

# Proračun nestacionarnog temperaturnog polja metodom kontrolnih volumena s kompenzacijom rubnih uvjeta

Neven NINIĆ, Srđan PODRUG i

Damir JELASKA

Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje,  
Sveučilište u Splitu  
(Faculty of Electrotechnics, Mechanical Engineering and  
Naval Architecture, University of Split)  
R. Boškovića b.b., 21000 Split  
Republic of Croatia

**Ključne riječi**

*Eksplicitna shema  
Kontrolni volumen  
Krivocrtna granica  
Nestacionarno temperaturno polje  
Provodenje topline*

**Keywords**

*Control volume  
Explicit scheme  
Heat conduction  
Irregular curved boundary  
Non-stationary temperature field*

Primljeno (Received): 1999-02-20

Prihvaćeno (Accepted): 1999-12-20

Prethodno priopćenje

Rad se odnosi na primjenu poznate metode kontrolnih volumena (MKV) na proračun nestacionarnih temperaturnih polja, konkretno na aproksimiranje krivocrtnih dvodimenzionalnih kontura rubnim elementima. No, iza aproksimacije konturne zone tijela ne stoji težnja da se ti elementi usitne ili da se odstupi od kvadratične podjele, kako bi se kontura što bolje opisala, već težnja da se zadrže relativna krupnoća i jednostavan oblik elemenata, uz zadržavanje točnosti energetskih bilanci, kao i za elemente u unutrašnjosti tijela. Osnova za ovaj pristup je u tome, da su u rubnim dijelovima realnog tijela i u rubnim kontrolnim volumenima osigurani jednak topinski otpori i topinski kapaciteti. To je postignuto ciljanom izmjenom realnih koeficijenata prijelaza topline i specifičnih topinskih kapaciteta u rubnim mrežnim elementima.

## Numerical Analysis of Non-stationary Temperature Field Using Control Volumes Method with Compensation of Boundary Conditions

Preliminary note

Controle volume method is applied to the estimation of non-stationary two-dimensional temperature fields. Irregularly curved contours are approximated with regular boundary control elements. There was no intention in filling the boundary regions with a square network, which is somewhat finer than used in the main portion of the region, or to fill out the boundary regions with networks other than square, but to keep relative largeness of elements, as well as to satisfy energy conservation principle for all elements. Control volumes for boundary regions are modified so that thermal resistances and capacities are kept equal in real and corresponding boundary control elements. This is obtained by means of directed correction of real local heat transfer coefficients and thermal capacities applied to boundary control volumes.

**1. Uvod**

Elementi u pogonu, izloženi nestacionarnim režimima mehaničkih i topinskih opterećenja, trpe nestacionarne lokalne promjene stanja, koje povodaju proces gomilanja oštećenja kako uslijed mehaničkih, tako i uslijed topinskih naprezanja. Da bi se matematički opisao proces topinskog zamora materijala, potrebno je poznavati ne samo raspored temperaturnih gradijenata u elementu, nego i njihovu promjenu s vremenom. Dakle, treba proračunati nestacionarno temperaturno polje.

Pristupajući izboru numeričke metode proračuna nestacionarnog temperaturnog polja, odabrana je metoda kontrolnih volumena (ili elementarnih bilanci), koja se može interpretirati kao jedan poseban slučaj tehnike konačnih elemenata [1, 2], a dobivene algebarske jednadžbe za temperature u čvornim točkama slične su onima iz metode konačnih razlika. Služeći se Descartesovom mrežom za diskretizaciju tijela, ova metoda ima u odnosu na sve ostale najveću fizikalnu transparentnost i lakoću dobivanja apriornih procjena, što za njen daljnji razvitak i inženjersku primjenu u složenim okolnostima predstavlja određenu prednost.

Ovo se odnosi i na numeričko određivanje mjestimičnih koeficijenata prijelaza topline isparavanjem pri naglom umakanju tijela visoke temperature u kapljevinu. Osnova za ovo bili bi eksperimenti, s mjerenim temperaturama unutar rubnog sloja čvrstog tijela kao graničnim uvjetima [3].

Suština metode kontrolnih volumena (MKV) je u tome da se tijelu pomoću kakve mreže pripiše niz čvornih točaka i konačnih elemenata oko njih. Mreža ne mora biti ortogonalna, ali svi topinski tokovi moraju biti okomititi na odgovarajuće stranice (plohe) kontrolnih volumena. Uzima se da su temperature u čvornim točkama srednje za masu pripadnih elemenata, a da su gradijenti na granica elemenata posebno definirani – također pomoću susjednih čvornih točaka, i to tako da se topinski tokovi za dva susjedna elementa na zajedničkoj granici međusobno ne razlikuju [1]. Ovaj uvjet je zadovoljen i trivijalan ako se gradijent na granici dobije linearnom interpolacijom temperature između dviju čvornih točaka. Za poznate čvorne temperature i referentne topinske tokove na granicama pravokutnih elemenata, u MKV rabe se načelno točne balance energije i za elemente koji su konačni.

