$

iz čega lako vidimo da je

$$\nabla U \equiv \mathbf{grad} U(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Za glatku vektorsku funkciju $\mathbf{V}(\vec{r})$ zapis gradijenta u bazi cilindričnog koordinatnog sustava je sljedeći

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} V_\vartheta & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\vartheta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} V_r & \frac{\partial V_\vartheta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

DIVERGENCIJA

Neka je $\mathbf{V}(\vec{r})$ glatka vektorska funkcija. Operator divergencije definira se kao $\operatorname{div} \mathbf{V} \equiv \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \mathbf{V})$, a u cilindričnim koordinatama on poprima oblik

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

LAPLACEOV OPERATOR

Neka je $U(\vec{r})$ glatka skalarna, a $\mathbf{V}(\vec{r})$ glatka vektorska funkcija. Laplaceov operator je diferencijalni operator oblika $\Delta U \equiv \operatorname{div}(\operatorname{grad} U)$ za skalarnu i $\Delta \mathbf{V} \equiv \Delta V_x \vec{i} + \Delta V_y \vec{j} + \Delta V_z \vec{k}$ za vektorsku funkciju, a u cilindričnim koordinatama ima oblik

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \\ \Delta \mathbf{V} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial V_r}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \vartheta^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) \vec{e}_r + \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial V_\vartheta}{\partial r}) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\vartheta}{\partial \vartheta^2} - \frac{V_\vartheta}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\vartheta}{\partial z^2} \right) \vec{e}_\vartheta + \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial V_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

1.3 Elementi mehanike kontinuuma

Mehanika kontinuuma proučava ponašanje materijala podvrgnutog vanjskom utjecaju. Pod pojmom materijala mislimo na čvrsta tijela i njihovu deformaciju što proučava teorija elastičnosti, te na fluide koji se uslijed djelovanja vanjskih sila gibaju i koje proučava mehanika fluida. Materijali se promatraju kao neprekinute sredine sastavljene od materijalnih točaka, što je dobra aproksimacija zbog mnoštva atoma i molekula koji ih tvore povezani međumolekularnim silama. U mehanici kontinuuma pojave se promatraju fenomenološki i na makroskopskom planu, ne ulazeći u fizikalnu strukturu materije. S takva stanovišta pretpostavljamo da neprekinuta sredina ili kontinuum zadržava neprekinutost fizikalnih svojstava prelazeći i u infinitezimalne volumene, odnosno u graničnom prijelazu u nulti volumen,

odnosno točku.

Na temelju hipoteze kontinuuma kruta tijela odnosno fluidi se u smislu mehanike definiraju kao neprekinuti sustavi beskonačnog broja materijalnih čestica. Sume po broju materijalnih čestica, koje se javljaju u zakonima mehanike sustava materijalnih čestica, sada se zamjenjuju integralima po neprekinutoj masi, odnosno po volumenu prostora koji kontinuum zauzima. Hipoteza kontinuuma ima fundamentalno značenje u istraživanju fizikalnih zakona i izvođenju jednadžbi gibanja ili ravnoteže.

LAGRANGEOV I EULEROV SUSTAV

Prilikom proučavanja kontinuuma, posebice fluida koji se giba, koordinate točaka odnosno varijable u jednadžbama možemo opisivati na dva načina. Pretpostavimo prvo da u početnom trenutku kontinuum zauzima takozvanu *referentnu konfiguraciju* $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Uvodimo funkciju $x : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$ koja opisuje promjenu položaja u vremenu točaka iz referentne konfiguracije, tako da je pozicija točke $X \in \Omega$ u trenutku $t \in [0, T]$ dana sa $x = x(X, t)$.¹ Kada promatramo promjenu neke fizikalne veličine kao funkciju početnog položaja i vremena, govorimo o *Lagrangeovoj ili materijalnoj reprezentaciji* te veličine. Za razliku od Lagrangeovog sustava, *Eulerova ili prostorna reprezentacija* promatra veličine kao funkcije trenutnog položaja i vremena. Jednadžbe u Eulerovom sustavu dakle opisuju fizikalne veličine, uzmimo na primjer gustoću, tlak ili brzinu fluida, u određenoj fiksnoj točki promatranog područja, dok jednadžbe u Lagrangeovom sustavu prate povijest gibanja individualnih čestica danog fluida.

1.4 Elementi teorije elastičnosti

Kao ogranak mehanike kontinuuma, teorija elastičnosti bavi se proučavanjem naprezanja, pomaka i deformacija čvrstih elastičnih tijela. U nedeformiranom tijelu raspored molekula odgovara ravnotežnom stanju i resultantna sila na bilo koji njegov komad je jednaka nuli. Kada dođe do deformacije uslijed djelovanja vanjske (volumne odnosno masene) sile, raspored molekula

¹Točke iz referentne konfiguracije označavamo velikim slovima, a njihove pozicije u trenutku $t > 0$ malim.

se mijenja, tijelo više nije u stanju ravnoteže i pojavljuje se otpor promjeni koji nastoji vratiti tijelo u ravnotežu. Te takozvane *unutrašnje sile* su molekularnog karaktera i kratkog dometa, jer djeluju samo u bliskoj okolini molekula. Sile kojima okolni dijelovi utječu na određeni komad tijela preko njegove površine nazivamo *kontaktne sile*. Korištenjem graničnog postupka iznos kontaktne sile po jedinici površine možemo definirati u svakoj točki tijela i nazivamo ga *naprezanje*. Ako se kroz zadanu točku promatra presjek okomit na neku od koordinatnih osi, tada se u tehničkoj literaturi normalno naprezanje označava sa σ_x , σ_y ili σ_z , a tangencijalna ili *smična* naprezanja koja leže u ravnini presjeka s τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} ... Pomoću zakona očuvanja kutne količine gibanja (zakretnog momenta) lako se pokazuje simetričnost veličina $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

U tenzoru $[\sigma_{ij}]$ kojeg sada definiramo, prvi indeks označava normalu presjeka, a drugi koordinatnu os u čijem smjeru djeluje komponenta.

Definicija 1.1 (TENZOR NAPREZANJA)

Tenzor naprezanja *definiramo kao matricu 3×3 s komponentama:*

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Usljed djelovanja sila na tijelo dolazi do deformacije, a pod tim pojmom podrazumijevamo promjenu oblika i obujma. *Duljinska deformacija* predstavlja relativno produljenje (promjena udaljenosti dviju točaka) u oznaci ε_x , ε_y ili ε_z , dok je *kutna deformacija* promjena prvobitnog pravog kuta izražena u radijanima (ukupno ih je šest, ali: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$). Navedene vrijednosti predstavljaju komponente sljedećeg tenzora:

$$\mathbf{e} \equiv \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Odnos između tenzora \mathbf{e} i vektorske funkcije *pomaka* $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ je

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^\tau + (\nabla\mathbf{u})^\tau\nabla\mathbf{u}).$$

Za dovoljno male deformacije možemo uspostaviti sljedeću vezu:

$$\mathbf{e} \approx \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\tau) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Aproksimacija je prihvatljiva za proučavanje malih deformacija, što je i naš slučaj, pa uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 1.2 (TENZOR DEFORMACIJA)

Tenzor deformacija *definiramo kao tenzor*

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\tau).$$

HOOKEOV ZAKON

O međusobnoj ovisnosti naprezanja i deformacije u slučaju linearne elastičnosti govori Hookeov zakon, koji za jednoosno naprezanje ima oblik

$$\sigma = E\varepsilon_u, \quad \varepsilon_p = -\nu\varepsilon_u,$$

gdje su:

- $\sigma = \frac{F}{A}$ - naprezanje = kontaktna sila po jedinici površine,
- $\varepsilon_u = \frac{\Delta l}{l}$ - uzdužna duljinska deformacija,
- $\varepsilon_p = \frac{\Delta d}{d}$ - poprečna duljinska deformacija,
- $E > 0$ i $0 < \nu < 1/2$ - pozitivne konstante proporcionalnosti koje nazivamo *Youngov modul elastičnosti* i *Poissonov omjer*

Hookeov zakon za čisto smicanje ima oblik

$$\tau = G\gamma$$

i daje nam proporcionalnost smičnog naprezanja τ i kutne deformacije γ s faktorom proporcionalnosti G kojeg nazivamo *modul smicanja*. Poopćeni Hookeov zakon (koji u indeksnoj notaciji ima zapis $\sigma_{ij} = c_{ijkl}e_{kl}$, $i, j, k, l = x, y, z$) čine šest jednažbi s ukupno 21 konstantom (općenito međusobno

različitom), koje uspostavljaju linearni odnos između komponenti tenzora naprežanja i tenzora deformacija. Taj odnos često nazivamo *konstitutivnim jednadžbama* i one ovise o svojstvima materijala. Kod izotropnih materijala broj konstanti se reducira na samo dvije: Youngov modul elastičnosti i Poissonov koeficijent. U tenzorskom obliku Hookeov zakon tada daje jednadžbu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I}, \quad (1)$$

gdje je \mathbf{I} jedinični tenzor i koju je moguće zapisati i pomoću takozvanih *Laméovih konstanti*

$$\lambda \equiv \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad i \quad \mu \equiv G = \frac{E}{2(1 + \nu)} :$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I}. \quad (2)$$

Kao posljedicu zakona očuvanja količine gibanja dobijemo jednadžbu gibanja

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3)$$

gdje je $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor naprežanja, ρ gustoća mase, \mathbf{f} gustoća volumne sile po jedinici mase i $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ akceleracija. Jednadžbu ravnoteže dobijemo kada nema gibanja odnosno kada je desna strana u jednadžbi jednaka nuli. Uvrštavanjem tenzora naprežanja $\boldsymbol{\sigma}$ u jednadžbu gibanja (3) dobijemo *Navierove jednadžbe*

$$(\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

za funkciju pomaka $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$.

Primjer. (Cilindrične koordinate)

U cilindričnom koordinatnom sustavu tenzor deformacija ima komponente:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & e_{r\vartheta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right) \\ e_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} & e_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & e_{\vartheta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned}$$

Navierove jednadžbe u cilindričnim koordinatama raspisane po komponentama imaju oblik:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\
& \quad + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \vartheta^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) + \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\
& (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\
& \quad + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial \vartheta^2} - \frac{u_\vartheta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial z^2} \right) + \rho f_\vartheta = \rho \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial t^2} \\
& (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\
& \quad + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{4}
\end{aligned}$$

Kod osno simetričnog stanja naprezanja jednadžbe možemo pojednostaviti ako koordinatni sustav postavimo tako da se z -os poklapa s osi simetrije. Tada su jedino radijalna i longitudinalna komponenta pomaka različite od nule. Taj postupak provest ćemo i u našem slučaju u poglavlju 2.1 prilikom modeliranja elastične krvne stijenske.

1.5 Elementi mehanike fluida

Pojam *fluid* označava tvar kod koje uslijed djelovanja smičnog naprezanja dolazi do neprekinute deformacije. Zbog fenomenološkog pristupa problemima i na temelju hipoteze kontinuuma, u mehanici fluida su nam na raspolaganju analitičke metode diferencijalnog i integralnog računa. Tim jakim matematičkim aparatom dolazimo do važnih fizikalno opravdanih definicija i pretpostavki, kao i do klasičnih fundamentalnih jednadžbi dinamike fluida od kojih ovdje navodimo samo nama najvažnije.

Postupamo slično kao i u teoriji elastičnosti, s jednom bitnom razlikom. Prilikom opisivanja ponašanja kontinuuma čvrstog tijela, primarni nam je cilj bio određivanje pomaka. S druge strane, u proučavanju fluida želimo odrediti *polje brzine* kada je kontinuum podvrgnut utjecaju vanjskih sila. U tu svrhu, analogno tenzoru deformacija definiranom ranije, uvodimo *tenzor*

brzine deformacije, ili tenzor omjera naprezanja, tako da umjesto funkcije pomaka \mathbf{u} imamo polje brzine \mathbf{v} , odnosno

$$\mathbf{e}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^\tau).$$

Promatrajući gibanje fluida dolazimo do zaključka da se u njemu pojavljuju dvije vrste naprezanja: *tlačno* koje djeluje jednoliko u svim smjerovima i *viskozno* koje je posljedica unutrašnjeg trenja. Tenzor naprezanja u najopćenitijem slučaju ima oblik

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau},$$

gdje je p tlak, a $\boldsymbol{\tau}$ viskozni dio tenzora naprezanja zadan konstitutivnim zakonom

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\nabla\mathbf{v}, \rho, T),$$

odnosno ovisnošću o gradijentu brzine, gustoći i temperaturi fluida.

Definicija 1.3 (NEWTONOVSKI FLUID)

Newtonovski fluid je materijal čiji viskozni dio tenzora naprezanja ima oblik

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{v}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I},$$

gdje su λ i μ konstante.

Napomena.

Oblik tenzora naprezanja newtonovskog fluida je posljedica pretpostavki da viskozni dio odnosno tenzor $\boldsymbol{\tau}$ linearno ovisi o $\nabla\mathbf{v}$, da je invarijantan na translacije i rotacije, te da je fluid izotropan. Konstanta μ naziva se još i *dinamička viskoznost*.

U ovome radu pažnju usmjeravamo samo na inkompresibilni viskozni fluid kod kojeg je volumen proizvoljnog komada konstantan. Za takav fluid vrijedi $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, pa tenzor naprezanja newtonovskog inkompresibilnog fluida glasi

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{v}).$$

Fundamentalne jednađbe gibanja fluida i njegova svojstva izvode se pomoću fizikalnih zakona očuvanja.²

Zakon očuvanja mase u općenitom slučaju daje *jednađbu kontinuiteta*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

umjesto koje ovdje imamo uvjet inkompresibilnosti

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

Zakon očuvanja količine gibanja daje *jednađbu gibanja*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{f}. \quad (6)$$

Zakon očuvanja kutne količine gibanja daje simetričnost viskoznog dijela tenzora naprezanja

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad i, j = x, y, z.$$

Zakon očuvanja energije u promatranom području Ω kaže da je promjena ukupne energije \mathcal{E} , a to je zbroj kinetičke i unutrašnje energije, jednaka radu vanjskih sila (volumnih i kontaktnih).

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) dS.$$

Jednađbe (5) i (6) nazivamo *Navier-Stokesov sustav* za inkompresibilni fluid, a zanemarivanjem nelinearnog člana, na primjer kod polaganog toka, dobijemo takozvanu *Stokesovu jednađbu*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{f}. \quad (7)$$

Primjer.(Cilindrične koordinate)

U cilindričnom obliku komponente tenzora naprezanja inkompresibilnog newtonovskog fluida su:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} & \sigma_{r\vartheta} &= \mu \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial r} - \frac{v_{\vartheta}}{r} \right) \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{v_r}{r} \right) & \sigma_{rz} &= \mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} & \sigma_{\vartheta z} &= \mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned}$$

²Napomena: u nastavku navodimo samo jednađbe za newtonovski inkompresibilni fluid!

U cilindričnim koordinatama Stokesov sustav za inkompresibilni newtonovski fluid ima oblik:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_r}{Dt} - \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \vartheta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho f_r, \\ \rho \frac{Dv_\vartheta}{Dt} - \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \vartheta^2} - \frac{v_\vartheta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} &= \rho f_\vartheta, \\ \rho \frac{Dv_z}{Dt} - \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho f_z, \end{aligned} \quad (8)$$

gdje smo uveli sljedeću pokratu za materijalnu derivaciju Eulerovog polja

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + v_r \frac{\partial}{\partial r}(\cdot) + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\cdot) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(\cdot),$$

a uvjet inkompresibilnosti $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ glasi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

1.6 Funkcijski prostori

Za potrebe ove radnje i rezultata u sljedećim poglavljima trebat će nam neke osnovne činjenice o skupovima funkcija koji, uvođenjem pojma norme ili skalarnog produkta, prirodno poprimaju i složeniju strukturu.

Promatramo samo funkcije realne varijable, odnosno funkcije definirane na \mathbf{R}^n koji je opskrbljen Lebesgueovom mjerom i standardnim skalarnim produktom $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Neka su $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $E \subseteq \mathbf{R}^n$ izmjeriv skup. Uobičajena oznaka za vektorski prostor neprekinutih funkcija na skupu Ω je $C(\Omega)$ i u skladu s time, $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbf{N}$, označava prostor svih funkcija na Ω kojima su sve parcijalne derivacije reda manjeg ili jednakog k neprekinute. Za "granični slučaj", kada često govorimo o *glatkim funkcijama*, imamo oznaku $C^\infty(\Omega) \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$.

Nadalje, nosač funkcije $u : E \rightarrow \mathbf{R}$, u oznaci $\operatorname{supp} u$, definiramo kao najmanji zatvoreni skup u domeni na kojem funkcija poprima vrijednosti različite od nule, odnosno

$$\operatorname{supp} u \equiv \operatorname{Cl} \{x \in E \mid u(x) \neq 0\}$$

i uvodimo oznaku $\mathcal{K}(E)$ za skup svih kompaktnih podskupova $K \subseteq E$.

Govorimo li o prostoru C^∞ funkcija s kompaktnim nosačem, odnosno takvih

da je $\text{supp } u \in \mathcal{K}(E)$, tada oznaci dodajemo indeks c i dobivamo funkcije $\mathcal{D}(E) \equiv C_c^\infty(E)$, koje još nazivamo *test funkcijama*.

Pri proučavanju diferencijabilnih funkcija definiranih na \mathbf{R}^n , za notaciju su posebno pogodne takozvane *Schwartzove oznake*. Multiindeks je n -torka nenegativnih cijelih brojeva $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}_0^n$, a njegova duljina $|\alpha| \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Sada je derivaciju reda $|\alpha|$ funkcije u lako zapisati kao

$$\partial^\alpha u \equiv \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

L^p PROSTORI

Definirajmo sada prostore takozvanih realnih p -izmjerivih funkcija na Ω na sljedeći način:

– za $1 \leq p < \infty$

$$\mathcal{L}^p(\Omega) \equiv \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ izmjeriva} \mid \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

– za $p = \infty$

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) \equiv \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ izmjeriva} \mid \text{ess sup}_{\Omega} |u(x)| < +\infty \right\},$$

gdje je sa $\int_{\Omega} f(x) dx$ označen Lebesgueov integral funkcije f po Ω , dok je

$$\text{ess sup}_{\Omega} |u(x)| \equiv \inf \left\{ C \in \mathbf{R} \mid |u(x)| \leq C \text{ s.s. na } \Omega \right\}.$$

Uvodimo skup

$$\mathcal{N}_p \equiv \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \mid \int_{\Omega} |u(x)|^p dx = 0 \right\}$$

i sada možemo definirati prostor $L^p(\Omega)$ kao skup svih klasa ekvivalencije $L^p(\Omega) \equiv \mathcal{L}^p(\Omega) / \mathcal{N}_p$. Na taj način poistovjećujemo funkcije koje se razlikuju na skupu mjere nula (ili koje su jednake s.s.= "skoro svuda"), pa su uz takvu definiciju funkcije $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}_0^+$, dane sa

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \equiv \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \equiv \text{ess sup}_{\Omega} |u(x)| \quad (p = \infty),$$

norme na $L^p(\Omega)$, a $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ normirani prostori. Štoviše, oni su i potpuni, odnosno Banachovi prostori (prema Fischer-Rieszovom teoremu). Poznate su i često korištene sljedeće nejednakosti.

Nejednakost Minkowskog:

Za $1 \leq p \leq \infty$ i $f, g \in L^p(\Omega)$ vrijedi

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Youngova nejednakost:

Za Hölder-konjugirane eksponente ($1 \leq p, q \leq \infty$ takve da je $1/p + 1/q = 1$) vrijedi

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0 \quad ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

a za $\varepsilon > 0$ zamjenom a sa $\varepsilon^{1/p}a$ i b sa $\varepsilon^{-1/p}b$ dobivamo vrlo korisnu interpolacijsku nejednakost

$$ab \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-q/p} b^q.$$

Hölderova nejednakost:

Za $1 \leq p, q \leq \infty$ takve da $1/p + 1/q = 1$, ako je $f \in L^p(\Omega)$ i $g \in L^q(\Omega)$, onda je $fg \in L^1(\Omega)$ i vrijedi

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Interpolacijska nejednakost:

Neka je $1 \leq p \leq q \leq \infty$ i $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Tada za svako $r \in [p, q]$ vrijedi $f \in L^r(\Omega)$, jer za $0 \leq \alpha \leq 1$ takav da $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ vrijedi

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}.$$

Koristeći Youngovu nejednakost, posljednji rezultat moguće je zapisati i ovako:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \varepsilon \|f\|_{L^q(\Omega)} + \varepsilon^{-\mu} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \text{gdje je } \mu = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) / \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right).$$

Napomena.

Za $p = 2$, $L^2(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \quad \text{za } u, v \in L^2(\Omega).$$

Sljedeći klasični teorem daje nam izuzetno korisnu reprezentaciju omeđenih (neprekinutih) linearnih funkcionala na Hilbertovom prostoru.

Teorem 1.1 (RIESZOV TEOREM REPREZENTACIJE)

Neka je $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ Hilbertov prostor. Za svaki neprekinuti linearni funkcional $L \in H'$, postoji jedinstveni vektor $u \in H$ takav da vrijedi

$$\forall v \in H \quad \langle L, v \rangle = (u, v)_H.$$

Nadalje, vrijedi $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$. ■

Napomena.

