SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 1496

OSMOTRIVOST PO DIJELOVIMA AFINIH SUSTAVA

Ana Sović

Zagreb, lipanj 2006.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Nedjeljku Periću na usmjeravanju i podršci pri izradi ovog rada.

Zahvaljujem se i dipl. ing. Mariu Vašku na strpljenju i što je uvijek našao vremena kako bi odgovorio na brojna pitanja, te dr. sc. Mati Baotiću što je uskočio kada je trebalo.

Posebno hvala mojoj obitelji i Borisu što su bili uz mene.

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA

SADRŽAJ

1. UVOD

Vremenski diskretni linearni sustavi imaju jednu linearnu jednadžbu za osvježavanje stanja, koja vrijedi u čitavom području rada. Vremenski diskretni po dijelovima afini sustavi (engl. PieceWise Affine, PWA) posjeduju skup afinih dinamika u različitim područjima proširenog prostora stanje – ulaz, a koje se koriste za osvježavanje stanja. Ovakvi opisi sustava pokazuju se kao moćni modeli za opis nelinearnih, ali i hibridnih sustava. Hibridne sustave možemo opisati kao sustave koji u sebi sadrže kontinuirane i logičke varijable, u određenoj međuovisnosti. Jednostavnim transformacijama moguće je PWA model pretvoriti u skup linearnih jednadžbi i nejednadžbi, koje sadrže kontinuirane i logičke članove. Takav prikaz se naziva MLD prikazom (engl. Mixed-Logical Dynamical), a pogodan je pri proračunu trajektorija stanja sustava matematičkim programom. Osim toga, matematički programi se mogu formulirati i tako da se njihovim rješavanjem pronalazi optimalna ulazna sekvenca u proces na zadanom horizontu (vremenskom prozoru), odnosno da se riješi problem optimalnog upravljanja.

Najjednostavniji matematički program je linearni program (engl. Linear Program, LP) koji rješava problem minimiziranja neke linearne funkcije s kontinuiranim varijablama uz linearna ograničenja na varijable. Ukoliko, osim kontinuiranih varijabli u linearnoj funkciji cilja i linearnim ograničenjima, postoje i logičke varijable, takav problem se rješava linearnim programom s mješovitim varijablama (engl. Mixed Integer Linear Program, MILP). Ove funkcije, kod programa vezanih uz problem optimalnog upravljanja, osim o varijablama (upravljački ulazi), ovise i o određenim parametrima (stanja procesa). U sporim procesima takvi parametri se mogu očitati, te se, uzevši ih kao konstante, problem svodi na LP ili MILP, koji se rješavaju on – line kako bi se našla optimalna upravljačka sekvenca. U brzim procesima, nakon očitavanja vrijednosti parametara, ne stigne se provesti proračun. Tamo je potrebno unaprijed provesti minimizaciju za sve moguće vrijednosti parametara. Ukoliko su u takvom slučaju varijable samo kontinuirane, problem rješavanja naziva se višeparametarskim linearnim programiranjem (engl. Multiparametric Linear Programming, mp – LP), a ako su varijable kontinuirane i logičke, tada je to višeparametarsko linearno programiranje s mješovitim varijablama (engl. Multiparametric Mixed Integer Linear Programming, mp – MILP). Kako hibridni sustav u MLD obliku sadrži i kontinuirane i logičke varijable, koristeći mp – MILP pronalazi se optimalni upravljački zakon za takav sustav. Problem estimacije stanja sustava dualni je problem problemu upravljanja. Kod njega se za poznate ulaze i izlaze sustava optimalno estimiraju stanja. Neki sustav će biti osmotriv ako na temelju vrijednosti izlaznih varijabli na nekom horizontu T može razlučiti koje je stanje sustav imao na početku horizonta. Prvi dio ovog rada se bavi praktičnom osmotrivošću po dijelovima afinih sustava u MLD obliku, koristeći mp – MILP metodu optimizacije. Drugi dio ovog rada se također bavi praktičnom osmotrivošću po dijelovima afinih sustava, ali uz pomoć dinamičkog programiranja. Ono polazi od zapisa sustava u PWA obliku, od minimalnog horizonta pronalazeći početno osmotrive regije. Postupnim povećavanjem horizonta ukupno osmotrivo područje se širi novoproračunatim regijama. Pri proračunu koristi se mp-LP.

U drugom poglavlju ovog rada prikazano je kako se PWA model pretvara u ekvivalentni MLD oblik. U trećem poglavlju opisan je algoritam rješavanja mp – MILP. Četvrto poglavlje definira, te razrađuje pojam praktične osmotrivosti hibridnih sustava, a prikazuje i opis algoritma koji nalazi regije osmotrivosti sustava koristeći mp – MILP. U petom poglavlju opisan je pristup problemu osmotrivosti uz pomoć dinamičkog programiranja. U posljednjem poglavlju dan je jednostavni primjer riješen objema metodama koji pokazuje uspješnu implementaciju opisanih algoritama.

2. IZ PWA PRIKAZA U MLD PRIKAZ

2.1. PWA PRIKAZ

Vremenski diskretni po dijelovima afini sustavi (engl. PieceWise Affine, PWA) posjeduju skup afinih dinamika u različitim područjima proširenog prostora stanje – ulaz, za svaki dio prostora po jedna dinamika. Općeniti zapis PWA modela ima oblik:

$$x(t+1)=\begin{cases} A_1x(t)+B_1u(t)+f_1 \;\; za \;\; \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_1 \\ \ldots \\ A_sx(t)+B_su(t)+f_s \;\; za \;\; \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_s \end{cases} \tag{2-1}$$

$$y(t)=\begin{cases} C_1x(t)+D_1u(t)+g_1 \;\; za \;\; \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_1 \\ \ldots \\ C_sx(t)+D_su(t)+g_s \;\; za \;\; \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_s \end{cases} \tag{2-2}$$

gdje je $\mathcal{D}_i$ dio prostora stanje – ulaz. Unutrašnjosti regija $\mathcal{D}_i$ i $\mathcal{D}_j$ su disjunktne:

$$\mathrm{int}(\mathcal{D}_i)\cap\mathrm{int}(\mathcal{D}_j)=\emptyset\,. \tag{2-3}$$

Ovakav opis sustava nije pogodan za proračun regija osmotrivosti sustava već ga je potrebno pretvoriti u ekvivalentan MLD oblik ([3], [9]). U svrhu ove pretvorbe uvode se pomoćne logičke i kontinuirane varijable, a kao rezultat dobiva se skup linearnih jednadžbi i nejednadžbi po stanjima, ulazima, izlazima te pomoćnim varijablama.

2.2. PRETVARANJE LOGIČKIH IZRAZA U JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE

Neka X_i predstavlja neki logički izraz (sud), te neka je $\delta_i(t) \in \{0,1\}$ logička varijabla. Ako je izraz X_i istinit, onda je $\delta_i = 1$, a ako je lažan $\delta_i = 0$. Na temelju Boolove algebre i tablice istinitosti za osnovne funkcije ([3], [19], [20]) vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} X_1 \vee X_2 &\Leftrightarrow \delta_1 + \delta_2 \geq 1, \\ X_1 \wedge X_2 &\Leftrightarrow \delta_1 + \delta_2 = 2, \\ X_1 \rightarrow X_2 &\Leftrightarrow \delta_1 - \delta_2 \leq 0, \\ X_1 \leftrightarrow X_2 &\Leftrightarrow \delta_1 - \delta_2 = 0, \\ X_1 \oplus X_2 &\Leftrightarrow \delta_1 + \delta_2 = 1. \end{aligned} \tag{2-4}$$

2.3. GRANICE SKUPOVA

Definicija 2.1: Ako je $x \in \Re^n$ kontinuirana varijabla, te neka je $X = [f(x) \leq 0]$, gdje je $f : \Re^n \mapsto \Re$ kontinuirana funkcija takva da je $x \in X$ ograničeni skup. Gornja i donja ograda funkcije na tom skupu definirane su s:

$$M = \max_{x \in X} f(x), \tag{2-5}$$

$$m = \min_{x \in X} f(x). \tag{2-6}$$

2.4. KONTINUIRANI I LOGIČKI IZRAZI

Teorem 2.1: Ako je ε mala pozitivna tolerancija (obično preciznost računala), a δ logička varijabla, vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\sim [f(x) \leq 0] \Leftrightarrow f(x) \geq \varepsilon, \tag{2-7}$$

$$[f(x) \le 0] \wedge [\delta = 1] \;\Leftrightarrow\; f(x) - \delta \le -1 + m(1-\delta)\,, \tag{2-8}$$

$$[f(x) \le 0] \vee [\delta = 1] \;\Leftrightarrow\; f(x) \le M\delta\,, \tag{2-9}$$

$$[f(x) \le 0] \rightarrow [\delta = 1] \;\Leftrightarrow\; f(x) \ge \varepsilon + (m-\varepsilon)\delta\,, \tag{2-10}$$

$$[f(x) \le 0] \leftrightarrow [\delta = 1] \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) \le M(1-\delta) \\ f(x) \ge \varepsilon + (m-\varepsilon)\delta. \end{cases} \tag{2-11}$$

Dokaz: Ekvivalencija (2-7) direktno slijedi iz želje da *f(x)* bude pozitivan, a to će biti samo ako je *f(x)* veći od neke pozitivne tolerancije. I ostale ekvivalencije se lako provjere preko tablica istinitosti osnovnih logičkih operacija.

2.5. UVOĐENJE POMOĆNIH VARIJABLI

2.5.1. POMOĆNA LOGIČKA VARIJABLA

Umnožak dviju logičkih varijabli zamijenit ćemo s pomoćnom logičkom varijablom:

$$\delta_3 = \delta_1 \delta_2\,. \tag{2-12}$$

Pretvaranjem ovog izraza u logički izraz:

$$[\delta_3 = 1] \leftrightarrow [\delta_1 = 1] \wedge [\delta_2 = 1] \tag{2-13}$$

dolazi se do skupa linearnih nejednadžbi:

$$\delta_3 = \delta_1 \delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -\delta_1 + \delta_3 \le 0, \\ -\delta_2 + \delta_3 \le 0, \\ \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \le 1. \end{cases} \tag{2-14}$$

2.5.2. POMOĆNA KONTINUIRANA VARIJABLA

Umnožak logičke $\delta \in \{0,1\}$ i kontinuirane varijable *f(x)*, $f : \Re^n \mapsto \Re$ možemo zamijeniti s pomoćnom kontinuiranom varijablom:

$$z = \delta \cdot f(x)\,. \tag{2-15}$$

Ovakva varijabla zadovoljava logičke izraze:

$$\begin{aligned}
&[\delta = 0] \rightarrow [z = 0],\\
&[\delta = 1] \rightarrow [z = f(x)].
\end{aligned} \tag{2-16}$$

Implikacije nisu obostrane, zbog mogućeg slučaja *f(x)=0*. Ekvivalentni skup linearnih nejednadžbi glasi:

$$z = \delta \cdot f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} z \leq M\delta, \\ z \geq m\delta, \\ z \leq f(x) - m(1-\delta), \\ z \geq f(x) - M(1-\delta). \end{cases} \tag{2-17}$$

2.6. MLD PRIKAZ

Linearni vremenski diskretni hibridni sustav u MLD obliku glasi([11]):

$$\begin{aligned}
&x(t+1) = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 \delta(t) + B_3 z(t),\\
&y(t) = Cx(t) + D_1 u(t) + D_2 \delta(t) + D_3 z(t),\\
&E_2 \delta(t) + E_3 z(t) - E_1 u(t) - E_4 x(t) - E_5 \leq 0,\\
&g(\delta(t), z(t), u(t), x(t)) = E_2 \delta(t) + E_3 z(t) - E_1 u(t) - E_4 x(t) - E_5,
\end{aligned} \tag{2-18}$$

gdje je x vektor kontinuiranih i logičkih varijabli $x \in \Re^{n_c} \times \{0,1\}^{n_l}$, u vektor ulaza kontinuiranih i logičkih varijabli $u \in \Re^{m_c} \times \{0,1\}^{m_l}$, y vektor izlaza kontinuiranih i logičkih varijabli $y \in \Re^{p_c} \times \{0,1\}^{p_l}$, $\delta \in \{0,1\}^{r_l}$ vektor pomoćnih logičkih varijabli, a

$z \in \Re^{r_c}$ vektor pomoćnih kontinuiranih varijabli, a $A, B_1, B_2, B_3, C, D_1, D_2$ i D_3 i E_1, E_2, E_3, E_4 i E_5 su matrice s konstantnim koeficijentima odgovarajućih dimenzija. Pomoćne varijable nastaju pri pretvorbi PWA oblika u MLD oblik. Zbog pojednostavljenja, u ovom radu su stanja, ulazi i izlazi samo kontinuirane varijable, tj. $n_l=m_l=p_l=0$.

Za MLD sustav, ostvariv skup je:

$$\mathcal{F} = \{(x,u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U} : \exists \delta, z : g(\delta, z, u, x) \leq 0\}. \tag{2-19}$$

Preslikavanje $\mathcal{G} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{U}$ daje skup ostvarivih ulaza pridruženih svakom stanju:

$$\mathcal{G}(x) = \{(u \in \mathcal{U} : \exists \delta, z : g(\delta, z, u, x) \leq 0\}. \tag{2-20}$$

Definicija 2.2. MLD sustav (2-18) je dobro definiran (engl. well – posed) ako možemo garantirati da su svako novo stanje *x(t+1)* i izlaz iz sustava *y(t)* jedinstveno definirani, tj. $\forall (x(t), u(t)) \in \mathcal{F}$, vektori *δ(t)* i *z(t)* koji zadovoljavaju nejednadžbu (2-18) su jedinstveni ([8], [3]).

Pri pretvorbi iz PWA u MLD model, korištena je tolerancija ε u nejednadžbama (2-18). Ona može prouzrokovati mali podskup stanja za koja su nejednadžbe (2-18) neostvarive. U ovom radu uzima se da ova tolerancija ne utječe na implementaciju MLD sustava, ako je u redu veličine preciznosti računala.

Iz PWA oblika (2-1) i (2-2), koristeći (2-3) – (2-17), lako je moguće dobiti MLD oblik (2-18) [3]. U tu svrhu, uvest ćemo pomoćne logičke varijable $\delta_i(t)$, kao indikatore koja dinamika je aktivna. Varijable $\delta_i(t)$ dobivaju se logičkom funkcijom iz logičkih varijabli δ^g, vezanih uz granice poliedarskih particija (definicija 3.5.). Za svaku granicu $a_i^T x \leq b_i$ definira se funkcija $f_i(x) = a_i^T x - b_i$, te vrijedi $[\delta_i^g = 1] \leftrightarrow [f_i(x) \leq 0]$. Za aktivnu dinamiku je, prema tome, $\delta_i(t) = 1$, dok za ostale koje nisu aktivne vrijedi $\delta_i(t) = 0$. Za te varijable vrijedi da samo jedna od njih može istodobno biti istinita:

$$\delta_1(t) + \delta_2(t) + ... + \delta_s(t) = 1. \qquad (2\text{-}21)$$

Iz (2-1) je vidljivo da vrijedi:

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{s} \left[A_i x(t) + B_i u(t)\right]\delta_i(t). \qquad (2\text{-}22)$$

Jednadžba (2-22) nije linearna, zbog postojanja umnoška logičke varijable sa stanjima i ulazima. Uvođenjem pomoćne kontinuirane varijable (2-15), dobit ćemo skup linearnih jednadžbi s miješanim varijablama:

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{s} z_i(t), \qquad (2\text{-}23)$$

$$z_i(t) = \left[A_i x(t) + B_i u(t)\right]\delta_i(t). \qquad (2\text{-}24)$$

Neka su vektori gornje i donje ograde: $M = \left[M_1 \quad ... \quad M_n\right]'$ i $m = \left[m_1 \quad ... \quad m_n\right]'$ definirani s:

$$M_j = \max_{i=1,...s} \left\{ \max_{\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{F}} A_i^j x + B_i^j u \right\}, \qquad (2\text{-}25)$$

$$m_j = \min_{i=1,...s} \left\{ \max_{\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{F}} A_i^j x + B_i^j u \right\}, \qquad (2\text{-}26)$$

gdje je A_i^j j-ti redak matrice A_i.

