

SADRŽAJ

SADRŽAJ	1
POPIS SLIKA	5
POPIS OZNAKA I KRATICA	10
1 UVOD	13
2 SIGNALI	14
2.1 Svrstavanje signala	14
2.1.1 Digitalni signali	15
2.1.2 Analogni DC signal	15
2.1.3 Analogni AC signal	16
2.1.4 Analogni signali u frekvencijskom području	16
2.2 Uzimanje uzoraka signala	17
2.2.1 Rezolucija	18
2.2.2 Nyquistov teorem	19
2.2.3 Analogni filteri	22
2.2.4 Decibeli	23
2.2.5 Mjerni transformatori	24
2.2.6 Zaštitni krugovi	24
2.2.7 Analogni multipleksor	25
2.2.8 Krugovi za uzimanje uzoraka signala	26
2.3 Sažetak	27
3 METODE KONAČNIH RAZLIKA	29
3.1 Diferencijalne funkcije naprijed, nazad i centralna	29
3.2 Operator pomaka E i operator prosjeka μ	31
4 INTERPOLACIJSKE FORMULE	33
4.1 Newtonov interpolacijski polinom	33
4.1.1 Interpolacija naprijed	34
4.1.2 Interpolacija nazad	36
4.1.3 Centralna interpolacija	37
5 NUMERIČKO DERIVIRANJE	38
6 NUMERIČKO INTEGRIRANJE	41
6.1 Newton-Cotesove formule	41
7 FUNKCIJSKI OPIS MJERENIH TOČAKA	44
7.1 Metoda najmanjih kvadrata	44
7.2 Primjene funkcijskog opisa izmjerenih podataka	47
8 FOURIEROVA ANALIZA	48
8.1 Fourierov red	49
8.1.1 Trigonometrijski oblik	49
8.1.2 Kompleksni oblik	50

8.2	Fourierova transformacija	50
8.3	Fourier u diskretnom obliku	52
8.3.1	Frekvencijski razmak među uzorcima signala	55
8.3.2	Brza Fourierova transformacija (FFT)	57
8.3.3	Dodavanje nula	57
8.3.4	Primjer diskretne Fourierove analize	57
8.3.5	Sažetak	58
9	UOKVIRIVANJE SIGNALA	59
9.1	Funkcije okvira	62
9.1.1	Pravokutni okvir	62
9.1.2	Hanningov okvir	62
9.1.3	Hammingov okvir	63
9.1.4	Kaiser-Besselov okvir	63
9.1.5	Trokutasti okvir	64
9.1.6	Flattop okvir	65
9.1.7	Eksponencijalni okvir	65
9.2	Primjer korištenja okvira	66
10	DIGITALNI FILTERI	67
10.1	Idealni filteri	67
10.2	Realni filteri	68
10.3	Prednosti digitalnih filtera nad analognima	69
10.4	IIR i FIR filteri	70
10.4.1	Koeficijenti filtera	71
10.4.2	Prednosti i mane FIR i IIR filtera	71
10.5	IIR filteri	72
10.5.1	Butterworth filteri	72
10.5.2	Chebyshevi filteri	73
10.5.3	Chebyshevi II ili inverzni Chebyshevi filteri	73
10.5.4	Eliptični filteri	74
10.6	Prijelazni odziv IIR filtera	75
10.7	FIR filteri	75
10.8	Primjeri korištenja digitalnih filtera	76
11	GENERATOR SIGNALA	77
11.1	Propuštanje generiranog signala kroz algoritme zaštite	78
12	SINUSNI ALGORITMI	80
12.1	Uzorak i prva derivacija s dvije točke	80
12.1.1	Izvod algoritma	80
12.1.2	Analiza rada algoritma	83
12.2	Uzorak i prva derivacija sa tri točke	86
12.2.1	Izvod algoritma	86
12.2.2	Analiza rada algoritma	86
12.3	Algoritam s prvom i drugom derivacijom	88

12.3.1	Izvod algoritma _____	88
12.3.2	Analiza rada algoritma _____	90
12.4	Algoritam s dva uzorka bez derivacije _____	92
12.4.1	Izvod algoritma _____	92
12.4.2	Analiza rada algoritma _____	93
12.5	Algoritam s tri uzorka bez derivacije _____	94
12.5.1	Izvod algoritma _____	94
12.5.2	Analiza rada algoritma _____	95
12.6	R i X sa tri uzorka _____	96
12.6.1	Izvod algoritma _____	96
12.6.2	Analiza rada algoritma _____	97
13	<i>FOURIEROVI ALGORITMI</i> _____	98
13.1	Fourierov red s cijelim periodom _____	98
13.1.1	Izvod algoritma _____	98
13.1.2	Analiza rada algoritma _____	101
13.2	Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom _____	103
13.2.1	Izvod algoritma _____	103
13.2.2	Analiza rada algoritma _____	105
13.3	Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom _____	107
13.3.1	Izvod algoritma _____	107
13.3.2	Analiza rada algoritma _____	109
13.4	Fourierov red s pola perioda _____	111
13.4.1	Izvod algoritma _____	111
13.4.2	Analiza rada algoritma _____	113
13.5	FFT algoritam _____	115
13.5.1	Izvod algoritma _____	115
13.5.2	Analiza rada algoritma _____	116
14	<i>ALGORITMI NAJMANJIH KVADRATA</i> _____	119
14.1	Algoritam najmanjih kvadrata s generalnim polinomskim oblikom _____	119
14.1.1	Izvod algoritma _____	119
14.1.2	Analiza rada algoritma _____	122
14.2	LSQ 1, 3 Algoritam s više varijabli _____	124
14.2.1	Izvod algoritma _____	124
14.2.2	Analiza rada algoritma _____	127
14.3	LSQ 1, 3, 5 Algoritam s više varijabli _____	129
14.3.1	Izvod algoritma _____	129
14.3.2	Analiza rada algoritma _____	130
14.4	LSQ 1, 3, 5, 7 Algoritam s više varijabli _____	131
14.4.1	Izvod algoritma _____	131
14.4.2	Analiza rada algoritma _____	132
15	<i>ALGORITMI NA PRINCIPU MODELA ŠTIĆENOG ELEMENTA</i> _____	133
15.1	Zemljospoj faze _____	135
15.2	Dvofazni i trofazni kvarovi _____	136

15.3	Rezultati razmatranja jednadžbi voda	136
15.4	Algoritam dobiven integriranjem diferencijalne jednadžbe	137
15.4.1	Izvod algoritma	137
15.4.2	Analiza rada algoritma	138
15.5	Algoritam s filtriranim trećim harmonikom	140
15.5.1	Izvod algoritma	140
15.5.2	Analiza rada algoritma	144
15.6	Algoritam dobiven rješavanjem diferencijalne jednadžbe	146
15.6.1	Izvod algoritma	146
15.6.2	Analiza rada algoritma	148
16	RAD ALGORITAMA U REALNOM VREMENU	151
16.1	Realno vrijeme	151
16.1.1	Vrijeme kontrolne petlje	151
16.1.2	Determinizam	152
16.1.3	Odstupanje	152
16.1.4	Kruti i elastični sustavi u realnom vremenu	152
16.2	Operacijski sustavi u realnom vremenu	152
16.3	Sklopovlje i programska podrška u realnom vremenu	153
16.4	Algoritmi u realnom vremenu	153
16.4.1	Sustav za mjerenje i digitalnu obradu signala	153
16.4.2	Izgled signala i algoritma	156
16.4.2.1	Sinusni algoritmi	157
16.4.2.2	Fourierovi algoritmi	158
16.4.2.3	Algoritmi najmanjih kvadrata	159
16.4.2.4	Algoritmi na principu modela šticeenog elementa	160
16.4.3	Sažetak	161
17	PROVJERA RADA ALGORITAMA PRI KRATKOM SPOJU	162
17.1	Simulirani kratki spoj	162
17.1.1	Sinusni algoritmi	162
17.1.2	Fourierovi algoritmi	164
17.1.3	Algoritmi najmanjih kvadrata	165
17.1.4	Algoritmi na principu modela šticeenog elementa	167
17.2	Pravi kratki spoj	168
17.2.1	Sinusni algoritmi	169
17.2.2	Fourierovi algoritmi	170
17.2.3	Algoritmi najmanjih kvadrata	173
18	ZAKLJUČAK	175
	POPIS LITERATURE	177
	DODATAK	180
	SAŽETAK	192
	SUMMARY	193
	ŽIVOTOPIS	<i>Error! Bookmark not defined.</i>

POPIS SLIKA

<i>Slika 2-1</i> Podjela signala	15
<i>Slika 2-2</i> Analogni signal prije i poslije mjerenja	18
<i>Slika 2-3</i> Rezolucija AD pretvornika	19
<i>Slika 2-4</i> Ovisnost izgleda snimljenog signala o f_s	19
<i>Slika 2-5</i> Frekvencijske komponente signala	20
<i>Slika 2-6</i> Frekvencijske komponente signala kako ih vidi računalo	20
<i>Slika 2-7</i> Izgled signala ovisno o f_s	21
<i>Slika 2-8</i> Odziv idealnog i realnog filtera	22
<i>Slika 2-9</i> Analogni filter	23
<i>Slika 2-10</i> Zaštitni krug	25
<i>Slika 2-11</i> Dva načina spajanja multipleksora, pojačala i filtera	26
<i>Slika 2-12</i> Šematski prikaz sklopa za uzimanje uzoraka	26
<i>Slika 2-13</i> Blok prikaz sustava za mjerenje i digitalnu obradu signala	28
<i>Slika 7-1</i> Metoda najmanjih kvadrata	45
<i>Slika 8-1</i> Prikaz signala u vremenskoj i frekvencijskoj domeni	48
<i>Slika 8-2</i> Odnos broja uzoraka u vremenskoj i frekvencijskoj domeni	52
<i>Slika 8-3</i> Uzorci DC signala	53
<i>Slika 8-4</i> Parna i neparna simetrija	55
<i>Slika 8-5</i> Prikaz signala u frekvencijskoj domeni za paran broj uzoraka	56
<i>Slika 8-6</i> Prikaz signala u frekvencijskoj domeni za neparan broj uzoraka	56
<i>Slika 8-7</i> Dodavanje nula	57
<i>Slika 9-1</i> Signal kako ga vidi DFT	59
<i>Slika 9-2</i> Nema curenja frekvencije	60
<i>Slika 9-3</i> Javlja se curenje frekvencije	60
<i>Slika 9-4</i> Signal pomnožen sa Hammingovim okvirom	61
<i>Slika 9-5</i> Pravokutni okvir	62
<i>Slika 9-6</i> Hanningov okvir	63
<i>Slika 9-7</i> Hammingov okvir	63
<i>Slika 9-8</i> Kaiser-Besselov okvir	64
<i>Slika 9-9</i> Trokutasti okvir	65
<i>Slika 9-10</i> Flattop okvir	65
<i>Slika 9-11</i> Eksponencijalni okvir	66
<i>Slika 10-1</i> Idealan frekvencijski odziv raznih tipova filtera	67
<i>Slika 10-2</i> Područja propuštanja i nepropuštanja	67
<i>Slika 10-3</i> Prolaz signala kroz razne filtere	68
<i>Slika 10-4</i> Prikaz raznih područja filtera	69
<i>Slika 10-5</i> Impulsni i frekvencijski odziv filtera	70
<i>Slika 10-6</i> Odziv Butterworth filtera	73
<i>Slika 10-7</i> Odziv Chebyshevog filtera	73
<i>Slika 10-8</i> Odziv Chebyshevog inverznog filtera	74
<i>Slika 10-9</i> Odziv eliptičnog filtera	74
<i>Slika 10-10</i> Vrijeme kašnjenja IIR filtera	75
<i>Slika 10-11</i> Frekvencijski odziv FIR filtera	76
<i>Slika 11-1</i> Sučelje generatora signala	77
<i>Slika 11-2</i> Šematski prikaz rada releja	79
<i>Slika 12-1</i> Samo osnovni signal od 50 Hz	83
<i>Slika 12-2</i> Osnovni i istosmjerni prigušujući signal	84

<i>Slika 12-3 Osnovni signal i drugi harmonik</i>	84
<i>Slika 12-4 Visokofrekventni šum u osnovnom signalu</i>	85
<i>Slika 12-5 Osnovni signal od 50 Hz</i>	86
<i>Slika 12-6 Osnovni i istosmjerni neprigušujući signal</i>	87
<i>Slika 12-7 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal</i>	87
<i>Slika 12-8 Osnovni signal i treći harmonik</i>	88
<i>Slika 12-9 Osnovni signal od 50 Hz</i>	90
<i>Slika 12-10 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal</i>	91
<i>Slika 12-11 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal</i>	91
<i>Slika 12-12 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal</i>	94
<i>Slika 12-13 Osnovni harmonik struje i napona</i>	97
<i>Slika 13-1 Osnovna komponenta signala</i>	101
<i>Slika 13-2 Osnovni, drugi i treći harmonik</i>	102
<i>Slika 13-3 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal</i>	102
<i>Slika 13-4 Frekvencijski odziv algoritma</i>	103
<i>Slika 13-5 Osnovni signal frekvencije 50 Hz</i>	106
<i>Slika 13-6 Osnovni signal i treći harmonik</i>	106
<i>Slika 13-7 Visokofrekventni šum</i>	106
<i>Slika 13-8 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal</i>	107
<i>Slika 13-9 Osnovni signal i peti harmonik</i>	109
<i>Slika 13-10 Osnovni, peti i sedmi harmonik</i>	110
<i>Slika 13-11 Osnovni i peti harmonik plus istosmjerna komponenta</i>	110
<i>Slika 13-12 Osnovna komponenta signala 50 Hz</i>	113
<i>Slika 13-13 Osnovni, treći i peti harmonik</i>	113
<i>Slika 13-14 osnovni i drugi harmonik</i>	114
<i>Slika 13-15 Frekvencijski odziv algoritma</i>	114
<i>Slika 13-16 Osnovna i istosmjerna komponenta signala</i>	115
<i>Slika 13-17 Blok šema FFT algoritma</i>	116
<i>Slika 13-18 Rad FFT algoritma</i>	117
<i>Slika 13-19 Uz harmonike je prisutan i istosmjerni signal</i>	117
<i>Slika 14-1 Blok šema algoritma</i>	121
<i>Slika 14-2 Osnovni signal frekvencije 50 Hz</i>	122
<i>Slika 14-3 Osnovni i istosmjerni signal</i>	123
<i>Slika 14-4 Osnovni signal i treći harmonik</i>	123
<i>Slika 14-5 Visokofrekventni šum</i>	123
<i>Slika 14-6 Princip rada algoritma</i>	125
<i>Slika 14-7 Osnovni i treći harmonik</i>	127
<i>Slika 14-8 Osnovni, treći i peti harmonik</i>	127
<i>Slika 14-9 Osnovni i treći harmonik plus istosmjerna komponenta</i>	128
<i>Slika 14-10 Visokofrekventni šum</i>	128
<i>Slika 14-11 Osnovni treći i peti harmonik</i>	130
<i>Slika 14-12 Osnovni, treći, peti i sedmi harmonik</i>	132
<i>Slika 15-1 Trofazni prijenosni vod prikazan pomoću otpora i induktiviteta</i>	133
<i>Slika 15-2 Faza voda prikazana pomoću otpora i induktiviteta</i>	137
<i>Slika 15-3 Osnovni harmonici napona i struje</i>	138
<i>Slika 15-4 Impedancija voda</i>	138
<i>Slika 15-5 Osnovni harmonik napona i osnovni i treći harmonik struje</i>	139
<i>Slika 15-6 Impedancija</i>	139
<i>Slika 15-7 Uz struju i napon prisutna je istosmjerna komponenta struje</i>	139
<i>Slika 15-8 Impedancija</i>	140

<i>Slika 15-9 Prikaz udaljenosti pojedinih točaka</i>	142
<i>Slika 15-10 Osnovni harmonici napona i struje</i>	144
<i>Slika 15-11 Impedancija</i>	144
<i>Slika 15-12 Osnovni harmonik napona i osnovni i treći harmonik struje</i>	145
<i>Slika 15-13 Impedancija</i>	145
<i>Slika 15-14 Faza voda prikazana pomoću otpora i induktiviteta</i>	146
<i>Slika 15-15 Pi šema voda</i>	147
<i>Slika 15-16 Osnovne komponente napona i struje</i>	148
<i>Slika 15-17 Impedancija</i>	149
<i>Slika 15-18 Osnovna komponenta napona i osnovni i treći harmonik struje</i>	149
<i>Slika 15-19 Impedancija</i>	149
<i>Slika 15-20 Uz struju i napon prisutna je istosmjerna komponenta struje</i>	150
<i>Slika 15-21 Impedancija</i>	150
<i>Slika 16-1 Sustav za mjerenje i digitalnu obradu signala korišten u ovom radu</i>	154
<i>Slika 16-2 Blok šema programske podrške za mjerenje signala</i>	155
<i>Slika 16-3 Izgled signala iz mreže</i>	156
<i>Slika 16-4 Frekvencijske komponente signala iz mreže</i>	156
<i>Slika 16-5 Algoritam uzorak i prva derivacija sa dvije točke $f_s=1000$ Hz</i>	157
<i>Slika 16-6 Algoritam uzorak i prva derivacija sa tri točke $f_s=1000$ Hz</i>	157
<i>Slika 16-7 Algoritam prva i druga derivacija $f_s=1000$ Hz</i>	157
<i>Slika 16-8 Algoritam prva i druga derivacija $f_s=500$ Hz</i>	157
<i>Slika 16-9 Algoritam dva uzorka bez derivacije $f_s=1000$ Hz</i>	157
<i>Slika 16-10 Algoritam dva uzorka bez derivacije $f_s=500$ Hz</i>	157
<i>Slika 16-11 Algoritam tri uzorka bez derivacije $f_s=1000$ Hz</i>	158
<i>Slika 16-12 Algoritam tri uzorka bez derivacije $f_s=500$ Hz</i>	158
<i>Slika 16-13 Algoritam Fourierov red s cijelim periodom $f_s=600$ Hz</i>	158
<i>Slika 16-14 Algoritam Fourierov red s cijelim periodom samo treći harmonik $f_s=600$ Hz</i>	158
<i>Slika 16-15 Algoritam Fourierov red s cijelim periodom samo peti harmonik $f_s=600$ Hz</i>	158
<i>Slika 16-16 Algoritam Fourierov red s pola perioda $f_s=600$ Hz</i>	158
<i>Slika 16-17 FFT algoritam $f_s=800$ Hz</i>	159
<i>Slika 16-18 Algoritam s generalnim polinomskim oblikom $f_s=1000$ Hz</i>	159
<i>Slika 16-19 LSQ 1, 3 algoritam s više varijabli $f_s=1000$ Hz</i>	159
<i>Slika 16-20 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli $f_s=1000$ Hz</i>	159
<i>Slika 16-21 LSQ 1, 3, 5, 7 algoritam s više varijabli $f_s=1000$ Hz</i>	159
<i>Slika 16-22 Integriranje diferencijalne jednadžbe voda $f_s=500$ Hz</i>	160
<i>Slika 16-23 Impedancija integrirane jednadžbe</i>	160
<i>Slika 16-24 Integriranje s filtriranim trećim harmonikom $f_s=500$ Hz</i>	160
<i>Slika 16-25 Impedancija integrirane jednadžbe s filtriranim trećim harmonikom</i>	160
<i>Slika 16-26 Rješavanje diferencijalne jednadžbe $f_s=500$ Hz</i>	160
<i>Slika 16-27 Impedancija dobivena rješavanjem diferencijalne jednadžbe</i>	160
<i>Slika 17-1 Uzorak i prva derivacija s dvije točke</i>	162
<i>Slika 17-2 Uzorak i prva derivacija s dvije točke</i>	162
<i>Slika 17-3 Uzorak i prva derivacija s tri točke</i>	162
<i>Slika 17-4 Uzorak i prva derivacija s tri točke</i>	162
<i>Slika 17-5 Algoritam s prvom i drugom derivacijom</i>	163
<i>Slika 17-6 Algoritam s prvom i drugom derivacijom</i>	163
<i>Slika 17-7 Algoritam s dva uzorka bez derivacije</i>	163
<i>Slika 17-8 Algoritam s dva uzorka bez derivacije</i>	163
<i>Slika 17-9 Algoritam s tri uzorka bez derivacije</i>	163
<i>Slika 17-10 Algoritam s tri uzorka bez derivacije</i>	163

<i>Slika 17-11 Fourierov red s cijelim periodom</i>	164
<i>Slika 17-12 Fourierov red s cijelim periodom</i>	164
<i>Slika 17-13 Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom</i>	164
<i>Slika 17-14 Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom</i>	164
<i>Slika 17-15 Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom</i>	164
<i>Slika 17-16 Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom</i>	164
<i>Slika 17-17 Fourierov red s pola perioda</i>	165
<i>Slika 17-18 Fourierov red s pola perioda</i>	165
<i>Slika 17-19 FFT algoritam</i>	165
<i>Slika 17-20 FFT algoritam</i>	165
<i>Slika 17-21 Algoritam s generalnim polinomskim oblikom</i>	165
<i>Slika 17-22 Algoritam s generalnim polinomskim oblikom</i>	165
<i>Slika 17-23 LSQ 1, 3 algoritam s više varijabli</i>	166
<i>Slika 17-24 LSQ 1, 3 algoritam s više varijabli</i>	166
<i>Slika 17-25 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli</i>	166
<i>Slika 17-26 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli</i>	166
<i>Slika 17-27 LSQ 1, 3, 5, 7 algoritam s više varijabli</i>	166
<i>Slika 17-28 LSQ 1, 3, 5, 7 algoritam s više varijabli</i>	166
<i>Slika 17-29 Algoritam s integriranjem diferencijalne jednadžbe</i>	167
<i>Slika 17-30 Algoritam s integriranjem diferencijalne jednadžbe</i>	167
<i>Slika 17-31 Algoritam s filtriranim trećim harmonikom</i>	167
<i>Slika 17-32 Algoritam s filtriranim trećim harmonikom</i>	167
<i>Slika 17-33 Algoritam s rješavanjem diferencijalne jednadžbe</i>	167
<i>Slika 17-34 Algoritam s rješavanjem diferencijalne jednadžbe</i>	167
<i>Slika 17-35 Tropolna šema postrojenja na kojem je napravljen kratki spoj</i>	168
<i>Slika 17-36 Uzorak i prva derivacija s dvije točke</i>	169
<i>Slika 17-37 Uzorak i prva derivacija s dvije točke</i>	169
<i>Slika 17-38 Uzorak i prva derivacija s tri točke</i>	169
<i>Slika 17-39 Uzorak i prva derivacija s tri točke</i>	169
<i>Slika 17-40 Algoritam s prvom i drugom derivacijom</i>	169
<i>Slika 17-41 Algoritam s prvom i drugom derivacijom</i>	169
<i>Slika 17-42 Algoritam s dva uzorka bez derivacije</i>	170
<i>Slika 17-43 Algoritam s dva uzorka bez derivacije</i>	170
<i>Slika 17-44 Algoritam s tri uzorka bez derivacije</i>	170
<i>Slika 17-45 Algoritam s tri uzorka bez derivacije</i>	170
<i>Slika 17-46 Fourierov red s cijelim periodom</i>	170
<i>Slika 17-47 Fourierov red s cijelim periodom</i>	170
<i>Slika 17-48 Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom</i>	171
<i>Slika 17-49 Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom</i>	171
<i>Slika 17-50 Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom</i>	171
<i>Slika 17-51 Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom</i>	171
<i>Slika 17-52 Fourierov red s pola perioda</i>	171
<i>Slika 17-53 Fourierov red s pola perioda</i>	171
<i>Slika 17-54 FFT algoritam</i>	172
<i>Slika 17-55 FFT algoritam</i>	172
<i>Slika 17-56 FFT algoritam samo drugi harmonik</i>	172
<i>Slika 17-57 FFT algoritam samo drugi harmonik</i>	172
<i>Slika 17-58 FFT algoritam samo treći harmonik</i>	172
<i>Slika 17-59 FFT algoritam samo treći harmonik</i>	172
<i>Slika 17-60 FFT algoritam samo peti harmonik</i>	173

<i>Slika 17-61 FFT algoritam samo peti harmonik</i>	<u>173</u>
<i>Slika 17-62 Algoritam s generalnim polinomskim oblikom</i>	<u>173</u>
<i>Slika 17-63 Algoritam s generalnim polinomskim oblikom</i>	<u>173</u>
<i>Slika 17-64 LSQ 1, 3 algoritam s više varijabli</i>	<u>173</u>
<i>Slika 17-65 LSQ 1, 3 algoritam s više varijabli</i>	<u>173</u>
<i>Slika 17-66 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli</i>	<u>174</u>
<i>Slika 17-67 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli</i>	<u>174</u>
<i>Slika 17-68 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli</i>	<u>174</u>
<i>Slika 17-69 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli</i>	<u>174</u>

POPIS OZNAKA I KRATICA

A	pojačalo
$A_o(f)$	amplituda signala određene frekvencije poslije filtriranja
AC	izmjenični signal
ADC	analogno digitalna pretvorba
$A_i(f)$	amplituda signala određene frekvencije prije filtriranja
a_n	koeficijent polinoma ili Fourierov koeficijent
A_n	normalizirana amplituda
b_n	koeficijent polinoma ili Fourierov koeficijent
C	kapacitet
CPU	procesor računala
DAC	digitalno analogna pretvorba
DAQ	proces prikupljanja podataka (data acquisition)
DC	istosmjerni signal
DFT	diskretna Fourierova transformacija
DMA	izravan pristup memoriji računala (direct memory access)
DSP	digitalna obrada mjerenih podataka (digital signal processing)
E	operator pomaka
f	frekvencija
$f(t)$	analogni signal u vremenskoj domeni
f_0	frekvencija elektroenergetskog sustava od 50 Hz
f_c	granična frekvencija filtera
FFT	brza diskretna Fourierova transformacija
$FIFO$	buffer koji se nalazi na DAQ pločici (first in, first out)
f_k	vrijednost funkcije u trenutku k
f_n	normalizirana frekvencija
f_s	frekvencija uzimanja uzoraka
FT	Fourierova transformacija
$g(x)$	aproksimacija funkcije $f(x)$
h	razmak među izmjerenim točkama signala
I	amplituda struje
i	i -ta točka signala
$i(t)$	vrijednost struje u trenutku t
$I_0(\bullet)$	modificirana Besselova funkcija

j	j-ta točka signala
K	amplituda istosmjernog signala ili pojedinih harmonika
k	k-ti uzorak signala
k_{mf}	m-ti binomni koeficijent
L	induktivitet
$L(x)$	Lagrangeov polinom
L_a	induktivitet faze a
L_b	induktivitet faze b
L_c	induktivitet faze c
LED	dioda koja emitira svjetlost
L_m	međuinduktivitet pojedinih faza
MUX	multipleksor
n	broj harmonika
N	broj izmjerenih točaka analognog signala
P	prigušnica
$P_n(x)$	polinom n-tog stupnja
R	otpor
r	proizvoljna udaljenost između dvije izmjerene točke nekog signala
$R(f)$	pogreška prilikom numeričke integracije
R_a	otpor faze a
R_b	otpor faze b
R_c	otpor faze c
S	sklopka
S	suma
$s(t)$	vrijednost signala u trenutku t
T	period signala
t	vrijeme
T_C	vrijeme za koje se puni kondenzator
T_H	vrijeme za koje se mora dogoditi AD pretvorba
T_S	zbroj vremena T_C i T_H
TTL	tranzistor-tranzistor logika
U_1	napon na ulazu u sustav
U_2	napon na izlazu iz sustava
V	amplituda napona
$v(t)$	vrijednost napona u trenutku t
V_c	napon za kontrolnu sklopku

VF	visokofrekventne smetnje
$w(n)$	vrijednost funkcije okvira u točki n
$W_{x,j}$	koeficijenti kod Fourierovog reda za realni dio
$W_{y,j}$	koeficijenti kod Fourierovog reda za imaginarni dio
X	reaktancija
$x(t)$	analogni signal u vremenskoj domeni
$x[a]$	vrijednost signala u točki a (a je cijeli broj)
x_0	prva izmjerena točka signala
x_n	n -ta izmjerena točka signala
x_N	zadnja izmjerena točka signala
$y=f(x)$	vrijednost funkcije u trenutku x
Z	impedancija
Δf_k	diferencija naprijed u točki k funkcije f
$\Delta^n f_k$	n -ta diferencija naprijed u točki k funkcije f
∇f_k	diferencija nazad u točki k funkcije f
$\nabla^n f_k$	n -ta diferencija nazad u točki k funkcije f
δf_k	centralna diferencija funkcije f u točki k
$\delta^n f_k$	n -ta centralna diferencija funkcije f u točki k
μ	operator prosjeka
Δt	vremenski razmak među izmjerenim točkama signala
ε_i	vertikalna udaljenost točke i od neke krivulje
ω_0	kružna frekvencija koja se računa iz f_0
Θ	fazni pomak između dva signala
\bar{F}_n	prikaz Fourierovog reda u kompleksnom obliku
$d\omega$	beskonačno mali frekvencijski pomak
$F(\omega)$	Fourierova transformacija
Δf	frekvencijska rezolucija
β	parametar u Kaiser-Besslovom okviru
τ	vremenska konstanta istosmjernog prigušujućeg signala
Θ_v	fazni pomak napona
Θ_I	fazni pomak struje
Δx	razmak među točkama neke funkcije

1 UVOD

Kakvoća i pouzdano djelovanje digitalnih zaštitnih uređaja u najvećoj mjeri ovisi o kvaliteti numeričkih algoritama mjernih sustava releja. Kakvoća numeričkih algoritama određuje se točnošću djelovanja, odnosno točnošću određivanja struja, napona i impedancije pri kvaru u elektroenergetskom sustavu, te neosjetljivošću na visokofrekvencijske smetnje i zasićenje strujnih transformatora. Težište razvoja digitalnog uređaja za zaštitu elektroenergetskog sustava, prema tome, usmjereno je na razvoj odgovarajućeg numeričkog algoritma. Pri razvoju digitalnog zaštitnog uređaja također valja imati na umu sve karakteristike koje mora imati svaki zaštitni relej, a to su: selektivnost koja može biti apsolutna ili relativna, stabilnost, zadovoljavajuće vrijeme prorade i osjetljivost [L1].

U uvodnom dijelu rada obrađene su vrste signala, osnove teorije uzimanja uzoraka i pretvaranja analognog signala u digitalni, kojeg zatim obrađuje zaštitni relej te na osnovi te obrade djeluje ili ne djeluje. Također su prikazane i razne numeričke metode koje služe za analizu signala u računalu, kao na primjer, interpolacijske formule, numeričko integriranje i deriviranje, metoda najmanjih kvadrata, Fourierova transformacija u diskretnom obliku i tehnike uokvirivanja i digitalnog filtriranja signala.

Nakon toga je pomoću numeričkih metoda izveden niz algoritama, koji su podijeljeni u četiri grupe i to: sinusni algoritmi, Fourierovi algoritmi, algoritmi najmanjih kvadrata i algoritmi na principu modela štíćenog elementa. Svaki algoritam je testiran sa simuliranim signalom u programskoj podršci ALGORITAM koja je napravljena posebno za tu svrhu i koja generira signale struja i napona različitih vrijednosti i frekvencijskog sadržaja. Iz simulacije su tada dobivene karakteristike (odziv) i ponašanje algoritma za niz signala koji su u sebi sadržavali harmonike, istosmjerne komponente i visokofrekventne šumove. Samim tim su se pokazale razlike među ponašanjem pojedinih algoritama te različite granice tolerancije na prisutnost harmonika, istosmjerne komponente i visokofrekventnog šuma.

U drugoj fazi ispitivanja algoritama simulirana je struja i napon kratkog spoja te je promatran odziv algoritma u prijelaznom području, odnosno u trenutku kada nastane kvar i kada struja naglo poraste a napon padne.

Nakon provedenih ispitivanja algoritama obavljeno je i ispitivanje algoritama sa stvarnim signalom u realnom vremenu. Za to je poslužilo osobno računalo i DAQ pločica pomoću koje su prikupljeni signali koji su zatim obrađivani pomoću algoritama u računalu i to u realnom vremenu točku po točku. Valja naglasiti kako je procesor u računalu bio dovoljno brz da uspije obraditi signal u realnom vremenu.

Kao zadnji dio rada izvedeni su pravi kratki spojevi na FER-u u Zagrebu u laboratoriju Zavoda za visoki napon i energetiku, koji su pušteni kroz algoritme kako bi se potvrdili rezultati o algoritmima dobiveni simuliranim kratkim spojem.

Valja naglasiti da su svi programi koji su korišteni u ovom radu izrađeni pomoću programskog paketa LabVIEW™ koji za programiranje koristi G jezik. Jedino odstupanje od toga je algoritam koji koristi brzu Fourierovu transformaciju u diskretnom obliku koji je napravljen u C-u, zbog toga da bude brži, te se zatim koristi u LabVIEW™ programu kao dll.

2 SIGNALI

*U poglavlju 2 **Signali** se govori o tome što je to signal i o svrstavanju signala u pet kategorija radi lakšeg shvaćanja i daljnje digitalne obrade signala.*

Također se govori o pretvorbi analognog u digitalni signal te o putu koji signal prolazi od trenutka mjerenja do dolaska u računalo.

Veličina koja se mjeri naziva se signal, odnosno signal je prikaz bilo koje fizikalne veličine čija amplituda i promjena oblika s vremenom (ili kojom drugom varijablom) sadrži informaciju o toj fizikalnoj veličini.

Iako možda nije sasvim očito, vrijeme je obično najkritičniji aspekt gotovo svakog mjerenja. Bilo da se želi promatrati promjenu temperature u vremenu nekog stroja, oblik struje na nekom trošilu ili zatvoriti ventile nekog kotla kada mješavina plinova dosegne neku optimalnu vrijednost, vrijeme je uvijek ključni faktor pri prikupljanju podataka i kontroli sustava. Dakle, nije potrebno znati samo što se dogodilo nego i kada se dogodilo.

Vremensko tempiranje je potrebno kada se dizajnira neki sustav za kontrolu i upravljanje iz dva razloga. Prvi je taj da je potrebno odrediti frekvenciju uzimanja uzoraka nekog signala koji se želi mjeriti, odnosno kako često računalo mjeri uzorke signala. Drugi razlog je taj što je potrebno dati određeno vrijeme procesoru i za druge zadaće, kao na primjer spremanje izmjerenih veličina u datoteku, računanje određenih algoritama i tako dalje.

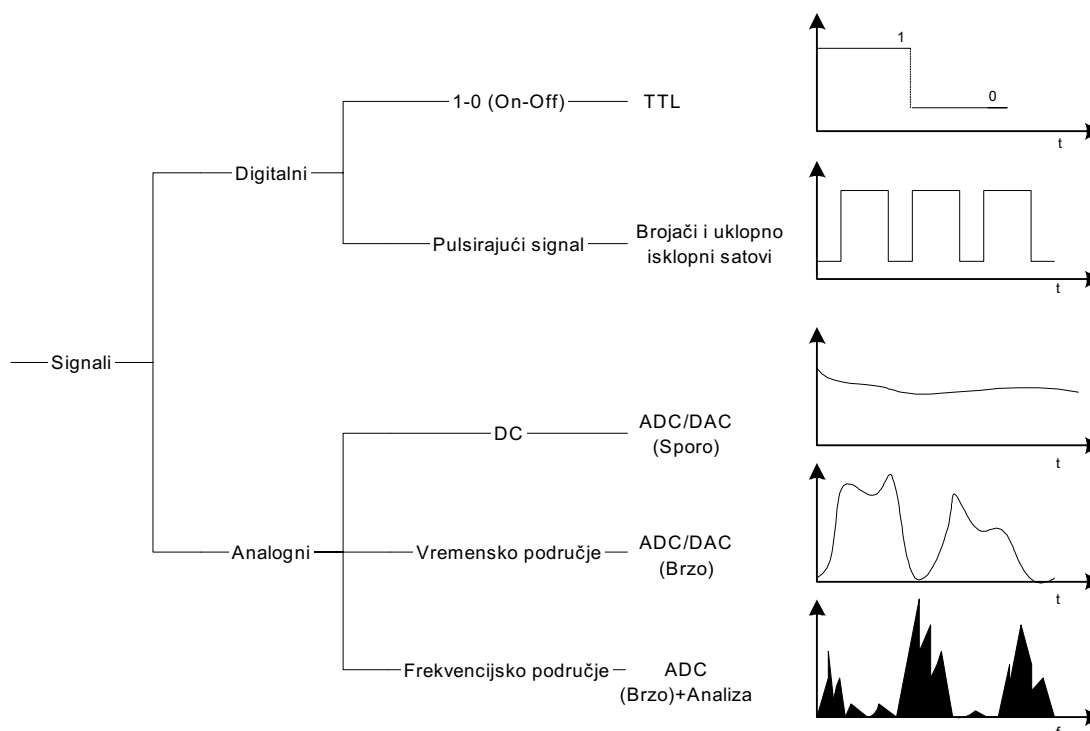
2.1 Svrtavanje signala

Ako se neki signal želi dovesti do računala tada ga je prvo potrebno pretvoriti u električni signal kao što su napon ili struja. Za to služe mjerni pretvornici. Ako se, na primjer, mjeri temperatura onda ju je potrebno na neki način predstaviti naponom ili strujom. Postoji niz sonde (mjernih temperaturnih pretvarača) koje mjere temperaturu i koriste određene fizikalne principe kako bi tu temperaturu pretvorili u električni signal.

Kada je jednom mjerena veličina pretvorena u električni signal tada je taj signal moguće mjeriti pomoću računala kako bi se iz njega izvukla korisna informacija. Informacija o signalu se dobiva iz slijedećih parametara: stanje, učestalost, nivo (amplituda), oblik i frekvencijski sadržaj [L2].

Striktano gledano svi signali su analogni signali koji variraju s vremenom. No zbog raznih metoda mjerenja potrebno je signal svrstati u jednu od pet skupina. Ako se signal želi svrstati prema načinu na koji daje određenu informaciju tada ga je moguće podijeliti na digitalni i analogni signal. Digitalni ili binarni signal ima samo dva moguća diskretna nivoa: visoko (on) stanje ili nisko (off) stanje. Analogni pak signal sadrži informaciju u kontinuiranoj promjeni signala s vremenom. Digitalni se signali svrstavaju u još dvije skupine, a to su on-off signali i pulsirajući signali. Analogni se svrstavaju u tri skupine: gotovo nepromjenljivi u vremenu (istosmjerni ili DC signali), signali u vremenskoj domeni (AC ili izmjenični signali) i signali u frekvencijskoj domeni. Podjela signala je prikazana na slici 2-1.

Svaki tip signala prenosi točno određen tip informacije koja odgovara parametrima koji su prije navedeni, a to su: stanje, učestalost, nivo (amplituda), oblik i frekvencijski sadržaj.



Slika 2-1 Podjela signala

2.1.1 Digitalni signali

Prvi tip digitalnog signala je on-off signal ili stanje. On daje informaciju o digitalnom stanju signala pa je stoga instrument potreban za njegovo mjerenje jednostavni detektor digitalnog stanja. Izlaz tranzistor-tranzistor logike sklopke (TTL sklopka) je primjer on-off signala. Drugi primjer je stanje svjetleće diode (LED), koja ili svijetli ili ne svijetli.

Drugi tip digitalnog signala je pulsirajući signal ili signal učestalosti. Ovaj signal se sastoji od niza prijelaza iz jednog stanja u drugo. Informacija koju on pruža se sastoji u broju prijelaza iz jednog stanja u drugo, učestalosti prijelaza iz jednog stanja u drugo (frekvencija promjene stanja) i vremenu između jednog i drugog stanja. Primjer takvog signala je optički enkoder koji je prikvačen na osovinu motora koja se vrti.

2.1.2 Analogni DC signal

Analogni DC, ili nivo signal, je statički ili sporo promjenljivi analogni signal. Glavna karakteristika DC signala je ta da je informacija koja je važna amplituda ili nivo tog signala u određenim vremenskim trenucima. Zbog toga što se DC signal slabo mijenja s vremenom, bitnija je točnost izmjerene amplitude signala nego brzina kojom

se uzimaju uzorci tog signala. Sklopovlje koje dovodi taj signal u računalo radi na principu analogno digitalne pretvorbe (ADC) pomoću koje se analogni električni signal pretvara u digitalne vrijednosti kako bi ga računalo moglo interpretirati; detaljnije se govori o AD pretvorbi u poglavlju 2.2.

Primjeri DC signala su temperatura, napon baterije i statička opterećenja. U svakom slučaju oprema za mjerenje mjeri signal i daje podatke o njegovoj amplitudi u određenim trenucima. Sustav koji mjeri DC signal treba zadovoljavati sljedeće uvijete [L3]:

- Velika točnost (rezolucija) mjerenja nivoa signala
- Uzimanje uzoraka signala niskom frekvencijom (vremensko tempiranje uzimanja uzoraka je dovoljno napraviti pomoću programske podrške u računalu)

2.1.3 Analogni AC signal

Analogni AC signali, ili signali oblika, razlikuju se od ostalih signala u tome što daju ne samo informaciju o amplitudi nego i o tome kako se mijenja oblik signala sa vremenom. Kada se mjeri oblik signala koji se još često i naziva valni oblik, od interesa su i karakteristike koje proizlaze iz oblika, kao na primjer brzina porasta signala, mjesta i oblici maksimuma, nul-točke signala itd.

Za mjerenje AC signala potrebno je precizno odrediti trenutke mjerenja pojedinih točaka signala. Također frekvencija mjerenja točaka mora biti takva kako bi se iz tih točaka signal mogao adekvatno rekonstruirati. Mjerenje valja započeti i u točno određenom trenutku kako bi se snimio koristan dio signala (valnog oblika). Iz gore navedenog proizlazi da sustav za mjerenje AC signala mora imati AD pretvornik, sat koji određuje kada se događa AD pretvorba i okidač koji započinje mjerenje u određenom trenutku kada je zadovoljen neki uvjet. Primjera za AC signal ima bezbroj. S našeg gledišta su najzanimljiviji napon i struja u EES-u. Ono što je zajedničko svim AC signalima je to da je pri mjerenju od interesa njihov oblik (promjena u vremenu). Iz svega gore navedenoga proizlazi da sustav koji mjeri AC signal mora zadovoljavati sljedeće uvijete [L3]:

- Uzimanje uzoraka signala većim frekvencijama
- Vremensko tempiranje uzimanja uzoraka je potrebno provesti pomoću sklopovlja, a ne programske podrške
- Okidanje – početi mjerenje u točno određenim trenucima

2.1.4 Analogni signali u frekvencijskom području

Analogni signali u frekvencijskom području su slični analognim AC signalima u vremenskom području jer također daju informaciju o tome kako se signal mijenja sa vremenom. No, međutim, informacija koja se dobiva iz signala u frekvencijskoj domeni bazira se na frekvencijskom sadržaju signala za razliku od oblika i ostalih karakteristika koje se dobivaju kada se signal nalazi u vremenskom području.

Kao i kod signala u vremenskom području tako je i za mjerenje u frekvencijskom području potrebno imati mjerni sustav sa AD pretvornikom, sat koji određuje kada se događa AD pretvorba i okidač koji određuje trenutak snimanja. Sustav mjerenja

također mora imati i mogućnost analize kako bi dobio informaciju o frekvenciji iz signala. Tu vrstu digitalne obrade signala (DSP) je moguće provoditi pomoću programske podrške u samom računalo ili pomoću posebnog DSP sklopovlja koje brzo i efikasno analizira signal koji tada (nakon analize) šalje u računalo na daljnju obradu. Primjeri analize signala u frekvencijskom području su analiza vibracija, akustika govora, prijenosne funkcije raznih sistema te što je posebno zanimljivo; rastavljanje struja (i napona) kvara na osnovne sinusne komponente (harmonike) kako bi se vidjelo od kojih je harmonika sastavljena struja (napon) kvara i kolika im je amplituda.

Iz gore navedenoga proizlaze slijedeći uvjeti za sustav koji se koristiti za mjerenje signala u frekvencijskoj domeni [L3]:

- Uzimanje uzoraka signala većim frekvencijama
- Vremensko tempiranje uzimanja uzoraka je potrebno provesti pomoću sklopovlja, a ne programske podrške
- Okidanje – početi mjerenje u točno određenim trenucima
- Mogućnost analize – pretvoriti vremensku informaciju u frekvencijsku informaciju

Jedan signal – pet načina mjerenja

Prethodno svrstavanje signala u pet vrsta ne znači da svaki signal pripada određenoj vrsti, odnosno, jedan signal može pružati više tipova informacija pa ga je stoga moguće svrstati u nekoliko tipova i samim time mjeriti na više načina. Dakle, isti signal je moguće mjeriti sa raznim mjernim sustavima, od jednostavne digitalne pločice koja mjeri on-off stanje pa do složenih sustava koji rade frekvencijsku analizu signala. Tehnika mjerenja koja se odabere ovisi o tome koju informaciju se želi dobiti iz signala.

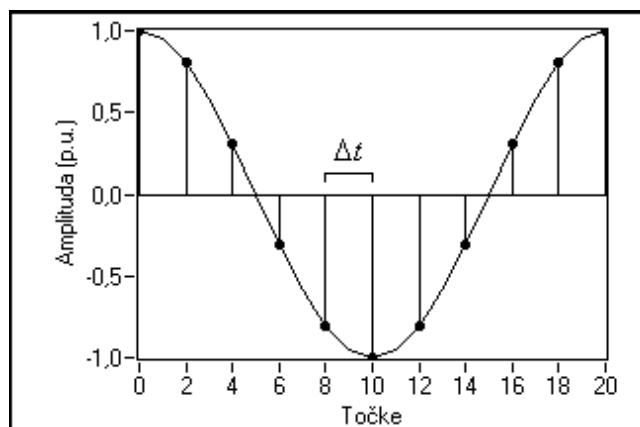
2.2 Uzimanje uzoraka signala

Ako se želi izvršiti digitalna obrada nekog signala tada je potrebno prvo analogni signal pretvoriti u digitalni oblik. U praksi se za to koriste analogno-digitalni (AD) pretvornici. Neka je $x(t)$ analogni signal čiji se uzorci uzimaju svakih Δt sekundi. Vremenski interval Δt se naziva interval ili period uzimanja uzoraka. Njegova recipročna vrijednost $1/\Delta t$ se naziva frekvencija uzimanja uzoraka i jedinica joj je broj uzoraka/sekunda. Svaka diskretna vrijednost valnog oblika $x(t)$ u trenucima $t=0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ se naziva uzorak signala $x(t)$. Dakle $x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t)$ i tako dalje, su uzorci signala. Iz toga slijedi da je signal $x(t)$ moguće prikazati pomoću diskretnog skupa uzoraka

$$[x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), x(3\Delta t), \dots, x(k\Delta t), \dots] \quad (2.1)$$

Na slici 2-2 je prikazan analogni signal i verzija tog signala sa uzorcima. Period uzimanja uzoraka iznosi Δt . Valja primijetiti da su uzorci definirani u diskretnim vremenskim trenucima. Ako postoji N uzoraka nekog signala $x(t)$, tada se $x(t)$ može prikazati kao

$$\mathbf{x}=\{x[0], x[1], x[2], x[3], \dots, x[N-1]\} \quad (2.2)$$



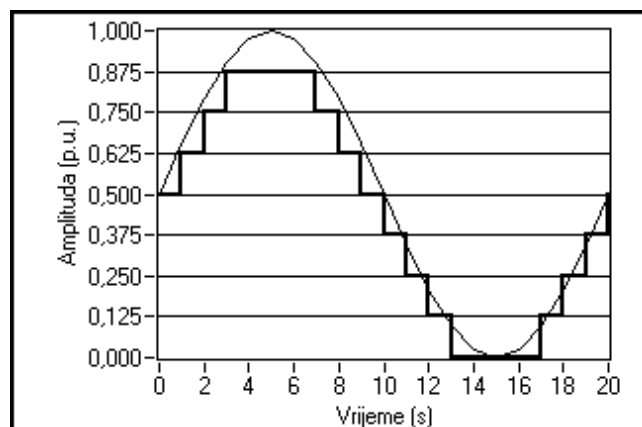
Slika 2-2 Analogni signal prije i poslije mjerenja

To se još naziva digitalni prikaz analognog signala $x(t)$ ili prikaz pomoću uzoraka. Izraz (2.2) je indeksiran pomoću cijelih brojeva (1, 2, 3,...) i stoga ne sadržava nikakvu informaciju o frekvenciji uzimanja uzoraka. Iz toga slijedi da ako su poznate samo pojedine vrijednosti uzoraka i broj uzoraka, nije moguće saznati kolika je bila frekvencija uzimanja uzoraka.

2.2.1 Rezolucija

Računalo sprema informacije (memorija, disk) u digitalnom obliku s konačnim brojem bitova. Svaki uzorak analognog signala stoga treba pretvoriti u konačan broj bitova prije nego što može ići na daljnju obradu pomoću računala. Ta pretvorba se postiže pomoću Analogno-digitalnog pretvornika (ADC) koji se nalazi u sklopu za mjerenje koji se pak nalazi na ulazu u računalo. Važan parametar ADC-a je njegova rezolucija [L4] odnosno broj bitova koji ADC koristi za prikazivanje analognog signala. Budući da je broj bitova (a samim time i broj kombinacija) konačan, a kontinuirani analogni signal može imati beskonačno mnogo vrijednosti, tada je potrebno određeni niz vrijednosti analognog signala mapirati na određenu kombinaciju bitova. To je prikazano na slici 2-3 gdje je analogni signal (sinusni valni oblik), sa "peak-to-peak" amplitudom od 1V, prikazan u digitalnom obliku sa 3 bita. Prikaz sa 3 bita daje $2^3=8$ mogućih kombinacija. U ovom primjeru analogne vrijednosti između 0.0-0.125 Volti su prikazane s kombinacijom bitova 000, vrijednosti između 0.125-0.250 V su prikazane s kombinacijom 001 i tako dalje sve do vrijednosti između 0.750-1.00 V koje su prikazane sa 111.

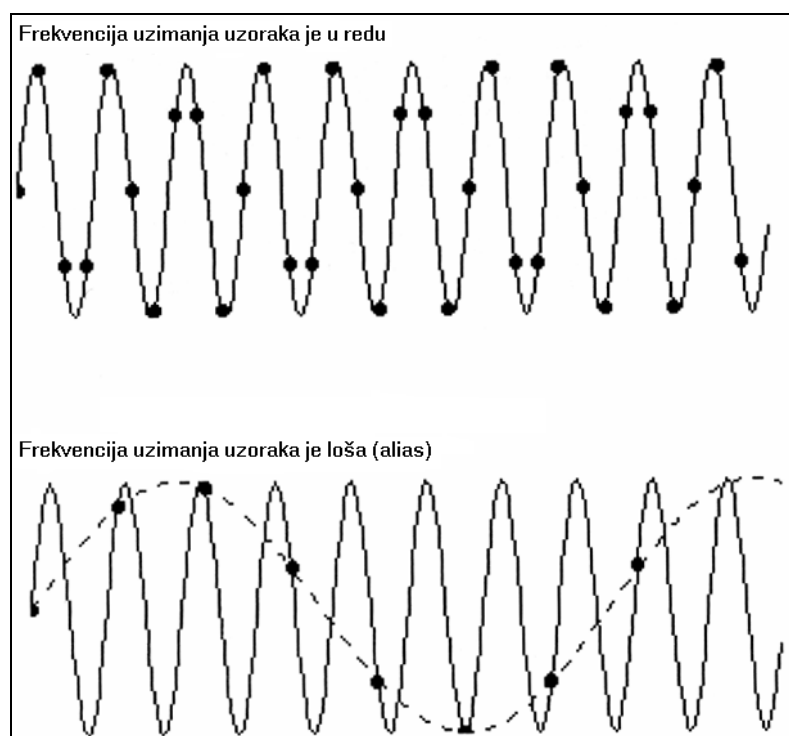
Što je veća rezolucija ADC-a to je i veći broj podjeljaka na koje je moguće mapirati pojedine vrijednosti signala, a samim time i detektirati manje promjene mjenog signala. Kao što se i vidi 3-bitni digitalni signal ne predstavlja dobro originalni analogni signal zbog toga što se u pretvorbi izgubilo mnogo informacija. No ako se rezolucija AD pretvornika poveća sa 3 bita na 16 bita tada se broj kombinacija za prikaz signala penje sa 8 na 65536 (2^{16}), što je sasvim dovoljno za ekstremno točan prikaz analognog signala.



Slika 2-3 Rezolucija AD pretvornika

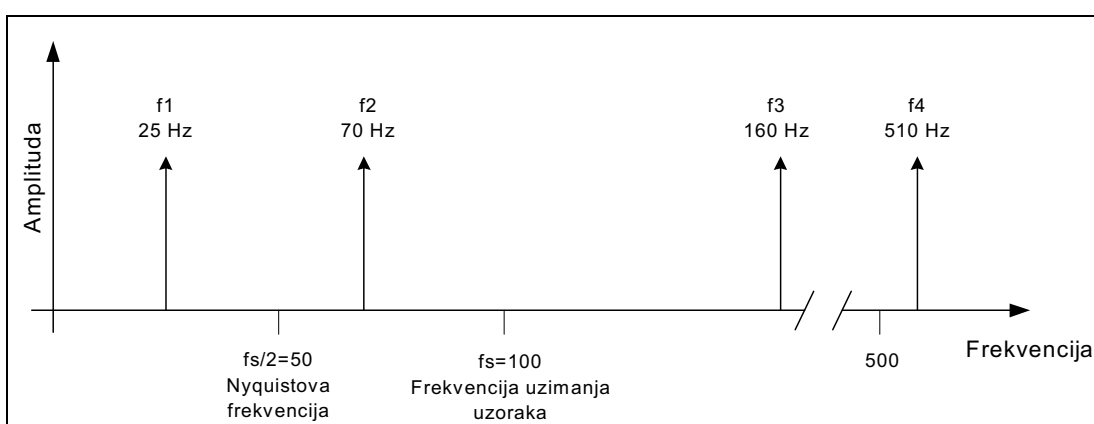
2.2.2 Nyquistov teorem

Važan parametar pri uzimanju uzoraka signala je frekvencija uzimanja uzoraka i ona određuje kako često se događa AD pretvorba. Što je frekvencija uzimanja uzoraka veća to postoji i više točaka u određenom vremenu, a samim time je bolja mogućnost prikaza izmjereneog signal nego kada je frekvencija uzimanja uzoraka manja. Ako se uzorci signala uzimaju presporo tada se javlja loš ili potpuno krivi prikaz signala. Na slici 2-4 su prikazana dva signala od kojih su prvome uzimani uzorci dovoljno brzo i samim time je njegov digitalni prikaz zadovoljavajući. Kod drugog signala frekvencija uzimanja uzoraka nije bila dovoljno brza i zbog toga postoji izmjereni signal koji izgleda tako da ima drukčiju frekvenciju od stvarnog signala. Krivi prikaz izmjereneog signala se naziva "alias".

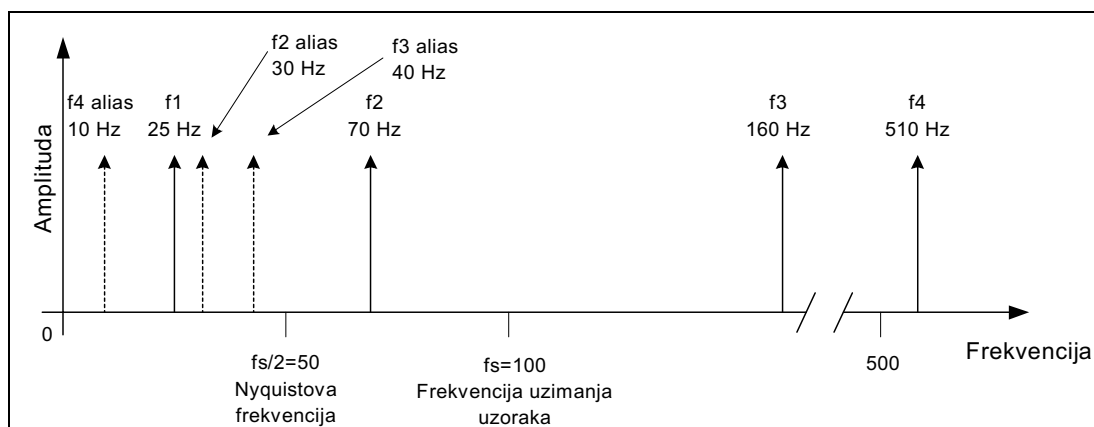


Slika 2-4 Ovisnost izgleda snimljenog signala o f_s

Prema Nyquistovom teoremu [L4], kako bi se izbjegao alias, potrebno je uzimati uzorke frekvencijom koja je barem dva puta veća od maksimalne frekvencijske komponente koju sadrži signal kojeg se mjeri. Za određenu frekvenciju kojom se uzimaju uzorci, maksimalna frekvencija signala koja se može točno prikazati, a da se ne javi alias, se naziva Nyquistova frekvencija i ona iznosi pola frekvencije uzimanja uzoraka. Frekvencije, koje sadrži mjereni valni oblik, a koje se nalaze iznad Nyquistove frekvencije bit će prikazane kao alias između DC i Nyquistove frekvencije. Frekvencija alias signala je apsolutna vrijednost razlike između frekvencije mjenog signala i najbližeg cijelog broja koji je višekratnik frekvencije uzimanja uzoraka. Slike 2-5 i 2-6 to ilustriraju. Ako se pretpostavi da je frekvencija uzimanja uzoraka, f_s , 100 Hz i da je kontinuirani signal koji se mjeri sastavljen od signala frekvencija 25 Hz, 70 Hz, 160 Hz i 510 Hz, tada je na slici 2-5 prikazan spektar tog signala prije nego što su mu se počeli uzimati uzorci (mjeriti) pomoću računala.



Slika 2-5 Frekvencijske komponente signala



Slika 2-6 Frekvencijske komponente signala kako ih vidi računalo

Sve frekvencije signala koje se nalaze ispod Nyquistove frekvencije ($f_s/2=50$ Hz) su prikazane točno nakon što su uzeti uzorci signala. Frekvencije iznad Nyquistove su prikazane kao alias. Na primjer, frekvencija signala od 25 Hz je prikazana točno, a frekvencije signala od 70 Hz, 160 Hz i 510 Hz su prikazane kao alias od 30 Hz, 40 Hz i 10 Hz. Originalne i alias komponente su prikazane na slici 2-6. Kako bi se izračunale alias frekvencije koristi se sljedeća formula [L5]:

Alias frekvencija = $ABS(\text{najbliži cjelobrojni broj od } f/f_s \text{ pomnožen sa } f_s - \text{frekvencija signala}) = ABS(f_s \text{ puta int}(f/f_s) - f)$

Prema tome se dobiva

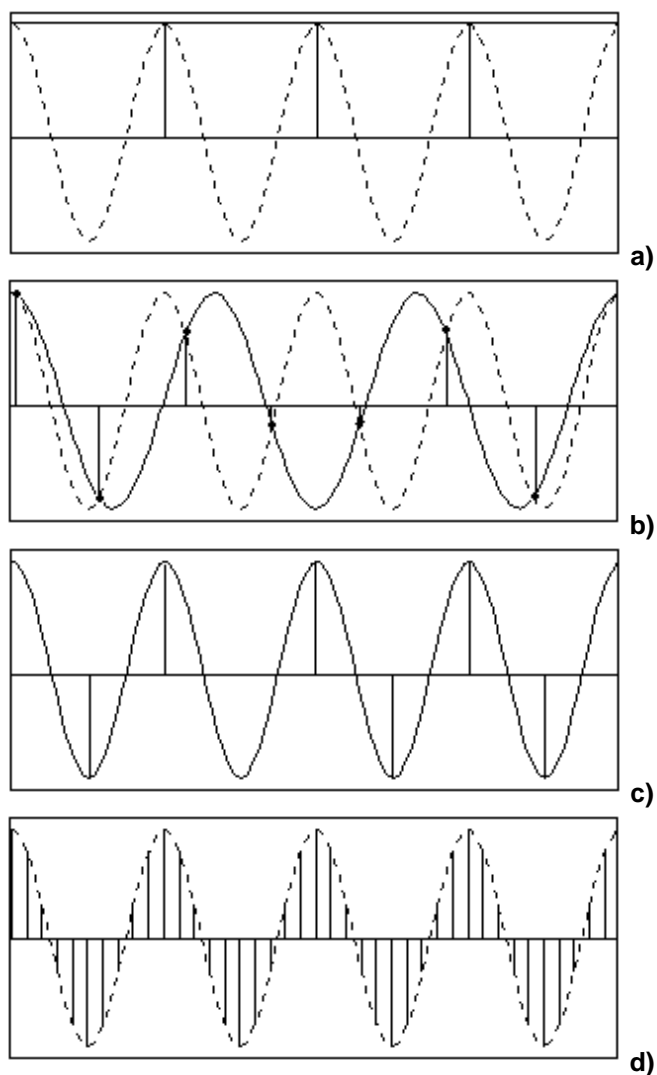
$$\text{Alias } f_2 = |100 - 70| = 30 \text{ Hz}$$

$$\text{Alias } f_3 = |(2)100 - 160| = 40 \text{ Hz}$$

$$\text{Alias } f_4 = |(5)100 - 510| = 10 \text{ Hz}$$

Ako se sada poveća frekvencija uzimanja uzoraka tada komponente signala koje nisu alias ostaju iste, dok se alias komponente mijenjaju jer su one funkcije frekvencije uzimanja uzoraka. Ako se f_s poveća na 150 Hz tada f_2 više nije alias, a f_3 promijeni alias frekvenciju na 10 Hz, a f_4 na 60 Hz.