**Oznake/Symbols**

- a* – koeficijent temperaturne vodljivosti, mjerna jedinica:  $m^2/s$   
 – thermal diffusivity coefficient, measure unit:
- A* – površina rubnih elemenata jedne dionice dvodimenzionalnog tijela i volumen za jediničnu debljinu,  $m^2$   
 – marginal element area of one part of twodimensional body and volume for unit depth
- Bi* – Biotova značajka  
 – Biot number
- c* – specifični toplinski kapacitet,  $J/(kgK)$   
 – specific heat
- F* – duljina konture jedne dionice dvodimenzionalnog tijela i rubna površina za jediničnu debljinu, m  
 – one part contour length of twodimensional body and marginal area for unit depth
- Fo* – Fourierova značajka  
 – Fourier number
- T* – temperatura, K  
 – temperature
- α* – koeficijent prijelaza topoline,  $W/(m^2K)$   
 – heat transfer coefficient
- δ* – duljina stranice kvadrata diskretizacijske mreže, m  
 – discretized net square side length
- d* – odstupanje srednje linije mrežne konture u odnosu na stvarnu prema unutrašnjosti tijela, m  
 – difference between net contour mean line and real line toward the inside of the body

- λ* – koeficijent toplinske vodljivosti,  $W/(mK)$   
 – thermal conductivity
- τ* – vrijeme, s  
 – time
- $Δτ$  – vremenski računski korak, s  
 – time computation step

**Indeksi/Indices**

- 0 – temperatura u čvornoj točki na početku proračunskog vremenskog koraka  
 – node temperature at the beginning of time computation step
- 1, 2, 3, 4 – oznake temperature čvornih točaka djelića susjednih nultom, na početku računskog vremenskog intervala  
 – node temperature labels of adjacent parts, at the beginning of computation time interval
- kor – korigirana vrijednost  
 – corrected value
- stv – stvarna vrijednost  
 – real value
- f1 – fluid
- u – unutarnji  
 – internal
- v – vanjski  
 – external

Fizikalni model koji stoji iza ovih postavki možemo opisati zamislivši istovremeno izoterme koje prikazuju trenutačno dvodimenzionalno temperaturno polje i uniformnu ortogonalnu mrežu, kojom je tijelo razbijeno na konačne elemente. Realne protote topoline po veličini i smjeru na svim granicama pravokutnog elementa predstavljaju strelice okomite na izoterme, dok se po MKV računa da su protoci isključivo okomiti na stranice elemenata. Ovo na prvi pogled predstavlja vrlo grubu aproksimaciju realnih tokova na stranicama elemenata, ali ako je linearna ili kakva druga aproksimacija toplinskih protoka okomita na stranice dobra, dobivaju se točne promjene temperature u geometrijskom središtu elementa, a to znači i točan generalni tok topoline između čvornih točaka, na razini elemenata kao cjelina. Samo na mikro planu (uz granične crte pojedinih elemenata) temperaturno polje drastično odstupa od stvarnog (gradijent je skrenut okomito na stranicu), dok je na razini čvornih točaka ono potpuno točno.

Nameće se analogija sa sливanjem sloja tekućine niz reljefnu površinu s izohipsama poput izotermi. Strelice bi predstavljale realne vektore brzine, a uvođenje mreže i konačnih elemenata odgovaralo bi urezivanju vodoravnih pravokutnih stepenica, poput ljski: time se tokovi tekućine samo lokalno preusmjeravaju okomito na rubove stepenica, ali će količine i promjene količina tekućine na

svim stepenicama biti načelno jednake kao i na stvarnoj reljefnoj površini.

Osim izbora načina računanja toplinskih protoka kroz granice (linearno ili ne), pitanje aproksimiranja geometrije granice tijela je drugo načelno pitanje metode kontrolnih volumena. Krivocrtna granica se općenito aproksimira na različite načine, ali oni nisu svi konzistentni s fizikalnim sadržajem metode koja izražava zakon o održanju energije na razini svakog elementa.

Najjednostavnije je i fizikalno najpreglednije realnu krivocrtnu granicu aproksimirati stepenastom descartesovskom mrežnom konturom, služeći se isključivo polovično, četvrtinski i tročetvrtinski rezanim rubnim elementima, kako bi im se referentne čvorne točke pojatile na mrežnoj aproksimaciji konture tijela i vezale za temperaturne granične uvjete. Ovaj stepenasti način aproksimiranja krivocrtne granice dvodimenzionalnog tijela fizikalno je jasan i bilančno točan, što se ne može reći za neke druge metode aproksimiranja granice [4, 5], koje su zato primjenjivije u metodi konačnih razlika. Stepenasti način aproksimacije ima zbog rubnoga položaja graničnih čvornih temperatura određenu slabost, jer bi čvorne temperature trebale biti prosječne za svoje elemente. No, najveća mu je slabost što diskretizacijom dobivena stepenasta kontura ima drugaciju i toplinski otpor i toplinski kapacitet od realnog rubnog sloja tijela. Zbog toga će – ne samo

temperature rubnih – nego i temperature susjednih unutarnjih elemenata biti poremećene u odnosu na realne. Osim – i u tome je suština ovdje razvijene metode – ako ciljano izmijenimo realne koeficijente prijelaza topline i specifične toplinske kapacitete rubnih elemenata tako, da diskretizirani rubni sloj tijela ima načelno isti toplinski otpor i isti toplinski kapacitet kao i realni rubni sloj tijela.

## 2. Izbor karakterističnog problema i diskretizacijske mreže

Kao karakterističan primjer uzeto je dvodimenzionalno temperaturno polje u presjeku jedne hlađene lopatice plinske turbine, izložene struji vrućih produkata izgaranja. Profil, temperatura produkata izgaranja i raspored koeficijenata prijelaza topline  $\alpha_v$  po vanjskoj konturi su proizvoljni i usvojeni su kao na slici 1. Hlađenje obavlja fluid koji struji kroz dva definirana kanala okruglog presjeka, s koeficijentom prijelaza topline  $\alpha_u$  koji je za ovu priliku uzet neovisno o temperaturi površine ili o toplinskem toku.