Tada se jednadžba (2-24) može zamijeniti skupom nejednadžbi prema (2-17):

$$
\begin{aligned}
&z_i(t) \le M\delta_i(t),\\
&z_i(t) \ge m\delta_i(t),\\
&z_i(t) \le A_i x(t) + B_i u(t) - m(1-\delta_i(t)),\\
&z_i(t) \ge A_i x(t) + B_i u(t) - M(1-\delta_i(t)).
\end{aligned}
\tag{2-27}
$$

Analogni postupak provodi se i za izlazne jednadžbe PWA prikaza (2-2). Ovdje je važno primijetiti da su matrice B_2 i D_2 dobivene pri pretvorbi sustava opisanog PWA modelom u ekvivalentni MLD oblik, nul – matrice.

2.7. HYSDEL

Ovim postupkom pretvaranja PWA oblika u MLD oblik, stvara se veliki broj linearnih jednadžbi i nejednadžbi, te bi njihovo ručno traženje moglo biti mukotrpno. U tu svrhu razvijen je programski jezik više razine HYSDEL (engl. HYbrid Systems DEscription Language) ([16], [18], [19]). Jednostavnim unosom PWA sustava, kao izlaz ovog programa dobiva se ekvivalentni MLD oblik istog sustava.

2.8. TRAJEKTORIJE STANJA MLD SUSTAVA

Za diskretni vektor vrijednosti signala $f(t)$, i vremenski horizont $T>0$, vektor stupac $F(T) = [f(0)' \ \ldots \ f(T-1)']'$ skuplja prošle uzorke f. Koristeći linearnost jednadžbi i nejednadžbi (2-18), trajektorije stanja MLD sustava na vremenskom horizontu T, mogu se zapisati u kompaktnom obliku:

$$
\begin{aligned}
&X(T) = \widetilde{A}x(0) + \widetilde{B}_1 U(T) + \widetilde{B}_2 \Delta(T) + \widetilde{B}_3 Z(T),\\
&Y(T) = \widetilde{C}x(0) + \widetilde{D}_1 U(T) + \widetilde{D}_2 \Delta(T) + \widetilde{D}_3 Z(T),\\
&\widetilde{E}_2 \Delta(T) + \widetilde{E}_3 Z(T) - \widetilde{E}_1 U(T) - \widetilde{E}_4 x(0) - \widetilde{E}_5 \le 0,\\
&U(T) \in \mathcal{U}^T, \ X(T) \in \mathcal{X}^T.
\end{aligned}
\tag{2-28}
$$

Trajektorije stanja i izlaza ovise o stanju na početku horizonta $x(0)$, te o ulazima na horizontu ($U(T)$): $X(T|x(0),U(T))$ i $Y(T|x(0),U(T))$.

Matrice $\widetilde{A}, \widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3, \widetilde{C}, \widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2, \widetilde{D}_3, \widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \widetilde{E}_3, \widetilde{E}_4, \widetilde{E}_5$ su dobivene raspisujući (2-18), te stalnim uvrštavanjem prošlih poznatih stanja. Konačno, njihovi oblici su ([14], [15]):

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} I \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{T-1} \end{bmatrix}, \tag{2-29a}$$

$$\widetilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ AB_1 & B_1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A^{T-1}B_1 & A^{T-2}B_1 & \dots & B_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2-29b}$$

$$\widetilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ AB_2 & B_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A^{T-1}B_2 & A^{T-2}B_2 & \dots & B_2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2-29c}$$

$$\widetilde{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ B_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ AB_3 & B_3 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A^{T-1}B_3 & A^{T-2}B_3 & \dots & B_3 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2-29d}$$

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{T-1} \end{bmatrix}, \tag{2-29e}$$

$$\widetilde{D}_1 = \begin{bmatrix} D_1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ CB_1 & D_1 & \dots & 0 & 0 \\ CAB_1 & CB_1 & D_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{T-2}B_1 & CA^{T-3}B_1 & \dots & CB_1 & D_1 \end{bmatrix}, \tag{2-29f}$$

$$\widetilde{D}_2 = \begin{bmatrix} D_2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ CB_2 & D_2 & \dots & 0 & 0 \\ CAB_2 & CB_2 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{T-2}B_2 & CA^{T-3}B_2 & \dots & CB_2 & D_2 \end{bmatrix}, \tag{2-29g}$$

$$\widetilde{D}_3 = \begin{bmatrix} D_3 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ CB_3 & D_3 & \dots & 0 & 0 \\ CAB_3 & CB_3 & D_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{T-2}B_3 & CA^{T-3}B_3 & \dots & CB_3 & D_3 \end{bmatrix}, \tag{2-29h}$$

$$\widetilde{E}_1 = \begin{bmatrix} E_1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ E_4B_1 & E_1 & \dots & 0 & 0 \\ E_4AB_1 & E_4B_1 & E_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_4A^{T-2}B_1 & E_4A^{T-3}B_1 & \dots & E_4B_1 & E_1 \end{bmatrix}, \tag{2-29i}$$

$$\widetilde{E}_2 = \begin{bmatrix} E_2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -E_4B_2 & E_2 & \dots & 0 & 0 \\ -E_4AB_2 & -E_4B_2 & E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -E_4A^{T-2}B_2 & -E_4A^{T-3}B_2 & \dots & -E_4B_2 & E_2 \end{bmatrix}, \tag{2-29j}$$

$$\widetilde{E}_3 = \begin{bmatrix} E_3 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -E_4B_3 & E_3 & \dots & 0 & 0 \\ -E_4AB_3 & -E_4B_3 & E_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -E_4A^{T-2}B_3 & -E_4A^{T-3}B_3 & \dots & -E_4B_3 & E_3 \end{bmatrix}, \tag{2-29k}$$

$$\widetilde{E}_4 = \begin{bmatrix} E_4 \\ E_4A \\ E_4A^2 \\ \vdots \\ E_4A^{T-1} \end{bmatrix}, \tag{2-29l}$$

$$\widetilde{E}_5 = \begin{bmatrix} E_5 \\ \vdots \\ E_5 \end{bmatrix}. \tag{2-29m}$$

Stanja $X(T|x(0),U(T))$ su dobro definirana ako su *x(0)* i *U(T)* takvi da razvoj MLD sustava (2-18) nije blokiran u niti jednom vremenu $t \le T-1$. Prema tome, ostvariv skup je:

$$\mathcal{X}_T^* = \{x \in \mathcal{X} : \exists U(T) \in \mathcal{U}^T \text{ takav da je } X(T|x,U(T)) \text{ dobro definiran}\}. \quad (2\text{-}30)$$

3. VIŠEPARAMETARSKO LINEARNO PROGRAMIRANJE S MJEŠOVITIM VARIJABLAMA – mp - MILP

3.1. UVOD

Prije nego što će biti objašnjeno što je višeparametarsko linearno programiranje s mješovitim varijablama i dan pripadajući algoritam njegova rješavanja, moraju se definirati pojmovi koji se koriste [5],[6]:

Definicija 3.1. $S \subseteq \Re^n$ je potprostor, ako za $x, y \in S$, $\lambda, \mu \in \Re$ vrijedi $\lambda x + \mu y \in S$.

Definicija 3.2. $S \subseteq \Re^n$ je afin podskup ako za $x, y \in S$, $\lambda, \mu \in \Re$, $\lambda + \mu = 1$ vrijedi $\lambda x + \mu y \in S$.

Geometrijski bi to značilo da linija kroz $x, y \in S$ leži u potprostoru *S*: $x, y \subseteq S$

Definicija 3.3. $S \subseteq \Re^n$ je konveksni skup ako za $x, y \in S$, $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ vrijedi $\lambda x + \mu y \in S$.

Geometrijski bi to značilo da za $x, y \in S$ segment $[x, y] \subseteq S$.

Definicija 3.4. Hiperravnina $\left\{x \middle| a^T x = b, a \neq 0\right\}$, $x \in \Re^n$ dijeli prostor na poluprostore $\left\{x \middle| a^T x \leq b\right\}$ i $\left\{x \middle| a^T x \geq b\right\}$. Poluprostor je konveksan.

Definicija 3.5. Poliedar je presjek konačnog broja poluprostora n_{P}, $\mathcal{P} = \left\{x \middle| a_i^{\,T} x \leq b_i, i = 1,\ldots,n_{\mathrm{P}}\right\}$.

Definicija 3.6. Ograničeni poliedar naziva se politop. ([12])

3.1.1. OPTIMIZACIJSKI PROBLEM

Kako bismo opisali matematički program, tj. problem traženja vektora v_k (vektor kontinuiranih varijabli) koji minimizira funkciju $f_0(v_k)$, između svih v_k koji zadovoljavaju uvjete $f_i(v_k)\leq 0,\ i=1,...,m$ i $h_i(v_k)\leq 0,\ i=1,...,n_{eq}$ koristit ćemo označavanje:

$$\begin{aligned} &\min_{v_k} && f_0(v_k), \\ &\text{uz uvjete:} && f_i(v_k) \leq 0,\ i=1,...,m, \\ & && h_i(v_k) = 0,\ i=1,...,n_{eq}, \end{aligned} \tag{3-1}$$

gdje je v_k optimizacijska varijabla, vektor kontinuiranih varijabli, $f_0 : \Re^n \mapsto \Re$ funkcija cilja (engl. cost function), nejednadžbe $f_i(v_k)\leq 0$ su nejednadžbe ograničenja (engl. inequality constraints), dok su $h_i(v_k)\leq 0$ jednadžbe ograničenja (engl. equality constraints) ([5], [6]). Kada ne bi postojalo ograničenja, problem (3-1) bio bi neograničen (engl. unconstrained).

Problem (3-1) je rješiv ako postoji barem jedna ostvariva točka (engl. feasible point) koja zadovoljava postavljene uvjete, inače problem je nerješiv (engl. infeasible).

Rješenje ovog problema je ona ostvariva točka v_k^* za koju je $f_0(v_k^*) \leq f_0(v_k)$ za bilo koji drugi ostvarivi v_k.

Ako su $f_0, ..., f_m$ konveksne funkcije, a jednadžbe ograničenja h_i afine, problem
(3-1) je konveksni optimizacijski problem. Za konveksne optimizacijske probleme vrijedi da je svaka lokalna optimalna točka ujedno i globalno optimalna.

Ukoliko se traži maksimizacija konkavne funkcije f_0, uz konveksne nejednadžbe ograničenja i afine jednadžbe, tj:

$$\begin{aligned} &\max_{v_k} && f_0(v_k), \\ &\text{uz uvjete:} && f_i(v_k) \le 0,\ i = 1,\dots,m, \\ & && h_i(v_k) = 0,\ i = 1,\dots,n_{eq}, \end{aligned} \tag{3-2}$$

problem se lako preoblikuje u problem minimizacije (3-1) množeći funkciju cilja sa *-1*, tj. (3-2) postaje:

$$\begin{aligned} &\min_{v_k} && -f_0(v_k) \\ &\text{uz uvjete:} && f_i(v_k) \le 0,\ i = 1,\dots,m \\ & && h_i(v_k) = 0,\ i = 1,\dots,n_{eq} \end{aligned} \tag{3-3}$$

3.1.2. LINEARNO PROGRAMIRANJE

Ako je $v_k \in \Re^n$, a funkcija cilja i svi uvjeti ograničenja optimizacijskog problema afini, tada se taj problem naziva linearnim programom ([5], [6], [16]):

$$\begin{aligned} &\min_{v_k} && c_1^T v_k + c_2, \\ &\text{uz uvjete:} && A_{ineq} v_k \le B_{ineq}, \\ & && A_{eq} v_k = B_{eq}, \end{aligned} \tag{3-4}$$

gdje su matrice dimenzija A_{ineq} $(m \times n)$, A_{eq} je $(n_{eq} \times n)$, a vektori dimenzija B_{ineq} $(m \times 1)$, B_{eq} $(n_{eq} \times 1)$, c_1 $(n \times 1)$ i c_2 (1×1). Linearni program je konveksni optimizacijski program, tj. njegovim rješenjem nalazi se globalna točka minimuma v_k^*, koja zadovoljava postavljena ograničenja.

3.1.3. LINEARNO PROGRAMIRANJE S MJEŠOVITIM VARIJABLAMA

Linearno programiranje sa mješovitim varijablama (engl. Mixed Integer Linear Programming, MILP) se može zapisati:

$$\begin{aligned} &\min_{v_\mathrm{k}, v_\mathrm{d}} && c^T v_\mathrm{k} + d^T v_\mathrm{d}, \\ &\text{uz uvjete:} && A_{ineq} v_\mathrm{k} + E_{ineq} v_\mathrm{d} \le B_{ineq}, \\ &&& A_{eq} v_\mathrm{k} + E_{eq} v_\mathrm{d} = B_{eq}, \end{aligned} \tag{3-5}$$

gdje je v_k vektor kontinuiranih varijabli $v_\mathrm{k} \in \Re^n$, v_d vektor logičkih varijabli $v_\mathrm{d} \in \{0,1\}^l$, a konstantne matrice i vektori su dimenzija A_{ineq} *(m × n)*, E_{ineq} *(m × l)*, A_{eq} je $(n_{eq} \times n)$, E_{eq} $(n_{eq} \times l)$, B_{ineq} $(m \times 1)$, B_{eq} $(n_{eq} \times 1)$, *c (n × 1)* te *d (l × 1)*.

Rješenjem problema (3-5) dobiju se optimalne vrijednosti vektora kontinuiranih i logičkih varijabli v_k^* i v_d^*, a koja zadovoljavaju postavljena ograničenja.

3.1.4. VIŠEPARAMETARSKO LINEARNO PROGRAMIRANJE

Višeparametarsko linearno programiranje (engl. Multiparametric Linear Programming, mp – LP) ([2], [4], [13], [16], [17]) minimizira funkciju cilja koja sadrži samo kontinuirane varijable, no unutar nejednadžbi ograničenja mogu postojati i parametri:

$$\begin{aligned} &f(\theta) = \min_{v_\mathrm{k}} c^T v_\mathrm{k}, \\ &\text{uz uvjete:} \; A_{ineq} v_\mathrm{k} \le B_{ineq} + F_{ineq}\theta, \\ &\qquad\qquad\; A_{eq} v_\mathrm{k} = B_{eq} + F_{eq}\theta, \end{aligned} \tag{3-6}$$

gdje je vektor kontinuiranih varijabli $v_{\mathrm{k}} \in \Re^{n}$, $\theta \in \Re^{s}$ je vektor parametara. Konstantne matrice i vektori su dimenzija A_{ineq} $(m \times n)$, F_{ineq} $(m \times s)$, B_{ineq} $(m \times 1)$, c $(n \times 1)$. Cilj je naći optimalne funkcije $v_{\mathrm{k}}^{*}(\theta)$ i $f^{*}(\theta)$.