Iz navedenog bi se moglo zaključiti da je najbolje uzimati uzorke maksimalnom mogućom frekvencijom. No u tom slučaju se može dogoditi da nakon nekog vremena neće biti dosta memorije u računalu ili mjesta na disku za toliki broj podataka. Na slici 2-7 su prikazani učinci za razne vrijednosti f_s .



Slika 2-7 Izgled signala ovisno o f_s

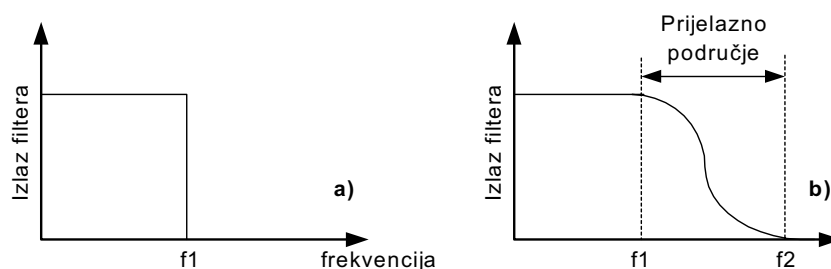
U slučaju a) f_s iznosi jedan uzorak po periodu pa je rekonstruirani valni oblik alias koji izgleda kao DC signal. Ako se f_s poveća na sedam uzoraka u četiri periode (slučaj b), tada rekonstruirani valni oblik već ima neku frekvenciju ali je ona još uvijek alias i manja je od stvarne frekvencije signala. Povećanjem f_s na dva uzorka po periodu signala, $f_s=2f$ (Nyquistova frekvencija), digitalni oblik snimljenog signala ima točnu frekvenciju i može se rekonstruirati kao pravi analogni ali samo frekvencijski dok oblik signala još uvijek nije dobro rekonstruiran. Povećavajući f_s značajno iznad f , na primjer $10f$, kao što je slučaj d), dobiva se točniji prikaz valnog oblika po izgledu.

Vidljivo je, dakle, da Nyquistov teorem služi kao polazna točka pri određivanju f_s (barem dvostruko nego što je najviša frekvencijska komponenta koju sadrži analogni signal). Često Nyquistov uvjet nije dovoljan u praktičnoj primjeni. Stvarni signali često sadrže frekvencijske komponente koje su iznad Nyquistove frekvencije. Te frekvencije se nakon uzimanja uzoraka javljaju kao alias i dodaju se komponentama signala koje su pravilno snimljene i tada se javlja neki rezultatni signal koji je u biti iskrivljeni prikaz stvarnog signala koji se mjerio. Zbog toga se u praksi frekvencija uzimanja uzoraka uzima i do nekoliko puta veća od maksimalne frekvencije signala; pet do deset puta je tipično u primjenama za industriju.

2.2.3 Analogni filteri

Frekvencija uzimanja uzoraka, kao što je prikazano u prethodnom poglavlju, mora biti barem dva puta veća od maksimalne frekvencije analognog signala koji se mjeri. Problem koji se javlja je kako to osigurati u praktičnoj primjeni. Čak i ako se zna kolika će biti maksimalna frekvencija signala koji se želi mjeriti uvijek se mogu javiti smetnje od nekih okolnih uređaja (na primjer lokalna radiopostaja) koje sadrže frekvencije koje su više od Nyquistove, a uhvate sa mjernom opremom. One se javljaju kao alias i tada se dobiva iskrivljena slika izmjenjenog signala.

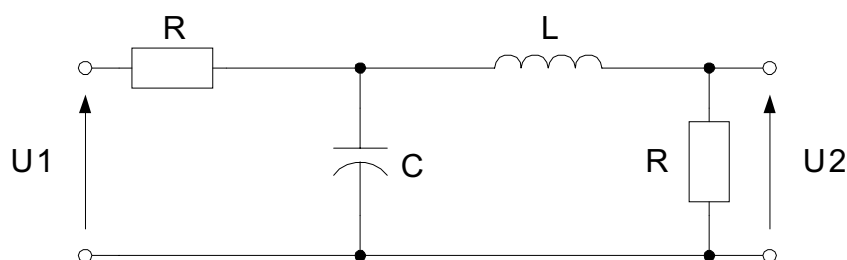
Kako bi se to spriječilo, odnosno kako bi bili sigurni u to koja je najviša frekvencija koja se može javiti, koriste se niskopropusni analogni filteri (propuštaju niže, a prigušuju više frekvencije) koji se spajaju u mjerni krug prije uzimanja uzoraka i prije AD pretvorbe. Ti filteri se još nazivaju i antialias filteri jer im je glavna zadaća izbjegavanje pojave aliasa signala koji kao posljedicu ima netočnu digitalnu obradu signala. Zbog toga što oni filtriraju analogni signal prije uzimanja uzoraka i AD pretvorbe tada su i ti filteri analogni. Idealna karakteristika antialias filtera je dana na slici 2-8a. Prema toj karakteristici on propušta sve frekvencije ispod f_1 i to sa prigušenjem jednakim nuli (pojačanje od 0 dB), dok one iznad f_1 ne propušta nego ih prigušuje (prigušenje od $-\infty$ dB). Drugim riječima amplituda izlaznog signala iz filtera je jednaka amplitudi ulaznog signala, ili je jednaka nuli u drugom slučaju.



Slika 2-8 Odziv idealnog i realnog filtera

Karakteristike stvarnih filtera nisu takve već izgledaju kao na slici 2-8b. Sa slike je vidljivo kako u praksi nije moguće postići oštru granicu između područja propuštanja i područja nepropuštanja signala. Propusno područje je sve do f_1 , a područje prigušenja sve iznad f_2 .

Područje između f_1 i f_2 se naziva prijelazno područje i frekvencije koje spadaju u njega se propuštaju ali i postupno prigušuju. Iako se želi propustiti frekvencije manje od f_1 , frekvencije u prijelaznom području ipak mogu izazvati alias efekt. Iz tog razloga kada se odabire frekvencija uzimanja uzoraka u praksi, potrebno ju je odabrati tako da je dva puta veća od najveće frekvencije u prijelaznom području. Upravo to je i jedan od razlog zašto je u stvarnim mjernim sustavima frekvencija uzimanja uzoraka više nego dva puta veća od maksimalne očekivane frekvencije signala koji se mjeri. Na slici 2-9 je prikazana šema jednog od niskopropusnih filtera [L6].



Slika 2-9 Analogni filter

Pri odabiru analognog filtera koji se želi staviti u mjerni sustav jednako su bitne njegove dinamičke i statičke karakteristike od kojih su važnije [L7]:

- vrijeme rasta – to je indikator koji nam kaže koliko je vremena potrebno izlazu filtera da dosegne svoju konačnu vrijednost ako se na ulazu narinula step pobuda.
- "overshoot" – on pokazuje koliko će signal na izlazu filtera premašiti vrijednost koju ima kada se filter smiri, pod uvjetom da je na ulazu pobuda bila u obliku step funkcije
- vrijeme prigušenja – pokazuje koliko dugo treba filteru da izlazni signal dosegne konačnu statičku vrijednost.

Sve navedene karakteristike su važne za konačni dinamički odziv digitalnog mjernog sustava. Posebno je važno, ako sustav mora donijeti odluke velikom brzinom (zaštitni releji), da je niskopropusni filter dizajniran tako da granična frekvencija ne stvara velika kašnjenja.

2.2.4 Decibeli

Kada se crta graf nekog signala radi analize tada se amplituda može prikazati pomoću linearne skale ili pomoću decibela (dB). Decibeli transformiraju linearnu skalu u logaritamsku. Razlog je taj da ako, na primjer, izmjereni valni oblik ima vrlo velike i vrlo male amplitude koje se žele prikazati na grafu. Ako je graf visok 10 cm i želi ga se cijelog iskoristiti za prikaz velikih amplitude koje iznose 100 V, tada se visini od 1 cm pridjeljuje 10 V. Problem nastaje ako se na istom grafu želi prikazati i male amplitude tog signala koje primjerice iznose 0,1 V. One bi tada zauzimale visinu od 0,1 cm što je jedva vidljivo.

Kako bi se vidjele sve amplitude, od najmanjih do najvećih, Alexander Graham Bell je izmislio jedinicu Bell koja komprimira velike amplitude, a izdužuje male. Pošto je Bell velika jedinica koristi se njezin deseti dio ili deciBell. On je definiran kao [L5]

$$1dB = 10\log_{10}(snaga) \text{ ili } 1dB = 20\log_{10}(napon) \quad (132)$$

Skala u decibelima se često koristi kod prikaza signala u frekvencijskoj domeni. Kako bi se ilustrirala razlika između decibela i linearne skale poslužit će primjer gdje postoji snimljeni valni oblik napona koji sadrži 100 točaka i gdje peta točka ima naponski skok koji nije vidljiv na linearnoj skali ali je vidljiv kada se signal prikaže pomoću logaritamske (dB) skale. Primjer se zove Decibeli.vi.

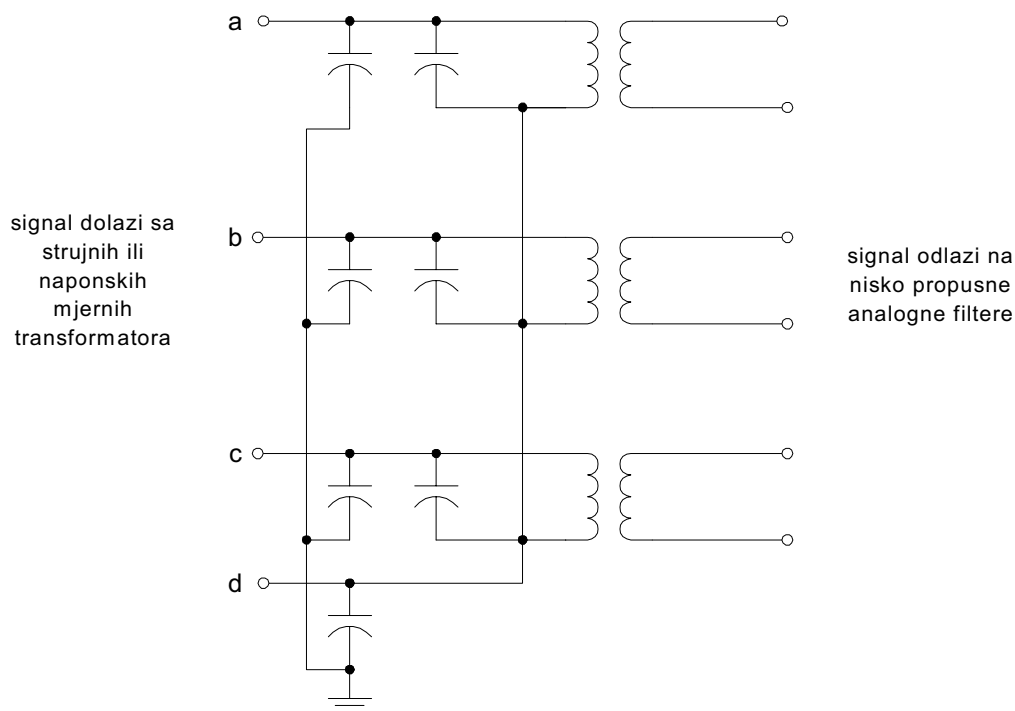
2.2.5 Mjerni transformatori

Naponi i struje u energetskom sustavu su vrlo visoki i takve ih se, iz očitih razloga, ne može dovesti do računala na daljnju obradu. Zato je potrebno smanjiti primarne struje i napone koji se nalaze u EE postrojenjima. To se postiže pomoću mjernih strujnih i naponskih transformatora koji struje smanjuju na 1A ili 5A, a napone na 110V ili 120V [L8, L32]. No ako se taj signal želi digitalno obraditi (dovesti u računalo) to još uvijek predstavlja prevelike struje i napone pa ih je stoga potrebno još više smanjiti i to na vrijednosti od obično 0 do 10V za napon (ili $\pm 5V$) i 0 do 20mA za struje, što su standardne vrijednosti za elektroničke krugove koji rade daljnju obradu signala.

U idealnom slučaju je transformirana struja sa mjernih strujnih transformatora točna kopija struje u energetskom krugu, no u stvarnosti mjerni strujni transformatori stvaraju određenu pogrešku. Najgore pogreške nastaju kada jezgra transformatora dođe u zasićenje uslijed velikih struja [L8]. Stupanj iskrivljenosti signala i vrijeme nakon kvara u kojem nastaje iskrivljenje su najviše ovisni o teretu koji je spojen u primarnom krugu iz kojeg mjerni transformatori mjere struju. U većini slučajeva algoritmi zaštite rade tako da unaprijed predvide kvar i u toj fazi je iskrivljenje signala malo pa stoga nije potrebno obraćati pažnju na zasićenje. U slučajevima gdje to nije tako potrebno je i na to obratiti pažnju. Kako to nije tema ovog rada neće biti više govora o tome već će se u daljnjem tekstu zasićenje smatrati zanemarivim.

2.2.6 Zaštitni krugovi

Kao što je rečeno naponi i struje sa mjernih transformatora su još uvijek preveliki pa ih se stoga prije ulaska u računalo propušta kroz zaštitne krugove kojima je zadatak još više smanjiti napone i struje (10V i 20mA) i galvanski odvojiti elektroniku koja vrši uzimanje uzoraka i daljnju obradu od visokog napona i struje (u ovom slučaju 110V i 5A). Ti krugovi se uglavnom sastoje od kapaciteta i izolacijskih transformatora kao što je prikazano na slici 2-10 [L7]. Također se koriste i Zener diode [L37] koje isto štite elektroniku od prevelikog signala no gdje će se one postaviti u krugu ovisi o tome kako je krug fizički sastavljen. U praksi je uobičajeno pretvoriti izmjerene sekundarne struje u niski naponski signal pomoću kombinacije otpora i pojačala [L9].



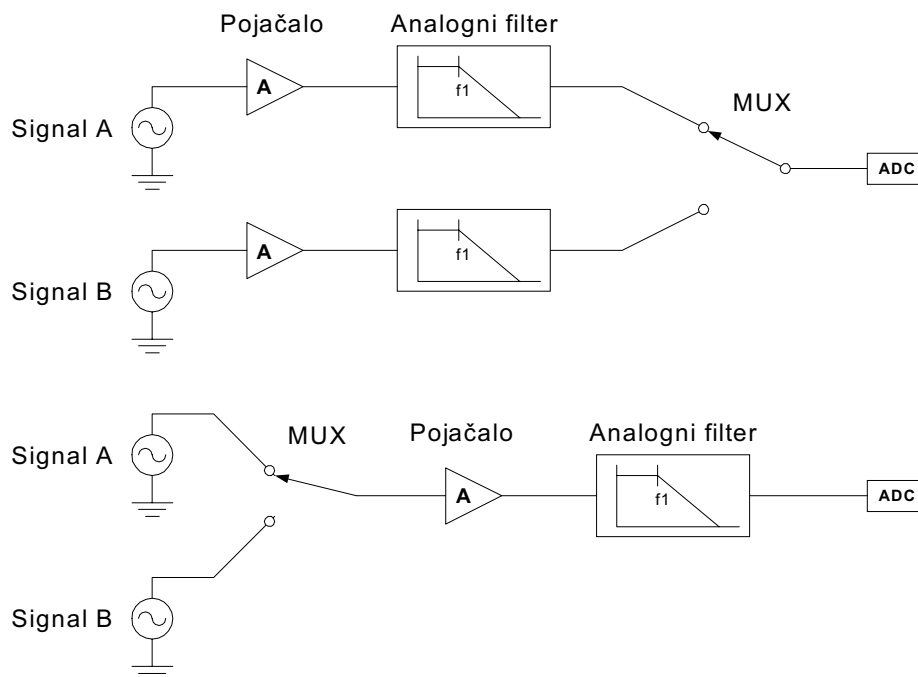
Slika 2-10 Zaštitni krug

2.2.7 Analogni multipleksor

Analogni multipleksor je uređaj koji se sastoji od niza sklopnih elemenata (releja) koji odabire signal sa jednog od mnogih ulaznih kanala i šalje ga na izlazni kanal i samim time dopušta serijski prijenos nekoliko signala preko jednog komunikacijskog kanala (izlaz). Tako je moguće imati stotinu analognih ulaza i multipleksor koji se nalazi na lokaciji gdje se vrši mjerenje, a samo jednu žicu koja tada vodi od njega do opreme koja uzima uzorke i šalje ih u računalo, koja pak može biti smještena negdje dalje. Multipleksor može izazvati i probleme ako se ne primjeni pravilno [L10]. Na slici 2-11 su prikazane dvije konfiguracije dijela mjerne opreme. Na gornjoj slici se nalazi filter i pojačalo po kanalu, a tek iza njih je multipleksor, dok je na donjoj slici prikazana situacija gdje su pojačalo i filter smješteni iza multipleksora. Donja situacija je financijski isplativija jer je potrebno samo jedno pojačalo i samo jedan niskopropusni filter, ali zato svaki put kada multipleksor promjeni kanal spori niskopropusni filter treba određeno vrijeme kako bi se priviknuo (smirio) na novi napon koji je na tom kanalu.

Rezultat toga je da frekvencija uzimanja uzoraka ne može biti velika osim ako se filter premosti, a samim time se gubi njegova korisna uloga. U prvom slučaju je situacija takva da filteri konstantno prate signal na svom kanalu i ne doživljavaju smetnje u radu zbog sklopnih pojava multipleksora.

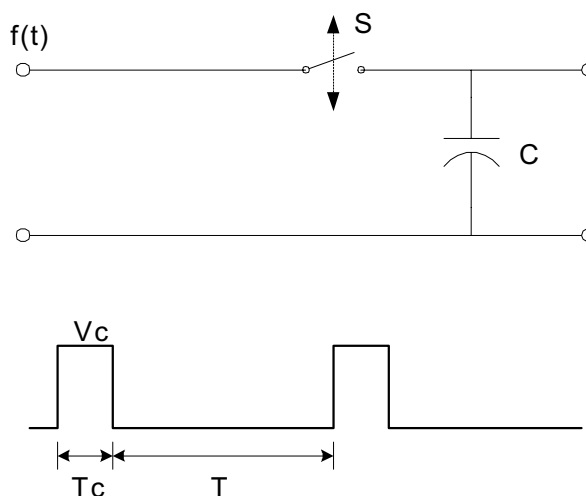
Filteri, zaštitni krugovi i analogni multipleksori se obično svi zajedno nalaze na štampanim pločicama koje se nazivaju uređaji za podešavanje i prilagodbu signala. Stoga nije potrebno svaki od njih konstruirati zasebno, već je dovoljno kupiti gotovu pločicu pri čemu treba obratiti pažnju na njene karakteristike.



Slika 2-11 Dva načina spajanja multipleksora, pojačala i filtera

2.2.8 Krugovi za uzimanje uzoraka signala

Na slici 2-12 je prikazan osnovni krug za uzimanje uzoraka. Ulaz je analogni signal $f(t)$ čiji se uzorci uzimaju frekvencijom $1/T_s$. Uzimanje uzoraka se kontrolira naponom V_c koji otvara i zatvara sklopku. Dok je sklopka zatvorena za vrijeme T_c , kapacitet se nabija na vrijednost $f(t)$. Za vrijeme $T_s - T_c = T_H$ (vrijeme držanja) kapacitet na sebi drži vrijednost uzorka dok ne uzmemo novi uzorak. U vremenu T_H se mora dogoditi AD pretvorba uzorka na kondenzatoru i tada se on isprazni i spreman je uzeti novi uzorak. Proces uzimanja uzoraka i držanja uzoraka se najbolje vidi iz slike 2-12.



Slika 2-12 Šematski prikaz sklopa za uzimanje uzoraka

Postoji niz krugova za uzimanje i držanje uzorka i oni se nalaze na štampanim pločicama u obliku integriranih krugova. Gotovo svi komercijalno dostupni krugovi za uzimanje uzoraka rade na navedenom principu, a njihove bitne karakteristike su točnost i brzina kojom mogu uzimati uzorke [L7].

2.3 Sažetak

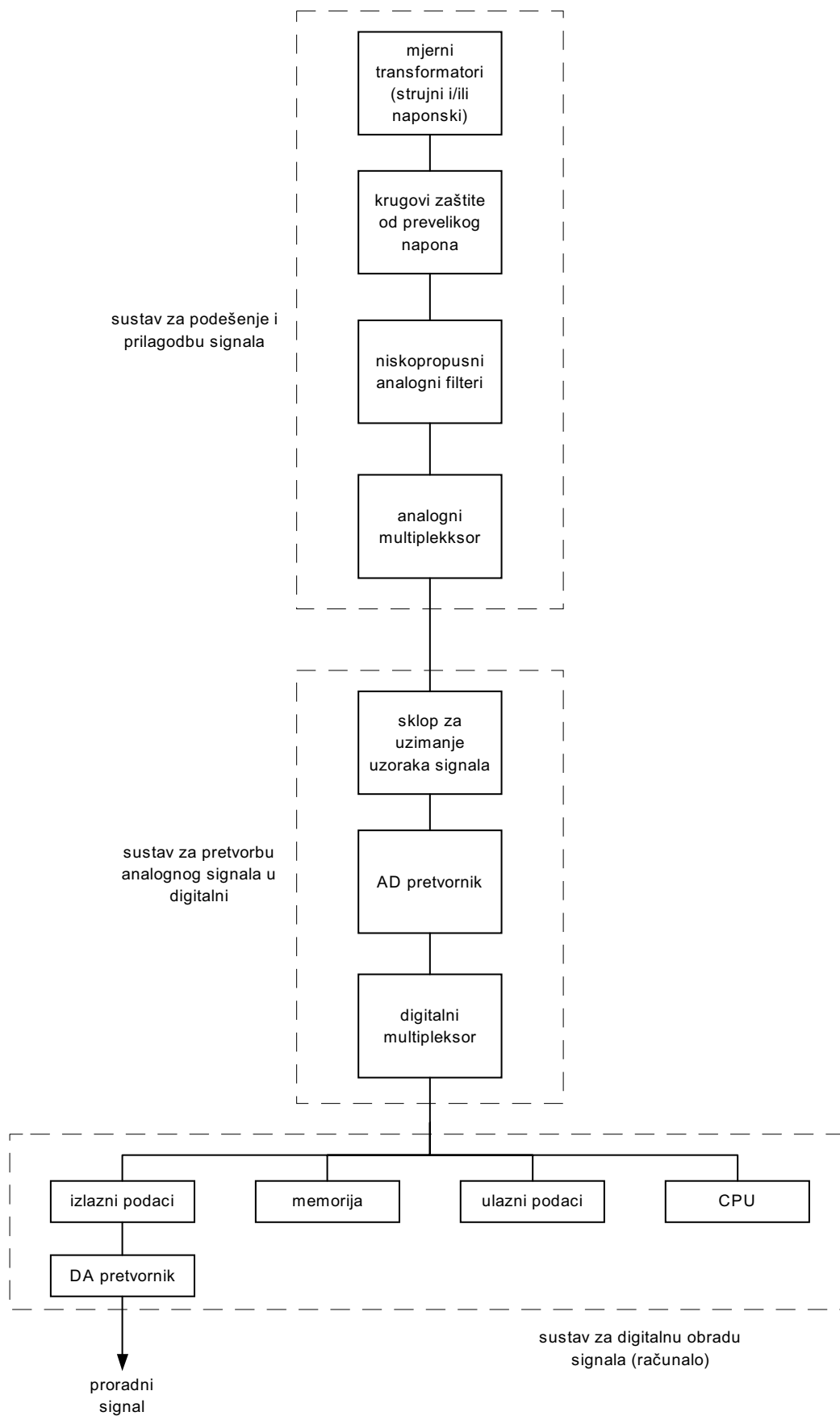
Ono o čemu nije bilo govora su AD pretvornici, DA pretvornici i digitalni multipleksori. Za AD pretvornike je rečeno da je bitan čimbenik njihova rezolucija, a također je bitna i brzina pretvorbe. Pošto se svi navedeni elementi nalaze na pločicama u obliku integriranih krugova, čije karakteristike je dovoljno poznavati, nije potrebno ulaziti u detaljna fizikalna objašnjenja njihovog rada.

Ako se u praksi primjeni sve iz poglavlja dva, tada je moguće prikazati sustav za mjerenje i obradu signala kao na slici 2-13.

Na slici se vidi da se prvo mjereni signal dovodi u sustav za podešenje i prilagodbu signala. Nakon toga slijedi sustav za pretvorbu analognog signala u digitalni i kao treći sustav je računalo koje obrađuje signal.

Sustav za podešenje i prilagodbu signala se sastoji od mjernih naponskih i strujnih transformatora koji uzimaju signal iz primarnog kruga i smanjuju ga na odgovarajuće napone i struje. Nakon toga se signal dovodi do zaštitnih krugova koji ga dodatno smanjuju kako ne bi oštetio elektroničke komponente koje slijede. Oni također i galvanski odvajaju ostatak mjernog sustava. Nakon njih se signal dovodi na niskopropusne analogne filtere i analogni multipleksor. S analognog multipleksora se analogni signal šalje u sustav za pretvorbu analognog signala u digitalni. Tu signal prvo dolazi na krug za uzimanje uzoraka nakon čega se na AD pretvorniku pretvara u digitalni signal koji se zatim šalje na daljnju obradu u računalo. U računalu se signal obrađuje prema potrebi, izvlače se zaključci iz obrade signala te na osnovi njih računalo može dati određeni signal koji služi kako bi pokrenuo određeni proces (na primjer, ako se izmjerila struja kratkog spoja daje se nalog prekidaču za isklup).

Gornju blok šemu ne treba uzimati uvijek takvu jer je, na primjer, moguće mjeriti temperaturu pomoću temperature sonde i tada nisu potrebni mjerni transformatori niti zaštitni krugovi, već je dovoljno dovesti signal sonde izravno na krug za uzimanje uzoraka. Dakle, izgled sustava će ovisiti o onome što se mjeri i s kakvom opremom se mjeri.



Slika 2-13 Blok prikaz sustava za mjerenje i digitalnu obradu signala

3 METODE KONAČNIH RAZLIKA

U poglavlju 3 *Metode konačnih razlika* se govori o osnovnim matematičkim principima bez kojih je nemoguće razumijevanje i izvod raznih numeričkih algoritama.

Glavne teme su diferencijalna funkcija naprijed, diferencijalna funkcija nazad i centralna diferencijalna funkcija.

Neka se pretpostavi da su brojčane vrijednosti $f(x_k)$ neke funkcije $y=f(x)$ dane za jednako udaljene vrijednosti x i to takve da vrijedi: $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, ..., $x_k=x_0+kh$. Također valja pretpostaviti da su vrijednosti $f(x_k)$ dobivene uzimanjem uzoraka nekog stvarnog signala u trenutku x_k . Stoga vrijedi sljedeće za $x=x_k$

$$f(x_k) = f(x_0 + kh) = f_k \quad (3.1)$$

Sada je moguće pomoću brojčanih vrijednosti f_k složiti tablicu razlika i to do željene veličine n -tog reda. U tablici 3-1 je prikazan primjer za funkciju $f_k = 1/\sqrt{x_k}$

Tablica 3-1. Tablica razlika petog reda

x_k	$f_k = 1/\sqrt{x_k}$	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$	$\Delta^5 f_k$
1	1,0000					
2	0,7071	-0,2929				
3	0,5774	-0,1298	0,1631			
4	0,5000	-0,0774	0,0525	-0,1106		
5	0,4472	-0,0528	0,0246	-0,0279	0,0827	
6	0,4083	-0,0390	0,0138	-0,0108	0,0171	-0,0656

U osnovi postoje tri diferencijalne funkcije do kojih se može doći za određeni skup prikupljenih uzoraka nekog signala. To su diferencijalna funkcija naprijed, diferencijalna funkcija nazad i centralna diferencijalna funkcija. Vrijednosti koje se dobiju iz tih funkcija služe u digitalnoj zaštiti kao ulazni podaci za razne algoritme koji tada određuju ponašanje releja.

3.1 Diferencijalne funkcije naprijed, nazad i centralna

Diferencijalna funkcija naprijed je definirana kao [L11]:

$$\begin{aligned} \Delta f_k &= f_{k+1} - f_k \\ \Delta^2 f_k &= \Delta f_{k+1} - \Delta f_k \end{aligned} \quad (3.2)$$

Slijedi da za svaki n koji je veći od nule n -ti red funkcije poprima oblik

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k \quad (3.3)$$

To je ilustrirano u tablici 3-1. za $x=1, \dots, 6$ i $k=1, \dots, 6$.

Diferencijalna funkcija nazad je definirana pomoću trenutnog uzorka signala i prethodnog uzorka i to na sljedeći način [L11]:

$$\begin{aligned} \nabla f_k &= f_k - f_{k-1} \\ \nabla^2 f_k &= \nabla f_k - \nabla f_{k-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

n -ti red tada poprima oblik

$$\nabla^n f_k = \nabla^{n-1} f_k - \nabla^{n-1} f_{k-1} \quad (3.5)$$

Centralna diferencijalna funkcija je definirana uz pomoć uzoraka koji su skupljeni u polovici intervala uzimanja uzoraka ($h/2$) i to sa svake strane u trenutku t . Prema tome oblik funkcije je dan sljedećim izrazom [L12]:

$$\begin{aligned} \delta f_k &= f_{k+1/2} - f_{k-1/2} \\ \delta^2 f_k &= \delta f_{k+1/2} - \delta f_{k-1/2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

n -ti red funkcije tada glasi

$$\delta^n f_k = \delta^{n-1} f_{k+1/2} - \delta^{n-1} f_{k-1/2} \quad (3.7)$$

Pošto nije moguće skupiti uzorke na pola intervala uzimanja uzoraka tada je moguće koristiti interpolaciju kako bi se procijenilo koliki bi bio uzorak u tom trenutku ili što je jednostavnije, može se koristiti metoda centralnih razlika tako da se rabe uzorci prije i poslije trenutnog uzorka (x_{k-1} i x_{k+1}). Tada centralna diferencijalna funkcija poprima oblik

$$\delta f_k = \delta f_{k+1} - \delta f_{k-1} \quad (3.8)$$

Razlika između tri funkcije je u trenutku u kojem ih je moguće koristiti. Tako je na primjer, diferencijalna funkcija naprijed dostupna za računanje u trenutku kada je dostupan k -prvi ($k+1$) uzorak signala, dok je diferencijalna funkcija nazad dostupna u trenutku kada je dostupan k -ti (k) uzorak signala. O obliku signala i funkciji koju se koristi ovisi kolika će biti točna vrijednost izračunate prve, druge ili neke n -te derivacije signala koji se mjeri.

U praksi točnost pojedinih funkcija ovisi o obliku signala i o trenutnoj vrijednosti signala i teško je reći koja bi funkcija bolje prikazivala derivacije pojedinog signala, jer se to mijenja od točke do točke signala koji se prati.

Ove tri osnovne funkcije služe kao polazna točka iz koje se kasnije dobivaju točnije aproksimacije derivacija mjerenog signala pomoću interpolacijskih formula o kojima će biti riječi u poglavlju 4.

3.2 Operator pomaka E i operator prosjeka μ

Operatori E i μ su povezani sa operatorima diferencijalnih funkcija Δ , ∇ i δ i to tako da je operator pomaka definiran kao operator koji povećava vrijednost funkcije na mjestu uzimanja uzorka za jedan interval (h) odnosno [L7]

$$E(f_k) = f(x_k + h) \quad (3.9)$$

Odnos između operatora E i ostalih operatora se može dobiti iz sljedećih relacija:

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k = E f_k - f_k = (E - 1) f_k \quad (3.10)$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} \Delta &= E - 1 \\ E &= 1 + \Delta \end{aligned} \quad (3.11)$$

Istom procedurom dobijemo da vrijedi

$$\begin{aligned} \nabla f_k &= (E - 1) f_{k-1} \\ f_{k-1} &= f_k / E \end{aligned} \quad (3.12)$$

iz čega slijedi

$$\nabla = 1 - E^{-1} \quad (3.13)$$

Centralna diferencijalna funkcija glasi

$$\delta f_k = f_{k+1/2} - f_{k-1/2} \quad (3.14)$$

što se može pisati pomoću operatora E kao:

$$\delta f_k = E^{1/2} f_k - E^{-1/2} f_k = (E^{1/2} - E^{-1/2}) f_k \quad (3.15)$$

odnosno

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} \quad (3.16)$$

Operator prosjeka je definiran na sljedeći način [L7]:

$$\mu f_k = 1/2(f_{k+1/2} + f_{k-1/2}) \quad (3.17)$$

Ono što on radi je da omogućava dobivanje procjene vrijednosti dane funkcije (mjenog valnog oblika) iz uzoraka mjerenja uzetih u polovici intervala uzimanja uzoraka sa svake strane nekog trenutka t u kojem je potrebna ta procjena vrijednosti. Odnos operatora E i μ se dobiva iz slijedećih relacija:

$$\mu f_k = (E^{1/2} f_k + E^{-1/2} f_k) / 2 = 1/2(E^{1/2} + E^{-1/2}) f_k \quad (3.18)$$

odnosno

$$\mu = 1/2(E^{1/2} + E^{-1/2}) \quad (3.19)$$

Gore navedeni operatori predstavljaju jezgrovit način prikazivanja prikupljenih uzoraka nekog mjenog valnog oblika. Oni su također važni jer omogućavaju jednostavno rukovanje u algoritamskim jednadžbama s prikupljenim uzorcima signala i stoga se koriste u razvoju programske podrške koju rabe digitalni zaštitni releji.

4 INTERPOLACIJSKE FORMULE

U poglavlju 4 Interpolacijske formule prikazane su razne interpolacijske formule koje kasnije služe za numeričko deriviranje izmjerenog signala

Jedan od glavnih problema numeričkih metoda je na koji način treba aproksimirati zadanu funkciju $f(x)$ (izmjereni valni oblik) pomoću funkcije $g(x)$ koja je prikladnija za izračunavanje, te zatim odrediti pogrešku koja je učinjena pri takvoj aproksimaciji. Uobičajeni oblik aproksimacije je linearna kombinacija [L12]

$$g(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \dots + a_n g_n(x) \quad (4.1)$$

Također se koriste i racionalne funkcije oblika [L12]

$$g(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} = \frac{P_n(x)}{P_m(x)} \quad (4.2)$$

Ako se uzme neki izmjereni valni oblik i ako su poznate vrijednosti $f(x_k)$ u točkama $x_k, k=0, \dots, n$, tada postoji funkcija čiji je oblik potpuno nepoznat, a ono što je poznato su vrijednosti funkcije u pojedinim točkama $x_0 \dots x_n$.

Također valja pretpostaviti da su točke x međusobno jednako udaljene za neku vrijednost h , drugim riječima one su ekvidistantne. Sada se postavlja pitanje izračunavanja približnih vrijednosti funkcije f izvan točaka x_i odnosno za neki x koji nije jednak x_i . To se radi tako da se nepoznata funkcija f zamijeni sa drugom, nama poznatom funkcijom, koja ima iste vrijednosti u zadanim točkama kao i funkcija f . Od tuda slijedi problem izračunavanja interpolacijskog polinoma. Ovdje će biti govora samo o Newtonovom obliku interpolacijskog polinoma jer je on interesantan za projektiranje raznih algoritama koji služe u digitalnoj zaštiti.

4.1 Newtonov interpolacijski polinom

Newtonov oblik se dobiva iz razlike diferencija. Za točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ se definiraju razlike diferencija funkcije f kao [L12]

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \quad (4.3)$$

Za tri točke se javlja razlika diferencija drugog reda funkcije f što izgleda kao

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Također vrijedi i za razliku diferencija n -tog reda sljedeće:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (4.5)$$

ili drugačije pisano

$$\begin{aligned} f[x, x, \dots, x] &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} + \dots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq j \leq n}} (x_i - x_j)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Iz Lagrangeovog polinoma, koji ovdje nije prikazan, dobije se Newtonov interpolacijski polinom koji ima oblik s razlikama diferencija i on glasi:

$$\begin{aligned} L_x(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Kako se neki signal mjeri u točkama x_k koje su jednako udaljene od točke s lijeva odnosno desna za neku udaljenost h (ekvidistantne su) tada se interpolacijski polinom može zapisati i pomoću diferencija naprijed, nazad i centralne.

4.1.1 Interpolacija naprijed

Ako postoji neki valni oblik i njegova vrijednost $f_k = f(x_k)$ tada je moguće izračunati vrijednost $f_{k+1} = f(x_k + h)$, gdje je h interval uzimanja uzoraka, iz jednadžbe (3.9) i to na sljedeći način:

$$f_{k+1} = f(x_k + h) = E f_k \quad (4.8)$$

Isto tako je i vrijednost funkcije na mjestu $x = x_k + ph$ jednaka vrijednosti na mjestu x_k pomaknutoj za interval koji je jednak p puta interval uzimanja uzoraka h iz čega proizlazi

$$f_{k+p} = E^p f_k \quad (4.9)$$

Ako se sada E zamijeni izrazom iz jednadžbe (3.11) dobiva se

$$f_{k+p} = (1 + \Delta)^p f_k = [1 + k_{1f} \Delta + k_{2f} \Delta^2 + k_{3f} \Delta^3 \dots + k_{pf} \Delta^p] f_k \quad (4.10)$$

gdje je k_{mf} m -ti binomni koeficijent koji se računa iz izraza

$$k_{mf} = \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-m+1)}{m!} \quad (4.11)$$

Iz gore navedenog slijedi da se približnu vrijednosti funkcije u točki p može dobiti iz sljedećeg izraza:

$$f_{k+p} = f_k + p\Delta f_k + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 f_k + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 f_k + \dots$$

$$\dots + \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n!}\Delta^n f_k \quad (4.12)$$

gdje n predstavlja red polinoma. Ako se pretpostavi da je p jednak nekom r za kojeg vrijedi $0 \leq r \leq 1$, tada je $f_{k+p} = f_{k+r}$ jednako vrijednosti funkcije na mjestu (argument) $x_k + rh$ i iz toga slijedi:

$$f_{k+r} = f(x_k + rh) = f_k + r\Delta f_k + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_k + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_k + \dots$$

$$\dots + \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_k \quad (4.13)$$

Jednadžba (4.13) se zove Gregory-Newtonov interpolacijski polinom naprijed i on se koristi za određivanje vrijednosti funkcije između mjerenih točaka iz tablice razlika naprijed. Način računanja se može pokazati za funkciju $f_k = 1/\sqrt{x_k}$ za koju je već prije izrađena tablica razlika za diferencijalnu funkciju naprijed (tablica 3-1).

Recimo da se želi izračunati vrijednost funkcije u točki $x=3.5$ pomoću tablice 3-1 i koristeći jednadžbu (4.13). Također se želi procijeniti vrijednost funkcije u točki x samo pomoću prva dva člana iz formule (4.13). Iz gore navedenog slijedi:

$$f_{k+r} \approx f_k + r\Delta f_k, \text{ gdje je } k=3 \text{ i } r=0.5 \quad (4.14)$$

Iz tablice se očita f_3 i Δf_3 i dobiva se

$$f_{3+0.5} \approx 0.5774 + 0.5(-0.0774) = 0.5387$$

$f(3.5)=0.5345$ iz čega slijedi da je pogreška u procjeni ako se uzmu samo prva dva člana formule (4.13) jednaka 0.786%. Ako se sad račun ponovi, ali ovaj put s prva tri člana formule, tada se dobiva izraz koji glasi:

$$f_{k+r} \approx f_k + r\Delta f_k + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_k \quad (4.15)$$

Ako se sada sve vrijednosti iz tablice 3-1 uvrste u gore navedenu formulu (sada je potreban i $\Delta^2 f_3$ iz tablice) dobiva se približna vrijednost funkcije u točki 3,5 koja iznosi 0,535625. To odgovara pogrešci od 0,21%, iz čega slijedi da će greška biti to manja što se više članova iz formule (4.13) koristi. Kao što je već i prije rečeno, jednadžba (4.13) se koristi u digitalnoj zaštiti kako bi se pomoću nje točnije odredila približna brojčana vrijednost derivacije mjerenog valnog oblika, što će biti pokazano u poglavlju 5 koje govori o numeričkom deriviranju.

4.1.2 Interpolacija nazad

Do dolaženja interpolacijskog polinoma pomoću diferencijalne funkcije nazad može se doći isto kao i u prijašnjem poglavlju pomoću operatora E , no sada će biti prikazan drugačiji način u kojemu se ne koristi operator E . Diferencije nazad su definirane u formulama (3.4) i (3.5). Prvo će biti prikazana veza između diferencija naprijed i razlike diferencija (formula 4.3). Budući su čvorovi (točke mjerenja) ekvidistantni vrijedi slijedeće:

$$\frac{\Delta f(x)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = f[x_0, x_1] \quad (4.16)$$

iz čega slijedi

$$\Delta f(x_0) = 1!h \cdot f[x_0, x_1] \quad (4.17)$$

Za razliku diferencija drugog reda dobiva se

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{2h^2} \\ &= \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

iz čega slijedi

$$\Delta^2 f(x_0) = 2!h^2 \cdot f[x_0, x_1, x_2] \quad (4.19)$$

Ako se tako nastavi dalje dolazi se do Newtonovog interpolacijskog polinoma naprijed. Kako se koristi diferencijalna jednadžba nazad slijedi da se mora pomicati u nazad i zbog toga se kreće od zadnjeg čvorišta (zadnje točke mjerenja), tako da se analogno formuli (4.13) sada dobiva

$$f[x_N, x_{N-1}, \dots, x_{N-r}] = \frac{\nabla^r f(x_N)}{r!h^r} \quad (4.20)$$

Ako se sada u formuli (4.7) krene od x_N do x_0 tada se dobiva

$$L_N(x) = f(x_N) + f[x_N, x_{N-1}](x - x_N) + \dots + f[x_N, x_{N-1}, \dots, x_0](x - x_N)(x - x_{N-1}) \dots (x - x_1) \quad (4.21)$$

Ako se u gornju formulu uvrsti izraz (4.20) i to za $r=1, 2, \dots, n$ tada slijedi

$$L(x_N) = f(x_N) + \frac{\nabla f(x_N)}{1!h}(x - x_N) + \frac{\nabla^2 f(x_N)}{2!h^2}(x - x_N)(x - x_{N-1}) + \dots$$

$$\dots + \frac{\nabla^n f(x_N)}{n!h^n} (x - x_N)(x - x_{N-1}) \dots (x - x_1) \quad (4.22)$$

Kao i jednadžbu (4.13) tako se i jednadžbu (4.22) može zapisati u drukčijem obliku, pomoću intervala h i pomaka koji će se označiti sa s , iz čega slijedi da je $x = x_N + sh$. Tada se može pisati

$$\begin{aligned} f_{N+s} = f(x_N + sh) = f_N + s\nabla f_N + \frac{s(s+1)}{2!} \nabla^2 f_N + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} \nabla^3 f_N + \dots \\ \dots + \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}{n!} \nabla^n f_N \end{aligned} \quad (4.23)$$

Gornja jednadžba (4.23) se zove Gregory-Newtonov interpolacijski polinom nazad. Ova jednadžba također služi za što točnije određivanje derivacije nekog mjenog valnog oblika (signala).

4.1.3 Centralna interpolacija

Postoje mnoge verzije centralnog interpolacijskog polinoma koje se mogu dobiti iz centralne diferencijalne funkcije. Ovdje će biti navedene samo dvije. Prva je Newton-Gaussova interpolacijska formula naprijed i ona glasi [L7]:

$$\begin{aligned} f(x_k + rh) = f_k + r\delta f_{k+1/2} + \frac{r(r-1)}{2!} \delta^2 f_k + \frac{(r+1)(r-1)}{3!} \delta^3 f_{k+1/2} + \\ + \frac{(r+1)r(r-1)(r-2)}{4!} \delta^4 f_{k+1/2} + \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

Druga je Newton-Gaussova interpolacijska formula nazad i ona glasi [L7]:

$$\begin{aligned} f(x_k + rh) = f_k + r\delta f_{k-1/2} + \frac{r(r-1)}{2!} \delta^2 f_k + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!} \delta^3 f_{k-1/2} + \\ + \frac{(r+2)(r+1)r(r-1)}{4!} \delta^4 f_k \end{aligned} \quad (4.23)$$

5 NUMERIČKO DERIVIRANJE

U poglavlju 5 **Numeričko deriviranje** su prikazani razni načini kako se može numerički derivirati. To je važno stoga što u tom slučaju nije potrebno funkcijski opisati izmjereni skup točaka, već je iz njih samih moguće doći do derivacija.

To dakle smanjuje broj računarskih operacija i samim time ubrzava postupak računanja, što je bitno kada se radi o algoritmima koji moraju biti brzi.

Bilo koja od interpolacijskih formula iz poglavlja 4 može služiti za procjenu derivacije nekog mjenog valnog oblika. To se može i pokazati ako se uzme formula (4.13), dakle interpolacijski polinom naprijed, koji glasi

$$f_{k+r} = f(x_k + rh) = f_k + r\Delta f_k + \frac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 f_k + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} \Delta^3 f_k + \dots \quad (5.1)$$

Ako se sada formula (5.1) derivira po r , dobiva se sljedeće:

$$hf'(x_k + rh) = \Delta f_k + \frac{2r-1}{2} \Delta^2 f_k + \frac{3r^2-6r+2}{6} \Delta^3 f_k + \frac{2r^3-9r^2+11r-3}{12} \Delta^4 f_k \quad (5.2)$$

Ponovnim deriviranjem po r dobiva se:

$$h^2 f''(x_k + rh) = \Delta^2 f_k + (r-1) \Delta^3 f_k + \frac{6r^2-18r+11}{12} \Delta^4 f_k + \dots \quad (5.3)$$

Derivacija u točki (f_k, x_k) se može dobiti ako se postavi da je $r=0$ pa tada slijedi da je prva derivacija

$$f'_k = f'(x_k) = \frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 - \dots \right) f_k \quad (5.4)$$

Druga derivacija će tada biti

$$f''_k = f''(x_k) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12} \Delta^4 - \dots \right) f_k \quad (5.5)$$

Isto tako kao što se postupilo sa formulom (4.13) može se i postupiti sa interpolacijskim polinomom nazad (4.23) koji se derivira po s pa se dobije:

$$hf'(x_N + sh) = \nabla f_N + \frac{2s+1}{2} \nabla^2 f_N + \frac{3s^2+6s+2}{6} \nabla^3 f_N + \frac{2s^3+9s^2+11s+3}{12} \nabla^4 f_N + \dots \quad (5.6)$$

Druga derivacija glasi

$$h^2 f''(x_N + sh) = \nabla^2 f_N + (s+1)\nabla^3 f_N + \frac{6s^2 + 18s + 11}{12} \nabla^4 f_N + \dots \quad (5.7)$$

Ako se sada postavi da je $s=0$, dolazi se do izraza:

$$f'_k = f'(x_{N=k}) = \frac{1}{h} \left(\nabla + \frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{3} \nabla^3 + \dots \right) f_k \quad (5.8)$$

$$f''_k = f''(x_k) = \frac{1}{h^2} \left(\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12} \nabla^4 + \frac{5}{6} \nabla^5 + \dots \right) f_k \quad (5.9)$$

Valja napomenuti da se sve gore navedeno može primijeniti i na centralne interpolacijske formule iz kojih se tada isto dobiju izrazi za procjenu derivacije mjenenog valnog oblika.

Način korištenja gore navedenih formula je taj da se iz mjenenih uzoraka signala pokuša odrediti derivacija signala. Ako, na primjer, postoje dva izmjerena uzorka nekog signala tada se, pomoću interpolacijske formule nazad, može procijeniti derivaciju signala pomoću izraza (5.8) i to tako da se iz tog izraza koriste samo prva dva člana. Tada se može pisati:

$$f'_k = \frac{1}{h} \nabla f_k = \frac{1}{h} (f_k - f_{k-1}) \quad (5.10)$$

Ako, na primjer, postoje tri uzorka signala, a želi se izračunati derivaciju u trenutku kada je izmjerena drugi uzorak, tada se postupa tako da se pretpostavi da je zadnji od tri uzorka f_{k+1} iz čega slijedi da je drugi uzorak f_k . Sada je potrebno jednadžbu (5.8) izraziti pomoću f_{k+1} . U tome će pomoći operator E i jednadžba (3.12) iz čega slijedi:

$$f_k = (1 - \nabla) f_{k+1} \quad (5.11)$$

Kada se izraz (5.11) uvrsti u jednadžbu (5.8) dobiva se sljedeće:

$$\begin{aligned} f'_k &= \frac{1}{h} \left(\nabla f_{k+1} + \frac{1}{2} \nabla^2 f_{k+1} + \frac{1}{3} \nabla^3 f_{k+1} + \dots - \nabla^2 f_{k+1} - \frac{1}{2} \nabla^3 f_{k+1} - \frac{1}{3} \nabla^4 f_{k+1} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\nabla - \frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{1}{6} \nabla^3 - \dots \right) f_{k+1} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ako se u obzir uzmu samo prva dva člana formule (5.12) tada se uz pomoć jednadžbe (3.5) dolazi do izraza pomoću kojeg se može izmjeriti brzinu promjene mjenenog signala u točki k koja je centralna točka od tri izmjerene točke. Izraz glasi:

$$f'_k = \frac{1}{2h} (f_{k+1} - f_{k-1}) \quad (5.13)$$

Ako se pak iz tri uzorka želi dobiti i drugu derivaciju u trenutku k , tada je potrebno ubaciti izraz (5.11) u jednadžbu (5.9) i nakon sređivanja se dobije

$$f_k'' = \frac{1}{h^2} \left(\nabla^2 + \frac{1}{12} \nabla^4 - \frac{1}{12} \nabla^6 + \dots \right) f_{k+1} \quad (5.14)$$

Uzimajući u obzir samo prvi član, jednačba (5.14) prelazi u oblik

$$f_k'' \approx \frac{1}{h^2} \nabla^2 f_{k+1} = \frac{1}{h^2} (f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}) \quad (5.15)$$

Jednačba (5.15) dakle definiira približnu vrijednost druge derivacije mjenog valnog oblika u trenutku k , odnosno trenutku kada je izmjeren drugi od tri uzorka.

6 NUMERIČKO INTEGRIRANJE

*U slučaju izmjerenog skupa točaka nekog valnog oblika nije poznat funkcijski opis tog valnog oblika. Ako se taj valni oblik želi integrirati u nekim granicama tada treba pronaći način na koji računalo to može napraviti iz diskretnih vrijednosti koje su izmjerene. Upravo način na koji se to radi opisuje poglavlje **6 Numeričko integriranje**.*

6.1 Newton-Cotesove formule

Ako se pretpostavi da se skup izmjerenih točaka može opisati nekom funkcijom $f(x)$, koja nije poznata, tada se za integral te funkcije u nekim granicama može napisati

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + R(f) \quad (6.1)$$

gdje je $g(x)$ funkcija kojom se aproksimira nepoznata funkcija $f(x)$, a $R(f)$ je pogreška. Neka $g(x)$ bude Lagrangeov interpolacijski polinom koji glasi [L12]

$$g(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(x - x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad (6.2)$$

i za kojeg vrijedi $L_n(x_i) = f(x_i) = y_i$, $i=0, 1, 2, \dots, n$. Iz jednadžbe (6.1) i (6.2), uz zanemarenje pogreške, slijedi da je

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(x - x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} dx = \sum_{i=0}^n y_i \int_a^b \frac{\prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(x - x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} dx = \sum_{i=0}^n y_i A_i \quad (6.3)$$

gdje je

$$A_i = \int_a^b \frac{\prod_{j=0}^n (x - x_j)}{(x - x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} dx, \quad i=0, 1, 2, \dots, n \quad (6.4)$$

Valja primijetiti kako A_i ne ovisi o funkciji $f(x)$. Neka sada granice integriranja budu prva i zadnja izmjerena točka, $a=x_0$ i $b=x_n$, i ako postoji jednolik (ekvidistantan) razmak među točkama tada se može pisati

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{x_n - x_0}{n}, \quad x_i = x_0 + ih, y_i = f(x_i), \quad i=0, 1, \dots, n$$

Ako se uvede novi parametar t za kojeg vrijedi

$$t = \frac{x - x_0}{h}, \text{ odnosno } x = x_0 + th \quad (6.5)$$

tada se može pisati

$$\begin{aligned} x - x_0 &= th \\ x - x_1 &= (x - x_0) - (x_1 - x_0) = th - h \\ x - x_2 &= (x - x_1) - (x_2 - x_1) = th - 2h \\ &\vdots \\ x - x_n &= th - nh \end{aligned} \quad (6.6)$$

Također se može pisati

$$\begin{aligned} x_i - x_0 &= ih \\ x_i - x_1 &= (x_i - x_0) - (x_1 - x_0) = ih - h = (i-1)h \\ &\vdots \\ x_i - x_{i-1} &= h \\ x_i - x_{i+1} &= -h \\ &\vdots \\ x_i - x_n &= -(n-i)h \end{aligned} \quad (6.7)$$

Ako se sada (6.6) i (6.7) uvrste u (6.4) tada se može pisati

$$A_i = \int_0^n \frac{th(th-h)\dots(th-ih)\dots(th-nh)}{(th-ih)ih(i-1)h\dots h(-h)\dots(-(n-i)h)} h dt \quad (6.8)$$

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dt = \frac{x_n - x_0}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dt \quad (6.9)$$

Valja naglasiti da i ide od 0 do n . Ako se sada uvede nova vrijednost H_i , tada se može pisati

$$H_i = \frac{A_i}{x_n - x_0} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dt, \quad i=0, 1, 2, \dots, n \quad (6.10)$$

Iz gornjih jednačbi se formula (6.4) može drugačije napisati i tada glasi

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx (x_n - x_0) \sum_{i=0}^n H_i y_i = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i \quad (6.11)$$

H_i se nazivaju Cotesovi koeficijenti a formula (6.11) se zove Newton-Cotesova formula. Ukoliko se u formuli (6.11) uvrsti da je $n=1$, to znači da postoje samo dvije točke, x_0 i x_1 . To je ujedno i osnovna trapezna formula te se za taj slučaj ($n=1$) može pisati

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = -\int_0^1 (t-1) dt = \frac{1}{2} \quad (6.12)$$

$$H_1 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \quad (6.13)$$

Iz gornje dvije jednadžbe slijedi aproksimacija koja glasi

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{x_1 - x_0}{2} (y_0 + y_1) = \frac{h}{2} (y_0 + y_1) \quad (6.14)$$

Iz formule (6.14) se dobije trapezna formula, što je u biti primjena osnovne trapezne formule po dijelovima. Ona glasi

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \quad (6.15)$$

To se može pisati kao

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \quad (6.16)$$

gdje su

$$a = x_0, \quad b = x_n, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad y_i = f(x_i)$$

Formula (6.16) se zove trapezna formula i koristi se za numeričko integriranje. Postoje i brojne druge formule koje služe za numeričku integraciju uključujući i one za koje nije potrebno da je razmak među izmjerenim točkama ekvidistantan [L12]. One ovdje nisu navedene jer se ne koriste u ovom radu.

7 FUNKCIJSKI OPIS MJERENIH TOČAKA

*Pronalaženje funkcijskog opisa nekog valnog oblika čije su vrijednosti (točke) izmjerene je rasprostranjena tehnika koja se koristi u znanosti, inženjerskim, poslovnim i drugim problemima gdje je potrebno analizirati dobivene mjerne podatke. Time se dobiva mogućnost prikaza rezultata mjerenja pomoću kontinuiranog modela, umjesto diskretnog modela koji je posljedica mjerenja u točkama. Tehnika nalaženja matematičke funkcije kojom bi se najbolje opisali podaci dobiveni mjerenjem se sastoji u tome da je potrebno izračunati parametre (koeficijente) krivulje iz izmjerenih točaka i tada se pomoću tih parametara složi funkcijski opis izmjerenog signala, o čemu i govori poglavlje **7 Funkcijski opis mjernih točaka**.*

Postoje brojni modeli pomoću kojih je moguće doći do funkcijskog opisa izmjerenih podataka. Ovdje su navedeni neki:

$$\text{Linearni opis: } y_i = a_0 + a_1 x_i \quad (7.1)$$

$$\text{Eksponencijalni opis: } y_i = a_0 e^{a_1 x_i} \quad (7.2)$$

$$\text{Generalni polinomski opis: } y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots \quad (7.3)$$

$$\text{Generalni linearni opis: } y_i = a_0 + a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) + \dots \quad (7.4)$$

$$\text{Nelinearni Levenberg-Marquardtov opis: } y_i = f(x_i, a_0, a_1, a_2, \dots) \quad (7.5)$$

Generalni linearni opis (7.4) se naziva linearnim jer je y_i linearna kombinacija parametara a_0, a_1, a_2, \dots . Stoga je, na primjer, $y = a_0 + a_1 \sin(x)$ ili $y = a_0 + a_1/x$ također linearni opis jer je y u linearnoj ovisnosti s parametrima a_0 i a_1 . Iz toga slijedi da su svi polinomski opisi uvijek linearni. S druge strane, postoji nelinearni Levenberg-Marquardtov opis (7.5) gdje nije potrebno da su parametri a_x u linearnoj ovisnosti o y . Levenberg-Marquardtov opis se može koristiti za linearne i nelinearne krivulje, no gotovo uvijek se koristi za nelinearne krivulje jer je generalni polinomski opis (7.3) bolji za linearni prikaz krivulja. Levenberg-Marquardtov opis ne garantira uvijek točne rezultate pa ih je uvijek potrebno provjeriti [L5].

7.1 Metoda najmanjih kvadrata

Iz prethodnog poglavlja je vidljivo da je u biti potrebno odrediti koeficijente krivulje koji bi najbolje opisivali mjerene rezultate. Glavni algoritam koji se koristi kako bi se to postiglo je algoritam najmanjih kvadrata. Neka postoji N izmjerenih točaka koje su definirane parovima brojeva:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N) \quad (7.6)$$

gdje je x_i nezavisna varijabla koja označava trenutak mjerenja i -tog uzorka, a y_i je zavisna varijabla koja označava izmjerenu vrijednost u i -tom trenutku. U digitalnoj zaštiti je

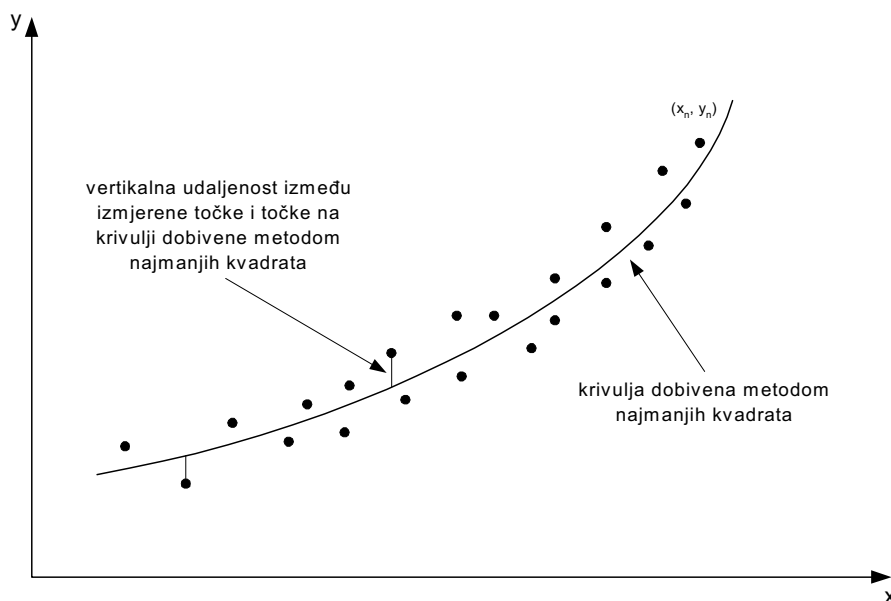
uobičajena praksa da se mjerena veličina, npr. napon, mjeri (uzimaju se uzorci) u diskretnim trenucima u vremenu pa se izmjerenu vrijednost može smatrati ovisnom varijablom, a trenutak kada je ta vrijednost izmjerena, odnosno vrijeme, se može smatrati neovisnom varijablom. Sada valja odrediti funkciju $u(x)$ koja će najbolje opisati izmjereni valni oblik tako da vrijedi

$$y_i \approx u(x_i), \quad i=1,2,\dots,N \quad (7.7)$$

Tip funkcije koja bi najbolje opisala valni oblik ovisi o prirodi problema. U većini problema s kojima se susreću u zaštiti najčešće se koristi generalni polinomski opis (7.3) oblika

$$u = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (m < N) \quad (7.8)$$

Kako bi se u potpunosti definirala funkcija potrebno je odrediti vrijednosti konstanti a_x tako da opisna funkcija najbolje odgovara izmjenjenim rezultatima. Kriterij koji se najčešće koristi kako bi se dobilo najbolje poklapanje, zahtijeva da suma kvadrata udaljenosti izmjenjenih točaka od krivulje kojom se želi aproksimirati izmjenjeni valni oblik (7.8) bude minimalna. Upravo to je metoda najmanjih kvadrata. Kada se govori o udaljenosti misli se na vertikalnu udaljenost između izmjenjene točke y_i i aproksimirane točke na krivulji $u(x_i)$ kao što je i prikazano na slici 7-1.