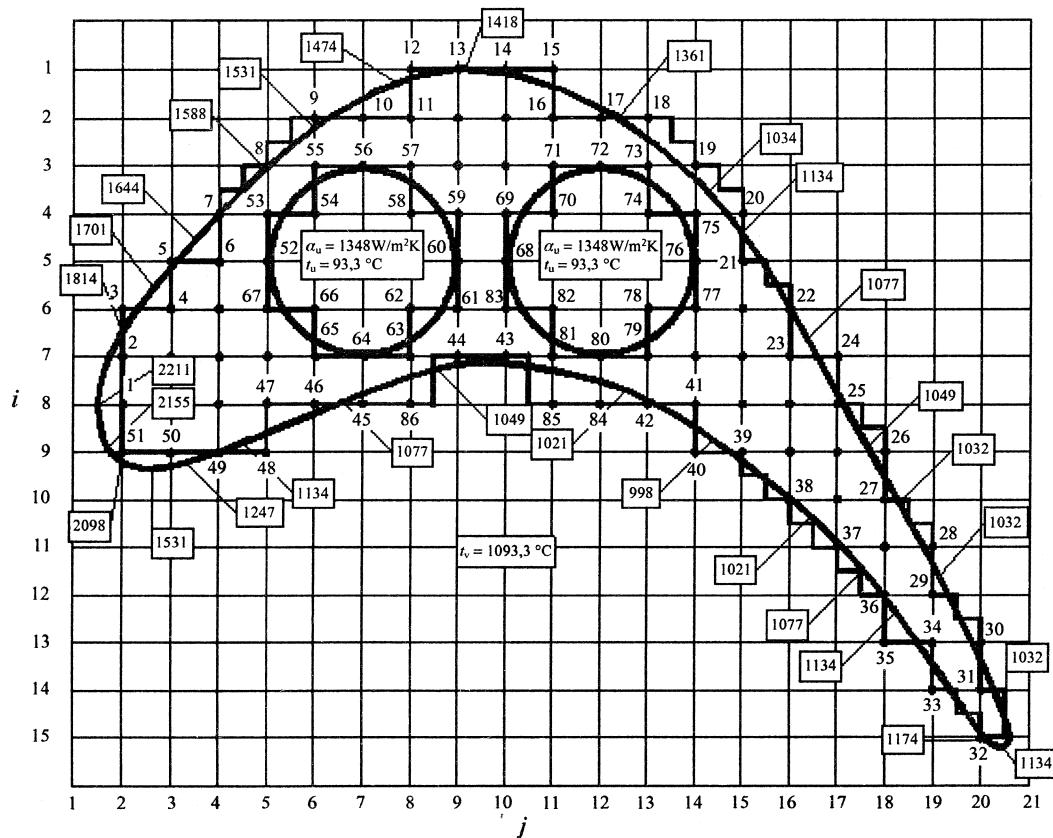
Termofizička svojstva materijala lopatice: gustoća, specifični toplinski kapacitet, koeficijent provođenja topline i koeficijent temperaturne vodljivosti uzeti su također kao neovisni o temperaturi i to:

$$\begin{aligned}\rho &= 7750 \text{ kg/m}^3; \\ c &= 460 \text{ J/(kgK)}; \\ \lambda &= 26,0 \text{ W/(mK)}; \\ a &= 7,29 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.\end{aligned}$$

Kao mreža za diskretizaciju tijela, a s obzirom na cilj rada, izabrana je kvadratna, relativno krupnozrnata, sa  $15 \times 20$  kontrolnih volumena s veličinom stranice kvadrata  $\delta = 1,59 \times 10^{-3} \text{ m}$  i s usvojenom aproksimacijom konture kao na slici 1. Osim dvokoordinatne ( $i, j$ ) rubni elementi imaju i jednokoordinatnu oznaku – uzduž konture – od 1 do 83, prikazanu na slici 1. To pojednostavljuje upis i proračun konturnih veličina, koje se tretiraju u nastavku.

## 3. Bilančne jednadžbe

Bilančnih jednadžbi za proračun nepoznatih temperatura ima koliko i tipova elemenata, odnosno konačnih volumena. To su unutarnji tipa (6, 4), rubni četvrtinski tipa (1, 8), rubni polovični tipa (1, 9), rubni tročetvrtinski tipa (2, 8), te specijalni rubni elementi: četvrtinski tipa (15, 20), polovični tipa (11, 19), tročetvrtinski (3, 14), (5, 15), (14, 20) i (7, 8). Bilančne jednadžbe su eksplicitnog tipa – daju temperature u pripadnim čvornim točkama na kraju usvojenog vremenskog koraka kao funkcije (po-



**Slika 1.** Odsječak hlađene turbinske lopatice u diskretizacijskoj mreži, s rasporedom koeficijenata prijelaza topline i usvojenom stepeničastom apraksimacijom konture s dvoindeksnim i konturnim oznakama elemenata

**Figure 1.** Cooled turbine blade section in discretized net with heat transfer coefficient scheme and adopted staircase contour approximation with two-index and contour labels of elements

znatih) okolnih temperatura s početka tog vremenskog koraka. Ta funkcija je za elemente tipa (6, 4) označena u programu sa BIL1, za tip (1, 8) BIL3, za tip (1, 9) BIL2, za tip (2, 8) BIL4, itd. Poznati oblik funkcije BIL1 je najjednostavniji i glasi:

$$\begin{aligned} \text{BIL1}(T_1, T_2, T_3, T_4, T_0) &= \\ &= Fo \cdot (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + (1 - 4 \cdot Fo) \cdot T_0, \quad (1) \end{aligned}$$

a nova je temperatura u čvornoj točki 0:

$$T_{0,\text{novo}} = \text{BIL1}(T_1, T_2, T_3, T_4, T_0) \quad (2)$$

gdje je  $Fo = a \cdot \Delta\tau / \delta^2$  Fourierova značajka, indeksi 1 do 4 odnose se na elemente koji okružuju nulti, za koji je bilanca pisana i čija je prethodna vrijednost temperature  $T_0$ .  $T_{0,\text{novo}}$  je nova vrijednost te temperature  $\Delta\tau$  vremena kasnije. Maksimalna vrijednost vremenskog koraka  $\Delta\tau$ , koju dopušta ova bilanca energije je, s obzirom na stabilnost rješenja, određena poznatim kriterijem

$$\Delta\tau \leq 0,25 \frac{\delta^2}{a}. \quad (3)$$

Svaki od navedenih standardnih rubnih elemenata, odnosno kontrolnih volumena, ima svoje bilančne i kriterijske jednadžbe, poznate iz literature, a za svaki od specijalnih tipova kontrolnih volumena odgovarajuće bilančne jednadžbe i uvjeti stabilnosti rješenja izvedeni su za ovu priliku i ugrađeni u program.

#### 4. Kompenzacija rubnih uvjeta u MKV-u

Polazi se od kvadratne i relativno krupnozrnate uniformne mreže elemenata s relativno grubom aproksimacijom konture. Temperaturne jednadžbe tipa (1) i analogne za sve ostale tipove kontrolnih volumena ne predstavljaju aproksimacije diferencijalnih jednadžbi ili graničnih uvjeta, kao u metodi konačnih razlika [6], već predstavljaju bilance energije za unutarnje i rubne elemente s linearnom interpolacijom temperature između čvornih točaka. Za rubne mrežne elemente u stacionarnom stanju, prvi korak najavljenje kompenzacije rubnih uvjeta je u tome, da se umjesto realnih vrijednosti koeficijenata prijelaza topline uvedu umanjeni, u mjeri u kojoj je stepenasta mrežna kontura duljine  $F_{\text{mrež}}$  dulja od stvarne  $F_{\text{stv}}$  na dotičnom segmentu. Nadalje, ako mrežna kontura ne odstupa s obje strane realne konture podjednako, nego je srednja linija mrežne udaljena prosječno za »debljinu pomaka«  $d$  od realne konture, onda na tome segmentu konture treba uzeti u obzir još i konduktivni otpor sloja tijela debljine  $d$ . Time je korigirani koeficijent prijelaza topline na datom segmentu konture određen uvjetom jednakosti realnog i mrežnog toplinskog otpora prema sljedećoj relaciji:

$$\frac{1}{\alpha_{\text{stv}} F_{\text{stv}}} + \frac{d}{\lambda F_{\text{stv}}} = \frac{1}{\alpha_{\text{kor}} F_{\text{mrež}}}. \quad (4)$$

Pri tome je  $d > 0$  za mrežnu konturu uvučenu u tijelu u odnosu na realnu konturu. Odavde slijedi izraz za korigirani koeficijent prijelaza topline:

$$\alpha_{\text{kor}} = \frac{\frac{F_{\text{stv}}}{F_{\text{mrež}}}}{\frac{1}{\alpha_{\text{stv}}} + \frac{d}{\lambda}}. \quad (5)$$

Zadovoljenjem uvjeta (5) postižu se isti toplinski otpori na mrežnoj i na realnoj konturi, a time i jednakost temperature u unutarnjem prirubnom sloju realnog i »mrežnog« tijela u stacionarnom stanju.

Za nestacionarne procese zadržava se ista korekcija toplinskog otpora uz konturu i ako se srednja linija mrežne konture poklapa s realnom konturom na datoj dionici ( $d = 0$ ), nikakva druga korekcija nije potrebna. Naime, ako su na određenoj dionici konture površine omeđene stvarnom konturom i mrežnom konturom  $A_{\text{stv}}$  i  $A_{\text{mrež}}$  jednakе, toplinski kapaciteti mrežnih i odgovarajućih realnih rubnih elemenata u tom slučaju su zbog jednakih obuhvaćenih masa jednak. Time je i vremenska promjena temperature mrežnih rubnih elemenata načelno jednak pro-mjeni stvarnih.

Konačno, ako je srednja linija mrežne konture na datoj dionici udaljena za  $d$  od stvarne prema unutrašnjosti tijela ( $d > 0$ ), onda za odgovarajući iznos treba uvećati (ili smanjiti za  $d < 0$ ) toplinski kapacitet konturnih mrežnih elemenata te dionice, kako bi brzina njihove promjene temperature načelno bila jednak stvarnoj brzini promjene temperature realnih rubnih elemenata tijela. Za ovo je dovoljno promijeniti specifični toplinski kapacitet mrežnih rubnih elemenata, sa  $c_{\text{stv}}$  na  $c_{\text{kor}}$  tako da toplinski kapaciteti mrežnih i odgovarajućih realnih konturnih elemenata budu jednak. Dakle uz brojčanu definiciju  $d$ :