Vidimo da je preslikavanje $L \mapsto u$ izometrički izomorfizam, što dozvoljava identificiranje prostora $H' = H$, iako je to čak nepoželjno u slučaju kad je H gusti potprostor većeg Hilbertovog prostora u koji je neprekinuto uložen. Sličan rezultat vrijedi i za L^p prostore i također nosi naziv Rieszovog teorema reprezentacije. Naime, možemo identificirati $(L^p)' = L^q$, za $1 < p < \infty$, ako za q uzmemo njegov Hölder-konjugirani eksponent.

Definicija 1.4

Za bilinearnu formu $a(\cdot, \cdot)$ na normiranom prostoru H kažemo da je:

- omeđena na $V \subset H$ ako postoji $C > 0$ takav da

$$\forall u, v \in V \quad a(u, v) \leq C \|u\|_H \|v\|_H,$$

- koercitivna na $V \subset H$ ako postoji $c > 0$ takav da

$$\forall v \in V \quad a(v, v) \geq c \|v\|_H^2.$$

Napomena.

Poseban slučaj omeđene i koercitivne bilinearne forme je sam skalarni produkt.

Sljedeći, također klasični teorem daje reprezentaciju neprekinutog linearnog funkcionala pomoću bilinearnog funkcionala, za razliku od Rieszovog teorema koji za to koristi skalarni produkt.

Teorem 1.2 (LAX-MILGRAM)

Neka je H Hilbertov prostor i $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ omeđena koercitivna bilinearna forma na H . Tada za svaki neprekinuti linearni funkcional $f \in H'$ postoji jedinstveni vektor $u \in H$ takav da je

$$\forall v \in H \quad \langle f, v \rangle = a(u, v).$$

Štoviše, ako je a simetrična, tada je $u \in H$ okarakteriziran svojstvom

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - \langle f, v \rangle \right\}.$$

■

DISTRIBUCIJE

U proučavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, prirodnije je rješenja reprezentirati u terminima objekata općenitijih od funkcija. Tako dolazimo do pojma *distribucija* ili generaliziranih funkcija. Za osnovu uzimamo ranije definirane test funkcije $\mathcal{D}(\Omega)$ opskrbljene topologijom strogog induktivnog limesa i prostor distribucija $\mathcal{D}'(\Omega)$ definiramo kao neprekinute linearne funkcionalne na tom prostoru. Distribucija $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je neprekinuta u nuli u sljedećem smislu (neprekinutost u topologiji strogog induktivnog limesa, v. [24]):

$$\forall K \in \mathcal{K}(\Omega), \exists m \in \mathbf{N}_0, \exists C > 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\text{supp } \varphi \subseteq K \Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Primjer.

Svaka funkcija $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ definira distribuciju T_f na sljedeći način

$$\langle T_f, \varphi \rangle \equiv \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \text{za } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Budući da je $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ za $1 \leq p \leq \infty$, dolazimo do prirodnog ulaganja $L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Za drugi primjer možemo uzeti *Diracovu masu*, koja se ne može reprezentirati pomoću integrala kao u prethodnom primjeru. To je distribucija u oznaci $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definirana s

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \text{za } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Uz prostor distribucija uvodimo i pojam generalizirane ili slabe derivacije. Neka je $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ lokalno integrabilna funkcija na Ω i neka je $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ multiindeks. Tada lokalno integrabilnu funkciju v zovemo α -slaba derivacija funkcije u i pišemo $v = \partial^\alpha u$ ako

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_{\Omega} v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi dx.$$

Za distribucije želimo definirati operaciju deriviranja i pritom želimo sačuvati osnovna svojstva koja su vrijedila za funkcije. Tako za proizvoljnu distribuciju T i multiindeks α definiramo:

$$\langle \partial^\alpha T, u \rangle \equiv (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha u \rangle.$$

Takva generalizirana (slaba) derivacija proširuje pojam derivacije funkcija u smislu da se za funkciju iz $C^{|\alpha|}(\Omega)$ klasična i distribucijska derivacija reda $|\alpha|$ podudaraju. Zbog toga ćemo u daljnjem tekstu za obje derivacije koristiti jednake (standardne) oznake. Lako se vidi da za slabu derivaciju također vrijede pravilo derivacije produkta, lančanog deriviranja i, naravno, formula parcijalne integracije, što proizlazi direktno iz definicije.

Primjer.

Uzmimo za primjer Heavisideovu funkciju na \mathbf{R} , $H \equiv \chi_{\mathbf{R}_0^+}$. Klasična derivacija te funkcije ne postoji zbog prekida u nuli, no lako se provjeri da je njena slaba derivacija jednaka ranije spomenutoj Diracovoj masi $H' = \delta_0$.

SOBOLJEVLJEVI PROSTORI

Sada dolazimo do definicije funkcijskih prostora koji zajedno s rezultatima iz funkcionalne analize, koje ćemo također ukratko opisati u ovome poglavlju, čine osnovu u proučavanju pitanja postojanja i jedinstvenosti rješenja parcijalnih diferencijalnih jednačbi.

Definicija 1.5 (SOBOLJEVLJEVI PROSTORI)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoren skup, $m \in \mathbf{N}$ i $1 \leq p \leq \infty$. Soboljevljev prostor je

$$W^{m,p}(\Omega) \equiv \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \text{za } |\alpha| \leq m \right\}.^3$$

³Derivacija u definiciji je u smislu distribucija.

Posebno, za $p = 2$ označavamo $H^m(\Omega) \equiv W^{m,2}(\Omega)$.

Definiramo i prostore $W_0^{m,p}(\Omega) \equiv Cl_{W^{m,p}(\Omega)}\mathcal{D}(\Omega)$ i $H_0^m(\Omega) \equiv Cl_{H^m(\Omega)}\mathcal{D}(\Omega)$, za slučaj $p = 2$.

Norma na $W^{m,p}(\Omega)$ definira se kao

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \equiv \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad \text{za } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{za } p = \infty.$$

Napomena.

Važno svojstvo definiranih prostora je potpunost, odnosno preciznije, uz dane norme, $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ su Banachovi prostori za $1 \leq p \leq \infty$, dok su $(H^m(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H^m(\Omega)})$ Hilbertovi prostori uz skalarni produkt

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{za } u, v \in H^m(\Omega).$$

Nadalje, $W^{m,p}(\Omega)$ su reflektivni za $1 < p < \infty$ i separabilni za $1 \leq p < \infty$.

Prostori $W_0^{m,p}(\Omega)$ mogu se okarakterizirati kao prostori $W^{m,p}$ funkcija kojima je trag nula. Operator traga potrebno je uvesti budući da su funkcije definirane samo skoro svuda, i ne bi imalo smisla govoriti o točkovnim vrijednostima na rubu.

Za dualni prostor $(H_0^m(\Omega))'$, odnosno prostor svih neprekinutih linearnih funkcionala na $H_0^m(\Omega)$, uvodimo oznaku $H^{-m}(\Omega)$.

Napomena.

Prostore $H^m(\mathbf{R}^n)$ možemo definirati i pomoću Fourierove pretvorbe, što nam stavlja na raspolaganje vrlo korisne rezultate Fourierove analize, na primjer pretvaranje operacije deriviranja $\partial/\partial x_j$ u algebarsku operaciju množenja. Iako na taj način možemo definirati prostore $H^s(\mathbf{R}^n)$ i za $s \in \mathbf{R}$, ograničit ćemo se samo na slučaj $s = m \in \mathbf{N}$.

Prvo definiramo preslikavanje Λ^m na $L^2(\mathbf{R}^n)$ kao

$$\Lambda^m u \equiv \mathcal{F}^{-1} \left((1 + |\xi|^2)^{m/2} \mathcal{F} u \right).$$

To je preslikavanje izomorfizam na prostoru *temperiranih distribucija* $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, a to je dual Schwartzovog prostora \mathcal{S} brzo opadajućih C^∞ funkcija, odnosno

takvih funkcija koje zajedno sa svojim derivacijama iščezavaju u beskonačnosti brže od bilo koje potencije. Vrijedi

$$H^m(\mathbf{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbf{R}^n) \mid \Lambda^m u \in L^2(\mathbf{R}^n) \right\},$$

a skalarni produkt jednak je

$$(u, v)_{H^m(\mathbf{R}^n)} = (\Lambda^m u, \Lambda^m v)_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

Iskažimo i teoreme ulaganja Soboljevjevih prostora u L^p prostore, uz koje se vežu imena poput Soboljev-Gagliardo-Nirenberg ili Morrey (v. [7] i [21]). Prije samog teorema definirajmo za $1 \leq p \leq \infty$ i $m \in \mathbf{N}$ *Soboljevjev eksponent* kao p^* za koji vrijedi

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n},$$

gdje je n dimenzija prostora.

Teorem 1.3 (TEOREM ULAGANJA)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ proizvoljan otvoren skup klase C^1 ili cijeli prostor \mathbf{R}^n , te neka su $1 \leq p \leq \infty$ i $m \in \mathbf{N}$. Tada imamo sljedeća neprekinuta ulaganja:

- ako je $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, tada

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega),$$

- ako je $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, tada

$$W^{m,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{za svako } q \in [n, +\infty),$$

- ako je $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, tada

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

■

O kompaktnosti ulaganja za slučaj $m = 1$ govori teorem koji se pripisuje Rellichu i Kondrašovu.

Teorem 1.4 (KOMPAKTNOST ULAGANJA)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ omeđeno područje klase C^1 . Tada imamo sljedeća kompaktna ulaganja:

- ako je $p < n$, tada

$$\forall q \in [1, p^*) \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

- ako je $p = n$, tada

$$\forall q \in [1, +\infty) \quad W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

- ako je $p > n$, tada

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

■

Ako je Ω omeđen, tada imamo sljedeće rezultate.

Lema 1.5 (POINCARÉOVA NEJEDNAKOST)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoren i omeđen skup klase C^1 i $1 \leq p < \infty$. Tada postoji konstanta $C(p, \Omega) > 0$ takva da

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Posebno, izraz $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ u tom slučaju predstavlja normu na $W_0^{1,p}(\Omega)$ ekvivalentnu $W^{1,p}$ -normi, a izraz $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$ je skalarni produkt na $H_0^1(\Omega)$, čija je inducirana norma ekvivalentna H^1 -normi na $H_0^1(\Omega)$.

Tvrđnja vrijedi i ako je Ω omeđen samo u jednom smjeru. ■

Lema 1.6 (KORNOVE NEJEDNAKOSTI)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoreno omeđeno područje i neka je

$$\mathbf{e}(v) = \frac{1}{2} (\nabla v + (\nabla v)^\tau) \quad \text{za } v \in H^1(\Omega).$$

Tada postoje konstante C_1 i C_2 takve da

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} |\mathbf{e}(v)|^2 + \int_{\Omega} |v|^2 \geq C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} |\mathbf{e}(v)|^2 \geq C_2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

■

U nastavku će nam trebati i jedan od važnih pomoćnih rezultata iz teorije (običnih) diferencijalnih jednažbi, preciznije Gronwallova lema. (v. [3]) Iskazat ćemo je samo u obliku koji nam je najpogodniji.

Lema 1.7 (GRONWALLOVA NEJEDNAKOST)

Neka je $I \subseteq \mathbf{R}$ interval, $w \in C(I, [0, +\infty))$ i $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. Ako za $t_0 \in I$ vrijedi

$$w(t) \leq \alpha + \beta|t - t_0| + \gamma \left| \int_{t_0}^t w(\tau) d\tau \right|, \quad \text{za } t \in I,$$

tada je

$$w(t) \leq (\alpha + \beta|t - t_0|) e^{\gamma|t - t_0|}, \quad \text{za } t \in I.$$

■

U proučavanju rubnih problema parcijalnih diferencijalnih jednažbi važnu ulogu imaju Greenove formule (v. [1]), koje ćemo i mi kasnije koristiti.

Lema 1.8 (GREENOVE FORMULE)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ područje klase C^1 . Za funkcije $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^2(\bar{\Omega})^n$ vrijedi:

- Prva Greenova formula

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathbf{v} \, dS - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

- Druga Greenova formula

$$\int_{\Omega} (\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathbf{u} \right) dS,$$

gdje $\boldsymbol{\nu}$ označava vanjsku jediničnu normalu na $\partial\Omega$.

■

SLABE TOPOLOGIJE I SLABA KONVERGENCIJA

Podsjetimo ukratko na neke osnovne činjenice iz funkcionalne analize koje ćemo kasnije trebati. Jaka topologija ili topologija inducirana normom često u praksi ne daje dovoljne uvjete za konvergenciju određenog promatranog niza funkcija. U takvom slučaju, da bi se ipak odredio limes, jedno od rješenja je korištenje takozvane *slabe topologije* i vezanih rezultata o slaboj konvergenciji. Slaba topologija na realnom normiranom prostoru E , u oznaci $\sigma(E, E')$ je najslabija topologija takva da su u njoj svi ograničeni linearni funkcionali

iz E' još uvijek neprekinuti i njenu podbazu čine svi skupovi oblika $f^{-1}(\mathcal{U})$, gdje je $f \in E'$ i \mathcal{U} otvoren skup u \mathbf{R} .

Iako se na konačnodimenzionalnim prostorima slaba i jaka topologija podudaraju, svoju korist slaba topologija pokazuje na prostorima funkcija, koji su u pravilu beskonačnodimenzionalni. U tom slučaju, slaba topologija sadrži strogo manje otvorenih skupova od jake, što povlači da je kompaktnost možda zadovoljena za širu klasu skupova. Ako je prostor E uz to još i refleksivan, tada imamo sljedeći važan rezultat o slaboj nizovnoj kompaktnosti.

Teorem 1.9

Neka je E refleksivan Banachov prostor i (u_n) omeđen niz u E . Tada postoji podniz tog niza koji konvergira u slaboj topologiji $\sigma(E, E')$. ■

Napomena.

Slabu konvergenciju niza (u_n) prema limesu u uobičajeno je označavati sa

$$u_n \rightharpoonup u.$$

U slučaju da promatrani prostor nije refleksivan, uvodi se još slabija topologija, takozvana *slaba* topologija*, u oznaci $\sigma(E', E)$. Znamo da postoji linearna izometrija $J : E \rightarrow E''$ koja vektoru $e \in E$ pridružuje linearni funkcional na E' s $f \mapsto \langle f, e \rangle$, za $f \in E'$. To preslikavanje nazivamo *kanonsko ulaganje* prostora E u E'' . Slaba* topologija je najslabija topologija na prostoru E' , takva da su funkcionali iz $J(E) \subseteq E''$ neprekinuti. Uz tu topologiju imamo vezan ovaj rezultat.

Teorem 1.10

Neka je E separabilan Banachov prostor. Tada svaki omeđeni niz u E' ima slabo konvergentan podniz.* ■

Napomena.

Slabu* konvergenciju niza (u_n) prema limesu u uobičajeno je označavati sa

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u.$$

1.7 Asimptotička analiza

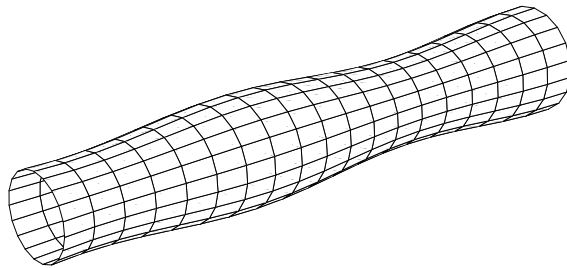
Asimptotička analiza je matematička disciplina koja se bavi proučavanjem višedimenzionalnih problema i metodama njihova efektivnog reduciranja. Fizikalne probleme imalo složenije prirode u pravilu opisuju (diferencijalne) jednačbe čija kompleksnost predstavlja poteškoće u teorijskom ili numeričkom proučavanju. U inženjerskom pristupu traže se gotove i pojednostavljene, takozvane *efektivne jednačbe*, koje uz poznati red točnosti aproksimiraju originalni problem. Asimptotička analiza obuhvaća izvod efektivnih jednačbi i daje ocjenu pogreške u terminima takozvanog *malog parametra*. Njegov karakter ovisi o prirodi problema, najčešće o geometriji odnosno dimenzijama područja koje se promatra. To područje mora u određenom smislu biti usko odnosno tanko i tada se problem promatra na limesu kada ta mala dimenzija teži prema nuli. Primarna poteškoća koja se javlja u ispitivanju konvergencije tako dobivenog niza rješenja je činjenica da članovi tog niza pripadaju različitim funkcijskim prostorima koji ovise o malom parametru. Zbog toga se uvodi skaliranje, odnosno dilatacija varijabli (v. [12]), koja mijenja jednačbe i funkcije tako da su sve definirane na jednom fiksnom području. Sljedeći korak predstavlja asimptotički razvoj nepoznatih funkcija po potencijama malog parametra, gdje je ključno određivanje vodeće potencije u svakom razvoju. Naime, budući da reducirane jednačbe dobijemo uvrštavanjem asimptotičkih razvoja u polazne jednačbe i promatranjem ponašanja uz potencije vodećeg reda, važno je uspostaviti dobar odnos između nepoznatih funkcija kako bi njihov doprinos u jednačbama bio ravnopravan. Izbor vodećih potencija standardno slijedi iz energetske ocjene.

Za problem kojim se bavimo u ovome radu, dobar izbor za mali parametar predstavlja omjer širine i duljine krvne žile, budući da nas zanima tok krvi kroz usku i dugačku arteriju. Taj ćemo omjer označiti s ε i promatrati sustav jednačbi toka fluida i gibanja bočne stijenke na limesu kada $\varepsilon \rightarrow 0$.

2 Model arterije i krvnog toka

2.1 Navierove jednadžbe elastične zakrivljene membrane

Motivirani anatomijom krvnih žila, u geometrijskom opisivanju arterije polazimo od sljedećih temeljnih postavki. Promatramo dugačku i usku cilindričnu cijev s rastezljivom elastičnom stijenkom, čija je debljina mala u odnosu na promjer poprečnog presjeka. Spomenutu bočnu stijenku tretiramo kao čvrsto elastično tijelo čije ponašanje u smislu gibanja, odnosno otklona od ravnotežnog položaja, određuju jednadžbe koje nam daje teorija elastičnosti.

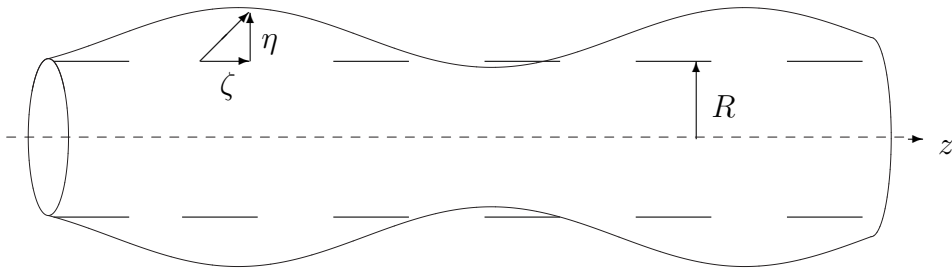


Zbog pretpostavke da je debljina stijenke mala u odnosu na promjer cijevi, možemo uvesti takozvanu "membransku aproksimaciju", koja je uobičajena u ovakvom slučaju. Prvo, kod elastičnog čvrstog tijela koje ima oblik tanke ploče djelovanje tenzora naprezanja u smjeru normale je zanemarivo u odnosu na ostale komponente, tako da možemo pretpostaviti ravninsko stanje naprezanja i deformacija. To nazivamo *aproksimacijom tanke ploče*. Nadalje, ako je takva tanka ploča zakrivljena, kao što je naš slučaj, tada vlačna naprezanja prevladavaju nad ostalim komponentama koje možemo zanemariti. To nazivamo *aproksimacijom membrane*. Moramo samo naglasiti da kod zakrivljene membrane ipak dolazi do otpora i sili koja je okomita na tangencijalnu ravninu i to kao posljedica zakrivljenosti. Naime, prema [19], ako \mathbf{T} označava tenzor naprezanja, \mathbf{C} tenzor zakrivljenosti, h debljinu membrane i \mathbf{F} vanjsku silu, tada iz jednadžbe ravnoteže $\operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{F}$ dobijemo normalnu komponentu

sile po jedinici površine (naprezanja) membrane izrazom

$$F_n = h\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}.$$

Prirodno je sada uvesti cilindrični koordinatni sustav kojeg postavljamo tako da se os simetrije promatrane cijevi poklapa sa z -osi, kao što se vidi na sljedećoj slici.



Slika 2.1

Zbog osno simetrične prirode problema zaključujemo sljedeće:

- komponente tenzora \mathbf{T} i \mathbf{C} u radijalnom su smjeru jednake nula, tj. različite su od nula jedino u smjeru ϑ -osi i z -osi
- odklon stijenke od ravnotežnog položaja očituje se jedino u terminima radijalnog pomaka η i longitudinalnog pomaka ζ , odnosno ne dolazi do torzije

Time dobivamo dvodimenzionalno stanje naprezanja, a tenzor naprezanja \mathbf{T} povezan je s tenzorom deformacija $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ jednakostima:

$$e_{\vartheta\vartheta} = (T_{\vartheta\vartheta} - \nu T_{zz})/E, \quad e_{zz} = (T_{zz} - \nu T_{\vartheta\vartheta})/E, \quad (10)$$

koje slijede iz Hookeovog zakona, gdje su E i ν Youngov modul elastičnosti i Poissonov koeficijent, kao i prije.