Slika 7-1 Metoda najmanjih kvadrata

Vertikalna udaljenost točke od krivulje iznosi

$$\varepsilon_i = y_i - u(x_i) \quad (7.9)$$

Suma kvadrata udaljenosti svih točaka je dakle

$$S = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m)]^2 \quad (7.10)$$

Uvjet da S bude minimalan postizemo tako da se S parcijalno derivira za svaki a_k i tada se to izjednači s nulom, dakle

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, m) \quad (7.11)$$

Ako se sada jednačba (7.11) primijeni na jednačbu (7.10) dobiva se sustav od N jednačbi oblika

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= -2 \sum_{i=1}^N [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m)] = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} &= -2 \sum_{i=1}^N x_i [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m)] = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} &= -2 \sum_{i=1}^N x_i^m [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m)] = 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Nakon pojednostavnjenja jednačbu (7.12) je moguće napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \dots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \dots & \sum x_i^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \dots & \dots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \dots \\ \dots \\ \sum x_i^m y_i \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

To je sustav jednačbi koji sada treba riješiti kako bi se dobili koeficijente a_0, a_1, \dots, a_m .

Ako, na primjer, postoje izmjerene točke koje iznose

x	-1.0	-0.1	0.2	1.0
y	1.0	1.099	0.808	1.0

i koje se žele pomoću metode najmanjih kvadrata aproksimirati pravcem oblika

$$u = a_0 + a_1 x \quad (7.14)$$

postupa se tako da se prvo postavi $m=1$, što je i potrebno kada se želi dobiti pravac. Matrica (7.13) tada poprima sljedeći oblik:

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

Kako postoje četiri izmjerene veličine, dobiva se da je limit sumiranja $N=4$ i iz toga proizlaze četiri konstante

N=4

$$\sum x_i = -1 - 0.1 + 0.2 + 1 = 0.1 \quad (7.16)$$

$$\sum x_i^2 = (-1)^2 + (-0.1)^2 + (0.2)^2 + (1)^2 = 0.25 \quad (7.17)$$

$$\sum y_i = 1 + 1.099 + 0.808 + 1 = 3.907 \quad (7.18)$$

$$\sum x_i y_i = 0.0517 \quad (7.19)$$

Ako se te konstante uvrste u matricu (7.15) tada je moguće izračunati vrijednosti parametara a_0 i a_1 koje iznose:

$$a_0 = 0.9773 \quad a_1 = -0.0224$$

Iz toga slijedi jednačba pravca koja najbolje opisuje izmjereni oblik i ona glasi:

$$u = 0.9773 - 0.0224x \quad (7.20)$$

U gore provedenoj analizi se pošlo od pretpostavke da varijabla y ovisi samo o varijabli x . U općenitom slučaju y može ovisiti o više varijabla, a ne o samo jednoj. Primjer za to je slučaj gdje postoji trofazni nesimetrični sustav u kojem napon u fazi a , v_a , ovisi o strujama u sve tri faze i_a , i_b i i_c . Stoga za određivanje v_a trebaju struje u sve tri faze koje se dobiju mjerenjem. Slijedi da je napon v_a funkcija $v_a = f(i_a, i_b, i_c)$. Stoga je svaki izmjereni napon povezan s izmjerenim strujama pomoću skupa izmjerenih točaka $(i_{a1}, i_{b1}, i_{c1}, v_{a1})$, $(i_{a2}, i_{b2}, i_{c2}, v_{a2})$, ..., $(i_{aN}, i_{bN}, i_{cN}, v_{aN})$. Ako postoji funkcija od x varijabli onda skup točaka poprima oblik $(x_{11}, x_{21}, x_{31}, \dots, x_{z1}, y_1)$, $(x_{12}, x_{22}, x_{32}, \dots, x_{z2}, y_2)$, ..., $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, \dots, x_{zN}, y_N)$. Način dobivanja koeficijenata iz metode najmanjih kvadrata je sličan gore navedenom za jednu varijablu.

7.2 Primjene funkcijskog opisa izmjerenih podataka

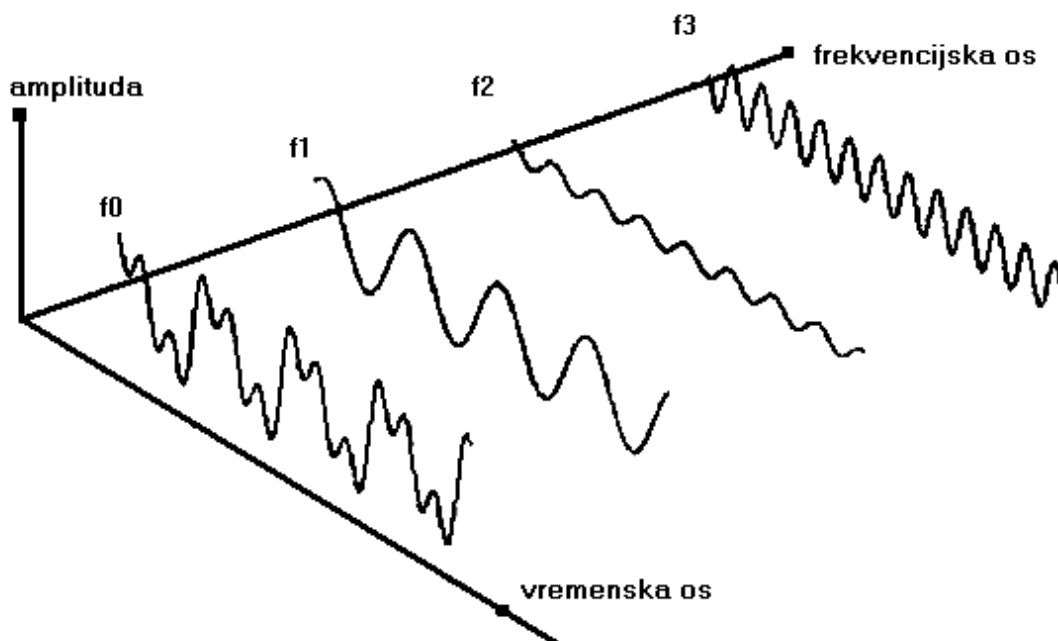
Primjene su brojne od kojih će biti navedene najvažnije. To su [L13]:

- Eliminiranje izmjerenih točaka koje su nastale zbog raznih grešaka (npr. šum).
- Popunjavanje točaka koje su se izgubile ako npr. dvije ili tri točke nismo uspjeli izmjeriti zbog neke greške u opremi.
- Interpolacija odnosno procjena vrijednosti funkcije između mjerenih točaka što je korisno ako vrijeme između dvije izmjerene točke nije dovoljno.
- Ekstrapolacija odnosno procjena vrijednosti funkcije (valnog oblika) u točkama koje nisu bile mjerene (ako se na primjer želi procijeniti vrijednosti funkcije prije ili poslije mjerenja).
- Deriviranje digitalnog signala. Ako se traži derivacija u pojedinim točkama tada je moguće izmjerene diskretne vrijednosti aproksimirati sa, na primjer, polinomom (7.3) koji se tada derivira kao i svaka druga funkcija.
- Integriranje digitalnog signala ako se želi recimo naći površinu ispod krivulje kada postoje samo izmjerene diskretne vrijednosti.
- Dobivanje smjera putanje nekog objekta pomoću diskretnih izmjerenih veličina brzine (prva derivacija) ili akceleracije (druga derivacija).

8 FOURIEROVA ANALIZA

U poglavlju 8 Fourierova analiza se govori o Fourierovom redu i rastavu signala na Fourierov red, te o Fourierovoj transformaciji koja služi za prebacivanje signala iz vremenske domene u frekvencijsku domenu.

Kada se mjeri neki signal tada se to radi u vremenskoj domeni, odnosno mjeri se amplituda signala u određenim vremenskim intervalima koji se još nazivaju intervali uzimanja uzoraka. Ako se mjeri napon u utičnici u zidu pomoću osciloskopa onda oblik signala koji se vidi na ekranu predstavlja oblik signala napona u vremenskoj domeni. Drugim riječima, prati se promjena oblika signala kroz vrijeme (u ovom slučaju je to sinusoida). Informacije koje se dobivaju o signalu u vremenskoj domeni su maksimalna amplituda, nul-točke, brzina promjene signala u vremenu, vrijeme koje je potrebno da se signal priguši itd. No signal sadrži i druge korisne informacije do kojih se može doći tek kada se signal prebaci iz vremenske domene u frekvencijsku domenu. Frekvencijska domena je takav način prikaza signala iz kojeg su vidljive frekvencijske komponente mjerenog signala i njihove amplitude. Taj prikaz proizlazi iz Fourierovog teorema, koji kaže da se svaki valni oblik u vremenskoj domeni može prikazati kao suma sinusa i kosinusa pomnoženih s nekim težinskim faktorima [L14]. Taj isti valni oblik može biti prikazan u frekvencijskoj domeni tako da je na osi y vrijednost amplitude, a na osi x fazna vrijednost svake komponente signala. Sve je mnogo jasnije ako se pogleda slika 8-1 [L15].



Slika 8-1 Prikaz signala u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

Na slici je prikazan generirani valni oblik koji se dobio zbrajajući sinusne oblike raznih amplituda i faza. Slika 8-1 prikazuje originalni valni oblik nazvan suma i signale raznih frekvencija od kojih je on sastavljen. Osnovna frekvencija je f_0 , drugi harmonik ima frekvenciju $2f_0$, a treći harmonik ima frekvenciju $3f_0$. Napomenuto je kako je taj valni oblik generiran. Ako se sada izmjeri takav valni oblik i zatim ga se rastavi na

osnovne komponente i na grafu prikaže amplituda i frekvencija pojedinih komponenata, tada se nalazimo u frekvencijskoj domeni prikaza signala. Način na koji se signal rastavlja na osnovne komponente je upravo Fourierova analiza. Sada će se pobliže objasniti Fourierova analiza.

8.1 Fourierov red

8.1.1 Trigonometrijski oblik

Svaka periodična funkcija $f(t)$ se može prikazati pomoću Fourierovog reda diskretnih harmonika (harmonika točno određene frekvencije) oblika [L16]

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (8.1)$$

gdje je ω_0 osnovna kutna frekvencija koja iznosi

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (8.2)$$

T je period osnovne komponente, $n\omega_0$ je n -ti harmonik kutne frekvencije i t je proizvoljan i odabire se za željeni trenutak u vremenu.

Za zadanu funkciju $f(t)$, koja se u praksi najčešće mijenja sa vremenom, koeficijenti $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ se mogu odrediti iz izraza (8.3-8.5)

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt \quad (8.3)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (8.4)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (8.5)$$

Jednadžba (8.1) se može pisati i u drugom obliku ako se grupiraju sinusi i kosinusi istih frekvencija. Tada se piše

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \Theta_n) \quad (8.6)$$

gdje je

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \Theta_0 = 0, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \Theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}, \quad (n=1,2,\dots) \quad (8.7)$$

8.1.2 Kompleksni oblik

Koji puta je poželjno imati jednadžbu (8.1) u kompleksnom obliku koja ima oblik jednadžbe (8.8) i potpuno je ekvivalentna jednadžbi (8.1)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_n e^{jn\omega_0 t} \quad (8.8)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \bar{F}_n &= \frac{(a_n - jb_n)}{2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty \\ &= \frac{a_0}{2} \quad \text{za } n=0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Ako se u jednadžbu (8.9) uvrste jednadžbe (8.3-8.5) dobiva se

$$\begin{aligned} \bar{F}_n &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt \quad \text{za } n=0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Iz poglavlja 8.1.1 i 8.1.2 je vidljivo ono o čemu je bilo govora u početku, a to je da je periodičku funkciju $f(t)$ moguće prikazati na dva načina i to:

1. u vremenskoj domeni gdje je promjena funkcije u vremenu opisana nekom jednadžbom koja definira funkciju $f(t)$
2. u frekvencijskoj domeni gdje je funkcija $f(t)$ prikazana pomoću faza i amplituda tih faza, odnosno amplituda i pojedinih sinusoidalnih komponenata frekvencija $n\omega_0$ ($n=1, 2, \dots$) koje tvore valni oblik funkcije $f(t)$. Prikaz u frekvencijskoj domeni se postiže tako da se definiraju Fourierovi koeficijenti, bilo (a_n, b_n) , (A_n, Θ_n) ili \bar{F}_n .

8.2 Fourierova transformacija

Pokazano je da se bilo koja periodična funkcija može prikazati pomoću Fourierovog reda. No u praksi se često javljaju neperiodične funkcije. To je pogotovo tako u zaštiti gdje pri raznim manipulacijama u postrojenjima postoje razne prijelazne pojave. Iz tog razloga je potrebno moći prikazati i neperiodičnu funkciju pomoću Fourierovog reda. Prvo što treba učiniti je to da se neperiodična funkcija promatra kao funkcija s periodom T koji je jednak beskonačnom ($T \rightarrow \infty$). Slijedi da je

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_p(t) \quad (8.11)$$

gdje je $f_p(t)$ kopija funkcije koja se ponavlja nakon pretpostavljenog beskonačnog vremenskog trenutka. Ako se pretpostavi da su Fourierovi koeficijenti \bar{F}_n funkcije $f_p(t)$

poznati, tada se $f_p(t)$ može izračunati ako se jednačba (8.10) uvrsti u (8.8). Ako se još pretpostavi da je $t_1=T/2$, tada se dobije

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t} \quad (8.12)$$

ili

$$f_p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{2\pi}{T} \quad (8.13)$$

Ako se pusti da $T \rightarrow \infty$ tada je moguće zaključiti sljedeće [L7]:

1. osnovna frekvencija $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = d\omega \rightarrow 0$ i $n\omega_0 = \omega$
2. potrebno je bezbroj harmonika koji su razmaknuti za $d\omega \rightarrow 0$ kako bi se pomoću njih složila funkcija $f(t)$. U biti je vremenska funkcija predstavljena kontinuiranim spektrom frekvencija međusobno razmaknutim beskonačno malim frekvencijskim pomakom $d\omega$.

Iz navedenih razmatranja i jednačbe (8.13) slijedi

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} f_p(t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (8.14)$$

odnosno

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega \quad (8.15)$$

Izraz koji se nalazi u zagradi u jednačbi (8.15) je funkcija frekvencije i piše se kao

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (8.16)$$

Funkcija frekvencije $F(\omega)$ se zove Fourierova transformacija funkcije $f(t)$. U odnosu na Fourierovu transformaciju funkcija $f(t)$ se može pisati kao [L17]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (8.17)$$

Bilo koja neperiodična funkcija se može prikazati kontinuiranim frekvencijskim spektrom $F(\omega)$ pomoću jednadžbe (8.16). Pomoću inverzne Fourierove transformacije se također može prijeći iz frekvencijske domene u vremensku domenu.

8.3 Fourier u diskretnom obliku

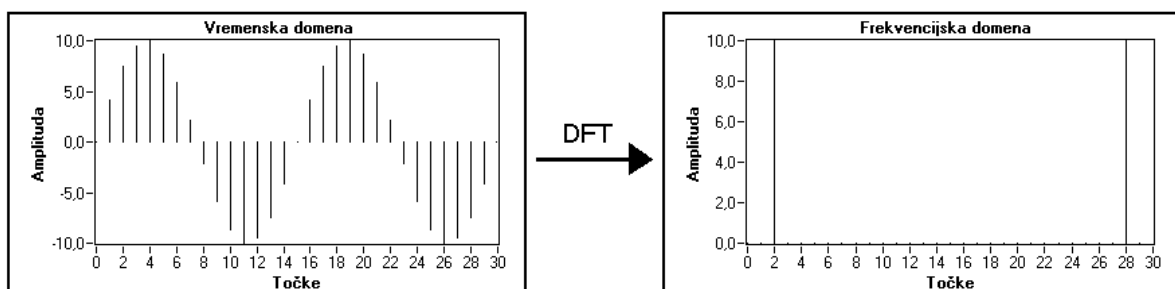
Kao što se i vidi jednadžba (8.8) definira Fourierov red za deterministički i periodički kontinuirani vremenski signal $x(t)$, koji zadovoljava sljedeća tri uvjeta [L18, L19]:

1. $\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$
2. $x(t)$ ima konačan broj maksimuma i minimuma na bilo kojem konačnom vremenskom intervalu, i
3. $x(t)$ ima konačan broj diskontinuiteta na bilo kojem vremenskom intervalu gdje je i svaki diskontinuitet također konačan

Jednadžba (8.16) definira Fourierovu transformaciju za deterministički i aperiodički kontinuirani vremenski signal $x(t)$, koji također zadovoljava gornja tri uvjeta s tom razlikom da granice integracije iznose $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.

Ako mjereni signal nema neki funkcijski opis, jer ga se mjeri digitalno pa stoga postoji samo diskretni oblik signala (vrijednosti signala u pojedinim točkama mjerenja) tada nije moguće koristiti jednadžbe (8.8) i (8.16) u obliku kakvom su zadane jer je za njihovo korištenje potreban funkcijski opis signala, a to nije dostupno. Jedan od načina kojim bi se moglo poslužiti je taj da se funkcijski opiše izmjereni signal pomoću algoritma najmanjih kvadrata (poglavlje 7) što je i dobar način ako se signal želi analizirati nakon mjerenja, no problem je taj da je to vremenski zahtjevno. To pogotovo dolazi do izražaja u digitalnoj zaštiti gdje je potrebno, uz što manje računanja kako bi se dobilo na vremenu, doći do informacija o signalu iz mjerenih točaka. Rješenje koje se nudi je diskretna Fourierova transformacija koja je definirana jednadžbom (8.18) za deterministički i periodički diskretni vremenski signal $x[n]$, koji zadovoljava uvjet $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]| < \infty$, gdje je N period signala (broj točaka).

$$x[i] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} ik}, \quad X[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] e^{-j \frac{2\pi}{N} ik}, \quad k=0 \dots N-1 \quad (8.18)$$



Slika 8-2 Odnos broja uzoraka u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

Ako postoji N izmjerenih uzoraka nekog signala i na te uzorke se primijeni diskretna Fourierova transformacija (DFT), rezultat je isto signal od N uzoraka ali u frekvencijskom području [L20]. To prikazuje slika 8-2.

Sada će biti поближе objašnjen odnos između N uzoraka u vremenskoj domeni i N uzoraka u frekvencijskoj domeni. Ako se uzorci signala uzimaju mjerenjem i to nekom frekvencijom f_s (Hz), tada vremenski interval među susjednim uzorcima (interval uzimanja uzoraka) Δt iznosi

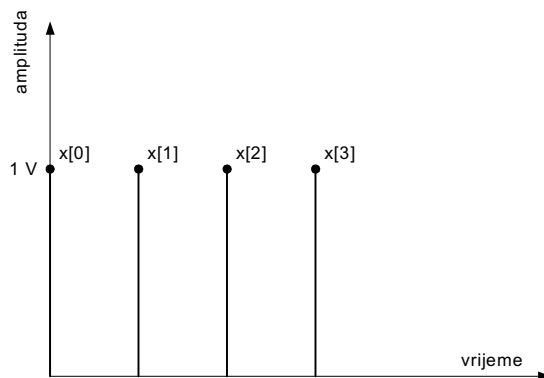
$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \quad (8.19)$$

DFT je zadana jednadžbom (8.18). Ako se ona sada primijeni na N uzoraka rezultat je prikaz signala $x[i]$ u frekvencijskoj domeni. Valja primijetiti da signal u vremenskoj domeni x i signal u frekvencijskoj domeni X imaju ukupno N točaka. Analogno vremenskom razmaku Δt između susjednih točaka u vremenskoj domeni tako i u frekvencijskoj domeni postoji razmak između susjednih točaka koji iznosi

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N\Delta t} \quad (8.20)$$

Δf se još naziva i frekvencijska rezolucija [L20]. Ako se želi povećati frekvencijsku rezoluciju (manji Δf) mora se povećati ili broj uzoraka N (s time da je f_s konstantan) ili smanjiti frekvenciju uzimanja uzoraka f_s (tada N mora biti konstantan).

Pretpostavimo da su izmjerena četiri uzorka istosmjernog signala (DC) koji ima konstantnu amplitudu od +1V (slika 8-3).



Slika 8-3 Uzorci DC signala

Također valja pretpostaviti da je $x[0]$ DC vrijednost odnosno prosječna vrijednost signala. Kasnije će biti prikazane točne frekvencije kojima odgovara N uzoraka DFT-a. Dakle izmjerena su četiri uzorka signala vrijednosti

$$x[0]=x[1]=x[2]=x[3]=1 \quad (8.21)$$

Uz pomoć jednadžbe (8.18) i Eulerove jednakosti koja glasi

$$e^{-j\Theta} = \cos(\Theta) - j \sin(\Theta) \quad (8.22)$$

dobiva se sljedeće:

$$X[0] = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-\frac{j2\pi i 0}{N}} = x[0] + x[1] + x[2] + x[3] = 4 \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} X[1] &= x[0] + x[1] \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) + x[2] (\cos(\pi) - j \sin(\pi)) + x[3] \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) = \\ &= (1 - j - 1 + j) = 0 \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} X[2] &= x[0] + x[1] (\cos(\pi) - j \sin(\pi)) + x[2] (\cos(2\pi) - j \sin(2\pi)) + x[3] (\cos(3\pi) - j \sin(3\pi)) = \\ &= (1 - 1 + 1 - 1) = 0 \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} X[3] &= x[0] + x[1] \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) + x[2] (\cos(3\pi) - j \sin(3\pi)) + \\ &+ x[3] \left(\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) \right) = (1 - j - 1 + j) = 0 \end{aligned} \quad (8.26)$$

Osim DC (istosmjerne) komponente $X[0]$, sve su ostale vrijednosti jednake nuli, što je i očekivano. Ali izračunata vrijednost $X[0]$ ovisi o broju uzoraka N . Izmjerena su bila četiri uzorka $N=4$ pa je $X[0]$ ispao 4. Da je bilo deset uzoraka, $N=10$, tada bi $X[0]$ ispao 10. Ovisnost $X[k]$ o N se također javlja i kod drugih frekvencijskih komponenata pa je potrebno rezultate koji su dobiveni iz DFT-a podijeliti sa N kako bi se dobile točne amplitude frekvencijskih komponenata.

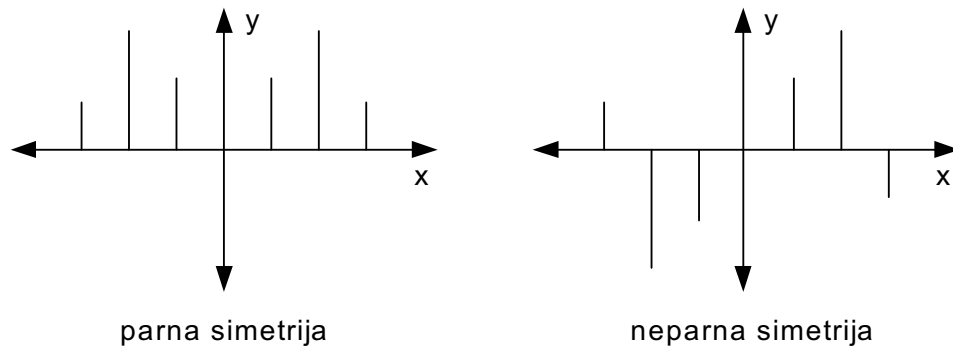
Kao što se vidi iz N uzoraka mjenog signala, dobije se i N uzoraka DFT-a. Odnosno broj uzoraka koji predstavljaju signal u vremenskoj i frekvencijskoj domeni je jednak. Iz jednadžbe (8.18) je vidljivo da je, bez obzira na to da li je ulazni signal $x[i]$ realan ili kompleksan, izlazni signal $X[k]$ je uvijek kompleksan iako se može dogoditi da je imaginarni dio jednak nuli. Iz toga slijedi da kada se nad nekim signalom provede DFT dobiju se dvije informacije i to o amplitudi i fazi. Izlazi da je za realne ulazne signale (na primjer izmjereni napon na uređaju koji ga mjeri i zatim šalje u računalo) DFT simetrična i to sa sljedećim svojstvima:

$$|X[k]| = |X[N-k]| \quad (8.27)$$

i

$$\text{faza}(X[k]) = -\text{faza}(X[N-k]) \quad (8.28)$$

Izrazi koji služe za opis te simetrije (8.27) i (8.28) su parna simetrija za amplitudu $X[k]$ i neparna simetrija za fazu ($X[k]$). Parna simetrija signala je ona gdje je signal simetričan oko y osi, dok je neparna simetrija signala ona gdje je signal simetričan oko točke ishodišta. To je prikazano na slici 8-4.



Slika 8-4 Parna i neparna simetrija

Posljedica te simetrije je ta da u signalu od N točaka, nakon provedene DFT, postoji ponavljanje informacija. Zbog tog ponavljanja informacija potrebno je izračunati i prikazati pomoću DFT-a samo pola uzoraka mjenjenog signala jer se druga polovica može dobiti iz prije navedenog ponavljanja. Ako je pak ulazni signal kompleksan, tada je DFT nesimetrična i tada se ne može poslužiti ovim trikom [L21].

8.3.1 Frekvencijski razmak među uzorcima signala

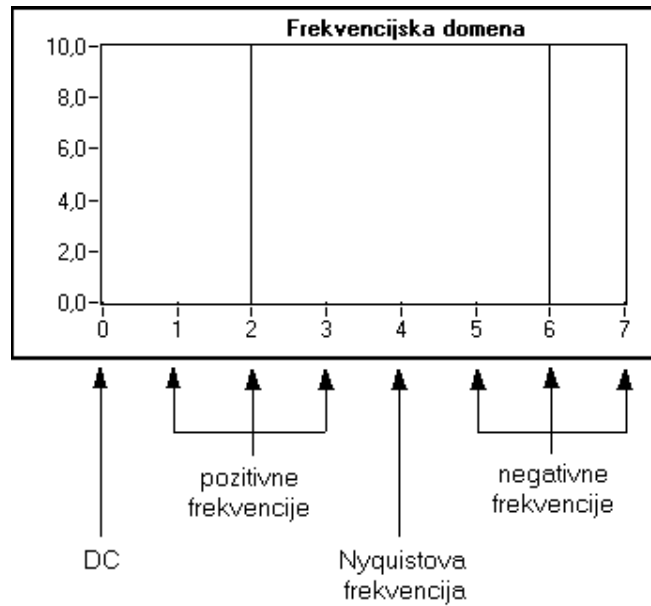
Ako je vremenski interval skupljanja uzoraka signala Δt sekundi i ako je prvi uzorak ($k=0$) u trenutku $t=0$, tada se k -ti ($k>0$, k je int.) uzorak signala javlja u trenutku $k\Delta t$ sekundi. Isto tako ako je frekvencijska rezolucija (8.20) Δf Hz tada k -ti uzorak DFT-a nastupa u trenutku frekvencije $k\Delta f$. Kao što će uskoro biti i pokazano, to vrijedi samo za polovicu frekvencijskih komponenata dok drugu polovicu predstavljaju negativne komponente. Ovisno o tome da li je broj uzoraka N paran ili neparan, postojat će i različita interpretacija frekvencije koja odgovara k -tom uzorku DFT-a. Ako se pretpostavi da je N paran i neka je $p=N/2$, tada se može sastaviti tablica 8-1 u kojoj je $N=8$, a samim time je $p=4$

Tablica 8-1. Tablica frekvencijskog razmaka za paran broj uzoraka

$X[0]$	DC
$X[1]$	Δf
$X[2]$	$2\Delta f$
$X[3]$	$3\Delta f$
$X[4]$	$4\Delta f$ (Nyquist-ova frekv)
$X[5]$	$-3\Delta f$
$X[6]$	$-2\Delta f$
$X[7]$	$-\Delta f$

Valja primijetiti kako p -ti element $X[p]$ odgovara Nyquistovoj frekvenciji. Negativne frekvencije se nalaze iza Nyquistove frekvencije. Također valja primijetiti da $X[1]$ i $X[7]$ imaju iste amplitude, $X[2]$ i $X[6]$ također imaju iste amplitude, a $X[3]$ i $X[5]$ isto tako. Razlika je u tome što $X[1]$, $X[2]$ i $X[3]$ spadaju u pozitivne frekvencijske komponente, dok $X[5]$, $X[6]$ i $X[7]$ spadaju u negativne frekvencijske komponente. Na slici 8-5 je prikazan i graf koji odgovara tablici 8-1.

Takav prikaz, gdje se vide pozitivne i negativne frekvencije, se naziva dvostrana transformacija.



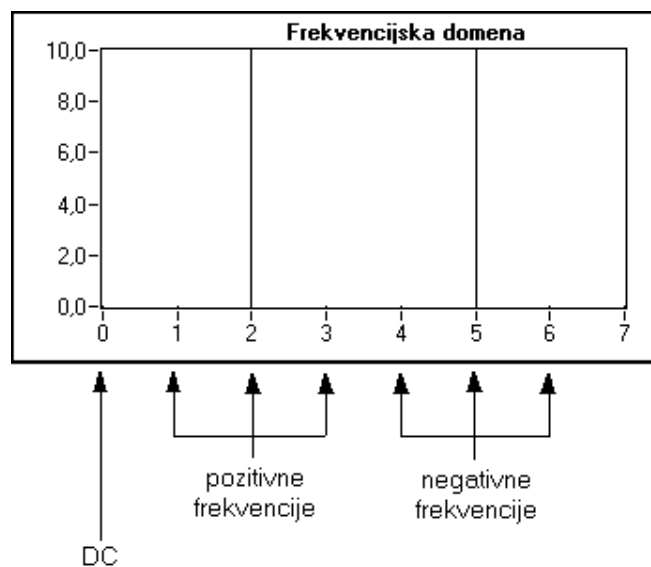
Slika 8-5 Prikaz signala u frekvencijskoj domeni za paran broj uzoraka

Ako se pak uzme da je N neparan tada ne postoji komponenta koja odgovara Nyquistovoj frekvenciji. Neka je na primjer $N = 7$, $p = (N-1)/2 = 3$ i tada slijedi

Tablica 8-2. Tablica frekvencijskog razmaka za neparan broj uzoraka

$X[0]$	DC
$X[1]$	Δf
$X[2]$	$2\Delta f$
$X[3]$	$3\Delta f$
$X[4]$	$-3\Delta f$
$X[5]$	$-2\Delta f$
$X[6]$	$-\Delta f$

Slika 8-6 prikazuje tablicu 8-2.



Slika 8-6 Prikaz signala u frekvencijskoj domeni za neparan broj uzoraka

To je također dvostrana transformacija, jer se javljaju pozitivne i negativne frekvencijske komponente.

8.3.2 Brza Fourierova transformacija (FFT)

Primjena DFT u praksi na N uzoraka zahtijeva približno N^2 kompleksnih operacija i vremenski je vrlo zahtjevna [L20]. No kada broj uzoraka zadovoljava uvjet

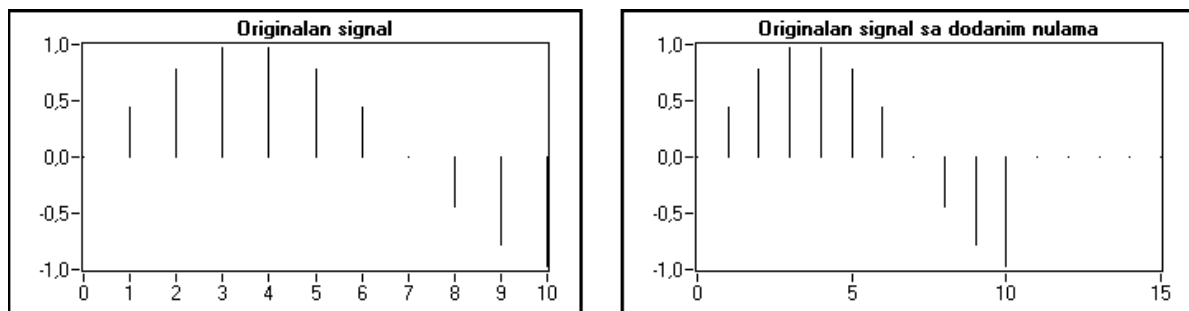
$$N = 2^m \quad \text{za } m=1, 2, 3, \dots \quad (8.29)$$

može se računati DFT sa približno $N \log_2(N)$ operacija. Zbog toga je računanje DFT mnogo brže i to se tada naziva brza Fourierova transformacija ili FFT. FFT nije ništa drugo nego brzi algoritam za računanje DFT kada je zadovoljen uvjet (8.29).

FFT ne omogućuje samo brzo računanje nego i efikasnije korištenje memorije računala jer nisu potrebni "bufferi" (dodatna memorija) u koje se spremaju međurezultati što se javljaju ako se koristi DFT.

8.3.3 Dodavanje nula

Ako postoji N izmjerenih točaka koje se žele propustiti kroz FFT algoritam, a ima ih toliko da ne zadovoljavaju uvjet (8.29), tada se koristi tehnika dodavanja nula kako bi se došli do N koji zadovoljava uvjet (8.29). Ako, na primjer, postoji 10 uzoraka signala može se dodati još šest točaka koje sve iznose nula. Tada se dosegne ukupan broj od 16 točaka ($2^4=16$) i samim time se zadovolji uvjet (8.29) [L20]. To je prikazano na slici 8-7.



Slika 8-7 Dodavanje nula

Dodavanje točaka sa vrijednosti nula na kraj izmjerenog signala u vremenskoj domeni ne utječe na prikaz signala u frekvencijskoj domeni. Osim što dodavanje nula omogućuje korištenje FFT algoritma, još se i povećava frekvencijska rezolucija (8.20) jer se povećao broj točaka N .

8.3.4 Primjer diskretne Fourierove analize

U poglavlju 8.3 su objašnjene osnove Fourierove analize u diskretnom obliku. Kako cilj ovog rada nije dokazivanje i izvod navedenih pretpostavki (vidi literaturu) nego praktična primjena teorije, ovdje je dan primjer DFT-a u LabVIEW programu. Primjer

se sastoji u tome da se odaberu amplitude dviju sinusoida i njihove frekvencije te ih potom program sumira i dobije se jedan valni oblik koji je u biti izobličena sinusoida. Ako se, na primjer, odabere frekvencija za prvu sinusoidu 50 Hz, a za drugu 150 Hz tada je konstruiran valni oblik koji se sastoji od prvog i trećeg harmonika i prikazan je na gornjem grafu u programu. Valja napomenuti da taj signal simulira snimljeni valni oblik pomoću nekog digitalnog uređaja i samim time je u diskretnom obliku, što znači da računalo ne zna da je to sinusni valni oblik već ima samo pojedine točke koje opisuju taj valni oblik u točno određenim vremenskim trenucima. Ako se sada snimljene točke propuste kroz DFT algoritam dobije se prikaz signala u frekvencijskoj domeni. To je i prikazano na donjem grafu u programu. Na njemu je na osi y prikazana amplituda pojedinih harmonika, a na osi x je prikazana osnovna frekvencija tih harmonika. Valja primijetiti, kao što je i rečeno u poglavlju 8.3.3, da se povećava frekvencijska rezolucija ako se povećava broj točaka N. Efekt toga je taj da se javlja sve manje i manje frekvencijskog curenja. Pri korištenju programa također valja obratiti pažnju na Nyquistovu frekvenciju.

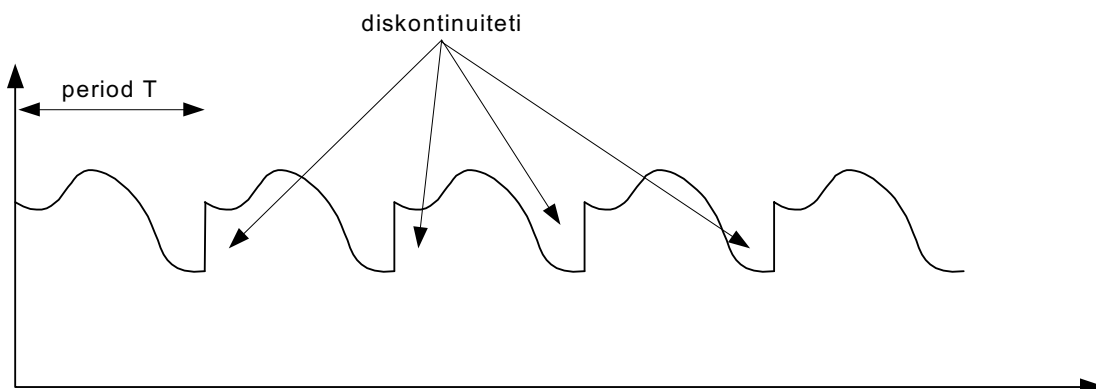
8.3.5 Sažetak

- Prikaz signala u vremenskoj domeni se može prebaciti u prikaz u frekvencijskoj domeni pomoću algoritma koji se zove diskretna Fourierova transformacija (DFT). Ako je zadovoljen uvjet (8.29) moguće je koristiti brzu Fourierovu transformaciju (FFT) koja omogućuje manji broj računskih operacija i zahtijeva manje memorije u računalu.
- DFT i FFT su korisni za mjerenje frekvencijskog sadržaja kod stacionarnih ili prelaznih signala. FFT daje frekvencijski sadržaj signala kroz cijelo vrijeme dok je signal bio prikupljan. Iz tog razloga se ona koristi za analizu stacionarnih signala (signal čije se frekvencijske komponente ne mijenjaju značajno kroz vrijeme). Većina problema spada u tu kategoriju. Ako se mjeri frekvencija signala koja se značajno mijenja tijekom prikupljanja signala, potrebno je koristiti algoritme za zajedničku vremensko-frekvencijsku analizu (JFTA algoritmi) [L22].

9 UOKVIRIVANJE SIGNALA

U poglavlju 9 Uokvirivanje signala se govori o načinu na koji se može spriječiti curenje frekvencije nakon što je izmjereni signal prebačen iz vremenske u frekvencijsku domenu.

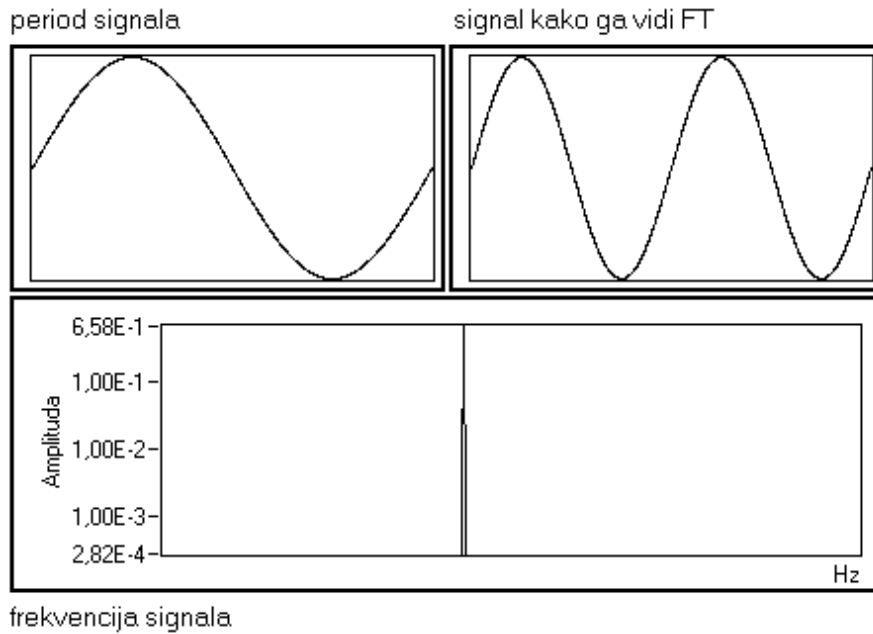
U stvarnim situacijama mjerenja nekog signala, dobije se uvijek konačni broj izmjerenih uzoraka tog signala. Kada se koristi algoritam za diskretnu Fourierovu transformaciju za analizu signala u frekvencijskoj domeni, tada se polazi od pretpostavke (algoritam radi na toj pretpostavci) da snimljeni signal u vremenskoj domeni predstavlja jedan period signala koji se periodički ponavlja. Ako sada postoji snimljeni signal sa cjelobrojnim brojem perioda tog signala (na primjer $3T$), tada DFT algoritam daje točnu sliku signala u frekvencijskom području. No, problemi nastaju ako to nije tako, odnosno ako postoji snimljeni necjelobrojan broj perioda signala (npr. $2.4T$), što je u stvarnosti gotovo uvijek i slučaj. Ako se to desi tada se javlja slučaj kao na slici 9-1.



Slika 9-1 Signal kako ga vidi DFT

Na slici je prikazan valni oblik kako ga vidi DFT. Postoji snimljen valni oblik čiji period nije uhvaćen u cijelosti, a DFT algoritam taj snimljeni oblik vidi, kao što je već i rečeno, kao jedan period signala te ga stalno ponavlja kako bi stvorio periodični signal (pretpostavka za pravilan rad algoritma), kao što se i vidi na slici 9-1. Rezultat snimljenog perioda koji nije cjelobrojan je pojava diskontinuiteta na granici susjednih perioda. Ti diskontinuiteti koji u stvarnom signalu ne postoje imaju za posljedicu stvaranje periodičkih signala vrlo visokih frekvencija u frekvencijskoj domeni koje su mnogo veće od Nyquistove frekvencije i one će se javiti kao alias između 0 i $f_s/2$. Stoga spektar signala koji se dobije pomoću DFT neće predstavljati pravi spektar originalnog signala. Posljedica toga je da će prikaz u frekvencijskoj domeni izgledati kao da se frekvencija signala rasula ili kao da je iscurila iz svog područja po svim drugim frekvencijama. To curenje frekvencije ovisi o amplitudi diskontinuiteta i bit će veće što je amplituda veća. Na slici 9-2 je prikazan sinusni signal i njegova Fourierova transformacija.

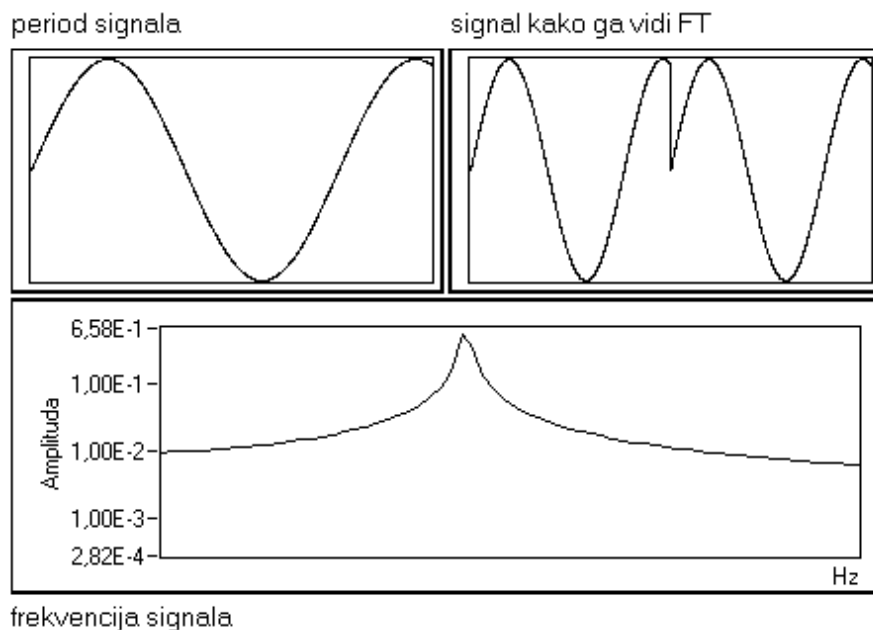
Na grafu 1 je prikazan snimljeni sinusni oblik u vremenskoj domeni i to točno jedan period. Na grafu 2 je prikazan model signala kojeg konstruira DFT algoritam (DFT pretpostavlja da se signal ponavlja beskonačno), on stalno nadodaje snimljeni signal na već postojeći (stvara niz). Konstruirani valni oblik na grafu 2 nema nikakvih



Slika 9-2 Nema curenja frekvencije

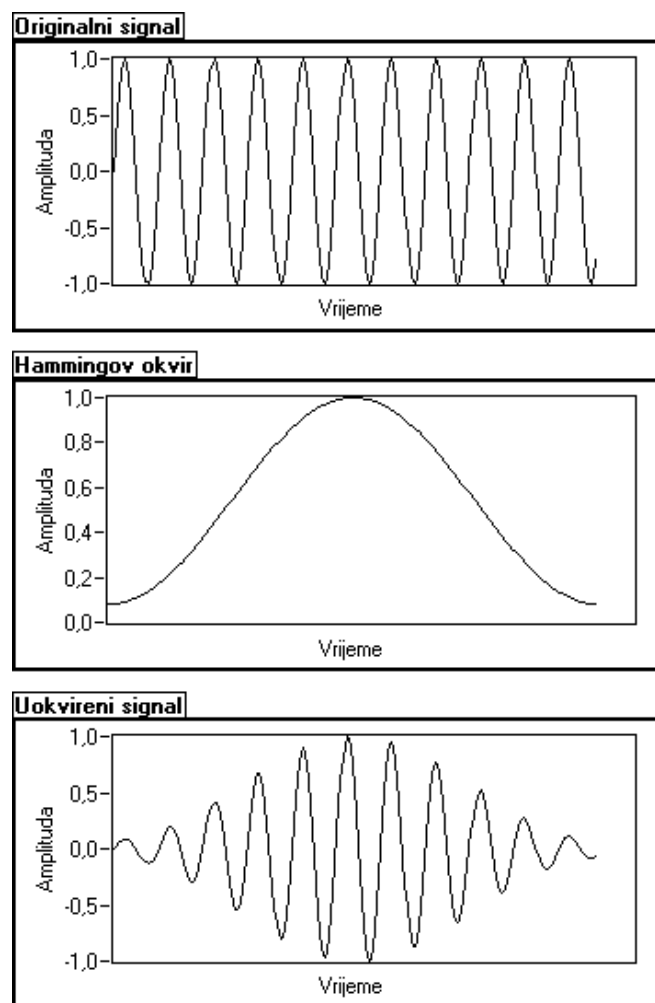
diskontinuiteta jer snimljeni uzorak signala sadržava cjelobrojan broj perioda (jedan u ovom slučaju). Frekvencijski prikaz signala je dat na grafu 3. Zbog toga što nema diskontinuiteta u vremenskoj domeni javlja se točan frekvencijski prikaz signala [

Na slici 9-3 je prikazan također sinusni valni oblik no ovaj puta je snimljen necjelobrojni broj perioda originalnog signala ($1.232T$). Signal sa grafa 1 je sada rabljen za konstruiranje signala koji koristi DFT i on je prikazan na grafu 2. On sada ima diskontinuitete jer nije snimljen cjeli broj perioda signala. Na grafu 3 je sada prikazan frekvencijski opis signala i vidi se da se u ovom slučaju frekvencija (energija) signala rasula po svim ostalim frekvencijama. To rasipanje se naziva curenje frekvencije.



Slika 9-3 Javlja se curenje frekvencije

Jedan od načina sprječavanja curenja frekvencije je taj da se skupi beskonačno mnogo točaka signala, od $-\infty$ do $+\infty$ iz čega bi slijedila idealna DFT. No problem je da je to nemoguće izvesti u stvarnosti. Praktično rješenje problema je korištenje tehnike uokvirivanja signala. Pošto curenje frekvencije ovisi o veličini diskontinuiteta potrebno je nekako smanjiti amplitudu diskontinuiteta. Uokvirivanje signala smanjuje amplitudu diskontinuiteta. Uokvirivanje signala je u biti množenje snimljenog valnog oblika u vremenskoj domeni s nekakvim valnim oblikom koji ima konačan broj točaka i amplituda koja na rubovima polako i postupno prelazi u nulu. Uokviriti signal znači dakle pomnožiti ga u vremenskoj domeni sa nekom funkcijom koja se još naziva i okvir. Pošto je množenje u vremenskoj domeni jednako konvoluciji u frekvencijskoj domeni tada je spektar uokvirenog signala u biti konvolucija spektra originalnog signala i spektra funkcije u okviru. Iz toga slijedi da uokvirivanje signala mijenja oblik signala u vremenskoj domeni, a utječe i na spektar signala. Jedna od tehnika korištenja okvira je prikazana i na slici 9-4.



Slika 9-4 Signal pomnožen sa Hammingovim okvirom

Na slici je prikazan originalni signal kojega se želi propustiti kroz DFT algoritam, no kako nije snimljen cjelobrojan broj perioda javili bi se diskontinuiteti. Da se to spriječi originalan signal se množi sa funkcijom okvira (u ovom je slučaju to Hammingov okvir) i dobije se uokvireni signal koji sada na rubovima postupno prelazi u nulu. Kada se sada takav signal propusti kroz DFT algoritam javlja se gotovo nikakvo ili minimalno curenje frekvencije.

9.1 Funkcije okvira

Primjene funkcija okvira su različite, a neke od njih su [L5]:

- Definiranje duljine vremena promatranja signala
- Smanjenje curenja frekvencije
- Razdvajanje signala malih amplituda od signala velikih amplituda čije su frekvencije vrlo blizu jedna druge

Postoje brojni tipovi funkcija okvira. Ovisno o aplikaciji koja se koristi i o tipu signala koji se očekuje izmjeriti ovisi i odabir funkcije. Radi potpunog pregleda sada će biti navedene funkcije okvira koje se rabe u praksi.

9.1.1 Pravokutni okvir

Vrijednost pravokutne funkcije okvira je jedan kroz cijelo vrijeme trajanja intervala. Matematički pisano slijedi [L5]:

$$w[n]=1 \text{ za } n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (9.1)$$

gdje je N duljina okvira u točkama. Primjena pravokutne funkcije je jednaka onoj kada uopće ne upotrijebimo okvir. Ona ima najveće frekvencijsko curenje u odnosu na druge funkcije okvira. Njena primjena je u tome da se pomoću nje može odrediti koju količinu signala se želi promatrati i također služi u detektiranju vibracija i njihovih harmonika kod strojeva. Na slici 9-5 je prikazana pravokutna funkcija okvira za $N=32$.



Slika 9-5 Pravokutni okvir

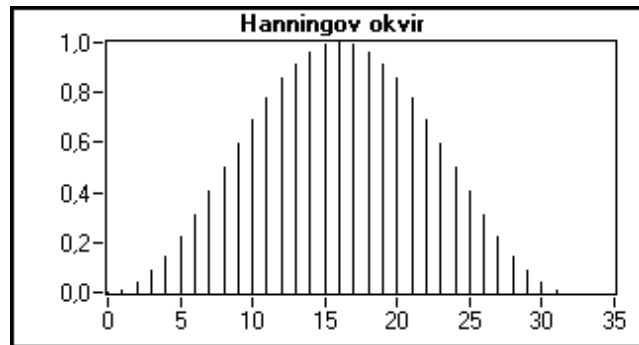
9.1.2 Hanningov okvir

Ovaj okvir ima oblik sličan polovici periode sinusne funkcije. Definiran je kao [L5]

$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \text{ za } n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (9.2)$$

Hanningov okvir je prikazan na slici 9-6 za $N=32$.

Primjena je u analizi prijelaznih pojava koje traju duže nego što traje okvir, i također se koristi u općenite svrhe.



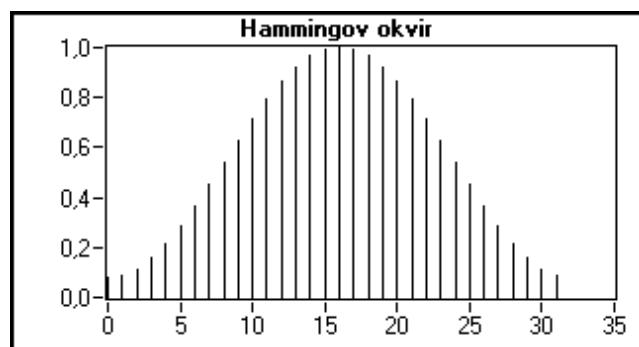
Slika 9-6 Hanningov okvir

9.1.3 Hammingov okvir

Ovaj okvir je modificirana verzija Hanningovog okvira pa stoga i ima sličan oblik. Definira se kao [L5]

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad \text{za } n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (9.3)$$

Na slici 9-7 je prikazan Hammingov okvir za $N=32$.



Slika 9-7 Hammingov okvir

Hanningova i Hammingova funkcija su slične, no Hammingov okvir u vremenskoj domeni ne dolazi na rubovima blizu nule kao što dolazi Hanningov okvir.

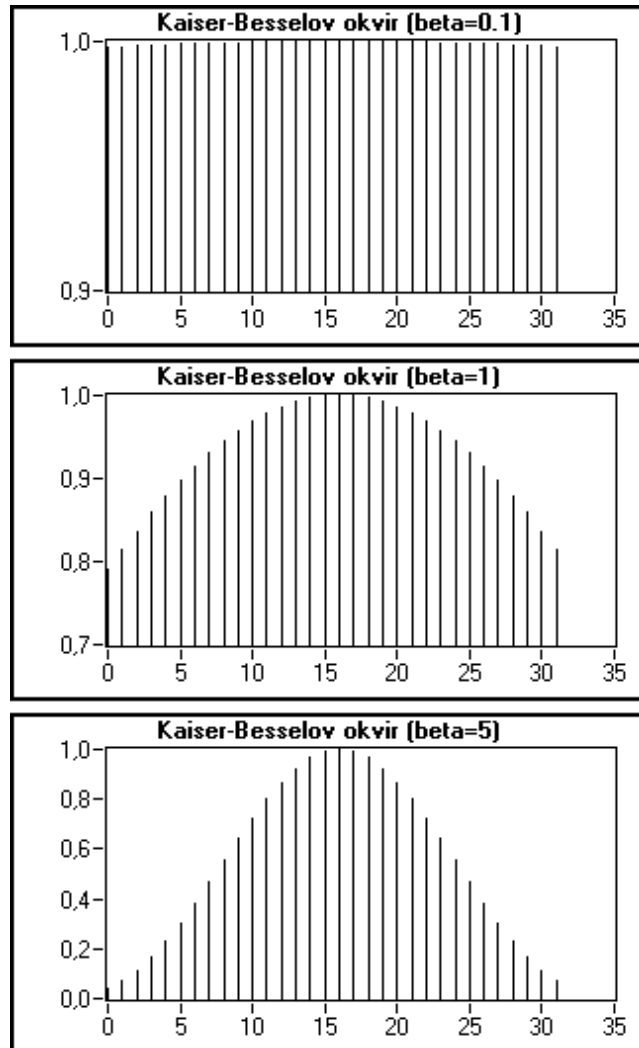
9.1.4 Kaiser-Besselov okvir

Kaiser-Besselov okvir je fleksibilan jer ga korisnik može oblikovati mijenjajući parametar β . Dakle, ovisno o aplikaciji, možemo mijenjati oblik okvira i samim time kontrolirati koliko veliko curenje frekvencije želimo. Matematički oblik glasi [L5]

$$w(n) = n \frac{I_0(\beta \sqrt{1-a^2})}{I_0(\beta)} \quad \text{za } n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (9.4)$$

$$a = \frac{n-k}{k}, \quad k = \frac{N-1}{2} \quad (9.5)$$

gdje je $I_0(\bullet)$ modificirana Besselova funkcija nultog reda. Na slici 9-8 je prikazan oblik Kaiser-Besselovog okvira za razne vrijednosti parametra β .



Slika 9-8 Kaiser-Besselov okvir

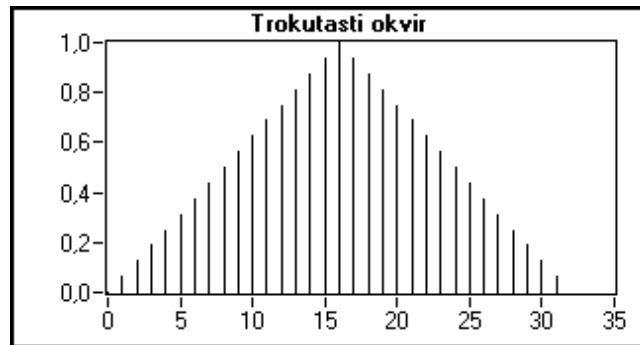
Za male vrijednosti parametra β oblik je skoro pravokutni (ako je $\beta=0$ tada imamo pravokutni okvir), dok s povećavanjem parametra β dobiva okvir čije stranice teže k nuli. Ovaj okvir se koristi za otkrivanje dva signala gotovo istih frekvencija ali znatno različitih amplituda.

9.1.5 Trokutasti okvir

Oblik ovog okvira je trokutast i zadan je jednadžbom [L5]

$$w(n) = 1 - \left| \frac{2n - N}{N} \right| \quad \text{za } n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (9.6)$$

Na slici 9-9 je prikazan trokutasti okvir za $N=32$. Trokutasti okvir se koristi za razdvajanje dva signala čije frekvencije su vrlo blizu jedna druge i čije su amplitude gotovo jednake.



Slika 9-9 Trokutasti okvir

9.1.6 Flattop okvir

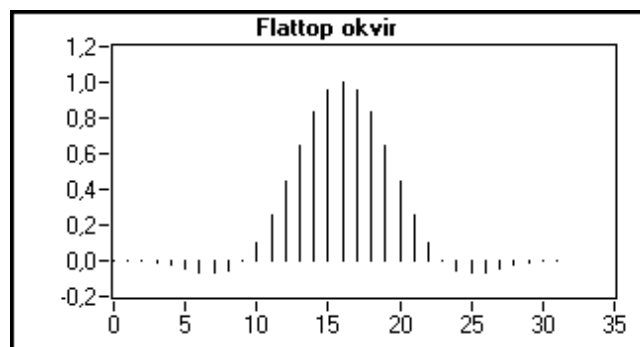
Ovaj okvir daje najtočniju amplitudu signala u odnosu na druge okvire. Povećana točnost amplitude vuče za sobom i posljedicu koja se očituje prikazu frekvencija sa smanjenom točnošću. Flattop okvir je definiran kao [L5]

$$w(n) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) \text{ za } n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (9.7)$$

gdje je

$$a_0=0.2810638602, a_1=0.5208971735, a_2=0.1980389663$$

Na slici 9-10 je prikazan flattop okvir za $N=32$.



Slika 9-10 Flattop okvir

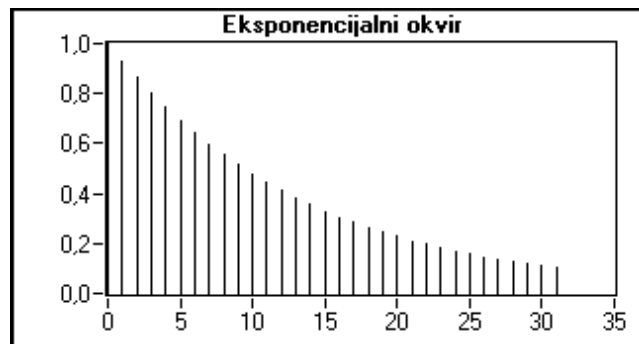
Flattop okvir je najkorisniji kada se želi točno izmjeriti amplitudu pojedine frekvencijske komponente koja ima malo curenje.