$$d \cdot F_{\text{stv}} + A_{\text{mrež}} = A_{\text{stv}} \quad (6)$$

i traženu jednakost toplinskih kapaciteta

$$A_{\text{mrež}} c_{\text{kor}} = A_{\text{stv}} c_{\text{stv}} \quad (7)$$

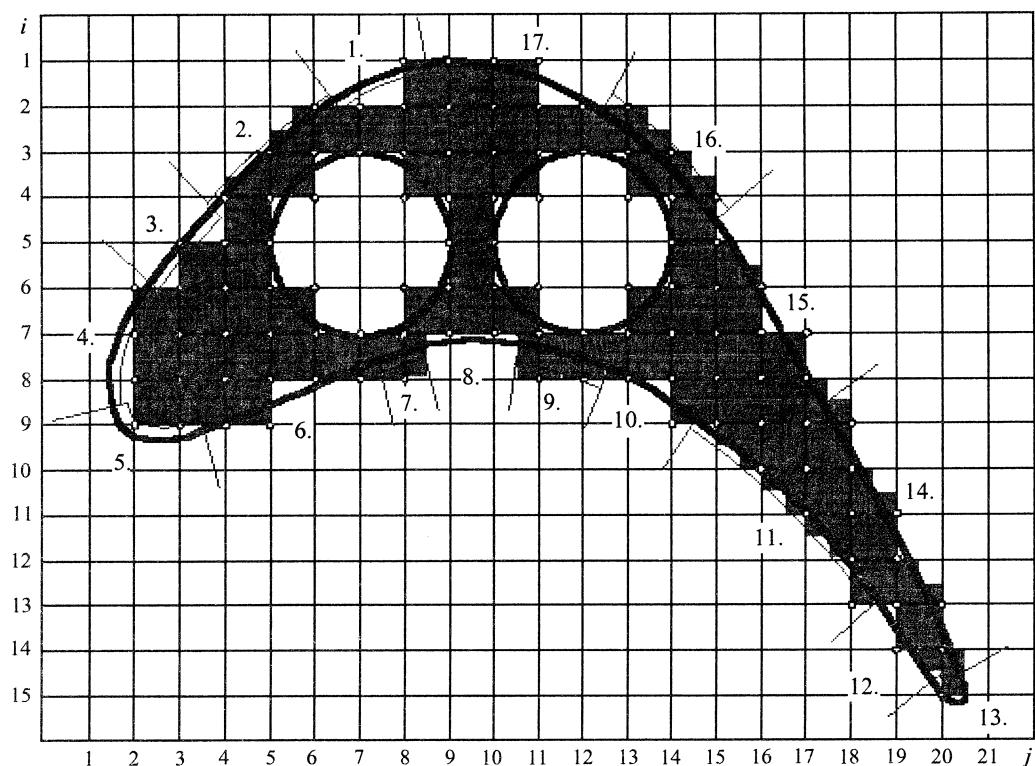
slijedi:

$$c_{\text{kor}} = \left( 1 + \frac{F_{\text{stv}}}{A_{\text{mrež}}} d \right) c_{\text{stv}}. \quad (8)$$

Podjela konture na dionice po kojima su određivana odstupanja  $d$  između realne i stepenaste konture, prikazana je na slici 2.

Procedura uvodjenja kompenzacije rubnih uvjeta sadržanih u (5), (6) i (8) svodi se prema tome na slijedeće korake:

- aproksimacija realne konture mrežnom
- podjela realne i mrežne konture tijela na dionice (segmente) unutar kojih će se računati  $F_{\text{stv}}$ ,  $F_{\text{mrež}}$ ,  $d$ ,  $A_{\text{stv}}$  i  $A_{\text{mrež}}$ .
- računanje  $\alpha_{\text{kor}}$ ,  $c_{\text{kor}}$ , te korigiranih Biotovih značajki  $Bi_{\text{kor}} = \alpha_{\text{kor}} \delta / \lambda$ , i koeficijenata temperaturne vodljivosti  $a_{\text{kor}} = \lambda / \rho c_{\text{kor}}$
- pisanje eksplisitnih jednadžbi bilance energije i kriterija stabilnosti rješenja za unutarnje elemente sa realnim specifičnim kapacitetima materijala  $c$  i za mrežne rubne elemente sa vrijednostima  $\alpha_{\text{kor}}$  i  $c_{\text{kor}}$ .



Slika 2. Mrežna aproksimacija presjeka sa podjelom konture na segmente  
Figure 2. Section net approximation with contour division on segments

Polazni brojčani podaci su donekle pojednostavljeni (koeficijenti prijelaza topline neovisni su o temperaturi površine, koeficijent vodljivosti neovisan o temperaturi materijala, početna temperatura lopatice jednaka je temperaturi rashladnog fluida u kanalima), sa svrhom da se demonstrira primjena metode kompenzacije graničnih uvjeta i da se razradi odgovarajući algoritam.

## 5. Rezultati proračuna

Vremenski nepromjenjivi rubni uvjeti dodira lopatice s vanjskim grijućim i unutarnjim rashladnim fluidom proračunati su prema (5), (6) i (8), a na osnovu podataka na slikama 1 i 2, kao početno stanje lopatice usvojena je temperatura ravna temperaturi rashladnog fluida od 93,3 °C.

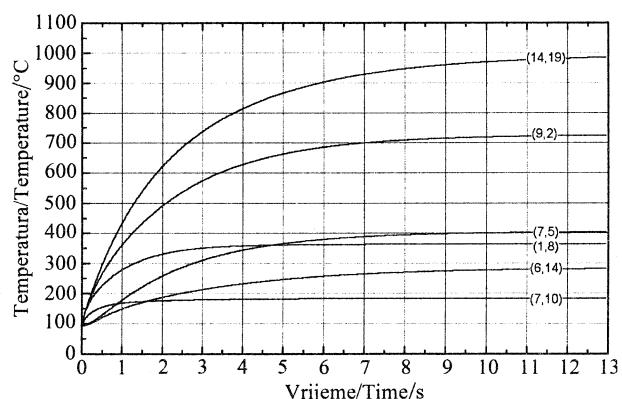
Tijek uspostavljanja stacionarnog stanja za šest karakterističnih točaka prikazan je na slici 3, te za uzdužni lučni presjek lopatice na slici 4. Samo stacionarno stanje je praktično uspostavljeno nakon 13 sekundi, odnosno nakon oko 900 računskih koraka (slika 5).