Pod pretpostavkom malih odklona stijenke, tenzore naprezanja i zakrivljenosti možemo zapisati kao sumu neperturbiranog i perturbiranog dijela:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{T}^{(1)}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{C}^{(1)}.$$

Neperturbirane vrijednosti tenzora $\mathbf{T}^{(0)}$ dane su kao konstante određene početnim opterećenjem stijenke (tzv. *prestressing*), kao na primjer razlikom tlakova u unutrašnjosti i izvan cijevi. Slično, vrijednosti tenzora $\mathbf{C}^{(0)}$ određene su stanjem stijenke dok fluid miruje, a $\mathbf{C}^{(1)}$ predstavlja linearnu aproksimaciju, odnosno doprinos prvog reda tenzora zakrivljenosti.

Zapišimo prvo jednadžbe krvne stijenke, kao i radijvektor točke na toj plohi:

$$\begin{aligned}x &= x(\vartheta, z) = (R + \eta(z)) \cos \vartheta, \\y &= y(\vartheta, z) = (R + \eta(z)) \sin \vartheta, \\z &= z(\vartheta, z) = z + \zeta(z), \\ \vec{r} &= (R + \eta(z)) \cos \vartheta \vec{i} + (R + \eta(z)) \sin \vartheta \vec{j} + (z + \zeta(z)) \vec{k}\end{aligned}$$

Tangencijalni vektori na krvnoj stijenci su

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= -(R + \eta) \sin \vartheta \vec{i} + (R + \eta) \cos \vartheta \vec{j} \\ \vec{E}_2 &= \frac{\partial \eta}{\partial z} \cos \vartheta \vec{i} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \sin \vartheta \vec{j} + \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \vec{k},\end{aligned}$$

a vektor normale

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \left(\cos \vartheta \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \vec{i} + \sin \vartheta \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \vec{j} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Komponente tenzora zakrivljenosti u kartezijevim koordinatama računamo sada po formulama

$$\begin{aligned}C_{11} &= -\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \vartheta} = -\frac{(R + \eta) \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \\ C_{12} &= -\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial z} = 0 \\ C_{21} &= -\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \vartheta} = 0 \\ C_{22} &= -\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Prebacivanjem u cilindrične koordinate dobivamo komponente spomenutih tenzora $\mathbf{C}^{(0)}$ i $\mathbf{C}^{(1)}$, koje koristimo prilikom računanja normalne sile (F_r):

$$C_{\vartheta\vartheta}^{(0)} = -\frac{1}{R}, \quad C_{zz}^{(0)} = 0, \quad C_{\vartheta\vartheta}^{(1)} = -\frac{\eta}{R^2}, \quad C_{zz}^{(1)} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}.$$

Tangencijalna komponenta jednadžbe $\operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{F}$ daje nam longitudinalnu komponentu sile (F_z), koja je u našem osno simetričnom slučaju jednaka:

$$F_z = h \frac{\partial T_{zz}^{(1)}}{\partial z} = \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)$$

Nadalje, zbog linearne povezanosti tenzora $\mathbf{T}^{(1)}$ i tenzora deformacija $\mathbf{e}(\mathbf{u})$, što vidimo iz (10), dobivamo jednakosti:

$$T_{\vartheta\vartheta}^{(1)} = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{\vartheta\vartheta} + \nu e_{zz}),$$

$$T_{zz}^{(1)} = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{zz} + \nu e_{\vartheta\vartheta}).$$

Nakon što komponente tenzora deformacija izrazimo pomoću radijalnog (η) i longitudinalnog (ζ) otklona stijenke:

$$e_{\vartheta\vartheta} = \frac{\eta}{R}, \quad e_{zz} = \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

a zatim u formulu za normalnu silu (u našem slučaju to je F_r) uvrstimo i komponente tenzora $\mathbf{C}^{(1)}$, dobijemo

$$F_r = -\frac{hT_{\vartheta\vartheta}^{(1)}}{R} + hT_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - hT_{\vartheta\vartheta}^{(0)} \frac{\eta}{R^2}.$$

Sada vidimo da su jednadžbe gibanja stijenke u Lagrangeovim koordinatama:

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\nu}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\eta}{R^2} \right) + hT_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - hT_{\vartheta\vartheta}^{(0)} \frac{\eta}{R^2} - h\rho_w \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \\ F_z &= \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) - h\rho_w \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

U jednadžbama R označava polumjer cijevi, h debljinu stijenke, a ρ_w njenu gustoću, dok su veličine F_r i F_z jednake radijalnoj i longitudinalnoj komponenti kontaktne sile po jedinici površine koja dolazi od naprezanja inducirano gibanjem fluida. Te su sile, prema Newtonovom zakonu, jednake silama otpora stijenke, odnosno izrazima na desnoj strani – preciznije, istog su iznosa, a suprotnog predznaka.

Primijetimo da su u izraze (11) uključeni i inercijalni članovi. Ti izrazi predstavljaju poseban oblik Navierovih jednadžbi (4) i to za dvodimenzionalno osno simetrično stanje naprezanja.

2.2 Parametri i fiziološka svojstva krvi i arterijske stijenke

Glavni problem svakog matematičkog modela je pronaći optimalan način pojednostavljenja općenito vrlo složene realne situacije uz zadržavanje bitnih fizikalnih parametara. Cilj je doći do efektivnih odnosno reduciranih jednadžbi koje na zadovoljavajući način opisuju problem, u našem slučaju tok krvi, a da s druge strane one budu dovoljno jednostavne za proučavanje, bilo u teorijskom ili numeričkom smislu.

U fiziološkom smislu krv je mješavina krvne plazme čiji je udio oko 55% i krvnih stanica koje čine oko 45% od ukupno 5–6 litara krvi prosječnog odraslog čovjeka. Upravo zbog tih crvenih (*eritrociti*) i bijelih krvnih stanica (*leukociti*), te krvnih pločica (*trombociti*), krv nije newtonovski fluid, ali je takva aproksimacija ipak prihvatljiva. (v. [23])

Navedimo neke od karakterističnih vrijednosti za krv:

- gustoća krvi $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$,
- referentni tlak $P_0 = 13000 \text{ Pa}$,
- dinamička viskoznost $\mu = 3.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$.

U jednadžbama koristimo još i sljedeće parametre vezane za arterijsku stijenu:

- debljina stijenke $h = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$,
- gustoća stijenke $\rho_w = 1.1 \text{ kg/m}^2$,
- Youngov modul $E = 6000 \text{ Pa}$,
- modul smicanja $k \cdot G = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.⁴

Što se tiče membranskog tenzora naprezanja, odnosno neperturbiranog dijela ranije označenog s $\mathbf{T}^{(0)}$, njegove su komponente dane s

$$T_{\vartheta\vartheta}^{(0)} = R\Delta P_0/h = 0,$$

$$T_{zz}^{(0)} = kG,$$

gdje smo, radi jednostavnosti, pretpostavili da je u početnom stanju razlika tlakova unutar žile i u okolnom tkivu $\Delta P_0 = 0$.

⁴Napomena: u konstantu je uključen i Timošenkov faktor korekcije k .

2.3 Sparivanje jednadžbi toka i gibanja arterijske stijenke

Otkucaji srca uzrokuju pulsirajući krvni tok, a nama je od interesa razlika tlakova na ulaznom i izlaznom dijelu promatranog područja, koja stvara devijaciju od referentnog odnosno neperturbiranog stanja. Pretpostavljamo da je perturbacija referentnog tlaka, koju ćemo označiti s p , mala u usporedbi s referentnim tlakom P_0 i da je akceleracija fluida mnogo manja od njegove viskoznosti. Krvni tok, odnosno brzinu $\mathbf{v} = (v_r, v_\vartheta = 0, v_z)$, opisuju stacionarne inkompresibilne Stokesove jednadžbe u cilindričnim Eulerovim koordinatama čiji se puni oblik (8) zbog osne simetričnosti svodi na:

$$\begin{aligned} -\mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ -\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Posljednji izraz u sustavu je uvjet inkompresibilnosti. Povezivanje ovih jednadžbi s Navierovim jednadžbama zakrivljene membrane (11), vrši se preko bočnih rubnih uvjeta, zahtijevajući neprekinutost veličina na granici fluid-stijenka:

1) neprekinutost brzine

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ v_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \end{aligned}$$

2) neprekinutost, odnosno ravnoteža sila

$$\begin{aligned} F_r &= \left(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{v})\right)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \\ &= -\frac{hE}{1-\nu^2}\left(\frac{\nu}{R}\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\eta}{R^2}\right) + hGk\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - h\rho_w\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_z &= \left(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{v})\right)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \\ &= \frac{hE}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial \eta}{\partial z}\right) - h\rho_w\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Sparivanje se može izvršiti na dva načina:

1) **Linearno sparivanje** - fluid i stijenka povezuju se preko nedeformirane granice koju identificiramo s referentnom konfiguracijom. Na opisani način izbjegavamo probleme koji se pojavljuju prilikom promatranja veličina u Lagrangeovoj deskripciji. Ovakva je aproksimacija dobra ako su otkloni stijenke mali, što je pretpostavljeno u našem slučaju.

2) **Nelinearno sparivanje** - fluid i stijenka povezuju se preko deformirane granice, što se mora učiniti ako otkloni stijenke nisu zanemarivi. U tom slučaju, na bočnoj granici Eulerovu veličinu \mathbf{v} povezujemo s Lagrangeovim veličinama η i ζ na sljedeći način:

$$\mathbf{v}(R + \eta, z + \zeta, t) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) (z, t).$$

Ovakva aproksimacija je složenija i već ako, na primjer, uzmemo u obzir samo radijalne pomake, Jacobijan transformacije odnosno prijelaza s Eulerovih koordinata fluida na Lagrangeove koordinate stijenke neće više biti zanemariv. Preciznije rečeno, Jacobijan neće više biti približno jednak jedinici (v. [11]). Nelinearno sparivanje nije predmet proučavanja u ovome radu.

Napomena.

U nastavku koristimo linearno sparivanje i napominjemo važnost identificiranja granice fluida i stijenke s referentnom konfiguracijom, što je dobra aproksimacija uz pretpostavku da su otkloni stijenke mali.

Kao početne uvjete stijenke uzimamo otklone i brzine jednake nuli:

$$\eta = \zeta = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0,$$

a rubni uvjeti su sljedeći:

1) na ulaznoj granici (rub slobodan u smjeru z -osi)

$$v_r = 0, \quad p = 0,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \eta = 0,$$

2) na izlaznoj granici (fiksna rub)

$$v_r = 0, \quad p = A(t),$$

$$\eta = \zeta = 0.$$

$A(t)$ predstavlja pad tlaka u ovisnosti o vremenu i radi jednostavnosti uzimamo da je $A \in C_c^\infty(\mathbf{R}^+)$. Upravo je to funkcija koja pokreće cijeli problem i koja, slobodno rečeno, igra ulogu vanjskih sila.

Početno-rubne uvjete, ovdje izrečene neprecizno i opisno, u sljedećem ćemo poglavlju zapisati formalno kako bismo sve jednadžbe pripremili za asimptotičku analizu.

3 Asimptotička analiza jednadžbi toka

U nastavku izvodimo energetske ocjene za naš problem interakcije fluida i stijenke i to u terminima elastične i viskozne energije. Iz tih energetskih (ne)jednakosti dobivamo optimalne apriorne ocjene rješenja u ovisnosti o malom parametru, a to je u našem slučaju omjer polumjera i duljine krvne žile. Iz apriornih ocjena zaključujemo koji bi bio odgovarajući oblik asimptotičkog razvoja, čijim uvrštavanjem u jednadžbe sustava fluid-stijenka iz poglavlja 2.3 dobivamo reducirane jednadžbe. One predstavljaju aproksimaciju drugog reda točnosti originalnog problema u unutrašnjosti područja. Aproksimacija je strogo opravdana slabom konvergencijom i odgovarajućim ocjenama pogreške. Rezultat o slaboj konvergenciji pokazuje da je limes rješenja (reskaliranog) originalnog problema jednak jedinstvenom rješenju reduciranih jednadžbi dobivenih asimptotičkom analizom. Ocjena pogreške otkriva nam red aproksimacije, a formiramo i rubni sloj na izlazu. Rubni uvjeti na izlaznoj granici tipični za probleme s fiksnom domenom, kao na primjer tangencijalna brzina jednaka nuli, nisu kompatibilni s problemom interakcije fluida i stijenke na preostalom dijelu granice. Upravo zbog toga konstruiramo izlazni rubni sloj i nalazimo ocjene pogreške za tako modificirano aproksimativno rješenje.

3.1 Formulacija problema u terminima malog parametra

Područje koje promatramo je desno postavljeno cilindar i definiramo mali parametar ε kao omjer polumjera i duljine cilindra. Za svako $\varepsilon > 0$ uvodimo oznaku

$$\Omega_\varepsilon \equiv \left\{ r\vec{e}_r + \vartheta\vec{e}_\vartheta + z\vec{e}_z \in \mathbf{R}^3 \mid r < \varepsilon R, 0 \leq \vartheta < 2\pi, 0 < z < L \right\} \quad (13)$$

kao zapis promatranog područja u cilindričnim koordinatama. Vrijednosti $R > 0$ i $L > 0$ neka su unaprijed zadane i konstantne.

Bočnu stijenkicu cilindra označimo sa

$$\Sigma_\varepsilon \equiv \left\{ \varepsilon R\vec{e}_r + \vartheta\vec{e}_\vartheta + z\vec{e}_z \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq \vartheta < 2\pi, 0 < z < L \right\} \quad (14)$$

i podsjećamo da je njeno gibanje dano Navierovim jednadžbama (11), koje ovdje ponovno zapisujemo u terminima malog parametra.

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\nu^2} \left(\frac{\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2 R^2} \right) + h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon) \frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial z^2} - h(\varepsilon)\rho_w \frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial t^2}, \\ F_z &= \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \zeta^\varepsilon}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \right) - h(\varepsilon)\rho_w \frac{\partial^2 \zeta^\varepsilon}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

U daljnjem razmatranju pretpostavljamo sljedeće odnose između parametara problema – Youngov modul elastičnosti $E(\varepsilon)$, debljina stijenke $h(\varepsilon)$ i modul smicanja $G(\varepsilon)k(\varepsilon)$ zadovoljavaju:

$$\begin{aligned} 1) \quad & h(\varepsilon)E(\varepsilon) > \varepsilon, \\ 2) \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{\varepsilon} = E_0 \in \langle 0, +\infty \rangle, \\ 3) \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon) = G_0 \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (15)$$

Inkompresibilne Stokesove jednadžbe iz (12) zapisujemo sada formalno za ε -problem i dobivamo vezu između brzine fluida $\mathbf{v}^\varepsilon = (v_r^\varepsilon, v_\theta^\varepsilon = 0, v_z^\varepsilon)$ i perturbacije tlaka p^ε , koji su dani kao funkcije definirane na $\Omega_\varepsilon \times \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} -\mu \left(\frac{\partial^2 v_r^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r^\varepsilon}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial r} - \frac{v_r^\varepsilon}{r^2} \right) + \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial r} &= 0, \\ -\mu \left(\frac{\partial^2 v_z^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z^\varepsilon}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z} + \frac{v_r^\varepsilon}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Jednadžbama (16) pridružujemo i odgovarajuće rubno-početne uvjete, kao u poglavlju 2.3:

$$v_r^\varepsilon = \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t}, \quad v_z^\varepsilon = \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \quad \text{na } \Sigma_\varepsilon \times \mathbf{R}^+, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} F_r &= \left(-p^\varepsilon \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \right) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \\ &= -\frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\nu^2} \left(\frac{\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2 R^2} \right) + h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon) \frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial z^2} - h(\varepsilon)\rho_w \frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial t^2} \\ &\quad \text{na } \Sigma_\varepsilon \times \mathbf{R}^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_z &= \left(-p^\varepsilon \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \right) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \\ &= \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \zeta^\varepsilon}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \right) - h(\varepsilon)\rho_w \frac{\partial^2 \zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \quad \text{na } \Sigma_\varepsilon \times \mathbf{R}^+, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} v_r^\varepsilon = 0, \quad p^\varepsilon = 0, \quad \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} = \eta^\varepsilon = 0 \quad \text{na } (\partial\Omega_\varepsilon \cap \{z = 0\}) \times \mathbf{R}^+, \\ v_r^\varepsilon = 0, \quad p^\varepsilon = A^\varepsilon(t), \quad \eta^\varepsilon = \zeta^\varepsilon = 0 \quad \text{na } (\partial\Omega_\varepsilon \cap \{z = L\}) \times \mathbf{R}^+, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\eta^\varepsilon = \zeta^\varepsilon = \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} = 0 \quad \text{na } \Sigma_\varepsilon \times \{0\}, \quad (20)$$

Primijetimo da nas je interakcija fluida i stijenke koja se javlja u toku krvi kroz arteriju dovela do početno-rubnog problema koji je zadan pomoću unaprijed poznatog i vremenski ovisnog pada tlaka $A^\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbf{R}^+)$ između ulazne i izlazne granice promatranog područja. U nastavku ćemo precizirati ovisnost te funkcije o malom parametru ε . Formulacija ε -problema glasi:

Za svako $\varepsilon > 0$, pronaći rješenje sustava (16) u području Ω_ε iz (13) s elastičnom bočnom stijenkom Σ_ε danom sa (14). Bočni rubni uvjeti dani su kao neprekinutost brzina (17) i sila (18). Ulazni i izlazni rubni uvjeti, zajedno s ponašanjem elastične stijenke na tim rubovima dani su pomoću izraza (19), dok početne uvjete predstavljaju izrazi (20).

3.2 Slaba formulacija problema

Uvodimo oznake V^ε za prostor test funkcija i \mathcal{V}^ε za prostor rješenja čije značenje objašnjavamo sljedećim dvjema definicijama.

Definicija 3.1 (PROSTOR TEST FUNKCIJA)

Prostor V^ε definiramo kao prostor svih funkcija

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi_r \vec{e}_r + \varphi_\vartheta \vec{e}_\vartheta + \varphi_z \vec{e}_z \in H^1(\Omega_\varepsilon)^3$$

koje zadovoljavaju:

- 1) $\boldsymbol{\varphi}$ je osno simetrična,
- 2) $\varphi_\vartheta = 0$; $\varphi_r|_{r=\varepsilon R}, \varphi_z|_{r=\varepsilon R} \in H^1(0, L)$,
- 3) $\varphi_r|_{z=0} = \varphi_r|_{z=L} = \varphi_z|_{r=\varepsilon R, z=L} = 0$,
- 4) $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{\varphi_r}{r} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} = 0 \quad u \Omega_\varepsilon$.

Napomena.

Iz definicije vidimo da se komponenta φ_ϑ može zanemariti, pa za $\varphi \in V^\varepsilon$ vrijedi $\varphi = \varphi_r \vec{e}_r + \varphi_z \vec{e}_z \in H^1(\Omega_\varepsilon)^2$. S druge pak strane, budući da se radi o cilindričnom koordinatnom sustavu, ne smijemo u potpunosti izbaciti varijablu ϑ ! Nadalje, iz uvjeta 3) vidimo kakve su vrijednosti test funkcija na ulaznoj i izlaznoj granici.

Definicija 3.2 (PROSTOR RJEŠENJA)

Prostor \mathcal{V}^ε definiramo kao prostor svih funkcija

$$(v_r, v_z, \eta, \zeta) \in H^1(0, T; V^\varepsilon) \times \left(H^1(\langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle)^2 \cap H^2(0, T; L^2(0, L))^2 \right)$$

gdje je $T \in \mathbf{R}^+$ unaprijed zadano, takvih da vrijedi:

- 1) $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad u \Omega_\varepsilon \times \mathbf{R}^+$,
- 2) $\frac{v_r}{r} \in L^2(\Omega_\varepsilon \times \langle 0, T \rangle)$,
- 3) $\eta(0, t) = \eta(L, t) = \zeta(L, t) = 0 \quad za \ t \in \mathbf{R}^+$,
- 4) $v_r(t)|_{z=0} = 0 \quad za \ t \in \mathbf{R}^+$,
- 5) $v_r = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad na \ \Sigma_\varepsilon \times \mathbf{R}^+$.