9.1.7 Eksponecijalni okvir

Ovaj okvir ima oblik eksponencijalne funkcije koja se prigušuje što se ide dalje po osi x i dan je jednadžbom [L5]

$$w(n) = e^{\left(\frac{n \cdot \ln(f)}{N-1}\right)} = f^{\left(\frac{n}{N-1}\right)} \text{ za } n=1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (9.8)$$

gdje je f konačna vrijednost. Početna vrijednost okvira je jedan i polako teži prema nuli. Konačna vrijednost se može podesiti između jedan i nula. Na slici 9-11 je prikazan eksponencijalni okvir za $N=32$ i za konačnu vrijednost 0,1.



Slika 9-11 Eksponencijalni okvir

Okvir se koristi u analizi prijelaznih pojava (signali koji postoje kratko vrijeme) čije je trajanje duže nego trajanje okvira.

9.2 Primjer korištenja okvira

U primjeru OKVIRI (LabView) je prikazan sinusni signal kod kojeg se može odabrati broj perioda. Zatim se računa spektar signala. Istovremeno se isti taj signal propušta kroz okvir, te se sa uokvirenim signalom računa spektar. Na grafovima koji prikazuju spektar signala je y os prikazana u logaritamskom obliku kako bi se bolje vidjele male vrijednosti. Valja obratiti pažnju kada ne postoji puni broj perioda signala pa se javljaju diskontinuiteti, te na spektar tog signala prije i poslije uokvirivanja.

10 DIGITALNI FILTERI

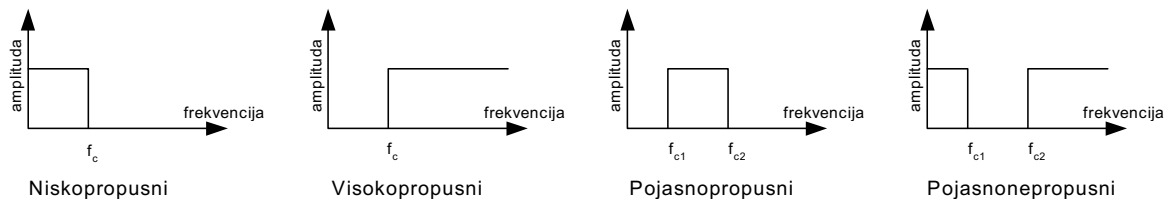
U poglavlju 10 **Digitalni filteri** se govori o tome što su to filteri, zatim koja je prednost digitalnih filtera nad analognim filterima, a na kraju su dati primjeri raznih digitalnih filtera i načini njihova korištenja.

10.1 Idealni filteri

Filtriranje je proces kojim se mijenja frekvencijski sadržaj signala i potpuno se uklanjaju neželjene frekvencije iz signala. Ovisno o frekvencijskom pojasu koji ili propušta ili prigušuje signal, filteri se mogu svrstati na sljedeći način [L23]:

- Niskopropusni filteri propuštaju niske, a prigušuju visoke frekvencije
- Visokopropusni filteri propuštaju visoke, a prigušuju niske frekvencije
- Pojasnopropusni filteri propuštaju određeni pojas frekvencija
- Pojasnonepropusni filteri prigušuju određeni pojas frekvencija

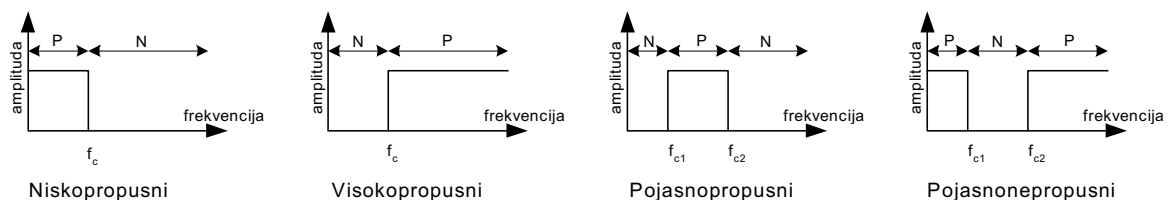
Idealan frekvencijski odziv filtera je prikazan na slici 10-1. Sa slike se vidi da niskopropusni filter propušta frekvencije ispod f_c , dok visokopropusni filter propušta



Slika 10-1 Idealan frekvencijski odziv raznih tipova filtera

frekvencije iznad f_c . Pojasnopropusni filter propušta sve frekvencije između f_{c1} i f_{c2} , dok pojasnonepropusni filter prigušuje sve frekvencije između f_{c1} i f_{c2} . Frekvencije f_c , f_{c1} i f_{c2} se nazivaju granične frekvencije filtera i pri dizajniranju filtera ih je potrebno odrediti. Područje filtera koje propušta frekvencije se naziva propusni pojas filtera. Idealan filter ima pojačanje 1 (0 dB) u propusnom pojasu pa se stoga amplituda signala na izlazu ne razlikuje od one na ulazu. Nepropusni pojas se naziva područje filtera koje ne propušta frekvencije kroz sebe već ih odbacuje (prigušuje). Kod idealnih filtera je pojačanje u nepropusnom pojasu jednako nuli ($-\infty$ dB). Na slici 10-2 je prikazano propusno i nepropusno područje za pojedine tipove filtera.

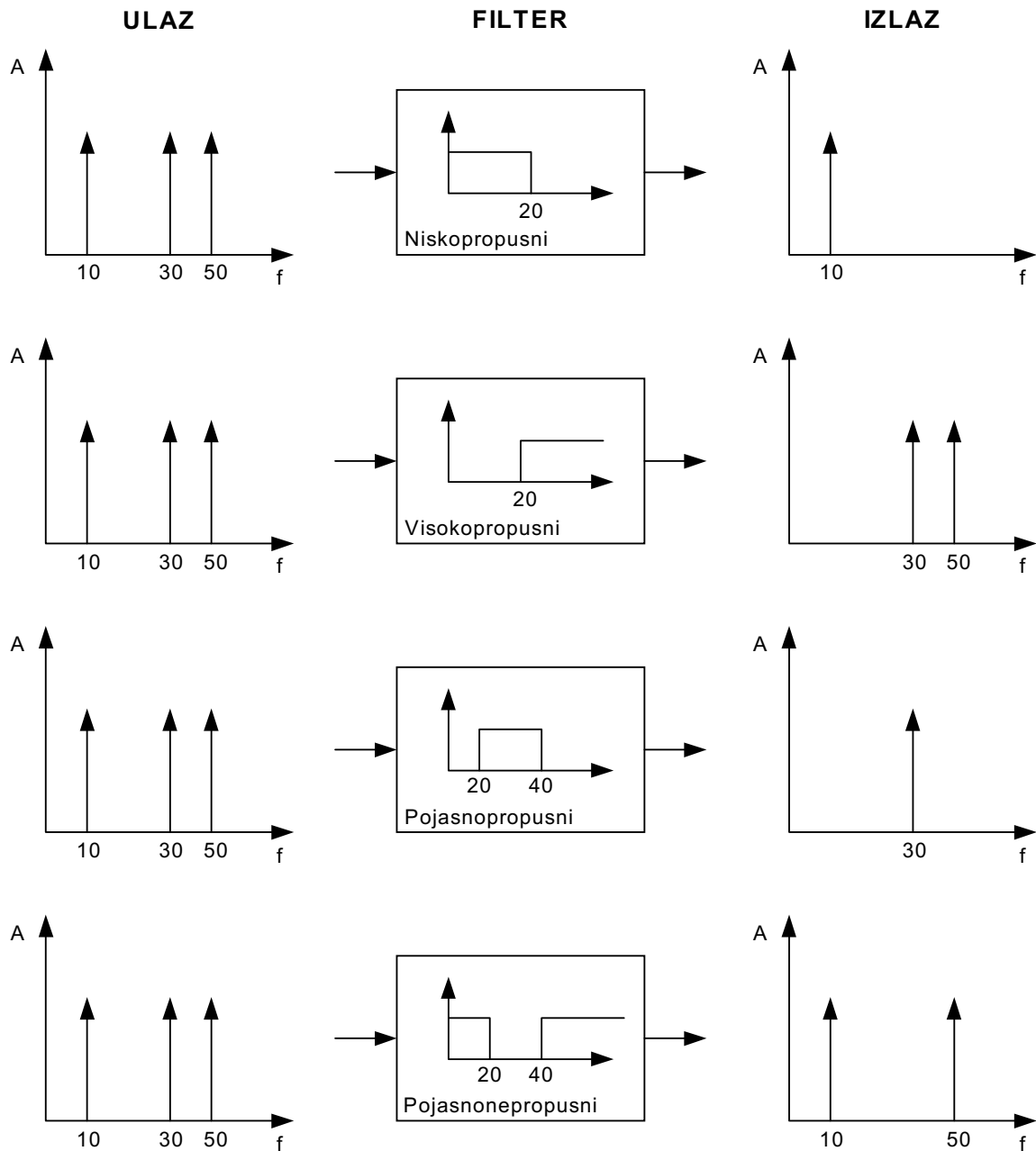
P = propusno područje
N = nepropusno područje



Slika 10-2 Područja propuštanja i nepropuštanja

Ako pretpostavimo da signal sadrži frekvencije od 10 Hz, 30 Hz i 50 Hz te ga se propusti kroz razne tipove filtera od kojih niskopropusni i visokopropusni imaju

graničnu frekvenciju od 20 Hz, a druga dva tipa imaju graničnu frekvenciju od 20 Hz i 40 Hz, tada je ta situacija prikazana na slici 10-3.



Slika 10-3 Prolaz signala kroz razne filtere

10.2 Realni filteri

U stvarnosti situacija nije kao u prethodnom poglavlju kada se govori o propusnom, nepropusnom području i graničnoj frekvenciji. Granična frekvencija nikad nije oštra (u jednoj točki) [L5, L6] već uvijek postoji nekakvo prijelazno područje između propusnog i nepropusnog pojasa. U tom prijelaznom području se pojačanje filtera postupno mijenja od jedinice (0 dB) do nule ($-\infty$ dB). Valja naglasiti da je propusni pojas područje gdje pojačanje varira od 0 dB do -3 dB (ovisno o aplikaciji može se zahtijevati i da donja granica bude -0.5 dB, -1 dB itd.).

U mnogim je aplikacijama prihvatljivo da pojačanje u propusnom pojasu malo odstupa od jedinice. To odstupanje se naziva mrežkanje amplitude signala i ono je razlika stvarnog pojačanja i idealnog pojačanja od jedan.

Prigušenje signala u nepropusnom pojasu u stvarnosti ne može biti beskonačno već ima neku minimalnu vrijednost. I mrežkanje amplitude i prigušenje se mjere u decibelima i to pomoću slijedeće formule:

$$dB = 20 \log_{10} \left(\frac{A_0(f)}{A_i(f)} \right) \quad (10.1)$$

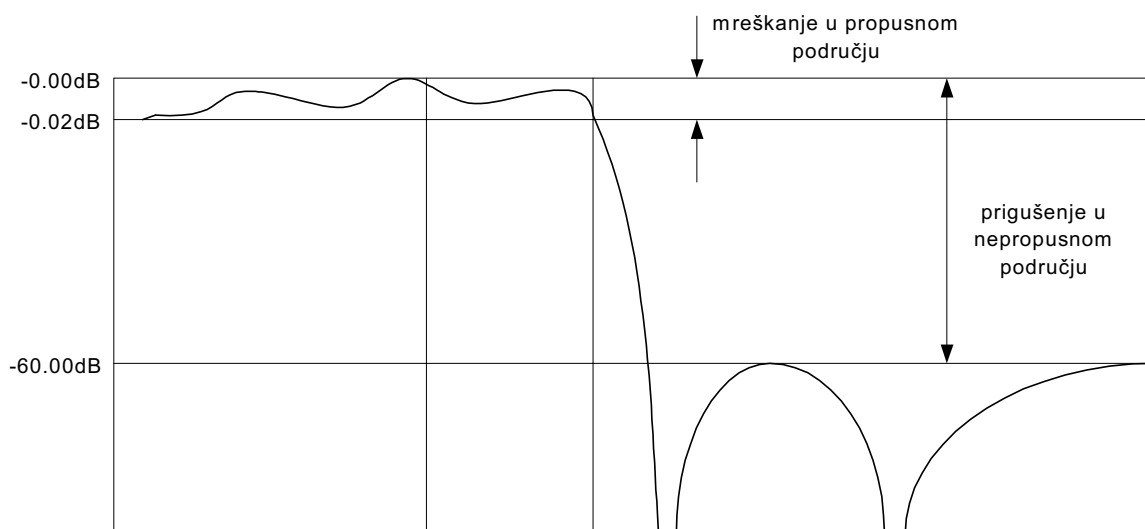
gdje su $A_i(f)$ i $A_0(f)$ amplitude određene frekvencije prije i poslije filtriranja. Na primjer, za mrežkanje amplitude od -0.02 dB, u propusnom pojasu, slijedi iz formule (10.1)

$$\frac{A_0(f)}{A_i(f)} = 10^{-0.001} = 0.9977 \quad (10.2)$$

iz čega je vidljivo da je omjer amplituda blizu jedan. Ako u nepropusnom pojasu imamo prigušenje od -60 dB, tada se dobiva

$$\frac{A_0(f)}{A_i(f)} = 10^{-3} = 0.001 \quad (10.3)$$

što znači da je amplituda na izlazu iz filtera 1000 puta manja od amplitude na ulazu. To je prikazano na slici 10-4 (nije u pravom mjerilu!).



Slika 10-4 Prikaz raznih područja filtera

10.3 Prednosti digitalnih filtera nad analognima

Analogni filter ima analogni signal na svom ulazu i izlazu, dakle i ulazni signal $x(t)$ i izlazni signal $y(t)$ su funkcije kontinuirane varijable t i mogu imati beskonačno mnogo vrijednosti. Kod digitalnog prikupljanja signala i ulaz i izlaz iz filtera su dani u

diskretnom obliku, što znači da su oni funkcije određenih točaka u trenutku snimanja valnog oblika. Upravo zbog mogućnosti digitalnog snimanja signala se javila i mogućnost upotrebe digitalnih filtera kod aplikacija koje zahtijevaju mogućnost programiranja i samim time određenu fleksibilnost. Prednosti koje imaju digitalni filteri u odnosu na analogne se očituju u sljedećem:

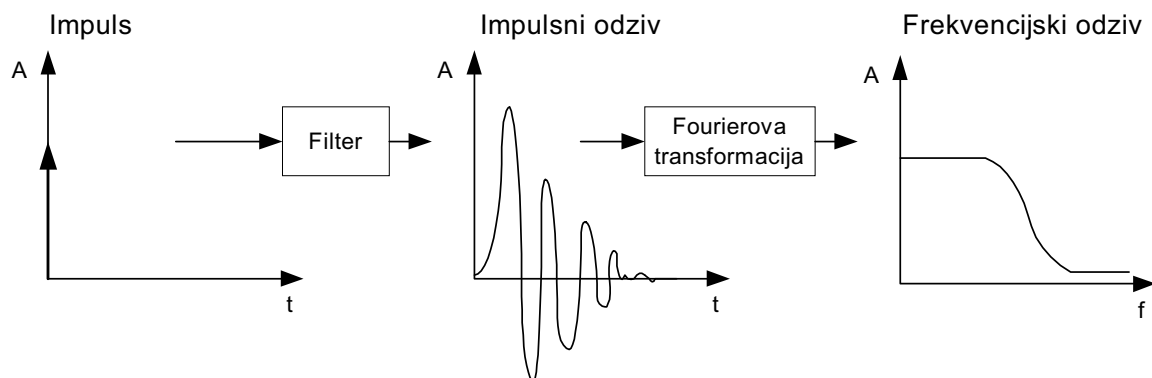
- Programiraju se pomoću programske podrške na računalu i stoga ih je lagano sastaviti i testirati.
- Zahtijevaju samo aritmetičke operacije množenja i zbrajanja (oduzimanja) i stoga ih je lako primijeniti.
- Stabilni su i predvidljivi (ne mijenjaju se s vremenom i temperaturom).
- Ne ovise o vlazi i ne zahtijevaju precizne komponente.
- Imaju bolji učinak u odnosu na cijenu.
- Ne pate od grešaka u proizvodnji i ne stare.

10.4 IIR i FIR filteri

Filteri se mogu podijeliti i ovisno o njihovom odzivu na impulsnu pobudu. Impulsna pobuda je kada se na ulaz u filter narine impuls za koji vrijedi [L38]

$$x[0]=1 \text{ i } x[i]=0 \text{ za svaki } i \neq 0 \quad (10.5)$$

Odziv na takvu (10.5) pobudu se naziva impulsni odziv i on je prikazan na slici 10-5. Fourierova transformacija impulsnog odziva se zove frekvencijski odziv filtera. On kaže kakav će biti signal na izlazu filtera za različite frekvencije odnosno drugim riječima; kaže koliko je pojačanje filtera za različite frekvencije.



Slika 10-5 Impulsni i frekvencijski odziv filtera

Ako impulsni odziv filtera padne na nulu nakon nekog konačnog vremenskog perioda tada se taj filter naziva konačnim filterom ili FIR filter (finite impulse response). Ako pak impulsni odziv nikada ne dosegne nulu i postoji beskonačno tada se takav filter naziva beskonačnim ili IIR filterom (infinite impulse response). Da li je filter konačan ili beskonačan ovisi samo o načinu na koji se računa izlazni signal filtera [L5].

Glavna razlika FIR i IIR filtera je u tome što izlaz kod FIR filtera ovisi samo o trenutnim i prošlim ulaznim vrijednostima, dok kod IIR filtera izlaz ovisi ne samo o trenutnim i prošlim ulaznim vrijednostima već i o prošlim izlaznim vrijednostima.

Primjer za to potkrijepiti može biti naplatna blagajna u dućanu. Neka je $x[k]$ cijena k -tog proizvoda koji je kupljen, gdje za k vrijedi

$$1 \leq k \leq N \quad (10.6)$$

N je ukupan broj proizvoda koji su kupljeni. Blagajna zbraja cijene svih proizvoda koji se kupe. Zbroj $y[k]$ označava zbroj do k -tog proizvoda i može se pisati kao

$$y[k] = x[k] + x[k-1] + x[k-2] + x[k-3] + \dots + x[1] \quad (10.7)$$

Ukupan zbroj cijena svih N proizvoda prema (10.7) iznosi $y[N]$. $y[k-1]$ je zbroj cijena do $(k-1)$ proizvoda pa se stoga jednadžbu (10.7) može pisati kao

$$y[k] = y[k-1] + x[k] \quad (10.8)$$

Ako se sada doda 22% PDV-a na sve proizvode tada jednadžbe (10.7) i (10.8) poprimaju oblik

$$y[k] = 1.22x[k] + 1.22x[k-1] + 1.22x[k-2] + 1.22x[k-3] + \dots + 1.22x[1] \quad (10.9)$$

$$y[k] = y[k-1] + 1.22x[k] \quad (10.10)$$

Valja primijetiti kako su jednadžbe (10.9) i (10.10) potpuno iste u opisivanju rada blagajne. Razlika je u tome što jednadžba (10.9) opisuje ponašanje blagajne samo u smislu ulaznih vrijednosti dok jednadžba (10.10) opisuje rad blagajne pomoću ulaznih ali i izlaznih vrijednosti. Jednadžba (10.9) se naziva nerekurzivna ili FIR jednadžba, dok se (10.10) naziva rekurzivna ili IIR jednadžba.

10.4.1 Koeficijenti filtera

U izrazu (10.9) svaki se član množi sa konstantom koja iznosi 1.22, a u izrazu (10.10) konstante množenja su 1 za član $y[k-1]$ i 1.22 za član $x[k]$. Te konstante se nazivaju koeficijenti filtera. Kod IIR filtera se koeficijenti koji množe ulazne vrijednosti nazivaju koeficijenti naprijed, a oni koji množe izlazne vrijednosti se nazivaju koeficijenti nazad. Jednadžbe oblika (10.7), (10.8), (10.9) i (10.10) koje opisuju rad filtera se nazivaju jednadžbe razlike.

10.4.2 Prednosti i mane FIR i IIR filtera

Prednost digitalnih IIR filtera nad FIR filterima je ta da IIR filteri trebaju manji broj koeficijenata za izvršenje iste operacije filtriranja. Stoga IIR filteri rade puno brže i ne zahtijevaju dodatnu memoriju jer računaju trenutno. Nedostatak IIR filtera je fazni odziv koji je nelinearan. Ako aplikacija koja se rabi ne zahtijeva informaciju o fazi, tada je IIR filter dovoljan. FIR filtere treba koristiti u aplikacijama koje zahtijevaju linearni fazni odziv. Također valja napomenuti da je zbog rekurzivnog svojstva IIR filtere teže dizajnirati i primijeniti [L5, L23].

10.5 IIR filteri

IIR filteri su digitalni filteri čiji se izlazni podaci računaju zbrajanjem prijašnjih izlaznih vrijednosti, pomnoženih s nekim težinskim faktorom, s trenutnim i prijašnjim ulaznim vrijednostima također pomnoženim s nekim težinskim faktorom. Ako se ulazne vrijednosti označe sa $x[.]$, a izlazne sa $y[.]$ tada se može napisati jednadžba razlike za IIR filter koja glasi

$$\begin{aligned} a_0 y[i] + a_1 y[i-1] + a_2 y[i-2] + \dots + a_{N_y-1} y[i - (N_y - 1)] = \\ = b_0 x[i] + b_1 x[i-1] + b_2 x[i-2] + \dots + b_{N_x-1} x[i - (N_x - 1)] \end{aligned} \quad (10.11)$$

ili drukčije pisano

$$\begin{aligned} a_0 y[i] = -a_1 y[i-1] - a_2 y[i-2] + \dots - a_{N_y-1} y[i - (N_y - 1)] + \\ + b_0 x[i] + b_1 x[i-1] + b_2 x[i-2] + \dots + b_{N_x-1} x[i - (N_x - 1)] \end{aligned} \quad (10.12)$$

iz čega slijedi

$$y[i] = \frac{1}{a_0} \left(- \sum_{j=1}^{N_y-1} a_j y[i-j] + \sum_{k=0}^{N_x-1} b_k x[i-k] \right) \quad (10.13)$$

gdje je N_x broj koeficijenata naprijed (b_k), a N_y je broj koeficijenata nazad (a_j). Trenutna izlazna vrijednost i je suma trenutnih i prošlih ulaznih vrijednosti $x[i]$ i $x[i-k]$ (za $k \neq 0$), pomnoženih s težinskim faktorima, i prijašnjih izlaznih vrijednosti $y[i-j]$ (za $j \neq 0$) također pomnoženih s težinskim faktorima. Obično je N_x jednak N_y , a red filtera je jednak N_x-1 . Niži red filtera smanjuje broj aritmetičkih operacija i samim time smanjuje i greške koje nastaju računanjem. Problem sa filterima većeg reda je taj da vrlo brzo nastaju pogreške u računanju koje se odnose na preciznost rezultata. Preporuča se odabir reda od 1 do 20 s time da je 30 krajnja granica. Viši red znači i više koeficijenata, a samim time i dulje vrijeme računanja.

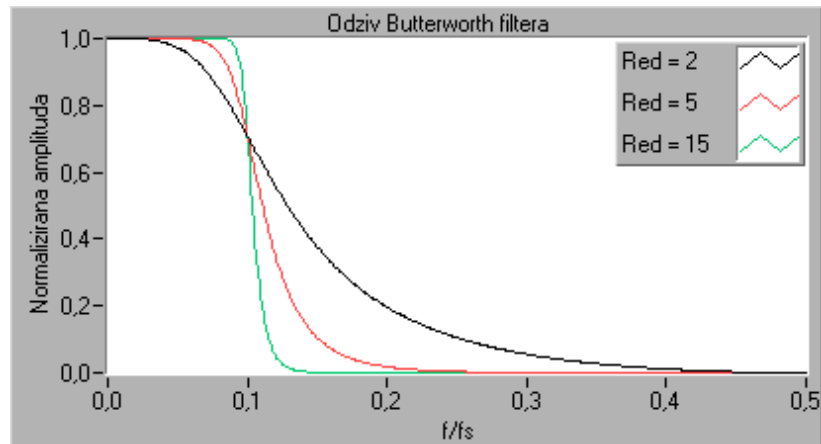
Impulsni odziv filtera opisan jednadžbom (10.13) je beskonačno dug za koeficijente koji nisu jednaki nuli. U stvarnim aplikacijama pri korištenju stabilnih IIR filtera, impulsni odziv ima prigušenje koje je gotovo nula (kada imamo konačni broj uzoraka mjerenog signala). U stvarnosti se i frekvencijski odziv filtera razlikuje od odziva idealnog filtera. Ovisno o obliku frekvencijskog odziva, IIR filteri se dijele na [L5, L21]:

- Butterworth filtere
- Chebysheve filtere
- Chebysheve II ili inverzne Chebysheve filtere
- Eliptične ili Cauerove filtere

10.5.1 Butterworth filteri

Butterworth filter karakterizira to što nema mreškanja signala niti u propusnom niti u nepropusnom pojasu. Frekvencijski odziv je također glatki na svim frekvencijama. Na slici 10-6 je prikazan odziv niskopropusnog Butterworth filtera za različite redove

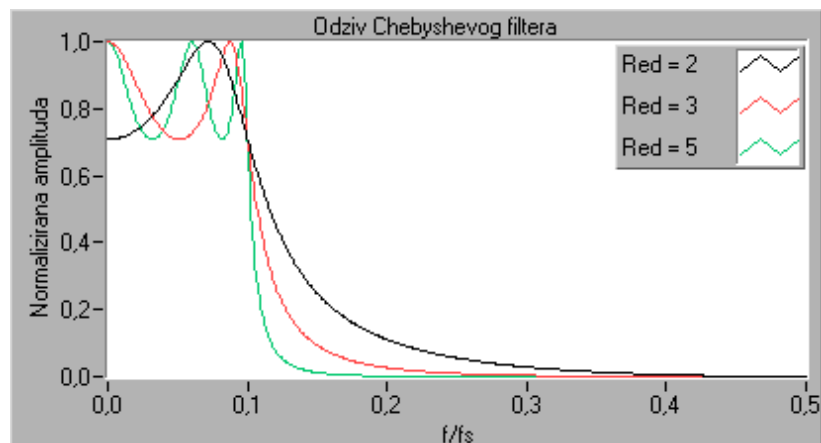
filtera. X os je prikazana kao f/f_s (f_s je frekvencija uzimanja uzoraka). Prednost Butterworth filtera je ta što ima glatki i monotono opadajući frekvencijski odziv u prijelaznom području. Kao što se vidi na slici 10-6, veći red filtera povlači za sobom i strmiji prijelaz između propusnog i prigušujućeg pojasa.



Slika 10-6 Odziv Butterworth filtera

10.5.2 Chebyshevi filteri

Chebyshevi filteri imaju znatno manje prijelazno područje za razliku od Butterworth filtera istog reda. No posljedica toga je mreškanje signala u propusnom pojasu. Frekvencijski odziv karakterističan za Chebysheve filtere je takav da u propusnom pojasu postoji mreškanje signala koje je iste amplitude i u plus i u minus, zatim monotono opadajući signal u prijelaznom području i oštiri prijelaz u nepropusni pojas. Na slici 10-7 je prikazan odziv Chebyshevog filtera za razne redove. Valja primijetiti kako se povećanjem reda smanjuje širina prijelaznog područja, ali tada se javlja signal s većim brojem mriješkanja u propusnom pojasu.

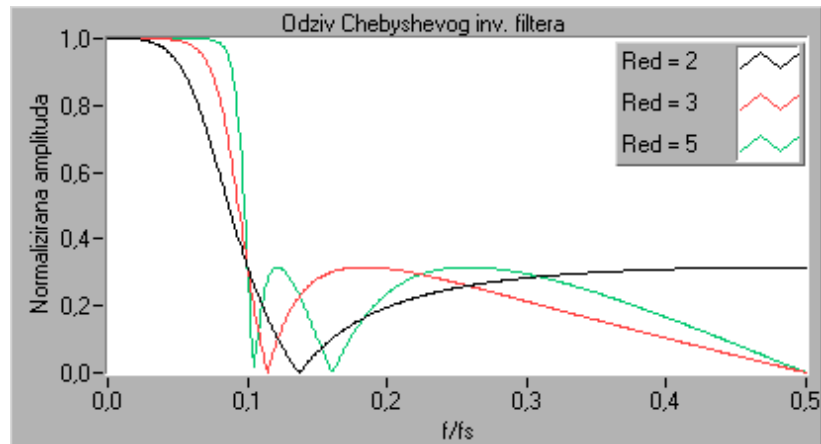


Slika 10-7 Odziv Chebyshevog filtera

10.5.3 Chebyshevi II ili inverzni Chebyshevi filteri

Ovi filteri su gotovo isti kao Chebyshevi ali je razlika u tome što imaju maksimalno ravan odziv u propusnom pojasu, dok im se mreškanje signala javlja u nepropusnom pojasu. Kod njih je potrebno odrediti koliko se prigušenje želi u nepropusnom pojasu

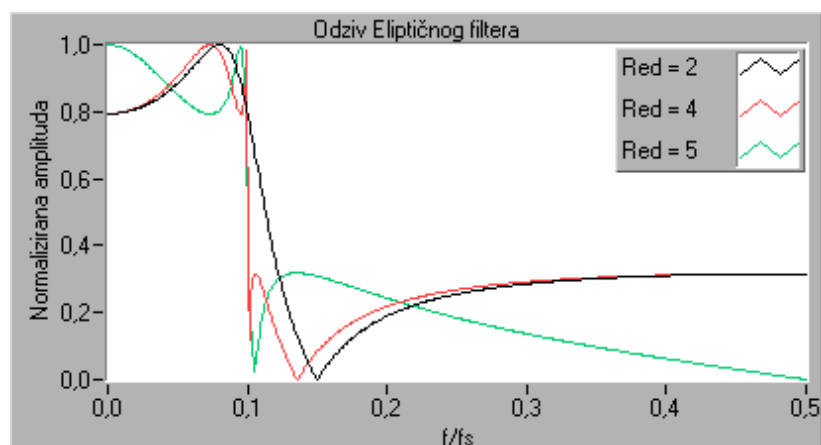
(u dB). Frekvencijski odziv karakterističan za Chebysheve II filtere je takav da imaju mrežkanje signala u nepropusnom pojasu, monotono opadajuću amplitudu u propusnom pojasu i oštar prijelaz između prijelaznog područja i nepropusnog pojasa. Na slici 10-8 je prikazan odziv filtera za razne redove.



Slika 10-8 Odziv Chebyshevovog inverznog filtera

10.5.4 Eliptični filteri

Eliptični filteri imaju oštar prijelaz na granici između propusnog pojasa i prijelaznog područja, ali isto tako imaju i oštar prijelaz na granici prijelaznog područja i nepropusnog pojasa. Posljedica toga je mrežkanje signala u propusnom i nepropusnom pojasu. Upravo iz tog razloga se eliptični filteri primjenjuju u aplikacijama koje zahtijevaju usko prijelazno područje, dok istovremeno nije bitno mrežkanje signala. Na slici 10-9 je prikazan frekvencijski odziv eliptičnog filtera za razne redove. Valja naglasiti da je za njih potrebno odrediti koliko mrežkanje se želi u propusnom pojasu (u dB) i koliko se prigušenje želi u nepropusnom pojasu (također u dB).



Slika 10-9 Odziv eliptičnog filtera

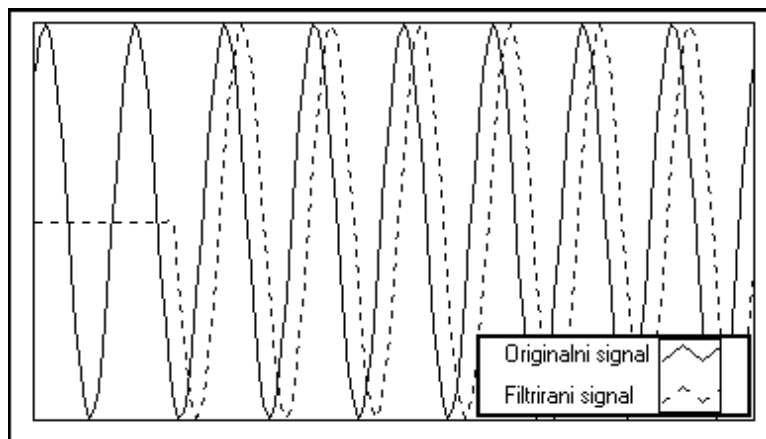
10.6 Prijelazni odziv IIR filtera

Ako se uzme jednačba razlike (10.13) koja opisuje rad IIR filtera i uvrsti se da je $a_0=1$ i $N_x=N_y=3$, tada se može pisati [L5]:

$$y[i] = -a_1 y[i-1] - a_2 y[i-2] + b_0 x[i] + b_1 x[i-1] + b_2 x[i-2] \quad (10.14)$$

To je jednačba razlike za IIR filter drugog reda. Iz nje je vidljivo kako je za računanje vrijednosti na izlazu filtera (u i -tom trenutku) potrebno imati vrijednosti izlaza u trenucima $i-1$ i $i-2$ kao i trenutnu vrijednost na ulazu (i -ti trenutak). Osim toga potrebno je poznavati i prošle dvije vrijednosti na ulazu (trenuci $i-1$ i $i-2$).

Ako se pretpostavi da je upravo započeo proces filtriranja tako da postoji prvi uzorak signala, tada u tom trenutku ne postoje prijašnje ulazne vrijednosti $x[i-1]$ i $x[i-2]$ niti prijašnje izlazne vrijednosti $y[i-1]$ i $y[i-2]$, pa se stoga pretpostavlja da su njihove vrijednosti nula. Kada se snimi i drugi uzorak signala, tada već postoji prethodni uzorak $x[i-1]$ i prethodna vrijednost na izlazu $y[i-1]$ koju se izračunalo iz prvog uzorka. No ono što još uvijek ne postoji su vrijednosti $x[i-2]$ i $y[i-2]$ te se za njih ponovo smatra da su jednake nuli. Tek kada se počne obrađivati treći uzorak signala postoje sve potrebne vrijednosti na desnoj strani jednačbe (10.14). Iz ovog razmatranja je vidljivo da postoji određeno kašnjenje prije nego filter počne pravilno raditi. Odziv filtera u tom trenutku (prije ispravnog rada) se naziva prijelazni odziv. Dužina prijelaznog odziva ovisi o redu filtera. Posljedica je ta da je filtrirani signal pomaknut (kasni) u odnosu na ulazni signal, a koliko će biti kašnjenje ovisi o redu filtera. Na slici 10-10 je prikazan prijelazni odziv filtera.



Slika 10-10 Vrijeme kašnjenja IIR filtera

10.7 FIR filteri

Izlaz kod IIR filtera ovisi o prijašnjim izlazima i o trenutnom i prijašnjim ulazima. Zbog ovisnosti o prijašnjim izlazima, IIR filter ima beskonačnu memoriju, što rezultira impulsnim odzivom koji traje beskonačno.

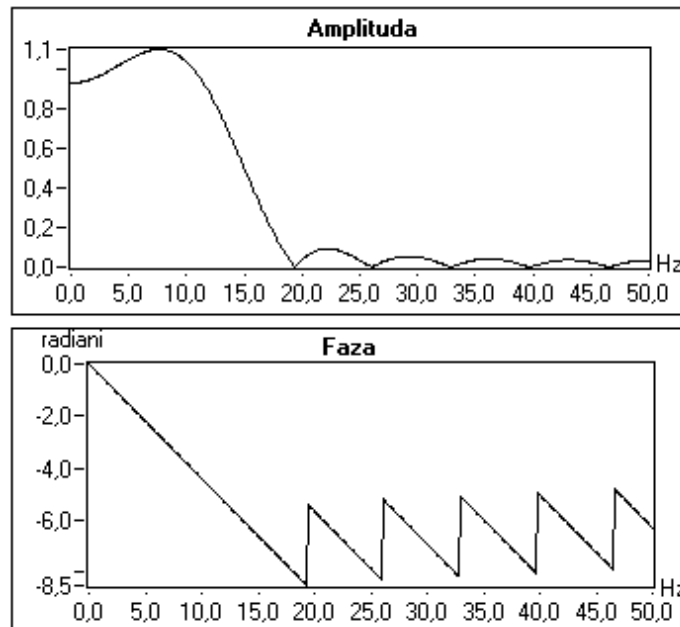
S druge pak strane izlaz FIR filtera ovisi samo o trenutnom i prošlim ulazima. Zbog toga što ne ovisi o prošlim izlazima, njegov impulсни odziv pada prema nuli u nekom konačnom vremenskom periodu. Izlaz filtera je dan jednačbom

$$y[i] = \sum_{k=0}^{n-1} h_k x[i-k] \quad (10.15)$$

gdje x predstavlja vrijednosti na ulazu, y su vrijednosti na izlazu (filtrirane vrijednosti), a h su koeficijenti filtera. Važne karakteristike FIR filtera su sljedeće:

- Postižu linearan prikaz faznog odziva i stoga propuštaju signal bez iskrivljenja faze.
- Uvijek su stabilni. Prilikom dizajniranja nije potrebno voditi računa o stabilnosti.
- Jednostavniji su i lakše ih je primijeniti od IIR filtera.

Na slici 10-11 su prikazana dva grafa koji predstavljaju frekvencijski odziv FIR filtera; jedan prikazuje amplitudu a drugi fazu. Na osi x je normalizirana frekvencija. Diskontinuiteti u faznom odzivu u pojasu prigušenja nastaju zbog diskontinuiteta pri računanju amplitude gdje koristimo apsolutnu vrijednost kako bi je izračunali. Kao što se i vidi na slici fazni odziv je potpuno linearan.



Slika 10-11 Frekvencijski odziv FIR filtera

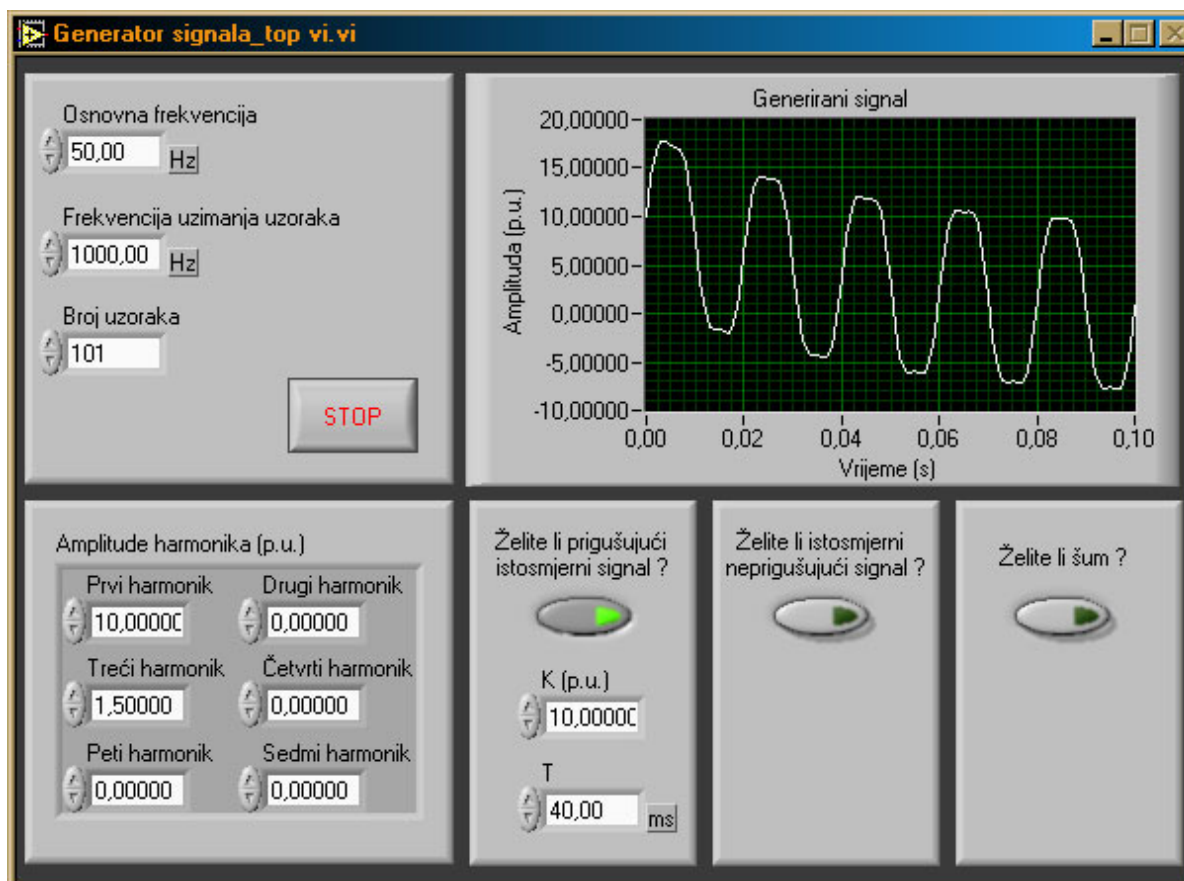
10.8 Primjeri korištenja digitalnih filtera

Napravljena su tri primjera upotrebe digitalnih filtera i zovu se Filtriranje sinusnog signala.vi, IIR filter.vi i FIR filter.vi. U prvom primjeru je snimljen visokofrekvencijski signal u kojem je skriven niskofrekvencijski sinusni signal do kojeg se dođe pomoću filtriranja. Može se birati frekvencija signala, granična frekvencija IIR filtera i red filtera. Valja obratiti pažnju na prijelazno područje pri prvom startanju programa. Njegova veličina ovisi o redu filtera. U drugom primjeru postoje razni IIR filteri kojima se može podešavati parametre i zatim gledati impulsni odziv i frekvencijski odziv (amplitudu). U trećem primjeru je FIR filter koji je konstruiran pomoću okvira. Na grafovima su prikazani frekvencijski odzivi i to amplituda i faza. Valja primijetiti da je faza linearna. Također je moguće mijenjati razne prozore i gledati kakav je odziv u tom slučaju. Naravno, pobuda filtera je impuls.

11 GENERATOR SIGNALA

U poglavlju 11 **Generator signala** je prikazano sučelje generatora signala i način na koji se njime koristi. Blok dijagram generatora je prikazan u dodatku A kao i svi ostali blok dijagrami.

U sljedeća četiri poglavlja će se testirati razni algoritmi koji se koriste u digitalnim zaštitnim relejima za mjerenje struje, napona i faznog pomaka među njima. Testiranje se vrši simulacijom na način da se kroz algoritam propusti signal koji simulira stvarni signal. Stvarni signal je simuliran točno na način kao da su mu uzorci uzimani pomoću digitalne mjerne opreme. Drugim riječima, nakon simulacije postoji skup točaka koje su međusobno razmahnute za određeni vremenski razmak Δt koji je jednak inverznoj vrijednosti frekvencije uzimanja uzoraka. *Generator signala*, kao i svi ostali programi koji su napravljeni za potrebe ovog rada, je programiran pomoću G jezika koji je sastavni dio programskog paketa LabVIEW™. Na slici 11.1 je prikazan izgled korisničkog sučelja *Generatora signala*.



Slika 11-1 Sučelje generatora signala

Gornji lijevi dio ekrana ima tri kontrole:

1. Broj uzoraka
2. Frekvencija uzimanja uzoraka
3. Osnovna frekvencija

Pomoću kontrole *Broj uzoraka* određuje se koliko točaka signala se želi prikupiti. *Frekvencija uzimanja uzoraka* određuje brzinu odnosno učestalost kojom digitalno sklopovlje uzima uzorke signala, a samim time određuje i vremenski razmak među izmjerenim točkama. *Osnovna frekvencija* je kontrola pomoću koje se određuje frekvencija osnovnog signala koji se mjeri, što je u ovom slučaju sinusoida struje ili napona frekvencije 50 Hz. Jedinica frekvencije uzimanja uzoraka je također u Hz.

U donjem lijevom kutu ekrana se nalaze kontrole pomoću kojih se određuje amplituda osnovnog signala i harmonika. Ukoliko su amplitude bilo kojeg harmonika (ili osnovnog signala) jednake nuli tada je to isto kao da tih harmonika i nema. Princip rada tih kontrola je takav da ako se odabere osnovni signal neke amplitude i na primjer treći harmonik isto određene amplitude, tada imamo signal koji je rezultatni i koji je dobiven superponiranjem osnovnog i trećeg harmonika. Jedinice u kojima se mjere amplitude signala su per unit. Valja naglasiti kako je potrebno zadovoljiti uvjete koje postavlja teorija uzimanja uzoraka, koja je detaljnije opisana u poglavlju 2, ako se želi imati ispravan signal.

U gornjem desnom djelu ekrana se nalazi graf na kojem se vidi oblik signala koji je generiran. Oblik signala se stalno mijenja ovisno o parametrima pa se tako u svakom trenutku vidi oblik signala određen trenutnim parametrima. Broj točaka od kojih se sastoji signal je jednak broju koji je upisan u kontrolu *Broj točaka*.

U donjem desnom kutu ekrana se nalaze kontrole koje omogućavaju dodavanje visokofrekventnog šuma, istosmjerne komponente i istosmjerne prigušujuće komponente signala. Formula po kojoj se mijenja istosmjerna prigušujuća komponenta glasi [L24, L25]

$$f(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (11.1)$$

gdje je K konstanta i T vremenska konstanta koja opisuje kako brzo dolazi do prigušenja istosmjerne komponente.

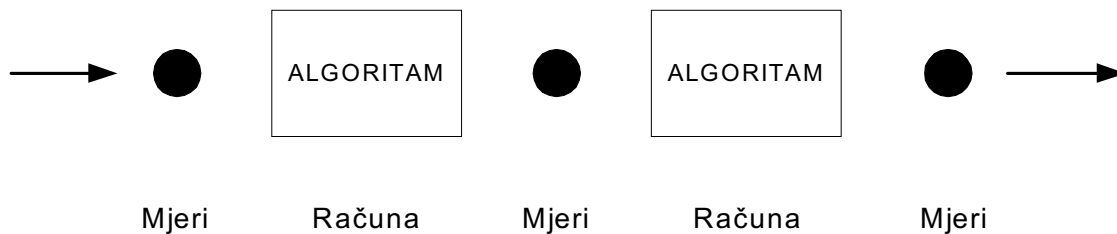
11.1 Propuštanje generiranog signala kroz algoritme zaštite

Kada se koristi generirani signal u provjeri rada algoritama zaštite valja nešto reći i o načinu na koji algoritmi koriste generirani signal. Naime, iz navedenog teksta bi se mogla stvoriti pomisao kako algoritmi "progutaju" generirani signal u cijelosti i tada iz njega računaju određene veličine. Kada bi to bilo tako tada to ne bi bila simulacija rada digitalnih releja u stvarnosti jer oni mjere točku po točku i između mjerenja dviju točaka računaju određene vrijednosti.

Programi koji se koriste u sljedećim poglavljima su projektirani upravo tako da uzimaju točku po točku generiranog signala i između uzimanja (mjerenja) dvaju točaka koriste određeni algoritam kako bi izračunali vrijednosti koje se od njih traže. To je šematski prikazano na slici 11-2.

Znači da rad programa koji koristi algoritme izgleda tako da se mjeri ulazna veličina (točka) zatim algoritam na osnovi te i prethodnih nekoliko točaka računa određene vrijednosti i odlučuje da li relej treba proraditi ili ne, zatim ponovo mjeri sljedeću točku

pa opet računa i tako sve dok ne potroši sve točke generiranog signala. Drugim riječima, algoritam proradi onoliko puta koliko ima točaka u generiranom signalu. U stvarnosti se signal mjeri beskonačno pa i algoritam radi bez prestanka, no za provjeru rada algoritma dovoljno je kroz njega propustiti nekoliko perioda mjerenog signala [L26, L15].



Slika 11-2 Šematski prikaz rada releja

12 SINUSNI ALGORITMI

U poglavlju 12 Sinusni algoritmi je obrađeno šest algoritama koji pretpostavljaju da su struje i naponi kvara čistog sinusoidalnog oblika. Ta pretpostavka, naravno, nije sasvim točna, pogotovo kada se radi o mrežama visokog napona. No, struje i naponi se uglavnom filtriraju analognim filterima prije mjerenja, a i u distribuciji, gdje su manje nazivne vrijednosti struja i napona nego u prijenosu, valni oblici nakon kvara vrlo brzo poprime sinusni oblik.

Sinusni algoritmi su tako projektirani da u svakom trenutku predviđaju amplitude struja i napona. Ovi algoritmi mogu služiti za određivanje impedancije kvara što im je prvenstveno i bila namjena, no jednako tako mogu služiti za određivanje amplitude i faze struje kod diferencijalnih releja koji štite neki objekt u elektroenergetskom postrojenju (npr. tvornica koja ima svoje generatore). Šest algoritama koji su obrađeni i koji se nalaze u programu Algoritmi su sljedeći [L7]:

1. Uzorak i prva derivacija s dvije točke
2. Uzorak i prva derivacija s tri točke
3. Prva i druga derivacija
4. Dva uzorka bez derivacije
5. Tri uzorka bez derivacije
6. R i X s tri uzorka

Kao što je vidljivo iz gore navedenog popisa algoritmi se mogu podijeliti u one koji koriste derivacije i u one koji ih ne koriste. U daljnjem tekstu slijedi detaljna analiza i opis algoritama te njihove prednosti i mane.

12.1 Uzorak i prva derivacija s dvije točke

12.1.1 Izvod algoritma

Ako se pretpostavi da mjereni signal ima čisti sinusni oblik tada je moguće iz svakog izmjerenog uzorka odrediti kolika će biti amplituda signala. Neka postoje dva izmjerena uzorka $s_1(t)$ i $s_2(t)$. Tada se pomoću njih može opisati mjereni valni oblik sljedećim jednadžbama

$$s_1(t) = I_1 \sin(\omega_0 t) \quad (12.1)$$

$$s_2(t) = I_2 \sin(\omega_0 t + \Theta) \quad (12.2)$$

gdje su I_1 i I_2 amplitude mjerenog signala u trenucima uzimanja uzoraka $s_1(t)$ i $s_2(t)$, a ω_0 je kutna frekvencija signala koja se računa tako da je signal frekvencije 50 Hz. Derivirajući jednadžbu (12.1) po vremenu $d/dt[s_1(t)]$ dobije se

$$s_1'(t) = \omega_0 I_1 \cos(\omega_0 t) \quad (12.3)$$

Kvadrirajući jednadžbe (12.1) i (12.2), te koristeći jednakost $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dobiva se izraz koji glasi

$$I_1^2 = s_1(t)^2 + \left(\frac{s_1'(t)}{\omega_0} \right)^2 \quad (12.4)$$

Analogno izrazu (12.4) dobije se i izraz za I_2 koji glasi

$$I_2^2 = s_2(t)^2 + \left(\frac{s_2'(t)}{\omega_0} \right)^2 \quad (12.5)$$

Sada će se trenutno zanemariti jednadžba (12.5) i pretpostaviti da se mjeri samo jedan valni oblik (u ovom slučaju amplituda I_1) koji je u biti struja koja teče kroz neki štitičeni element. Prema jednadžbi (12.4) je vidljivo da se iz izmjenjenog uzorka te struje i prve derivacije te struje u izmjerenoj točki može doći do amplitude signala. Do derivacije se dolazi numeričkim metodama koje su opisane u poglavlju 5. Te metode koriste diferencijalne funkcije naprijed, nazad i centralnu, no u praksi je najbolje koristiti diferencijalnu funkciju nazad, jer se tada mogu koristiti već izmjereni uzorci za računanje derivacije. Koristeći formulu (5.8) i promijenivši f_k u i_k dobije se sljedeće

$$i_k' = \frac{1}{h} \left(\nabla + \frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{3} \nabla^3 + \dots \right) i_k \quad (12.6)$$

Ako se koriste samo prva dva člana jednadžbe (12.6) potrebno je izračunati

$$\nabla i_k = i_k - i_{k-1} \quad (12.7)$$

i

$$\nabla^2 i_k = \nabla i_k - \nabla i_{k-1} = i_k - 2i_{k-1} + i_{k-2} \quad (12.8)$$

Ako se pak želi samo prvi član jednadžbe (12.6) tada je nju moguće pisati kao

$$i_k' \approx \frac{1}{h} (i_k - i_{k-1}) \quad (12.9)$$

gdje je $h = \Delta t$ što je vremenski razmak među pojedinim točkama. Ako se sada izraz (12.9) uvrsti u (12.4) dobiva se algoritam koji računa amplitudu mjerenog signala struje pomoću dvije izmjerene točke i on glasi

$$I_k^2 = i_k^2 + \left(\frac{i_k - i_{k-1}}{2\pi f_o \Delta t} \right)^2 \quad (12.10)$$

i_k predstavlja trenutni uzorak, a i_{k-1} je uzorak koji je izmjeren upravo prije k-tog uzorka. Fizikalno objašnjenje algoritma je to da u svakom trenutku algoritam predviđa amplitudu signala i tako on predviđa da će u trenutku kada se izmjeri točka k

amplituda signala iznositi I_k . I_k se odnosi na maksimalnu amplitudu koja se poklapa s točkom k samo kada se mjerni uzorak uzme sa tjemena (ili minimuma) sinusoide. Drugim riječima, u svakom trenutku je poznato kolika će biti maksimalna vrijednost signala (ona je poznata i prije nego nastupi).

Ako se algoritam želi koristiti za distantnu zaštitu tada je potrebno mjeriti impedanciju, što se postiže pomoću mjerenja struja i napona koji se mjere preko strujnih i naponskih mjernih transformatora koji se nalaze na krajevima voda. Signale koje se tako mjeri može se napisati u sljedećem obliku

$$s_1(t) = v = V \sin \omega_0 t \quad (12.11)$$

$$s_2(t) = i = I \sin(\omega_0 t + \Theta) \quad (12.12)$$

Impedanciju se može izračunati iz amplitude struja i napona te njihovog međusobnog faznog pomaka. Amplituda impedancije se računa kao $|Z| = V/I$, što se pomoću jednadžbi (12.4, 12.5, 12.11 i 12.12) može pisati kao

$$|Z| = \left\{ \left[v^2 + \left(\frac{v'}{\omega_0} \right)^2 \right] / \left[i^2 + \left(\frac{i'}{\omega_0} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (12.13)$$

Argument impedancije Θ je jednak razlici kuta između naponskog i strujnog signala i opisan je jednadžbom

$$\Theta = \Theta_v - \Theta_i \quad (12.14)$$

gdje je $\Theta_v = \omega_0 t$, a $\Theta_i = \omega_0 t + \Theta$. Kut se može izračunati iz jednadžbi (12.11) i (12.12) tako da se ponovi postupak kao za osnovni algoritam (deriviranje) i zatim se iz njih izvuce kut kao što slijedi:

$$v = V \sin \Theta_v \quad (12.15)$$

$$v' = \omega_0 V \cos \Theta_v \quad (12.16)$$

Iz jednadžbi (12.15) i (12.16) se tada dobije

$$\Theta_v = \tan^{-1} \left(\frac{v \omega_0}{v'} \right) \quad (12.17)$$

Ako se ponovi isti postupak za struju tada se dobije

$$\Theta_i = \tan^{-1} \left(\frac{i \omega_0}{i'} \right) \quad (12.18)$$

Ako se sada jednadžbe (12.17) i (12.18) uvrste u (12.14) dobije se vrijednost argumenta impedancije u trenutku mjerenja i ona iznosi

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{v\omega_0}{v'}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{i\omega_0}{i'}\right) \quad (12.19)$$

Za derivacije od napona i struje uvrsti se izraz (12.9) i dobije se algoritam za računanje argumenta impedancije.

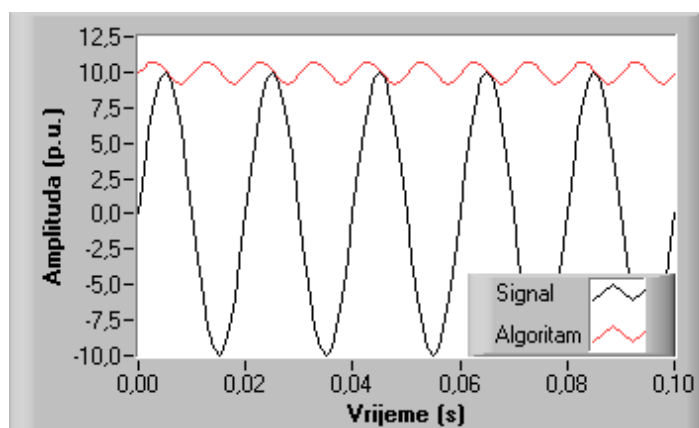
12.1.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

U stvarnosti naponi i struje kvara u EES-u nikada nemaju čisti sinusoidalni oblik. To je pogotovo točno za strujne valne oblike koji obično u sebi sadrže dosta veliku i slabo prigušujuću istosmjernu komponentu (DC) struje. Ta istosmjerna komponenta se u cijelosti prenosi u sustav digitalne obrade i stoga treba vidjeti osjetljivost algoritma na nju. Ona se najčešće javlja kada u strujnom krugu imamo transformator sa željeznom jezgrom koji napaja nekakav radni (R) teret.

Istosmjernu komponentu u strujnom signalu je moguće smanjiti tako da se na sekundar mjernog strujnog transformatora spoji impedancija koja ima omjer X/R približan onome u primarnom krugu. U praksi nije moguće imati X/R takav da je za sve vrste kvarova u primarnom krugu isti, pa je uvijek prisutna nekakva pogreška zbog eksponencijalno opadajuće istosmjerne komponente napona i struje. Ipak, primjenom te tehnike se može znatno proširiti krug primjene algoritama koji rade na pretpostavci da struje i naponi imaju sinusni oblik.

Ako se signal sastoji od samo osnovne komponente frekvencije 50 Hz, tada maksimalna pogreška u procijeni amplitude, pri frekvenciji uzimanja uzoraka od 1000 Hz, iznosi 8.3% od stvarne amplitude. Izgled signala i algoritma u svakoj točki je prikazan na slici 12-1.

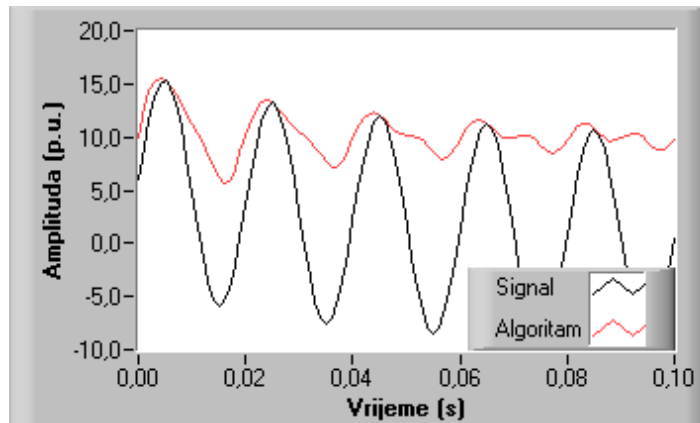


Slika 12-1 Samo osnovni signal od 50 Hz

Ako se frekvenciju uzimanja uzoraka poveća na 2000 Hz tada se pogreška približno prepola i iznosi 4.1% stvarne amplitude. Pri frekvenciji uzimanja uzoraka od 4000

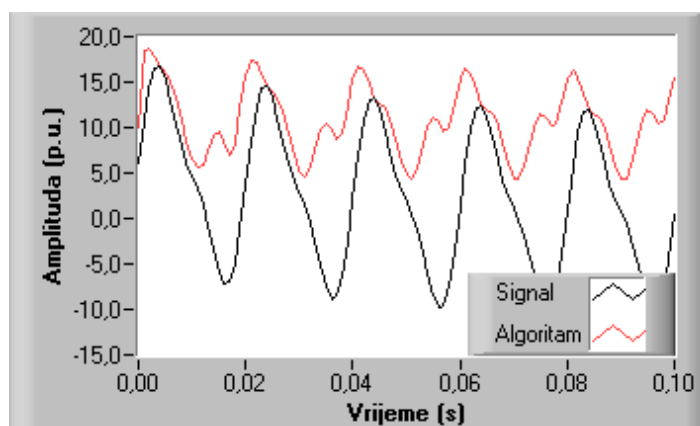
Hz maksimalna pogreška se ponovo prepolovi i tada iznosi 2% od stvarne vrijednosti amplitude. Slijedi da se smanjenje pogreške dobiva povećanjem frekvencije uzimanja uzoraka.