Izbor veličine vremenskog koraka izvršen je na osnovi proračuna njegovih maksimalnih veličina s obzirom na stabilnost proračunatih promjena temperatura za unutarnji tip elementa i za svaki od rubnih elemenata. Unutarnji su elementi dopuštali  $\Delta\tau_{\max} \approx 8 \cdot 10^{-2}$  s, najveće  $\Delta\tau_{\max}$  dopuštao je element 51 (9, 2) –  $19 \cdot 10^{-2}$  s, a najmanji je korak dopuštao rubni element 84 (8, 12) –  $1,4 \cdot 10^{-2}$  s i s

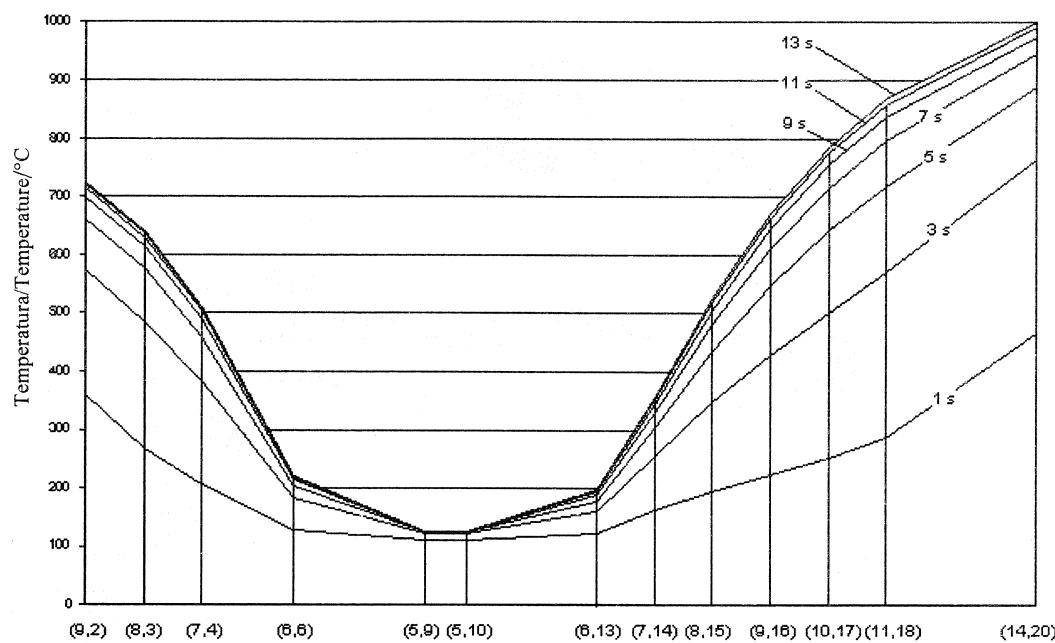
tim je korakom kao maksimalno dopustivim izvršen proračun.

## 6. Analiza rezultata

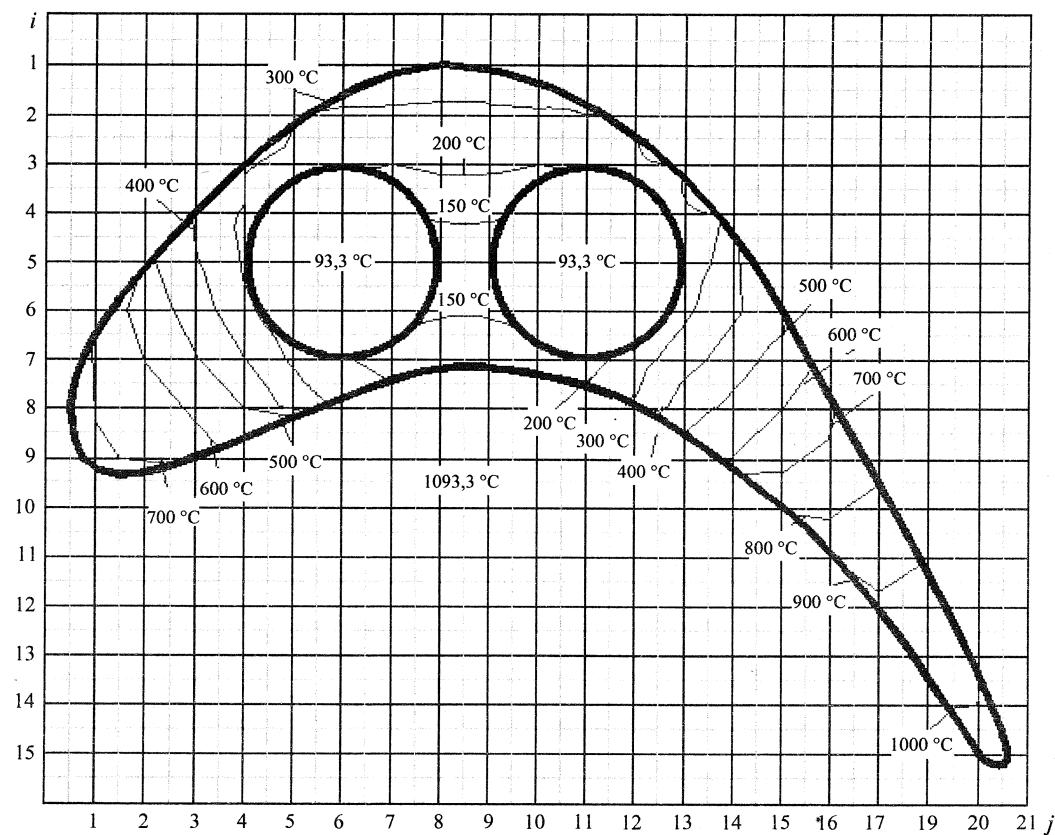
S obzirom na računski značaj veličine koraka, poželjno je da se već prilikom crtanja mrežne aproksimacije konture tijela zna, kakvi rubni elementi imaju u ovom pogledu prednost i kolika je ta prednost. Određenu preglednost pruža jedna usporedna analiza dopustivih vreme-