Sada definiramo slabu ili varijacijsku formulaciju ε -problema sa:

$$\begin{aligned} \forall \varphi = \varphi_r \vec{e}_r + \varphi_z \vec{e}_z \in V^\varepsilon \\ 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \mathbf{e}(\varphi) r dr dz + \\ + \varepsilon R \int_0^L \left\{ h(\varepsilon) G(\varepsilon) k(\varepsilon) \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} + \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon)}{1 - \nu^2} \left(\frac{\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2 R^2} \right) \varphi_r + \right. \\ \left. + \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon)}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} - \frac{\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \varphi_z \right) \right\} \Big|_{r=\varepsilon R} dz + \\ + \varepsilon R h(\varepsilon) \rho_w \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial t^2} \varphi_r + \frac{\partial^2 \zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \varphi_z \right) \Big|_{r=\varepsilon R} dz = - \int_0^{\varepsilon R} A^\varepsilon(t) \varphi_z \Big|_{z=L} r dr \quad u \ \mathcal{D}'(\mathbf{R}^+) \end{aligned} \quad (21)$$

Funkciju $(v_r^\varepsilon, v_z^\varepsilon, \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon) \in \mathcal{V}^\varepsilon$ nazivamo *slabim rješenjem ε -problema* ako je zadovoljeno (21) i ako vrijedi $\eta^\varepsilon = \zeta^\varepsilon = \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} = 0 \quad na \ \Sigma_\varepsilon \times \{0\}$.

Zasad u varijacijskoj formulaciji nismo još koristili vremensku test funkciju, niti integrirali po vremenu. Do gornjeg izraza dolazimo uzimajući prvo za tenzor naprezanja $\boldsymbol{\sigma} = -p^\varepsilon \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)$. Zatim, polazeći od jednadžbe gibanja odnosno ravnoteže $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$, množenjem s $\boldsymbol{\varphi} \in V^\varepsilon$ i integriranjem po Ω_ε (ne integriramo po vremenu!) imamo:

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varphi} dV = \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} \left(-p^\varepsilon \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \right) \boldsymbol{\varphi} dV.$$

Primjenom 1. Greenove formule dobijemo

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(-p^\varepsilon \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \right) \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\varphi} dS + \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \mathbf{I} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} dV - \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} dV.$$

Prvi integral raspišemo po komponentama i koristimo izraze za rubne uvjete, posebno F_r i F_z iz (18). Drugi integral je jednak nuli jer imamo

$$p^\varepsilon \mathbf{I} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} = p^\varepsilon \operatorname{tr} \nabla \boldsymbol{\varphi} = p^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0,$$

a za posljednji izraz zbog simetričnosti tenzora $\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) = \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)^\tau$ imamo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} dV = \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)^\tau \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}^\tau \right) dV = \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) \cdot \mathbf{e}(\boldsymbol{\varphi}) dV.$$

Egzistencija i jedinstvenost rješenja problema (21) je posljedica odgovarajuće energetske ocjene i Kornove nejednakosti.

Budući da moramo proučiti ponašanje rješenja kada $\varepsilon \rightarrow 0$, potrebne su nam optimalne energetske ocjene u ovisnosti o malom parametru ε , koje izvodimo u sljedećem poglavlju.

3.3 Energetske ocjene

Energija problema, ili preciznije njena vremenska derivacija, jer u varijacijskoj formulaciji nismo integrirali po vremenu, dobije se uvrštavanjem polja brzine kao test funkcije u varijacijskoj zadaći (21) i sastoji se od derivacija elastične energije membrane (stijenke), viskozne energije fluida (krvi) i energije koja odgovara vanjskim silama (induciranim padom tlaka). Ako uvedemo njihove oznake respektivno sa \mathcal{E}_{el} , \mathcal{E}_μ i \mathcal{E}_f , energetska jednakost glasi

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\mu + \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{el} = -\frac{d}{dt} \mathcal{E}_f.$$

Vremenska derivacija viskozne energije fluida je dana izrazom

$$\frac{d\mathcal{E}_\mu}{dt} = 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz,$$

a energije koja odgovara padu tlaka izrazom

$$\frac{d\mathcal{E}_f}{dt} = \int_0^{\varepsilon R} A^\varepsilon(t) v_z^\varepsilon|_{z=L} r dr.$$

Vremenska derivacija elastične energije je

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{el}}{dt} &= \varepsilon R \int_0^L \left\{ h(\varepsilon) G(\varepsilon) k(\varepsilon) \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial z \partial t} + \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon)}{1 - \nu^2} \left(\frac{\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2 R^2} \right) \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} + \right. \\ &+ \left. \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon)}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial^2 \zeta^\varepsilon}{\partial z \partial t} - \frac{\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) \right\} dz + \\ &+ \varepsilon R h(\varepsilon) \rho_w \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial t^2} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial^2 \zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) dz, \end{aligned}$$

a sljedeća lema daje nam alternativni oblik tog izraza.

Lema 3.1

Radikalni i longitudinalni otkloni η^ε i ζ^ε zadovoljavaju jednakost

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{el}}{dt} &= \frac{\varepsilon R}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \rho_w h(\varepsilon) \int_0^L \left(\left| \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \right) dz + h(\varepsilon) G(\varepsilon) k(\varepsilon) \int_0^L \left| \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 dz + \right. \\ &+ \left. \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon)}{1 - \nu^2} \int_0^L \left(\nu \left(\frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon R} + \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 + (1 - \nu) \left(\left| \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon R} \right|^2 + \left| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 \right) \right) dz \right\}. \end{aligned}$$

Dokaz:

Prva dva člana slijede trivijalno, dok za posljednji izraz u jednakosti pogledajmo prvo da možemo zapisati

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon)}{1 - \nu^2} \int_0^L \left(\frac{2\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2 R^2} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} + 2 \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial^2 \zeta^\varepsilon}{\partial z \partial t} + \frac{2\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} - \frac{2\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) dz = \\ = \frac{1}{2} \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon)}{1 - \nu^2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\left| \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon R} \right|^2 + \left| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 + \frac{2\nu}{\varepsilon R} \eta^\varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \right) dz, \end{aligned}$$

jer deriviranjem po t , pa onda parcijalnim integriranjem po z imamo:

$$\int_0^L \frac{d}{dt} \left(\eta^\varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \right) dz = \int_0^L \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} dz - \int_0^L \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} dz.$$

Ostatak dokaza sada lako slijedi. \square

Napomena.

Najznačajnija osobina toka fluida kroz područje s popustljivom stijenkom, nasuprot toku kroz fiksno područje, je širenje ili *propagacija* tlačnih valova konačne brzine. Prve ocjene brzine širenja takvih valova dao je Th. Young, a detaljniji osvrt i povijesni razvoj u tome smjeru može se pronaći u [19]. Najpoznatiji i najviše proučavani slučaj pojave tlačnih valova je upravo u krvnim žilama, a nas posebno zanimaju oscilacije membrane uslijed vremenski ovisnog pada tlaka $A^\varepsilon(t)$. Bitno je istaknuti da se one pojavljuju na drugačijoj vremenskoj skali od karakterističnog "fizikalnog" vremena. Preciznije, kao što ćemo kasnije pokazati, brzina fluida je veća od brzine otklona stijenske. To za posljedicu ima pojavu elastičnih valova velike valne duljine. Budući da je to bitna značajka našeg problema, željeli bismo je zadržati prilikom asimptotičke redukcije. Zbog toga uvodimo vremensko skaliranje

$$\tilde{t} = \omega^\varepsilon t,$$

a karakterističnu frekvenciju ω^ε odredit ćemo kasnije tako da zadržimo i valove koji se pojavljuju na vremenskoj skali vodećeg reda, kao i oscilacije membrane uzrokovane reakcijom elastičnog materijala stijenske. Pretpostavit ćemo da je pad tlaka zadan kao funkcija nove varijable

$$A(\tilde{t}) = A(\omega^\varepsilon t) = A^\varepsilon(t).$$

Primijetimo da vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = \omega^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}(\cdot).$$

Novu varijablu \tilde{t} koristimo u daljnjim razmatranjima ispuštajući radi jednostavnosti simbol tilda. Imajući to na umu dolazimo do sljedeće tvrdnje.

Propozicija 3.2

Rješenje $(v_r^\varepsilon, v_z^\varepsilon, \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)$ ε -problema (21) zadovoljava sljedeću varijacijsku jednakost

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon R \omega^\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \left\{ (\omega^\varepsilon)^2 \rho_w h(\varepsilon) \int_0^L \left(\left| \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \right) dz + h(\varepsilon) G(\varepsilon) k(\varepsilon) \int_0^L \left| \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 dz + \right. \\ & \quad \left. + \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon)}{1 - \nu^2} \int_0^L \left(\nu \left(\frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon R} + \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 + (1 - \nu) \left(\left| \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon R} \right|^2 + \left| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 \right) \right) dz \right\} + \\ & \quad + 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon(t))|^2 r dr dz = - \int_0^{\varepsilon R} A(t) v_z^\varepsilon \Big|_{z=L} r dr, \end{aligned} \quad (22)$$

i uz to vrijedi

$$v_r^\varepsilon = \omega^\varepsilon \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} \quad i \quad v_z^\varepsilon = \omega^\varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \quad na \quad \Sigma_\varepsilon \times \langle 0, T \rangle.$$

■

Pogledajmo sada kako energija koja odgovara silama, odnosno padu tlaka, utječe na elastičnu i viskoznu energiju sustava fluid-stijenka. Prvo ćemo ocijeniti desnu stranu energetske jednakosti, obraćajući pažnju na nestandardnu činjenicu nepostojanja takozvanog *no-slip* uvjeta za brzinu, odnosno uvjeta da nema proklizavanja fluida na bočnoj stijenci. Drugi problem je izraz na lijevoj strani, gdje imamo L^2 -normu od $\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)$ umjesto L^2 -norme od $\nabla \mathbf{v}^\varepsilon$, što nam onemogućava standardni pristup temeljen na Gronwallovoj nejednakosti i L^2 -normi brzine $\rho \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{v}^\varepsilon(t)|^2 r dr dz$. Zbog toga ćemo prvo malo drugačije zapisati integral na desnoj strani u (22). Imamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{A(t)}{L} v_z^\varepsilon r dr dz &= \int_0^{\varepsilon R} \frac{A(t)}{L} r \int_0^L v_z^\varepsilon dz dr = \\ &= \int_0^{\varepsilon R} A(t) v_z^\varepsilon \Big|_{z=L} r dr - \int_0^{\varepsilon R} \frac{A(t)}{L} r \int_0^L z \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z} dz dr = \\ &= / \text{koristeći uvjet inkompresibilnosti} / = \\ &= \int_0^{\varepsilon R} A(t) v_z^\varepsilon \Big|_{z=L} r dr + \int_0^L \frac{A(t)}{L} z \int_0^{\varepsilon R} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) dr dz = \\ &= \int_0^{\varepsilon R} A(t) v_z^\varepsilon \Big|_{z=L} r dr + \varepsilon R \int_0^L A(t) \frac{z}{L} v_r^\varepsilon \Big|_{r=\varepsilon R} dz \end{aligned}$$

Sada možemo integral prebaciti u zbroj volumnog i rubnog člana

$$- \int_0^{\varepsilon R} A(t) v_z^\varepsilon \Big|_{z=L} r dr = - \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{A(t)}{L} v_z^\varepsilon r dr dz + \varepsilon R \int_0^L \frac{A(t)}{L} z v_r^\varepsilon \Big|_{r=\varepsilon R} dz \quad (23)$$

i iskoristiti sljedeću lemu koja povezuje energiju koja odgovara padu tlaka, elastičnu energiju membrane i smični dio viskozne energije fluida.

Lema 3.3

Vrijedi sljedeća ocjena

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} v_z^\varepsilon r dr dz - \omega^\varepsilon \frac{\varepsilon^2 R^2}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \zeta^\varepsilon(z, t) dz \right| \leq \frac{\varepsilon^2 R^2 \sqrt{L}}{2} \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (24)$$

Dokaz:

Ocjena se lako dobije iz jednakosti

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} v_z^\varepsilon r dr dz &= \int_{\Omega_\varepsilon} v_z^\varepsilon \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{2} \right) dr dz = \\ &= \frac{\varepsilon^2 R^2}{2} \int_0^L v_z^\varepsilon \Big|_{r=\varepsilon R} dz - \int_0^L \int_0^{\varepsilon R} \frac{r^2}{2} \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} dr dz = \\ &= \omega^\varepsilon \frac{\varepsilon^2 R^2}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \zeta^\varepsilon(z, t) dz - \int_0^L \int_0^{\varepsilon R} \frac{r}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) r dr dz, \end{aligned}$$

gdje smo uzeli u obzir da je

$$\int_0^L \int_0^{\varepsilon R} \frac{r}{2} \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} r dr dz = 0.$$

Sada, primjenom Hölderove nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{r}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) dV \right| &\leq \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} r^2 dV \right)^{1/2} = \\ &= \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \frac{\varepsilon^2 R^2}{2} \sqrt{L}, \end{aligned}$$

što nam upravo daje traženi oblik. \square

U nastavku pad tlaka ocjenjujemo u H^1 -normi implicitno koristeći činjenicu da imamo neprekinuto ulaganje $H^1(0, t) \hookrightarrow L^\infty(0, t)$, jer je u tom slučaju dimenzija $n = 1$.

Sada ćemo dati ocjene za otklone u energetskej jednakosti (22).

Lema 3.4

Longitudinalni pomak ζ^ε zadovoljava sljedeću ocjenu

$$\begin{aligned} &\frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)\varepsilon R}{2(1+\nu)} \int_0^L \left| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right|^2 dz + A(t) \frac{\varepsilon^2 R^2}{2L} \int_0^L \zeta^\varepsilon(z, t) dz - \\ &- \int_0^t \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \frac{\varepsilon^2 R^2}{2L} \int_0^L \zeta^\varepsilon(z, \tau) dz d\tau \geq \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)\varepsilon R}{4(1+\nu)} \left\{ \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0, L)}^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0, L)} - \frac{R(1+\nu)}{3} \sqrt{L} \frac{A(t)\varepsilon}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \right)^2 \right\} - \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)\varepsilon R}{4(1+\nu)} \int_0^t \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(\tau) \right\|_{L^2(0, L)}^2 d\tau - \\ &- \frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{6} \|A\|_{H^1(0, t)}^2. \end{aligned} \tag{25}$$

■

Lema 3.5

Radijalni pomak η^ε zadovoljava ocjenu

$$\begin{aligned} & \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{2\varepsilon R(1+\nu)} \int_0^L |\eta^\varepsilon(t)|^2 dz - A(t) \frac{\varepsilon R}{L} \int_0^L z \eta^\varepsilon(z, t) dz + \\ & + \int_0^t \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \frac{\varepsilon R}{L} \int_0^L z \eta^\varepsilon(z, \tau) dz d\tau \geq \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \|\eta^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,L)}^2 - \\ & - \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \int_0^t \|\eta^\varepsilon(\tau)\|_{L^2(0,L)}^2 d\tau - \frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{3} \|A\|_{H^1(0,t)}^2. \end{aligned} \quad (26)$$

■

Pomoću Youngove nejednakosti lako se pokazuje sljedeća lema.

Lema 3.6

Vrijedi ocjena

$$\varepsilon^2 \sqrt{\frac{R^4}{4L}} |A(t)| \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \mu \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{R^4 \varepsilon^4}{16\mu L} |A(t)|^2.$$

■

Kombinirajući dvije ocjene za radijalni i longitudinalni otklon stijenke, lemu 3.3 i lemu 3.6, iz (22) dobivamo sljedeći rezultat.

Lema 3.7

Radijalni otklon η^ε , longitudinalni otklon ζ^ε , energija koja odgovara padu tlaka $A(t)$ i viskozna energija $\mu \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz$ zadovoljavaju sljedeću energetsku ocjenu

$$\begin{aligned} & \omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \left\{ \|\eta^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} + \mu \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz d\tau \\ & \leq \omega^\varepsilon \int_0^t \left\{ \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \|\eta^\varepsilon(\tau)\|_{L^2(0,L)}^2 + \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)\varepsilon R}{4(1+\nu)} \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(\tau) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} d\tau + \\ & + \frac{R^4 \varepsilon^4}{16\mu L} \int_0^t |A(\tau)|^2 d\tau + \omega^\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{2} \|A\|_{H^1(0,t)}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Dokaz:

Polazimo od varijacijske jednakosti (22). Integriranjem tog izraza po vremenu i uzimajući u obzir da su svi pribrojnici kvadrati, odnosno da su veći

ili jednaki nuli, dobijemo lako sljedeći izraz

$$\begin{aligned} & \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{2\varepsilon R(1+\nu)} \left\{ \int_0^L (|\eta^\varepsilon(t)|^2 + \varepsilon^2 R^2 \left| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right|^2) dz \right\} + 2\mu \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon(\tau))|^2 r dr dz d\tau \leq \\ & \leq - \int_0^t \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{A(t)}{L} v_z^\varepsilon r dr dz - \varepsilon R \int_0^L \frac{A(t)}{L} z v_r^\varepsilon \Big|_{r=\varepsilon R} dz \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (28)$$

gdje smo desnu stranu nejednakosti dobili pomoću izraza (23).

Nadalje, iz leme 3.3 vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{A(t)}{L} v_z^\varepsilon r dr dz & \geq A(t) \frac{\varepsilon^2 R^2}{2L} \omega^\varepsilon \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \zeta^\varepsilon(z, t) dz - \\ & - \frac{A(t)}{L} \frac{\varepsilon^2 R^2 \sqrt{L}}{2} \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

odnosno integriranjem od 0 do t i korištenjem formule za parcijalnu integraciju

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{A(t)}{L} v_z^\varepsilon r dr dz d\tau & \geq A(t) \frac{\varepsilon^2 R^2}{2L} \omega^\varepsilon \int_0^L \zeta^\varepsilon(z, t) dz - \\ & - \int_0^t \omega^\varepsilon \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \frac{\varepsilon^2 R^2}{2L} \int_0^L \zeta^\varepsilon(z, \tau) dz d\tau - \int_0^t \frac{A(t)}{L} \frac{\varepsilon^2 R^2 \sqrt{L}}{2} \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} d\tau. \end{aligned} \quad (29)$$

Na sličan način možemo raspisati i

$$\begin{aligned} \int_0^t \varepsilon R \int_0^L \frac{A(t)}{L} z v_r^\varepsilon \Big|_{r=\varepsilon R} dz d\tau & = \int_0^t A(t) \frac{\varepsilon R}{L} \int_0^L z \omega^\varepsilon \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial \tau} dz d\tau = \\ & = A(t) \frac{\varepsilon R}{L} \omega^\varepsilon \int_0^L z \eta^\varepsilon dz - \int_0^t \omega^\varepsilon \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \frac{\varepsilon R}{L} \int_0^L z \eta^\varepsilon dz d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

Na kraju, preostaje nam samo spojiti sve dobivene izraze. Koristeći leme 3.4 i 3.5 možemo zapisati

$$\begin{aligned} & \omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \left\{ \|\eta^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} + 2\mu \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz d\tau \\ & \leq \omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{2\varepsilon R(1+\nu)} \left\{ \|\eta^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} + 2\mu \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz d\tau - \\ & - \omega^\varepsilon A(t) \frac{\varepsilon R}{L} \int_0^L z \eta^\varepsilon(z, t) dz + \omega^\varepsilon \int_0^t \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \frac{\varepsilon R}{L} \int_0^L z \eta^\varepsilon(z, \tau) dz d\tau + \\ & + \omega^\varepsilon A(t) \frac{\varepsilon^2 R^2}{2L} \int_0^L \zeta^\varepsilon(z, t) dz - \omega^\varepsilon \int_0^t \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \frac{\varepsilon^2 R^2}{2L} \int_0^L \zeta^\varepsilon(z, \tau) dz d\tau + \\ & + \omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \int_0^t \left\{ \|\eta^\varepsilon(\tau)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(\tau) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} d\tau + \\ & + \omega^\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{2} \|A\|_{H^1(0,t)}^2, \end{aligned}$$

što nam koristeći izraze (28), (29) i (30) i lemu 3.6 daje

$$\begin{aligned}
& \omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \left\{ \|\eta^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} + 2\mu \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz d\tau \\
& \leq \omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \int_0^t \left\{ \|\eta^\varepsilon(\tau)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(\tau) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} d\tau + \\
& + \omega^\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{2} \|A\|_{H^1(0,t)}^2 + \frac{R^4\varepsilon^4}{16\mu L} \int_0^t |A(\tau)|^2 d\tau + \\
& + \mu \int_0^t \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Budući da je

$$\mu \int_0^t \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 d\tau \leq \mu \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz d\tau,$$

prebacivanjem posljednjeg člana s desne na lijevu stranu nejednakosti dobivamo traženu ocjenu. \square

Primjenom Gronwallove nejednakosti na (27) dobivamo ključnu ocjenu za određivanje ponašanja članova vodećeg reda u asimptotičkom razvoju. Bit će to osnova za apriornu ocjenu u terminima malog parametra ε i karakteristične frekvencije ω^ε .