Kod istosmjernje prigušujuće komponente je karakteristika algoritma šetanje između apsolutnih vrijednosti maksimuma i minimuma signala (slika 12-2) s tim da se amplituda predviđi jednu do dvije milisekunde prije nego se javi. Što je manja vremenska konstanta i K to će se signal prije izravnati i poprimiti oblik kao na slici 12-2.



Slika 12-2 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal

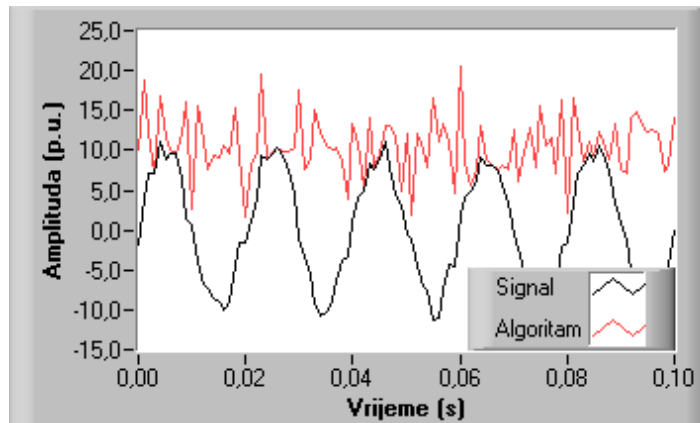
Ako se jave harmonici u signalu tada algoritam radi potpuno krivo, jer u pojedinim trenucima predviđa amplitudu znatno veću nego što ona u stvarnosti jest. Drugim riječima, javljaju se šiljci u algoritmu, što je i prikazano na slici 12-3 gdje se signal sastoji od osnovnog harmonika i drugog harmonika čija amplituda iznosi 30% amplitude osnovnog harmonika. Za treći harmonik su ti šiljci još veći.



Slika 12-3 Osnovni signal i drugi harmonik

Ako je prisutan visoko frekventni šum u signalu i ako on dospije u digitalnu opremu tada algoritam izgleda kao šum što je prikazano na slici 12-4

Kao što je i vidljivo iz gornjeg razmatranja da bi algoritam dobro radio potrebno je poništiti utjecaj istosmjernje komponente ako se želi čisti signal te se ne smiju propustiti harmonici. To se postiže ugradnjom niskopropusnih analognih filtera prije nego što se signal pusti u digitalnu opremu (na primjer filter koji ne propušta signale iznad 53 Hz). Samim time su eliminirane i visokofrekventne smetnje koje se ni u kom slučaju ne smiju propustiti u digitalni relej, o čemu je bilo govora u poglavlju 2. U daljnjim poglavljima stoga neće biti više govora o visokofrekventnim smetnjama, jer je



Slika 12-4 Visokofrekventni šum u osnovnom signalu

imperativ za dobar rad bilo kojeg algoritma njihova eliminacija pomoću niskopropusnih analognih filtera.

Za slučaj da se tu i tamo jave neke lutajuće smetnje postoji način da se pogreška koju one unose smanji. To se postiže digitalnim izravnavanjem signala. Ako, na primjer, postoje tri uzorka signala tada ih se može aproksimirati pravcem po metodi najmanjih kvadrata i tada se dobije

$$\begin{aligned}
 V_{k-2} &= \frac{1}{6}(5v_{k-2} + 2v_{k-1} - v_k) \\
 V_{k-2} &= \frac{1}{3}(v_{k-2} + v_{k-1} + v_k) \\
 V_{k-2} &= \frac{1}{6}(-v_{k-2} + 2v_{k-1} + 5v_k)
 \end{aligned}
 \tag{12.20}$$

Izravnane vrijednosti V_{k-x} odgovaraju vrijednostima sa istim indeksom u algoritmu.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 12-1 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi uzorak i prvu derivaciju s dvije točke.

Tablica 12-1 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovna komponenta 50 Hz	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000Hz	greška je 8.3%	Javljuju se šiljci koji su znatno veći od maksimalne vrijednosti signala	Šeće između apsolutne maksimalne i minimalne vrijednosti signala. Situacija je bolja što su K i vremenska konstanta manji	Algoritam izgleda kao smetnja
2000Hz	greška je 4.1%			
4000Hz	greška je 2%			

12.2 Uzorak i prva derivacija sa tri točke

12.2.1 Izvod algoritma

Izvod algoritma je isti kao u prethodnom poglavlju (12.1.1) s time da se kod računanja derivacije iz formule (12.6) uzmu prva dva člana pa se tada dobije

$$i'_k = \frac{1}{2\Delta t} (3i_k - 4i_{k-1} + i_{k-2}) \quad (12.21)$$

Sada se to uvrsti u izraz (12.4) i dobije se algoritam za računanje amplitude koji koristi trenutni uzorak i prethodna dva i glasi

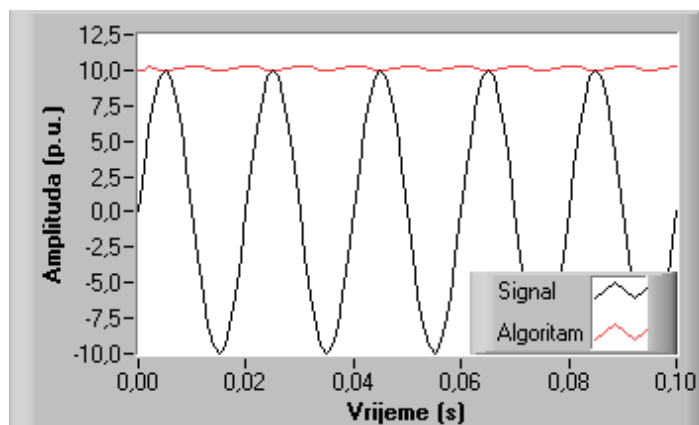
$$I_k^2 = i_k^2 + \left(\frac{3i_k - 4i_{k-1} + i_{k-2}}{4\pi f_o \Delta t} \right)^2 \quad (12.22)$$

Razlika između ovog algoritma i algoritma iz poglavlja 12.1 koji opisuje jednačba (12.4) je ta da algoritam (12.22) koristi jednu točku više u izračunu derivacije, dakle algoritam koristi tri mjerene točke, a ne dvije kao prethodni. Zbog preciznijeg izračuna derivacije za pretpostaviti je kako će algoritam imati manju pogrešku pri izračunavanju amplitude signala od algoritma (12.4). Sada će taj algoritam biti detaljnije analiziran

12.2.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Ako frekvencija uzimanja uzoraka iznosi 1000 Hz i ako je signal čisti sinusoidalan, odnosno ako je prisutan samo osnovni harmonik frekvencije 50 Hz bez prisutnosti viših harmonika, tada se javlja greška u izračunu amplitude signala čija maksimalna vrijednost iznosi 3.2%. Ako se to usporedi sa tablicom 3 vidi se da je to više nego pola manje od algoritma koji koristi izraz za derivaciju sa samo dvije točke. Na slici 12-5

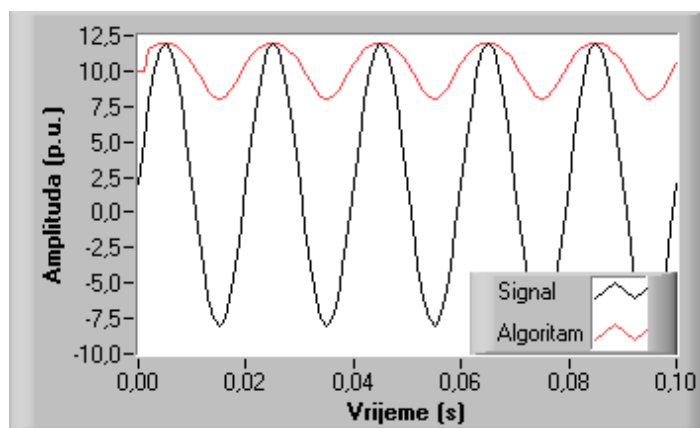


Slika 12-5 Osnovni signal od 50 Hz

je prikazan izgled signala i izgled algoritma u svakoj točki. Ako se pogleda golim okom slika 12-1 i 12-5 jasno se vidi razlika u pogrešci i kvaliteti algoritma. Još valja naglasiti da pogreška u algoritmu s tri točke ide samo prema gore; odnosno, minimalna vrijednost algoritma je uvijek jednaka stvarnoj vrijednosti amplitude signala, dok to nije slučaj s algoritmom iz poglavlja 12.1.

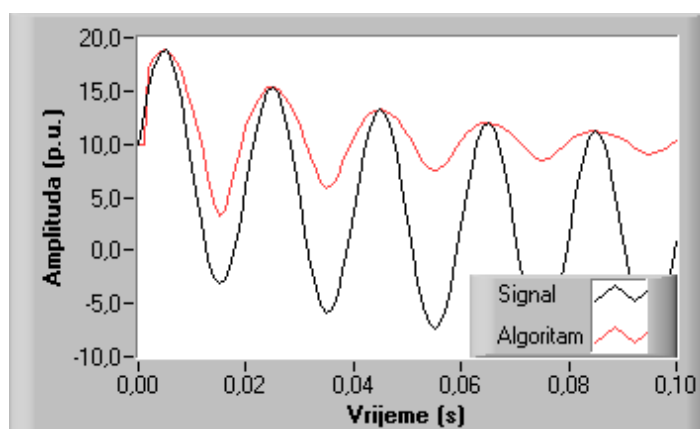
Ako se frekvencija uzimanja uzoraka poveća dvostruko, dakle na 2000 Hz, tada se greška u izračunu amplitude smanji za četiri puta i njena maksimalna vrijednost sada iznosi 0.8%. Pri daljnjem povećanju frekvencije uzimanja uzoraka na 3000 Hz javlja se maksimalna greška od 0.3%, a pri 4000 Hz maksimalna pogreška iznosi 0.2%. Dakle, vidljivo je da su greške gotovo zanemarujuće pa je stoga dovoljno koristiti frekvenciju uzimanja uzoraka od 1000 Hz, a tamo gdje se želi veća preciznost koristi se frekvencija uzimanja uzoraka od 2000 Hz.

Ako je prisutna istosmjerna komponenta signala tada se vrijednosti algoritma šecu između apsolutne maksimalne i minimalne vrijednosti signala s tim da sada krivulja algoritma ima blaže prijelaze nego u algoritmu s dvije točke, što se i vidi ako se uspoređi slika 12-2 sa slikom 12-6.



Slika 12-6 Osnovni i istosmjerni neprigušujući signal

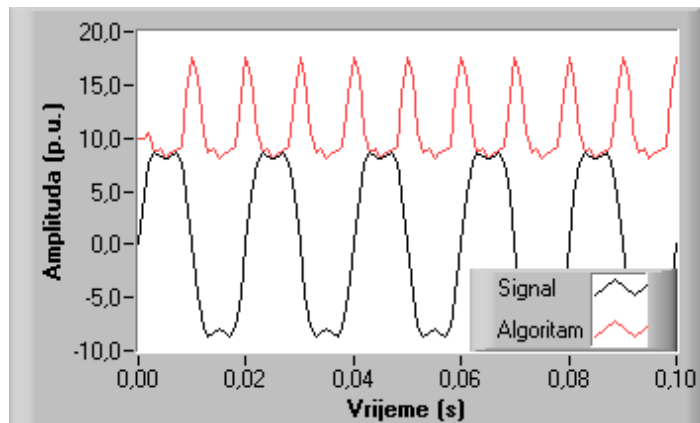
Ako je signal prigušujući algoritam će se prije izravnati i poprimiti oblik kao na slici 12-5 što je manja vremenska konstanta i K. Izgled algoritma ako je u signalu prigušujuća istosmjerna komponenta je dan na slici 12-7.



Slika 12-7 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal

Pri pojavi viših harmonika javljaju se šiljci u algoritmu koji su znatno veće od amplitude signala. Na slici 12-8 je prikazan izgled algoritma ako se javi treći harmonik

čija amplituda iznosi 20% amplitude osnovnog harmonika. Vidljivo je kako algoritam u pojedinim trenucima predviđa amplitudu koja je oko 60% veća od stvarne.



Slika 12-8 Osnovni signal i treći harmonik

Ako se povećava frekvencija uzimanja uzoraka tada se šiljci smanjuju, ali neznatno (sa 63% na 60% za $f_s=4000\text{Hz}$).

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 12-2 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi uzorak i prvu derivaciju s tri točke.

Tablica 12-2 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovna komponenta 50 Hz	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000Hz	greška je 3.2%	Javljaju se šiljci koji su znatno veći od maksimalne vrijednosti signala	Šeće između apsolutne maksimalne i minimalne vrijednosti signala. Situacija je bolja što su K i vremenska konstanta manji	Algoritam izgleda kao smetnja
2000Hz	greška je 0.8%			
4000Hz	greška je 0.2%			

12.3 Algoritam s prvom i drugom derivacijom

12.3.1 Izvod algoritma

Neka se pretpostavi da su valni oblici struje i napona dani jednadžbama

$$v(t) = V \sin(\omega_0 t) \quad (12.23)$$

$$i(t) = I \sin(\omega_0 t + \Theta) \quad (12.24)$$

Ako se sada jednačbe iz izraza (12.23) i (12.24) deriviraju dva puta po vremenu dobije se

$$v' = \omega_0 V \cos \omega_0 t \quad (12.25)$$

$$v'' = -\omega_0^2 V \sin \omega_0 t \quad (12.26)$$

Koristeći jednakost $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i kvadrirajući jednačbe (12.25) i (12.26) dobije se izraz za amplitudu napona

$$V^2 = \frac{1}{\omega_0^2} \left[(v')^2 + \left(\frac{v''}{\omega_0} \right)^2 \right] \quad (12.27)$$

Analogno tome se dobiva i izraz koji predviđa amplitudu struje u svakom trenutku i on glasi

$$I^2 = \frac{1}{\omega_0^2} \left[(i')^2 + \left(\frac{i''}{\omega_0} \right)^2 \right] \quad (12.28)$$

Koristeći izraze (5.13) i (5.15) iz poglavlja 5 dolazi se do izraza za prvu i drugu derivaciju

$$v'_k = \frac{1}{2\Delta t} (v_{k+1} - v_{k-1}) \quad (12.29)$$

$$v''_k = \frac{1}{(\Delta t)^2} (v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) \quad (12.30)$$

gdje je Δt vremenski interval uzimanja uzoraka, a indeksi $k-1$, k i $k+1$ se odnose na skup uzastopnih uzoraka. Uvrštanjem izraza (12.29) i (12.30) u izraz (12.27) dolazi se do algoritma za izračun amplitude koji glasi

$$V^2 = \frac{1}{\omega_0^2} \left[\left(\frac{v_{k+1} - v_{k-1}}{2\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{\omega_0 (\Delta t)^2} \right)^2 \right] \quad (12.31)$$

Analogno gornjem algoritmu dobije se i algoritam za amplitude struje. Ako se želi izračunati apsolutna vrijednost impedancije tada se izrazi (12.27) i (12.28) podijele te se dobije

$$|Z|^2 = \frac{V^2}{I^2} = \frac{(v')^2 + \left(\frac{v''}{\omega_0} \right)^2}{(i')^2 + \left(\frac{i''}{\omega_0} \right)^2} \quad (12.32)$$

Argument impedancije se može odrediti iz izraza (12.24, 12.25 i 12.26) iz kojih slijedi da je kut napona

$$\Theta_V = \omega_0 t = -\tan^{-1}\left(\frac{v''}{\omega_0 v'}\right) \quad (12.33)$$

a kut struje je

$$\Theta_I = -\tan^{-1}\left(\frac{i''}{\omega_0 i'}\right) \quad (12.34)$$

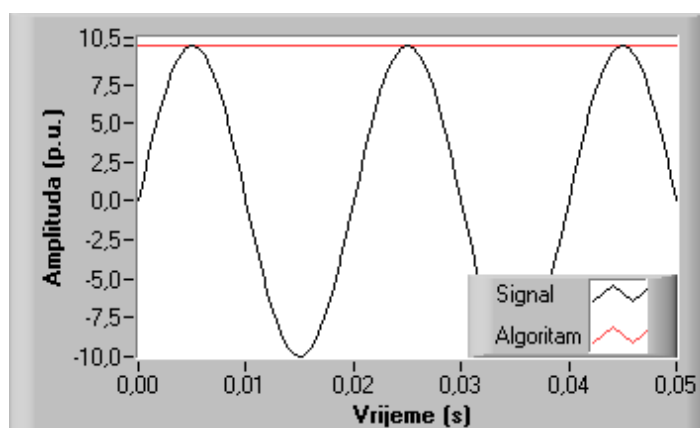
iz gornjih jednažbi se dobije argument impedancije i on glasi

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{i''}{\omega_0 i'}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v''}{\omega_0 v'}\right) \quad (12.35)$$

12.3.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

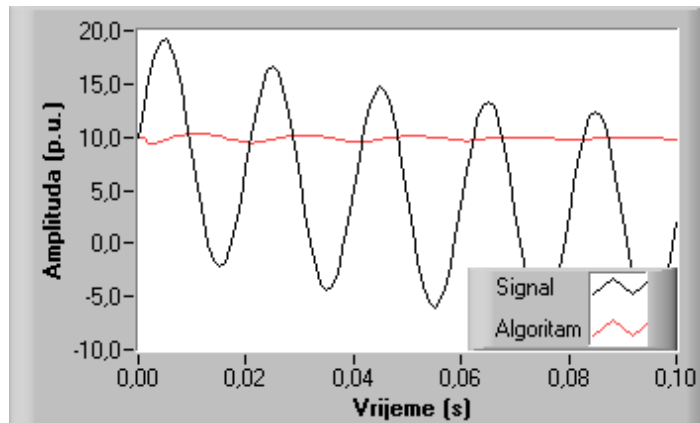
Pri frekvenciji uzimanja uzoraka od 1000 Hz signala koji je čistog sinusnog oblika frekvencije 50 Hz i bez prisustva harmonika i istosmjerne komponente, javlja se maksimalna pogreška u radu algoritma, koja iznosi 1.6%. Ako se frekvencija uzimanja uzoraka poveća na 2000 Hz tada pogreška algoritma iznosi 0.3%. Pri frekvenciji uzimanja uzoraka od 3000 Hz pogreška algoritma u procijeni amplitude signala je samo 0.2%. Stoga je dovoljno odabrati frekvenciju uzimanja uzoraka između 1000 i 2000 Hz. Na slici 12-9 je prikazan izgled algoritma za frekvenciju uzimanja uzoraka od 2000 Hz.



Slika 12-9 Osnovni signal od 50 Hz

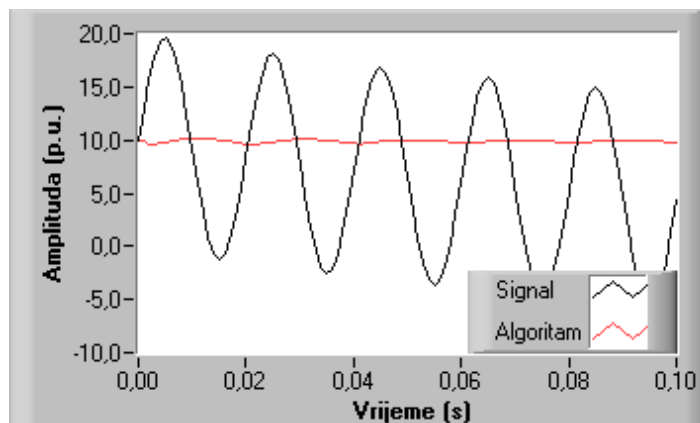
Glavna prednost ovog algoritma je digitalno filtriranje istosmjerne komponente koja se može javiti u signalu kvara [L27]. Do filtriranja dolazi jer se u izrazu za prvu i drugu derivaciju (12.29) i (12.30) poništava istosmjerna komponenta. Naime, ako se svakom mjerenom članu doda DC komponenta i ako se to uvrsti u izraze tada se vidi da se sve

DC komponente ponište. Što je vremenska konstanta manja (istosmjerna komponenta strmo pada prema nuli), to će i pogreška algoritma biti veća jer svaki sljedeći mjereni uzorak ima nešto manju DC komponentu pa ne dolazi do potpunog poništenja. Ako vremenska konstanta iznosi 60 ms (s time da je K jednak amplitudi osnovnog signala), tada je u prvoj periodi signala pogreška izračuna algoritma najveća i iznosi 5.6%. Što vrijeme dalje odmiče to se pogreška smanjuje. Taj slučaj je prikazan na slici 12-10.



Slika 12-10 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal

Ako je pak vremenska konstanta veća i iznosi 120 ms, a uz gore navedene uvijete, tada je najveća pogreška algoritma 2.7% u prvoj periodi kvara i kako vrijeme odmiče tako se smanjuje. To prikazuje slika 12-11.



Slika 12-11 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal

Također valja primijetiti, što je i logično iz gornjeg razmatranja, da je greška u izračunu algoritma to veća što se povećava vrijednost K u odnosu na amplitudu signala uz istu vremensku konstantu.

Prisutnost neprigušujućeg istosmjernog signala nije prikazana jer on ne unosi pogrešku zbog toga što ga algoritam uopće ne vidi.

Ako se jave harmonici tada se opet javljaju šiljci kao i u prethodnim algoritmima. Ako se pak jave visokofrekventne smetnje koje nastaju npr. zbog putnih valova, tada algoritam jako griješi jer jednadžbe za prvu i drugu derivaciju krivo računaju. Rješenje koje se može postići kako bi se taj problem ublažio je izravnavanje signala kao što je opisano u poglavlju 10.1.1. Time se postiže vrlo dobra eliminacija šuma i samim time bolja procjena impedancije.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 12-3 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi prvu i drugu derivaciju.

Tablica 12-3 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovna komponenta 50 Hz	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000Hz	greška je 1.6%	Javljaju se šiljci koji su znatno veći od maksimalne vrijednosti signala	Glavna prednost je filtriranje istosmjerne komponente iz algoritma. Što je vremenska konstanta manja i K veća je i početna pogreška algoritma	Algoritam izgleda kao smetnja
2000Hz	greška je 0.3%			
4000Hz	greška je 0.2%			

12.4 Algoritam s dva uzorka bez derivacije

12.4.1 Izvod algoritma

Neka su i_k i i_{k+1} vrijednosti uzoraka struje koje su izmjerene u trenucima t_k i t_{k+1} . Vremenski interval uzimanja uzoraka je Δt . Tada se može pisati

$$i_k = I \sin \omega_0 t_k \quad (12.36)$$

$$i_{k+1} = I \sin \omega_0 t_{k+1} = I \sin \omega_0 (t_k + \Delta t)$$

$$i_{k+1} = I \sin \omega_0 t_k \cos \omega_0 \Delta t + I \cos \omega_0 t_k \sin \omega_0 \Delta t \quad (12.37)$$

Ako se (12.36) uvrsti u (12.37) dobije se sljedeće

$$I \cos \omega_0 t_k = \frac{i_{k+1} - i_k \cos \omega_0 \Delta t}{\sin \omega_0 \Delta t} \quad (12.38)$$

Kvadriranjem jednadžbi (12.36) i (12.38) te koristeći jednakost $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dolazi se do izraza za amplitudu struje

$$I^2 = \frac{i_k^2 + i_{k+1}^2 - 2i_k i_{k+1} \cos \omega_0 \Delta t}{(\sin \omega_0 \Delta t)^2} \quad (12.39)$$

Analogno gornjem izrazu dobije se da amplituda napona iznosi

$$V^2 = \frac{v_k^2 + v_{k+1}^2 - 2v_k v_{k+1} \cos \omega_0 \Delta t}{(\sin \omega_0 \Delta t)^2} \quad (12.40)$$

Vrijednosti ω_0 i Δt su konstantne pa su izrazi koji računaju kosinus i sinus u gornjem algoritmu također konstantni te u stvarnosti predstavljaju nekakve težinske faktore s kojima se množe izmjereni uzorci. Ako se koriste izračunate vrijednosti amplituda u kombinaciji s uzorcima signala koji se mjeri, moguće je doći do izraza za apsolutnu vrijednost impedancije (dijelajući 12.40 sa 12.39) te do argumenta impedancije. To se postiže na sljedeći način

$$i_k = I \sin(\omega_0 t_k + \Theta) = I \sin \omega_0 t_k \cos \Theta + I \cos \omega_0 t_k \sin \Theta \quad (12.41)$$

gdje je Θ fazni kut između valnog oblika napona i struje. Strujni izmjereni uzorak i_{k+1} , koji je uzet u vremenu $t_k + \Delta t$, se također može prikazati kao

$$i_{k+1} = I \left[\sin \omega_0 t_k \cos \omega_0 \Delta t + \cos \omega_0 t_k \sin \omega_0 \Delta t \right] \cos \Theta + I \left[\cos \omega_0 t_k \cos \omega_0 \Delta t + \sin \omega_0 t_k \sin \omega_0 \Delta t \right] \sin \Theta \quad (12.42)$$

Iz jednadžbi (12.36) i (12.38) se dobije

$$\sin \omega_0 t_k = \frac{v_k}{V} \quad (12.43)$$

$$\cos \omega_0 t_k = \frac{v_{k+1} - v_k \cos \omega_0 \Delta t}{V \sin \omega_0 \Delta t} \quad (12.44)$$

Koristeći sada jednadžbe od (12.41) do (12.44), nakon računanja, dobiva se algoritam koji služi za računanje argumenta impedancije i on glasi

$$\Theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{i_k v_k + i_{k+1} v_{k+1} - (i_k v_{k+1} + i_{k+1} v_k) \cos \omega_0 \Delta t}{IV (\sin \omega_0 \Delta t)^2} \right\} \quad (12.45)$$

Iz algoritma je vidljivo da je potrebno imati samo po dva uzorka struje i napone te prethodno izračunate amplitude struje i napona koji se također računaju pomoću ista dva uzorka.

12.4.2 Analiza rada algoritma

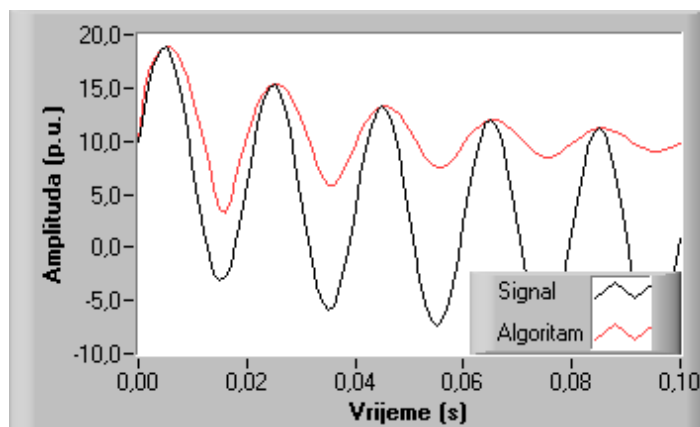
Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Frekvencija uzimanja uzoraka signala ne utječe na računanje amplitude signala pa je stoga pogreška algoritma pri računanju amplitude, za bilo koje frekvencije uzimanja uzoraka (1000 Hz, 2000 Hz, itd.), jednaka nuli. Ako se želi što niža frekvencija

uzimanja uzoraka treba paziti na Nyquistov teorem i ne ići ispod određene frekvencije.

Ako se jave viši harmonici u signalu tada se u izračunu amplitude osnovnog signala javljaju velike pogreške u obliku šiljaka kao što je to i sa drugim algoritmima koji rade na principu sinusnog signala. Drugim riječima algoritam je osjetljiv na harmonike i izobličenje signala.

Ako se javi istosmjerni prigušujući signal tada algoritam poprima vrijednosti između apsolutne maksimalne i minimalne amplitude algoritma kao što je i prikazano na slici 12-12. Što se istosmjerni signal prije priguši to prije algoritam poprimi oblik ravne crte.



Slika 12-12 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 12-4 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi dva uzorka.

Tablica 12-4 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovna komponenta 50 Hz	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000Hz	greška je 0%	Javljaju se šiljci koji su znatno veći od maksimalne vrijednosti signala	Šeće između apsolutne maksimalne i minimalne vrijednosti signala. Situacija je bolja što su K i vremenska konstanta manji	Algoritam izgleda kao smetnja
2000Hz	greška je 0%			
4000Hz	greška je 0%			

12.5 Algoritam s tri uzorka bez derivacije

12.5.1 Izvod algoritma

Neka su i_k , i_{k+1} , i i_{k+2} vrijednosti uzoraka struje koje su izmjerene u trenucima t_k , t_{k+1} , i t_{k+2} . Vremenski interval uzimanja uzoraka je Δt . Tada se može pisati

$$i_k = I \sin \omega_0 t_k \quad (12.46)$$

$$i_k = I \sin(\omega_0 t_k + \omega_0 \Delta t) \quad (12.47)$$

$$i_k = I \sin(\omega_0 t_k + 2\omega_0 \Delta t) \quad (12.48)$$

Nakon sređivanja gornjih jednažbi dolazi se do izraza za algoritam koji računa amplitudu struje u svakom trenutku iz tri uzorka i on glasi

$$I = \frac{\sqrt{i_{k+1}^2 - i_k i_{k+2}}}{\sin \omega_0 \Delta t} \quad (12.49)$$

Kao i struja tako se isto može mjeriti i amplituda napona s time da se u gornju jednažbu umjesto uzoraka struje uvrste uzorci izmjenog napona.

12.5.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Greška koju proizvodi ovaj algoritam pri računanju amplitude signala je neovisna o frekvenciji uzimanja uzoraka i jednaka je nuli za bilo koju frekvenciju uzimanja uzoraka baš kao i algoritam s dvije točke bez derivacije iz poglavlja 12.4.

Ako se jave viši harmonici prisutni u signalu tada se u izračunu amplitude javljaju šiljci kao i kod svih ostalih sinusnih algoritama no kod parnih harmonika ti šiljci nisu oštri nego plosnati (kao zasićenje) ali su vrijednosti algoritma također znatno veće nego stvarna vrijednost amplitude pa je stoga i ovaj algoritam osjetljiv na harmonike.

Pri istosmjernom signalu je situacija ista kao i kod drugih sinusnih algoritama.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 12-5 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi tri uzorka.

Tablica 12-5 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovna komponenta 50 Hz	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000Hz	greška je 0%	Javljaju se šiljci koji su znatno veći od maksimalne vrijednosti signala	Šeće između apsolutne maksimalne i minimalne vrijednosti signala. Situacija je bolja što su K i vremenska konstanta manji	Algoritam izgleda kao smetnja
2000Hz	greška je 0%			
4000Hz	greška je 0%			

Glavna upotreba ovog algoritma je u tome što on za razliku od ostalih algoritama, koji računaju apsolutnu vrijednost impedancije i iznos argumenta, računa otpor i reaktanciju. Način na koji se to postiže je opisan u sljedećem poglavlju (12.6 R i X s tri uzorka).

12.6 R i X sa tri uzorka

12.6.1 Izvod algoritma

Neka se u vremenskim trenucima t_k , t_{k+1} i t_{k+2} mjere vrijednosti struje i napona. Tada postoji šest izmjerenih vrijednosti i može se pisati za napon

$$v_k = V \sin \omega_0 t_k \quad (12.50)$$

$$v_{k+1} = V \sin(\omega_0 t_k + \omega_0 \Delta t) \quad (12.51)$$

$$v_{k+2} = V \sin(\omega_0 t_k + 2\omega_0 \Delta t) \quad (12.52)$$

i za struje

$$i_k = I \sin(\omega_0 t_k + \Theta) \quad (12.53)$$

$$i_{k+1} = I \sin(\omega_0 t_k + \omega_0 \Delta t + \Theta) \quad (12.54)$$

$$i_{k+2} = I \sin(\omega_0 t_k + 2\omega_0 \Delta t + \Theta) \quad (12.55)$$

gdje je Θ kut između signala struje i napona, a Δt je vremenski razmak među susjednim uzorcima signala. Nakon prikladne obrade jednadžbi (12.50 do 12.55) dolazi se do sljedećih izraza

$$i_{k+1}^2 + i_k i_{k+2} = I^2 \sin^2(\omega_0 \Delta t) \quad (12.56)$$

$$v_{k+1} i_{k+2} - v_{k+2} i_{k+1} = -VI \sin \Theta \sin \omega_0 \Delta t \quad (12.57)$$

$$2v_{k+1} i_{k+1} - v_{k+2} i_k - v_k i_{k+2} = 2VI \cos \Theta \sin^2(\omega_0 \Delta t) \quad (12.58)$$

Realni dio impedancije, otpor, je dan formulom $(V/I)\cos\Theta$ pa stoga, koristeći gornje tri jednadžbe, dobiva se i algoritam koji računa otpor iz tri izmjerena uzorka struje i napona i on glasi

$$R_f = \frac{2v_{k+1}i_{k+1} - v_{k+2}i_k - v_k i_{k+2}}{2(i_{k+2}^2 - i_k i_{k+2})} \quad (12.59)$$

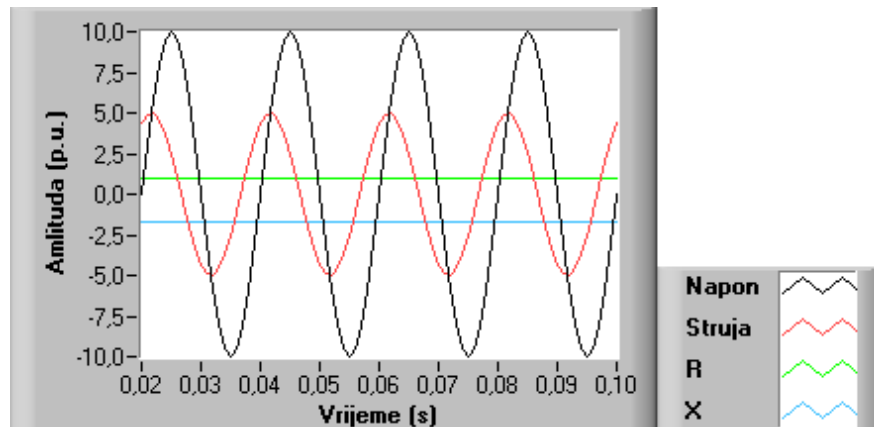
Imaginarni dio impedancije, reaktancija, je dana formulom $(-V/I)\sin\Theta$ pa se također, pomoću jednadžbi (12.56 do 12.58), može dobiti algoritam koji računa reaktanciju iz tri izmjerena uzorka struje i napona i on glasi

$$X = \frac{v_{k+1}i_{k+2} - v_{k+2}i_{k+1}}{i_{k+1}^2 - i_k i_{k+2}} \sin \omega_0 \Delta t \quad (12.60)$$

12.6.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Na slici 12-13 je prikazan valni oblik struje i napona koji su fazno pomaknuti te dvije ravne linije koje pokazuju vrijednosti otpora i reaktancije u svakom trenutku. Valja napomenuti da su i strujni i naponski signali na slici čisti sinusni bez prisustva harmonika i istosmjerne komponente.



Slika 12-13 Osnovni harmonik struje i napona

Frekvencija uzimanja uzorka signala ne utječe na točnost izračuna algoritma čija je pogreška pri računanju otpora i reaktancije jednaka nuli za bilo koju frekvenciju uzimanja uzoraka pod uvjetom da se poštuje Nyquistov teorem. Ako se pak javljaju harmonici i/ili istosmjerne komponente tada je situacija ista kao i kod algoritma iz poglavlja 12.5

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 12-6 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi tri uzorka za izračun reaktancije i otpora.

Tablica 12-6 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovna komponenta 50 Hz	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000Hz	greška je 0%	Javljaju se šiljci koji su znatno veći od maksimalne vrijednosti R i X	Šeće između apsolutne maksimalne i minimalne vrijednosti R i X. Situacija je bolja što su K i vremenska konstanta manji	Algoritam izgleda kao smetnja
2000Hz	greška je 0%			
4000Hz	greška je 0%			

13 FOURIEROVI ALGORITMI

*U poglavlju 13 **Fourierovi algoritmi** su obrađeni algoritmi koji rade na principu Fourierove analize. Fourierova analiza uključuje Fourierov red i Fourierovu transformaciju.*

Osnovna pretpostavka pri korištenju algoritama koji proizlaze iz Fourierovog reda je ta da je valni oblik kvara (struje i/ili napona) periodičan u nekom vremenskom intervalu od na primjer t_0 do t_0+T , gdje je T period osnovne komponente signala. Ta pretpostavka omogućava razvijanje valnog oblika u Fourierov red. Nakon toga se iz reda izvlači osnovna komponenta (ili neka druga po potrebi) signala i koristi se za računanje impedancije kvara [L28] ili, na primjer, diferencijalnih struja.

U slučaju korištenja Fourierove transformacije nije potrebna nikakva pretpostavka o prirodi valnog oblika već svi podaci koji su izmjereni ulaze u postupak Fourierove transformacije i prebacuju se u frekvencijsku domenu u kojoj se vidi kolika je amplituda pojedinih frekvencijskih komponenti iz čega se tada može računati impedancija. Obično se uzima da je okvir u kojem se skupljaju uzorci velik kao perioda osnovnog signala (može i dvije periode, tri periode itd.), jer se tada dobivaju najbolji rezultati i najmanje rasipanje frekvencije te stoga nije potrebno koristiti uokvirivanje signala (poglavljje 7) koje povećava broj računskih operacija.

U ovom poglavlju će biti govora o pet algoritama koji su obrađeni u programu Algoritmi; to su [L7]:

1. Fourierov red s cijelim periodom
2. Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom
3. Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom
4. Fourierov red s pola perioda
5. FFT algoritam

Iz gornjeg popisa je vidljivo da se algoritmi mogu podijeliti na one koji koriste Fourierov red i na one koji koriste Fourierovu transformaciju. U daljnjem tekstu slijedi izvod, opis i analiza gore navedenih algoritama.

13.1 Fourierov red s cijelim periodom

13.1.1 Izvod algoritma

Iz poglavlja 8.1 je vidljivo da se svaki valni oblik koji je funkcija od vremena može razviti u Fourierov red. Naponi i struje koji se mjere su funkcije vremena te se mogu razviti u Fourierov red. Ako postoji valni oblik napona $v(t)$ tada ga se, prema formuli (8.1) može razviti u red i pisati

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (13.1)$$

Koeficijente a_n i b_n se mogu izračunati iz formula (8.4) i (8.5) i oni glase

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n=0, 1, \dots \quad (13.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n=1, 2, \dots \quad (13.3)$$

gdje je ω_0 kutna frekvencija osnovne komponente, a T je period. Iz jednadžbi (13.1), (13.2) i (13.3) je vidljivo kako se do osnovne komponente napona i struje može doći ako se n stavi da je jednak jedinici. Nakon toga se označi realni i imaginarni dio napona sa V_x i V_y koji predstavljaju osnovnu komponentu naponskog valnog oblika kvara $v(t)$. Promatrani period T neka je jednak periodu osnovne komponente signala (20 ms za frekvenciju od 50Hz), a početni trenutak promatranja signala neka je t_0 . Tada se za V_x može pisati sljedeće

$$V_x = a_1 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cos \omega_0 t dt \quad (13.4)$$

Ako postoji N uzoraka po periodu osnovne komponente i vremenski razmak među uzorcima iznosi Δt , tada je trenutak j -tog uzorka $j\Delta t$, a dužina perioda osnovne komponente je $T=N\Delta t$.

Integral u jednadžbi (13.4) se može napisati u numeričkom obliku pomoću trapezoidne formule (6.16), za N uzoraka koji su ekvidistantno udaljeni, koja glasi

$$I = \frac{\Delta x}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{N-1} + 2y_N) \quad (13.5)$$

Ako se sada ta formulu upotrijebi za rješavanje integrala iz jednadžbe (13.4) tada se dolazi do izraz za V_x koji glasi

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{2}{N\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{2} (v_0 \cos \omega_0 t_0 + 2v_1 \cos \omega_0 t_1 + \dots + 2v_{N-1} \cos \omega_0 t_{N-1} + v_N \cos \omega_0 t_N) \\ &= \frac{2}{N} \left(\frac{v_0}{2} \cos \omega_0 t_0 + v_1 \cos \omega_0 t_1 + \dots + v_{N-1} \cos \omega_0 t_{N-1} + \frac{v_N}{2} \cos \omega_0 t_N \right) \end{aligned} \quad (13.6)$$

Ako se za vremenske intervale napiše $t_j=j\Delta t$, $j=0, 1, \dots, N$ tada se za težinske faktore unutar zagrade jednadžbe (13.6) (izrazi s kosinusom) može pisati

$$\cos \omega_0 t_j = \cos \frac{2\pi}{T} \cdot j \cdot \Delta t = \cos \frac{2\pi}{N} j, \quad j=0, 1, \dots, N \quad (13.7)$$

Koristeći izraz (13.7) zajedno s (13.6) dolazi se do algoritma za računanje komponente napona V_x koja glasi

$$V_x = \frac{2}{N} \left(\frac{v_0}{2} + \frac{v_N}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} v_j \cdot W_{x,j} \right) \quad (13.8)$$

gdje se $W_{x,j}$ računa kao

$$W_{x,j} = \cos \frac{2\pi}{N} \cdot j, \quad j=1,2,\dots,N-1 \quad (13.9)$$

Analogno izrazu za V_x dolazi se i do izraza za imaginarni dio napona V_y koji glasi

$$V_y = \frac{2}{N} \left(\frac{v_0}{2} \sin \omega_0 t_0 + v_1 \sin \omega_0 t_1 + \dots + v_{N-1} \sin \omega_0 t_{N-1} + \frac{v_N}{2} \sin \omega_0 t_N \right) \quad (13.10)$$

što u konačnici možemo pisati kao

$$V_y = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} v_j \cdot W_{y,j} \quad (13.11)$$

gdje se $W_{y,j}$ računa kao

$$W_{y,j} = \sin \frac{2\pi}{N} \cdot j, \quad j=1,2,\dots,N-1 \quad (13.12)$$

Ako se sada usporede izrazi (13.9) i (13.12) vidi da u algoritmu (13.12) nema izmjerenih veličina v_0 i v_N . Razlog tome je taj što su težinski faktori koji se množe sa njima ($\sin 0$ i $\sin 2\pi$) jednaki nuli.

Prema izrazu koji glasi

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (13.13)$$

računa se amplituda signala nakon što su se izračunali V_x i V_y . Izrazi (13.8), (13.11) i (13.13) služe za računanje realnog, imaginarnog i apsolutnog iznosa mjenog napona ili struje. Princip rada algoritma je taj da kada se počne mjeriti mjeri se prva perioda i kada se došlo do svih točaka u prvoj periodu signala (kada je ona završila) počinje se s računom. Nakon toga se više ne čeka cijela perioda nego se izmjeri nova točka signala, a odbaci prva izmjerena točka te se ponovo računa. Drugim riječima uvijek postoji konstantan broj točaka koje obuhvaća nekakav okvir, čiju veličinu se unaprijed odredi, i koji se pomiče pri svakoj izmjerenoj točki tako da obuhvati tu novu točku, a izbaci staru (najstariju u okviru).

Kako bi se olakšalo i samim time ubrzalo računanje u realnom vremenu, poželjno je unaprijed odrediti težinske faktore u izrazima (13.8) i (13.10). Da bi to bilo moguće potrebno je unaprijed odrediti broj uzoraka po osnovnoj periodu signala, a to se postiže tako da se odredi frekvencija uzimanja uzoraka unaprijed i za nju se zatim izračunaju koeficijenti koje se uvrste u algoritam. Ako se, na primjer, želi $N=12$ uzoraka po periodu osnovnog signala (koja traje 20 ms), tada ispada da frekvencija uzimanja uzoraka mora biti 600 Hz. Može se koristiti i manja frekvencija uzimanja uzoraka, koja daje osam ili čak četiri uzorka po periodu, tamo gdje je to zadovoljavajuće. Međutim, pri štíćenju dalekovoda, dakle u prijenosu, najprikladniji i

zadovoljavajući odabir frekvencije uzimanja uzoraka je upravo 600 Hz, odnosno $N=12$. U tablici 13-1 su izračunati težinski faktori za $N=12$

Tablica 13-1

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$W_{x,j}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$W_{y,j}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Ako se sada podaci iz tablice 13-1 uvrste u jednadžbe (13.8) i (13.11) tada se dolazi do algoritma koji računa imaginarni i realni dio mjenog signala čija je osnovna frekvencija 50 Hz, s time da frekvencija uzimanja uzoraka mora biti 600 Hz. On glasi

$$V_x = \frac{1}{6} \left[\frac{v_0}{2} + \frac{v_{12}}{2} - v_6 + \frac{1}{2}(v_2 + v_{10} - v_5 - v_7) + \frac{\sqrt{3}}{2}(v_1 + v_{11} - v_4 - v_8) \right] \quad (13.14)$$

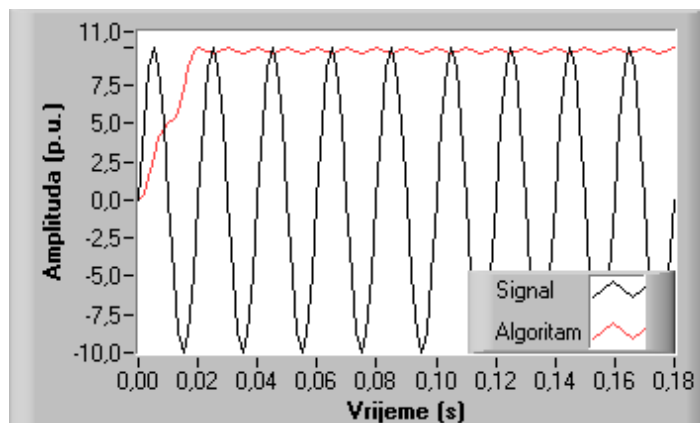
$$V_y = \frac{1}{6} \left[v_3 - v_9 + \frac{1}{2}(v_1 + v_5 - v_7 - v_{11}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(v_2 + v_4 - v_8 - v_{10}) \right] \quad (13.15)$$

Ako se želi vrijednost amplitude tada se jednadžbe (13.14) i (13.15) ubace u (13.13). U slučaju da se želi imati neku drugu frekvenciju uzimanja uzoraka tada se napravi tablica kao što je tablica 13-1, samo sa drugim vrijednostima, a zatim se izvede algoritam za tu frekvenciju.

13.1.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Ako je prisutna samo osnovna komponenta signala tada algoritam izgleda kao na slici 13.1.

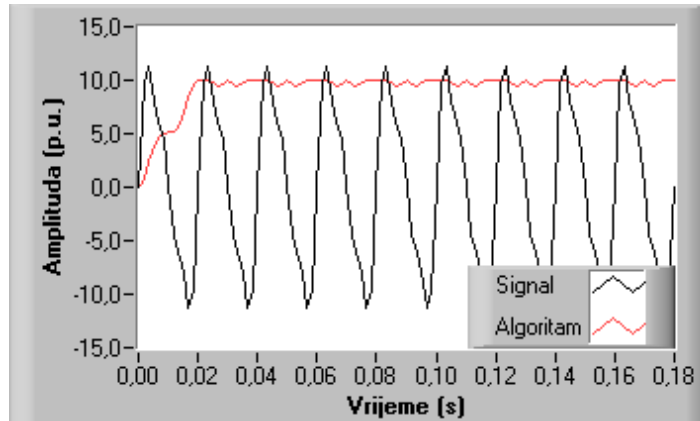


Slika 13-1 Osnovna komponenta signala

U prvoj periodu se javlja, trenutak stavljanja releja u pogon, pripremanje algoritma i tada on ne radi pravilno nego tek nakon 20 ms počinje vršiti svoju funkciju. Maksimalna pogreška pri izračunu amplitude signala za frekvenciju uzimanja uzoraka

600 Hz iznosi 4.5% i javlja se u trenucima maksimalne i minimalne vrijednosti signala. Što je više točaka po osnovnom periodu signala, veća frekvencija uzimanja uzoraka, to je i pogreška izračuna amplitude manja ali je duže računanje i veći broj težinskih faktora.

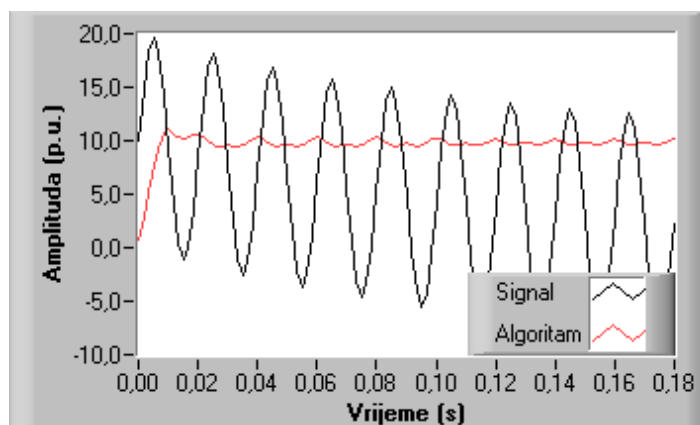
Pri pojavi harmonika algoritam mjeri samo amplitudu osnovnog signala i izgleda, ako se javi drugi harmonik koji iznosi 30% osnovnog i treći koji je 20% osnovnog, kao na slici 13-2.



Slika 13-2 Osnovni, drugi i treći harmonik

Maksimalna pogreška izračuna amplitude osnovnog signala koja se tada javlja iznosi 6%. To je ujedno i najveća pogreška koja je primijećena za razne kombinacije harmonika, jer ona vrlo malo varira ovisno o prisutnosti pojedinog harmonika (najviše 2%).

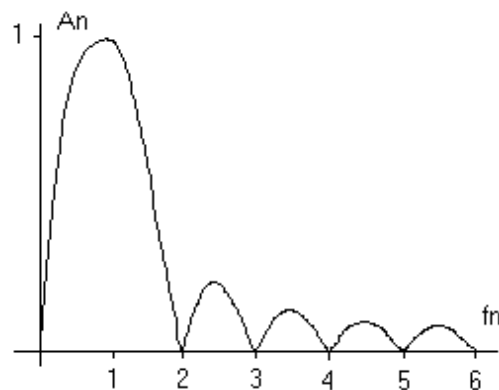
Ako se javi istosmjerna prigušujuća komponenta onda je pogreška izračuna amplitude osnovnog signala to veća što je veći K i manja vremenska konstanta. Na slici 13-3 je prikazan signal sa prigušujućom istosmjernom komponentom, gdje je K isti kao i amplituda osnovnog signala, a vremenska konstanta iznosi 120 ms. U tom slučaju maksimalna pogreška iznosi 5.5%. Ona se smanjuje što se istosmjerna komponenta više prigušuje.



Slika 13-3 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal

Na slici 13-4 je prikazan frekvencijski odziv algoritma iz kojeg je vidljivo kako su istosmjerna komponenta i svi harmonici, osim prvog, filtrirani; odnosno, jednaki su nuli. Iz toga se vidi da se ovaj algoritam u biti ponaša kao digitalni filter kojem se podešava n (harmonik) koji se želi dok se svi ostali prigušuju. Stoga je algoritam

potpuno neosjetljiv na iskrivljenje mjenog valnog oblika i ako se pomoću njega računa impedancija voda tada je rezultat potpuno očišćen od svih smetnji.



Slika 13-4 Frekvencijski odziv algoritma

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 13-2 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi Fourierov red s cijelim periodom za računanje amplitude signala.

Tablica 13-2 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovna komponenta 50 Hz	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
600 Hz	maksimalna greška je 4.5% Što je veća f_s to je greška manja	Maksimalna pogreška ovisi o amplitudi i harmonicima koji se javljaju. Za drugi i treći harmonik iznosi 6%	Ovisi o K i o vremenskoj konstanti	Malo iskrivi algoritam (oko 2%)

13.2 Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom

13.2.1 Izvod algoritma

Ako se želi mjeriti samo treći harmonik tada je u formule (13.2) i (13.3) potrebno uvrstiti broj 3 na mjesto gdje je n. U tom slučaju izraz za realnu komponentu trećeg harmonika glasi

$$V_{x,3} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cos 3\omega_0 t dt \quad (13.16)$$

i za imaginarnu komponentu

$$V_{y,3} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \sin 3\omega_0 t dt \quad (13.17)$$

gdje je T i dalje frekvencija osnovnog harmonika jer se u biti iz signala osnovne frekvencije izvlače harmonici, u ovom slučaju treći.

Ako postoji N uzoraka po periodu osnovne komponente i vremenski razmak među uzorcima iznosi Δt tada je trenutak j -tog uzorka $j\Delta t$, a dužina perioda osnovne komponente je $T=N\Delta t$.

Primjenjujući formulu (13.5) za numeričko integriranje na jednadžbe (13.16) i (13.17) dolazi se do izraza za realnu i imaginarnu komponentu amplitude napona trećeg harmonika koji su slični izrazima (13.6) i (13.10) samo uz sinusni i kosinusni član imaju broj 3. Oni glase

$$V_{x,3} = \frac{2}{N} \left(\frac{v_0}{2} \cos 3\omega_0 t_0 + v_1 \cos 3\omega_0 t_1 + \dots + v_{N-1} \cos 3\omega_0 t_{N-1} + \frac{v_N}{2} \cos 3\omega_0 t_N \right) \quad (13.18)$$

i za imaginarnu komponentu

$$V_{y,3} = \frac{2}{N} \left(\frac{v_0}{2} \sin 3\omega_0 t_0 + v_1 \sin 3\omega_0 t_1 + \dots + v_{N-1} \sin 3\omega_0 t_{N-1} + \frac{v_N}{2} \sin 3\omega_0 t_N \right) \quad (13.19)$$

Ako se za vremenske intervale napiše $t_j=j\Delta t$, $j=0,1,\dots, N$ tada se za težinske faktore unutar zagrade jednadžbe (13.18) i (13.19) (izrazi sa kosinusom i sinusom) može pisati

$$\cos 3\omega_0 t_j = \cos 3 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot j \cdot \Delta t = \cos \frac{6\pi}{N} j = W_{x3,j}, \quad j=0,1,\dots, N \quad (13.20)$$

$$\sin 3\omega_0 t_j = \sin 3 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot j \cdot \Delta t = \sin \frac{6\pi}{N} j = W_{y3,j}, \quad j=0,1,\dots, N \quad (13.21)$$

Uz pomoć gornjih izraza se mogu formule (13.18) i (13.19) napisati u obliku

$$V_{x,3} = \frac{2}{N} \left(\frac{v_0}{2} + \frac{v_N}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} v_j \cdot W_{x3,j} \right) \quad (13.22)$$

za realnu komponentu, i isto tako za imaginarnu komponentu

$$V_{y,3} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} v_j \cdot W_{y3,j} \quad (13.23)$$

To su algoritmi za računanje trećeg harmonika iz mjenog signala. U algoritmu (13.23) nema izmjerenih veličina v_0 i v_N . Razlog tome je taj što su težinski faktori koji se množe s njima ($\sin 0$ i $\sin 6\pi$) jednaki nuli. Princip rada algoritma je isti kao i za algoritam u poglavlju 13.1. Za ovaj algoritam je također povoljno unaprijed odrediti frekvenciju uzimanja uzoraka i samim time broj točaka po osnovnom signalu i iz toga težinske faktore. Ako se koristi frekvencija uzimanja uzoraka od 600 Hz, kao i u poglavlju 13.1, tada N ispada 12 uzoraka po osnovnom signalu (50 Hz) i može se

napraviti tablica 13-3, koja je slična tablici 13-1, iz koje se vide težinski faktori za $j=0$ do N .

Tablica 13-3

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$W_{x3,j}$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$W_{y3,j}$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Sada se rezultati iz tablice 13-3 uvrste u (13.22) i (13.23) i dobije se algoritam koji računa kolika je amplituda trećeg harmonika, ako ga uopće ima, u signalu frekvencije 50 Hz pri frekvenciji uzimanja uzoraka od 600 Hz. On glasi

$$V_{x3} = \frac{1}{6} \left(\frac{v_0}{2} + \frac{v_{12}}{2} - v_2 + v_4 - v_6 + v_8 - v_{10} \right) \quad (13.24)$$

$$V_{y3} = \frac{1}{6} (v_1 - v_3 + v_5 - v_7 + v_9 - v_{11}) \quad (13.25)$$

I na kraju sama amplituda trećeg harmonika se računa kao

$$V_3 = \sqrt{V_{x3}^2 + V_{y3}^2} \quad (13.26)$$

13.2.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

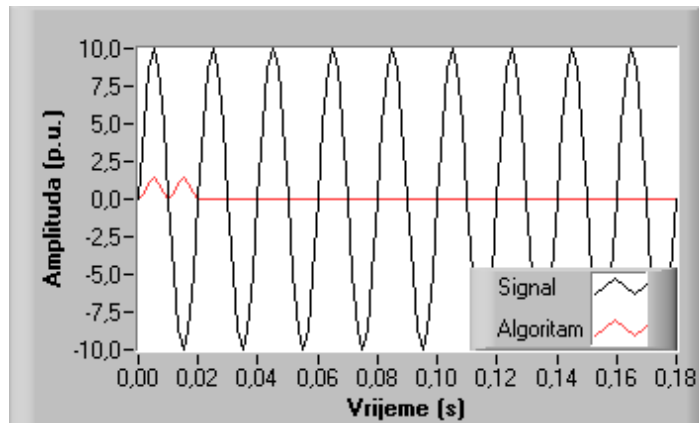
Glavna karakteristika ovog algoritma je njegovo ponašanje kao digitalni filter koji propušta samo treći harmonik osnovnog signala, a sve ostale, uključujući i osnovni harmonik, prigušuje.

Algoritam je napravljen za 12 uzoraka po periodu osnovnog signala što znači da mu je frekvencija uzimanja uzoraka 600 Hz. Iz toga slijedi da je maksimalna frekvencija signala koji se može mjeriti 300 Hz (to je granična frekvencija pa je stvarna koja se može mjeriti nešto manja, na primjer 299 Hz).

Prema tome, ako se želi izbjeći nastajanje aliasa, u mjerni krug treba postaviti analogni niskopropusni filter koji ne propušta nikakav signal koji ima frekvenciju veću od 300 Hz. Ako se želi mjeriti samo treći harmonik, što je i svrha ovog algoritma, tada je dovoljno postaviti analogni filter koji ne propušta ništa iznad 150 Hz.

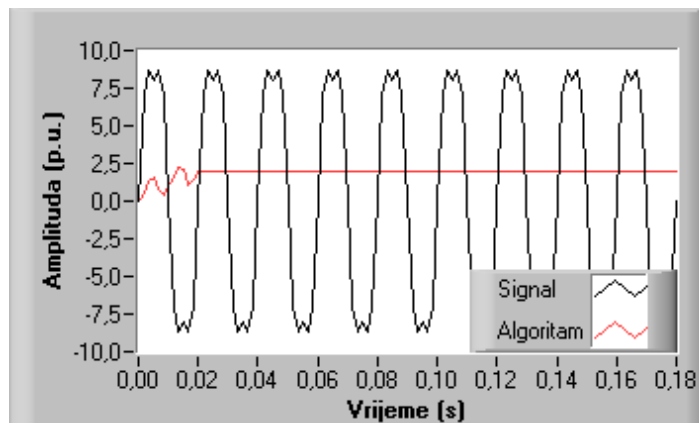
Na slici 13-5 je prikazan sinusni signal koji ima samo osnovnu frekvencijsku komponentu, dakle 50 Hz.

Vidljivo je da algoritam u svakoj točki mjerenja iznosi nula, što je i za očekivati jer treći harmonik nije prisutan. Pri proradi algoritma je potrebno 20 ms da bi se on pripremio za rad. Stoga je u prvih 20 ms potrebno blokirati rad digitalnog releja kako ne bi proradio pri samom uključanju u pogon. Najjednostavniji način za to je programsko podešenje koje će u prvih 20 ms izbaciti vrijednosti nula za amplitudu, a nakon toga stvarne vrijednosti algoritma.



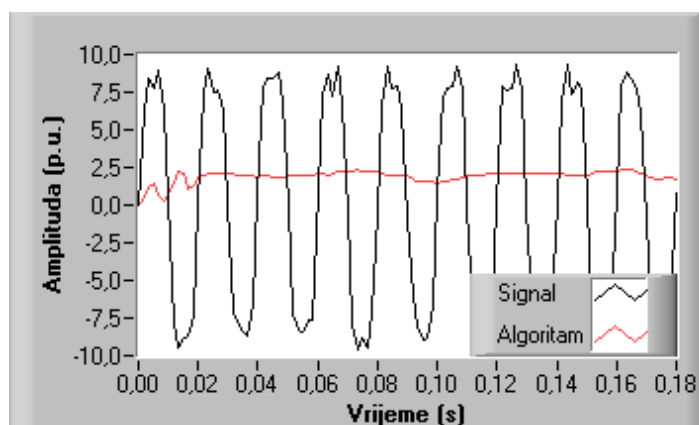
Slika 13-5 Osnovni signal frekvencije 50 Hz

Na slici 13-6 je prikazan rad algoritma kada je u signalu prisutan treći harmonik čija je vrijednost 2 p.u. i vrijednost osnovne komponente 10 p.u. Vidi se da je pogreška proračuna amplitude trećeg harmonika jednaka nuli i to je tako za bilo koju vrijednost trećeg harmonika.