Kao rješenje ovog problema dobije se nR konveksnih regija, politopa u prostoru parametara:

$$CR(i) = \{\theta : A_{i\,mpLP}\theta \leq B_{i\,mpLP}\},\ i = 1,...nR\ . \tag{3-7a}$$

Optimalna vrijednost vektora varijabli u ovisnosti o parametrima i politopama je:

$$v_{\mathrm{k}}^{*}(\theta) = F^{*}{}_{i}\theta + G^{*}{}_{i} \quad \text{za} \quad \theta \in CR(i)\,, \tag{3-7b}$$

a vrijednost pripadajuće funkcije cilja:

$$f^{*}(\theta) = B^{*}{}_{i}\theta + C^{*}{}_{i} \ \text{ za } \ \theta \in CR(i)\,, \tag{3-7c}$$

gdje su matrice $F^{*}{}_{i}, G^{*}{}_{i}, B^{*}{}_{i}$ i $C^{*}{}_{i}$ konstantne matrice ovisne o promatranom politopu.

3.1.5. VIŠEPARAMETARSKO LINEARNO PROGRAMIRANJE S MJEŠOVITIM VARIJABLAMA

Cilj je višeparametarskog linearnog programiranja s mješovitim varijablama minimizirati funkciju cilja koja se može sastojati od kontinuiranih i logičkih varijabli, uz zadane uvjete u obliku nejednadžbi i jednadžbi s kontinuiranim i logičkim varijablama, te kontinuiranim parametrima ([4], [7], [16], [17]). Matematički izraz za takav problem glasi:

$$
\begin{aligned}
& f(\theta) = \min_{v_\mathrm{k}, v_\mathrm{d}} c^T v_\mathrm{k} + d^T v_\mathrm{d}, \\
& \text{uz uvjete: } A_{ineq} v_\mathrm{k} + E_{ineq} v_\mathrm{d} \le B_{ineq} + F_{ineq}\theta, \\
& \qquad\qquad A_{eq} v_\mathrm{k} + E_{eq} v_\mathrm{d} = B_{eq} + F_{eq}\theta,
\end{aligned} \tag{3-8}
$$

gdje je $v_\mathrm{k} \in \Re^n$ vektor kontinuiranih varijabli, $v_\mathrm{d} \in \{0,1\}^l$ vektor logičkih varijabli, s mogućim vrijednostima *0* ili *1*. Matrica A_{ineq} je $(m \times n)$ konstantna matrica, E_{ineq} $(m \times l)$ konstantna matrica, F_{ineq} $(m \times s)$, A_{eq} je $(n_{eq} \times n)$, E_{eq} $(n_{eq} \times l)$, F_{eq} $(n_{eq} \times s)$. Konstantni vektori imaju dimenzije B_{ineq} $(m \times 1)$, B_{eq} $(n_{eq} \times 1)$, c $(n \times 1)$, te d $(l \times 1)$. U ovom je radu pretpostavljeno da je matrica E_{eq} nulmatrica, što je za netom opisani način pretvorbe PWA u MLD oblik i slučaj.

Kao rješenje ovog problema dobiju se politopi, za koje vrijedi određena linearna ovisnost kontinuiranih varijabli i parametara $CR(i) = \{\theta : A_{i\,mpMILP}\theta \le B_{i\,mpMILP}\},\ i = 1,...nR$. Osim toga, u strukturi rješenja ovog problema nalazi se i vrijednost kontinuiranih varijabli u ovisnosti o parametrima $v_\mathrm{k}^*(\theta) = F^*{}_i\theta + G^*{}_i$ za svaki od dobivenih politopa, točno određena vrijednost logičkih varijabli v_d^* za svaki politop, te vrijednost funkcije cilja $f^*(\theta) = B^*{}_i\theta + C^*{}_i$ po politopu.

Razvijeno je nekoliko metoda traženja rješenja za mp - MILP s jednim ili više parametara. Jedna od metoda, "branch and bound" (B&B), zasniva se na rješavanju mp - LP za svaki čvor B&B stabla. Nabrajanje svih kombinacija kontinuiranih varijabli izbjegnuto je postavljenjem gornje granice na funkciju cilja. Druga metoda traženja rješenja ovog problema, geometrijski pristup, temelji se na dekompoziciji na mp - LP, te na MILP. U prvom podproblemu fiksiraju se logičke varijable, te se sustav rješava samo s kontinuiranim varijablama (mp-LP). Drugi dio problema tretira parametar θ kao kontinuiranu varijablu (MILP). Uspoređivanjem i kombiniranjem rezultata ovih dvaju podproblema nalazi se minimum zadane funkcije, uz zadana ograničenja. U nastavku će biti prikazan algoritam rješavanja mp-MILP problema, temeljen na drugoj metodi ([7], [16]).

3.2. SMANJIVANJE BROJA VARIJABLI ELIMINIRANJEM JEDNADŽBI

Zadavanjem mp – MILP problema (3-8), uvjeti mogu biti i nejednadžbe i jednadžbe. Opisani algoritam rješavanja mp – MILP sastoji se od naizmjeničnog rješavanja MILP i mp – LP, a tu nastaje problem zbog jednadžbi. Naime, alat za rješavanje mp – LP koji se koristi u implementaciji algoritama prikazanih u ovom radu, podržava kao uvjete samo nejednadžbe. Prema tome, potrebno je riješiti zadane jednadžbe kako bi dobili ekvivalentni mp – LP koji će kao ograničenja imati samo nejednadžbe ([1], [10]).

Osim ovih jednadžbi koje zadaje korisnik, jednadžbe mogu nastati i interno unutar mp – MILP-a. Pri pretvorbi iz PWA u MLD oblik, mogu nastati takvi retci matrica A_{ineq}, B_{ineq}, E_{ineq}, F_{ineq} da su im svi elementi nule. Takve nejednadžbe možemo odmah zanemariti. Isto tako, moguće je da se pojedini retci u svim matricama nejednadžbi ponavljaju, tj. dva puta imamo istu nejednadžbu ograničenja. Svaku takvu ponavljajuću nejednadžbu možemo preskočiti. Treća situacija, i to ona u kojoj nastaju jednadžbe sastoji se od dviju nejednadžbi koje zajedno čine jednadžbu. To bi značilo da imamo dvije nejednadžbe sa suprotnim predznacima koeficijenata, a istim iznosima. Takve dvije nejednadžbe određuju dva poluprostora, kojima je zajednička samo njihova hiperravnina (definicija 3.4.), pa prema tome ove dvije nejednadžbe moramo maknuti iz uvjeta nejednadžbi, a među jednadžbe dodati novodobivenu hiperravninu. Ove opisane situacije mogu se javiti prije svakog rješavanja mp – LP, zbog fiksiranja logičke varijable, a kako u mp – LP ne mogu ući uvjeti koje sadrže jednadžbe, potrebno je provesti postupak, čiji opis slijedi.

Jednadžbe koje se mogu javiti, imaju oblik:

$$A_{eq} v_{\mathrm{k}} = B_{eq} + F_{eq}\theta, \tag{3-9}$$

gdje su matrice A_{eq} ($n_{eq} \times n$), B_{eq} ($n_{eq} \times 1$), i F_{eq} ($n_{eq} \times s$) konstante matrice, v_k vektor kontinuiranih varijabli, a θ vektor parametara. Pretpostavit ćemo da ne postoje jednadžbe koje sadrže logičke varijable.

Cilj ovog dijela algoritma je izračunati neke od kontinuiranih varijabli na temelju jednadžbi (3-9) i izraziti ih pomoću ostalih varijabli, te pomoću vektora parametara θ. Na taj način neke od varijabli će nam biti određene, pa ih možemo uvrstiti u nejednadžbe (3-8). Ovim postupkom smanjili smo broj varijabli i dimenziju problema, a jednadžbe više ne postoje, te je moguće riješiti mp – LP.

Promatrajući sustav jednadžbi (3-9) moguća je pojava nekoliko slučajeva rangova matrica A_{eq}, $\lfloor A_{eq} \quad | \quad -F_{eq} \rfloor$, $\lfloor A_{eq} \quad | \quad \text{-}F_{eq} \quad | \quad B_{eq} \rfloor$. Ako s r označimo rang danih matrica, zbog same definicije ranga kao broja linearno nezavisnih stupaca neke matrice, uvijek vrijedi: $r(A_{eq}) \leq r(\lfloor A_{eq} \quad | \quad -F_{eq} \rfloor) \leq r(\lfloor A_{eq} \quad | \quad \text{-}F_{eq} \quad | \quad B_{eq} \rfloor)$. Pojedini slučajevi razlikuju se ovisno o tome je li između pojedinih rangova znak jednakosti ili nejednakosti, te ovise o broju kontinuiranih varijabli n:

1. $r(A_{eq}) = r(\lfloor A_{eq} \quad | \quad -F_{eq} \rfloor) = r(\lfloor A_{eq} \quad | \quad \text{-}F_{eq} \quad | \quad B_{eq} \rfloor)$
    a. $r(A_{eq}) = n$ → sve varijable linearno ovise o parametrima
    b. $r(A_{eq}) < n$ → neke od kontinuiranih varijabli linearno ovise o ostalim kontinuiranim varijablama, te o parametrima;
2. $r(A_{eq}) = r(\lfloor A_{eq} \quad | \quad -F_{eq} \rfloor) < r(\lfloor A_{eq} \quad | \quad \text{-}F_{eq} \quad | \quad B_{eq} \rfloor)$
    a. Ova kombinacija nema rješenja u prostoru (v_{k}, θ), pa prema tome ni u prostoru v_{k};
3. $r(A_{eq}) < r(\lfloor A_{eq} \quad | \quad -F_{eq} \rfloor) = r(\lfloor A_{eq} \quad | \quad \text{-}F_{eq} \quad | \quad B_{eq} \rfloor)$
    a. $r(A_{eq}) = n$ → postoji jednadžba samo sa parametrima
    b. $r(A_{eq}) < n$ → neke od kontinuiranih varijabli linearno ovise o ostalim kontinuiranim varijablama, te o parametrima, ali postoji i jednadžba samo sa parametrima;
4. $r(A_{eq}) < r(\lfloor A_{eq} \quad | \quad -F_{eq} \rfloor) < r(\lfloor A_{eq} \quad | \quad \text{-}F_{eq} \quad | \quad B_{eq} \rfloor)$
    a. Ova kombinacija nema rješenja u prostoru (v_{k}, θ), pa prema tome ni u prostoru v_{k}.

Slučajevi 3.a i 3.b nisu poželjni jer pri rješavanju mp – MILP ne želimo uvjete na parametre, kao ni neke točno određene njihove vrijednosti, budući da nas to vodi prema nižedimenzionalnom prostoru po parametrima, a takva nam nisu od interesa. Takvi slučajevi će biti detektirani, ali se neće rješavati, kao ni slučajevi 2. i 4. Podrobnije će biti opisani slučajevi 1a i 1b, koji nam i daju željena rješenja.

Za općenitiji slučaj 1b, prvi korak je napraviti QR dekompoziciju matrice A_{eq}. Kao rezultat dobivamo ortogonalnu matricu Q $(QQ^T=I)$, gornje trokutastu matricu R, te matricu S u kojoj je zapisana permutacija redoslijeda varijabli. Prema tome, jednadžbe
(3-9) glase:

$$QRS^T v_{\mathrm{k}} = B_{eq} + F_{eq}\theta\,, \tag{3-10}$$

$$RS^T v_{\mathrm{k}} = Q^T B_{eq} + Q^T F_{eq}\theta\,. \tag{3-11}$$

Zbog jasnijeg daljnjeg postupka, uvest ćemo novi vektor varijabli s permutiranim redoslijedom: $S^T v_{\mathrm{k}} = v_{\mathrm{nk}}$. U matrici R moramo na glavnoj dijagonali imati jedinice, a ispod i iznad nje nule. Jednostavnim Gaussovim transformacijama dolazimo do oblika jednadžbi:

$$\overline{R} v_{\mathrm{nk}} = \overline{B}_{eq} + \overline{F}_{eq}\theta\,. \tag{3-12}$$

U matrici $\overline{R}$ se s lijeve strane nalazi jedinična matrica, dimenzije ranga matrice A_{eq}, a predstavlja koje varijable se mogu izračunati i izraziti pomoću ostalih:

$$\begin{bmatrix} I_n & \overline{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1\mathrm{nk}} \\ v_{2\mathrm{nk}} \end{bmatrix} = \overline{B}_{eq} + \overline{F}_{eq}\theta\,, \tag{3-13}$$

gdje je s $v_{1\mathrm{nk}}$ označen onaj dio permutiranog vektora kontinuiranih varijabli koji ćemo izraziti pomoću $v_{2\mathrm{nk}}$, $\overline{R}_2$ je dio matrice $\overline{R}$ koji predstavlja koeficijente uz varijable koje ostaju u daljnjem proračunu.

Iz (3-13) moguće je izraziti poznate varijable:

$$v_{1\mathrm{nk}} = -\overline{R}_2 v_{2\mathrm{nk}} + \overline{B}_{eq} + \overline{F}_{eq}\theta \,. \tag{3-14}$$

S ovom vrijednošću ulazimo u sustav nejednadžbi iz (3-8):

$$A_{ineq} v_{\mathrm{k}} + E_{ineq} v_{\mathrm{d}} \leq B_{ineq} + F_{ineq}\theta \,, \tag{3-15}$$

$$A_{ineq} S v_{\mathrm{nk}} + E_{ineq} v_{\mathrm{d}} \leq B_{ineq} + F_{ineq}\theta \,, \tag{3-16}$$

$$A_{ineq\,n} v_{\mathrm{nk}} + E_{ineq} v_{\mathrm{d}} \leq B_{ineq} + F_{ineq}\theta \,. \tag{3-17}$$

U permutiranoj matrici $A_{ineq\,n}$ moramo izdvojiti onaj dio koji ide uz varijable iz (3-14), te uz onaj dio koji mora ostati u nejednadžbama $A_{ineq\,n} = \lfloor A_{ineq\,1n} \quad A_{ineq\,2n} \rfloor$. Rastavljanjem vektora v_{nk} na dva dijela, te uvrštavanjem (3-14), dobiva se novi sustav nejednadžbi, s manjim brojem varijabli:

$$(A_{ineq\,2n} - A_{ineq\,1n}\overline{R}_2) v_{2\mathrm{nk}} + E_{ineq} v_{\mathrm{d}} \leq (B_{ineq} - A_{ineq\,1n}\overline{B}_{eq}) + (F_{ineq} - A_{ineq\,1n}\overline{F}_{eq})\theta \,. \tag{3-18}$$

Osim uvjeta nejednadžbi, zbog smanjivanja broja varijabli, mijenja se i funkcija cilja. Analognim postupkom, permutiranjem, te rastavljanjem vektora c na dva dijela $c^T S = c_n = \lfloor c_{1n} \quad c_{2n} \rfloor$ i uvrštavanjem (3-14), dobije se nova funkcija cilja:

$$f = (c_{2n} - c_{1n}\overline{R}_2) v_{2\mathrm{nk}} + c_{1n}\overline{B}_{eq} + c_{1n}\overline{F}_{eq}\theta + d^T v_{\mathrm{d}} \,. \tag{3-19}$$

U slučaju 1a. nakon koraka (3-12) matrica $\overline{R}$ je jedinična, te su sve kontinuirane varijable poznate:

$$v_{\mathrm{nk}} = \overline{B}_{eq} + \overline{F}_{eq}\theta \,. \tag{3-20}$$

Nejednadžbe u ovom slučaju glase:

$$E_{ineq} v_{\mathrm{d}} \leq (B_{ineq} - A_{ineq\,n} \overline{B}_{eq}) + (F_{ineq} - A_{ineq\,n} \overline{F}_{eq})\theta \,, \tag{3-21}$$

a funkcija cilja:

$$f = c_n \overline{B}_{eq} + c_n \overline{F}_{eq} \theta + d^T v_{\mathrm{d}} \,. \tag{3-22}$$

Ovu analizu i smanjivanje broja jednadžbi potrebno je provoditi prije svakog mp - LP. Nakon mp - LP potrebno je vratiti redoslijed varijabli, kao i varijable iz (3-14) ili (3-20).