Propozicija 3.8

Rješenje $(v_r^\varepsilon, v_z^\varepsilon, \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)$ ε -problema (21) zadovoljava sljedeću ocjenu

$$\begin{aligned}
& \omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \left\{ \|\eta^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} + \mu \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz d\tau \\
& \leq \left\{ \frac{R^4\varepsilon^4}{16\mu L} \int_0^t |A(\tau)|^2 d\tau + \omega^\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{2} \|A\|_{H^1(0,t)}^2 \right\} e^t. \quad (31)
\end{aligned}$$

Dokaz:

Iz nejednakosti (27) zaključujemo

$$\begin{aligned}
& \omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \left\{ \|\eta^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} \leq \\
& \leq \int_0^t \left\{ \omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \left\{ \|\eta^\varepsilon(\tau)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(\tau) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} \right\} d\tau + \\
& + \int_0^t \left\{ \frac{R^4\varepsilon^4}{16\mu L} |A(\tau)|^2 - \mu \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz \right\} d\tau + \omega^\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{2} \|A\|_{H^1(0,t)}^2.
\end{aligned}$$

Sada vidimo da funkcija

$$w(t) = \omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \left\{ \|\eta^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\}$$

zadovoljava uvjet leme 1.7 uz

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega^\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{2} \|A\|_{H^1(0,t)}^2, \\ \beta &= \left\| \frac{R^4 \varepsilon^4}{16\mu L} |A(t)|^2 - \mu \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz \right\|_{L^\infty(0,T)}, \\ \gamma &= 1, \text{ i } t_0 = 0. \end{aligned}$$

Primjenom Gronwallove nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} &\omega^\varepsilon \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \left\{ \|\eta^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \varepsilon^2 R^2 \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \right\} \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^t \left\{ \frac{R^4 \varepsilon^4}{16\mu L} |A(\tau)|^2 - \mu \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz \right\} d\tau + \omega^\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{2} \|A\|_{H^1(0,t)}^2 \right\} e^t \\ &\leq \left\{ \int_0^t \frac{R^4 \varepsilon^4}{16\mu L} |A(\tau)|^2 d\tau + \omega^\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{2} \|A\|_{H^1(0,t)}^2 \right\} e^t - \\ &\quad - \int_0^t \mu \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz d\tau, \end{aligned}$$

gdje smo koristili činjenicu da je eksponencijalna funkcija strogo rastuća, odnosno $e^t > e^0 = 1$, za $t > 0$. Prebacivanjem posljednjeg izraza u nejednakosti na lijevu stranu dobivamo upravo traženi izraz. \square

Kako bismo u asimptotičkoj analizi obuhvatili elastičnu reakciju stijenke na oscilacije u padu tlaka između ulazne i izlazne granice, frekvenciju ω^ε biramo tako da su oba člana na desnoj strani nejednakosti (31) istog reda u ε . Koristeći pretpostavku 1) iz (15) dobivamo

$$\boxed{\omega^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{\mu}} \quad (32)$$

Sada ćemo odrediti apriorne ocjene rješenja u terminima malog parametra. U nastavku sve konstante neovisne o ε označavamo sa C . Pritom primijetimo da za fiksne $R, L, T \in \mathbf{R}^+$, desnu stranu u (31) možemo ocijeniti sa

$$C \frac{\varepsilon^4}{\mu} \left\{ \int_0^T |A(\tau)|^2 d\tau + \|A\|_{\mathbf{H}^1(0,T)}^2 \right\} e^T \leq C \frac{\varepsilon^4}{\mu} \|A\|_{\mathbf{H}^1(0,T)}^2$$

Propozicija 3.9

Rješenje $(v_r^\varepsilon, v_z^\varepsilon, \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)$ ε -problema (21) zadovoljava sljedeće apriorne ocjene

$$\int_0^T \int_0^L \int_0^{\varepsilon R} \left\{ \left(\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r^\varepsilon}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \right\} r dr dz d\tau \leq C \left(\frac{\varepsilon^2}{\mu} \right)^2 \|A\|_{\mathbf{H}^1(0,T)}^2, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \int_0^{\varepsilon R} \left\{ \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \right\} r dr dz d\tau &\leq \\ &\leq C \left\{ \left(\frac{\varepsilon^2}{\mu} \right)^2 \|A\|_{\mathbf{H}^1(0,T)}^2 + \varepsilon^2 (\omega^\varepsilon)^2 \int_0^T \int_0^L \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \zeta^\varepsilon(z, \tau) \right|^2 dz d\tau \right\}, \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \int_0^{\varepsilon R} |v_z^\varepsilon|^2 r dr dz d\tau &\leq \\ &\leq C \varepsilon^2 \int_0^T \int_0^L \left\{ (\omega^\varepsilon)^2 \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \zeta^\varepsilon(z, \tau) \right|^2 + \int_0^{\varepsilon R} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} \right)^2 r dr \right\} dz d\tau, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\int_0^L \left\{ \left| \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon}(t) \right|^2 + \left| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right|^2 \right\} dz \leq C \left(\frac{\varepsilon}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \right)^2 \|A\|_{\mathbf{H}^1(0,T)}^2. \quad (36)$$

Dokaz:

Izrazi (33) i (36) su jednostavne posljedice propozicije 3.8, dok je (35) varijanta Poincaréove nejednakosti.

Krenimo redom, ističući da je oblik tenzora $\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)$ za našu osno simetričnu funkciju $\mathbf{v}^\varepsilon = v_r^\varepsilon \bar{\mathbf{e}}_r + v_z^\varepsilon \bar{\mathbf{e}}_z$ dan izrazom

$$\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{v_r^\varepsilon}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Pomoću izraza (31), izvlačeći konstante ispred zagrada i uzimajući u obzir temeljne pretpostavke (15), vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \mu \int_0^T \int_0^L \int_0^{\varepsilon R} \left\{ \left(\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r^\varepsilon}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \right\} r dr dz d\tau &\leq \\ &\leq \mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz d\tau \leq C \frac{\varepsilon^4}{\mu} \|A\|_{\mathbf{H}^1(0,T)}^2, \end{aligned}$$

što upravo daje (33), te da vrijedi sljedeća ocjena za smični dio tenzora $\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \mu \int_0^T \int_0^L \int_0^{\varepsilon R} \left\{ \left(\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} + \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} \right)^2 \right\} r dr dz d\tau &\leq \\ &\leq 4\mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon)|^2 r dr dz d\tau \leq C \frac{\varepsilon^4}{\mu} \|A\|_{\mathbb{H}^1(0,T)}^2. \end{aligned}$$

Za dokazivanje izraza (34) trebamo samo ocijeniti produkt izvandijagonalnih članova, što činimo pomoću rubnog ponašanja od \mathbf{v}^ε , preciznije $\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z} = 0$ na $z = 0$ i $z = L$, i pomoću uvjeta inkompresibilnosti iz (16).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} r dr dz &= - \int_{\Omega_\varepsilon} \left(v_z^\varepsilon - \omega^\varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right) dr dz = \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(v_z^\varepsilon - \omega^\varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 v_z^\varepsilon}{\partial z^2} r dr dz = \\ &= - \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z^\varepsilon - \omega^\varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z} r dr dz = \\ &= - \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 r dr dz + \omega^\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z} r dr dz. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da vrijedi (34).

Preostao nam je još izraz (36). Ponovno se pozivamo na nejednakost (31) i raspisujemo

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^4}{\mu} \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\nu)} \int_0^L \left\{ \left| \frac{\eta^\varepsilon(t)}{\varepsilon} \right|^2 + R^2 \left| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right|^2 \right\} dz &\leq \\ &\leq \left\{ \frac{R^4 \varepsilon^4}{16\mu L} \int_0^t |A(\tau)|^2 d\tau + \frac{\varepsilon^5}{\mu h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \frac{(1+\nu)LR^3}{2} \|A\|_{\mathbb{H}^1(0,t)}^2 \right\} e^t, \end{aligned}$$

iz čega odmah slijedi

$$\int_0^L \left\{ \left| \frac{\eta^\varepsilon(t)}{\varepsilon} \right|^2 + R^2 \left| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right|^2 \right\} dz \leq C \left(\frac{\varepsilon}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)} \right)^2 \|A\|_{\mathbb{H}^1(0,T)}^2.$$

Traženi izraz je jednostavna posljedica dobivenog. □

Korolar 3.10

Vremenska derivacija rješenja $\frac{\partial}{\partial t}(v_r^\varepsilon, v_z^\varepsilon, \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)$ također zadovoljava odgovarajuće ocjene iz Propozicije 3.9 ako A zamijenimo s $\frac{\partial A}{\partial t}$. ■

Na kraju iskažimo sve važne ocjene u obliku teorema. Prisjetimo se pretpostavki (15) i uz blago nepreciznu uporabu oznaka

$$E_0 \quad \text{umjesto izraza} \quad h(\varepsilon)E(\varepsilon)/\varepsilon \quad \text{i}$$

$$G_0 \quad \text{umjesto izraza} \quad \varepsilon h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon)$$

imamo sljedeći rezultat.

Teorem 3.11 (OCJENE SLABOG RJEŠENJA ε -PROBLEMA)

Rješenje $(v_r^\varepsilon, v_z^\varepsilon, \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)$ ε -problema (21) zadovoljava ocjene

$$\frac{G_0}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0,L)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\eta^\varepsilon(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \left\| \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \leq C \left(\frac{1}{E_0} \right)^2 \|A\|_{H^1(0,T)}^2, \quad (37)$$

$$\left\| \frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))}^2 + \left\| \frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))}^2 \leq C \left(\frac{\varepsilon^2}{\mu} \right)^2 \|A\|_{H^1(0,T)}^2, \quad (38)$$

$$\|v_r^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))} \leq C \frac{\varepsilon^3}{\mu} \|A\|_{H^1(0,T)}, \quad (39)$$

$$\|v_z^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))} \leq C \frac{\varepsilon^3}{\mu} \|A\|_{H^1(0,T)}. \quad (40)$$

Analogne ocjene vrijede i za vremenske derivacije u terminima $\frac{\partial A}{\partial t}$. ■

3.4 Reskalirani problem i asimptotički razvoj

Kako bismo olakšali proučavanje ε -problema na limesu kada $\varepsilon \rightarrow 0$, moramo uvesti skaliranje koje preslikava domenu Ω_ε u fiksno područje $\Omega \equiv \Omega_1$, koje odgovara prijašnjoj definiciji za $\varepsilon = 1$. Time dobivamo da domena ne ovisi o parametru ε , ali zbog toga dolazi do promjene varijabli i izraza u jednadžbama. Taj postupak uvođenja dilatacije varijable mogli bismo slobodno nazvati *Ciarletov pristup* (v. [8] i [12]). Pogledajmo prvo posljedice takvog skaliranja.

Za niz $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$ osno simetričnih vektorskih funkcija $\mathbf{v}^\varepsilon = v_r^\varepsilon \vec{e}_r + v_z^\varepsilon \vec{e}_z$ definiranih na Ω_ε , kao i za niz $\{p^\varepsilon\}$, uvodimo sljedeće skaliranje:

$$\mathbf{v}(\varepsilon)(r, z) = \mathbf{v}^\varepsilon(\varepsilon r, z),$$

$$p(\varepsilon)(r, z) = p^\varepsilon(\varepsilon r, z).$$

$\{\mathbf{v}(\varepsilon)\}$ i $\{p(\varepsilon)\}$ su sada nizovi funkcija definiranih na fiksnoj domeni $\Omega \equiv \Omega_1$, a reskalirani diferencijalni operatori – gradijent ∇_ε , tenzor brzine deformacije \mathbf{e}_ε i divergencija div_ε , primijenjeni na takve funkcije daju

$$\nabla_\varepsilon \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \frac{v_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \frac{v_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$$\text{div}_\varepsilon \mathbf{v} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla_\varepsilon p = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Reskalirane inkompresibilne Stokesove jednadžbe iz (16), sada definirane na $\Omega \times \mathbf{R}^+$, glase

$$-\frac{\mu}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial^2 v(\varepsilon)_r}{\partial r^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v(\varepsilon)_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial r} - \frac{v(\varepsilon)_r}{r^2} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial r} = 0, \quad (41)$$

$$-\frac{\mu}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial^2 v(\varepsilon)_z}{\partial r^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v(\varepsilon)_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial z} = 0, \quad (42)$$

$$\operatorname{div}_\varepsilon \mathbf{v}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial r} + \frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{v(\varepsilon)_r}{r} = 0. \quad (43)$$

Spomenuto skaliranje ne utječe na veličine definirane na bočnoj granici, pa su tako otkloni stijenke invarijantni na uvedenu promjenu varijabli. Zbog toga oznake otklona u reskaliranom problemu ostaju iste kao i u originalnom problemu, odnosno η^ε i ζ^ε . Ako uključimo i dobiveni izraz za frekvenciju ω^ε iz (32), bočni rubni uvjeti reskaliranog problema sada glase

$$\frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_r = \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t}, \quad \frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_z = \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t}, \quad (44)$$

$$F_r = \left(-p(\varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{v}(\varepsilon)) \right) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r, \quad (45)$$

$$F_z = \left(-p(\varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{v}(\varepsilon)) \right) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z, \quad (46)$$

na $\Sigma \times \mathbf{R}^+$, gdje je $\Sigma \equiv \partial\Omega$, a veličine F_r i F_z jednake su onima otprije. Rubne uvjete na ulaznoj i izlaznoj granici, te početne uvjete dobijemo iz (19) odnosno (20), zapisivanjem u terminima skaliranih varijabli.

Sada bismo željeli zapisati reskalirani problem u varijacijskom obliku. Motivirani prijašnjim definicijama, uvedimo prostor test funkcija V kao prostor osno simetričnih funkcija $\boldsymbol{\varphi} = \varepsilon \varphi_r \vec{e}_r + \varphi_z \vec{e}_z \in \mathbf{H}^1(\Omega)^3$ koje zadovoljavaju:

- 1) $\varphi_\vartheta = 0$; $\varphi_r|_{r=R}, \varphi_z|_{r=R} \in \mathbf{H}^1(0, L)$,
- 2) $\varphi_r|_{z=0} = \varphi_r|_{z=L} = \varphi_z|_{r=R, z=L} = 0$,
- 3) $\operatorname{div}_\varepsilon \boldsymbol{\varphi} = 0$ u Ω .

Uz to odmah definirajmo i prostor rješenja \mathcal{V} kao prostor svih funkcija

$$(v_r(\varepsilon), v_z(\varepsilon), \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon) \in \mathbf{H}^1(0, T; V) \times \left(\mathbf{H}^1(\langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle)^2 \cap \mathbf{H}^2(0, T; \mathbf{L}^2(0, L))^2 \right)$$

gdje je $T \in \mathbf{R}^+$ unaprijed zadano, takvih da vrijedi:

- 1) $\operatorname{div}_\varepsilon \mathbf{v}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_r(\varepsilon)}{\partial r} + \frac{\partial v_z(\varepsilon)}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{v_r(\varepsilon)}{r} = 0$ u $\Omega \times \mathbf{R}^+$,
- 2) $\frac{v_r(\varepsilon)}{\varepsilon r} \in L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle)$,
- 3) $\eta^\varepsilon(0, t) = \eta^\varepsilon(L, t) = \zeta^\varepsilon(L, t) = 0$ za $t \in \mathbf{R}^+$,
- 4) $v_r(\varepsilon)(t)|_{z=0} = 0$ za $t \in \mathbf{R}^+$,
- 5) $v_r(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{\mu} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t}$, $v_z(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{\mu} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t}$ na $\Sigma \times \mathbf{R}^+$.

Neka je $\psi = \psi(t)$ vremenska test funkcija, za koju uzimamo $\psi \in C_c^\infty(0, T)$. Sada, ako varijacijsku jednakost (21) zapišemo u reskaliranim varijablama, množeći je s $\psi(t)$, integrirajući po vremenu i koristeći upravo uvedene prostore V i \mathcal{V} , dobijemo varijacijsku formulaciju reskaliranog problema. Prije same definicije uvedimo sljedeće oznake koje će bitno pojednostaviti zapis.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\mu(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \psi; \varepsilon) &\equiv \int_0^T \int_\Omega \frac{\mu}{\varepsilon^2} \frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial r} \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} \psi(t) r dr dz dt + \\ &+ 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega \frac{\mu}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial z} \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} + \frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{v(\varepsilon)_r \varphi_r}{r^2} \right) \psi(t) r dr dz dt + \\ &+ 2\varepsilon^2 \int_0^T \int_\Omega \frac{\mu}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} + \frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial z} \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) \psi(t) r dr dz dt + \\ &+ \varepsilon^3 \int_0^T \int_\Omega \frac{\mu}{\varepsilon^2} \frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial z} \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} \psi(t) r dr dz dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{el}(\eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}, \psi; \varepsilon) &\equiv \\ &\frac{R}{\varepsilon} \int_0^T \int_0^L \left\{ h(\varepsilon) G(\varepsilon) k(\varepsilon) \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \varepsilon \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} + \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon)}{1 - \nu^2} \left(\frac{\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2 R^2} \right) \varepsilon \varphi_r + \right. \\ &+ \left. \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon)}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} - \frac{\nu}{\varepsilon R} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \varphi_z \right) \right\} \psi(t) dz dt + \\ &+ \frac{R h(\varepsilon) \rho_w (\omega^\varepsilon)^2}{\varepsilon} \int_0^T \frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} \int_0^L (\eta^\varepsilon \varepsilon \varphi_r + \zeta^\varepsilon \varphi_z) dz dt. \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_f(A, \boldsymbol{\varphi}, \psi) \equiv \int_0^T \int_0^R A(t) \varphi_z \psi(t) r dr dt.$$

Napomena.

Spomenuti pojmovi i oznake usko su povezani sa stvarnim pojmovima viskozne i elastične energije i rada vanjskih sila. Otuda i sličnost s oznakama otprije. Primijetimo samo da su u njihovoj definiciji korištene test funkcije, odnosno da izrazi ovise o $\boldsymbol{\varphi}$ i ψ .

Sada možemo definirati slabo rješenje reskaliranog ε -problema koji ćemo u nastavku označavati s $P(\varepsilon)$.

Definicija 3.3 (SLABA FORMULACIJA RESKALIRANOG ε -PROBLEMA $P(\varepsilon)$)
Vektorska funkcija $(v(\varepsilon)_r, v(\varepsilon)_z, \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon) \in \mathcal{V}$ je slabo rješenje problema $P(\varepsilon)$, odnosno reskaliranog ε -problema, ako je zadovoljena sljedeća varijacijska formulacija

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in V, \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^+) \quad \mathcal{E}_\mu(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \psi; \varepsilon) + \mathcal{E}_{el}(\eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}, \psi; \varepsilon) = -\mathcal{E}_f(A, \boldsymbol{\varphi}, \psi). \quad (47)$$

Početni uvjeti na bočnoj granici dani su s

$$\eta^\varepsilon = \zeta^\varepsilon = \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} = 0 \quad \text{na } \Sigma \times \{0\}. \quad (48)$$

Kasnije ćemo trebati još jedan oblik slabe formulacije problema koji sadrži izraz za tlak. U tu svrhu prvo uvedimo test funkcije čija divergencija nije nužno nula. Oznaka \tilde{V} označava prostor svih funkcija $\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)^3$ takvih da:

- 1) $\boldsymbol{\varphi}$ je osno simetrična,
- 2) $\varphi_\vartheta = 0$; $\varphi_r|_{r=R}, \varphi_z|_{r=R} \in H^1(0, L)$,
- 3) $\varphi_r|_{z=0} = \varphi_r|_{z=L} = \varphi_z|_{r=R, z=L} = 0$.

Definicija 3.4 (SLABA FORMULACIJA PROBLEMA $P(\varepsilon)$ U OBLIKU KOJI UKLJUČUJE TLAK)

Vektorska funkcija $(v(\varepsilon)_r, v(\varepsilon)_z, \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon) \in \mathcal{V}$ i funkcija $p(\varepsilon) \in L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle)$ je slabo rješenje problema $P(\varepsilon)$, odnosno reskaliranog ε -problema, ako vrijedi

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\varphi} \in \tilde{V}, \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^+) \\ \mathcal{E}_\mu(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \psi; \varepsilon) - \int_0^T \int_\Omega p(\varepsilon) \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{\varphi_r}{r} \right) \psi(t) r dr dz dt + \\ + \mathcal{E}_{el}(\eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}, \psi; \varepsilon) = -\mathcal{E}_f(A, \boldsymbol{\varphi}, \psi). \end{aligned} \quad (49)$$

Propozicija 3.12

Varijacijski problem (21) je ekvivalentan reskaliranom problemu (47), (43) uz uvjete (48). ■

Lako se vidi da vrijedi sljedeća lema.

Lema 3.13

Za funkciju $\mathbf{v} \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, reskalirana funkcija $\mathbf{v}(\varepsilon)$ zadovoljava

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} &= \varepsilon^{-1}\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \\ \left\|\frac{\partial\mathbf{v}(\varepsilon)}{\partial r}\right\|_{L^2(\Omega)} &= \left\|\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial r}\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \\ \left\|\frac{\partial\mathbf{v}(\varepsilon)}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)} &= \varepsilon^{-1}\left\|\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.\end{aligned}$$

■

Pomoću prethodne leme, propozicije 3.9 i teorema 3.11 lako se dobije sljedeći rezultat.