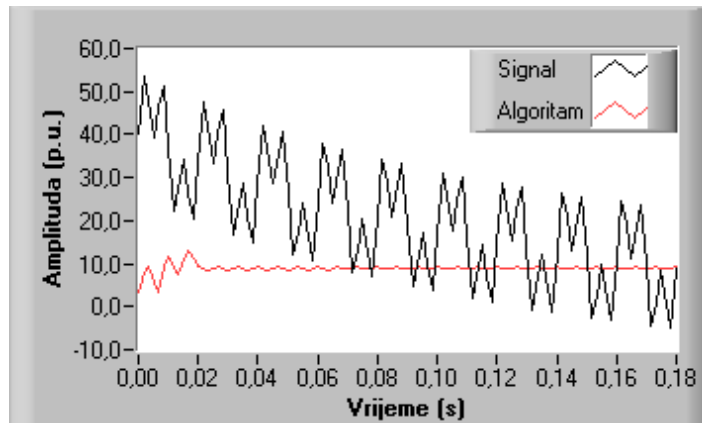
Slika 13-6 Osnovni signal i treći harmonik

Prisutnost drugih harmonika također ne utječe na točnost proračuna amplitude trećeg harmonika. Zanimljivo je primijetiti da ni sedmi harmonik (makar je iznad granične frekvencije od 300 Hz) ne utječe na rad algoritma, no zato se pri visokofrekvencijskom šumu javlja malo mreškanje signala, kao što pokazuje slika 13-7 pa je ipak potrebno imati analogne niskopropusne filtere.



Slika 13-7 Visokofrekventni šum

Ako u signalu postoji prigušujući istosmjerni signal tada algoritam malo griješi pa je tako na slici 13-8 prikazan rad algoritma pri kojem osnovni signal ima amplitudu 10 p.u., treći harmonik također 10 p.u. K iznosi 40 p.u. i T je 120 ms. U takvoj situaciji maksimalna pogreška je 5%. Što je T veći (sporije prigušenje) i K manji to je i pogreška manja.



Slika 13-8 Osnovni i istosmjerni prigušujući signal

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 13-4 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi Fourierov red s cijelim periodom za računanje amplitude trećeg harmonika.

Tablica 13-4 Karakteristike algoritma

f_s	Treći harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
600 Hz	Pogreška pri računu amplitude je 0%	Prisutnost ostalih harmonika ne utječe na proračun amplitude trećeg harmonika	Pogreška ovisi o K i o vremenskoj konstanti (nije velika)	Malo iskrivi algoritam. Koliko ovisi o amplitudi pojedinih točaka u VF signalu

13.3 Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom

13.3.1 Izvod algoritma

Ako se želi mjeriti samo peti harmonik tada je u formule (13.2) i (13.3) potrebno uvrstiti broj 5 na mjesto gdje je n. U tom slučaju izraz za realnu komponentu petog harmonika glasi

$$V_{x,5} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cos 5\omega_0 t dt \quad (13.27)$$

i za imaginarnu komponentu

$$V_{y,5} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \sin 5\omega_0 t dt \quad (13.28)$$

gdje je T i dalje frekvencija osnovnog harmonika, jer se u biti iz signala osnovne frekvencije izvlače harmonici, u ovom slučaju peti. Izvod i sve pretpostavke za algoritam su iste kao i za algoritam s trećim harmonikom (poglavlje 13.2.1) pa je stoga dan konačan oblik algoritma za proračun realne i imaginarne komponente amplitude petog harmonika. Izraz za realni dio algoritma glasi

$$V_{x,5} = \frac{2}{N} \left(\frac{v_0}{2} + \frac{v_N}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} v_j \cdot W_{x5,j} \right) \quad (13.29)$$

a izraz za imaginarni dio glasi

$$V_{y,5} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} v_j \cdot W_{y5,j} \quad (13.30)$$

gdje W_x i W_y imaju oblik

$$\cos 5\omega_0 t_j = \cos 5 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot j \cdot \Delta t = \cos \frac{10\pi}{N} j = W_{x5,j}, \quad j=0, 1, \dots, N \quad (13.31)$$

$$\sin 5\omega_0 t_j = \sin 5 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot j \cdot \Delta t = \sin \frac{10\pi}{N} j = W_{y5,j}, \quad j=0, 1, \dots, N \quad (13.32)$$

Ako se unaprijed odredi da je frekvencija uzimanja uzoraka 600 Hz tada je ponovo $N=12$ i može se odrediti tablicu težinskih faktora kao i u prethodna dva algoritma. Tablica 13-5 prikazuje težinske faktore koji su potrebni za proračun amplitude petog harmonika signala koji se mjeri.

Tablica 13-5

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$W_{x5,j}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$W_{y5,j}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Sada se pomoću tablice 13-5 i izraza (13.29) i (13.30) dobije konačan izgled algoritma koji računa imaginarnu i realnu komponentu amplitude petog harmonika (za $N=12$) signala i on glasi

$$V_{x5} = \frac{1}{6} \left[\frac{v_0}{2} + \frac{v_{12}}{2} - v_6 + \frac{1}{2}(v_2 - v_4 - v_8 + v_{10}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(v_5 - v_1 + v_7 - v_{11}) \right] \quad (13.33)$$

$$V_{y5} = \frac{1}{6} \left[v_3 - v_9 + \frac{1}{2}(v_1 + v_5 - v_7 - v_{11}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(v_{10} + v_8 - v_4 - v_2) \right] \quad (13.34)$$

Apsolutna vrijednost amplitude se na kraju dobije iz izraza

$$V_5 = \sqrt{V_{x5}^2 + V_{y5}^2} \quad (13.35)$$

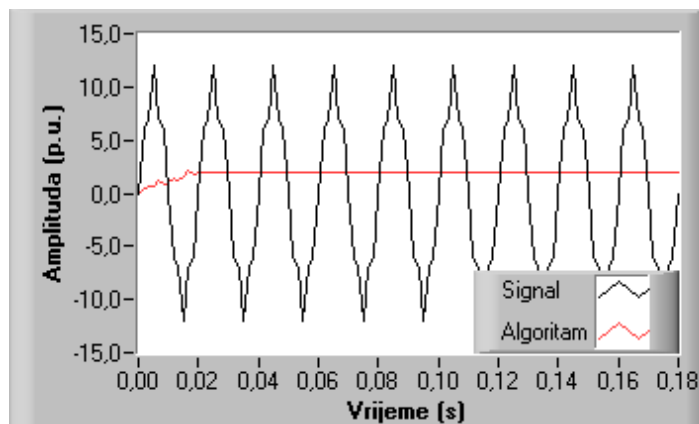
13.3.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Glavna karakteristika ovog algoritma je njegovo ponašanje kao digitalni filter koji propušta samo peti harmonik osnovnog signala, a sve ostale, uključujući i osnovni harmonik, prigušuje. Algoritam je napravljen za 12 uzoraka po periodu osnovnog signala, što znači da mu je frekvencija uzimanja uzoraka 600 Hz.

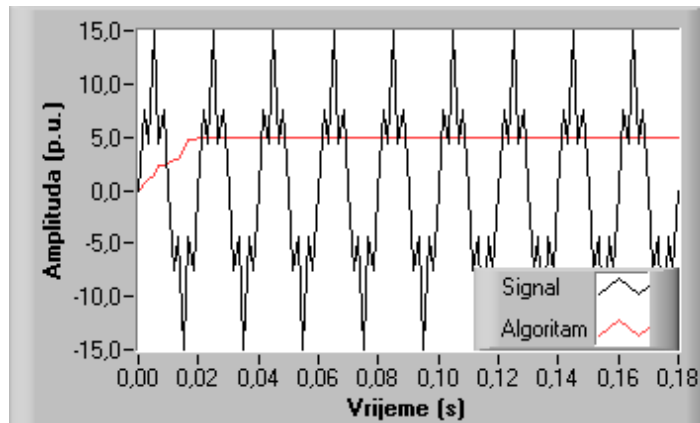
Princip rada algoritma je taj da kada se počne mjeriti mjeri se prvu periodu (misli se na osnovnu periodu od 50 Hz) i kada se došlo do svih točaka u prvoj periodu signala (kada je ona završila) počinje se s računom. Nakon toga se više ne čeka cijelu periodu nego se izmjeri nova točka signala, a odbaci prva izmjerena točka te se ponovo računa. Drugim riječima, uvijek postoji konstantan broj točaka koje obuhvaća nekakav okvir čija se veličina odredi unaprijed i koji se pomiče pri svakoj izmjerenoj točki tako da obuhvati tu novu točku, a izbaci staru (najstariju u okviru). Veličina okvira može iznositi bilo koji broj perioda T, 2T, 3T itd., no dovoljno je uzeti veličinu okvira T, jer se kasnije sve ponavlja pa se samo gubi vrijeme na nepotrebno računanje. Kada se govori o periodu T misli se na period osnovne frekvencije signala (50 Hz), a ne na frekvenciju 250 Hz, što bi se moglo pomisliti u ovom slučaju. Zašto je to tako vidljivo je iz osnovne formule (13.1) gdje se vidi da se iz osnovnog signala izvlače harmonici, a T upravo predstavlja frekvenciju osnovnog signala, bez obzira na to koji harmonik se iz njega želi izvući. Dakle, potrebno je imati cijeli signal kako bi se iz njega moglo doći do pojedinih harmonika.

Na slici 13-9 je prikazan signal i proračun amplitude petog harmonika ($f_s=600$ Hz, $N=12$) čija amplituda iznosi 2 p.u. Pogreška algoritma je nula. U slučaju da peti harmonik nije prisutan tada je vrijednost algoritma u svakoj točki jednaka nuli. Ovaj algoritam također ne radi prvu periodu (vrijeme privikavanja) od trenutka uključivanja kao niti ostali Fourierovi algoritmi. Nakon prve periode algoritam počinje normalnim radom.



Slika 13-9 Osnovni signal i peti harmonik

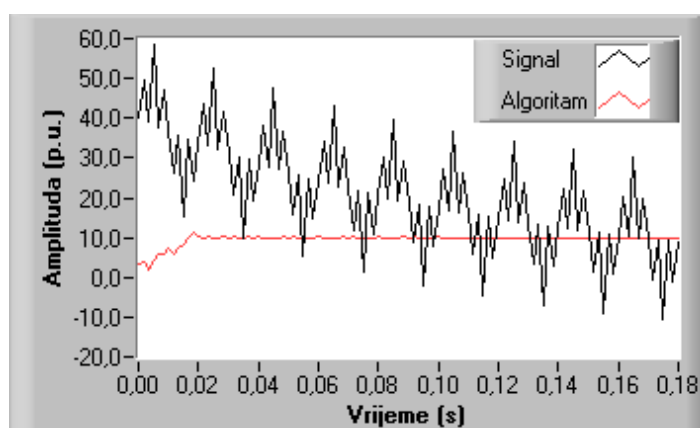
Prisutnost ostalih harmonika u signalu ne utječe na rad algoritma, ali sedmi harmonik smanjuje vrijednost računate amplitude petog harmonika i stoga izaziva grešku (to nije slučaj kod algoritma koji računa amplitudu trećeg harmonika). To je vidljivo na slici 13-10 gdje je signal osnovne frekvencije, čija je amplituda 10 p.u., zatim peti harmonik amplitude 6 p.u. i sedmi harmonik amplitude 1 p.u.



Slika 13-10 Osnovni, peti i sedmi harmonik

Algoritam tada računa amplitudu petog harmonika kao 5 p.u., a u stvarnosti je ona 6 p.u. Sprječavanje ulaska sedmog harmonika u sustav digitalne obrade se u ovom slučaju, kao i u svim drugim slučajevima, postiže upotrebom niskopropusnih analognih filtera.

Ako je prisutan prigušujući istosmjerni signal tada se javlja mala pogreška pri računanju amplitude signala petog harmonika. Ona je manja što je K manji i/ili T veći (sporije prigušenje). Pri čistom istosmjernom signalu pogreške uopće nema. Na slici 13-11 je prikazan izgled algoritma ako je prisutna istosmjerna komponenta. K je 40 p.u. i T je 120 ms. Amplitude osnovnog i petog harmonika su 10 p.u. Maksimalna pogreška pri izračunu amplitude petog harmonika koja se tada javlja iznosi 1.3%, što je zanemarivo malo.



Slika 13-11 Osnovni i peti harmonik plus istosmjerna komponenta

Pri visokofrekvencijskom šumu se javlja malo mrežkanje signala, kao što je to i slučaj sa algoritmom iz prethodnog poglavlja (11.2), pa je potrebno imati analogne niskopropusne filtere kako bi se spriječio ulazak šuma u mjerni sustav.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 13-6 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi Fourierov red s cijelim periodom za računanje amplitude petog harmonika.

Tablica 13-6 Karakteristike algoritma

f_s	Treći harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
600 Hz	Pogreška pri računu amplitude je 0%	Prisutnost ostalih harmonika ne utječe na proračun amplitude trećeg harmonika osim sedmog	Pogreška ovisi o K i o vremenskoj konstanti (nije velika), ali je u principu zanemariva	Malo iskrivi algoritam. Koliko ovisi o amplitudi pojedinih točaka u VF signalu

13.4 Fourierov red s pola perioda

13.4.1 Izvod algoritma

Razlika između ovog algoritma i prethodnih Fourierovih algoritama je ta što se u ovome koristi samo pola perioda osnovnog signala za izračun amplitude frekvencijskih komponenata. U formule (13.2) i (13.3) se uvrsti za n onaj broj koji predstavlja harmonik čiju se amplitudu želi računati, što je isto kao i u algoritmima sa cijelim periodom. Računanje i izvod će biti provedeni za $n=1$, iz čega slijedi da će se računati amplituda prvog harmonika. Pomoću jednadžbi (13.2) i (13.3) mogu se pisati izrazi za realnu i imaginarnu komponentu signala s time da sada umjesto cijelog perioda treba uvrstiti samo pola perioda. Izrazi glase

$$V_{\frac{x}{2}} = \frac{2}{(T/2)} \int_{t_0}^{t_0+T/2} v(t) \cos \omega_0 t dt \quad (13.36)$$

$$V_{\frac{y}{2}} = \frac{2}{(T/2)} \int_{t_0}^{t_0+T/2} v(t) \sin \omega_0 t dt \quad (13.37)$$

Koristeći izraz (13.5) za numeričku integraciju i pretpostavku da je $T=N\Delta t$ te primjenjujući to na (13.36) dolazi se do oblika za realni dio amplitude signala osnovnog harmonika koji glasi

$$V_{\frac{x}{2}} = \frac{4}{N} \left(\frac{v_0}{2} \cos \omega_0 t_0 + v_1 \cos \omega_0 t_1 + \dots + v_{\frac{N}{2}-1} \cos \omega_0 t_{\frac{N}{2}-1} + \frac{v_{N/2}}{2} \cos \omega_0 t_{\frac{N}{2}} \right) \quad (13.38)$$

što se može pisati kao

$$V_{\frac{x}{2}} = \frac{4}{N} \left(\frac{v_0}{2} - \frac{v_{N/2}}{2} + \sum_{j=1}^{N/2-1} v_j W_{\frac{x}{2},j} \right) \quad (13.39)$$

gdje je

$$W_{x/2,j} = \cos \frac{2\pi}{N} \cdot j, \quad j=1, \dots, (N/2)-1 \quad (13.40)$$

Analogno gornjem izrazu za amplitudu realnog dijela dolazi se i do izraza za amplitudu imaginarnog dijela (13.37) koji glasi

$$V_{\frac{y}{2}} = \frac{4}{N} \left(\frac{v_0}{2} \sin \omega_0 t_0 + v_1 \sin \omega_0 t_1 + \dots + v_{\frac{N}{2}-1} \sin \omega_0 t_{\frac{N}{2}-1} + \frac{v_{N/2}}{2} \sin \omega_0 t_{\frac{N}{2}} \right) \quad (13.41)$$

što se može pisati kao

$$V_{\frac{y}{2}} = \frac{4}{N} \left(\sum_{j=1}^{N/2-1} v_j W_{\frac{y}{2},j} \right) \quad (13.42)$$

U gornjem izrazu nema člana v_0 i $v_{N/2}$ jer su težinski faktori uz njih jednaki nuli ($\sin 0$ i $\sin \pi$). Valja naglasiti da se težinski faktori za imaginarni dio računaju kao

$$W_{y/2,j} = \sin \frac{2\pi}{N} \cdot j, \quad j=1, \dots, (N/2)-1 \quad (13.43)$$

Ako se sada pretpostavi da je frekvencija uzimanja uzoraka 600 Hz, onda N iznosi 12 točaka po periodu, odnosno 6 u pola periode. Tada se može sastaviti tablica unaprijed izračunatih težinskih faktora.

Tablica 13-7

j	0	1	2	3	4	5	6
$W_{x,j}$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	-1
$W_{y,j}$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0

Vidljivo je da tablica ima iste vrijednosti kao i tablica 13-1 u kojoj su izračunati težinski faktori za algoritam s cijelim periodom. Sada se pomoću vrijednosti iz tablice 13-7 i izraza (13.39) i (13.42) dolazi do algoritma za izračun realne i imaginarne komponente amplitude osnovnog harmonika. On glasi

$$V_{\frac{x}{2}} = \frac{1}{3} \left[\frac{v_0}{2} - \frac{v_6}{2} + \frac{1}{2} (v_2 - v_5) + \frac{\sqrt{3}}{2} (v_1 - v_4) \right] \quad (13.44)$$

$$V_{\frac{y}{2}} = \frac{1}{3} \left[v_3 + \frac{1}{2} (v_1 + v_5) + \frac{\sqrt{3}}{2} (v_2 + v_4) \right] \quad (13.45)$$

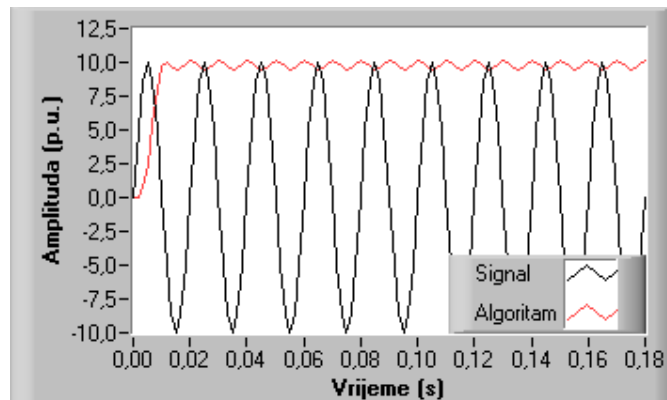
Apsolutna vrijednost amplitude se računa kao

$$V_{\frac{1}{2}} = \sqrt{V_{x/2}^2 + V_{y/2}^2} \quad (13.46)$$

Princip rada algoritma je taj da kada se počne mjeriti mjeri se pola prve periode i kada se došlo do svih točaka u pola periode signala (kada je ona završila) počinje s računom. Nakon toga se više ne čeka pola periode nego se izmjeri nova točka signala, a odbaci prva izmjerena točka te se ponovo računa. Drugim riječima uvijek postoji konstantan broj točaka koje obuhvaća nekakav okvir čija se veličina odredi unaprijed i koji se pomiče pri svakoj izmjerenoj točki tako da obuhvati tu novu točku, a izbaci staru (najstariju u okviru). Razlika između ovog okvira i do sada navedenih je ta da je njegova veličina jednaka polovici perioda osnovnog signala za razliku od do sada navedenih koji imaju okvir veliki kao cijeli period osnovnog signala.

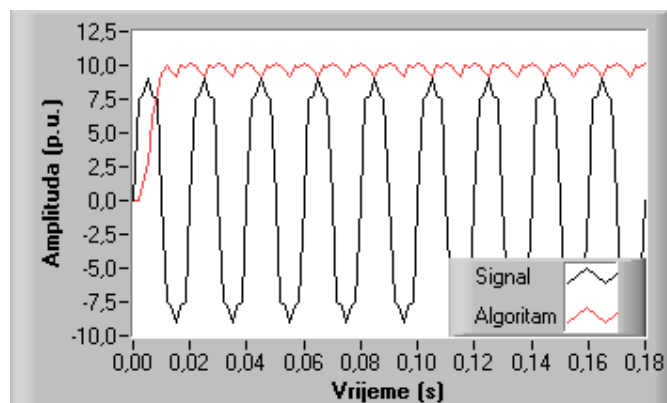
13.4.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.



Slika 13-12 Osnovna komponenta signala 50 Hz

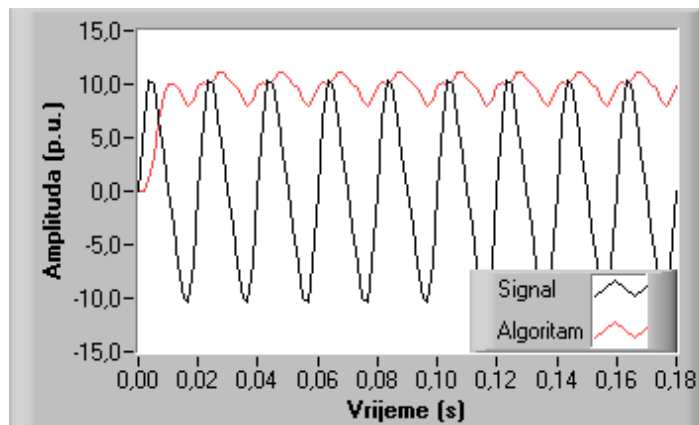
Ako je signal čistog sinusnog oblika bez viših harmonika tada je maksimalna pogreška pri izračunu amplitude osnovnog harmonika 5.2%. To je vidljivo na slici 13-12, gdje su prikazani signal i izgled algoritma u svakoj točki.



Slika 13-13 Osnovni, treći i peti harmonik

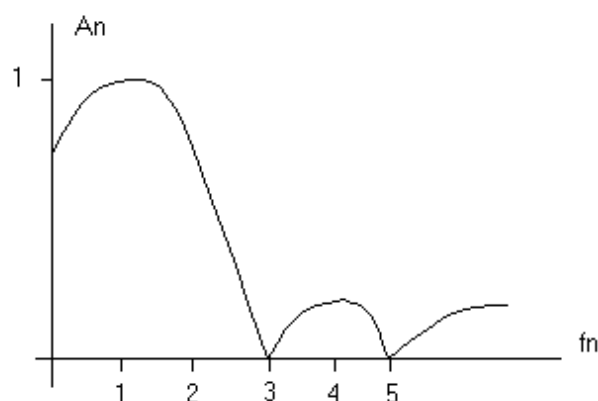
Kada su prisutni neparni harmonici tada je pogreška slična onoj kada ih i nema kao što je to prikazano na slici 13-13 gdje uz osnovni postoje treći i peti harmonik. Jedina razlika je u tome da se maksimalne pogreške algoritma javljaju u drugim trenucima kada su prisutni harmonici, a u drugima kad ih nema. Trenuci javljanja maksimalne pogreške ovise o broju i veličini neparnih harmonika.

Ako su prisutni parni harmonici tada je situacija drugačija kao što to prikazuje slika 13-14, gdje se javio drugi harmonik koji iznosi 2 p.u., dok osnovni iznosi 10 p.u. Vidljivo je da u tom slučaju algoritam daje u najvećem broju točaka krivi izračun amplitude osnovnog harmonika. Pogreška, naravno, ovisi o tome kolika je amplituda drugog harmonika.



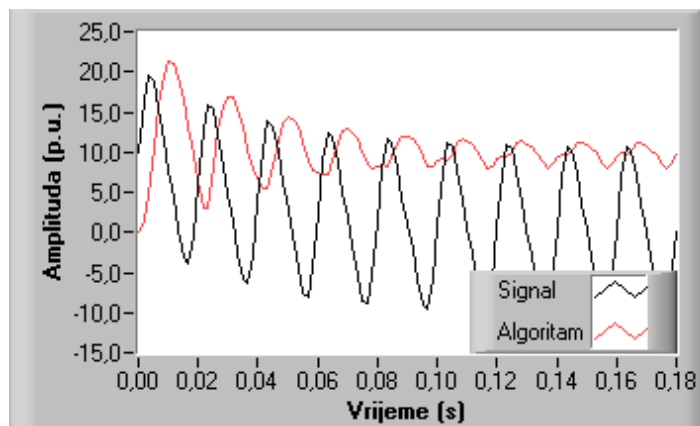
Slika 13-14 osnovni i drugi harmonik

Takva se situacija javlja kada je u signalu prisutan bilo koji parni harmonik, pa je stoga algoritam osjetljiv na njih i ne daje točne rezultate. To se vidi i na slici 13-15, koja predstavlja frekvencijski odziv algoritma i na kojoj je vidljivo da se neparni harmonici prigušuju (digitalno filtriranje), dok se parni ne prigušuju u cijelosti. Na slici je također vidljivo da je algoritam osjetljiv i na istosmjernu komponentu te ako je ona prisutna isto se dobivaju krivi rezultati.



Slika 13-15 Frekvencijski odziv algoritma

Na slici 13-16 je prikazan signal koji u sebi uz osnovnu sadrži i istosmjernu komponentu gdje je K 10 p.u. i vremenska konstanta je 40 ms. Amplituda osnovnog harmonika je također 10 p.u. Vidi se da algoritam nedaje sasvim točne rezultate što je i za očekivati.



Slika 13-16 Osnovna i istosmjerna komponenta signala

Stoga, ako se usporedi algoritam koji koristi pola perioda, koji je samim time i brži jer manje računa, s algoritmima koji koriste puni period vidi se da ima lošije karakteristike od njih jer je osjetljiv na istosmjernu komponentu i parne harmonike. No ima i dobru karakteristiku, a to je filtriranje neparnih harmonika.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 13-8 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi Fourierov red s pola perioda za računanje amplitude osnovnog harmonika.

Tablica 13-8 Karakteristike algoritma

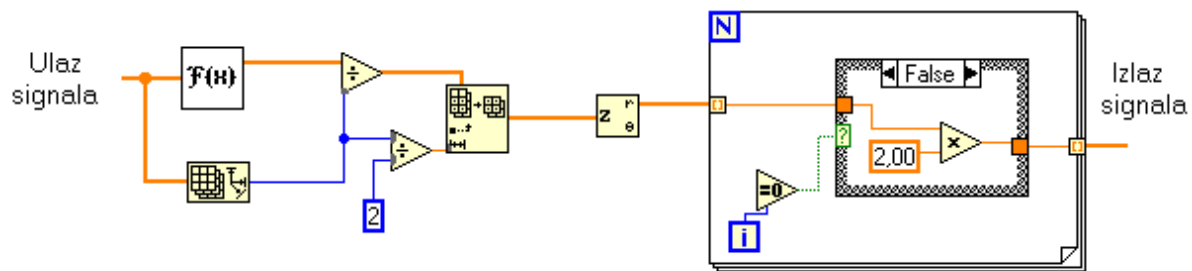
f_s	Osnovni harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
600 Hz	Maksimalna pogreška pri računu amplitude je 5.2%	Neparni harmonici ne utječu dok parni čine algoritam neupotrebljivim	Algoritam je neupotrebljiv ako se javi istosmjerna komponenta	Iskrivi algoritam. Koliko ovisi o amplitudi pojedinih točaka u VF signalu

13.5 FFT algoritam

13.5.1 Izvod algoritma

Izvod Fourierovog algoritma je dan u poglavlju 8 kao i Fourierova transformacija u diskretnom obliku s pratećim primjerom (poglavlje 8.3) gdje je prisutan DC signal koji se prevodi u frekvencijsku domenu pomoću DFT. U programu algoritmi koristi se FFT iz razloga što je frekvencija uzimanja uzoraka uzeta 800 Hz pa stoga razmak između dvije točke uzorka iznosi 1.25 ms. Stoga u osnovnu periodu signala od 20 ms, nad kojom se vrši Fourierova transformacija, stane šesnaest točaka, što zadovoljava uvjet (8.29) te se stoga može koristiti brza Fourierova transformacija (FFT), koja je brža od obične jer koristi puno manje memorije i računskih operacija.

Na slici 13-17 je prikazana blok šema algoritma. S lijeve strane je dolazni signal koji se dovodi u algoritam za FFT.



Slika 13-17 Blok šema FFT algoritma

U međuvremenu se prebrojava broj točaka koje ulaze u algoritam te se rezultat koji se dobije iz algoritma dijeli s brojem točaka kako bi se dobila točna vrijednost amplitude pojedinih harmonijskih članova (vidi primjer poglavlje 8.3). U poglavlju 8 je pokazano da FFT ima ponavljanje informacija o signalu, jer sadrži pozitivne i negativne frekvencije pa je stoga dovoljno uzeti samo pozitivne frekvencije, jer one sadrže sve potrebne informacije. Iz tog se razloga obrađeni signal (skup točaka) dovodi do funkcije koja ga prepolovljuje, odnosno koristi samo prvih pola točaka. Princip rada je taj da se izbroji koliko točaka ima, zatim se taj broj podijeli s dva te se dobiveni broj koristi za označavanje broja točaka koje se želi imati za daljnju obradu, što uvijek ispada kao polovičan broj od prvotnog broja točaka. Nakon toga se transformirani signal pretvara u polarni oblik od čega je u ovom slučaju zanimljiva samo apsolutna vrijednost. Još prije kraja treba prvu točku (DC komponentu) pomnožiti s dva kako bi dobili točan iznos amplitude DC komponente. Razlog tomu leži u numeričkom integriranju Fourierove transformacije, jer je prvi član u integraciji podijeljen s dva a to nije uzeto u obzir pri pisanju digitalnog oblika transformacije radi jednostavnosti zapisa. Nakon cjelokupne obrade postoji polje u kojem se nalaze vrijednosti amplitude pojedinih harmonika koje na kraju samo treba očitati.

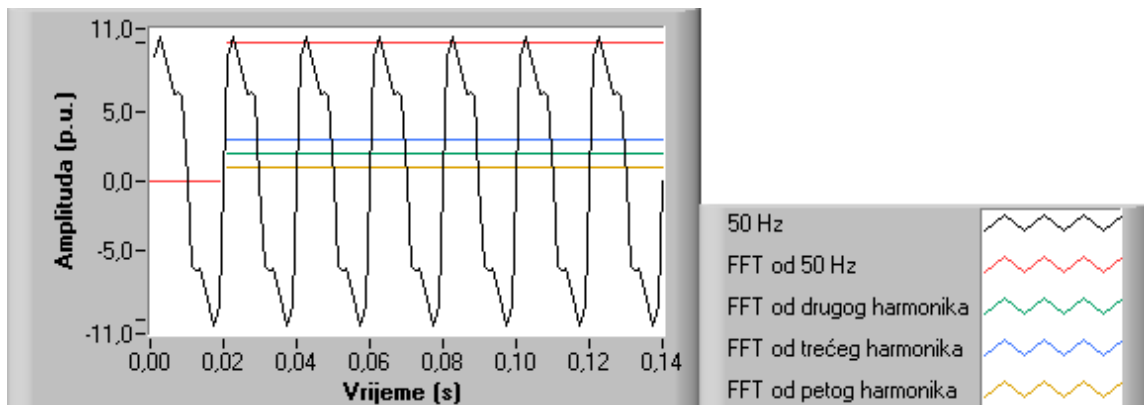
Princip rada algoritma je taj da u početku izmjeri šesnaest točaka zatim ih propusti kroz gornju blok šemu. Nakon toga izmjeri novu točku, sedamnaestu, a izbaci prvu i ponovo sve propusti kroz algoritam. Drugim riječima, nakon početnog mjerenja kada sakupi šesnaest točaka više nije potrebno skupiti novih šesnaest već algoritam radi kao okvir konstantne veličine koji se pomiče kako se mjere nove točke da bi ih obuhvatio i istovremeno izbacio najstarije. Veličina okvira je naravno 20 ms, koliko iznosi i osnovni harmonik signala, jer se upravo na njemu vrši FFT i samim time se iz njega izvlače harmonici.

13.5.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

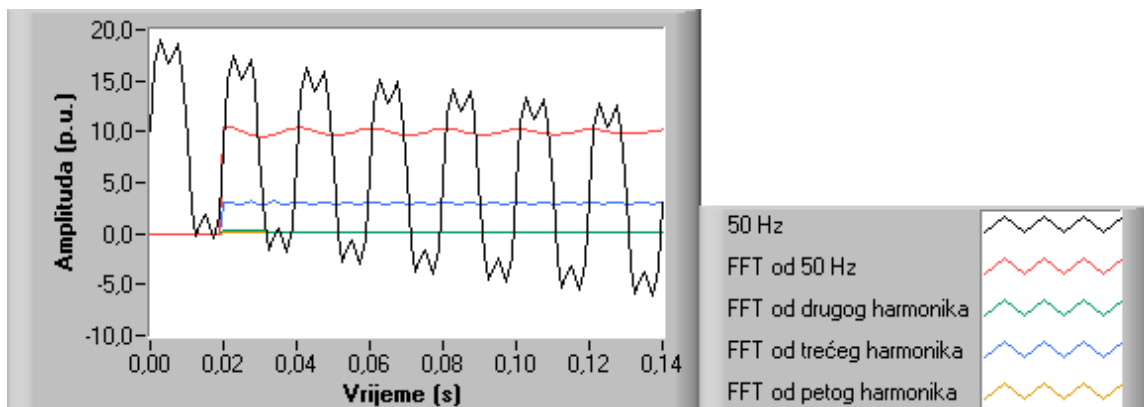
Frekvencija uzimanja uzoraka u simulaciji je 800 Hz. Ako je prisutan samo osnovni harmonik koji je podešen na 10 p.u. tada je pogreška algoritma koji mu računa amplitudu jednaka nuli. Ako su prisutni drugi treći i peti harmonik s vrijednostima 2

p.u., 3 p.u. i 1 p.u. tim redosljedom, tada je pogreška algoritma pri izračunu amplitude pojedinih harmonika također jednaka nuli, što je i vidljivo na slici 13-8, koja prikazuje simulirani signal i izgled algoritma za pojedine harmonike.



Slika 13-18 Rad FFT algoritma

Ako se javi istosmjerni signal tada je pogreška algoritma također jednaka nuli. No problemi nastaju kada se javi prigušujući istosmjerni signal. Ta situacija je prikazana na slici 13-19, gdje je vidljivo da postoji određeno mrežkanje algoritma.



Slika 13-19 Uz harmonike je prisutan i istosmjerni signal

Uz osnovni signal koji iznosi 10 p.u. prisutan je i treći harmonik amplitude 3 p.u. i istosmjerni signal kojemu je K 10 p.u. i T je 120 ms. U tom je slučaju najveća pogreška algoritma pri izračunu amplitude osnovnog harmonika 4.4%, a za treći 5.33%. Pogreška je to veća što je K veći i T manji. Drugim riječima, što se signal sporije prigušuje (manje je strm) to je i pogreška manja. Razlog javljanja pogreške je taj što istosmjerni prigušujući signal u sebi sadrži niz frekvencijskih komponenata koje se u spektru nalaze vrlo blizu frekvencijskih komponenata od 150, 100 i 50 Hz i koje samim time stvaraju smetnju.

Kada je prisutan čisti istosmjerni signal tada, naravno, iz gore navedenih razloga nema niti pogreške koja se javlja kada je prisutan istosmjerni prigušujući signal. Ukoliko je signal sporo prigušujući tada će i pogreška biti manja.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 13-9, koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji koristi Fourierovu transformaciju za računanje amplitude pojedinih harmonika.

Tablica 13-9 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovni harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
800 Hz	Pogreška pri izračunu amplitude je jednaka nuli	Pogreška pri izračunu amplitude je jednaka nuli	Čista DC komponenta nema pogreške. Ako je prigušujuća tada ovisi o K i T.	

14 ALGORITMI NAJMANJIH KVADRATA

U poglavlju 14 **Algoritmi najmanjih kvadrata** se govori o algoritmima koji koriste generalni polinomski oblik i oblik s više varijabli [L7]. Sama metoda najmanjih kvadrata je detaljno opisana u poglavlju 7 iz kojeg se vidi kako ona služi za funkcijski opis izmjerenih točaka. Upravo ta karakteristika koristi se u algoritmima najmanjih kvadrata pomoću kojih se mjerene točke funkcijski opišu i zatim se iz toga dolazi do pojedinih vrijednosti izmjerenog signala, a to su najčešće amplituda pojedinih harmonika i fazni pomak između struje i napona iz kojih se kasnije može računati impedancija [L29]. Algoritama zaštite koji koriste metodu najmanjih kvadrata ima nekoliko, ovisno o tome kako se želi funkcijski prikazati izmjereni valni oblik.

14.1 Algoritam najmanjih kvadrata s generalnim polinomskim oblikom

14.1.1 Izvod algoritma

Ako se pretpostavi da izmjereni signal sadrži samo osnovni harmonik frekvencije 50 Hz tada se on može pisati kao

$$v(t) = K \sin(\omega_0 t + \Theta) \quad (14.1)$$

gdje je K nepoznata konstanta (amplituda) koju treba odrediti. ω_0 je kutna frekvencija osnovnog harmonika, a Θ je fazni pomak. Želi se postići da se izmjereni signal pokuša opisati formulom (14.1) uz najmanju moguću pogrešku, a za to upravo služi metoda najmanjih kvadrata. Jednadžbu (14.1) se nakon proširivanja može pisati kao

$$v(t) = K \sin \omega_0 t \cos \Theta + K \cos \omega_0 t \sin \Theta \quad (14.2)$$

Izrazi u sinusnom i kosinusnom članu gornje jednadžbe mogu se aproksimirati prema sljedećim jednakostima

$$\sin \omega_0 t \approx \omega_0 t - \frac{(\omega_0 t)^3}{3!} \quad (14.3)$$

$$\cos \omega_0 t \approx 1 - \frac{(\omega_0 t)^2}{2!} \quad (14.4)$$

Uvrštavanjem (14.3) i (14.4) u (14.2) dolazi se do izraza

$$v(t) = K \sin \Theta + K \cos \Theta \cdot (\omega_0 t) - \frac{K \sin \Theta}{2} \cdot (\omega_0 t)^2 - \frac{K \cos \Theta}{6} \cdot (\omega_0 t)^3 \quad (14.5)$$

Gornju jednadžbu može se usporediti sa generalnim polinomskim opisom (7.8) koji u ovom slučaju poprima oblik

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (14.6)$$

Uspoređujući (14.5) i (14.6) dolazi se do toga da je $f(x)$ u stvari $v(t)$, a ostali članovi su

$$x = \omega_0 t \quad a_0 = K \sin \Theta \quad a_1 = K \cos \Theta$$

$$a_2 = -\frac{K \sin \Theta}{2} \quad a_3 = -\frac{K \cos \Theta}{6}$$

Potrebno je odrediti vrijednost K što je u biti amplituda osnovnog harmonika. Također je zanimljiv i kut Θ koji je potrebno odrediti ako se želi računati impedancija. No da se njih odredi prvo treba izračunati vrijednost koeficijenata a_0 , a_1 , a_2 , i a_3 . To se postiže pomoću uvjeta za minimum (7.9) iz čega slijedi matrična jednadžba (7.13) koja u ovom slučaju poprima oblik

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum v_i \\ \sum v_i x_i \\ \sum v_i x_i^2 \\ \sum v_i x_i^3 \end{bmatrix} \quad (14.7)$$

Ako se unaprijed zna frekvencija uzimanja uzoraka i broj točaka tada se velika zagrada s lijeve strane (sa x -evima) može unaprijed izračunati. Stoga ona u algoritam ulazi kao konstanta. Nepoznate konstante a_0 do a_3 se izračunaju po formuli

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{v} \quad (14.8)$$

gdje je \mathbf{X}^{-1} izračunata u naprijed i predstavlja težinske faktore. Valja naglasiti da se suma u (14.7), a samim time i u (14.8) kreće od $i=0$ do $N-1$ te da su v_i i x_i vrijednosti u trenucima $t=i\Delta t$.

Ako se uzme, kao što je i u programu Algoritmi, da je frekvencija uzimanja uzoraka 1000 Hz, uz frekvenciju osnovnog harmonika od 50 Hz, tada se može početi s računanjem matrice X . U primjeru se mjeri šest točaka počevši s nulom koja je u biti prva pa stoga postoje indeksi od nula do pet. Radi boljeg razumjevanja dat prikaz je kako se računaju pojedini članovi matrice X za gore navedene vrijednosti. Vrijednost x_i se računa za određeni vremenski trenutak i iznosi

$$x_i = \omega_0 \cdot t_i \quad (14.9)$$

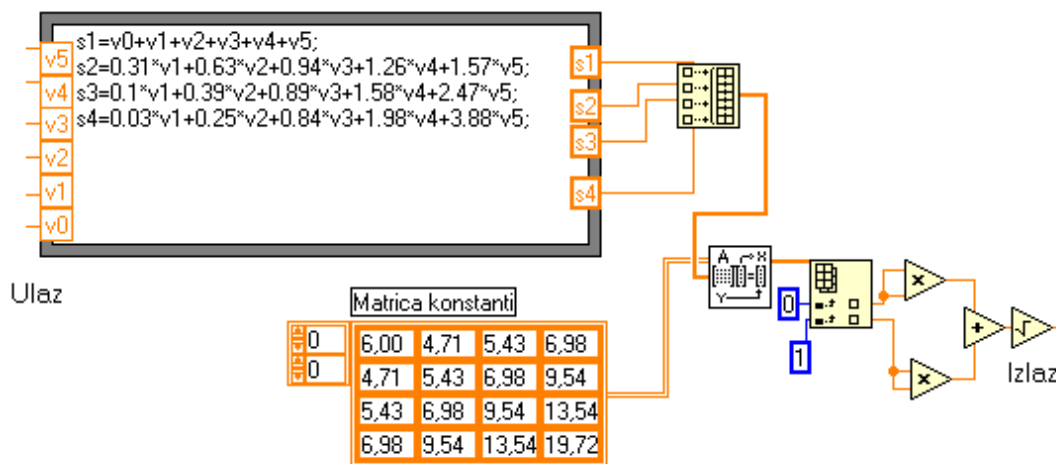
s time da se vremenski interval za pojedinu točku t_i dobije kao

$$t_i = i \cdot \Delta t \quad (14.10)$$

gdje je Δt vremenski razmak među točkama. Iz gornje dvije jednadžbe slijedi da je

$$x_i = \omega_0 \cdot i \cdot \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi f_0}{f_s} \cdot i \quad (14.11)$$

s time da u ovom slučaju i ide od 0 do 5 (jer se mjeri šest točaka). Situacija je u principu ista kao i kada se koriste Fourierovi algoritmi što se tiče načina mjerenja. Drugim riječima postoji okvir koji obuhvaća šest izmjerenih točaka za koje se zatim računa matrica X, te se nakon toga iz nje izračunaju potrebni koeficijenti i iz njih se dobije amplituda. Sada se izbaci najstarija točka iz okvira (x_0) i izmjeri se nova pa se ponovi računski postupak. Znači, između svake izmjerene točke obavlja se složeni računski postupak koji obuhvaća matricu X računanje koeficijenata itd. Valja napomenuti da ovaj algoritam za razliku od Fouriera ne mora obuhvatiti cijelu periodu signala. Na slici 14-1 je prikazana blok šema algoritma koji iz izmjerenih napona računa amplitudu. Valja napomenuti da je samo vrijednost napona V_5 trenutno izmjerena, dok su sve ostale vrijednosti iz prethodnih mjernja. Kada se izmjeri V_5 tada se počinje s računom kao što to prikazuje blok dijagram. Nakon toga V_5 postaje V_4 , V_4 postaje V_3 i tako dalje. Zatim se izmjeri novi napon koji se ponovo označi sa V_5 te se ponovi postupak računanja koeficijenata i amplitude.



Slika 14-1 Blok šema algoritma

Sada će radi primjera biti pokazan način računanja članova matrice X za gore navedene vrijednosti.

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0 \\
 x_1 &= 2\pi f_0 \cdot \frac{1}{f_s} \cdot 1 = 2\pi \frac{50}{1000} \cdot 1 = 0,1\pi \\
 x_2 &= 2\pi f_0 \cdot \frac{1}{f_s} \cdot 2 = 0,2\pi \\
 x_3 &= 2\pi f_0 \cdot \frac{1}{f_s} \cdot 3 = 0,3\pi \\
 x_4 &= 2\pi f_0 \cdot \frac{1}{f_s} \cdot 4 = 0,4\pi \\
 x_5 &= 2\pi f_0 \cdot \frac{1}{f_s} \cdot 5 = 0,5\pi
 \end{aligned} \tag{14.12}$$

Iz gornjih izraza se zatim izračunaju sve sume u matrici X. Izgled konačne matrice prikazan je u blok dijagramu u dodatku.

Iz koeficijenata dobivenih rješavanjem matrica se može računati amplituda. U programu Algoritmi se vidi da se najbolji rezultati dobivaju ako se amplituda osnovne komponente signala izračuna iz koeficijenata a_0 i a_1 . Izraz za njeno računanje tada glasi

$$K = \sqrt{a_0^2 + a_1^2} \quad (14.13)$$

Fazni pomak signala može se dobiti kao

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2a_2}{a_1}\right) \quad (14.14)$$

Iz gornjih podataka se konačno može izračunati i impedancija koja se računa prema izrazu

$$Z = \frac{K_{2V} \angle \Theta_V}{K_{2I} \angle \Theta_I} \quad (14.15)$$

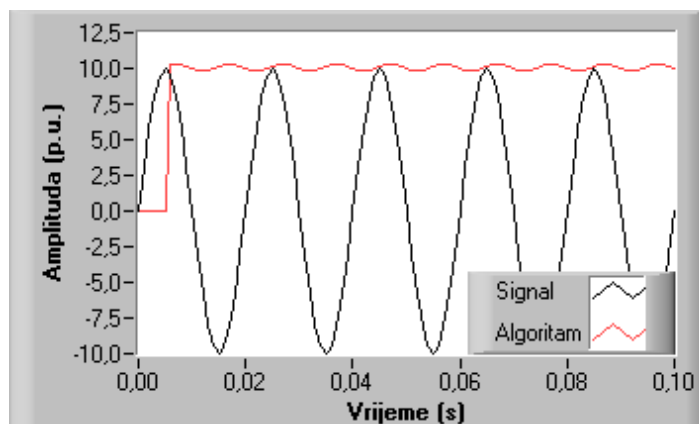
gdje su K_{2I} i K_{2V} amplitude osnovnih harmonika napona i struje koje se računaju po (14.13), a Θ_V i Θ_I su kutevi struje i napona koji se računaju iz (14.14).

Za kraj valja napomenuti da je broj računskih operacija velik jer se i u vektoru u kojem su naponi isto javljaju vrijednosti x_i koje se nakon svakog novog mjerenja moraju množiti s odgovarajućim izmjerenim naponima.

14.1.2 Analiza rada algoritma

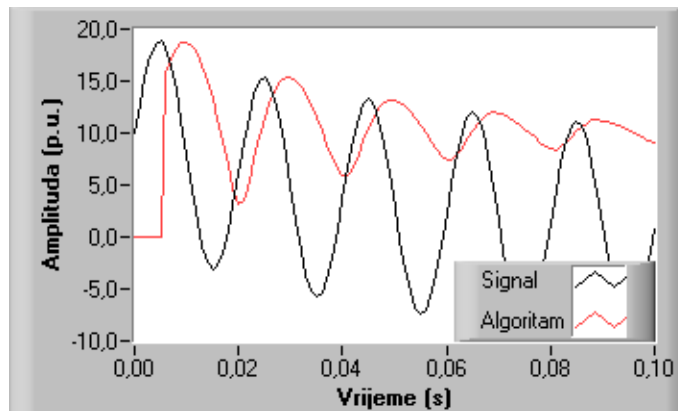
Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Kao što je već rečeno, frekvencija uzimanja uzoraka iznosi 1000 Hz, a algoritam je konstruiran tako da pretpostavlja da je signal čistog sinusnog oblika bez harmonika i istosmjernih komponenti. Za signal amplitude od 10 p.u. situacija je prikazana na slici 14-2. Maksimalna pogreška algoritma koja se pritom javlja iznosi 2.94%.



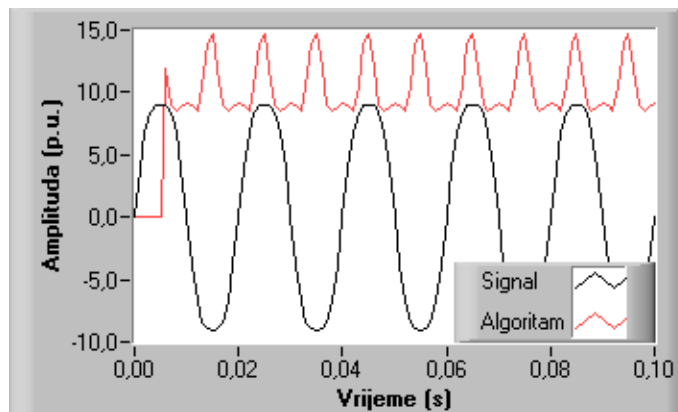
Slika 14-2 Osnovni signal frekvencije 50 Hz

Ako se javi prigušujući istosmjerni signal vidljivo je da ga algoritam ne filtrira jer ga nije niti predvidio pa stoga postoji i pogreška pri izračunu amplitude osnovnog signala kao što je i prikazano na slici 14-3.



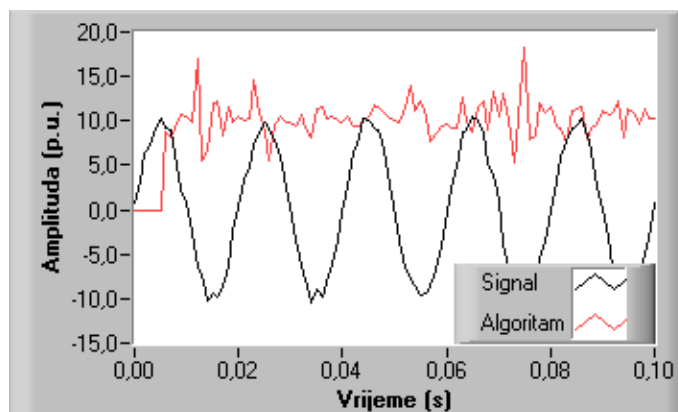
Slika 14-3 Osnovni i istosmjerni signal

U slučaju pojave harmonika također se javlja pogreška jer niti njih, kao ni istosmjernu komponentu, algoritam ne predviđa: Ako se javi treći harmonik koji iznosi samo 10% od osnovnog tada je pogreška u izračunu amplitude u pojedinim trenucima i do 50% veća nego što je stvarna amplituda. To je prikazano na slici 14-4



Slika 14-4 Osnovni signal i treći harmonik

Za slučaj visokofrekventnog šuma algoritam također izgleda kao šum, što se i vidi na slici 14-5



Slika 14-5 Visokofrekventni šum

Ako se žele izbjeći gore navedeni problemi tada u sam model algoritma treba uvrstiti sve ono što se očekuje da će se pojaviti, od harmonika do istosmjernih komponenti. Ukoliko je to sve u algoritmu tada se on ponaša kao digitalni filter i može svaku pojedinu komponentu signala izračunati sa točnošću. To će biti i prikazano za algoritme koji koriste više varijabli.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 14-1 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma.

Tablica 14-1 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovni harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000 Hz	Pogreška pri izračunu amplitude je 2,94%	Pogreška je velika ako harmonici nisu predviđeni u modelu.	Pogreška je velika ako istosmjerna komponenta nije predviđena u modelu.	Algoritam također izgleda kao šum.

14.2 LSQ 1, 3 Algoritam s više varijabli

14.2.1 Izvod algoritma

Ovaj algoritam pretpostavlja da signal koji se mjeri sadrži samo osnovnu frekvencijsku komponentu od 50 Hz i treći harmonik (150 Hz). Iz toga slijedi da jednadžba koja opisuje taj signal izgleda kao

$$v(t) = K_1 \sin(\omega_0 t + \Theta_1) + K_3 \sin(3\omega_0 t + \Theta_3) \quad (14.16)$$

gdje su sa K označene amplitude osnovnog i trećeg harmonika a sa Θ su označeni kutevi pojedinih harmonika. Ako se ima izmjereno napon u točno određenom trenutku t_1 , tada se može pisati

$$v(t_1) = K_1 \sin(\omega_0 t_1 + \Theta_1) + K_3 \sin(3\omega_0 t_1 + \Theta_3) \quad (14.17)$$

Nakon proširenja jednadžbe (14.17) dobije se sljedeće

$$v(t_1) = K_1 \cos\Theta_1 \sin\omega_0 t_1 + K_1 \sin\Theta_1 \cos\omega_0 t_1 + K_3 \cos\Theta_3 \sin 3\omega_0 t_1 + K_3 \sin\Theta_3 \cos 3\omega_0 t_1 \quad (14.18)$$

Jednadžba (14.18) se može napisati i u prikladnijem obliku koji glasi

$$S_1 = v(t_1) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \quad (14.19)$$

gdje S_1 predstavlja snimljeni uzorak signala (jednu točku), u ovom slučaju napona. Koeficijenti a su samo funkcije vremena (ovise samo o trenutku kada je izmjereno uzorak) i oni glase

$$a_{11} = \sin \omega_0 t_1 \quad a_{12} = \cos \omega_0 t_1 \quad a_{13} = \sin 3\omega_0 t_1 \quad a_{14} = \cos 3\omega_0 t_1$$

Vrijednosti koje su označene sa x su funkcije faznih pomaka i nepoznatih varijabli K koje, ako se pogleda jednačba (14.17), predstavljaju amplitude osnovnog i trećeg harmonika. Za x -eve se može pisati

$$x_1 = K_1 \cos \Theta_1 \quad x_2 = K_1 \sin \Theta_1 \quad x_3 = K_3 \cos \Theta_3 \quad x_4 = K_3 \sin \Theta_3$$

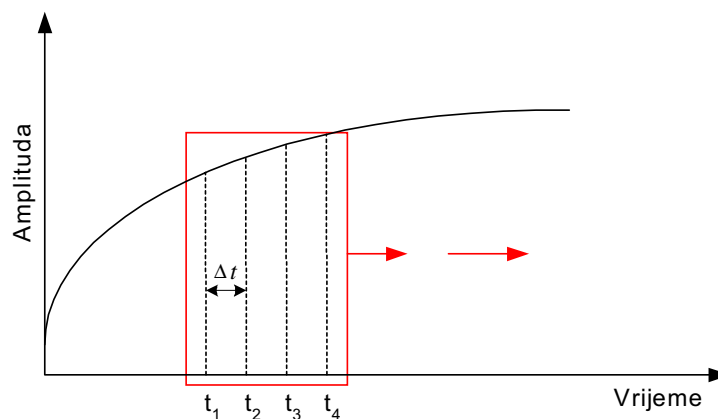
Za neki novi uzorak $S_2=v(t_2)$ koji je izmjeren u trenutku t_2 može se isto napisati jednačbu koja je jednaka jednačbi (14.17), samo se promjeni vremenski trenutak t_1 u t_2 . Sada se vidi da vrijednosti uz x ne ovise o vremenu, te ih se ostavi kakve jesu, dok se za vrijednosti koje označava koeficijent a može pisati

$$a_{21} = \sin \omega_0 t_2 \quad a_{22} = \cos \omega_0 t_2 \quad a_{23} = \sin 3\omega_0 t_2 \quad a_{24} = \cos 3\omega_0 t_2$$

Pošto se želi prvo izračunati x , a zatim iz njega vrijednosti amplituda i kuteva vidljivo je da treba imati najmanje četiri izmjerena uzorka signala jer se time u stvari dobivaju četiri jednačbe s četiri nepoznanice. Te jednačbe slijede iz jednačbe (14.19) i dobiju se na način na koji je to opisano ranije, s tim da su u tekstu dani koeficijenti samo od prve dvije jednačbe. Koeficijenti za druge dvije jednačbe dobiju se na isti način kao i gore navedeni koeficijenti samo je potrebno uzeti neke druge vremenske trenutke, što će u ovom slučaju biti trenuci t_3 i t_4 . Sada se može pisati u matičnom obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t_1) \\ v(t_2) \\ v(t_3) \\ v(t_4) \end{bmatrix} \quad (14.20)$$

Dakle vidi se da je potrebno izmjeriti četiri uzorka signala i zatim riješiti gornju jednačbu za x . Problem su jedino koeficijenti koje je najbolje unaprijed izračunati. To je moguće ako se u naprijed odredi frekvencija uzimanja uzoraka.



Slika 14-6 Princip rada algoritma

Inače, princip rada algoritma je isti kao i kod algoritma s generalnim polinomskim oblikom. Drugim riječima postoji okvir koji obuhvaća određeni broj izmjerenih točaka koje se koriste za računanje. Nakon što su izračunate potrebne vrijednosti izmjeri se nova točka pomoću koje se računa s time da se najstarija točka (prva izmjerena) izbacuje iz okvira te se sada ponovo računa. Tako u okviru uvijek postoji isti broj točaka. To je i šematski prikazano na slici 14-6 za četiri točke u okviru.

Iz slike je također vidljivo, ako se za ishodište prozora uzme donji lijevi kut, da se za vremena od t_1 do t_4 može pisati

$$t_1 = 0 \qquad t_2 = \Delta t \qquad t_3 = 2\Delta t \qquad t_4 = 3\Delta t$$

Vremenski razmak među točkama se naravno dobije iz frekvencije uzimanja uzoraka. Dakle za unaprijed određenu frekvenciju uzoraka valja izračunati koeficijente. U programu Algoritmi je odabrana frekvencija uzimanja uzoraka od 1000 Hz pa je stoga za nju dat sljedeći primjer:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sin 2\pi f_0 \cdot 0 = 0 & a_{21} &= \sin 2\pi f_0 \cdot 0,001 = 0,309 \\ a_{12} &= \cos 2\pi f_0 \cdot 0 = 1 & a_{22} &= \cos 2\pi f_0 \cdot 0,001 = 0,951 \\ a_{13} &= \sin 6\pi f_0 \cdot 0 = 0 & a_{23} &= \sin 6\pi f_0 \cdot 0,001 = 0,809 \\ a_{14} &= \cos 6\pi f_0 \cdot 0 = 1 & a_{24} &= \cos 6\pi f_0 \cdot 0,001 = 0,587 \end{aligned}$$

Ako se sada izračuna i preostalih osam koeficijenata za vremena t_3 i t_4 tada se dobije matrica koeficijenata koja glasi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0,309 & 0,951 & 0,809 & 0,587 \\ 0,587 & 0,809 & 0,951 & -0,309 \\ 0,809 & 0,587 & 0,309 & -0,951 \end{bmatrix} \quad (14.21)$$

Sada je moguće pomoću jednadžbe (14.20) dobiti vrijednosti x i iz njih izračunati amplitude i fazne pomake. Iz x_1 i x_2 se dobije izraz za amplitudu osnovnog harmonika i on glasi

$$K_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (14.22)$$

Izraz za amplitudu trećeg harmonika se dobije iz x_3 i x_4 i on glasi

$$K_3 = \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \quad (14.23)$$

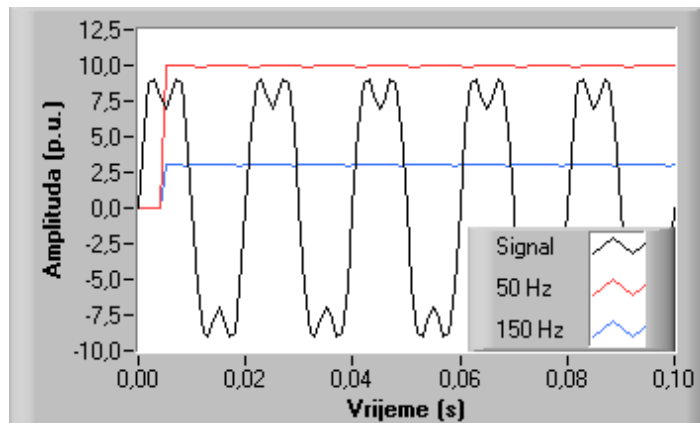
Naravno, iz izraza za x se mogu dobiti i fazni pomaci Θ . Za osnovni harmonik izraz za fazni pomak glasi

$$\Theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \quad (14.24)$$

14.2.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

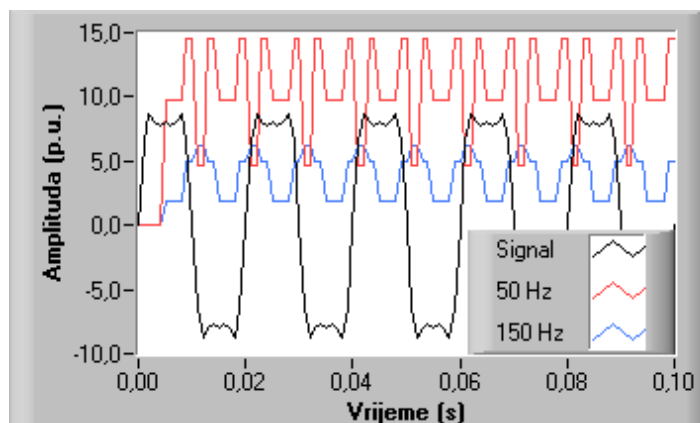
U slučaju kada je prisutan osnovni harmonik frekvencije 50 Hz čija amplituda iznosi 10 p.u. i treći harmonik frekvencije 150 Hz amplitude 3 p.u., tada je ta situacija prikazana na slici 14-7. Maksimalna pogreška pri izračunu amplitude osnovnog harmonika iznosi



Slika 14-7 Osnovni i treći harmonik

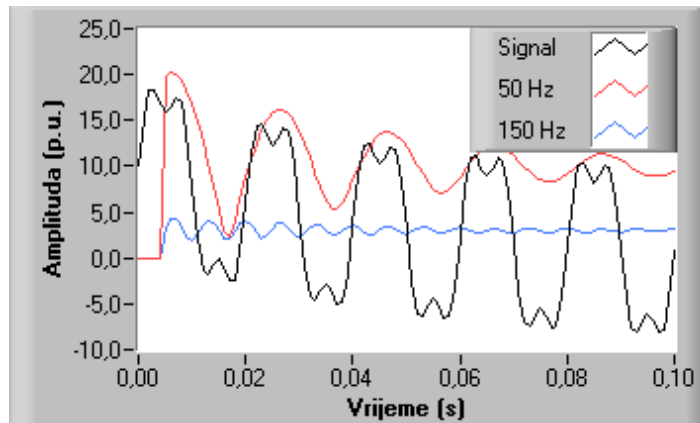
0,478%, dok maksimalna pogreška pri računu amplitude trećeg harmonika iznosi 1,4%.