3.3. INICIJALIZACIJA

Početno se rješava MILP podproblem. Parametar θ se tretira kao kontinuirana varijabla kako bi se pronašla početna ostvariva područja. Problem (3-8) sada prelazi u izraz (3-22):

$$\begin{aligned}
f &= \min_{v_{\mathrm{k}}, v_{\mathrm{d}}, \theta} \begin{bmatrix} c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\mathrm{k}} \\ \theta \end{bmatrix} + d^T v_{\mathrm{d}} \;, \\
\text{uz uvjete: } & \begin{bmatrix} A_{ineq} & -F_{ineq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\mathrm{k}} \\ \theta \end{bmatrix} + E_{ineq} v_{\mathrm{d}} \leq B_{ineq} \,, \\
& \begin{bmatrix} A_{eq} & -F_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\mathrm{k}} \\ \theta \end{bmatrix} + E_{eq} v_{\mathrm{d}} = B_{eq} \,, \\
& v_{\mathrm{k}} \in \Re^n ,\; v_{\mathrm{d}} \in \{0,1\}^l , \theta \in \Re^s \,.
\end{aligned} \tag{3-22}$$

Rješenje ovakvog sustava su vektori v_{k}, θ i v_{d}. Potrebno je fiksirati logičku varijablu $v_{\mathrm{d}} = \hat{v}_{\mathrm{d}}$ radi dalje upotrebe prilikom rješavanja mp - LP-a.

3.4. VIŠEPARAMETARSKO LINEARNO PROGRAMIRANJE

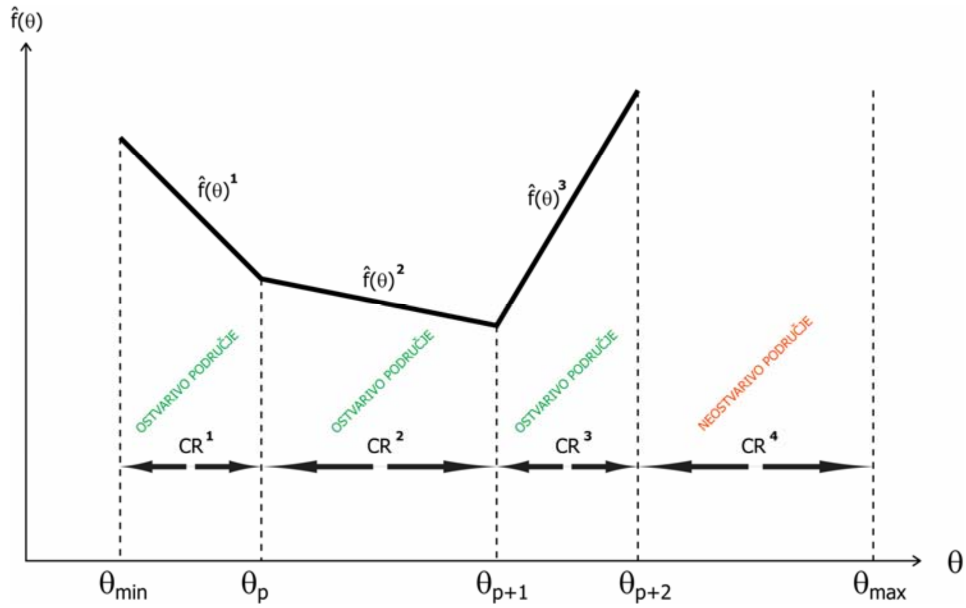
Prije svakog mp – LP, provodi se postupak smanjivanja dimenzija matrica nejednadžbi, te postupak rješavanja jednadžbi, opisan u 3.2. Fiksiranjem v_d, problem (3-8) dobiva oblik:

$$\begin{aligned} & f(\theta) = \min_{v_\mathrm{k}} c^T v_\mathrm{k} + d^T \hat{v}_\mathrm{d} \ , \\ & \text{uz uvjete: } A_{ineq} v_\mathrm{k} \leq \left(B_{ineq} - E_{ineq} \hat{v}_\mathrm{d}\right) + F_{ineq}\theta , \\ & \qquad A_{eq} v_\mathrm{k} = B_{eq} + F_{eq}\theta . \end{aligned} \tag{3-23}$$

Ovakav sustav više ne sadrži binarne varijable, te ga je moguće riješiti multiparametarskim linearnim programom. Kao rješenje sustava dobivaju se politopi u prostoru parametara, vrijednosti kontinuiranih varijabli u ovisnosti o parametrima, te vrijednosti funkcije cilja koja je također ovisne o vektoru parametara:

$$\begin{aligned} & CR(i) = \left\{\theta : A_{i\,mpLP}\theta \leq B_{i\,mpLP}\right\},\ i = 1,...nR \ , \\ & \hat{v}_\mathrm{k}^{\ *}(\theta) = F^*{}_i\theta + G^*{}_i \quad \text{za} \quad \theta \in CR(i), \\ & \hat{f}^*(\theta) = B^*{}_i\theta + C^*{}_i \quad \text{za} \quad \theta \in CR(i). \end{aligned} \tag{3-24}$$

Vrijednosti funkcije cilja su konveksne funkcije. Ako je, na primjer (Sl. 3.1.), parametar definiran unutar granica *[θ_{max}, θ_{min}],* u nekom jednodimenzionalnom prostoru, mogući dobiveni minimumi funkcije cilja $\hat{f}(\theta)^1$, $\hat{f}(\theta)^2$ i $\hat{f}(\theta)^3$ pridruženi su redom kritičnim područjima: $CR^1 = \left[\theta_{\min}, \theta_p\right], CR^2 = \left[\theta_p, \theta_{p+1}\right],$ te $CR^3 = \left[\theta_{p+1}, \theta_{p+2}\right]$. Također je moguće dobiti potpodručja koja su neostvariva za početno zadane vrijednosti logičkih varijabli (u ovom primjeru to je područje $CR^4 = \left[\theta_{p+2}, \theta_{\max}\right]$). Ovo područje može se sastojati od nekoliko konveksnih potpodručja. U tom je slučaju potrebno ponoviti inicijalizaciju, uz uvjet da se traži $v_d \neq \hat{v}_d$, za svaki od potpodručja. Koliko će postojati kritičnih područja ovisi o dimenziji modela, vrijednostima gornje i donje granice parametara, te aktivnim ograničenjima koja se mijenjaju s promjenom vrijednosti parametara. Ukoliko je nakon rješavanja jednadžbi, dobiveno rješenje prema slučaju 3., moraju se zapamtiti vrijednosti logičkih varijabli, te ponoviti inicijalizaciju, uz uvjet $v_{\mathrm{d}} \neq \hat{v}_{\mathrm{d}}$.



Sl. 3.1. Ostvariva i neostvariva područja nakon inicijalnog mp – LP, uz $v_{\mathrm{d}} = \hat{v}_{\mathrm{d}}$.

Nakon dobivenih rješenja mp – LP potrebno je izraziti i optimalne vrijednosti varijabli koje smo izračunali iz jednadžbi, te vratiti odgovarajući redoslijed varijabli, prema 3.2.

3.5. LINEARNO PROGRAMIRANJE S MJEŠOVITIM VARIJABLAMA

Za svako od dobivenih kritičnih područja CR^i iz višeparametarskog linearnog programa (mp-LP) potrebno je riješiti MILP potproblem, linearni program s mješovitim varijablama. Sada se parametri θ tretiraju kao varijable, te se, uz njihove vrijednosti, traže vrijednosti kontinuiranih i logičkih varijabli:

$$f=\min_{v_{\mathrm{k}},v_{\mathrm{d}},\theta}\begin{bmatrix}c^T & \underline{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{\mathrm{k}}\\ \theta\end{bmatrix}+d^T v_{\mathrm{d}}\,,$$

$$\begin{aligned}
\text{uz uvjete}: & \begin{bmatrix}A_{ineq} & -F_{ineq}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{\mathrm{k}}\\ \theta\end{bmatrix}+E_{ineq}v_{\mathrm{d}}\le B_{ineq}\,,\\
& \begin{bmatrix}A_{eq} & -F_{eq}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{\mathrm{k}}\\ \theta\end{bmatrix}+E_{eq}v_{\mathrm{d}}= B_{eq}\,,\\
& c^T v_{\mathrm{k}}+d^T v_{\mathrm{d}}\le \hat{f}(\theta)^i\,,\\
& \sum_{j\in J^{ik}} v_{\mathrm{d}\,j}^{\;ik}-\sum_{j\in L^{ik}} v_{\mathrm{d}\,j}^{\;ik}\le \left|J^{ik}\right|-1,\;\; k=1,\ldots,K^i\,,\\
& \theta\in CR^i,\; v_{\mathrm{k}}\in\Re^n,\; v_{\mathrm{d}}\in\{0,1\}^l\,,
\end{aligned}\tag{3-25}$$

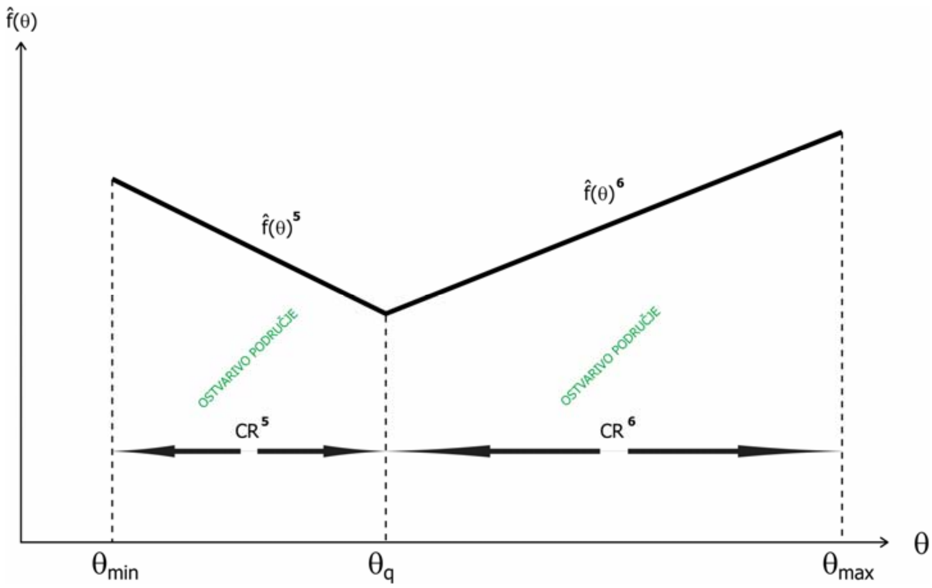
gdje je parametar θ varijabla s granicama kritičnog područja CR^i kojem pripada. Osim ovog uvjeta dodana je i nejednadžba $c^T v_{\mathrm{k}}+d^T v_{\mathrm{d}}\le \hat{f}(\theta)^i$, koja isključuje rješenja s većom vrijednosti od dobivenih u prošloj iteraciji mp - LP-a. Preostala nejednadžba brani ponovno javljanje već korištenih logičkih vrijednosti varijable v_{d}. Skup indeksa elemenata vektora v_{d} koji su u *1* za područje CR^i i *k*-tu fiksiranu kombinaciju logičkih varijabli označit ćemo s $J^{ik}=\left\{j\middle|v_{\mathrm{d}\,j}^{\;ik}=1\right\}$, a skup indeksa onih koji su u nula neka je $L^{ik}=\left\{j\middle|v_{\mathrm{d}\,j}^{\;ik}=0\right\}$. Oznaka $|\cdot|$ koristi se za kardinalni broj skupa, a K^i je broj koliko je logičkih rješenja već analizirano u području CR^i.

Rješenje ovog problema $v_{\mathrm{d}}=\hat{v}_{\mathrm{d}}^{\;1}$ vraća se ponovno u mp - LP, kako bi se na temelju njega pronašle manje vrijednosti funkcije cilja i pripadajuća konveksna područja.

Ako nema mogućih rješenja MILP potproblema u nekom od potpodručja, ta regija mora biti isključena iz daljnjeg razmatranja, a prethodno dobiveni rezultati mp-LP predstavljaju konačno rješenje.

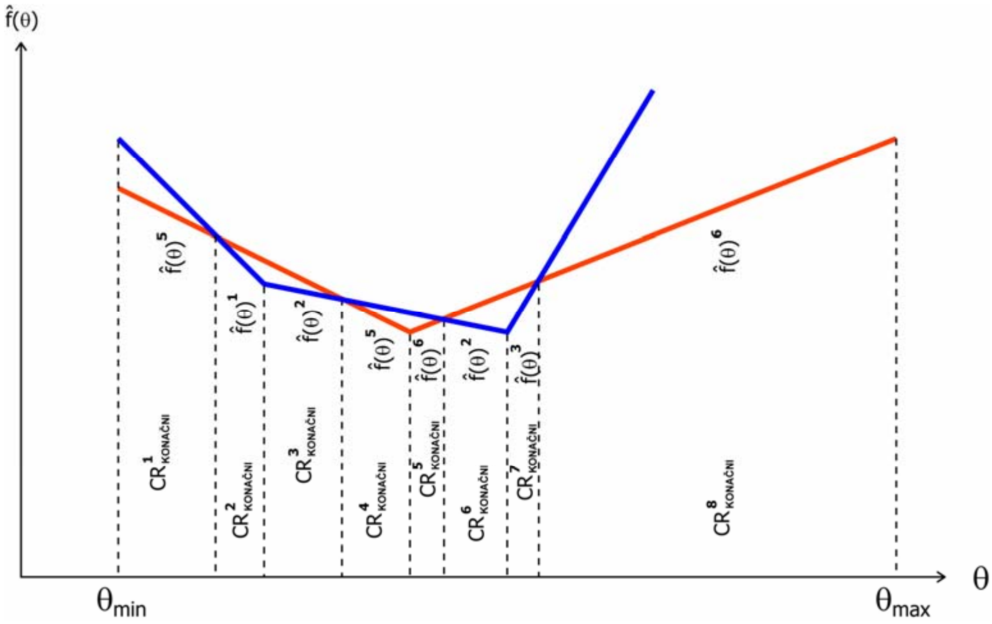
3.6. USPOREDBA REZULTATA

S novom vrijednosti logičke varijable $v_{\mathrm{d}} = \hat{v}_{\mathrm{d}}^{\,1}$ ponovno se provodi mp - LP. Kao njegov rezultat se dobivaju vrijednosti funkcije cilja $\hat{f}(\theta)^5$ i $\hat{f}(\theta)^6$, s pripadajućim kritičnim područjima $CR^5 = [\theta_{\min}, \theta_q]$ i $CR^6 = [\theta_q, \theta_{\max}]$ (Sl. 3.2.). Za svako od početnih područja za koja smo u MILP-u tražili nove vrijednosti logičkih varijabli, sada je moguće dobiti nova potpodručja, s različitim vrijednostima logičkih varijabli. Potrebno je odlučiti koje je od tih rješenja bolje.