Propozicija 3.14

Rješenje $(v(\varepsilon)_r, v(\varepsilon)_z, \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon) \in \mathcal{V}$ reskaliranog problema (47), (43) uz uvjete (48), zadovoljava apriorne ocjene

$$\begin{aligned}\left\|\frac{v(\varepsilon)_r}{r}\right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \|v(\varepsilon)_z\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \left\|\frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial r}\right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \\ + \left\|\frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial r}\right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \leq C\frac{\varepsilon^2}{\mu}\|A\|_{H^1(0, T)}, \\ \left\|\frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \left\|\frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \leq C\frac{\varepsilon}{\mu}\|A\|_{H^1(0, T)}, \\ \|\zeta^\varepsilon\|_{H^1(\Omega \times (0, T))} \leq C\|A\|_{H^1(0, T)}.\end{aligned}$$

■

Za sljedeći rezultat trebat će nam neke činjenice. Poznato je da je za omeđen $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ prostor $L^2(\Omega)/\mathbf{R}$ izomorfan potprostoru L^2 -funkcija ortogonalnih na konstante, odnosno

$$L^2(\Omega)/\mathbf{R} = \left\{p \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} p(x)dx = 0\right\}.$$

Operator $\mathbf{grad} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ je izomorfizam sa $L^2(\Omega)/\mathbf{R}$ u $H^{-1}(\Omega)$, pa ima zatvorenu sliku. Njemu adjungirani operator $-\mathbf{div} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ preslikava $H_0^1(\Omega)$ na $\text{Im}(-\mathbf{div}) = \text{Ker}(\mathbf{grad})^\perp = L^2(\Omega)/\mathbf{R}$.

Nadalje, podsjetimo da ako za sve derivacije prvog reda distribucije p vrijedi $\partial_i p \in H^{-1}(\Omega)$ za $i = 1, \dots, n$, tada je $p \in L^2(\Omega)$ i vrijedi (v. [22]):

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbf{R}} \leq C\|\mathbf{grad} p\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Pogledajmo sada apriornu ocjenu za tlak $p(\varepsilon)$ koji odgovara brzini $\mathbf{v}(\varepsilon)$.

Propozicija 3.15

Skalirani tlak $p(\varepsilon)$ zadovoljava sljedeću ocjenu

$$\|p(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega \times (0,T))/\mathbf{R}} \leq C\|A\|_{H^1(0,T)}, \quad (50)$$

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \left\| \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial r} \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \leq C\|A\|_{H^1(0,T)}^2. \quad (51)$$

Dokaz:

Dokaz provodimo pomoću skaliranog zakona o očuvanju količine gibanja koji povezuje gradijent tlaka i viskozni učinak fluida. Prvo, neka je $\varphi \in H_0^1(\Omega)^3$ osno simetrična funkcija. Za takve φ , skalirana jednažba očuvanja količine gibanja glasi

$$\begin{aligned} \langle \nabla_\varepsilon p(\varepsilon), \varphi \rangle_\Omega &= \left\langle \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial r}, \varphi_r \right\rangle_\Omega + \left\langle \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial z}, \varphi_z \right\rangle_\Omega = \\ &= -\mu \int_\Omega \mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{v}(\varepsilon)) \mathbf{e}_\varepsilon(\varphi) r dr dz = -\mu \int_\Omega \mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{v}(\varepsilon)) \nabla_\varepsilon \varphi r dr dz, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} \left| \langle \nabla_\varepsilon p(\varepsilon), \varphi \rangle_\Omega \right| &\leq \mu \left(\int_\Omega |\mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{v}(\varepsilon))|^2 r dr dz \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla_\varepsilon \varphi|^2 r dr dz \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C\|A\|_{H^1(0,T)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Za osno simetričnu funkciju $g \in L^2(\Omega)/\mathbf{R}$, postoji rezultat u [5] o tome da problem

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\varphi} = g & \text{u } \Omega, \\ \tilde{\varphi} = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

ima rješenje $\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega)^3$, koje je osno simetrično. Ako izostavimo zahtjev da je $\tilde{\varphi} = 0$ na $\partial\Omega \cap \{z = 0\}$ onda možemo uzeti i $g \in L^2(\Omega)$.

Stavimo sada $\varphi_r = \varepsilon \tilde{\varphi}_r$ i $\varphi_z = \tilde{\varphi}_z$. Tada je $g = \operatorname{div}_\varepsilon \varphi$ i

$$\left| \int_\Omega p(\varepsilon) g \right| = \left| \int_\Omega p(\varepsilon) \operatorname{div}_\varepsilon \varphi \right| = |\langle \nabla_\varepsilon p(\varepsilon), \varphi \rangle_\Omega| \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

To vrijedi za proizvoljni $g \in L^2(\Omega)$, pa lako dobivamo tvrdnju. \square

Nakon što smo odredili uniformne apriorne ocjene za $\{\mathbf{v}(\varepsilon)\}$ i $\{p(\varepsilon)\}$, koje također vrijede i za njihove derivacije, možemo prijeći na asimptotičku analizu. Glavni problem je određivanje "odgovarajućeg" asimptotičkog razvoja

za funkcije $\mathbf{v}(\varepsilon)$, $p(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$ i $\zeta(\varepsilon)$. Uobičajena teškoća kod asimptotičkog razvoja je određivanje optimalnog izbora vodećih potencija od ε u redovima. Standardno, taj izbor slijedi iz apriornih ocjena. U našem slučaju, za problem (21), rezultati propozicija 3.14 i 3.15 pokazuju da su L^2 -norme izraza $\mathbf{v}(\varepsilon)\frac{\mu}{\varepsilon^2}$ i $p(\varepsilon)$ omeđene nezavisno o ε i μ . Prema rezultatima teorema 3.11, prirodno je dakle izabrati sljedeće asimptotičke razvoje:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\varepsilon)(r, z, t) &= \frac{\varepsilon^2}{\mu} \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \mathbf{v}^k(r, z, t), \\ p(\varepsilon)(r, z, t) &= \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k p^k(r, z, t), \\ \eta(\varepsilon)(z, t) &= \varepsilon \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \eta^k(z, t), \\ \zeta(\varepsilon)(z, t) &= \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \zeta^k(z, t).\end{aligned}$$

Dobivene redove koristimo u sljedećem poglavlju za izvod reduciranih jednadžbi toka krvi i gibanja stijenke.

3.5 Reducirani problem

Prvo ćemo prikazati izvod efektivnih odnosno reduciranih jednadžbi, koje će biti aproksimacija početnih jednadžbi. Pokazat ćemo da je aproksimacija dobra za male ε i da je drugog reda točnosti u ε . Reducirane jednadžbe dobijemo uvrštavanjem asimptotičkih razvoja iz prethodnog poglavlja u jednadžbe (41), (42) i (43) i uspoređivanjem potencija od ε .

Uvjet inkompresibilnosti (43) povlači

$$\varepsilon^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^0) \right) + \left(\frac{\partial v_z^0}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^1) \right) + \varepsilon \left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \left\{ \frac{\partial v_z^{k+1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^{k+2}) \right\} \right) = 0. \quad (52)$$

Ta jednakost daje nam

$$v_r^0 = 0, \quad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (v_z^0 + \varepsilon v_z^1) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r (v_r^1 + \varepsilon v_r^2)) = 0 \quad \text{na } \Omega \times \langle 0, T \rangle. \quad (54)$$

Primijetimo da prvi izraz pokazuje kako je u problemu interakcije fluida i stijenke pri polaganom toku red radialne komponente brzine za jedan manji

od reda longitudinalne komponente.

Uvrštavanjem redova u druge dvije jednadžbe, (41) i (42), te uspoređivanjem potencija dobijemo

$$-\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (p^0 + \varepsilon p^1) + \varepsilon \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r^1}{\partial r} \right) - \frac{v_r^1}{r^2} - \frac{\partial p^2}{\partial r} \right\} = \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (55)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} (v_z^0 + \varepsilon v_z^1) \right) - \frac{\partial}{\partial z} (p^0 + \varepsilon p^1) = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (56)$$

Kako bismo pojednostavili zapis uvedimo oznake

$$\begin{aligned} p &= p^0 + \varepsilon p^1, \\ \eta &= \eta^0 + \varepsilon \eta^1 \quad \text{i} \quad \zeta = \zeta^0 + \varepsilon \zeta^1, \\ v_r &= v_r^1 + \varepsilon v_r^2 \quad \text{i} \quad v_z = v_z^0 + \varepsilon v_z^1. \end{aligned}$$

Sada uvjet inkompresibilnosti (54) glasi:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r v_z) = 0 \quad \text{na } \Omega \times \langle 0, T \rangle. \quad (57)$$

Daljnijim promatranjem jednadžbi očuvanja količine gibanja vidimo da koeficijent uz ε^{-1} u izrazu (55) povlači

$$p = p(z, t). \quad (58)$$

Redukcijom smo dakle dobili da tlak ne ovisi o varijabli r , odnosno da je konstantan duž svakog poprečnog presjeka krvne žile.

Druga jednadžba očuvanja momenta (56) sada glasi:

$$r \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \quad (59)$$

Izrazi (57), (58) i (59) čine standardne asimptotičke jednadžbe izvedene iz jednadžbi toka prije no što se uzmu u obzir i rubni uvjeti. U slučaju da inercijalni članovi nisu zanemarivi, u izrazu (59) se još pojavljuju i dodatni akceleracijski izrazi. Izvod tih jednadžbi može se pronaći u [9]. Viskozni član na desnoj strani izraza (59) trebao bi sadržavati i obično sadržava faktor s viskoznošću μ , no on je u našem slučaju skriven u asimptotičkom razvoju brzine $\mathbf{v}(\varepsilon)$.

U redukciji na jednodimenzionalni model obično se u ovoj fazi vrši usrednjenje jednadžbi toka duž poprečnih presjeka i uzima se u obzir rubne uvjete i

modeliranje stijenke. Specifičnost našeg problema je već spomenuti izostanak *no-slip* bočnog rubnog uvjeta. Umjesto toga imamo neprekinutost brzina i sila na bočnoj stijenci, a samu strukturu fluid-stijenka i njihovu interakciju opisuju jednačbe (18) čiji je asimptotički oblik sljedeći:

$$p(z, t) = \frac{E_0}{R(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\eta}{R} \right) - G_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (60)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{E_0}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu \eta}{R} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (61)$$

Ovdje smo ponovno koristili oznake E_0 i G_0 umjesto izraza $E(\varepsilon)h(\varepsilon)/\varepsilon$ i $G(\varepsilon)k(\varepsilon)h(\varepsilon)\varepsilon$.

Reducirane jednačbe puno je jednostavnije zapisati pomoću efektivnog tlaka p , nego u terminima poprečnih presjeka. Zbog toga pažnju usmjeravamo na izraze (60) i (61) kako bismo izveli parcijalnu diferencijalnu jednačbu za tlak.

Eliminirat ćemo članove η , v_z i $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ pomoću uvjeta inkompresibilnosti (57) i jednačbi očuvanja momenta (58) i (59) na sljedeći način. Integrirajmo po r dvaput izraz (59), prvo od 0 do r i zatim od r do R . Ako iskoristimo da je

$$v_z(R, z, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}(z, t),$$

dobijemo izraz za brzinu:

$$v_z(r, z, t) = \frac{r^2 - R^2}{4} \frac{\partial p}{\partial z}(z, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t}(z, t), \quad (62)$$

koji je varijanta Biotovog zakona. Njegovim uvrštavanjem u uvjet inkompresibilnosti (57) i dvostrukim integriranjem dobijemo

$$Rv_r(R) - rv_r = \frac{1}{16}(R^2 - r^2)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z \partial t},$$

što možemo zapisati u obliku pogodnom za izražavanje brzine

$$v_r = \frac{R}{r} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{(R^2 - r^2)^2}{16r} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{R^2 - r^2}{2r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z \partial t} = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{2R^2 - r^2}{8} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\}.$$

Iz jednačbe za brzinu v_z lako dobijemo

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{R}{2} \frac{\partial p}{\partial z}(z, t),$$

dok integriranje izraza (57) od 0 do R daje

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R v_z(r, z, t) r dr = 0.$$

Ponovno koristeći izraz za v_z , iz posljednjeg izraza dobijemo reducirani, usrednjeni uvjet inkompresibilnosti

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{R^3}{16} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{R}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z \partial t} = 0.$$

Sada integrirajući po t imamo

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{R^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^t p d\tau - \frac{2}{R} \eta \quad (63)$$

i preostaje nam još samo izraziti η pomoću p . Prvo iz (61) dobijemo

$$\frac{R}{2} p(z, t) - \frac{E_0}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu \eta}{R} \right) = C_0(t),$$

i tvrdimo da $C_0(t) = C_0 = 0$. Naime, ako napravimo proširenje po parnosti veličina v_z^ε i ζ^ε , te neparno proširenje veličina v_r^ε , η^ε i p^ε , lako se vidi da sve jednadžbe vrijede za $z \in \langle -L, L \rangle$, odnosno i za negativne vrijednosti od z . Prema tome, parcijalne derivacije funkcija po varijabli z imaju istu regularnost kao i same funkcije, te vrijedi

$$\eta(0, t) = p(0, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial z}(0, t) = 0.$$

To nam daje $C_0(t) = 0$.

Dobili smo, dakle, sljedeći odnos između η i p :

$$\frac{E_0}{R(1 - \nu^2)} \eta = \frac{R}{2 - \nu} \left(-\frac{1}{2} p + \frac{E_0 R}{8(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^t p d\tau \right). \quad (64)$$

Primijetimo da se sada izrazi (60) i (61) u potpunosti mogu napisati u terminima tlaka, jer imamo jednadžbu (64) koja povezuje η sa p i jednadžbu (63) koja povezuje $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ sa η . Zajedno sa (62), to nam omogućava da izraz (61) napišemo u obliku

$$\frac{\partial p}{\partial z}(z, t) = \frac{2}{R} \left(\frac{E_0}{1 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu \eta}{R} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (65)$$

Derivirajući izraz (60) po z i izjednačavajući ga sa (65), dobivamo konačni oblik reducirane jednadžbe za tlak

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{5}{2} - 2\nu \right) p - (1 - \nu^2) \frac{G_0 R^2}{2E_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{E_0 R}{8} p - \frac{G_0 R^3}{8} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right\}. \quad (66)$$

Napomena.

Primijetimo da je "odgovarajuća" vremenska skala za tlak jednaka

$$t_p = \frac{E_0 R}{8} \tilde{t} = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(\varepsilon) E(\varepsilon) \varepsilon R}{8\mu} \right) t.$$

Podsjetimo i da se fizikalna vremenska varijabla t s varijablom \tilde{t} odnosi kao $\tilde{t} = (\varepsilon^2/\mu)t$.

Naš problem se na ovome mjestu po karakteru dijeli na dva različita slučaja, ovisno o tome da li je modul smicanja, odnosno veličina G_0 , zanemariv ili ne. Daljnje razmatranje usmjeravamo na slučaj $G_0 = 0$, koji je s fizikalnog gledišta jasniji. Problem ćemo također izraziti i u obliku koji uključuje i tlak i brzinu.

3.5.1 Reducirani problem sa zanemarivim modulom smicanja

Pogledajmo sada detaljnije slučaj kada je modul smicanja G_0 mali, odnosno kada su koeficijenti koji ga sadrže zanemarivi. Zbog regularnosti funkcije p^ε obzirom na varijablu z , vidimo da je $p = A(t)$ za $z = L$. Reducirana jednadžba (66) za efektivni tlak u ovom slučaju glasi

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{K} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} & \text{na } \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle, \\ p(0, t) = 0, \quad p(L, t) = A(t) & \text{na } \langle 0, T \rangle, \\ p(z, 0) = 0 & \text{na } \langle 0, L \rangle \end{cases}$$

gdje je

$$\mathcal{K} = \frac{E_0 R}{4(5 - 4\nu)} > 0 \quad \text{za } \nu < \frac{5}{4}.$$

Dobili smo rubno-početni problem za linearnu parabolčku jednadžbu i znamo da postoji jedinstveno rješenje koje možemo i eksplicitno odrediti Fourierovom metodom separacije varijabli. Prvo ćemo homogenizirati rubni uvjet uvodeći

$$\bar{p}(z, t) = p(z, t) - \frac{z}{L} A(t).$$

Nova funkcija zadovoljava nehomogenu jednadžbu

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \mathcal{K} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} - \frac{z}{L} A'(t) \quad \text{na } \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle, \quad (67)$$

ali sada uz homogene rubne uvjete

$$\bar{p}(0, t) = 0, \quad \bar{p}(L, t) = 0 \quad \text{na } \langle 0, T \rangle$$

i homogeni početni uvjet ako pretpostavimo uvjet kompatibilnosti $A(0) = 0$:

$$\bar{p}(z, 0) = \frac{z}{L} A(0) = 0 \quad \text{na } \langle 0, L \rangle.$$

Fourierova metoda sastoji se u tome da za svako $t > 0$ rješenje napišemo u obliku Fourierovog reda

$$\bar{p}(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) Z_k(z), \quad (68)$$

gdje su funkcije $Z_k(z)$ i konstante λ_k rješenja svojstvenog problema

$$\begin{cases} Z''(z) + \lambda Z(z) = 0, \\ Z(0) = Z(L) = 0, \end{cases}$$

a za funkcije $C_k(t)$ vrijedi

$$C_k(t) = \frac{1}{\|Z_k(z)\|_{L^2}^2} \int_0^L \bar{p}(z, t) Z_k(z) dz.$$

Znamo da svojstvenih vrijednosti $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ i svojstvenih funkcija $Z_k(z)$ ima prebrojivo mnogo, a laganim računom se nalazi

$$Z_k(z) = \sin \frac{k\pi z}{L}, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad k = 1, \dots, \infty.$$

”Koeficijente” $C_k(t)$ u redu (68) određujemo na sljedeći način. Jednadžbu (67) množimo sa $Z_k(z)$, integriramo od 0 do L , te korištenjem parcijalne integracije dobivamo

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \bar{p}(z, t) \sin \frac{k\pi z}{L} dz = -\mathcal{K} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \int_0^L \bar{p}(z, t) \sin \frac{k\pi z}{L} dz - A'(t) \int_0^L \frac{z}{L} \sin \frac{k\pi z}{L} dz,$$

iz čega slijedi da je

$$C_k'(t) + \mathcal{K} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 C_k(t) = (-1)^k \frac{2}{k\pi} A(t).$$

Toj jednadžbi dodajemo i zahtjev $C_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, \infty$ koji slijedi iz homogenog početnog uvjeta. Njeno rješenje je

$$C_k(t) = (-1)^k \frac{2}{k\pi} \int_0^t A(\tau) e^{\mathcal{K} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 (\tau-t)} d\tau.$$

Povratkom na početnu jednadžbu vidimo da je eksplicitno rješenje reduciranog problema dano s

$$p(z, t) = \frac{z}{L} A(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k\pi} \int_0^t A(\tau) e^{\mathcal{K} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 (\tau-t)} d\tau \sin \frac{k\pi z}{L} \quad \text{na } \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle.$$

Regularnost ovog formalnog rješenja je uvjetovana funkcijom $A(t)$.

Napomena.

Ako je $A \in C_c^\infty(0, +\infty)$, tada je $p \in C^\infty([0, L] \times [0, T])$.

3.5.2 Reducirani problem u obliku tlak-brzina

U sljedećem poglavlju pokazat ćemo da rješenje originalnog problema iskazanog u terminima malog parametra konvergira rješenju reduciranog problema zapisanog pomoću (v_z, p, η, ζ) . Zbog toga je korisno reducirani problem iskazati pomoću navedenih veličina. Zapišimo ponovno radi preglednosti ranije izvedene jednadžbe, uzimajući u obzir da pretpostavljamo $G_0 = 0$. Na prvom mjestu imamo jednadžbe očuvanja mase i količine gibanja

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R v_z(r, z, t) r dr &= 0, \\ r \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right),\end{aligned}$$

uz koje dolaze bočni rubni uvjeti

$$\begin{aligned}v_z(R, z, t) &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}(z, t), \\ p(z, t) &= \frac{E_0}{R(1 - \nu^2)} \left(\nu \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\eta}{R} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{E_0}{1 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu \eta}{R} \right),\end{aligned}$$

dok su rubni uvjeti na ulaznoj i izlaznoj granici dani s

$$\begin{aligned}\eta(0, t) = p(0, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial z}(0, t) &= 0, \\ \eta(L, t) = \zeta(L, t) = 0, \quad p(L, t) &= A(t),\end{aligned}$$

i imamo početne uvjete

$$\eta(z, 0) = \zeta(z, 0) = 0.$$

3.6 Teorem o konvergenciji

U ovome poglavlju pokazujemo da rješenje originalnog problema konvergira rješenju upravo izvedenog reduciranog problema. Asimptotičku analizu sada formaliziramo i proučavamo reskalirani problem $P(\varepsilon)$ na limesu kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Pokazujemo da postoji slabo konvergentan podniz niza rješenja reskaliranog problema i da taj limes, odnosno gomilište, zadovoljava slabi oblik graničnog problema koji je jednak slabom obliku reduciranog problema iz prethodnog poglavlja. Zbog jedinstvenosti rješenja tog slabog problema zaključujemo da svaki takav konvergentan podniz teži jednom jedinstvenom rješenju.