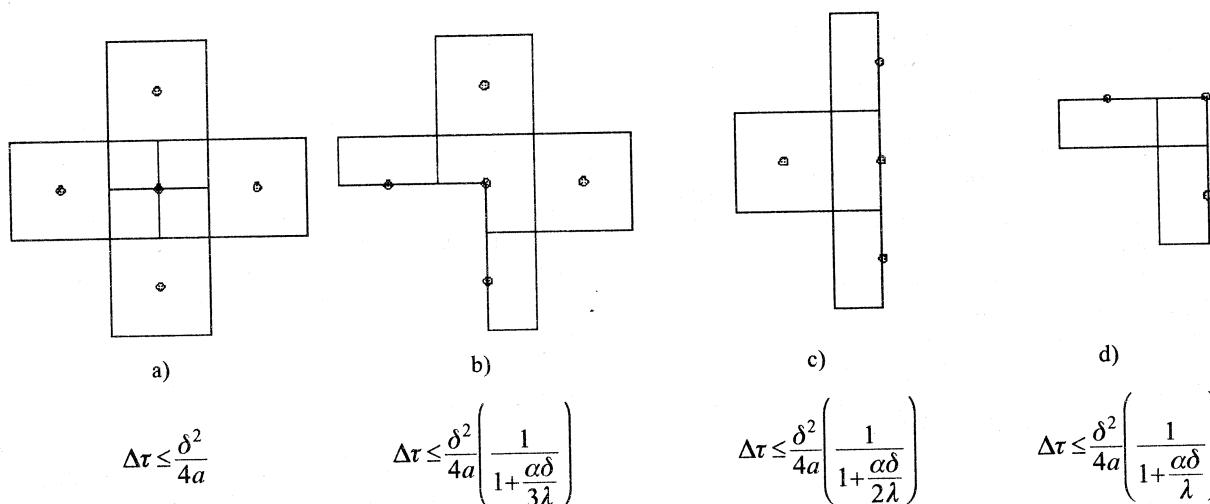
Slika 3. Vremenska promjena temperature u karakterističnim točkama (i,j)  
Figure 3. Temperature change in time for characteristic points (i,j)



Slika 4. Vremenska promjena uzdužnih (lučnih) temperaturnih profila lopatice u karakterističnim točkama  $(i, j)$   
 Figure 4. Blade longitudinal temperature profile change in time at characteristic points  $(i, j)$



Slika 5. Izoterme stacionarnog temperaturnog stanja lopatice  
 Figure 5. Blade stationary temperature state isotherms



Slika 6. Kriteriji konvergencije numeričkog rješenja za pojedine tipove rubnih elemenata

Figure 6. Convergecy of numerical solution criterion for particular types of marginal elements

na za unutarnji element i za nekoliko tipičnih rubnih, prikazanih na slici 6. zajedno sa svojim dopustivim trajanjima vremenskog koraka.

Fizikalna interpretacija uvjeta stabilnosti ukazuje na nedopustivost dužeg utjecaja okolnih elemenata (u njihovom početnom stanju), od vremena  $\Delta\tau_{\max}$  za koje bi promatrani element došao u stacionarno stanje. Prema tome, vrijeme potrebno za uspostavu stacionarnog stanja u ovom smislu proporcionalno je omjeru toplinskog kapaciteta samog elementa i toplinske vodljivosti na graničnim površinama, za element tipa (a) na slici 6 to je

$$\frac{\delta^2 \rho c}{4\lambda} = \frac{\delta^2}{4a};$$

za element tipa (b) to je

$$\frac{\frac{3}{4}\delta^2 \rho c}{3\lambda + \delta a} = \frac{\delta^2}{4a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha\delta}{\lambda}},$$

itd. Pretpostavi li se da je uz rubni element tipa (b) koeficijent prijelaza topline  $\alpha = 0$ , njegovo vrijeme će se od vremena za element (a) razlikovati za faktor koji uzima u obzir razlike u priljevu topline i u masi elementa.

Element (b) ima u odnosu na (a) masu za  $\frac{1}{4}$  manju, ali i konduktivni priljev također za  $\frac{1}{4}$  manji (s dvije strane ima pun priljev, a s dvije po  $\frac{1}{2}$  priljeva). To objašnjava faktorizaciju  $\Delta\tau_{\max}$  u (b), gdje je drugi faktor rezerviran za utjecaj konvekcije. Element (c) ima isti omjer konduktivnog priljeva i mase (isti prvi faktor), ali je utjecaj konvekcije u odnosu na masu veći nego u elementu (b) u omjeru  $3 : 2$  (isti konvektivni priljev, a masa umanjena faktorom  $3/2$ ).