Sl. 3.2. Ostvariva područja nakon drugog mp – LP, uz $v_{\mathrm{d}} = \hat{v}_{\mathrm{d}}^{\,1}$.

Vrijednosti funkcije cilja (u ovisnosti o parametrima) pridružene logičkim vrijednostima $v_{\mathrm{d}} = \hat{v}_{\mathrm{d}}$ predstavljaju trenutnu gornju granicu područja *CR*. Ako je u tom istom području nađena vrijednost funkcije cilja za logičke varijable $v_{\mathrm{d}} = \hat{v}_{\mathrm{d}}^{\,1}$, ona može imati veću, manju ili jednaku vrijednost početnoj. Potrebno je naći vrijednost parametara za koju obje funkcije cilja imaju istu vrijednost, te kritično područje podijeliti na tom mjestu. Sa svake strane funkcija cilja će poprimiti vrijednost manje prijašnje funkcije cilja. Na slici 3.3. vidljivo je na jednodimenzionalnom primjeru kako su područja podijeljena u konačnici, te koju vrijednost poprima funkcija cilja u svakom području.



Sl. 3.3. Konačni politopi i pripadajuće funkcije cilja.

3.7. ALGORITAM mp – MILP

Algoritam koji rješava mp – MILP problem, u osnovnim crtama glasi:

1. provjera da li je dimenzija problema prevelika, smanjuje se, te se rješava mogućih jednadžbi prema potpoglavlju 3.2;
2. provjera da li je problem dobro zadan, da li uopće ima smisla rješavati ovaj problem, definiraju se zadane prazne strukture u koje će se spremati moguća rješenja (radna struktura), te konačna rješenja;
3. inicijalno rješavanje MILP potproblema prema poglavlju 3.3;
4. inicijalni mp-LP (3.4.), ostvariva područja se spremaju u radnu strukturu;

5. sva neostvariva područja iz 4. potrebno je dodatno ispitati, i naći da li postoji koje drugo logičko rješenje za koja je neko od tih područja ipak ostvarivo. Zapamtiti koje logičke varijable smo već ispitali.
   5.1. ponoviti MILP
   5.2. ponoviti mp – LP

5.3. spremiti u radnu strukturu nova ostvariva područja, te za moguća neostvariva područja ponoviti ovaj korak;

6. nakon što smo našli sva ostvariva područja, potrebno je ponovno ispitati svako od njih i vidjeti da li postoji povoljnije rješenje od već dobivenog → riješiti MILP, s time da smo isključili sva već isprobana logička rješenja;
   6.1. ako je MILP neostvariv, ona rješenja koja smo imali do sada za ovo područje, su konačna, spremamo ih u posebnu strukturu sa rješenjima
   6.2. inače rješavamo mp – LP
      6.2.1. za svako dobiveno područje ispitujemo da li je prošlo ili novo rješenje povoljnije, te po potrebi dijelimo područje na dva podpodručja, prema 3.6., oba spremamo u radnu strukturu
   6.3. ponavljamo ovaj korak dok ne ispitamo sva područja spremljena u radnoj strukturi.

4. OSMOTRIVOST

Promatrat ćemo sustav na konačnom vremenskom horizontu *T.* Neko stanje sustava je osmotrivo na horizontu *T,* ako su skupljeni ulazno-izlazni podaci na horizontu dovoljni za rekonstrukciju tog stanja na početku horizonta, bez obzira na primijenjenu ulaznu sekvencu na horizontu. U praktičnom smislu opravdano je definirati maksimalni horizont T_{max}, te za sva stanja koja su osmotriva tek za $T>T_{max}$ reći da su praktički neosmotriva.

Definicija 4.1. Za neki MLD sustav, dva stanja $x, \hat{x} \in \mathcal{X}$ se ne mogu razlučiti u T koraka ako postoji $U(T) \in \mathcal{U}^T$ takvi da su $X(T|x, U(T))$ i $X(T|\hat{x}, U(T))$ dobro definirani i $Y(T|x, U(T)) = Y(T|\hat{x}, U(T))$. ([8])

Dva stanja koja se ne mogu razlučiti bilježimo $x \overset{T}{\sim} \hat{x}$. To je relacija iznad prostora $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, no razlikuje se od slučaja linearnog sustava. Ne može se zamijeniti s relacijom jednakosti, jer prijelazna svojstva ne moraju biti jednaka.

Ako postoje $U_1(T) \in \mathcal{U}^T$, takvi da je $x_1 \overset{T}{\sim} \hat{x}_2$ i $U_2(T) \in \mathcal{U}^T$ takvi da je $x_2 \overset{T}{\sim} \hat{x}_3$, ne možemo garantirati da postoji $U_3(T) \in \mathcal{U}^T$, takvi da je $x_1 \overset{T}{\sim} \hat{x}_3$, zbog ograničenja na ulaze, te unutarnjih nelinearnih ponašanja MLD sustava. Skup stanja koja se ne mogu razlikovati od *x* u T koraka označit ćemo s $\Im_T(x) \subseteq \mathcal{X}$.

Definicija 4.2. Stanje $x \in \mathcal{X}$ je osmotrivo u T koraka ako je $\Im_T(x) = \{x\}$.

Definicija 4.3. Skup $O_T \subseteq \mathcal{X}$ je osmotriva regija u T koraka ako su sva stanja $x \in O_T$ osmotriva.

Definicija 4.4. Maksimalni osmotrivi skup u *T* koraka $\overline{O_T}$ je unija svih osmotrivih regija.

4.1. PRORAČUN REGIJA OSMOTRIVOSTI

Regije osmotrivosti će se proračunavati za sustav zadan u MLD obliku, na vremenskom horizontu T ([8]). Koristeći (2-28), $\hat{x} \in \Im_T(x)$ će vrijediti ako i samo ako postoji $U(T), \Delta(T), \hat{\Delta}(T), Z(T)$ i $\hat{Z}(T)$, takvi da vrijedi:

$$U(T) \in \mathcal{U}^T,\ X(T), \hat{X}(T) \in \mathcal{X}^T,\ \Delta(T), \hat{\Delta}(T) \in \{0,1\}^{Tr_l},$$

$$Y(T|x, U(T)) = Y(T|\hat{x}, U(T)). \tag{4-1}$$

Evolucija MLD sustava na horizontu *T,* inicijalizirana s *x,* ima oblik:

$$X(T) = \widetilde{A}x + \widetilde{B}_1 U(T) + \widetilde{B}_2 \Delta(T) + \widetilde{B}_3 Z(T), \tag{4-2a}$$

$$\widetilde{E}_2 \Delta(T) + \widetilde{E}_3 Z(T) \le \widetilde{E}_1 U(T) + \widetilde{E}_4 x + \widetilde{E}_5, \tag{4-2b}$$

odnosno s $\hat{x}$:

$$\hat{X}(T) = \widetilde{A}\hat{x} + \widetilde{B}_1 U(T) + \widetilde{B}_2 \hat{\Delta}(T) + \widetilde{B}_3 \hat{Z}(T), \tag{4-2c}$$

$$\widetilde{E}_2 \hat{\Delta}(T) + \widetilde{E}_3 \hat{Z}(T) \le \widetilde{E}_1 U(T) + \widetilde{E}_4 \hat{x} + \widetilde{E}_5. \tag{4-2d}$$

Na temelju definicije o dva stanja koja se ne mogu razlučiti, vrijedi:

$$Y(T|x, U(T)) = Y(T|\hat{x}, U(T)), \tag{4-3a}$$

$$\widetilde{D}_2\left(\hat{\Delta}(T) - \Delta(T)\right) + \widetilde{D}_3\left(\hat{Z}(T) - Z(T)\right) = -\widetilde{C}(\hat{x} - x). \tag{4-3b}$$

Teorem 4.1. Za svaki $x \in \mathcal{X}$, skup $\Im_T(x)$ je kompaktan, tj. sastoji se od konačnog broja podskupova.

Dokaz: $\Im_T(x) = \emptyset$ za svaki $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_T^*$. Ako je $\mathcal{X}_T^*$ prazan, dokaz je trivijalan. Inače, fiksira se $x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}_T^*$. Nejednadžbe (4-2b, 4-2d) i jednadžba (4-3b) definiraju mp – MILP s nul-funkcijom kao funkcijom cilja, fiksnim x, vektorom parametara $\theta = \hat{x} \in \mathcal{X}$, te vektorom varijabli $v = \lfloor U(T)' \quad \Delta(T)' \quad \hat{\Delta}(T)' \quad Z(T)' \quad \hat{Z}(T)' \rfloor$. Kako je $x \in \mathcal{X}_T^*$, imamo $x \in \Im_T(x)$, odakle slijedi ostvarivost mp – MILP-a za $\theta = x$. Ostvariv skup $\Theta^*(x)$ mp – MILP-a je kompaktan. Teza slijedi iz zapisa $\Im_T(x) = \Theta^*(x)$.

Za dani MLD sustav, s parametrom $x \in \mathcal{X}$, promatra se optimizacijski problem:

$$\Gamma(x) = \max_{\hat{x} \in \Im_T(x)} \|x - \hat{x}\|_1 . \tag{4-4}$$

Ovaj problem je rješiv za sve parametre $x \in \mathcal{X}_T^*$ i u tom slučaju, teorem 4.1. i kontinuiranost $\|\cdot\|_1$ garantiraju da je maksimum dobro definiran.

Preslikavanje $\Gamma : \mathcal{X}^* \mapsto \mathcal{X}$ pridružuje svakom parametru x optimalnu vrijednost $\hat{x}^*(x)$ iz problema (4-4). Koristeći Definiciju 4.4., maksimalni osmotrivi skup se može predstaviti kao:

$$\overline{O_T} = \left\{ x \in \mathcal{X}_T^* : \Gamma(x) = x \right\}. \tag{4-5}$$

Izraz (4-4) nije pogodan za direktno korištenje u mp-MILP-u. Potrebno je ciljnu funkciju 1-norme pretvoriti u optimizacijski problem s miješanim varijablama s linearnom funkcijom cilja. U tu svrhu, uvode se pomoćne varijable $\eta \in \Re^n$ i $\mu \in \{0,1\}^n$, definirane kao:

$$\mu_i = \begin{cases} 1 \ ako \ (x - \hat{x})_i \le 0, \\ 0 \ ako \ (x - \hat{x})_i > 0, \end{cases} \tag{4-6}$$

$$\eta_i = \begin{cases} -(x - \hat{x})_i & ako \ \mu_i = 1, \\ (x - \hat{x})_i & ako \ \mu_i = 0. \end{cases} \tag{4-7}$$

gdje je $(x-\hat{x})_i$ i-ta komponenta vektora $x-\hat{x}$. Uvođenjem ovih varijabli, funkcija cilja se može zapisati u obliku:

$$\Gamma = \max_{\hat{x}\in\Im_T(x)} \|x-\hat{x}\|_1 = \max_{\hat{x},\mu,\eta} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \ . \tag{4-8}$$

Vektori definirani u (4-6) i (4-7) imaju jedinstveno rješenje sustava nejednadžbi:

$$M\begin{bmatrix}\mu\\ \eta\\ \hat{x}\end{bmatrix} \le Nx + N_c \,, \tag{4-9}$$

gdje su matrice *M, N* i N_c takve da je $\forall x, \hat{x} \in \mathcal{X}$.

Uvjeti koje se mora zadovoljiti u mp-MILP programu sadržani su u $\hat{x} \in \Im_T(x)$. Nakon uvođenja pomoćnih varijabli (4-6), (4-7), te matrica (4-9), uvjeti glase:

$$\hat{x} \in \Im_T(x) \,, \tag{4-10}$$

$$M\begin{bmatrix}\mu\\ \eta\\ \hat{x}\end{bmatrix} \le Nx + N_c \,.$$

Kako je sustav koji promatramo MLD, uvjeti (4-10) postaju:

$$M\begin{bmatrix}\mu\\ \eta\\ \hat{x}\end{bmatrix} \le Nx + N_c \,, \tag{4-11a}$$

$$\widetilde{E}_2\Delta(T) + \widetilde{E}_3 Z(T) \le \widetilde{E}_1 U(T) + \widetilde{E}_4 x + \widetilde{E}_5 \,, \tag{4-11b}$$

$$\widetilde{E}_2\hat{\Delta}(T) + \widetilde{E}_3 \hat{Z}(T) \le \widetilde{E}_1 U(T) + \widetilde{E}_4 \hat{x} + \widetilde{E}_5 \,, \tag{4-11c}$$

$$\widetilde{D}_2\left(\hat{\Delta}(T) - \Delta(T)\right) + \widetilde{D}_3\left(\hat{Z}(T) - Z(T)\right) = -\widetilde{C}(\hat{x} - x) \,. \tag{4-11d}$$

Ovakav sustav s miješanim varijablama, te linearnim jednadžbama i nejednadžbama, može se prikazati u kompaktnom obliku:

$$
\begin{aligned}
&\max_{v_\mathrm{k}, v_\mathrm{d}} && c^T v_\mathrm{k} + d^T v_\mathrm{d}, \\
&\text{uz uvjete}: && A_{ineq} v_\mathrm{k} + E_{ineq} v_\mathrm{d} \leq B_{ineq} + F_{ineq}\theta, \\
& && A_{eq} v_\mathrm{k} + E_{eq} v_\mathrm{d} = B_{eq} + F_{eq}\theta,
\end{aligned}
\tag{4-12}
$$

gdje su $v_\mathrm{k} = \lfloor \hat{x}' \quad U(T)' \quad Z(T)' \quad \hat{Z}(T)' \quad \eta' \rfloor$ kontinuirane varijable, a $v_\mathrm{d} = \lfloor \Delta(T)' \quad \hat{\Delta}(T)' \quad \mu' \rfloor$ logičke varijable po kojima se optimira, $\theta = [x]$, $\theta \in \mathcal{X}$ je parametar. Problem (4-12) zapravo je multiparametarski problem s kontinuiranim i logičkim varijablama, mp – MILP, te se traženju osmotrivih područja pristupa preko rješavanja mp – MILP-a. U tu svrhu matrice iz (4-11a) imaju sljedeće elemente:

$$
M = [M_1 \quad M_2 \quad M_3] = \begin{bmatrix} \theta_{pom} & 0 & I_n \\ -\theta_{pom} & 0 & -I_n \\ -2\theta_{pom} & -I_n & I_n \\ -2\theta_{pom} & I_n & -I_n \\ 2\theta_{pom} & -I_n & -I_n \\ 2\theta_{pom} & I_n & I_n \end{bmatrix}, \tag{4-13a}
$$

$$
N = \begin{bmatrix} I_n \\ -I_n \\ I_n \\ -I_n \\ -I_n \\ I_n \end{bmatrix}, \tag{4-13b}
$$

$$
N_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_{pom} \\ -2\theta_{pom} \\ -2\theta_{pom} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4-13c}
$$

gdje je $\theta_{pom} = \begin{bmatrix} \theta_{\min 1} - \theta_{\max 1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \theta_{\min n} - \theta_{\max n} \end{bmatrix}$, $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, n \times n$.