Uz prisutnost drugih harmonika javlja se pogreška pri izračunu amplitude osnovnog i trećeg harmonika zbog toga što ostali harmonici nisu bili predviđeni u modelu. Na slici 14-8 je prikazan izgled algoritma u svakoj točki ukoliko se uz osnovni i treći harmonik javio i peti amplitude 1 p.u.



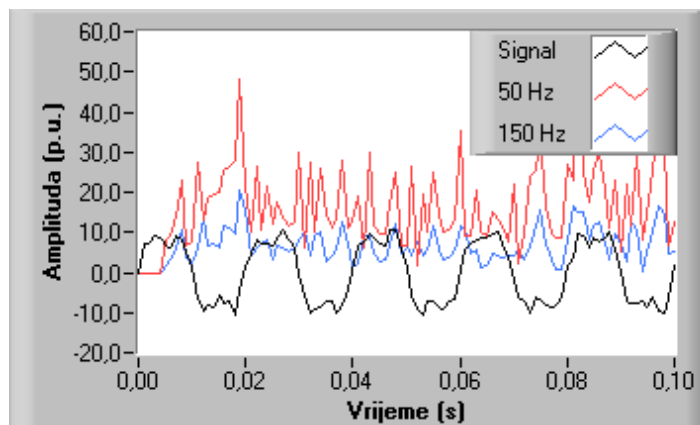
Slika 14-8 Osnovni, treći i peti harmonik

U slučaju pojave istosmjerne prigušujuće komponente situacija je ista kao i kod prethodnog algoritma koji koristi generalni polinomski oblik, s tim da se ovdje javlja, osim pogreške pri računu amplitude osnovnog harmonika, i pogreška pri računu amplitude trećeg harmonika. Ta situacija je prikazana na slici 14-9, gdje uz osnovni i treći harmonik još postoji i prigušujuća istosmjerna komponenta signala. Što se ona brže prigušuje i što je K veći to će i pogreška pri izračunu amplituda pojedinih harmonika biti veća.



Slika 14-9 Osnovni i treći harmonik plus istosmjerna komponenta

Pri visokofrekventnom šumu situacija je kao na slici 14-10. Situacija je ista kao i u prethodnom algoritmu, dakle treba spriječiti dolazak visokofrekventnog signala do sklopovlja koje uzima uzorke signala.



Slika 14-10 Visokofrekventni šum

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 14-2 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma.

Tablica 14-2 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovni harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000 Hz	Pogreška pri izračunu amplitude je 0,478%	Pogreška je velika ako harmonici nisu predviđeni u modelu, dok za treći harmonik, koji je predviđen modelom, maksimalna pogreška iznosi 1,4%.	Pogreška je velika ako istosmjerna komponenta nije predviđena u modelu.	Algoritam također izgleda kao šum.

14.3LSQ 1, 3, 5 Algoritam s više varijabli

14.3.1 Izvod algoritma

Algoritam radi isto kao i algoritam iz poglavlja 14.2, s tim da je u modelu uzet u obzir i peti harmonik pa stoga polazna jednadžba iz koje se izvodi algoritam i koja opisuje signal poprima sljedeći oblik

$$v(t) = K_1 \sin(\omega_0 t + \Theta_1) + K_3 \sin(3\omega_0 t + \Theta_3) + K_5 \sin(5\omega_0 t + \Theta_5) \quad (14.25)$$

Nakon proširenja gornje (14.25) jednadžbe dobije se slijedeće

$$v(t_1) = K_1 \cos \Theta_1 \sin \omega_0 t_1 + K_1 \sin \Theta_1 \cos \omega_0 t_1 + K_3 \cos \Theta_3 \sin 3\omega_0 t_1 + K_3 \sin \Theta_3 \cos 3\omega_0 t_1 + K_5 \cos \Theta_5 \sin 5\omega_0 t_1 + K_5 \sin \Theta_5 \cos 5\omega_0 t_1 \quad (14.26)$$

Ako se gornja jednadžba usporedi s jednadžbom (14.18) tada se vidi da ona ima dva dodatna člana koji uzimaju u obzir i peti harmonik. Ako se to napiše u prikladnijem obliku tada to glasi

$$S_1 = v(t_1) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 \quad (14.27)$$

Postupak rješavanja je potpuno isti kao i u prethodnom poglavlju s tim da sada matrica koeficijenata ima dva reda i dva stupca više a samim time i dvije nepoznanice više (x_5 i x_6). Sustav jednadžbi koji sada treba riješiti glasi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t_1) \\ v(t_2) \\ v(t_3) \\ v(t_4) \\ v(t_5) \\ v(t_6) \end{bmatrix} \quad (14.28)$$

Nakon računanja koje je identično načinu opisanom u poglavlju 14.2 dobije se matrica koeficijenata za frekvenciju uzimanja uzoraka od 1000 Hz koja glasi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0,309 & 0,951 & 0,809 & 0,587 & 1 & 0 \\ 0,587 & 0,809 & 0,951 & -0,309 & 0 & -1 \\ 0,809 & 0,587 & 0,309 & -0,951 & -1 & 0 \\ 0,951 & 0,309 & -0,587 & -0,809 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.29)$$

Vidljivo je da sada treba imati barem šest izmjerenih uzoraka kako bi se gornji sustav mogao riješiti. Kao što je već rečeno algoritam radi isto kao i algoritam iz poglavlja

14.2 stoga nema razloga to ovdje ponavljati. Valja samo napomenuti da se amplituda petog harmonika dobije iz x_5 i x_6 . Formula prema kojoj se ona računa glasi

$$K_5 = \sqrt{x_5^2 + x_6^2} \quad (14.30)$$

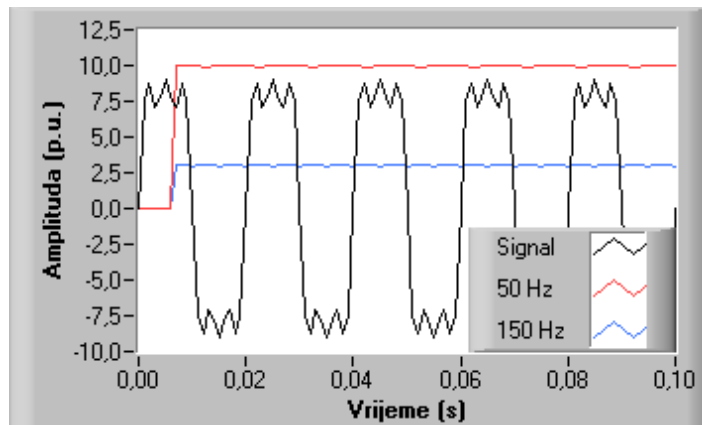
dok izraz za fazni pomak petog harmonika glasi

$$\Theta_5 = \tan^{-1}\left(\frac{x_6}{x_5}\right) \quad (14.31)$$

14.3.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Situacija je ista kao i u prethodnom algoritmu, s tim da ovaj algoritam predviđa i postojanje petog harmonika, pa u slučaju da se on javi nema velike greške u izračunu amplitude koja se javlja u prethodnom algoritmu (slika 14-8). Za osnovni harmonik od 10 p.u., treći od 3 p.u. i peti od 2 p.u. situacija je kao na slici 14-11.



Slika 14-11 Osnovni treći i peti harmonik

Maksimalna pogreška pri izračunu amplitude osnovnog harmonika je 0,212%, a pri izračunu trećeg 0,7%. Naravno, moguće je računati i vrijednost amplitude petog harmonika prema formuli (14.30) ako se to želi. Ovaj algoritam se u biti ponaša kao digitalni filter za peti harmonik i samim tim daje točne rezultate pri izračunu amplituda osnovnog i trećeg harmonika ako se u signalu javi peti.

Za sve ostale kombinacije drugih harmonika i istosmjernog signala javljaju se pogreške kao i u prethodnom algoritmu i to iz istog razloga, jer ih model ne predviđa.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 14-3 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma.

Tablica 14-3 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovni harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000 Hz	Pogreška pri izračunu amplitude je 0,212%	Pogreška je velika ako harmonici nisu predviđeni u modelu dok za treći harmonik koji je predviđen modelom maksimalna pogreška iznosi 0,7%.	Pogreška je velika ako istosmjerna komponenta nije predviđena u modelu.	Algoritam također izgleda kao šum.

14.4 LSQ 1, 3, 5, 7 Algoritam s više varijabli

14.4.1 Izvod algoritma

Ovaj algoritam radi na istom principu kao i prethodna dva, s tim da uz pojavu osnovnog, trećeg i petog harmonika predviđa i pojavu sedmog harmonika. Pošto radi na istom principu kao i ostali algoritmi neće biti detaljnijeg opisa izvoda već će samo biti dana početna formula koja opisuje očekivani signal iz koje se izvodi algoritam. Ona glasi

$$v(t_1) = K_1 \cos \Theta_1 \sin \omega_0 t_1 + K_1 \sin \Theta_1 \cos \omega_0 t_1 + K_3 \cos \Theta_3 \sin 3\omega_0 t_1 + K_3 \sin \Theta_3 \cos 3\omega_0 t_1 + \\ + K_5 \cos \Theta_5 \sin 5\omega_0 t_1 + K_5 \sin \Theta_5 \cos 5\omega_0 t_1 + K_7 \cos \Theta_7 \sin 7\omega_0 t_1 + K_7 \sin \Theta_7 \cos 7\omega_0 t_1 \quad (14.32)$$

Sustav jednadžbi koji sada treba riješiti izgleda kao

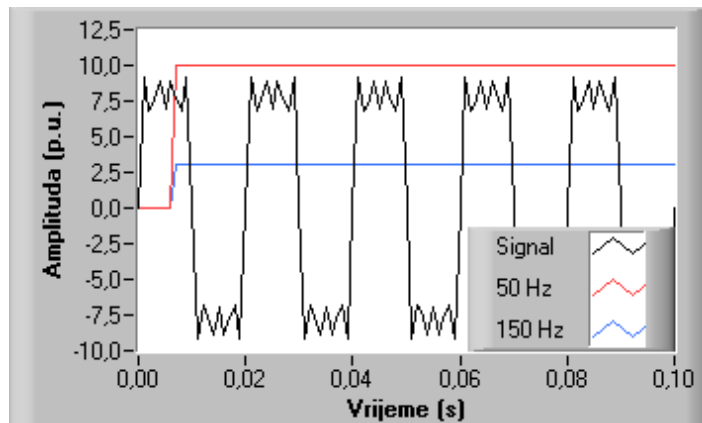
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t_1) \\ v(t_2) \\ v(t_3) \\ v(t_4) \\ v(t_5) \\ v(t_6) \\ v(t_7) \\ v(t_8) \end{bmatrix} \quad (14.33)$$

Dakle sada se vidi da je potrebno imati barem osam izmjerenih točaka kako bi se sustav uopće mogao riješiti. Vrijednosti koeficijenata se mogu pogledati u programu Algoritmi i u dodatku na blok šemi koja prikazuje ovaj algoritam.

14.4.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Ako je u signalu uz osnovni, treći i peti harmonik prisutan i sedmi tada proračun amplitude osnovnog i trećeg harmonika izgleda kao na slici 14-12. Maksimalna greška



Slika 14-12 Osnovni, treći, peti i sedmi harmonik

koja se pri tome javlja u izračunu amplitude osnovnog harmonika iznosi 0,06%, a kod trećeg harmonika 0,08%.

Za sve ostale harmonike i istosmjerne komponente koje se jave u signalu, a koje nisu predviđene algoritmom, javlja se pogreška u izračunu amplitude kao i u prethodnim algoritmima sa više varijabli. Dakle, što se bolje predvidi izgled signala to je i algoritam bolji. No samim time se i povećava broj računskih operacija.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 14-4 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma.

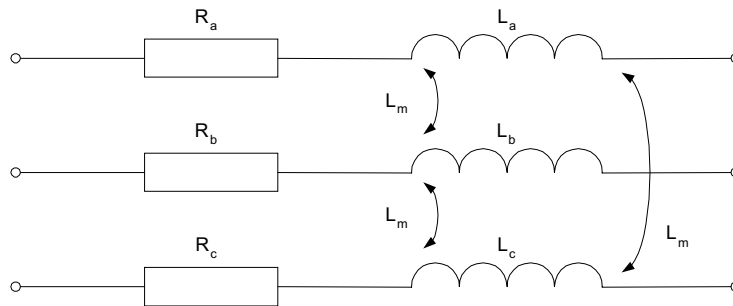
Tablica 14-4 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovni harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000 Hz	Pogreška pri izračunu amplitude je 0,06%	Pogreška je velika ako harmonici nisu predviđeni u modelu dok za treći harmonik koji je predviđen modelom maksimalna pogreška iznosi 0,08%.	Pogreška je velika ako istosmjerna komponenta nije predviđena u modelu.	Algoritam također izgleda kao šum.

15 ALGORITMI NA PRINCIPU MODELA ŠTIĆENOG ELEMENTA

Kada se koriste gore navedeni algoritmi tada nije potrebno pretpostaviti kakav je valni oblik signala struje i napona koji se nalaze na (teku kroz) štíćenom elementu. Do algoritama zaštite se dolazi iz jednadžbi modela štíćenog elementa. Naime svu štíćenu opremu u EES-u se može opisati diferencijalnim jednadžbama prvog ili drugog reda. U poglavlju **15 Algoritmi na principu modela štíćenog element** to će biti prikazano na modelu dalekovoda iako je to moguće učiniti za bilo koji element u sustavu.

Model će prikazati trofazni prijenosni sustav u kojem je pretpostavljeno da kapaciteti među pojedinim vodičima zanemarivi isto kao i dozemni kapaciteti. U tom se slučaju dolazi do šematskog prikaza voda kao na slici 15-1 gdje su R_k i L_k ($k=a, b, c$) otpor i induktivitet po jedinici duljine voda za svaku fazu, a L_m je međuinduktivitet pojedinih vodiča po jedinici duljine voda.



Slika 15-1 Trofazni prijenosni vod prikazan pomoću otpora i induktiviteta

Uz gore navedene parametre moguće je napisati jednadžbu za pad napona na segmentu voda duljine dx za fazu a. Izraz glasi

$$dv_a = (R_a dx) i_a + (L_a dx) \frac{di_a}{dt} + (L_{ab} dx) \frac{di_b}{dt} + (L_{ac} dx) \frac{di_c}{dt} \quad (15.1)$$

iz čega slijedi

$$\frac{dv_a}{dx} = \left(R_a + L_a \frac{d}{dt} \right) i_a + L_{ab} \frac{di_b}{dt} + L_{ac} \frac{di_c}{dt} \quad (15.2)$$

Analogno jednadžbi (15.1) i (15.2) dolazi se do izraza za padove napona na segmentu dx u fazama b i c. Izrazi glase

$$\frac{dv_b}{dx} = \left(R_b + L_b \frac{d}{dt} \right) i_b + L_{ba} \frac{di_a}{dt} + L_{bc} \frac{di_c}{dt} \quad (15.3)$$

$$\frac{dv_c}{dx} = \left(R_c + L_c \frac{d}{dt} \right) i_c + L_{ca} \frac{di_a}{dt} + L_{cb} \frac{di_b}{dt} \quad (15.4)$$

Ako se pretpostavi kako je vod uravnotežen tada slijedi

$$R_a = R_b = R_c = R_s \quad (15.5)$$

$$L_a = L_b = L_c = L_s \quad (15.6)$$

$$L_{ab} = L_{ac} = L_{ba} = L_{bc} = L_{ca} = L_{cb} = L_m \quad (15.7)$$

gdje su R_s i L_s serijski otpor i induktivitet jedne faze po jedinici duljine, a L_m je međuinduktivitet po jedinici duljine između bilo koje dvije faze. Ako se sada izrazi (15.5 do 15.7) uvrste u (15.2 do 15.4) dobivaju se jednadžbe koje glase

$$\frac{dv_a}{dx} = \left(R_s + L_s \frac{d}{dt} \right) i_a + L_m \frac{di_b}{dt} + L_m \frac{di_c}{dt} \quad (15.8)$$

$$\frac{dv_b}{dx} = \left(R_s + L_s \frac{d}{dt} \right) i_b + L_m \frac{di_a}{dt} + L_m \frac{di_c}{dt} \quad (15.9)$$

$$\frac{dv_c}{dx} = \left(R_s + L_s \frac{d}{dt} \right) i_c + L_m \frac{di_a}{dt} + L_m \frac{di_b}{dt} \quad (15.10)$$

Ako se koriste izrazi za direktni i nulti sustav tada se može pisati da je

$$L_0 = L_s + 2L_m \quad (15.11)$$

$$R_1 = R_s \quad (15.12)$$

$$L_1 = L_s - L_m \quad (15.13)$$

$$i_0 = \frac{i_a + i_b + i_c}{3} \quad (15.14)$$

gdje su R_1 i L_1 direktne komponente otpora i induktiviteta, L_0 je nulti induktivitet, a i_0 je nulta struja. Ako se izrazi od (15.11) do (15.14) uvrste u jednadžbe (15.8) do (15.10) tada se može pisati

$$\frac{dv_a}{dx} = \left(R_1 + L_1 \frac{d}{dt} \right) i_a + (L_0 - L_1) \frac{di_0}{dt} \quad (15.15)$$

$$\frac{dv_b}{dx} = \left(R_1 + L_1 \frac{d}{dt} \right) i_b + (L_0 - L_1) \frac{di_0}{dt} \quad (15.16)$$

$$\frac{dv_c}{dx} = \left(R_1 + L_1 \frac{d}{dt} \right) i_c + (L_0 - L_1) \frac{di_0}{dt} \quad (15.17)$$

Gore navedene jednadžbe se mogu koristiti za računanje pada napona između mjesta kvara i mjesta gdje je zaštitni relej.

15.1 Zemljospoj faze

Pretpostavka je da je zemljospoj nastao u fazi a na mjestu koje je za x udaljeno od zaštitnog releja. Trenutna vrijednost napona u fazi a na mjestu releja može se dobiti iz jednadžbe (15.2), uzimajući trenutnu vrijednost struje i trenutnu vrijednost promjene struje s vremenom u pojedinim fazama. Tada se dobiva za v_a

$$v_a = xR_a i_a + xL_a \frac{d}{dt} \left(i_a + \frac{L_{ab}}{L_a} i_b + \frac{L_{ac}}{L_a} i_c \right) \quad (15.18)$$

ili drukčije pisano

$$v_a = xR_a i_x + xL_a \frac{di_y}{dt} \quad (15.19)$$

gdje je

$$i_x = i_a \quad (15.20)$$

$$i_y = i_a + \left(\frac{L_{ab}}{L_a} \right) i_b + \left(\frac{L_{ac}}{L_a} \right) i_c \quad (15.21)$$

Ako je u pitanju uravnoteženi vod tada se može koristiti jednadžba (15.8) pomoću koje se također dođe do izraza za napon na mjestu releja. Jednadžba glasi

$$v_a = xR_s i_x + xL_s \frac{di_y}{dt} \quad (15.22)$$

gdje je

$$i_x = i_a \quad (15.23)$$

$$i_y = i_a + \left(\frac{L_m}{L_s} \right) i_b + \left(\frac{L_m}{L_s} \right) i_c \quad (15.24)$$

Ako se želi koristiti direktne i nulte komponente tada je moguće gore navedene jednadžbe pisati kao

$$v_a = xR_1 i_x + xL_1 \frac{di_y}{dt} \quad (15.25)$$

gdje je

$$i_x = i_a \quad (15.26)$$

$$i_y = i_a + \frac{L_0 - L_1}{L_1} i_0 \quad (15.27)$$

15.2 Dvofazni i trofazni kvarovi

U slučaju kvara koji uključuje dvije ili tri faze može se računati razlika napona između dvije faze prema formuli

$$v_a - v_b = x \left(R_a + L_a \frac{d}{dt} \right) i_a + x L_{ab} \frac{di_b}{dt} - x \left[L_{ab} \frac{di_a}{dt} + \left(R_b + L_b \frac{d}{dt} \right) i_b \right] \quad (15.28)$$

nakon sređivanja slijedi

$$v_a - v_b = x R_a i_x + x (L_a - L_{ab}) \frac{di_y}{dt} \quad (15.29)$$

gdje je

$$i_x = i_a - (R_b / R_a) i_b \quad (15.30)$$

$$i_y = i_a - \frac{(L_b - L_{ab}) i_b}{L_a - L_{ab}} \quad (15.31)$$

Ako je vod uravnotežen tada se za razliku napona između faze a i b može pisati

$$v_a - v_b = x R_1 i_x + x L_1 \frac{di_y}{dt} \quad (15.32)$$

gdje su

$$i_x = i_y = i_a - i_b \quad (15.33)$$

15.3 Rezultati razmatranja jednadžbi voda

Iz jednadžbi u prethodnim poglavljima može se zaključiti da se vod koji je u kvaru ponaša prema općenitoj jednadžbi koja glasi [L25]

$$v = R i_x + L \frac{di_y}{dt} \quad (15.34)$$

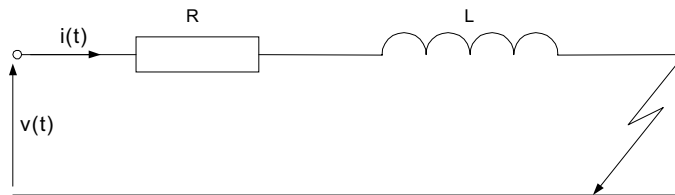
Pošto se struje i naponi mjere u sve tri faze i to u svakom trenutku u obliku uzoraka tada je moguće pomoću raznih numeričkih metoda doći do formula pomoću kojih se računaju R i L također u svakom trenutku.

U sljedećim poglavljima će stoga biti prikazani izvodi raznih algoritama pomoću kojih je moguće odrediti impedanciju voda od točke releja pa do točke kvara.

15.4 Algoritam dobiven integriranjem diferencijalne jednadžbe

15.4.1 Izvod algoritma

Pretpostavka od koje se kreće je ta da je šema kruga ista kao na slici 15-2. Dakle u pitanju je jedna faza dalekovoda bez međuinduktiviteta [L30].



Slika 15-2 Faza voda prikazana pomoću otpora i induktiviteta

Ako se sada jednadžba (15.34) integrira u nekom vremenskom periodu od t_1 do t_2 i zatim ponovo od t_3 do t_4 tada se dolazi do sustava jednadžbi koji glasi

$$R \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt + L \int_{t_1}^{t_2} di = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (15.35)$$

$$R \int_{t_3}^{t_4} i(t) dt + L \int_{t_3}^{t_4} di = \int_{t_3}^{t_4} v(t) dt \quad (15.36)$$

Pošto se uzorci struje i napona mjere u točno određenim trenucima (t_1 do t_4) tada je moguće gornje dvije jednadžbe riješiti pomoću numeričkih metoda. Nakon korištenja formule za numeričko integriranje (6.16), i uz uvjet da je vremenski razmak među uzorcima što manji kako bi se zadovoljila što veća točnost, dolazi se do izraza koji imaju oblik

$$R \frac{i_2 + i_1}{2} \Delta t + L(i_2 - i_1) = \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t \quad (15.37)$$

$$R \frac{i_3 + i_4}{2} \Delta t + L(i_4 - i_3) = \frac{v_4 + v_3}{2} \Delta t \quad (15.38)$$

Pošto su struje i naponi poznati u svim trenucima jer se mjere, a i vremenski razmak Δt među uzorcima je također poznat, moguće je iz jednadžbi (15.37) i (15.38) doći do izraza za R i L. Nakon sređivanja i rješavanja gore navedene dvije jednadžbe dolazi se do izraza za R i L koji glase

$$R = \frac{(v_1 + v_2)(i_4 - i_3) - (i_2 - i_1)(v_3 + v_4)}{(i_1 + i_2)(i_4 - i_3) - (i_2 - i_1)(i_3 + i_4)} \quad (15.39)$$

$$L = \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{(v_1 + v_2)(i_3 + i_4) - (i_1 + i_2)(v_3 + v_4)}{(i_2 - i_1)(i_3 + i_4) - (i_4 - i_3)(i_1 + i_2)} \quad (15.40)$$

Do izraza za impedanciju dolazi se pomoću formule

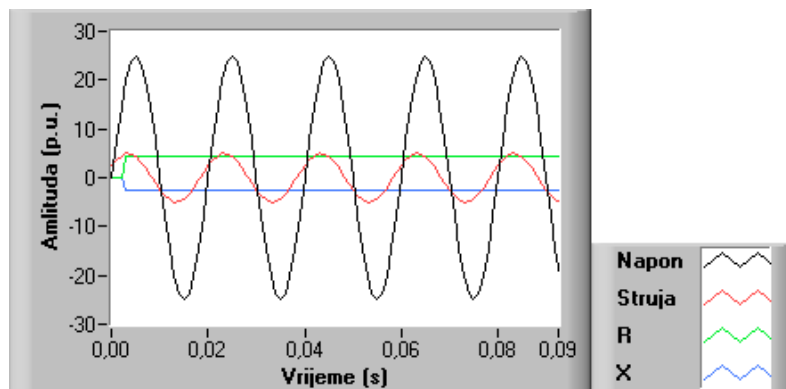
$$Z = R + j\omega L \quad (15.41)$$

gdje je $\omega = 2\pi f_0$.

15.4.2 Analiza rada algoritma

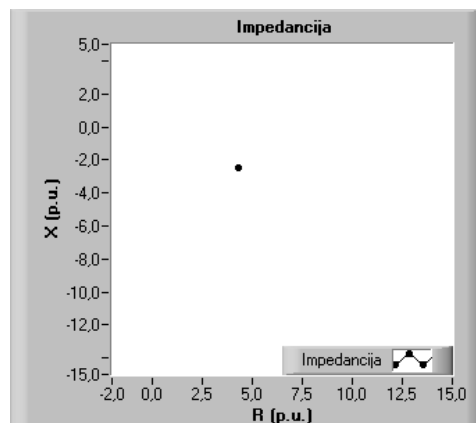
Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Situacija pri frekvenciji uzimanja uzoraka od 1000 Hz, napon od 25 p.u., struju od 5 p.u. te fazni pomak struje u odnosu na napon od 30 stupnjeva, prikazana je na slici 15-3.



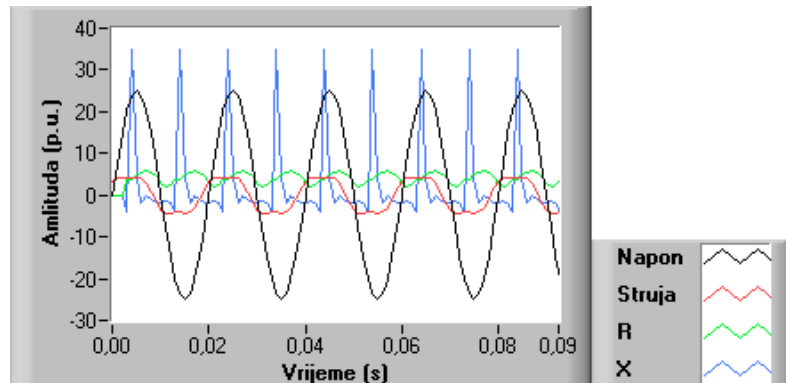
Slika 15-3 Osnovni harmonici napona i struje

U tom slučaju je pogreška algoritma pri izračunu R i L, a time i impedancije, jednaka nuli u svakom trenutku. To vrijedi za sve iznose napona i struja te za sve moguće fazne pomake među njima. Vrijednost impedancije je prikazana na slici 15-4 i ima samo jednu vrijednost, što je i za očekivati.

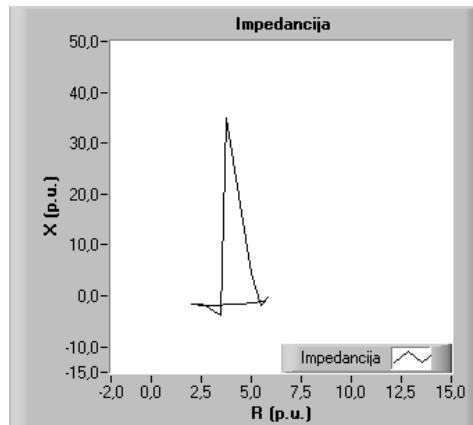


Slika 15-4 Impedancija voda

Ako se javi treći harmonik struje u iznosu od 10 posto od osnovnog harmonika, tada se situacija pogorša i izgled algoritma je prikazan na slici 15-5, a izgled impedancije na slici 15-6.



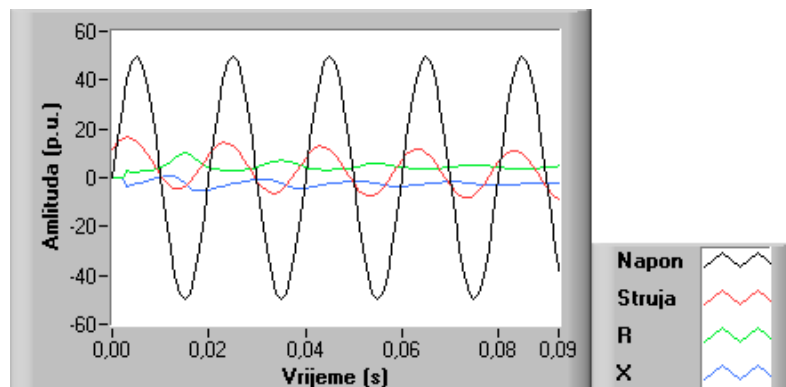
Slika 15-5 Osnovni harmonik napona i osnovni i treći harmonik struje



Slika 15-6 Impedancija

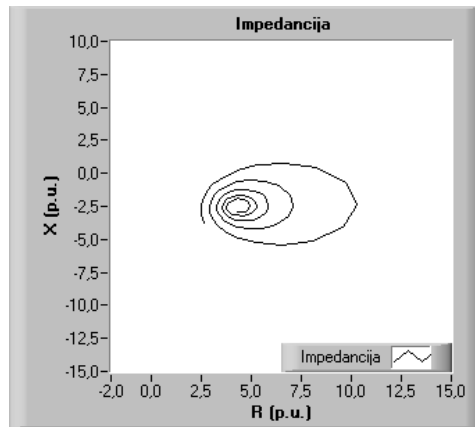
Vidljivo je kako se u izračunu reaktancije javljaju šiljci, a R počinje oscilirati. To je stvaran prikaz impedancije na štíćenom objektu, no problem je što je često potreban samo osnovni harmonik, a sve ostalo stvara smetnju. Što je treći harmonik veći i što ih je više, to je situacija lošija.

Ako se javi istosmjerna komponenta signala tada je situacija kao na slici 15-7, gdje su prikazani signali struje od 10 p.u., napona od 50 p.u. i istosmjerne komponente struje čiji K iznosi 7 p.u., a T je 50 ms.



Slika 15-7 Uz struju i napon prisutna je istosmjerna komponenta struje

Vidljivo je da što se istosmjerna komponenta više prigušuje to se i algoritam prije izravna i nakon nekog vremena L i R opet imaju samo jednu vrijednost. Impedancija je za taj slučaj prikazana na slici 15-8 iz koje se vidi da nema samo jednu



Slika 15-8 Impedancija

vrijednost nego više njih koje se nalaze na prikazanoj spirali čije se karakteristike mijenjaju ovisno o K i T . Opadanjem istosmjerne komponente točka impedancije se približava centru spirale.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 15 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji integrira diferencijalnu jednadžbu voda kako bi izračunao impedanciju koju registrira relej.

Tablica 15-1 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovni harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000 Hz	Pogreška je jednaka nuli	Velika osjetljivost i na minimalnu pojavu harmonika, no to je pravi prikaz stanja	Osjetljiv je na DC komponentu. Javlja se spirala koja se s prigušenjem DC komponente približava centru	Algoritam je neupotrebljiv

15.5 Algoritam s filtriranim trećim harmonikom

15.5.1 Izvod algoritma

Ako je potrebno imati samo osnovni harmonik struje tada je moguće digitalno filtrirati sve harmonike ako se granice integracije pravilno odaberu. Tada algoritam nije na njih osjetljiv, kao što je to slučaj sa algoritmom iz poglavlja 13.4. Ako postoji signal perioda T moguće je razviti ga u Fourierov red koji glasi

$$i(t) = c_0 + \sum_{m=1}^N c_m \cos(m\omega_0 t + \Theta_m) \quad (15.42)$$

N predstavlja najveći harmonik prisutan u signalu, a ω_0 je osnovna kružna frekvencija koja se izračuna iz perioda T. Integrirajući jednadžbu (15.42) u granicama $t_1=0$ do $t_2=\alpha/\omega_0$ dolazi se do izraza

$$I_1 = \int_{t_1=0}^{t_2=\alpha/\omega_0} i(t) dt = \int_0^{\alpha/\omega_0} c_0 dt + \sum_{m=1}^N \int_0^{\alpha/\omega_0} c_m \cos(m\omega_0 t + \Theta_m) dt \quad (15.43)$$

Iz jednadžbe se vidi da je integracija struje ovisno o vremenu jednaka sumi integrala svih harmoničkih članova koji su sadržani u signalu. Pošto je želja eliminirati sve harmonike osim osnovnog, zanimljivo je vidjeti što se događa kada se oni integriraju. Neka je I_{n1} integral n-tog harmonika u periodu od $t_1=0$ do $t_2=\alpha/\omega_0$, tada se može pisati za integral n-tog harmonika

$$I_{n1} = \int_0^{\alpha/\omega_0} c_n \cos(n\omega_0 t + \Theta_n) dt \quad (15.44)$$

nakon rješavanja se dobije

$$I_{n1} = \frac{c_n}{n\omega_0} [\sin(n\alpha + \Theta_n) - \sin \Theta_n] \quad (15.45)$$

Ako sada struju $i(t)$ ponovo integriramo i to u granicama od $t_3=\pi/n\omega_0$ do $t_4=(\pi/n + \alpha)/\omega_0$ tada se za n-ti harmonik dobiva izraz

$$I_{n2} = \int_{\pi/n\omega_0}^{(\pi/n+\alpha)/\omega_0} c_n \cos(n\omega_0 t + \Theta_n) dt \quad (15.46)$$

što nakon rješavanja iznosi

$$I_{n2} = \frac{c_n}{n\omega_0} [-\sin(n\alpha + \Theta_n) + \sin \Theta_n] \quad (15.47)$$

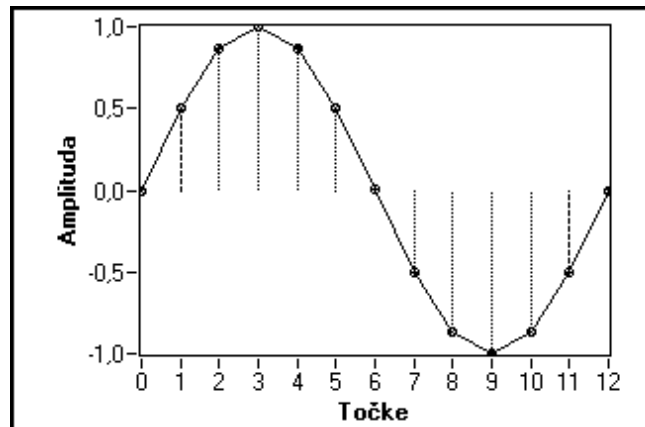
Ako se zbroje jednadžbe (15.45) i (15.47), vidi se da je ta suma jednaka nuli. To naravno, vrijedi za sve harmonike. To u biti znači da se n-ti harmonik može filtrirati iz valnog oblika struje $i(t)$ tako da se zbroje dvije integracije od kojih prva ima granice od $t_1=0$ do $t_2=\alpha/\omega_0$, a druga od $t_3=\pi/n\omega_0$ do $t_4=(\pi/n + \alpha)/\omega_0$. Efekt toga je u biti taj da se integriraju jednake površine signala oblika sinusoide, samo imaju razne predznake pa se ponište kada ih se zbroji. To je kao da se sinusoidu integrira od kuta nula do nekog kuta alfa i zatim od π do π +alfa. Dobiju se jednake površine, ali suprotnog predznaka. Na taj se način mogu eliminirati svi harmonici, odnosno potrebno je na osnovnu integraciju struje dodavati nove integracije u točno

određenim granicama integriranja koje su karakteristične za harmonik kojeg se želi digitalno filtrirati. Ako se dakle želi eliminirati m-ti i n-ti harmonik potrebno je provesti integraciju na sljedeći način

$$\int_0^{\alpha/\omega_0} i(t)dt + \int_{\pi/n\omega_0}^{(\alpha+\pi/n)/\omega_0} i(t)dt + \int_{\pi/m\omega_0}^{(\alpha+\pi/m)/\omega_0} i(t)dt \quad (15.48)$$

Dakle, kao što se vidi iz jednadžbe (15.48) na osnovnu integraciju još su dodane dvije koje imaju granice koje su karakteristične za harmonike koje želimo eliminirati. Pošto se u ovom poglavlju koristi algoritam s integriranjem diferencijalne jednadžbe u kojoj je digitalno filtriran treći harmonik, u daljnjem tekstu će biti prikazan način dolaska do algoritma uz pretpostavke navedene u ovom poglavlju.

Neka se pretpostavi da frekvencija uzimanja uzoraka signala iznosi 600 Hz i da je osnovni signal sinusnog oblika te da se parni harmonici ne javljaju, a sve iznad trećeg je analogno filtrirano. Tada je potrebno digitalno filtrirati samo treći harmonik. Iz frekvencije uzimanja uzoraka slijedi da po osnovnoj periodi signala od 20 ms postoji 12 uzoraka tog signala. Ako se signal postavi u ishodište koordinatnog sustava tada je prva točka na udaljenosti $\pi/6$ od ishodišta, druga na $2\pi/6$ i tako dalje sve do zadnje točke koja je od ishodišta udaljena za $12\pi/6$. To je i prikazano na slici 15-9.



Slika 15-9 Prikaz udaljenosti pojedinih točaka

Ako se želi eliminirati treći harmonik tada je potrebno odabrati odgovarajuće granice integracije koje idu od 0 do $\pi/6$ i od $\pi/3$ do $\pi/6 + \pi/3$. Radi lakšeg računa pretpostavlja se da ω_0 ima jediničnu vrijednost, a kut α je odabran $\pi/6$ radi toga što točno prva izmjerena točka pada u njega. Ostali su kutovi odabrani prema granicama koje su potrebne za filtriranje trećeg harmonika kao što je opisano u ovom poglavlju. Ako se sve navedeno primijeni na jednadžbu (15.34) dolazi se do izraza

$$R \left[\int_0^{\pi/6} i(t)dt + \int_{\pi/3}^{\pi/3+\pi/6} i(t)dt \right] + L \left[\int_0^{\pi/6} di + \int_{\pi/3}^{\pi/3+\pi/6} di \right] = \left[\int_0^{\pi/6} v(t)dt + \int_{\pi/3}^{\pi/3+\pi/6} v(t)dt \right] \quad (15.49)$$

Ako se želi filtrirati još koji harmonik tada bi trebalo dodati još integrala s granicama integriranja specifičnima za taj harmonik. Nakon korištenja formule za numeričko integriranje dolazi se do rješenja integrala iz jednadžbe (15.49) koje glasi

$$\begin{aligned}
 R \left[\frac{i(0) + i(\pi/6)}{2} + \frac{i(\pi/3) + i(\pi/2)}{2} \right] \Delta t + L [i(\pi/6) - i(0) + i(\pi/2) - i(\pi/3)] = \\
 = \left[\frac{v(0) + v(\pi/6)}{2} + \frac{v(\pi/3) + v(\pi/2)}{2} \right] \Delta t
 \end{aligned} \quad (15.50)$$

Ako se pogleda slika 86 tada se može zaključiti da je

$$\begin{aligned}
 i(0) &= i_0 & v(0) &= v_0 \\
 i(\pi/6) &= i_1 & v(\pi/6) &= v_1 \\
 i(\pi/3) &= i_2 & v(\pi/3) &= v_2 \\
 i(\pi/2) &= i_3 & v(\pi/2) &= v_3
 \end{aligned}$$

gdje i_x i v_x predstavljaju izmjerene uzorke struje i napona u tim trenucima. To se postiže upravo tako da se frekvencija uzimanja uzoraka postavi na 600 Hz. Ako se gore navedene jednakosti uvrste u (15.50) dolazi se do izraza

$$\frac{R \cdot \Delta t}{2} (i_0 + i_1 + i_2 + i_3) + L(i_1 - i_0 + i_3 - i_2) = \frac{\Delta t}{2} (v_0 + v_1 + v_2 + v_3) \quad (15.51)$$

Ako se sada izraz (15.49) ponovo integrira, ali s novim granicama, koje prevedeno u točke glase od T_2 do T_3 i od T_4 do T_5 , tada se uz isti postupak pomoću kojeg se došlo do izraza (15.51) dolazi i do nove jednadžbe oblika

$$\frac{R \cdot \Delta t}{2} (i_2 + i_3 + i_4 + i_5) + L(i_3 - i_2 + i_5 - i_4) = \frac{\Delta t}{2} (v_2 + v_3 + v_4 + v_5) \quad (15.52)$$

Ako se pogledaju jednadžbe (15.51) i (15.52) tada se vidi da su one oblika

$$\begin{aligned}
 R \cdot a + L \cdot b &= c \\
 R \cdot d + L \cdot e &= f
 \end{aligned} \quad (15.53)$$

Nakon rješavanja sustava (15.53) dolazi se do konačnog algoritma iz kojeg se pomoću izmjerenih napona i struja mogu izračunati R i L s tim da treći harmonik struje ne unosi pogrešku jer je digitalno filtriran. Dakle, izraz za R glasi

$$R = \frac{(v_0 + v_1 + v_2 + v_3)(i_3 - i_2 + i_5 - i_4) - (i_1 - i_0 + i_3 - i_2)(v_2 + v_3 + v_4 + v_5)}{(i_0 + i_1 + i_2 + i_3)(i_3 - i_2 + i_5 - i_4) - (i_1 - i_0 + i_3 - i_2)(i_2 + i_3 + i_4 + i_5)} \quad (15.54)$$

Za L se dobije

$$L = \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{(v_0 + v_1 + v_2 + v_3)(i_2 + i_3 + i_4 + i_5) - (i_0 + i_1 + i_2 + i_3)(v_2 + v_3 + v_4 + v_5)}{(i_1 - i_0 + i_3 - i_2)(i_2 + i_3 + i_4 + i_5) - (i_3 - i_2 + i_5 - i_4)(i_0 + i_1 + i_2 + i_3)} \quad (15.55)$$

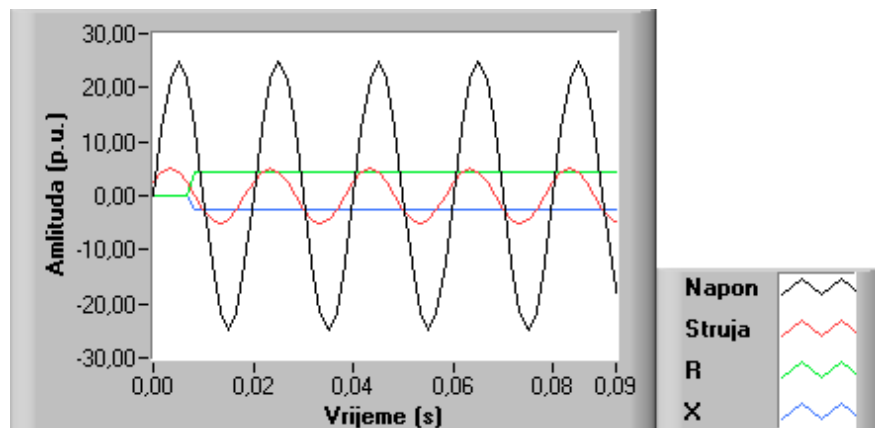
Ako je izmjereno šest uzastopnih uzoraka moguće je izračunati R i L. Nakon prvih šest nije više potrebno mjeriti novih šest, nego se samo odbaci najstariji uzorak i izmjeri novi te se u algoritmu sve pomakne za jedno mjesto. Dakle, sve je isto kao i u

ostalim algoritmima gdje postoji okvir od šest uzoraka koji se stalno pomiče za jedno mjesto u desno i pri tome odbacuje najstariji uzorak, a uzima najnoviji te ih uvijek ima šest. Impedancija se računa prema izrazu (15.41).

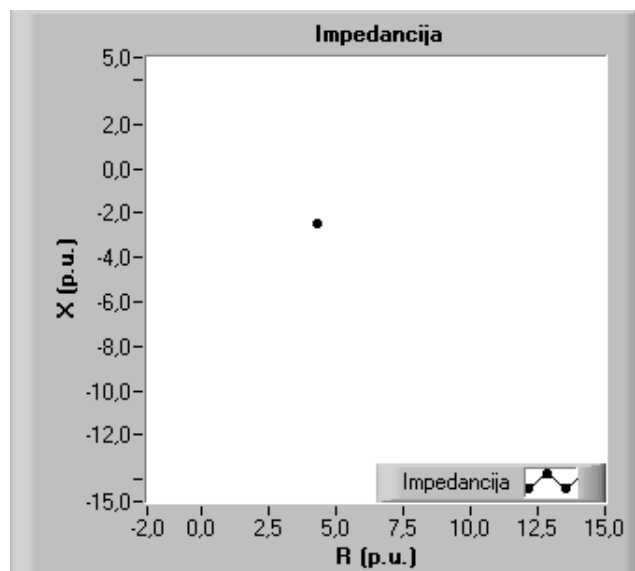
15.5.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Analiza je izvedena pri frekvenciji uzimanja uzoraka od 600 Hz, što je i uvjet da bi algoritam ispravno radio. Amplituda napona iznosi 25 p.u., a amplituda struje 5 p.u. Fazni pomak struje u odnosu na napon je 30 stupnjeva. Izgled signala i algoritma koji računa R i X_L prikazan je na slici 15-10. Impedancija je prikazana na slici 15-11.

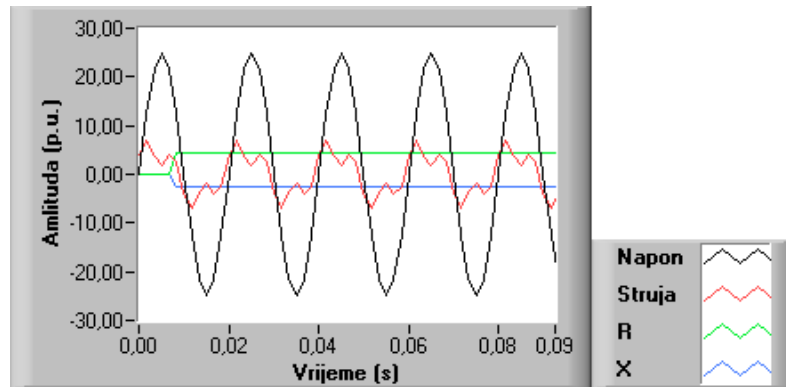


Slika 15-10 Osnovni harmonici napona i struje

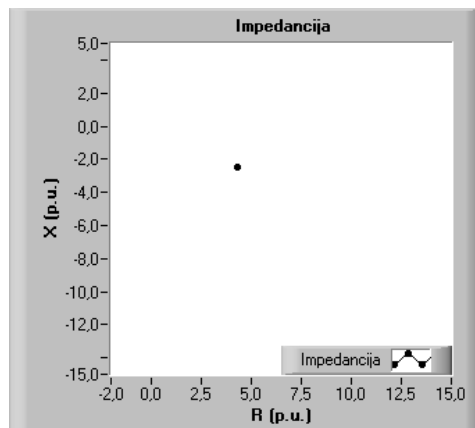


Slika 15-11 Impedancija

Pogreška pri izračunu impedancije je jednaka nuli, dakle algoritam je bez greške. Ako se sada signal struje izobliči tako da sadrži treći harmonik amplitude 3 p.u. situacija je kao na slici 15-12. Impedancija je prikazana na slici 15-13.



Slika 15-12 Osnovni harmonik napona i osnovni i treći harmonik struje



Slika 15-13 Impedancija

Vidi se da treći harmonik struje nema nikakvog utjecaja na izračun R -a i X_L -a, a samim time i na izračun impedancije. I u ovom slučaju je pogreška algoritma nula za bilo koju vrijednost trećeg harmonika i za bilo koji fazni pomak trećeg harmonika u odnosu na struju (ako fazni pomak uopće postoji).

Pri istosmjernoj komponenti je situacija slična kao u prethodnom algoritmu pa stoga nije dana nikakva slika.

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 15-2, koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji integrira diferencijalnu jednadžbu voda i pritom digitalno filtrira treći harmonik struje kako bi izračunao impedanciju koju registrira relej.

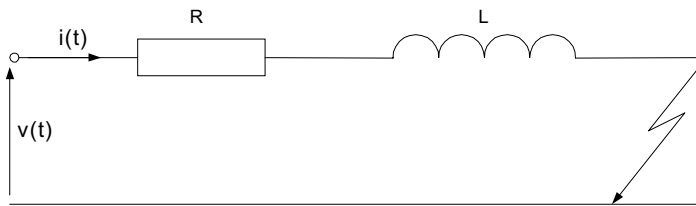
Tablica 15-2 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovni harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
600 Hz	Pogreška je jednaka nuli	Ako se javi treći harmonik pogreška je također jednaka nuli. To vrijedi za sve harmonike koji su digitalno filtrirani	Osjetljiv je na DC komponentu	Algoritam je neupotrebljiv

15.6 Algoritam dobiven rješavanjem diferencijalne jednačbe

15.6.1 Izvod algoritma

Naponi i struje koje registrira relej u ovom se slučaju dobivaju rješavanjem diferencijalnih jednačbi umjesto integriranjem, kao što je bio slučaj u prethodna dva primjera. Vod se može prikazati serijskim ili pi modelom. U ovom slučaju će vod biti prikazan serijskim modelom, kao na slici 15-2.



Slika 15-14 Faza voda prikazana pomoću otpora i induktiviteta

Pretpostavka za pravilan rad algoritma je da su visokofrekventne smetnje analogno filtrirane i samim time im je spriječen ulaz u krug za uzimanje uzoraka. Na slici R i L predstavljaju ukupnu impedanciju od releja do točke kvara. Za napon na mjestu releja se može pisati

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (15.56)$$

Promjena struje u vremenu u nekoj točki k se može dobiti iz izraza za numeričko deriviranje (5.13) i tada slijedi da je

$$\frac{di}{dt} \approx \frac{i_{k+1} - i_{k-1}}{2\Delta t} \quad (15.57)$$

Dakle, za izračun derivacije u točki k potrebno je imati izmjerenu k-1 i k+1 točku. Ako se sada (15.57) uvrsti u (15.56) tada se dobiva koliki je iznos napona u trenutku k na mjestu releja

$$v_k \approx Ri_k + L \frac{(i_{k+1} - i_{k-1})}{2\Delta t} \quad (15.58)$$

Pošto se u stvarnosti ne zna kolika je točka k+1 tada valja sve pomaknuti za jednu točku unazad; tada slijedi

$$v_{k-1} \approx Ri_{k-1} + L \frac{(i_k - i_{k-2})}{2\Delta t} \quad (15.59)$$

Iz gornje jednačbe slijedi da se tek u trenutku k može izračunati vrijednost napona za trenutak k-1. Zbog jednostavnosti trenutno treba zanemariti jednačbu (15.59). U trenutku k+1 napon iznosi

$$v_{k+1} \approx Ri_{k+1} + L \frac{(i_{k+2} - i_k)}{2\Delta t} \quad (15.60)$$

Ako se bolje pogledaju jednačbe (15.58) i (15.60) tada je vidljivo da su to dvije jednačbe s dvije nepoznanice (R i L), dok su vrijednosti napona i struje poznate jer se mjere. Također je poznat i vremenski razmak među točkama, koji se dobije iz frekvencije uzimanja uzoraka. Ako se te dvije jednačbe sada napišu u matičnom obliku tada to izgleda ovako

$$\begin{bmatrix} i_k & \frac{i_{k+1} - i_{k-1}}{2\Delta t} \\ i_{k+1} & \frac{i_{k+2} - i_k}{2\Delta t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix} \quad (15.61)$$

Nakon rješavanja dolazi se do izraza za R i L koji glase

$$R \approx \frac{v_k(i_{k+2} - i_k) - v_{k+1}(i_{k+1} - i_{k-1})}{i_k(i_{k+2} - i_k) - i_{k+1}(i_{k+1} - i_{k-1})} \quad (15.62)$$

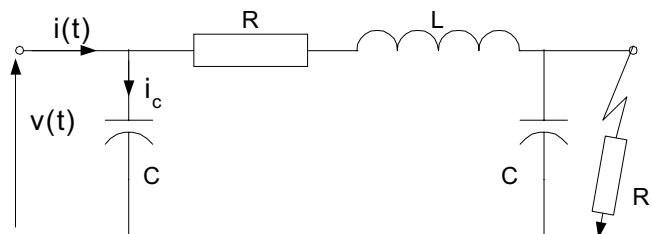
$$L \approx 2\Delta t \cdot \frac{(i_k v_{k+1} - i_{k+1} v_k)}{i_k(i_{k+2} - i_k) - i_{k+1}(i_{k+1} - i_{k-1})} \quad (15.63)$$

U stvarnosti nisu poznati naponi i struje u trenucima k+1 i k+2 pa gornje dvije jednačbe treba pomaknuti kao i jednačbu (15.59), tada slijedi

$$R \approx \frac{v_{k-2}(i_k - i_{k-2}) - v_{k-1}(i_{k-1} - i_{k-3})}{i_{k-2}(i_k - i_{k-2}) - i_{k-1}(i_{k-1} - i_{k-3})} \quad (15.64)$$

$$L \approx 2\Delta t \cdot \frac{(i_{k-2} v_{k-1} - i_{k-1} v_{k-2})}{i_{k-2}(i_k - i_{k-2}) - i_{k-1}(i_{k-1} - i_{k-3})} \quad (15.65)$$

Impedancija se ponovo računa prema formuli (15.41). Ako se želi u algoritam uključiti i visokofrekventne oscilacije koje nastaju pri kvarovima tada se može koristiti pi šema voda, slika 15-15, kao polazna točka za izradu algoritma. Pretpostavka od koje se kreće



Slika 15-15 Pi šema voda

je da je R_f na mjestu kvara toliko mali da se efekt dozemnog kapaciteta na mjestu kvara može zanemariti. U tom slučaju se može pisati da je napon na mjestu releja u nekom trenutku t jednak

$$v(t) = R(i(t) - i_c(t)) + L \frac{d(i(t) - i_c(t))}{dt} \quad (15.66)$$

Struja i_c je kapacitivna struja koja teče kroz dozemni kapacitet na mjestu releja i može se izraziti preko promjene napona u nekom vremenu na mjestu releja te glasi

$$i_c = C \frac{dv}{dt} \quad (15.67)$$

Uvrštavanjem (15.67) u (15.66) dolazi se do izraza

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} - RC \frac{dv(t)}{dt} - LC \frac{d^2v(t)}{dt^2} \quad (15.68)$$

Izrazi za prvu derivaciju struje te prvu i drugu derivaciju napona u trenutku k se mogu dobiti iz izraza (5.13) i (5.14) i oni glase

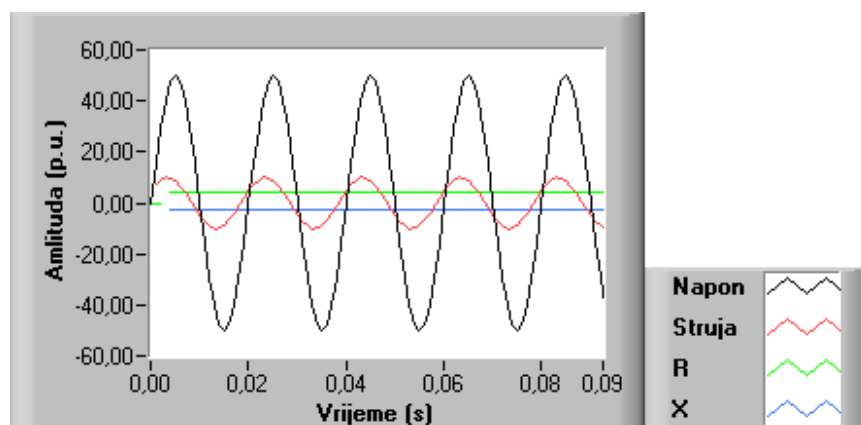
$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t_k} = \frac{i_{k+1} - i_{k-1}}{2\Delta t} \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t_k} = \frac{v_{k+1} - v_{k-1}}{2\Delta t} \quad \left. \frac{d^2v}{dt^2} \right|_{t_k} = \frac{v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{(\Delta t)^2} \quad (15.69)$$

Ako se sada ponovi postupak kao za gore navedeni serijski model dolazi se do izraza za R , L i C .

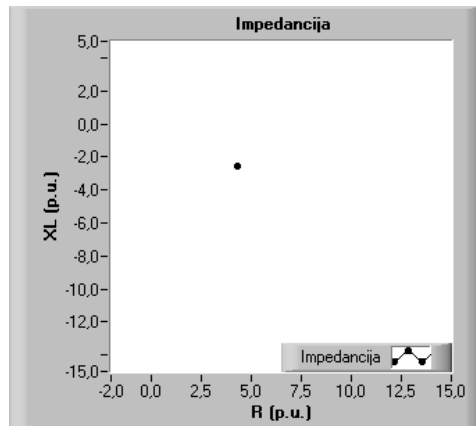
15.6.2 Analiza rada algoritma

Analiza rada algoritma je izvršena pomoću programa Algoritam koji je napisan posebno za tu svrhu. Stoga, svi podaci koji su dani u daljnjem tekstu su dobiveni iz gore navedenog programa.

Frekvencija uzimanja uzoraka je 1000 Hz Amplituda napona je 50 p.u., a amplituda struje je 10 p.u. Fazni pomak struje u odnosu na napon je 30 stupnjeva. Na slici 90 je prikazan izgled signala i algoritma, a na slici 15-16 prikazana je impedancija. U tom slučaju je pogreška algoritma jednaka nuli i takva je za razne frekvencije uzimanja uzoraka i amplitude napona i struje.