Prvo dokažimo rezultat o slaboj kompaktnosti niza rješenja problema $P(\varepsilon)$. Prije samog teorema uvedimo sljedeće prostore i pripadajuće norme

$$W \equiv \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial r} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad \|\varphi\|_W = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

$$W_r \equiv \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \mid \frac{\varphi}{r} \in L^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial r} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad \|\varphi\|_{W_r} = \left\| \frac{\varphi}{r} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Teorem 3.16 (SLABA KOMPAKTNOST)

Za niz rješenja reskaliranog problema $P(\varepsilon)$, uz pretpostavku $G_0 = 0$, postoji podniz $(\mathbf{v}(\varepsilon), p(\varepsilon), \eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)$ takav da $(\mu/\varepsilon^2 \mathbf{v}(\varepsilon), p(\varepsilon), \eta^\varepsilon/\varepsilon, \zeta^\varepsilon)$ konvergira slabo prema gomilištu koje označimo s $(\mathbf{u}, p, \eta, \zeta)$ u sljedećem smislu

$$u(\varepsilon)_z \equiv \frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_z \rightharpoonup u_z \quad \text{slabo u } L^2(0, T; W),$$

$$u(\varepsilon)_r \equiv \frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_r \rightharpoonup u_r \quad \text{slabo u } L^2(0, T; W_r),$$

$$\zeta^\varepsilon \rightharpoonup \zeta \quad \text{slabo u } H^1(\langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle),$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \eta^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \eta \quad \text{slabo}^* \text{ u } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

$$p(\varepsilon) \rightharpoonup p \quad \text{slabo u } L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle).$$

Štoviše, vrijedi $u_r = 0$, $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ i u smislu distribucija imamo

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R u_z(r, z, t) r dr = 0. \quad (69)$$

Na kraju, vrijedi

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{slabo u } L^2(0, T; H^{-1}(0, L)). \quad (70)$$

Dokaz:

Trebamo samo još pokazati da $u_r = 0$, $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ i da je zadovoljena jednačba očuvanja mase (69).

Prvo pomnožimo uvjet inkompresibilnosti (43) test funkcijom $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ da dobijemo

$$\int_\Omega \varphi \frac{\partial}{\partial r} (ru(\varepsilon)_r) dr dz = -\varepsilon \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial z} u(\varepsilon)_z r dr dz \rightarrow 0 \quad \text{kada } \varepsilon \rightarrow 0.$$

To povlači da je $\frac{\partial}{\partial r} (ru_r) = 0$ i budući da je $u_r \in W_r$ imamo $u_r = 0$.

Nadalje, koristeći izraz (51), vidimo da za svaku test funkciju φ , za koju sada uzimamo $\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ vrijedi

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \left\langle \frac{\partial p}{\partial r}, \varphi \right\rangle_\Omega dt \right| &= \left| - \int_0^T \int_\Omega p \frac{\partial \varphi}{\partial r} r dr dz dt \right| = \\ &= \left| - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega p(\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial r} r dr dz dt \right| = \\ &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \left\langle \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial r}, \varphi \right\rangle_\Omega dt \right| \leq \\ &\leq \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial r} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \right) \|\varphi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} = 0, \end{aligned}$$

iz čega, korištenjem ocjene za skalirani tlak, zaključujemo da p ne ovisi o r , odnosno $p = p(z, t)$.

Za dokaz jednačbe očuvanja mase, pomnožimo uvjet inkompresibilnosti (43) test funkcijama $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ i $\psi \in C_c^\infty(0, T)$ i integrirajmo.

$$-R \int_0^T \int_0^L \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon} \varphi \frac{d\psi}{dt} dz dt - \int_0^T \int_\Omega u(\varepsilon)_z \psi(t) \frac{d\varphi}{dz} r dr dz dt = 0.$$

Prelaskom na limes kada $\varepsilon \rightarrow 0$ lako dobivamo izraze (69) i (70). \square

Korolar 3.17

Neka je $G_0 = 0$. Tada za svako gomilište (u_z, p, η, ζ) , za koje je

$$\begin{aligned} u_z &\in L^2(0, T; W), & p &\in L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle), \\ \eta &\in L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \cap C([0, T]; L^2(0, L)), \\ \zeta &\in L^\infty(0, T; H^1(0, L)) \cap C([0, T]; L^2(0, L)), \end{aligned}$$

vrijedi

$$\begin{aligned} u_z(R, z, t) &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}(z, t) && \text{na } \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle, \\ \eta(0, t) = p(0, t) &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}(0, t) = 0 && \text{za } t \in \langle 0, T \rangle, \\ \zeta(L, t) = 0, \quad p(L, t) &= A(t) && \text{za } t \in \langle 0, T \rangle, \\ \eta(z, 0) = \zeta(z, 0) &= 0 && \text{za } z \in \langle 0, L \rangle. \end{aligned}$$

Dokaz:

Prvi izraz je izravna posljedica prethodnog teorema. Preostali dio dokazujemo tako da za negativne vrijednosti varijable z proširimo po parnosti longitudinalnu brzinu v_z^ε i otklon ζ^ε , a po neparnosti radijalnu brzinu v_r^ε , otklon η^ε i tlak p^ε . Lako se provjeri da jednadžbe i dalje vrijede za $z \in \langle -L, L \rangle$ i kao posljedica toga parcijalne derivacije po varijabli z svih veličina imaju istu regularnost kao i nepoznate funkcije. Nadalje, rubni i početni uvjeti za otklone proizlaze iz odgovarajućih rezultata o konvergenciji dobivenih u teoremu 3.16. \square

Sada ćemo definirati slabu formulaciju graničnog problema, kojeg označimo s $P(\varepsilon \rightarrow 0)$. Motivaciju i ideju za to daju nam slaba formulacija reskaliranog problema $P(\varepsilon)$, pretpostavke (15) uz $G_0 = 0$, te posljednji rezultat o kompaktnosti. Označimo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\mu(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \psi; 0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} \psi(t) r dr dz dt, \\ \mathcal{E}_{el}(\eta, \zeta, \boldsymbol{\varphi}, \psi; 0) &= R \int_0^T \int_0^L \left\{ \frac{E_0}{1 - \nu^2} \left(\frac{\nu}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\eta}{R^2} \right) \varphi_r + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_0}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial \eta}{\partial z} \varphi_z \right) \right\} \psi(t) dz dt, \\ \mathcal{E}_f(A, \boldsymbol{\varphi}, \psi; 0) &= \int_0^T \int_0^R A(t) \varphi_z \psi(t) r dr dt. \end{aligned}$$

Definicija 3.5 (SLABA FORMULACIJA GRANIČNOG PROBLEMA $P(\varepsilon \rightarrow 0)$)

Neka je $G_0 = 0$. Vektorsku funkciju (u_z, η, ζ) takvu da je

$$\begin{aligned} u_z &\in L^2(0, T; W), \\ \eta &\in L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, L)), \\ \zeta &\in L^\infty(0, T; H^1(0, L)) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} \in L^2(\langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle), \end{aligned}$$

nazivamo slabo rješenje graničnog problema $P(\varepsilon \rightarrow 0)$ ako je

$$\forall \varphi \in V, \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^+) \quad \mathcal{E}_\mu(\mathbf{u}, \varphi, \psi; 0) + \mathcal{E}_{el}(\eta, \zeta, \varphi, \psi; 0) = -\mathcal{E}_f(A, \varphi, \psi; 0)$$

i ako su zadovoljeni uvjeti nabrojani u korolaru 3.17.

Definicija 3.6 (SLABA FORMULACIJA PROBLEMA $P(\varepsilon \rightarrow 0)$ U OBLIKU KOJI UKLJUČUJE TLAK)

Neka je $G_0 = 0$. Vektorsku funkciju (u_z, p, η, ζ) takvu da je

$$\begin{aligned} u_z &\in L^2(0, T; W), \quad p \in L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle) \\ \eta &\in L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, L)), \\ \zeta &\in L^\infty(0, T; H^1(0, L)) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} \in L^2(\langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle), \end{aligned}$$

nazivamo slabo rješenje graničnog problema $P(\varepsilon \rightarrow 0)$ ako

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \tilde{V}, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^+) \\ \mathcal{E}_\mu(\mathbf{u}, \varphi, \psi; 0) - \int_0^T \int_\Omega p \operatorname{div} \varphi \psi(t) r dr dz dt + \mathcal{E}_{el}(\eta, \zeta, \varphi, \psi; 0) = -\mathcal{E}_f(A, \varphi, \psi; 0) \end{aligned} \quad (71)$$

i ako su zadovoljeni uvjeti nabrojani u korolaru 3.17.

Teorem 3.18

Svako gomilište dobiveno teoremom 3.16 u oznaci

$$(u_z, p, \eta, \zeta) \in L^2(0, T; W) \times L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle) \times L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \times L^\infty(0, T; H^1(0, L))$$

zadovoljava slabu formulaciju graničnog problema $P(\varepsilon \rightarrow 0)$.

Dokaz:

Uzmimo test funkciju $\varphi \in \tilde{V}$. Zbog toga što

$$\frac{\mu}{\varepsilon^2} \frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial r} \rightharpoonup \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad \text{slabo u } L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle),$$

imamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\mu(\mathbf{v}(\varepsilon), \varphi, \psi; \varepsilon) = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} \psi(t) r dr dz dt.$$

Nadalje, slaba konvergencija od $p(\varepsilon)$ daje

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega p(\varepsilon) \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{\varphi_r}{r} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) \psi(t) r dr dz dt = \int_0^T \int_\Omega p \operatorname{div} \varphi \psi r dr dz dt$$

Slično, koristeći $\rho_w Rh(\varepsilon) \varepsilon^3 / \mu^2 \leq C \varepsilon^{3/2}$, dobivamo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_{el}(\eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon, \varphi, \psi; \varepsilon) &= R \int_0^T \int_\Omega \left\{ \frac{E_0}{1 - \nu^2} \left(\frac{\nu}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu}{R^2} \right) \varphi_r + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_0}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial \eta}{\partial z} \varphi_z \right) \right\} \psi(t) dz dt. \end{aligned}$$

Time smo dokazali da (u_z, p, η, ζ) zadovoljava slabu formulaciju iz definicije 3.6. \square

Primijetimo da reducirani i granični problem zadovoljavaju istu slabu formulaciju (definicija 3.5 ili 3.6), za koju ćemo ubrzo pokazati da ima jedinstveno rješenje.

Iz dokaza posljednjeg teorema vidimo da svako gomilište (u_z, p, η, ζ) zadovoljava jednadžbu očuvanja količine gibanja

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{na } \Omega \times \langle 0, T \rangle$$

i jednadžbu očuvanja mase

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R u_z(r, z, t) r dr = 0 \quad \text{na } \Omega \times \langle 0, T \rangle,$$

uz sljedeće početne i rubne uvjete:

$$\begin{aligned}
\eta(0, t) = p(0, t) &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}(0, t) = 0 && \text{za } t \in \langle 0, T \rangle, \\
\eta(L, t) = \zeta(L, t) &= 0, \quad p(L, t) = A(t) && \text{za } t \in \langle 0, T \rangle, \\
\eta(z, 0) = \zeta(z, 0) &= 0 && \text{za } z \in \langle 0, L \rangle, \\
u_z(R, z, t) &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}(z, t) && \text{na } \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle, \\
p(z, t) &= \frac{E_0}{R(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\eta}{R} \right) && \text{na } \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle, \\
\frac{\partial u_z}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{E_0}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu \eta}{R} \right) && \text{na } \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle.
\end{aligned}$$

Primijetimo da navedeni sustav jednadžbi, odnosno rubno-početni problem, ima jedinstveno rješenje. Naime, rezultat o slaboj kompaktnosti, odnosno teorem 3.16, daje nam egzistenciju rješenja, preciznije postoje gomilišta koja zadovoljavaju navedeni sustav jednadžbi. Jedinstvenost slijedi iz činjenice da razlika takva dva rješenja

$$(u_z, p, \eta, \zeta) = (u_z, p, \eta, \zeta)^{(1)} - (u_z, p, \eta, \zeta)^{(2)}$$

zadovoljava sljedeći linearni problem:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 && \text{na } \Omega \times \langle 0, T \rangle, \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R u_z(r, z, t) r dr &= 0 && \text{na } \Omega \times \langle 0, T \rangle, \\
\eta(0, t) = \eta(L, t) = \zeta(L, t) &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}(0, t) = 0 && \text{za } t \in \langle 0, T \rangle, \\
p(0, t) = p(L, t) &= 0, && \text{za } t \in \langle 0, T \rangle, \\
\eta(z, 0) = \zeta(z, 0) &= 0 && \text{za } z \in \langle 0, L \rangle, \\
u_z(R, z, t) &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}(z, t) && \text{na } \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle, \\
p(z, t) &= \frac{E_0}{R(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\eta}{R} \right) && \text{na } \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle, \\
\frac{\partial u_z}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{E_0}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu \eta}{R} \right) && \text{na } \langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle,
\end{aligned}$$

odnosno u slaboj formulaciji:

$$\forall \varphi \in V, \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^+) \quad \mathcal{E}_\mu(\mathbf{u}, \varphi, \psi; 0) + \mathcal{E}_{el}(\eta, \zeta, \varphi, \psi; 0) = -\mathcal{E}_f(0, \varphi, \psi) = 0$$

i ako su zadovoljeni uvjeti nabrojani u korolaru 3.17, uz $A(t) = 0$.

Za ovaj problem vrijede odgovarajuće energetske ocjene, analogne propozicijama 3.14 i 3.15, jer su norme u ocjenama slabo poluneprekinute odozdo. Prisjetimo se, na primjer, da prema propoziciji 3.14 vrijedi

$$\left\| \frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_z \right\|_{L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle)} \leq C \|A\|_{H^1(0, T)}.$$

Budući da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti

$$\frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_z \rightharpoonup u_z \text{ slabo u } L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle),$$

stavljajući $A \equiv 0$ i koristeći slabu poluneprekinutost odozdo L^2 -norme zaključujemo da je

$$\|u_z\|_{L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle)} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_z \right\|_{L^2(\Omega \times \langle 0, T \rangle)} \leq C \|A\|_{H^1(0, T)} = 0$$

Time dobivamo da je $u_z = 0$, a otprije znamo da ako je $A \equiv 0$ imamo $p = 0$. Korištenjem ostalih jednadžbi, to povlači $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$, odnosno $\eta = \zeta = 0$, pa imamo $(u_z, p, \eta, \zeta) = 0$. Dobili smo da je gomilište dobiveno graničnim postupkom jedinstveno i da se ono podudara s rješenjem reduciranog problema dobivenog asimptotičkom analizom. Time smo pokazali sljedeći najvažniji rezultat ovog poglavlja.

Korolar 3.19

Svaki konvergentan podniz niza rješenja reskaliranog problema $P(\varepsilon)$ konvergira slabo, kada $\varepsilon \rightarrow 0$, prema jedinstvenom limesu koji je jednak jedinstvenom rješenju reduciranog problema dobivenog asimptotičkom analizom.

3.7 Ocjena pogreške

Pitanje koje se nameće nakon asimptotičke redukcije je, naravno, pitanje koliko dobro dobivene efektivne jednadžbe aproksimiraju originalni problem. Aproksimacija se ocjenjuje redom pogreške rješenja reduciranog problema u odnosu na rješenje potpunog Stokesovog sustava kombiniranog s Navierovim jednadžbama za membranu. Pokazali smo da se pogreška u terminima malog parametra ponaša kao $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ u unutrašnjosti promatranog područja. Vidjet ćemo također da na izlaznoj granici dolazi do pogoršanja te ocjene za faktor $\sqrt{\varepsilon}$ zbog formiranja rubnog sloja, kojeg eksplicitno konstruiramo u ovom poglavlju.

Već smo ranije spomenuli specifičnosti problema kojeg proučavamo u ovome radu. Sada nam glavni problem predstavlja izbor odgovarajućih rubnih uvjeta na izlaznoj granici. Minimalni zahtjev na te uvjete je da oni u konačnici vode na reducirani problem koji je dobro postavljen. Nadalje, spomenuti rubni uvjeti za reducirani problem trebali bi biti kompatibilni s interakcijom fluida i stijenke u preostalom dijelu područja. Mnogi "standardni" rubni uvjeti koji se koriste za fiksna područja, što bi kod nas odgovaralo krutim, odnosno čvrstim i nepopustljivim krvnim stijenkama, ne zadovoljavaju ovaj zahtjev. Na primjer, uvjet tangencijalne brzine jednake nuli na izlaznoj granici, iako daje dobro postavljeni rubno-početni problem, nije kompatibilan s tokom u ostatku domene. Zbog toga se generira rubni sloj koji nas vodi do tehničkih poteškoća u određivanju ocjena pogreške.

Rubni sloj konstruiramo na sljedeći način (v. [15]). Promatramo isti diferencijalni operator kao i u originalnom problemu, ali sada definiran na fiksnoj domeni, s odgovarajućim bočnim rubnim uvjetima koji služe kao korekcija za učinak rubnog sloja. Ostali rubni uvjeti dani su tako da rješenje rubnog sloja eksponencijalno opada s udaljavanjem od izlazne granice. Time sprječavamo da u unutrašnjosti područja rubni sloj utječe na prije dobiveno rješenje, barem što se tiče vodećeg reda točnosti. Ipak, iako rubni sloj ne uzima u obzir interakciju fluida i stijenke, na bočnoj stijenci dolazi do značajnog učinka smičnog naprezanja, koji rezultira pogoršanjem ocjene pogreške na $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$.

Označimo sa $Z^- \equiv S \times \mathbf{R}^-$, gdje je $S = \{(r, \vartheta, 0) | r < R, \vartheta \in [0, 2\pi)\}$. Prema rezultatima iz [15], slijedi da postoji jedinstveno varijacijsko rješenje $(\mathbf{w}, \pi) \in C_0^\infty(Z^-)^3 \times C^\infty(Z^-)$ problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi = 0 & \text{u } Z^-, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 & \text{u } Z^-, \\ w_r = v_r(r, L, t) & \text{za } z = 0, \\ -2 \frac{\partial w_z}{\partial z} + \pi = -2 \frac{\partial v_z}{\partial z}(r, L, t) & \text{za } z = 0, \\ \mathbf{w} = 0 & \text{na } \partial S \times \mathbf{R}^-. \end{array} \right.$$

Nadalje, postoje konstante $\gamma_0 > 0$ i C_π takve da kada $z \rightarrow -\infty$ po točkama, vrijedi

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \mathbf{w}(r, z) &\leq C e^{-\gamma_0 |z|}, \\ \partial^\alpha (\pi(r, z) - C_\pi) &\leq C e^{-\gamma_0 |z|} \end{aligned}$$

za svaki multiindeks α , i uz to $\int_S w_z = 0$ i imamo $W^{2,q}$ -regularnost od \mathbf{w} , te $W^{1,q}$ -regularnost od π na $\partial S \times \mathbf{R}^-$ i na $S \times \{0\}$.

Sada definiramo brzinu u rubnom sloju i tlak u rubnom sloju sa

$$\mathbf{w}^\varepsilon(r, z, t) = \varepsilon \mathbf{w}\left(r, \frac{z-L}{\varepsilon}, t\right), \quad \pi^\varepsilon(r, z, t) = \varepsilon^2 \left(\pi\left(r, \frac{z-L}{\varepsilon}, t\right) - C_\pi\right).$$

Brzina i tlak u rubnom sloju zadovoljavaju

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\varepsilon (\pi^\varepsilon \mathbf{I} - 2\varepsilon^2 \mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{w}^\varepsilon)) &= 0 \quad \text{na } \Omega \times \mathbf{R}^+, \\ \operatorname{div}_\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon &= 0 \quad \text{na } \Omega \times \mathbf{R}^+, \\ w_r^\varepsilon &= \varepsilon v_r, \quad \pi^\varepsilon - 2\varepsilon \frac{\partial w_z^\varepsilon}{\partial z} = \varepsilon^2 \left(-2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - C_\pi\right) \quad \text{za } z = L, \end{aligned}$$

i vrijede sljedeće ocjene ponašanja na bočnoj i ulaznoj granici

$$\forall t > 0 \quad \left\| \pi^\varepsilon \Big|_{r=R} - 2\varepsilon \frac{\partial w_z^\varepsilon}{\partial z} \Big|_{r=R} \right\|_{L^2(0,L)} \leq C \varepsilon^{5/2}, \quad (72)$$

$$\forall t > 0 \quad \left\| \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w_r^\varepsilon}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_z^\varepsilon}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} \right\|_{L^2(0,L)} \leq C \varepsilon^{5/2}, \quad (73)$$

$$w_r^\varepsilon \text{ i } \pi^\varepsilon - 2\varepsilon \frac{\partial w_z^\varepsilon}{\partial z} \text{ su eksponencijalno mali za } z = 0. \quad (74)$$

Nadalje, na Ω vrijedi sljedeća ocjena

$$\varepsilon \|\mathbf{w}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\pi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \left\| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \pi^\varepsilon}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{5/2}. \quad (75)$$

Nakon iskazanog, sada možemo ocijeniti razliku između rješenja reskaliranog problema i rješenja graničnog problema, modificiranog rubnim slojem. Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} \bar{p}(\varepsilon) &= p(\varepsilon) - p + \pi^\varepsilon, \\ \bar{\mathbf{v}}(\varepsilon) &= \frac{\mu}{\varepsilon^2} \mathbf{v}(\varepsilon) - v_z \vec{e}_z - \varepsilon v_r \vec{e}_r + \mathbf{w}^\varepsilon, \\ \bar{\zeta}(\varepsilon) &= \zeta^\varepsilon - \zeta, \\ \bar{\eta}(\varepsilon) &= \eta^\varepsilon - \varepsilon \eta, \end{aligned}$$

koje ćemo koristiti u sljedećem teoremu o ocjenama pogrešaka.