Kako je za pokretanje mp – MILP-a potrebno varijable podijeliti na kontinuirane i logičke, tako se i iz matrica (4-13) izdvajaju stupci koji se odnose na pojedine varijable, prva trećina stupaca iz M su koeficijenti uz logičke varijable M_1, dok je ostatak matrice M vezan uz kontinuirane varijable M_2 i M_3. Konstante matrice iz (4-12) glase:

$$A_{ineq} = \begin{bmatrix} 0 & -\widetilde{E}_1 & \widetilde{E}_3 & 0 & 0 \\ -\widetilde{E}_4 & -\widetilde{E}_1 & 0 & \widetilde{E}_3 & 0 \\ M_3 & 0 & 0 & 0 & M_2 \end{bmatrix}, \tag{4-16a}$$

$$E_{ineq} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 \end{bmatrix}, \tag{4-16b}$$

$$B_{ineq} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_5 \\ \widetilde{E}_5 \\ N_c \end{bmatrix}, \tag{4-16c}$$

$$F_{ineq} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_4 \\ 0 \\ N \end{bmatrix}. \tag{4-16d}$$

Zbog postojanja jednadžbi (4-11d) postoje i jednadžbe pri pozivu mp – MILP-a (4-12). Ovdje nam u korist ide $\widetilde{D}_2 = 0$ (zbog načina provedene pretvorbe PWA modela u MLD model, potpoglavlje 2.6.), te ne postoje logičke varijable u jednadžbama. Matrice jednadžbi glase:

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} \widetilde{C} & 0 & -\widetilde{D}_3 & \widetilde{D}_3 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4-17a}$$

$$B_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \tag{4-17b}$$

$$F_{eq} = \begin{bmatrix} \widetilde{C} \end{bmatrix}. \tag{4-17c}$$

Sam algoritam optimiranja mp – MILP minimizira, dok u (4-12) imamo maksimizaciju. Zbog uspješnog pronalaženja rješenja, min pretvaramo u max, množeći funkcije cilja sa *-1*. Funkcija cilja tada ima matrice:

$$c' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{\mathbf{1}}_{1\times n} \end{bmatrix}, \\ d' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4-18}$$

Rješavanjem mp – MILP problema dobiju se:

- Područja politopa $\{CR_j\}_{j=1}^{s}$, $CR_j \subseteq \mathcal{X}$, predstavljena s linearnim nejednadžbama $A_{CR\,j}\theta \le B_{CR\,j}$, takvima za koje vrijedi $\mathcal{X}_T^* = \bigcup_{j=1}^{s} CR_j$;
- Vrijednosti varijabli u ovisnosti o parametrima: $v_{\mathrm{k}}^*(x) = F_j^*\theta + G_j^*$, $\forall x \in CR_j$.

U vektoru varijabli v_{k}, varijabla koja nas zanima stoji na prvom mjestu, te se može izdvojiti množenjem:

$$F_j^{**} = \left[I_n \middle| \; 0\right] \cdot F_j^*, \tag{4-19}$$

$$G_j^{**} = \left[I_n \middle| \; 0\right] \cdot G_j^*. \tag{4-20}$$

Izraz koji svakom parametru pridružuje varijable, tj. preslikavanje $\Gamma : \mathcal{X}^* \mapsto \mathcal{X}$ može se prikazati:

$$\Gamma(x) = \Gamma_j(x),\; x \in CR_j, \tag{4-21}$$

$$\Gamma_j(x) = F_j^{**}x + G_j^{**}. \tag{4-22}$$

Kako bi neka regija bila osmotriva, mora biti zadovoljen (4-5), tj. parametar x mora biti jednak $\hat{x}$ ([8]), pa za svaki skup vrijedi:

$$O_j = \overline{O}_T \cap CR_j = \left\{ x \in CR_j : F_j^{**} = I_n, G_j^{**} = 0 \right\}. \tag{4-23}$$

Neki od dobivenih skupova može biti i prazan. Maksimalni osmotrivi skup se može prikazati kao:

$$\overline{O}_T = \bigcup_{j=1}^{s} O_j \ . \tag{4-24}$$

Nakon provedenog mp – MILP programa, provjeru da li su dobivene regije osmotrive obavimo vrlo jednostavno. Ukoliko je $F_j^{**} = I_n, G_j^{**} = 0$, ta regija je osmotriva.

5. DINAMIČKO PROGRAMIRANJE

U prošlom poglavlju pokazano je kako se proračunavaju regije osmotrivosti koristeći mp-MILP. Pretvarajući iz PWA oblika u MLD oblik, te u MLD oblik uz horizont T nastaje veliki broj linearnih jednadžbi i nejednadžbi s velikim brojem varijabli i parametara po kojima je potrebno optimirati. Naizmjeničnim korištenjem mp-LP-a i MILP-a kako bi se dobile osmotrive regije produljuje se vrijeme njihova proračuna. Kako bi se to vrijeme skratilo, potreban je drugačiji pristup, pristup pomoću dinamičkog programiranja ([22]).

Prema definiciji 4.1. dva stanja $x, \hat{x} \in \mathcal{X}$ se ne mogu razlučiti u T koraka ako postoji $U(T) \in \mathcal{U}^T$ koji osigurava da su izlazi dobro definirani i jednaki $Y(T|x, U(T)) = Y(T|\hat{x}, U(T))$. Ta stanja su neosmotriva ([8]). Kombinirajući sve moguće dinamike za svako od ovih stanja, te maksimizirajući razliku njihovih vrijednosti uz postavljene uvjete, traže se područja gdje je ta maksimalna razlika nula. U tim područjima stanja se ne mogu razlikovati. Postupno povećavajući horizont do željenoga, pronalaze se područja koja i dalje nisu osmotriva, a za ostala područja se provjerava da li su možda ipak osmotriva. Dinamičko programiranje polazi od PWA modela (2-1) i (2-2), a očituje se u tom postupnom povećavanju horizonta, te dodavanjem regija osmotrivosti.

5.1. POMOĆNA VARIJABLA

Optimizacijski problem koji promatramo uz parametar $x \in \mathcal{X}$ i varijablu po kojoj maksimiziramo $\hat{x} \in \Im_T(x)$ dan je izrazom:

$$\Gamma(x) = \max_{\hat{x} \in \Im_T(x)} \|x - \hat{x}\|_1 . \tag{5-1}$$

Ovaj oblik funkcije cilja može se raspisati u oblik:

$$\Gamma = \max_{\hat{x} \in \Im_T(x)} \left\| x - \hat{x} \right\|_1 = \max_{\hat{x}} \sum_{i=1}^{n} \left| x - \hat{x} \right|_i . \tag{5-2}$$

Problem predstavlja apsolutna vrijednost oko razlike stanja. Kako bi se to riješilo uvodi se pomoćna varijabla ε:

$$\varepsilon = \left| x - \hat{x} \right| . \tag{5-3}$$

Ovu relaciju možemo raspisati s dvije nejednadžbe:

$$\begin{aligned} x - \hat{x} &\geq -\varepsilon, \\ x - \hat{x} &\leq \varepsilon, \end{aligned} \tag{5-4}$$

koje osiguravaju da razlika stanja uvijek bude pozitivna.

Kako promatramo n prošlih vrijednosti ulaza (u_1 trenutni ulaz, u_2 prošli, …, u_n najstariji promatrani ulaz), a uz pretpostavku da su sve varijable i svi parametri kontinuirani, vektor varijabli glasi:

$$v = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ U \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \tag{5-5}$$

a vektor parametara:

$$\theta = x . \tag{5-6}$$

Funkcija cilja u linearnom obliku glasi:

$$\Gamma = \min_{\varepsilon}\begin{bmatrix}0 & 0 & -I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x} \\ U \\ \varepsilon\end{bmatrix}, \tag{5-7}$$

gdje je I_n vektor od n elemenata čiji su svi elementi jednaki jedan.

5.2. UVJET JEDNAKOSTI

Uvjet osmotrivosti prema definiciji 4.1. osigurava da su izlazi iz sustava jednaki $Y(T|x,U(T)) = Y(T|\hat{x},U(T))$ uz istu ulaznu sekvencu. Potrebno je promatrati n prošlih vrijednosti, gdje je n broj varijabli stanja, pa je T=n. Iz izlaznih relacija PWA oblika sustava za prošlih n stanja dolazi se do uvjeta jednakosti:

$$A_{eq}v = B_{eq} + F_{eq}\theta, \tag{5-8}$$

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} C_{\hat{x}n} & D_{\hat{x}n} - D_{xn} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_{\hat{x}n-1}A_{\hat{x}n-1} & C_{\hat{x}n-1}B_{\hat{x}n-1} - C_{xn-1}B_{xn-1} & D_{\hat{x}n-1} - D_{xn-1} & \dots & 0 & 0 \\ C_{\hat{x}n-2}A_{\hat{x}n-2}{}^{2} & C_{\hat{x}n-2}A_{\hat{x}n-2}B_{\hat{x}n-2} - C_{xn-2}A_{xn-2}B_{xn-2} & C_{\hat{x}n-2}B_{\hat{x}n-2} - C_{xn-2}B_{xn-2} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{\hat{x}1}A_{\hat{x}1}{}^{n-1} & C_{\hat{x}1}A_{\hat{x}1}{}^{n-2}B_{\hat{x}1} - C_{x1}A_{x1}{}^{n-2}B_{x1} & C_{\hat{x}1}A_{\hat{x}1}{}^{n-3}B_{\hat{x}1} - C_{x1}A_{x1}{}^{n-3}B_{x1} & \dots & D_{\hat{x}1} - D_{x1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{eq} = \begin{bmatrix} g_{xn} - g_{\hat{x}n} \\ g_{xn-1} - g_{\hat{x}n-1} + C_{xn-1}f_{xn-1} - C_{\hat{x}n-1}f_{\hat{x}n-1} \\ g_{xn-2} - g_{\hat{x}n-2} + C_{xn-2}f_{xn-2} - C_{\hat{x}n-2}f_{\hat{x}n-2} + C_{xn-2}A_{xn-2}f_{xn-2} - C_{\hat{x}n-2}A_{\hat{x}n-2}f_{\hat{x}n-2} \\ \vdots \\ g_{x1} - g_{\hat{x}1} + C_{x1}f_{x1} - C_{\hat{x}1}f_{\hat{x}1} + \dots + C_{x1}A_{x1}{}^{n-2}f_{x1} - C_{\hat{x}1}A_{\hat{x}1}{}^{n-2}f_{\hat{x}1} \end{bmatrix},$$

$$F_{eq} = \begin{bmatrix} C_{xn} \\ C_{xn-1}A_{xn-1} \\ C_{xn-2}A_{xn-2}{}^{2} \\ \vdots \\ C_{x1}A_{x1}{}^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{5-9}$$

U izrazima (5-9) različiti indeksi x i $\hat{x}$ uz matrice *A, B, C, D, g* i *f* označavaju da varijabla $\hat{x}$ i parametar x mogu pripadati različitim dinamikama PWA oblika sustava. Drugi dio indeksa *1, 2, ..., n-1, n* označava kako u svakom od *n* prošlih koraka možemo biti u drugoj dinamici i za x i $\hat{x}$, te je i to potrebno uzeti u obzir. Prvi stupac matrice A_{eq} stoji uz $\hat{x}$ i dimenzija je $(n \cdot n) \times n$, posljednji stupac čiji su svi elementi nula stoji uz ε i dimenzija je $(n \cdot n) \times n$. Svi stupci između vezani su uz ulazne varijable ukupnih dimenzija $(n \cdot n) \times (m \cdot n)$.

Kako je već rečeno u potpoglavlju 3.2. alat za rješavanje mp-LP koji se koristi u implementaciji ovog dinamičkog algoritma podržava kao uvjete samo nejednadžbe, te je potrebno riješiti ovu jednadžbu smanjivanjem broja varijabli kako je to već objašnjeno u potpoglavlju 3.2.

5.3. INICIJALIZACIJA

Kako bi algoritam radio ispravno potrebno je zadati minimalnu i maksimalnu vrijednost parametara i svih prošlih promatranih ulaza:

$$\begin{aligned} x &\le x_{\max}, \\ x &\ge x_{\min}, \\ u &\le u_{\max}, \\ u &\ge u_{\min}. \end{aligned} \tag{5-10}$$

Pojedina dinamika definirana je ograničenjima na varijable stanja i ulaze:

$$L_x u + H_x x \le K_x, \tag{5-11}$$

$$L_{\hat{x}} u + H_{\hat{x}} \hat{x} \le K_{\hat{x}}, \tag{5-12}$$

gdje različiti indeksi uz matrice *L, H* i *K* označavaju da x i $\hat{x}$ mogu pripadati različitim dinamikama PWA oblika sustava. Promatrat ćemo samo trenutačnu vrijednost ulaza.

Isto tako želimo osigurati da sljedeće stanje ostane unutar minimalne i maksimalne vrijednosti te varijable stanja:

$$A_{\hat{x}}\hat{x} + B_{\hat{x}}u \le x_{\max} - f_{\hat{x}}, \tag{5-13}$$

$$A_{\hat{x}}\hat{x} + B_{\hat{x}}u \ge x_{\min} - f_{\hat{x}}, \tag{5-14}$$

$$A_{x}x + B_{x}u \le x_{\max} - f_{x}, \tag{5-15}$$

$$A_{x}x + B_{x}u \ge x_{\min} - f_{x}. \tag{5-16}$$

Iz (5-9) - (5-16) slijede matrice za jednadžbe, nejednadžbe i funkciju cilja koje se koriste pri mp-LP:

$$\begin{aligned} &\Gamma = \min_{\varepsilon}\begin{bmatrix}0 & 0 & -I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}\\ U\\ \varepsilon\end{bmatrix}, \\ &\text{uz uvjete: } A_{ineq}v \le B_{ineq} + F_{ineq}\theta, \\ &\qquad\qquad\quad A_{eq}v = B_{eq} + F_{eq}\theta. \end{aligned} \tag{5-17}$$

Kako je već rečeno u prošlom potpoglavlju, nakon rješavanja jednadžbi ostanu samo nejednadžbe, koje se koriste za mp-LP. Kao rješenje mp-LP-a dobiju se područja ostvarivosti u prostoru parametara *CR(i)*:

$$CR(i) = \{\theta : A_{i\,mpLP}\theta \le B_{i\,mpLP}\},\ i = 1,\dots nR, \tag{5-18a}$$

gdje je *nR* broj tako dobivenih područja. Optimalne vrijednosti varijabli stanja $\hat{x}$, ulaza U i razlike ε u ovisnosti o parametrima x dane su s:

$$\begin{bmatrix}\hat{x}\\ U\\ \varepsilon\end{bmatrix}^{*}(\theta) = F^{*}{}_{i}\theta + G^{*}{}_{i} \quad \text{za} \quad \theta \in CR(i), \tag{5-18b}$$

a optimalna vrijednost funkcije cilja, također u ovisnosti o parametrima x, s:

$$f^*(\theta) = B^*{}_i\theta + C^*{}_i \quad \text{za} \quad \theta \in CR(i). \tag{5-18c}$$

Neko od tako dobivenih područja bit će osmotrivo ako vrijedi:

$$\begin{aligned} x &= \hat{x}, \\ \varepsilon &= 0, \end{aligned} \tag{5-19}$$

tj. moraju biti zadovoljeni uvjeti:

$$F^{**}{}_i(\hat{x}) = [I_n \quad | \quad 0 \quad | \quad 0]F^*{}_i = I_n, \tag{5-20a}$$

$$G^{**}{}_i(\hat{x}) = [I_n \quad | \quad 0 \quad | \quad 0]G^*{}_i = 0_{n\times n}, \tag{5-20b}$$

$$F^{**}{}_i(\hat{x}) = [0 \quad | \quad 0 \quad | \quad I_n]F^*{}_i = 0_{n\times n}, \tag{5-20c}$$

$$G^{**}{}_i(\hat{x}) = [0 \quad | \quad 0 \quad | \quad I_n]G^*{}_i = 0_{n\times n}, \tag{5-20d}$$

gdje je 0_{nxn} nul matrica dimenzija n x n.