Analogno razmatranje za element tipa (d) daje isti prvi faktor, a povećan utjecaj konvekcije u odnosu na (c) u nazivniku drugog faktora: u (d) je  $\alpha\delta/\lambda$  umjesto  $\alpha\delta/2\lambda$  u

(c). Zanimljivo je, da je smanjujući utjecaj konvekcije na  $\Delta\tau_{\max}$  ovoga tipa elementa u slučaju elementa 57 (9,2) prekompenziran njegovim velikim korigiranim specifičnim toplinskim kapacitetom (vidjeti aproksimaciju konture na slici 1), tako da mu je temperaturna vodljivost  $a$  u prvom faktoru u (d) jako smanjena, a kao ukupan rezultat  $\Delta\tau_{\max}$  najveći mu je među svim elementima. Prema tome, želi li se što duže dopustivo vrijeme trajanja računskog koraka, treba izbjegavati konačne elemente male mase i intenzivnog kontakta bilo s čvrstom okolinom, bilo s fluidom. U ovom konkretnom slučaju rubni elementi su odabrani tako da omjer referentnog vremena za unutarnji element ( $\Delta\tau_{\max} = 8,67 \cdot 10^{-2}$  s) i najmanjeg takvog vremena za rubne elemente ( $1,4 \cdot 10^{-2}$  s) nije veći od 6, što se može smatrati sasvim zadovoljavajućim omjerom.

Zahvaljujući uvedenoj kompenzaciji rubnih uvjeta, temperature svih čvornih točaka koje padaju unutar realne konture tijela načelno se poklapaju s temperaturama tih istih točaka realnog tijela. Čvorna točka koja pada izvan realne konture tijela, kao npr. (9,14), ima temperaturu hipotetičkog tijela lokalno proširenog u  $i$  – pravcu, ali koje zbog uvedene kompenzacije načelno ne uzrokuje poremećaj susjedne unutarnje temperature (8,14). Pretpostavimo li sad i linearnu promjenu temperature između čvornih točaka unutar tijela, slijedi da se načelno točna temperatura na realnoj konturi tijela (konkretno na njenom presjeku sa spojnicom (8,14) i (9,14)) dobiva jednostavnom linearnom interpolacijom temperature (8,14) i (9,14).

Prvih nekoliko uzastopnih koraka omoguće brzu kontrolu i uvid u utjecaj omjera konvektivnog toka energije i toplinskog kapaciteta elemenata s obzirom na to da su konduktivni priljevi u početku mali (početno temperaturno polje homogeno).

Dati rezultati proračuna dobiveni su s vremenskim korakom  $1,4 \cdot 10^{-2}$  s. S usitnjenjem vremenskog koraka na  $0,7 \cdot 10^{-2}$  s, promjena rezultata bila je vrlo mala i u određenom smjeru po čvornim točkama. Daljnja promjena na

$0,35 \cdot 10^{-2}$  s nije dovela do bitnije promjene ni temperatura ni smjera promjene, što znači da su dobiveni rezultati proračuna neovisni o veličini vremenskog koraka.

Izložena metoda proračuna nestacionarnih temperaturnih polja može se upotrijebiti i za proračun stacionarnih stanja. U odnosu na klasične iterativne postupke ona se razlikuje po tome što se ne traži izravno stacionarno stanje pomoću iterativnog usklajivanja uvjeta stacionarnosti za svaku čvornu točku, već se stacionarno stanje traži prirodnim tijekom procesa približenja ka stacionarnom stanju, počevši od pogodno izabranog početnog. Tijek proračuna preko prirodnog redoslijeda temperatura obećava sigurnije izbjegavanje problema konvergencije rješenju do kojih može doći pri iterativnoj proceduri.

## 7. Zaključak

Modificirana metoda kontrolnih volumena, kojom se na nov način rješava problem krivocrtne konture, izložena je i demonstrirana na primjeru hladene lopatice plinske turbine s vremenski konstantnim graničnim uvjetima treće vrste i s fizikalnim svojstvima materijala neovisnim o temperaturi, te s kvadratnom mrežom diskretizacije tijela. Mogućnost primjene je, očigledno, znatno šira i moguće je metodu primijeniti i na znatno složenije inženjerske probleme, s tim da se pripremna faza može donekle shematisirati korištenjem gotovih izraza za bilance energije i uvjete stabilnosti rješenja za petnaestak različitih mogućih tipova rubnih elemenata i rubnih uvjeta na njima.

Dobivena vremenska promjena temperature poslužiti će za proračun toplinskog zamora materijala u pojedinim točkama tretirane turbineske lopatice, a pokazana metoda može se primijeniti i za proračun nestacionarnih temperaturnih polja drugih elemenata. Zbog važnosti, planira se primijeniti prvenstveno na kućišta parnih turbina u okolnostima puštanja u pogon, zaustavljanja ili naglog pada opterećenja generatora, zatim u cijevnim stijenkama paro-generatora pri ubrzanim puštanju u rad i pri havarijskim obustavama rada, te na proračun čvrstoće nuklearnih reaktora.

## LITERATURA

- [1] S. V. PATANKAR, »Numerical Heat Transfer and Fluid Flow«, Hemisphere Publishing Corporation and McGraw Hill Book Co., New York, 1980.
- [2] B. NIČENO, B. FRANKOVIĆ, »Slobodna konvekcija u prostoru omeđenom horizontalnim kanalom i cijevi«, Strojarstvo 39(1997)1/2, 13–22.
- [3] M. S. ELGENK, C. GAO, »Transient Heat Conduction During Quenching of Downward Facing Copper and Stainless Steel Convex Surfaces«, Numerical Heat Transfer Part A-Applications 29(1996)6, 543–573.
- [4] P. J. SCHNEIDER, »Conduction Heat Transfer«, Addison – Wesley, Mass, 1955.
- [5] D. R. PITTS, L. E. SISSOM, »Heat Transfer«, McGraw Hill, New York, 1991.
- [6] A. F. MILLS, »Numerical Solution Methods in Heat Transfer«, Prentice Hall, New Jersey, 1999.