Teorem 3.20 (OCJENE POGREŠAKA)

Neka je $G_0 = 0$, $A \in C_c^\infty(0, \infty)$ i neka vrijedi

$$\left| E_0 - \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{\varepsilon} \right| \leq C\varepsilon^{3/2}, \quad h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon)\varepsilon \leq C\varepsilon^{3/2}, \quad \frac{\rho_w h(\varepsilon)\varepsilon^3}{\mu^2} \leq C\varepsilon^{3/2}. \quad (76)$$

Tada za svaki izbor $\varepsilon > 0$ vrijede sljedeće ocjene pogrešaka za brzinu i tlak u oznaci $\bar{\mathbf{v}}(\varepsilon)$ i $\bar{p}(\varepsilon)$, te za otklone stijenke u oznaci $\bar{\eta}(\varepsilon)$ i $\bar{\zeta}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\bar{v}(\varepsilon)_r}{r} \right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \|\bar{v}(\varepsilon)_z\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \left\| \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_r}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \\ + \left\| \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \leq C\varepsilon^{3/2} \end{aligned} \quad (77)$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_r}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \left\| \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \leq C\varepsilon^{1/2} \quad (78)$$

$$\|\bar{p}(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \leq C\varepsilon^{3/2} \quad (79)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\sqrt{E_0} \left\| \frac{\bar{\eta}(\varepsilon)}{\varepsilon}(t) \right\|_{L^2(0, L)} + \left\| \frac{\partial \bar{\zeta}(\varepsilon)}{\partial z}(t) \right\|_{L^2(0, L)} \right) \leq C\varepsilon^{3/2}. \quad (80)$$

Dokaz:

Dokaz je tehničke prirode i podijeljen je u nekoliko koraka. Prvo ćemo odrediti parcijalne diferencijalne jednadžbe i rubne uvjete za pogreške $\bar{\mathbf{v}}$, \bar{p} , $\bar{\eta}$ i $\bar{\zeta}$. Zatim ćemo dati varijacijsku formulaciju dobivenog sustava i zapisati energetska jednakost, te na kraju pomoću nje dokazati ocjene iz teorema.

Korak 1.

Koristeći jednadžbe reskaliranog problema (41) - (46), zatim reducirane jednadžbe dobivene asimptotičkom analizom, preciznije izraze (54), (55), (56), (60), (61), te jednadžbe i svojstva rubnog sloja, lako dobivamo sljedeće diferencijalne jednadžbe na $\Omega \times \mathbf{R}^+$

$$\operatorname{div}_\varepsilon (\bar{p}(\varepsilon) \mathbf{I} - 2\varepsilon^2 \mathbf{e}_\varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\varepsilon))) = \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \bar{\mathbf{e}}_z + \varepsilon \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \bar{\mathbf{e}}_r \right), \quad (81)$$

$$\operatorname{div}_\varepsilon \bar{\mathbf{v}}(\varepsilon) = 0. \quad (82)$$

Na bočnoj granici $\Sigma \times \mathbf{R}^+$, pogreške zadovoljavaju uvjete

$$\left(\bar{p}(\varepsilon) \mathbf{I} - 2\varepsilon^2 \mathbf{e}_\varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\varepsilon)) \right) \bar{\mathbf{e}}_r \cdot \bar{\mathbf{e}}_r = \bar{p}(\varepsilon) - 2\varepsilon \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_r}{\partial r} = F_r(\varepsilon) + \Phi_r^\varepsilon, \quad (83)$$

$$\left(\bar{p}(\varepsilon) \mathbf{I} - 2\varepsilon^2 \mathbf{e}_\varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\varepsilon)) \right) \bar{\mathbf{e}}_r \cdot \bar{\mathbf{e}}_z = -\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_r}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial r} \right) = F_z(\varepsilon) + \Phi_z^\varepsilon, \quad (84)$$

gdje smo s $F_r(\varepsilon)$ i $F_z(\varepsilon)$ označili elastične sile generirane pogreškama na membrani, odnosno

$$F_r(\varepsilon) = \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{1}{R(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial \bar{\zeta}(\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\bar{\eta}(\varepsilon)}{\varepsilon R} \right) + (\omega^\varepsilon)^2 \rho_w h(\varepsilon) \frac{\partial^2 \bar{\eta}(\varepsilon)}{\partial t^2} -$$

$$-h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon)\varepsilon \frac{\partial^2 \bar{\eta}(\varepsilon)}{\partial z^2} \frac{1}{\varepsilon},$$

$$F_z(\varepsilon) = -h(\varepsilon)E(\varepsilon) \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{\zeta}(\varepsilon)}{\partial z} + \nu \frac{\bar{\eta}(\varepsilon)}{\varepsilon R} \right) + (\omega^\varepsilon)^2 \rho_w h(\varepsilon) \frac{\partial^2 \bar{\zeta}(\varepsilon)}{\partial t^2},$$

a Φ_r^ε i Φ_z^ε predstavljaju preostale članove, koje zapisujemo u obliku

$$\Phi_r^\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial z} \Phi_r^{1,\varepsilon} + \Phi_r^{2,\varepsilon},$$

$$\Phi_z^\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial z} \Phi_z^{1,\varepsilon} + \Phi_z^{2,\varepsilon},$$

gdje su

$$\Phi_r^{1,\varepsilon} = h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon)\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial z},$$

$$\Phi_r^{2,\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^2 \varepsilon \rho_w h(\varepsilon) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \pi^\varepsilon - 2\varepsilon \frac{\partial w_r^\varepsilon}{\partial r} - \left(E_0 - \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \frac{\nu \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\eta}{R}}{R(1-\nu^2)} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\Phi_z^{1,\varepsilon} = -\left(E_0 - \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon}{1-\nu^2} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \varepsilon^3 \frac{R}{2} \left(\frac{R^2}{8} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial z} \right),$$

$$\Phi_z^{2,\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^2 \rho_w h(\varepsilon) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w_z^\varepsilon}{\partial r} - \varepsilon^2 \frac{\partial w_r^\varepsilon}{\partial z} + \left(E_0 - \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\nu \eta}{R}.$$

Navedene bočne rubne uvjete dobijemo raspisivanjem izraza

$$\begin{aligned} \bar{p}(\varepsilon) - 2\varepsilon \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_r}{\partial r} &= p(\varepsilon) - p + \pi^\varepsilon - 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_r - \varepsilon v_r + w_r^\varepsilon \right), \\ -\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_r}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial r} \right) &= -\varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_r - \varepsilon v_r + w_r^\varepsilon \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_z - v_z + w_z^\varepsilon \right) \right), \end{aligned}$$

zatim korištenjem izraza (44)-(46), što su analogni uvjeti reskaliranog problema, te pomoću svojstava brzine i tlaka u rubnom sloju i reduciranih jednadžbi, posebno

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{R^3}{16} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{R}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z \partial t} = 0,$$

što povlači

$$\varepsilon^2 \frac{\partial w_r^\varepsilon}{\partial z} = \varepsilon^3 \frac{\partial v_r}{\partial z} = \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t} = \varepsilon^3 \frac{R}{2} \left(\frac{R^2}{8} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial z} \right).$$

Konačno, na ulaznoj i izlaznoj granici imamo

$$\bar{v}(\varepsilon)_r = 0, \quad \bar{p}(\varepsilon) - 2\varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial z} = -\varepsilon^2 C_\pi \quad \text{za } z = L, \quad (85)$$

$$\bar{v}(\varepsilon)_r \text{ i } \bar{p}(\varepsilon) - 2\varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial z} \quad \text{su eksponencijalno mali za } z = 0. \quad (86)$$

Korak 2.

Sada zapisujemo varijacijsku formulaciju sustava jednadžbi (81) - (86) i u sljedećem izrazu uzimamo $\mu = \varepsilon^2$, što nam omogućava kraći zapis korištenjem ranije uvedenih oznaka:

$$\forall \varphi \in V, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^+)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\mu(\bar{\mathbf{v}}, (\varphi_r/\varepsilon, \varphi_z), \psi; \varepsilon) + \mathcal{E}_{el}(\bar{\eta}, \bar{\zeta}, (\varphi_r/\varepsilon, \varphi_z), \psi; \varepsilon) &= \\ &= \varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega \left(2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \varphi_z + \varepsilon \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \varphi_r \right) \psi(\tau) r dr dz d\tau - \\ - \frac{R}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^L \left(\Phi_r^{2,\varepsilon} \varphi_r(R, z, t) + \Phi_z^{2,\varepsilon} \varphi_z(R, z, t) + \Phi_r^{1,\varepsilon} \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} + \Phi_z^{1,\varepsilon} \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) \psi(\tau) dz d\tau - \\ &\quad - \varepsilon^2 \int_0^t \int_0^R C_\pi \varphi_z(r, L, \tau) \psi(\tau) r dr d\tau \end{aligned}$$

Ako eksponencijalno male veličine zanemarimo i izjednačimo s nulom, tada je $\bar{\mathbf{v}}(\varepsilon) \in V$ za svako t i može se koristiti kao test funkcija. Analognim

Zaključujemo da je spomenuti član kontroliran izrazom koji odgovara bočnoj granici i izrazom ocijenjenim s $C\varepsilon^2\|\varepsilon\mathbf{e}_\varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\varepsilon))\|_{L^2(\Omega\times(0,t))}$.

Za volumni član morat ćemo koristiti L^2 -normu simetričnog dijela gradijenta.

Prvo zapišimo volumni član u dva dijela:

$$I_1 = \varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}(r, z, \tau) \bar{v}(\varepsilon)_z(r, z, \tau) r dr dz d\tau,$$

$$I_2 = \varepsilon^3 \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}(r, z, \tau) \bar{v}(\varepsilon)_r(r, z, \tau) r dr dz d\tau.$$

Primijetimo da je

$$\int_0^R 2\xi \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}(\xi, z, \tau) d\xi = -2 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R (\xi \frac{\partial v_r}{\partial \xi} + v_r) d\xi = -2 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi v_r) d\xi = -2R \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial z},$$

pa vrijedi

$$\begin{aligned} I_1 &= -2\varepsilon^2 \int_0^t \int_0^L R \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial z} \frac{\partial \bar{\zeta}(\varepsilon)}{\partial \tau} dz d\tau + 2\varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{1}{r} \int_0^r \xi \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} d\xi \right) \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial r} r dr dz d\tau = \\ &= -2\varepsilon^2 \int_0^t \int_0^L R \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial z} \frac{\partial \bar{\zeta}(\varepsilon)}{\partial \tau} dz d\tau + \\ &\quad + 2\varepsilon^2 \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{1}{r} \int_0^r \xi \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} d\xi \right) \left(\frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_r}{\partial z} \right) r dr dz d\tau - \\ &\quad - 2\varepsilon^3 \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \int_0^r \xi \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} d\xi \right) \bar{v}(\varepsilon)_r r dr dz d\tau. \end{aligned}$$

Dobili smo da je I_1 sastavljen od tri dijela. Prvi se ocjenjuje kao i izrazi koji sadrže $\Phi^{j,\varepsilon}$, drugi pomoću L^2 -norme simetričnog dijela gradijenta, a posljednji pridružimo izrazu I_2 i ocijenimo ih zajedno kao

$$I_3 = I_2 - 2\varepsilon^3 \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \int_0^r \xi \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} d\xi \right) \bar{v}(\varepsilon)_r r dr dz d\tau.$$

Budući da je $v_r + \frac{2}{r} \int_0^r \xi \frac{\partial v_z}{\partial z} d\xi = -v_r$, imamo

$$I_3 = 3\varepsilon^3 \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \bar{v}(\varepsilon)_r r dr dz d\tau = -3\varepsilon^3 \int_0^t \int_\Omega r \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_r}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial z} \right) r dr dz d\tau$$

i vrijedi

$$|I_3| \leq C\varepsilon^3 \left(\left\| \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_r}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega\times(0,t))} + \varepsilon \left\| \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega\times(0,t))} \right).$$

Sada vidimo da je zadovoljeno (80) i

$$\varepsilon^2 \int_0^T \|\mathbf{e}_\varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\varepsilon))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C\varepsilon^3.$$

Preostalo je još ocijeniti izraz $\mathbf{e}_\varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\varepsilon))_{rz}$. Postupajući kao u propoziciji 3.9, dobivamo

$$\left\| \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_z}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \varepsilon \left\| \frac{\partial \bar{v}(\varepsilon)_r}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \leq C\varepsilon^{3/2} + C_1 \left\| \frac{\partial \bar{\zeta}(\varepsilon)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega \times (0, T))}.$$

Ocjena za tlak (79) dokazuje se kao u propoziciji 3.15. \square

Napomena.

Lako se može vidjeti da odgovarajuće ocjene vrijede i za vremensku derivaciju od $\bar{\mathbf{v}}(\varepsilon)$.

4 Zaključak

Iako ovaj rad obuhvaća samo mali dio problematike modeliranja krvnog toka, on čini kvalitativan i poučan uvod u tu aktualnu znanstvenu tematiku. Kvantitativni nedostatak se očituje u dosta restriktivnim pretpostavkama i pojednostavljenjima, kao na primjer ograničavanje na arterije malog presjeka, zanemarivanje anizotropnog ponašanja i kutnih deformacija arterijske stijenke, pretpostavka o relativno malom padu tlaka i polaganom toku... Sve te pretpostavke opravdale su korištenje Stokesovih jednadžbi i linearizaciju međudjelovanja krvi i krvne stijenke čime smo izbjegli značajne i suštinske probleme koji se javljaju ako model zadrži nelinearni karakter. Postignuti su rezultati i u tome smjeru, ali oni nisu izneseni u ovoj radnji (v. [11]).

U izvodu ovog linearnog modela koristili smo standardni varijacijski pristup i cilindrični koordinatni sustav zbog geometrije domene. Promatrali smo ponašanje problema kada omjer karakteristične širine i duljine teži k nuli. Na temelju apriornih energetske ocjena, odnosno ograničenosti niza rješenja, i prema rezultatima funkcionalne analize o slaboj kompaktnosti, dobili smo rješenja na limesu. S druge strane, asimptotičkim razvojem i redukcijom izveli smo efektivne jednadžbe i pokazali da se njihova rješenja podudaraju s rješenjima na limesu. Uz navedeno, glavnim rezultatima ovog rada možemo smatrati i same efektivne jednadžbe dobivene asimptotičkom analizom, kao i red pogreške njihovih rješenja. Vidjeli smo da je ocjena pogreške iskazana u terminima malog parametra ε , koji predstavlja omjer polumjera i duljine promatrane krvne žile. Naravno, što je taj omjer manji bit će manje i odstupanje efektivnog rješenja od stvarnosti, u kojem slučaju model postaje zanimljiv ne samo u znanstvenom pogledu već i sa stanovišta iskoristivosti u medicini.

Literatura

- [1] I. Aganović: *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*, Element, Zagreb, 2003.
- [2] I. Aganović - K. Veselić: *Linearne diferencijalne jednadžbe*, Element, Zagreb, 1997.
- [3] M. Alić: *Obične diferencijalne jednadžbe*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 1994.
- [4] N. Antičić - M. Vrdoljak: *Mjera i integral*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2001.
- [5] M.E. Bogovski: *Solution of the first boundary problem for the equation of continuity of an incompressible medium*, Soviet. Math. Dokl. 20 (1979), str. 1094-1098.
- [6] S.C. Brenner - L.R. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Elements Methods*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [7] H. Brezis: *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- [8] P.G. Ciarlet: *Plates and junctions in elastic multi-structures*, R.M.A. 14, Masson, Paris, 1990.
- [9] S. Čanić - E.H. Kim: *Mathematical Analysis of the Quasilinear Effects in a Hyperbolic Model of Blood Flow through Compliant Axisymmetric Vessels*, Mathematical Methods in the Applied Sciences 26(14) (2003), str. 1161-1186.
- [10] S. Čanić - A. Mikelić: *Effective Equations Modeling the Flow of a Viscous Incompressible Fluid through a Long Elastic Tube Arising in the Study of Blood Flow through Small Arteries*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems 2(3) (2003), str. 431-463.
- [11] S. Čanić - A. Mikelić - D. Lamponi - J. Tambača: *Self-Consistent Effective Equations Modeling Blood Flow in Medium-to-Large Compliant Arteries*, prihvaćeno u SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation (2004)

- [12] H. Le Dret: *Problèmes variationnels dans les multidomaines*, R.M.A. 19, Masson, Paris, 1991.
- [13] G. Fichera: *Existence Theorems in Elasticity*, Handbuch der Physik, Band 6a/2, Springer-Verlag, 1972.
- [14] D. Gilbarg - N.S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [15] W. Jäger - A. Mikelić: *On the effective equations for a viscous incompressible fluid flow through a filter of finite thickness*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. LI, 1998. str. 1073-1121.
- [16] S. Kurepa: *Funkcionalna analiza*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [17] L.D. Landau - E.M. Lifschitz: *Elasticity Theory*, Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [18] J.L. Lions: *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en controle optimal*, Springer Verlag, Berlin, 1973.
- [19] P. Luchini - M. Lupo - A. Pozzi: *Unsteady Stokes flow in a distensible pipe*, ZAMM 71 (1991), str. 367-378.
- [20] E. Marušić-Paloka: *Uvod u matematičku teoriju Navier-Stokesovih jednažbi*, poslijediplomska predavanja na PMF-Matematičkom odjelu, Zagreb
- [21] D. Mitrović - D. Žubrinić: *Fundamentals of applied functional analysis*, Addison Wesley Longman, Essex, 1998.
- [22] J. Nečas: *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1983.
- [23] M.S. Olufsen, C.S. Peskin, W.Y. Kim, E.M. Pedersen, A. Nadim, J. Larsen: *Numerical Simulation and Experimental Validation of Blood Flow in Arteries with Structured-Tree Outflow Conditions*, Annals of Biomedical Engineering 28 (2000), str. 1281-1299.

- [24] L. Schwartz: *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1950.
- [25] M.E. Taylor: *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [26] R. Temam: *Navier-Stokes Equations*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.

Životopis

Rođen sam 06. svibnja 1977. godine u Karlovcu. Nakon završetka osnovne škole, a zatim i gimnazije (prirodoslovno-matematički smjer) u Karlovcu, upisao sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu - Matematički odjel. Diplomirao sam 2000. godine s odličnim uspjehom na inženjerskom profilu, smjer Primijenjena matematika, pod vodstvom prof.dr.sc. E. Marušić-Paloke i iste godine upisao poslijediplomski studij matematike. Diplomski rad nosio je naziv *Stacionarni tok viskoznog fluida*.

U visokom školstvu zaposlio sam se i radim od samog početka, odmah nakon diplomiranja. Od travnja 2000. do lipnja 2004. radio sam kao asistent na Grafičkom fakultetu u Zagrebu, a jedini prekid bilo je civilno služenje vojnog roka u periodu od ožujka do studenog 2003. godine. Trenutno sam zaposlen kao asistent na Fakultetu prometnih znanosti u Zagrebu, aktivni sam član seminara za diferencijalne jednačbe i numeričku analizu na PMF-Matematičkom odjelu i suradnik na znanstvenom projektu pod nazivom *Asimptotička analiza u mehanici fluida*.

Oženjen sam Kristinom i otac jednog djeteta, Mateja.

Sažetak

Temeljna postavka od koje krećemo u ovome radu je činjenica da se krv može smatrati newtonovskim fluidom. Promatramo polagani krvni tok kroz usku i dugačku krvnu žilu s popustljivom stijenkom (preciznije, arteriju) uzrokovan zadanim padom tlaka između ulazne i izlazne granice.

Koristeći Stokesove jednačbe za inkompresibilni viskozni fluid i Navierove jednačbe za zakrivljenu membranu, izvodimo linearni model za problem međudjelovanja krvnog toka i krvne stijenke. Uvodimo asimptotički razvoj i proučavamo ponašanje sustava fluid-stijenka na limesu kada omjer karakteristične širine (radijus žile) i karakteristične duljine teži prema nuli. Na taj način dobivamo reducirane jednačbe za efektivni tlak i efektivne otklone stijenke. Aproksimacija je strogo opravdana rezultatom o slaboj konvergenciji i ocjenama pogreške rješenja efektivnih jednačbi modificiranih rubnim slojem na izlaznoj granici.

Summary

Foundation of this work is the assumption that blood can be considered a newtonian fluid. We consider creeping blood flow through long and narrow blood vessel with compliant wall (more precisely, arteria) due to a given time dependent pressure drop between the inlet and the outlet boundary.

Using Stokes equations for incompressible viscous fluid and Navier equations for the curved membrane, we derive a linear model for the problem of interaction of the blood flow and the vessel wall. Using asymptotic expansion and studying the behaviour of this coupled fluid-structure system in the limit when the ratio of the vessel radius and length tends to zero, we obtain reduced equations for effective pressure and effective wall displacements. The approximation is rigorously justified through the weak convergence result and the error estimates for the solution of the effective equations modified by an outlet boundary layer.