Sva područja koja zadovoljavaju ove uvjete pamte se u posebnoj strukturi rješenja:

$$RJESENJE(k) = \{\theta : A_{k\,rjesenje}\theta \le B_{k\,rjesenje}\}, k \in 1,\ldots,n_{rjesenja}, \tag{5-21}$$

gdje je $n_{rjesenja}$ broj ostvarivih područja koja su i osmotriva. Pamti se i iz koje dinamike dolaze x i $\hat{x}$. Ostala područja koja ne zadovoljavaju ove uvjete pamtimo u radnoj strukturi:

$$LISTA(j) = \{\theta : A_{j\,neosmotrivo}\theta \le B_{j\,neosmotrivo}\}, j \in 1,\ldots,n_{neosmotrivih}, \tag{5-22}$$

gdje je $n_{neosmotrivih}$ broj područja koja za sada nisu osmotriva. Pamtimo politope granice tih područja, te ih promatramo dalje, kako će biti objašnjeno. Ovaj inicijalni korak je ujedno i jedini korak koji je potrebno poduzeti ukoliko je željeni horizont T=n.

5.4. PRONALAZAK NEOSMOTRIVIH PODRUČJA

Nakon što smo pronašli inicijalno osmotriva područja, horizont se povećava za jedan, te se traže sigurno neosmotriva područja u ovom koraku. Cilj ovog dijela algoritma je, uz pomoć mp-LP, pronaći ona područja koja uz trenutačni horizont sigurno nisu osmotriva. U tu svrhu kombinirat će se dinamike x i $\hat{x}$ koje u ovom trenutku nisu osmotrive, tj. varijable stanja se nalaze unutar politopa iz posebne strukture koja nisu rješenje (*LISTA*), (5-22):

$$LISTA : A_{neosmotrivo} \cdot x(t) \leq B_{neosmotrivo} . \tag{5-23}$$

U sljedećem se trenutku te varijable stanja trebaju nalaziti opet u nekom od područja iz *LISTA(j)*. To bi značilo, ukoliko je moguće naći takvu ulaznu sekvencu koja osigurava ostanak promatrane varijable stanja u području koje je neosmotrivo, da ta varijabla stanja uz trenutačni horizont nije osmotriva. Ako je sljedeće stanje:

$$x(t+1) = A_x x(t) + B_x u(t) + f_x , \tag{5-24}$$

a neosmotrivi politop koji promatramo u sljedećem koraku:

$$A_{neosmotrivo} \cdot x(t+1) \leq B_{neosmotrivo} , \tag{5-25}$$

nakon uvrštenja (5-24) u (5-25) dobit će se uvjet granica politopa unutar kojih mora biti sljedeća vrijednosti varijabli stanja. Na isti način dobije se uvjet za $\hat{x}$:

$$\begin{aligned} A_{neosmotrivo}\left(A_x x + B_x u + f_x\right) &\leq B_{neosmotrivo} , \\ A_{neosmotrivo}\left(A_{\hat{x}} \hat{x} + B_{\hat{x}} u + f_{\hat{x}}\right) &\leq B_{neosmotrivo} . \end{aligned} \tag{5-26}$$

Na temelju prethodno opisanog potrebno je riješiti mp-LP prema (5-17). Nakon rješavanja jednadžbi i provođenja mp-LP-a kao rješenje se dobiju područja ($LISTA_{nova}$) koja uz ovaj trenutačni horizont nisu osmotriva, te se ona spremaju u posebnu strukturu, umjesto već promotrenih područja.

5.5. NOVA OSMOTRIVA PODRUČJA

Ako ova novodobivena područja ($LISTA_{nova}$) ne zauzimaju cijeli početni politop (*LISTA)* koji smo promatrali, postoji vjerojatnost da imamo neko novo osmotrivo područje (*MO*):

$$\begin{aligned} &MO = LISTA \setminus LISTA_{nova}, \\ &MO(k) = \{\theta : A_{k\,mozdaOsm}\theta \le B_{k\,mozdaOsm}\},\ k = 1,\ldots,n_{mozdaOsm}, \end{aligned} \tag{5-27}$$

gdje je $n_{nozdaOsm}$ broj dobivenih područja koja mogu biti osmotriva. To će područje biti osmotrivo ako varijable stanja u sljedećem koraku dođu u neko već osmotrivo područje, zabilježeno u strukturi *RJESENJE*.

Neka je trenutačno stanje element mogućeg osmotrivog područja *MO*. Ako je sljedeće stanje:

$$x(t+1) = A_x x(t) + B_x u(t) + f_x, \tag{5-28}$$

a postojeće rješenje koje promatramo u sljedećem koraku:

$$A_{rjesenje} \cdot x(t+1) \le B_{rjesenje}, \tag{5-29}$$

uvjet unutar kojih granica mora biti sljedeća vrijednost varijable stanja dan je s (analogno i za $\hat{x}$):

$$\begin{aligned} &A_{rjesenje}\left(A_x x + B_x u + f_x\right) \le B_{rjesenje}, \\ &A_{rjesenje}\left(A_{\hat{x}}\hat{x} + B_{\hat{x}} u + f_{\hat{x}}\right) \le B_{rjesenje}. \end{aligned} \tag{5-30}$$

Nakon rješavanja jednadžbi i provođenja mp-LP dobiju se rješenja prema (5-18). Ona područja koja zadovoljavaju (5-20) spremaju se u strukturu *RJESENJE*, dok ostala područja ostaju u strukturi koja se još mora promatrati (*LISTA*).

Ako za neko od područja iz radne strukture *LISTA* nismo pronašli neosmotrivo područje prema (5-24) – (5-26), potrebno je provjeriti da li je to područje ili dio tog područja osmotrivo prema (5-28) – (5-30).

Nakon što su pronađena sva neosmotriva i osmotriva područja uz ovaj horizont, horizont se povećava te se postupak ponavlja sve do unaprijed zadanog željenog horizonta. Kada je neko područje osmotrivo uz manji horizont *T*, ono sigurno neće postati neosmotrivo uz veći *T*.

5.6. ALGORITAM

1. potrebno je kretati se po svim dinamikama varijable $\hat{x}$
   - 1.1. i po svim dinamikama parametra x
     - 1.1.1. definirati matrice potrebne za mp-LP: c, A_{eq}, B_{eq}, F_{eq}, A_{ineq}, B_{ineq}, F_{ineq} za n prošlih vrijednosti ulaza, takve da sljedeća vrijednost varijabli stanja bude unutar početno zadanog politopa,
     - 1.1.2. ako postoje jednadžbe potrebno ih je riješiti, zbog korištenog alata za rješavanje mp-LP koji prihvaća samo nejednadžbe ,
     - 1.1.3. riješiti mp-LP,
     - 1.1.4. za svako od rješenja mp-LP provjeriti da li je $x = \hat{x}$:
       - 1.1.4.1. ako to vrijedi → rješenje mp-LP-a se sprema u strukturu RJESENJE,
       - 1.1.4.2. ako to ne vrijedi → rješenje mp-LP-a se sprema u strukturu LISTA.

2. ako postoji inicijalno rješenje, trenutačno promatrani horizont povećamo za jedan
   - 2.1. krećemo se po svim još neispitanim elementima iz strukture LISTA
     - 2.1.1. krećemo se po svim dinamikama $\hat{x}$ i po svim dinamikama x
       - 2.1.1.1. definirati matrice potrebne za mp-LP: c, A_{eq}, B_{eq}, F_{eq}, A_{ineq}, B_{ineq}, F_{ineq} za n prošlih vrijednosti ulaza tako da sljedeća vrijednost varijabli stanja bude unutar nekog politopa iz strukture LISTA,
       - 2.1.1.2. ako postoje jednadžbe potrebno ih je riješiti,

2.1.1.3. riješiti mp-LP,

2.1.1.4. svako od dobivenih područja iz ovog mp-LP je i dalje neosmotrivo, te ga stavljamo u strukturu LISTA,

2.1.1.5. naći politope koji su dio promatranog politopa iz LISTA, a koji nisu dobiveni mp-LP-om:

2.1.1.5.1. definirati matrice potrebne za mp-LP: c, A_{eq}, B_{eq}, F_{eq}, A_{ineq}, B_{ineq}, F_{ineq} za n prošlih vrijednosti ulaza, takve da sljedeća vrijednost varijabli stanja bude unutar nekog već postojećeg rješenja,

2.1.1.5.2. riješiti jednadžbe,

2.1.1.5.3. riješiti mp-LP,

2.1.1.5.4. za svako od rješenja mp-LP provjeriti da li je $x = \hat{x}$:

2.1.1.5.4.1. ako to vrijedi → rješenje mp-LP-a se sprema u strukturu RJESENJE,

2.1.1.5.4.2. ako to ne vrijedi → rješenje mp-LP-a se sprema u strukturu LISTA;

2.1.1.5.5. preostala područja zapamtimo u strukturi LISTA;

2.1.2. ako nije pronađeno rješenje mp-LP iz 2.1.1.5.3., krećemo se po svim dinamikama $\hat{x}$ i x,

2.1.2.1. definirati matrice potrebne za mp-LP: c, A_{eq}, B_{eq}, F_{eq}, A_{ineq}, B_{ineq}, F_{ineq} za n prošlih vrijednosti ulaza, takve da sljedeća vrijednost varijabli stanja bude unutar nekog već postojećeg rješenja,

2.1.2.2. riješiti jednadžbe,

2.1.2.3. riješiti mp-LP,

2.1.2.4. za svako od rješenja mp-LP provjeriti da li je $x = \hat{x}$:

2.1.2.4.1. ako to vrijedi → rješenje mp-LP-a se sprema u strukturu RJESENJE,

2.1.2.4.2. ako to ne vrijedi → rješenje mp-LP-a se sprema u strukturu LISTA,

2.1.2.5. preostala područja zapamtimo u strukturi LISTA.

6. PRIMJER

6.1. OSMOTRIVOST POMOĆU mp – MILP-a

Uspješnost opisanog postupka u pronalaženju područja osmotrivosti pokazat ćemo na jednostavnom primjeru, čija se područja lako pronađu i bez računala. Uspješnost implementiranja ovih algoritama pokazana je i na temelju poklapanja rezultata s člankom ([11], [16]).

Neka je PWA sustav zadan jednadžbama ([8]):

$$x(t+1) = \begin{cases} x(t) & za \quad |x(t)| \le 2, \\ \frac{1}{2}x(t) & za \quad |x(t)| \ge 2+\varepsilon, \end{cases} \tag{6-1}$$

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & za \quad |x(t)| \le 2, \\ 0 & za \quad |x(t)| \ge 2+\varepsilon, \end{cases} \tag{6-2}$$

gdje je ε mala pozitivna tolerancija, a varijabla stanja x se nalazi unutar područja $[-10,10]$. Promatrat ćemo razvoj sustava na vremenskom horizontu $T=3$.

Prvi korak u traženju područja osmotrivosti je ovaj sustav pretvoriti u MLD oblik, pomoću (2-4)-(2-17), odnosno (2-21)-(2-27). Prikaz koda u HYSDEL–u dan je u Dodatku 1.

Ovaj sustav u MLD obliku sadrži jednu varijablu stanja, pet pomoćnih logičkih varijabli, i šest pomoćnih kontinuiranih varijabli. Ulaz u sustav ne postoji, već sve ovisi o početnom stanju sustava. Nakon pretvorbe, MLD sustav posjeduje 34 nejednadžbe uvjeta. Same matrice dane su u Dodatku 2.

Sljedeći korak je pronaći trajektorije varijabli uz zadani vremenski horizont prema (2-28). Dobivene matrice su sljedećih dimenzija: $\widetilde{A}(3\times1)$, $\widetilde{B}_1(3\times0)$, $\widetilde{B}_2(3\times15)$, $\widetilde{B}_3(3\times18)$, $\widetilde{C}(3\times1)$, $\widetilde{D}_1(3\times0)$, $\widetilde{D}_2(3\times15)$, $\widetilde{D}_3(3\times18)$, $\widetilde{E}_1(102\times0)$, $\widetilde{E}_2(102\times15)$, $\widetilde{E}_3(102\times18)$, $\widetilde{E}_4(102\times1)$, $\widetilde{E}_5(102\times1)$. Sada imamo *102* nejednadžbe uvjeta, *15* pomoćnih logičkih i *18* pomoćnih kontinuiranih varijabli, te znamo tri prošle vrijednosti stanja i izlaza.

Prije pokretanja samog postupka mp – MILP-a, potrebno je još izračunati matrice koje predstavljaju uvjete, te vektore funkcije cilja. Kako ovaj primjer posjeduje samo jednu varijablu stanja, postojat će samo jedan parametar $\theta = x$. Varijable $U(T),\Delta(T),\hat{\Delta}(T),Z(T),\hat{Z}(T)$, uz vremenski horizont *T=3*, podijelit ćemo na kontinuirane $v_k = \lfloor \hat{x}' \quad U(T)' \quad Z(T)' \quad \hat{Z}(T)' \quad \eta' \rfloor$ i logičke $v_d = \lfloor \Delta(T)' \quad \hat{\Delta}(T)' \quad \mu' \rfloor$. Prema (4-16), (4-17) i (4-18), matrice za pokretanje mp – MILP–a za ovaj primjer su dimenzija:

$$A_{ineq}\,(210\times38),\ E_{ineq}\,(210\times31),\ B_{ineq}\,(210\times1),\ F_{ineq}\,(210\times1),$$
$$A_{eq}\,(3\times38),\ E_{eq}\,(3\times31),\ B_{eq}\,(3\times1),\ F_{eq}\,(3\times1),$$
$$c\ (38\times1),\ d\ (31\times1).$$

Sam proračun osmotrivih područja proveden je na računalu s AMD Athlon XP 1500+, 1.33 GHz, 240 MB RAM-a, u programskom jeziku Matlab v7.0.1, koristeći Multi-Parametric Toolbox v2.5 ([12]). Kao sredstvo za rješavanje linearnih programa korišten je NAG ([21]). Proračun je trajao oko dvije minute, naizgled mnogo, no očekivano zbog postojanja velikog broja jednadžbi koje je trebalo riješiti, zbog velikog broja nejednadžbi koje ostaju kao uvjeti, a prvenstveno zbog velikog broja varijabli.

Rješenjem mp–MILP-a pronađeno je *7* ostvarivih područja, te za svaku od njih vrijednost funkcije cilja, i ovisnost svake varijable o parametru. Kako nas zanima samo ovisnost varijable $\hat{x}(x)$, dobivena rješenja, samo za ovu varijablu glase:

Tablica 6.1. Ostvariva područja dobivena iz mp – MILP-a.

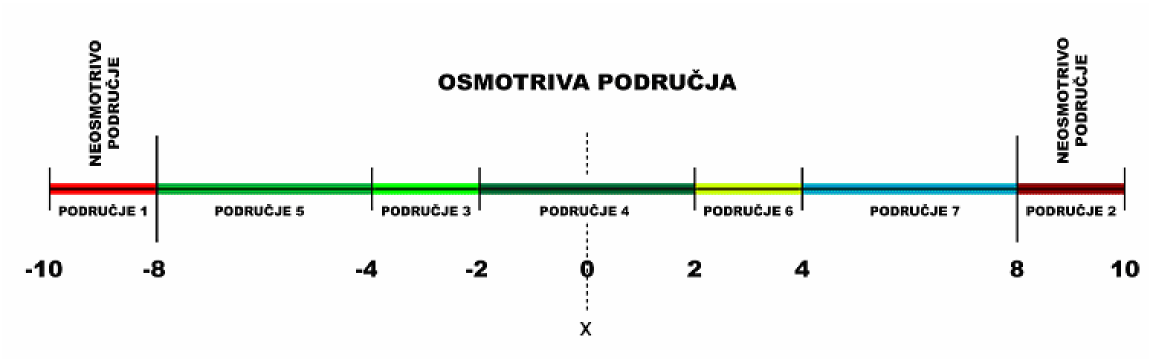
Područje 1	Područje 2	Područje 3	Područje 4
$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}10\\-8-4\varepsilon\end{bmatrix}$ $\hat{x}=10$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}10\\-8-4\varepsilon\end{bmatrix}$ $\hat{x}=-10$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}-2-\varepsilon\\4\end{bmatrix}$ $\hat{x}=x$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ $\hat{x}=x$

Područje 5	Područje 6	Područje 7
$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}-4-2\varepsilon\\8\end{bmatrix}$ $\hat{x}=x$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}-2-\varepsilon\\4\end{bmatrix}$ $\hat{x}=x$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}-4-2\varepsilon\\8\end{bmatrix}$ $\hat{x}=x$

Promatranjem vrijednosti dobivenih za parametre, vidimo da je u nekim slučajevima parametar upravo jednak varijabli $\hat{x}$. Za takva područja kažemo da su osmotriva. Osim toga, vidljivo je da između područja postoje mali prekidi nastali zbog same definicije problema (6-1) – (6-2), tj. postojećih područja za koje dinamika sustava nije definirana. Ukupno osmotrivo područje je prema tome:

$$\overline{O}_T = [-8,8] \setminus \{]4, 4+2\varepsilon[\cup]2, 2+\varepsilon[\cup]-2-\varepsilon, -2[\cup]-4-2\varepsilon, -4[\}. \qquad (6\text{-}3)$$

Na slici 6.1. prikazana su dobivena područja iz mp – MILP (označeno raznim bojama od područja 1 do područja 7), kao i dobivena osmotriva područja (područja 3 do područja 7). Područja 1 i 2 su neosmotriva, pa dakle na temelju izlaza iz sustava na horizontu *T=3* ne možemo razlučiti stanje na početku horizonta. Na granici između svaka dva ostvariva područja postoji vrlo malo neostvarivo područje prema tablici 6.1.



Sl. 6.1. Ostvariva područja iz mp – MILP-a, te osmotriva područja.

Dobiveno rješenje je i logično, jer za parametre $x < -8 - 4\varepsilon$ ili $x > 8 + 4\varepsilon$, na vremenskom horizontu *T=3*, ne možemo doći u područje $x \in [-2{,}2]$, u kojemu je izlaz različit od nule. Kako će za bilo koju vrijednost parametra (stanje sustava) izabranog iz jednog od tih područja, izlazi biti uvijek nula, ne može se razlučiti koje stanje je na početku horizonta, da li je to npr. 9.5 ili 8.72. Za sva ostala stanja iz osmotrivog područja, uvijek će se doći u područje $x \in [-2{,}2]$. Prema tome, i izlaz će biti različit od nule, ovisit će o trenutačnom stanju, te će se na temelju toga moći razlučiti koje je stanje na početku horizonta.

6.2. DINAMIČKI PRORAČUN OSMOTRIVOSTI

U prethodnom potpoglavlju nađene su regije osmotrivosti koristeći mp-MILP za PWA sustav (6-1), (6-2) uz horizont *T=3*. Promotrimo sada isti taj sustav, proračunajmo područja osmotrivosti koristeći dinamičko programiranje. U ovom pristupu nije potrebno pretvarati zadani sustav u MLD model, i samim time je izbjegnuto korištenje matrica velikih dimenzija.

U inicijalnom koraku, uz *T=1*, potrebno je naći ona područja za koja smo sigurni da su osmotriva. Koristeći sve kombinacije dinamika x i $\hat{x}$ za definiranje matrica jednadžbi i nejednadžbi potrebnih za proračun mp-LP-a, u samo tri slučaja zadani mp-LP je ostvariv. Pri tome su dobiveni politopi i vrijednosti varijabli u ovisnosti o parametru prema tablici 6.2.

Tablica 6.2. Ostvariva područja za inicijalni korak.

Područje 1_1	**Područje 2_1**	**Područje 3_1**
$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}10\\-2-\varepsilon\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\hat{x}\\u\\\varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot x + \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}-2-\varepsilon\\10\end{bmatrix}$

Kako je vidljivo, u tablici jedino područje u kojem je zadovoljen uvjet osmotrivosti $x = \hat{x}$, (5-20), je drugo područje, te njega pamtimo u strukturi RJESENJE, dok ostala dva područja moramo istražiti dalje. Ovo područje je dakle, jedino osmotrivo područje uz horizont *T=1*.

Sada se horizont povećava za jedan, *T=2*, te se unutar područja 1 i područja 3 traže dijelovi koji su sigurno i dalje neosmotrivi, oni se pamte, kako bi se u sljedećem koraku mogli dalje proučavati (tablica 6.3.). Za preostale dijelove ispituje se da li su osmotrivi, tj. da li zadovoljavaju uvijet (5-20). Ona područja koja ga zadovoljavaju pamtimo u strukturi RJESENJE, a dana su u tablici 6.4.

Tablica 6.3. Neosmotriva područja uz *T=2*.

Područje 1_2	**Područje 2_2**
$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}10\\-4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}-4\\10\end{bmatrix}$

Tablica 6.4. Osmotriva područja dobivena u drugom koraku.

Područje 3_2	**Područje 4_2**
$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}-2-\varepsilon\\4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\hat{x}\\u\\\varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot x + \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}-2-\varepsilon\\4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\hat{x}\\u\\\varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot x + \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

Nakon ponovnog povećanja trenutačnog horizonta za jedan, *T=3*, neosmotriva područja iz prošlog koraka se ponovno istražuju, da li će sada neki njihov dio postati osmotriv. I u ovom koraku se prvo traže područja koja sigurno nisu osmotriva (tablica 6.5.), a iz dijelova koji ostanu traže se ona koja zadovoljavaju uvjete (5-20) (tablica 6.6.).

Tablica 6.5. Neosmotriva područja uz *T=3*.

Područje 1_3	**Područje 2_3**
$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \end{bmatrix}$

Tablica 6.6. Osmotriva područja dobivena u trećem koraku.

Područje 3_3	**Područje 4_3**
$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} -4-2\varepsilon \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} -4-2\varepsilon \\ 8 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ u \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ u \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Na temelju tablica 6.2. – 6.6. možemo utvrditi da su osmotriva područja uz *T=3* područja 2_1, 3_2, 4_2, 3_3, 4_3, odnosno matematički zapisano:

$$\overline{O}_T = [-8,8] \setminus \{]4,4+2\varepsilon[\cup]2,2+\varepsilon[\cup]-2-\varepsilon,-2[\cup]-4-2\varepsilon,-4[\}. \qquad (6\text{-}4)$$

Usporedimo li ovo rješenje s rješenjem dobivenim korištenjem mp – MILP-a danim u (6-3), vidljivo je da se rješenja u potpunosti poklapaju, te se izvodi zaključak da su dobivena područja zaista osmotriva. Valja još istaknuti kako je proračun dinamičkim programiranjem proveden na istom računalu kao i proračun pomoću mp – MILP-a, no ovom metodom on je trajao 10 sekundi, što je znatno kraće vrijeme.

7. ZAKLJUČAK

U ovom radu teoretski su prikazana i praktično demonstrirana dva načina traženja područja osmotrivosti za vremenski diskretne po dijelovima afine sustave (engl. PieceWise Affine, PWA). U prvom pristupu krenulo se od PWA modela, a njegovim pretvaranjem u ekvivalentni model s miješanim kontinuiranim i logičkim varijablama (engl. Mixed – Logical Dynamical, MLD model), omogućen je proračun višeparametarskog linearnog programa s miješanim varijablama (engl. Multiparametric Mixed Integer Linear Programming, mp – MILP), koji daje područja osmotrivosti sustava. U drugom pristupu krenulo se također od PWA oblika, ali se nije obavljala pretvorba u MLD oblik, već su se krenuvši od horizonta *1*, te njegovim postupnim povećavanjem do unaprijed zadanog željnog horizonta, tražila osmotriva područja pomoću višeparametarskog linearnog programa (engl. Multiparametric Linear Program, mp – LP).

Na jednostavnom primjeru pokazana je funkcionalnost opisanih algoritama u programskom paketu Matlab, koristeći Multi-Parametric Toolbox. Ustanovljeno je da se koristeći dinamičko programiranje puno intuitivnije i brže mogu pronaći područja osmotrivosti sustava.

DODATAK 1.

Prikaz koda za primjer (6-1) - (6-2) u HYSDEL-u.

```
SYSTEM osmotrivost {
   INTERFACE {
        STATE {
            REAL x[-10,10];}
        OUTPUT {
            REAL y;}
        PARAMETER {
            REAL rub=2, min=-10, Max=10;}
   } /* kraj interface */

   IMPLEMENTATION {

        AUX {
            BOOL d1,d2a,d2b,d2,d3;
            REAL z1,z2,z3,yz1,yz2,yz3; }

        AD{
            d1 = x+(rub) <= 0;
            d2a = x-rub <= 0;
            d2b = -x-rub <= 0;
            d3 = -x+(rub) <= 0;}

        LOGIC {
            d2=d2a & d2b; }

        DA {
            z1={IF d1 THEN 0.5*x};
            z2={IF d2 THEN x};
            z3={IF d3 THEN 0.5*x};
            yz1={IF d1 THEN 0};
            yz2={IF d2 THEN x};
            yz3={IF d3 THEN 0};}

        CONTINUOUS{
            x=z1+z2+z3;}

        MUST{
            x-Max<=0;
            x-min>=0;
            (REAL d1) + (REAL d2) + (REAL d3) <= 1; }

        OUTPUT {
            y=yz1+yz2+yz3; }

   } /* kraj implementation */
} /* kraj system */
```

DODATAK 2.

Matrice u MLD obliku primjera (6-1) – (6-2):

$A = [0]$,

B_1 = prazna matrica, 1×0,

$B_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$,

$B_3 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$,

$C = [0]$,

D_1 = pra zna matrica, 1×0,

$D_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$,

$D_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$,

E_1 = prazna matrica, 34×0, ,

$$E_2 = \begin{bmatrix} -8.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8.00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12.00 \\ 0 & 1.00 & 1.00 & -1.00 & 0 \\ 0 & -1.00 & 0 & 1.00 & 0 \\ 0 & 0 & -1.00 & 1.00 & 0 \\ 5.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.00 \\ 0 & 0 & 0 & 10.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.00 & 0 & 0 & 1.00 & 1.00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \\ 10 \\ -2 \\ 10 \\ 2 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

LITERATURA

[1] M. Baotić. Optimal Control of PieceWise Affine Systems – A Multi–Parametric Approach. Doktorska disertacija, ETH, Zürich, 2005. control.ee.ethz.ch/index.cgi?page=publications

[2] M. Barić, J. Löfberg, H. Peyrl, I. Fotiou, M. Morari. MPC for Constrained Linear Systems. An Explicit Solution. Predavanja iz MPC, ETH Zürich, 2005.

[3] A. Bemporad, M. Morari. Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. Automatica 35(3):407-427, March 1999.

[4] F. Borrelli. Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2003, vol. 290.

[5] S. Boyd. Basic on Optimization. 2005. www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxslides.pdf

[6] S. Boyd, L. Vandenberghe. Convex Optimization. Cambridge University Press, UK, 2004.

[7] V. Dua, E. N. Pistikopoulos. An Algorithm for the Solution of Multiparametric Mixed Integer Linear Programming Problems. Annals of Operations Research 99, 123-139, 2000.

[8] G. Ferrari – Trecate, M. Gati. Computation Observability Regions for Discrete – Time Hybrid Systems. Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii USA, 1153-1158, 2003.

[9] G. Ferrari Trecate, P. Letizia, M. Spedicato. Optimization with piecewise - affine cost functions. Technical Report AUT01-13, 2001.

[10] E. Galligani, L. Zanni. On the Stability of the Direct Elimination Method for Equality Constrained Least Squares Problems. Computing 64: 263-277, 2000.

[11] M. Gati, G. Ferrari – Trecate. Computation of Observability Regions for Piecewise Affine Systems: A Projection–Based Algorithm. 44. IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference, 6922-6927, 2005.

[12] M. Kvasnica, P. Grieder, M. Baotić, F. J. Christophersen. Multi – Parametric Toolbox (MPT), ETH, Zürich, 2005.
`control.ee.ethz.ch/~mpt`

[13] M. Morari, M. Baotić, F. Christophersen, T. Geyer, P. Grieder, M. Kvasnica, G. Papafotiou. Controlling Hybrid Systems - from Theory to Application. ETH, Zürich, 2005.
`www.dii.unisi.it/cohes/cc/meetings/zurich05/`
`/CC_Review_2005_ETH.pdf`

[14] M. Morari, M. Barić, I. Fotiou, J. Löfberg, H. Peyrl. Model Predictive Control. Predavanja iz MPC, ETH Zürich, 2005.

[15] M. Morari, J.H. Lee, C. E. Garcia. Model Predictive Control. Predavanja iz MPC, ETH, Zürich, 2000.

[16] J.Spjøtvold. Multi-parametric Mixed–Integer Linear Programming and Optimal Control. Doktorska disertacija, NTNU, Trondheim, Norveška, 2003.

[17] P. Tøndel. Constrained Optimal Control via Multiparametric Quadratic Programming. Doktorska disertacija, NTNU, Trondheim, Norveška, 2003.

[18] F. D. Torrisi, A. Bemporad, G. Bertini, P. Hertach, D. Jost, D. Mignone. HYSDEL 2.0.5 – User Manual, 2002.
`control.ee.ethz.ch/~hybrid/hysdel`

[19] M. Vašak. Hibridni model prigušnog ventila za regulaciju dotoka zraka u motor automobila. Studentski rad za natječaj za Rektorovu nagradu, FER, Zagreb, 2002.

[20] M. Vašak. Eksplicitni oblik modelskog prediktivnog upravljanja hibridnim sustavima. Diplomski rad, FER, Zagreb, 2003.

[21] `www.nag.co.uk`

[22] F. Borrelli, M. Baotić, A. Bemporad, M. Morari. Dynamic programming for constrained optimal control of discrete–time linear hybrid systems, Automatica 41: 1709 – 1721, 2005.

POPIS STRANIH RIJEČI

Observability Regions for PieceWise Affine Systems

Keywords: PieceWise Affine (PWA), Mixed-Logical Dynamical (MLD), Linear Program (LP), Mixed Integer Linear Program (MILP), Multiparametric Linear Programming (mp–LP), Multiparametric Mixed Integer Linear Programming (mp–MILP), well – posed, Hybrid Systems Description Language (HYSDEL), cost function, inequality constraints, equality constraints, unconstrained, feasible point, infeasible point.