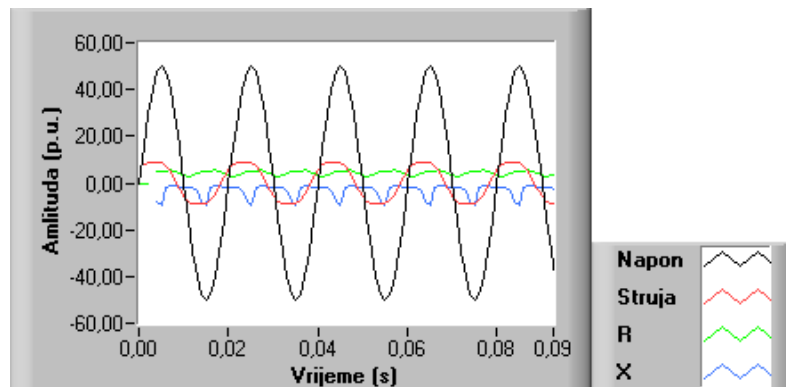


Slika 15-16 Osnovne komponente napona i struje



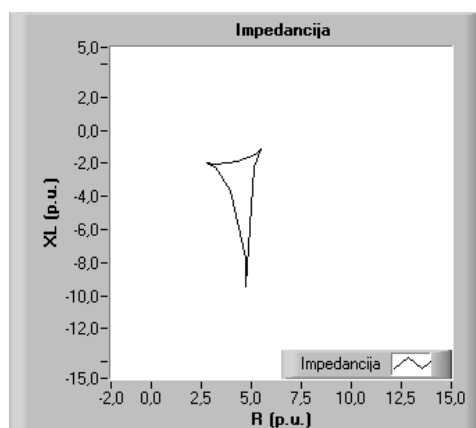
Slika 15-17 Impedancija

Ako se javi treći harmonik koji iznosi 10% amplitude osnovnog harmonika struje tada je situacija prikazana na slici 15-18



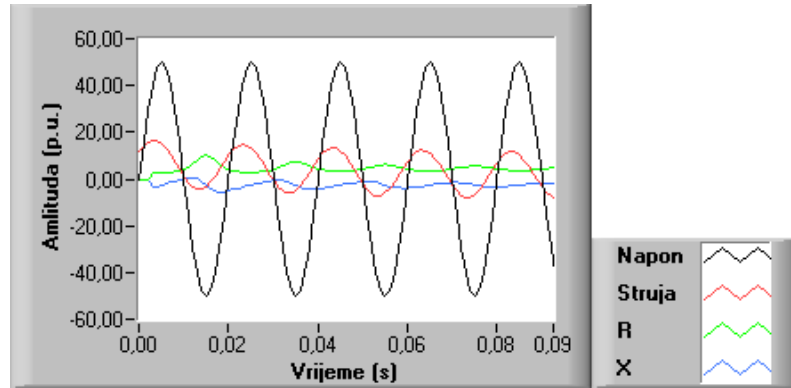
Slika 15-18 Osnovna komponenta napona i osnovni i treći harmonik struje

To je pravo stanje stvari, odnosno promjena otpora i induktiviteta kako ga registrira relej. Promjena impedancije u tom slučaju je prikazana na slici 15-19.

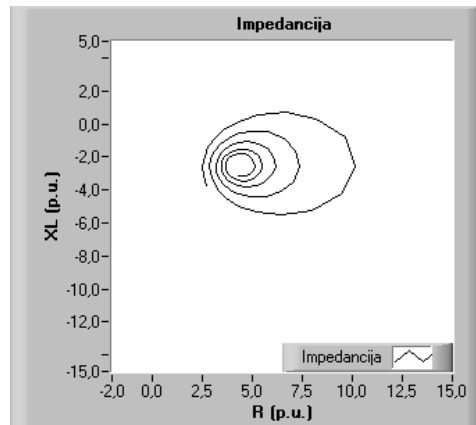


Slika 15-19 Impedancija

Ako se javi istosmjerna komponenta, situacija je kao i kod algoritma s integriranjem diferencijalne jednadžbe pa je ta situacija prikazana na slikama 15-20 i 15-21 za algoritam i signal te za impedanciju sukladno. Pretpostavka je da K iznosi 7 p.u., a T je 60 ms.



Slika 15-20 Uz struju i napon prisutna je istosmjerna komponenta struje



Slika 15-21 Impedancija

Zbog boljeg pregleda svojstava algoritma dana je tablica 15-3 koja prikazuje najvažnije karakteristike algoritma koji se dobije rješavanjem diferencijalne jednačbe voda kako bi izračunao impedanciju koju registrira relej.

Tablica 15-3 Karakteristike algoritma

f_s	Osnovni harmonik	Harmonici	DC komponenta	VF smetnje
1000 Hz	Pogreška je jednaka nuli	Velika osjetljivost i na minimalnu pojavu harmonika, no to je pravi prikaz stanja	Osjetljiv je na DC komponentu. Javlja se spirala koja se s prigušenjem DC komponente približava centru	Algoritam je neupotrebljiv

16 RAD ALGORITAMA U REALNOM VREMENU

*Algoritme koji su do sada izvedeni valja provjeriti i u realnom vremenu. To u biti nije provjera rada algoritma, jer on s jednakom točnošću radi u simulaciji i u realnom vremenu, nego je to provjera sklopovlja. Kada se govori o provjeri sklopovlja tada se misli na to da li je sklopovlje u stanju obrađivati signal u realnom vremenu. O teme će detaljnije biti govora u ovom poglavlju koje glasi **16 Rad algoritama u realnom vremenu**.*

16.1 Realno vrijeme

Postoje brojne definicije rada u realnom vremenu, od kojih jedna glasi: *za neki sustav se može reći da radi u realnom vremenu ako može garantirati ispunjenje određenih zadaća u točno određenom vremenu* [L3].

U stvarnosti postoji mnogo sustava koji rade u realnom vremenu, kao što su kontrola plovidbe broda, upravljanje krilcima nekog zrakoplova, zaštitni releji u elektroenergetskim postrojenjima i tako dalje. Postoje razni načini na koje se mogu opisati sustavi u realnom vremenu, poput vremena kontrolne petlje, determinizma, odstupanja te krutosti i elastičnosti sustava.

16.1.1 Vrijeme kontrolne petlje

Većina sustava u realnom vremenu motri neki proces kao, na primjer, digitalni relej koji mjeri struju dalekovoda, zatim to izmjereno (trenutno) stanje uspoređuje sa željenim stanjem (u slučaju gore spomenutog digitalnog zaštitnog releja se provjerava da li je izmjerena struja veća ili manja od neke dozvoljene struje koju odredi korisnik) i nakon toga djeluje na sustav ovisno o tome kakav je zaključak donesen (ako je struja manja od dozvoljene ne događa se ništa, a ako je veća daje se nalog prekidaču dalekovoda za isklon). Vrijeme koje je potrebno da se sve to dogodi naziva se vrijeme kontrolne petlje. Upravo to vrijeme određuje da li sustav može raditi u realnom vremenu. Za razne sustave je i to vrijeme različito.

U nekim od algoritama iz prethodnog poglavlja je vremenski razmak između dvije točke jednak jednoj milisekundi. Iz toga slijedi da sklopovlje ima na raspolaganju nešto manje od jedne milisekunde da izmjeri točku, zatim da izmjerenu točku propusti kroz algoritam koji vrši neku računsku operaciju i da zatim da povratnu informaciju u sustav. Ako se sve to uspije u vremenu između dva mjerenja tada se može reći da sustav radi u realnom vremenu. Naravno, što je frekvencija uzimanja uzoraka veća (kod algoritama zaštite), to je i opterećenje na sklopovlje veće (pri frekvenciji uzimanja uzoraka od 10000 Hz maksimalno vrijeme kontrolne petlje smije biti 0,1 ms ako se želi rad u realnom vremenu).

Kod algoritama koji se koriste u zaštitnim digitalnim relejima koji štite EES frekvencija uzimanja uzoraka je dovoljna kao što je prikazano u prethodnim poglavljima. No problem je taj što relej služi i za registriranje nekih prijelaznih pojava koje se nalaze u mikro i nano sekundnom području, pa stoga stvarna frekvencija uzimanja uzoraka mora biti mnogo veća.

To naravno ne znači da i algoritmi u tom slučaju moraju računati za svaku izmjerenu točku već mogu koristiti svaku stotu izmjerenu točku i samim time oni efektivno rade opet s nekom manjom frekvencijom uzimanja uzoraka te se tako povećalo vrijeme vremenske petlje.

16.1.2 Determinizam

Determinizam mjeri dosljednost vremenskih intervala između pojedinih događaja. Mnogi algoritmi zahtijevaju determinističko ponašanje, kao na primjer dizalo koje se postupno spušta do određenog kata zbog determinističkog ponašanja kontrolnog algoritma. Bez determinizma dizalo bi također došlo do točnog kata ali bez stabilnosti.

16.1.3 Odstupanje

U svim sustavima koji rade u realnom vremenu postoji određena pogreška koja se naziva odstupanje. Odstupanje je još jedan način na koji se mjeri determinizam sustava u realnom vremenu. Odstupanje mjeri koliko je maksimalno vremensko odstupanje pojedine iteracije kontrolne petlje od željenog vremena kontrolne petlje. Ako je, na primjer, željeno vrijeme kontrolne petlje 1 ms, a peta iteracija petlje radi sa 0,9 ms, tada je odstupanje 0,1 ms.

16.1.4 Kruti i elastični sustavi u realnom vremenu

S jedne strane postoje kruti sustavi u realnom vremenu koji su vrlo deterministički i ne propuštaju niti jedan događaj, kao na primjer dinamometar nekog stroja. U slučaju da on propusti neki događaj tada bi podaci koji su skupljeni bili krivi.

S druge pak strane, postoje elastični sustavi u realnom vremenu koji ne moraju imati takav stupanj determinizma i tu i tamo mogu propustiti koji događaj a da to ne utječe na točnost njihovog rada. Primjer za to je sustav koji mjeri temperaturu, gdje gubitak jednog mjerenja ne predstavlja problem jer se temperatura ionako mijenja sporo.

16.2 Operacijski sustavi u realnom vremenu

Većina operacijskih sustava ne radi u realnom vremenu. Među njima su i Windows-i. Pojednostavljeno to znači da bilo koja zadaća koju oni trebaju izvršiti može trajati različito vrijeme u različitim trenucima. Na primjer, ne postoji garancija da se bilo koji dokument u Microsoft Word-u može otvoriti za manje od pet sekundi. Štoviše ne postoji ni garancija da će se određeni zadatak ikada i završiti jer se cijeli sustav može zaglaviti ili srušiti u svakom trenutku. No postoji i razlog zašto je to tako odnosno zašto većina operacijskih sustava ne radi u realnom vremenu. Razlog je što oni (operacijski sustavi) moraju biti dovoljno fleksibilni da obuhvate niz programa koji rade pod njima, dok se brzina, procesori, memorija i sveukupno snaga računala povećavaju iz godine u godinu. Dakle, neograničena fleksibilnost i rad u realnom vremenu su dva suprotna zahtjeva, pa i stoga postoji vrlo mali broj sustava koji rade u realnom vremenu.

Procesor u računalu (ili više njih) mora stalno ispunjavati razne zadaće, kojih ima nekoliko istovremeno, pa ih on ispunjava naizmjenice. Aktivnosti koje vrši disk obično imaju veći prioritet, pa ako se određeni dokument želi spremirati na disk tada će sve ostale aktivnosti koje ovise o procesoru stati. To uključuje i razna mjerenja koja se vrše pomoću računala pa je upravo i to razlog zašto sklopovlje koje vrši mjerenje ima DMA i FIFO. DMA i FIFO ne ovise o procesoru. Oni omogućuju kontinuiran dotok izmjerenih točaka u računala i onda kada procesor potpuno ignorira sklopovlje za mjerenje (DAQ pločica). No ni DMA niti FIFO ne produžuju vrijeme kontrolne petlje nego samo omogućuju da se pojedina mjerenja ne izgube i da se signal snimi s točno određenom frekvencijom uzimanja uzoraka. Stoga ako se želi imati kontrolni sustav koji na borbenom zrakoplovu upravlja krilcima za smjer aviona, tada tu ne pomažu ni DMA niti FIFO, jer kontrolna petlja zahtijeva stalnu interakciju s procesorom kako bi pravilno funkcionirala [L3].

16.3 Sklopovlje i programska podrška u realnom vremenu

Najpouzdaniji način rada u realnom vremenu je korištenje sklopovlja koje radi u realnom vremenu. Princip rada je takav da se u nekom programskom jeziku napiše programska podrška, koja se zatim *downloada* na sklopovlje koje na sebi ima procesor koji radi u sustavu s realnim vremenom.

Također se mogu koristiti mikrokontroleri koji se programiraju za rad u realnom vremenu i koji komuniciraju s računalom preko RS 232 veze.

Jedan od novijih otvorenih standarda je PXI sustav (PCI eXtensions for instrumentation), koji radi na principu PCI sabirnice u osobnom računalu. Kod tog sustava postoje razna kućišta s raznim brojem PCI sabirnica te brojne kartice koje služe za razna mjerenja koje se mogu staviti u to kućište. Tvrtka National Instruments je proizvela programsku podršku koja se zove LabVIEW Real Time i koja se može *downloadati* na posebno sklopovlje koje zadovoljava PXI standard i koje tada radi u realnom vremenu. PXI sustav može komunicirati s osobnim računalom preko paralelnog ulaza, ali pošto radi sa svojim sustavom u realnom vremenu i pošto ima svoje napajanje nije ni u čemu ovisan o osobnom računalu.

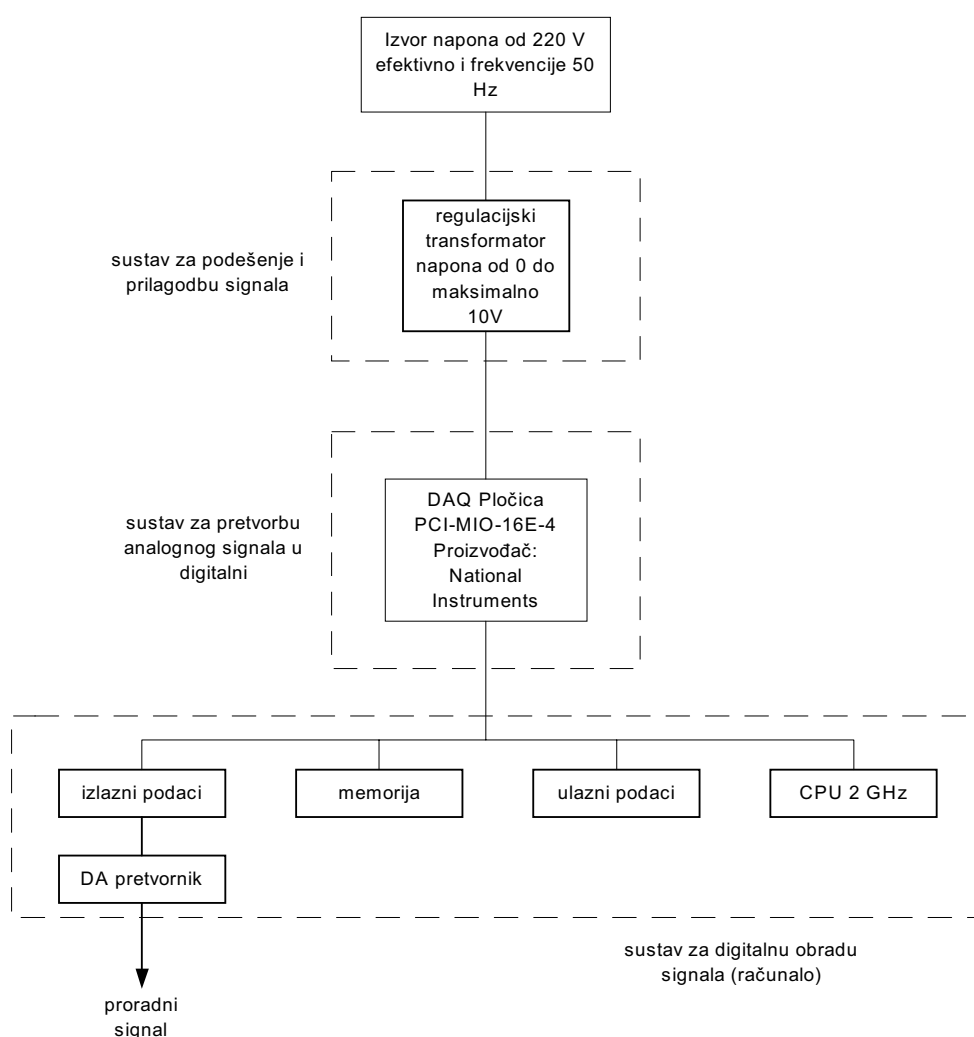
16.4 Algoritmi u realnom vremenu

16.4.1 Sustav za mjerenje i digitalnu obradu signala

Sada će biti prikazan rad algoritma u realnom vremenu. No prije toga valja nešto reći o sustavu za mjerenje i digitalnu obradu signala koji je ovdje korišten (poglavlje 2). Pošto nije postojala mogućnost nabave PXI ili nekog sličnog sustava tada su Windowsi poslužili kao RT sustav. Računalo na kojem su bili instalirani Windows 98 (second edition) na sebi ima procesor pentium 2 Ghz pa je bilo pretpostavljeno da će vrijeme koje ima na raspolaganju kontrolna petlja za razne frekvencije uzimanja uzoraka (do 3000 Hz) biti dovoljno da se obave sve zadaće. Drugim riječima računalo je trebalo izmjeriti neku točku i računati po određenom algoritmu prije nego se izmjeri druga točka i tako stalno. Iz frekvencije uzimanja uzoraka se vidi da su

vremena za to bila manja od jedne milisekunde. Nakon pokusa je ustanovljeno da je osobno računalo bilo u stanju to izvesti i za frekvencije uzimanja uzoraka do 20 000 Hz. Naravno, to ne znači da se u praksi može koristiti Windows operacijski sustav za takvo što zbog svoje nestabilnosti i zbog toga što nema garancije da će to uvijek biti tako, već je potrebno koristiti sklopovlje i programsku podršku koji rade u realnom vremenu.

Na slici 16-1 je prikazan dijagram izgleda sustava koji je korišten u pokusu. Kao izvor signala je korišten naponski izvor efektivne vrijednosti 220 V, sinusnog oblika i frekvencije 50 Hz (utičnica u zidu). Nakon toga se naponski signal dovodi na regulacijski transformator [L32] koji na sebi ne dopušta maksimalni napon veći od 10 V; razlog tome je da se ne dopusti preveliki napon na DAQ pločici. Kao što se vidi, nisu korišteni niskopropusni analogni filteri niti dodatni krugovi zaštite od prevelikog ulaznog signala, poput Zener dioda. Oni se u praksi moraju koristiti [L31], no budući je ovo bio pokus u uvjetima gdje nije moglo doći do prevelikog napona niti smetnji ta oprema nije niti korištena.



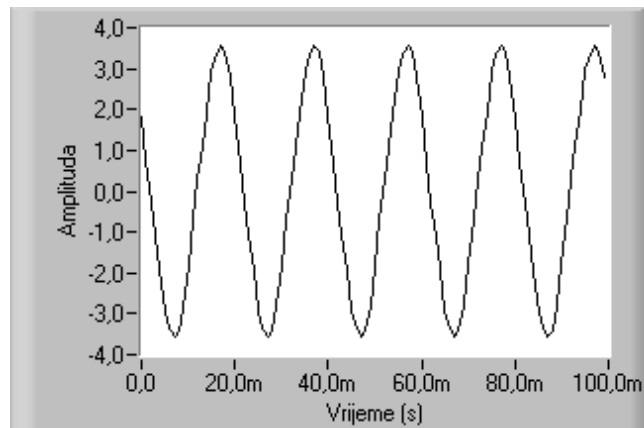
Slika 16-1 Sustav za mjerenje i digitalnu obradu signala korišten u ovom radu

Nakon smanjenja napona signal se dovodi na DAQ pločicu marke PCI-MIO-16E-4, koju je proizvela tvrtka National Instruments. Samo o toj pločici bi se mogla napisati cijela knjiga, pa su svi podaci o njoj, poput načina spajanja, načina rada, standarda koje zadovoljava i ostalog, dani na CD-u koji se nalazi u koricama rada. Valja samo napomenuti da su sklop za uzimanje uzoraka signala, AD pretvornik i digitalni

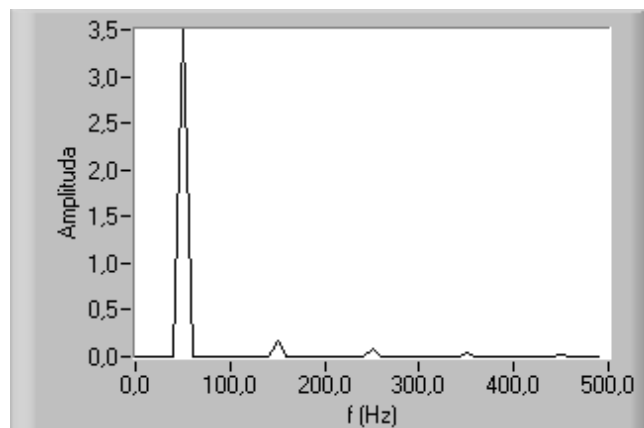
indikator nepotreban. U praksi se gornja petlja vrti u realnom vremenu i zato se točno zna koliko joj je vremena potrebno.

16.4.2 Izgled signala i algoritma

Na slici 16-3 je prikazana snimaka signala iz mreže koji je propušan kroz algoritme, dok su na slici 16-4 prikazane frekvencijske komponente tog signala.



Slika 16-3 Izgled signala iz mreže

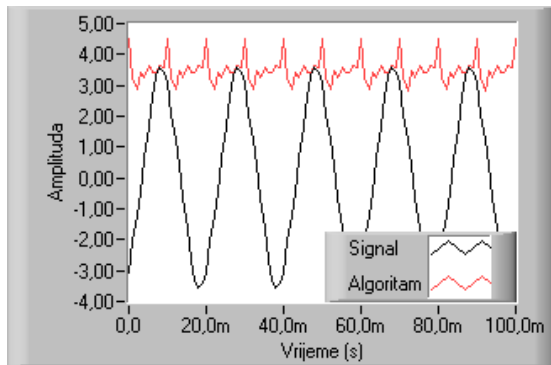


Slika 16-4 Frekvencijske komponente signala iz mreže

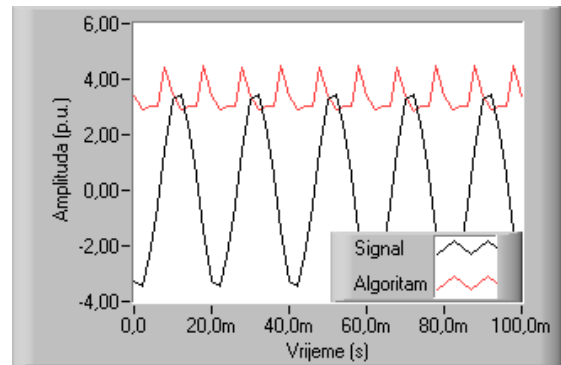
Vidljivo je da se signal sastoji od neparnih harmonika, i to sve do devetog. Amplituda trećeg harmonika iznosi 4,35% amplitude osnovnog. Amplituda petog harmonika iznosi 2,54% amplitude osnovnog harmonika, dok amplitude sedmog i devetog iznose 1% i 0,5% amplitude osnovnog harmonika. U daljnjem tekstu će biti pokazani usporedno snimljeni signali i simulirani signali za sve algoritme koji su prikazani u ovom radu.

Što se tiče algoritama koji rade na principu modela štíćenog elementa za njih su korištena dva snimljena signala, od kojih su oba naponska, s tim da je na strujni ulaz algoritma pušten drugi naponski signal koji algoritam u tom slučaju vidi kao mjerenu struju. Način na koji se došlo do drugog signala je taj da se koristio jednostavan RC krug koji je bio spojen na izmjenični napon. Zatim s sa drugog kanala DAQ kartice mjerio napon na otporniku, što je predstavljalo taj drugi signal, dok se s prvog kanala mjerio napon izvora. Otpornik i kondenzator su bili tako odabrani da je fazni pomak između dva signala iznosio oko 45 stupnjeva.

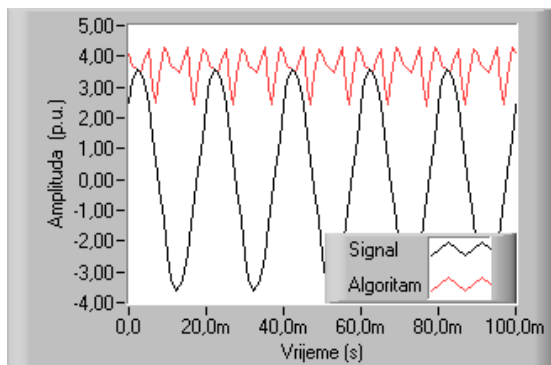
16.4.2.1 Sinusni algoritmi



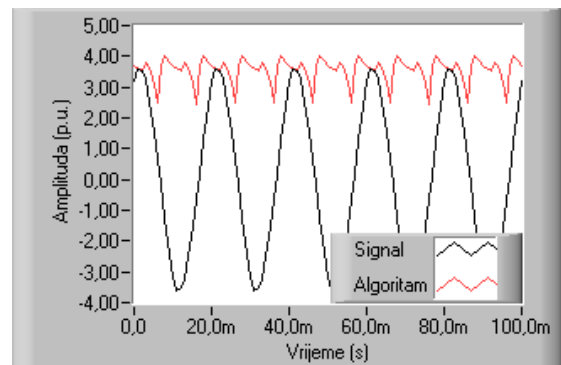
Slika 16-5 Algoritam uzorak i prva derivacija sa dvije točke $f_s=1000$ Hz



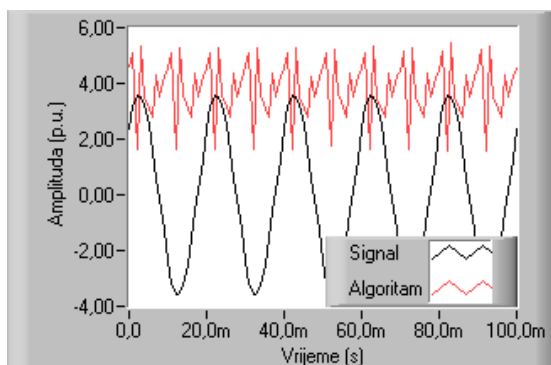
Slika 16-8 Algoritam prva i druga derivacija $f_s=500$ Hz



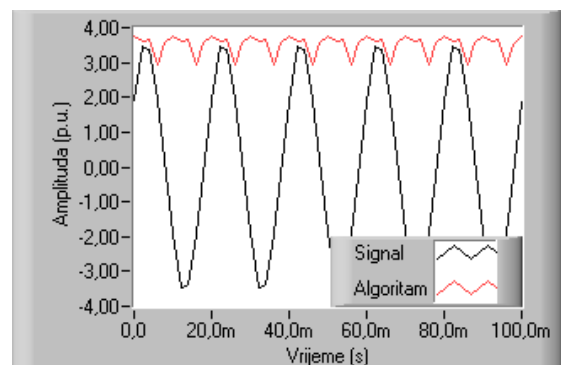
Slika 16-6 Algoritam uzorak i prva derivacija sa tri točke $f_s=1000$ Hz



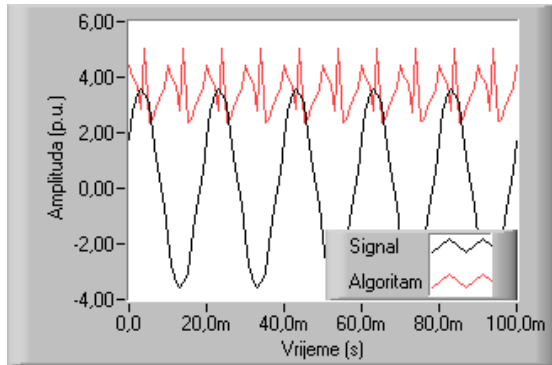
Slika 16-9 Algoritam dva uzorka bez derivacije $f_s=1000$ Hz



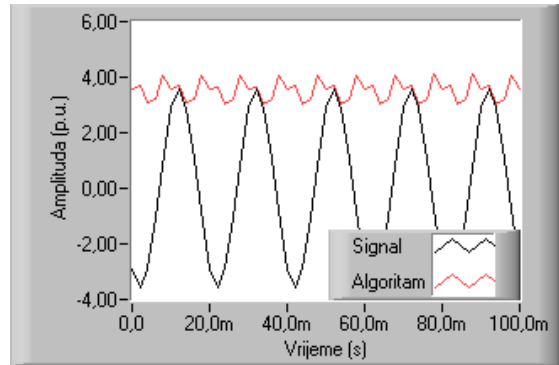
Slika 16-7 Algoritam prva i druga derivacija $f_s=1000$ Hz



Slika 16-10 Algoritam dva uzorka bez derivacije $f_s=500$ Hz

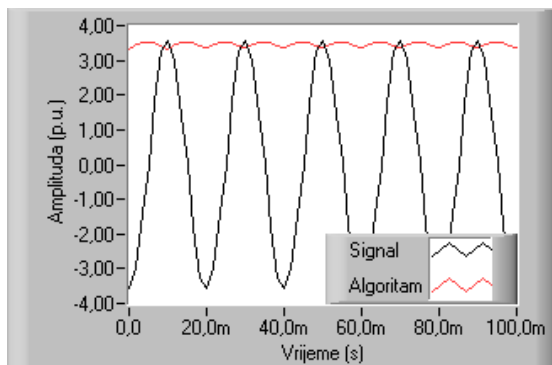


Slika 16-11 Algoritam tri uzorka bez derivacije $f_s=1000$ Hz

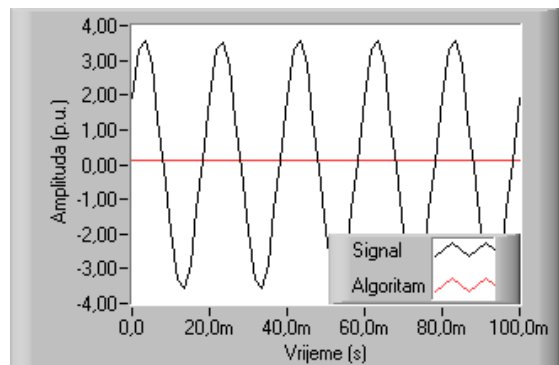


Slika 16-12 Algoritam tri uzorka bez derivacije $f_s=500$ Hz

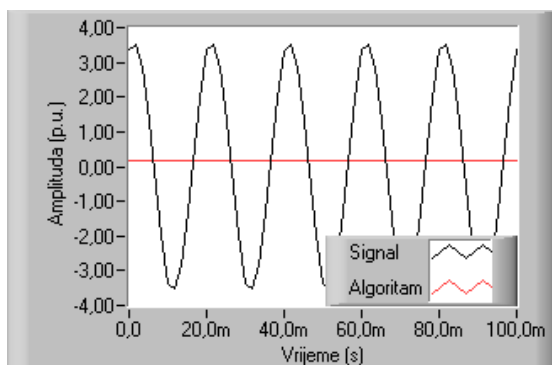
16.4.2.2 Fourierovi algoritmi



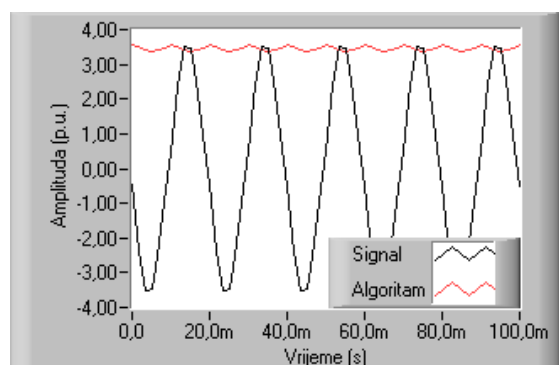
Slika 16-13 Algoritam Fourierov red s cijelim periodom $f_s=600$ Hz



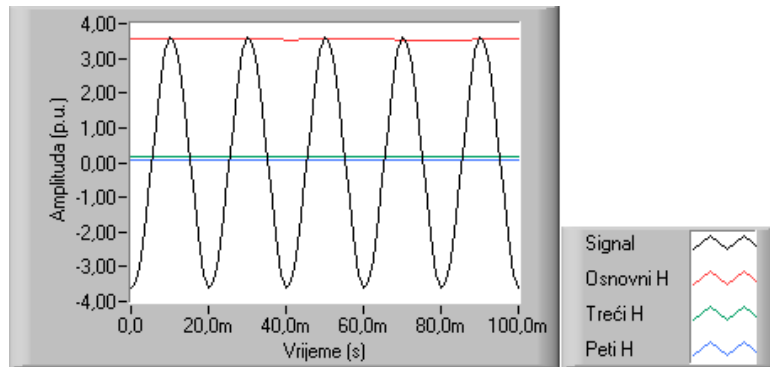
Slika 16-15 Algoritam Fourierov red s cijelim periodom samo peti harmonik $f_s=600$ Hz



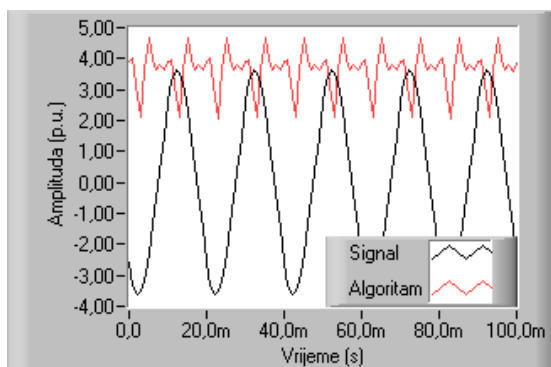
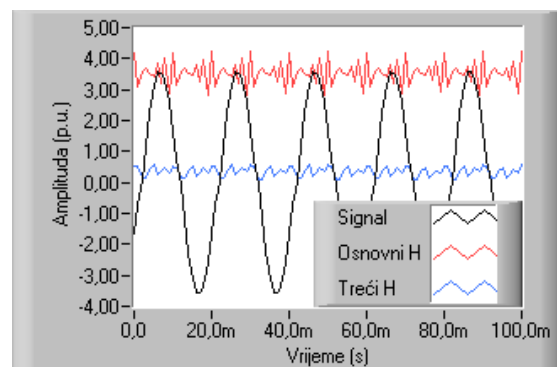
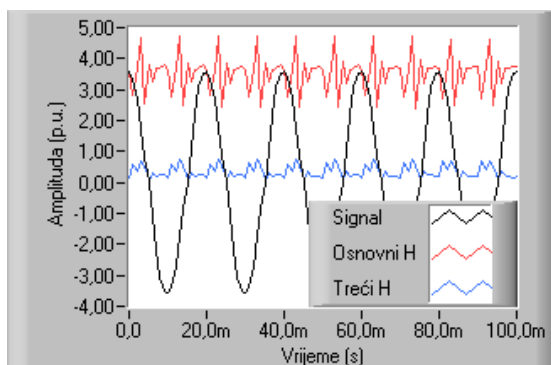
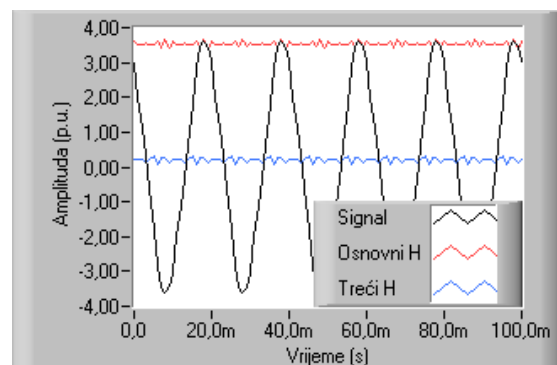
Slika 16-14 Algoritam Fourierov red s cijelim periodom samo treći harmonik $f_s=600$ Hz



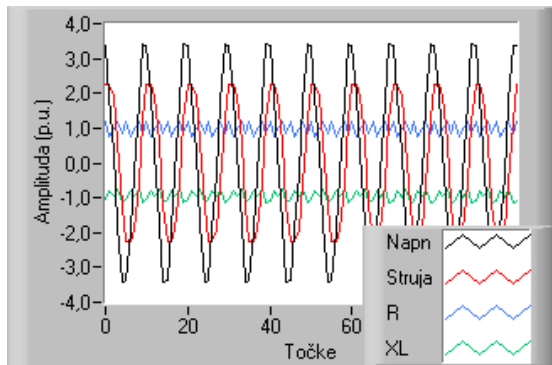
Slika 16-16 Algoritam Fourierov red s pola perioda $f_s=600$ Hz

Slika 16-17 FFT algoritam $f_s=800$ Hz

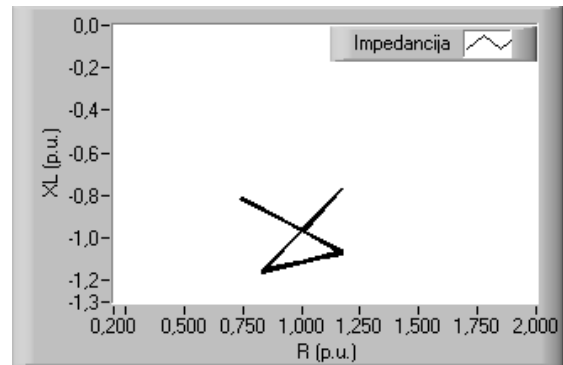
16.4.2.3 Algoritmi najmanjih kvadrata

Slika 16-18 Algoritam s generalnim polinomskim oblikom $f_s=1000$ HzSlika 16-20 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli $f_s=1000$ HzSlika 16-19 LSQ 1, 3 algoritam s više varijabli $f_s=1000$ HzSlika 16-21 LSQ 1, 3, 5, 7 algoritam s više varijabli $f_s=1000$ Hz

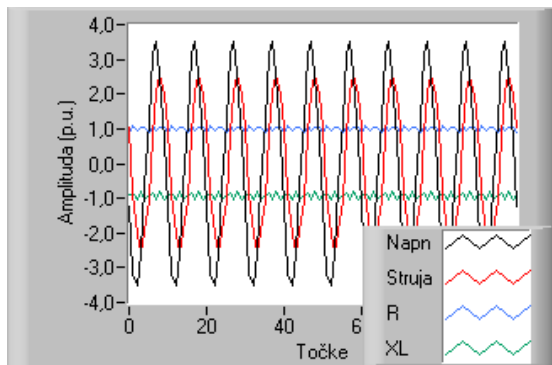
16.4.2.4 Algoritmi na principu modela štíčenog elementa



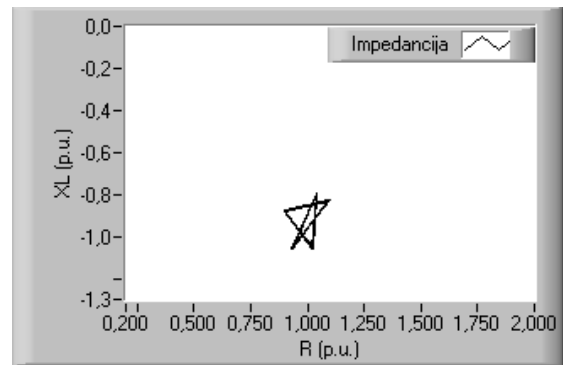
Slika 16-22 Integriranje diferencijalne jednačbe voda $f_s=500$ Hz



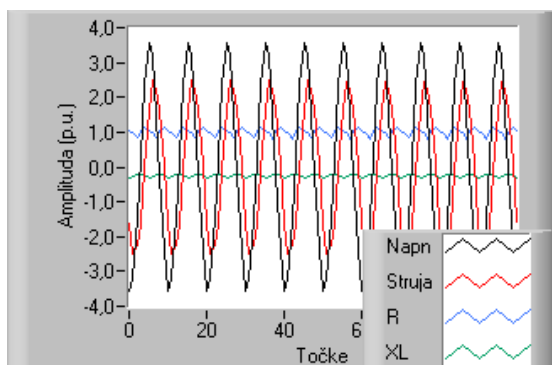
Slika 16-23 Impedancija integrirane jednačbe



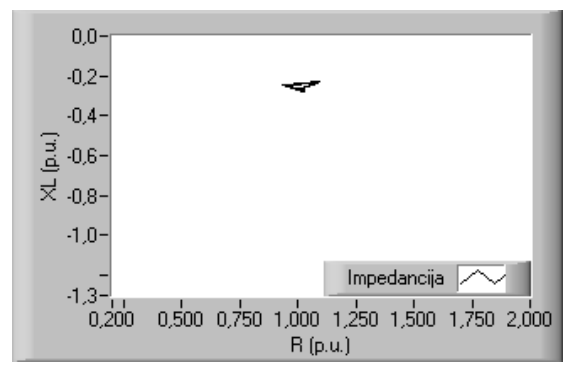
Slika 16-24 Integriranje s filtriranim trećim harmonikom $f_s=500$ Hz



Slika 16-25 Impedancija integrirane jednačbe s filtriranim trećim harmonikom



Slika 16-26 Rješavanje diferencijalne jednačbe $f_s=500$ Hz



Slika 16-27 Impedancija dobivena rješavanjem diferencijalne jednačbe

16.4.3 Sažetak

Kao što je i bilo za očekivati, algoritmi se u realnom vremenu ponašaju isto kao i u simulaciji. Sa samih slika su također vidljive njihove prednosti i mane koje su istaknute pri samoj analizi pojedinih algoritama. Tako se vidi da su sinusni algoritmi osjetljivi i na najmanje pojave harmonika koji nisu frekvencije 50 Hz. Naravno, svaki sinusni algoritam griješi drukčije. Za Fourierove algoritme se pokazalo da se ponašaju kao digitalni filteri i samim time izdvajaju pojedine harmonike, dok je najprecizniji od njih algoritam koji radi na principu brze Fourierove transformacije. Što se tiče algoritama najmanjih kvadrata, vidi se da što se bolje predvidi matematički model mjenog signala to je i algoritam bolji (slike 16-9 do 16-21). Kada bi u algoritmu bio predviđen i deveti harmonik koji se javlja u signalu, tada bi on radio bez greške. Naravno, što signal koji se mjeri ima više harmonika to je i njegov matematički opis složeniji, a samim time je i složeniji i duži račun koji radi algoritam. Algoritmi koji rade na principu šticećenog elementa u daju sliku impedancije koju vidi zaštitni relej na šticećenom elementu. Kako je često u zaštiti potrebno imati čiste sinusne oblike frekvencije 50 Hz (i struje i napona), jer je za njih izračunata nazivna impedancija koja se uspoređuje s izmjerenom, tada je kod upotrebe tih algoritama često potrebno filtrirati mjereni signal da se dobije čista komponenta od 50 Hz. Filtriranje se provodi bilo analogno bilo digitalno ili oboje.

Valja još jednom napomenuti da su algoritmi testirani u realnom vremenu, što ne znači da je signal snimljen u realnom vremenu zatim spremljen u neku bazu podataka i kasnije pušten kroz algoritam, nego to znači da je između svake dvije izmjerene točke algoritam računao pojedine vrijednosti (najčešće amplitudu) i tako dokle god nije bio zaustavljen. Drugim riječima, algoritmi su radili kao što je to opisano u početku poglavlja 16, dakle u realnom vremenu. Stoga slike od 16-3 pa do 16-27 predstavljaju snimku od nekoliko desetaka točaka koje je algoritam snimio i izračunao u nekom vremenu. Ta snimka se može zamisliti kao fotografski snimak automobila u vožnji, na slici auto stoji ali u stvarnosti se kreće.

17 PROVJERA RADA ALGORITAMA PRI KRATKOM SPOJU

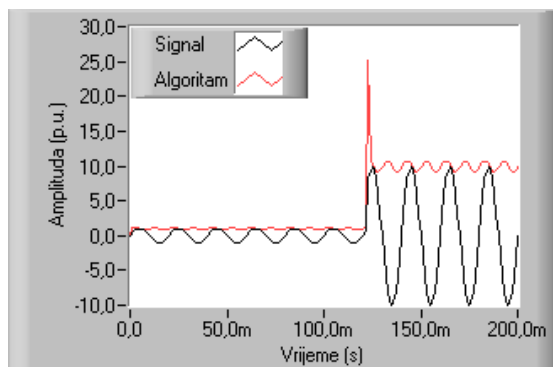
Poglavlje 17 Provjera rada algoritama pri kratkom spoju sastoji se od dvije cjeline. Prvo je napravljen simulirani kratki spoj koji je propušten kroz algoritme, a nakon toga je snimljen pravi kratki spoj koji je isto propušten kroz algoritme.

17.1 Simulirani kratki spoj

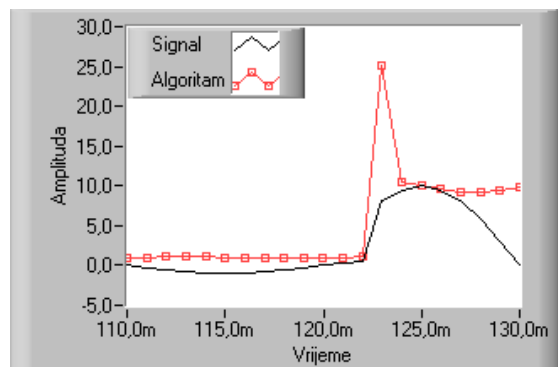
Simulirani kratki spoj je napravljen tako da se javi nagli prijelaz sa čiste sinusoide frekvencije 50 Hz i amplitude 1 p.u. na sinusoidu istih karakteristika, osim amplitude koja je sada 10 p.u. Dakle, dobila se sinusoida čija amplituda u jednom trenu naglo poraste, isto kao i što se to događa sa strujom kratkog spoja u stvarnosti [L8].

Što se pak tiče algoritama koji rade na principu modela štíćenog elementa, za njih su napravljena dva signala. Uz strujni, koji naglo poraste, konstruiran je isti takav naponski, s tim da on naglo padne i to na vrijednost koja je gotovo jednaka nuli [L35].

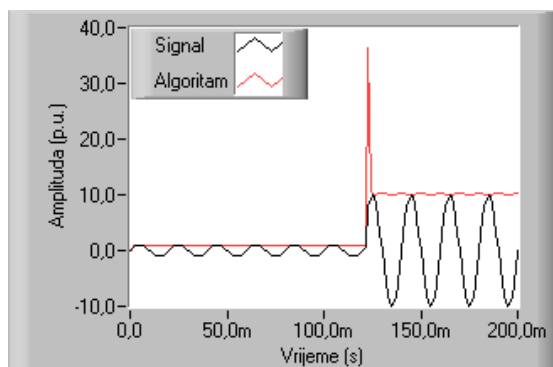
17.1.1 Sinusni algoritmi



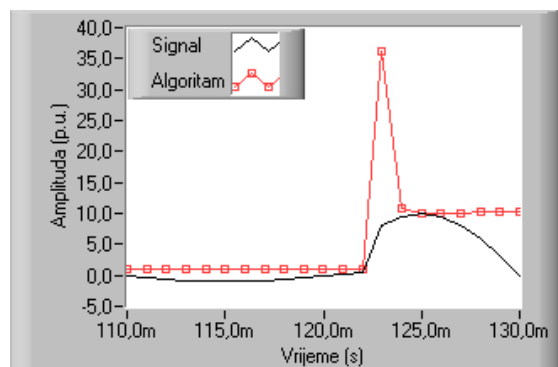
Slika 17-1 Uzorak i prva derivacija s dvije točke



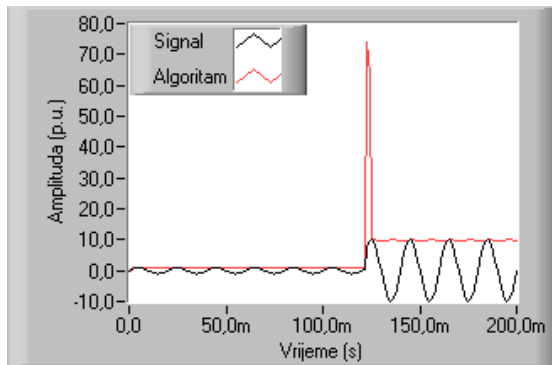
Slika 17-2 Uzorak i prva derivacija s dvije točke



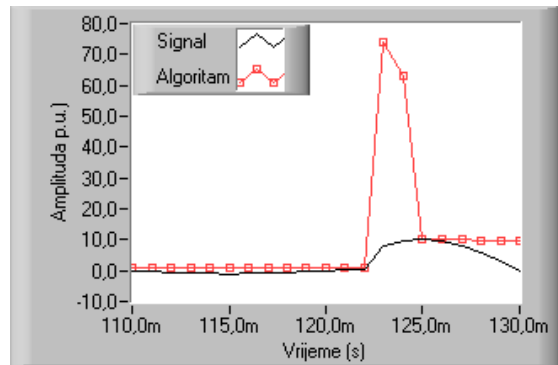
Slika 17-3 Uzorak i prva derivacija s tri točke



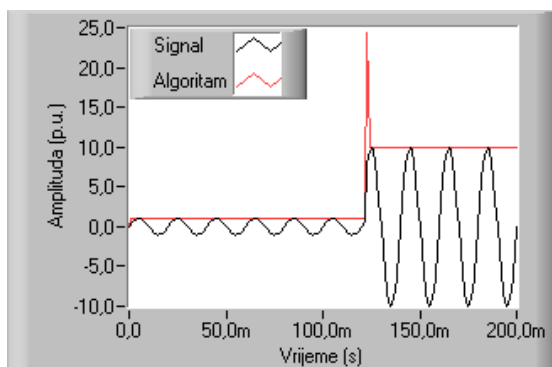
Slika 17-4 Uzorak i prva derivacija s tri točke



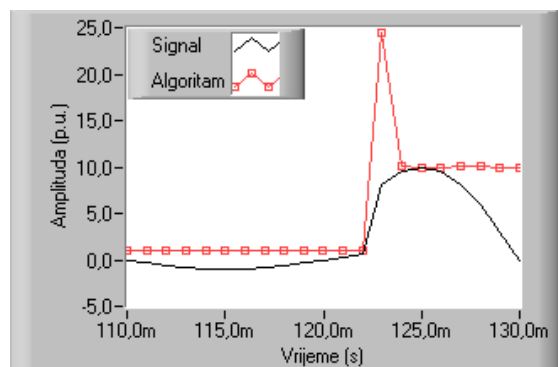
Slika 17-5 Algoritam s prvom i drugom derivacijom



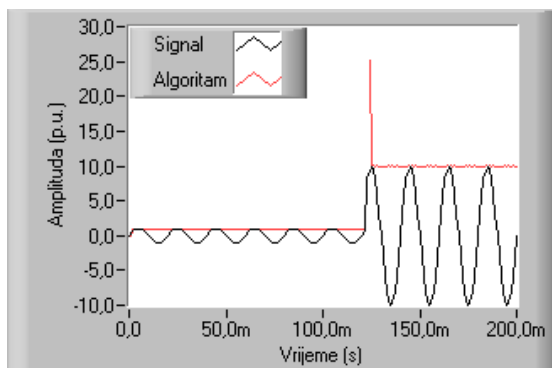
Slika 17-6 Algoritam s prvom i drugom derivacijom



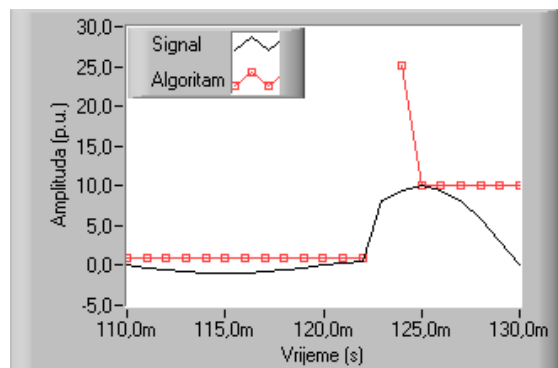
Slika 17-7 Algoritam s dva uzorka bez derivacije



Slika 17-8 Algoritam s dva uzorka bez derivacije



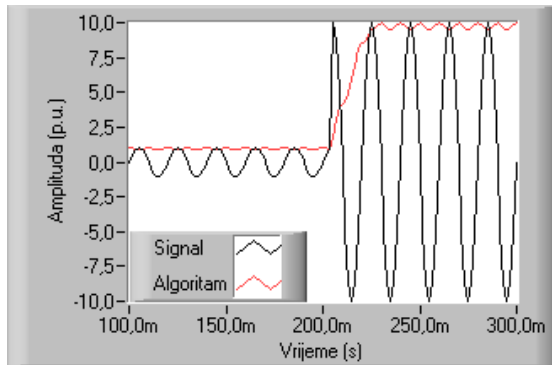
Slika 17-9 Algoritam s tri uzorka bez derivacije



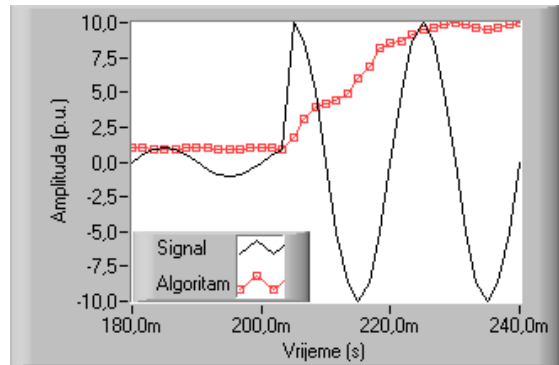
Slika 17-10 Algoritam s tri uzorka bez derivacije

Kao što se vidi na slikama u trenutku nagle promjene amplitude nastaju veliki šiljci u algoritmima, odnosno krivo predviđanje amplitude. Dobra stran je da šiljci nastaju u jednoj ili eventualno dvije iteracije, a nakon toga algoritam ponovo točno računa. Ako se algoritam želi koristiti u praksi tada treba prvu točku algoritma koja je veća od neke zadane, koju podesi korisnik (proradna točka), zanemariti i koristiti tek drugu koja također mora biti veća od neke zadane. Na taj se način pri recimo frekvenciji skupljanja uzoraka od 1000 Hz kvar može otkriti za 2 ms.

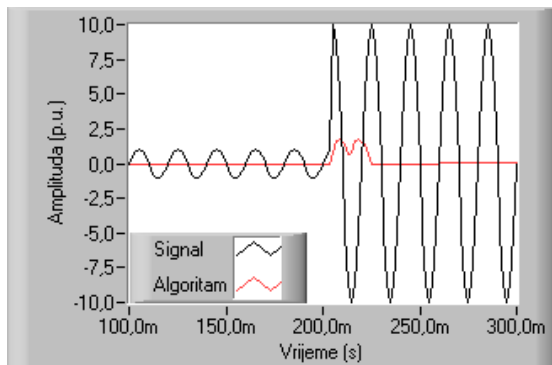
17.1.2 Fourierovi algoritmi



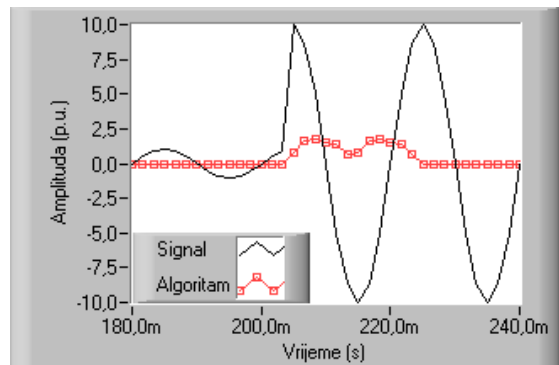
Slika 17-11 Fourierov red s cijelim periodom



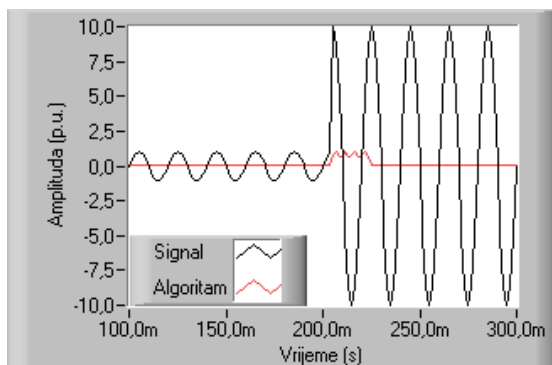
Slika 17-12 Fourierov red s cijelim periodom



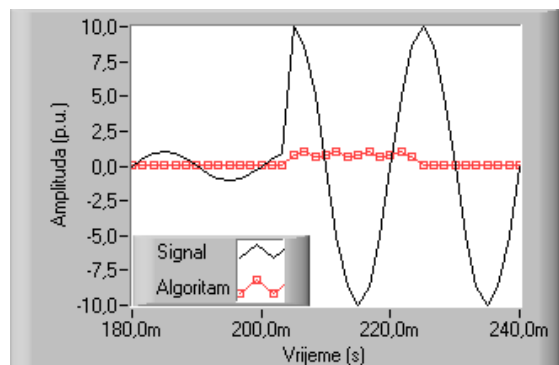
Slika 17-13 Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom



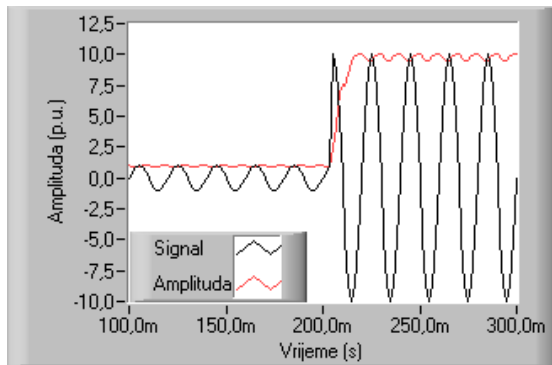
Slika 17-14 Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom



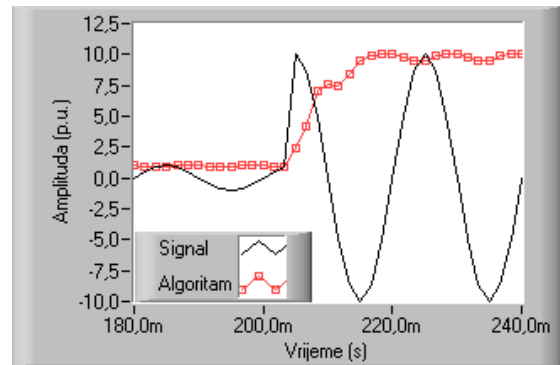
Slika 17-15 Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom



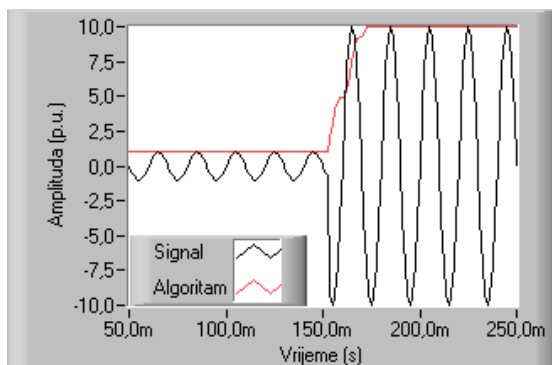
Slika 17-16 Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom



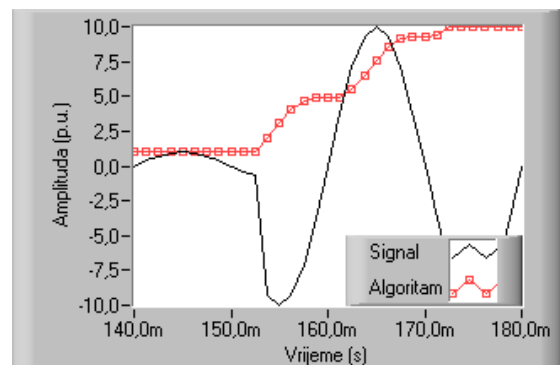
Slika 17-17 Fourierov red s pola perioda



Slika 17-18 Fourierov red s pola perioda



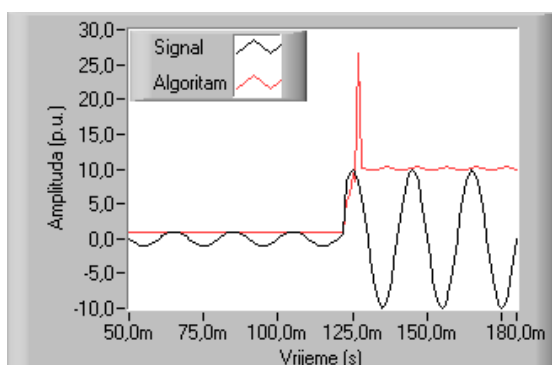
Slika 17-19 FFT algoritam



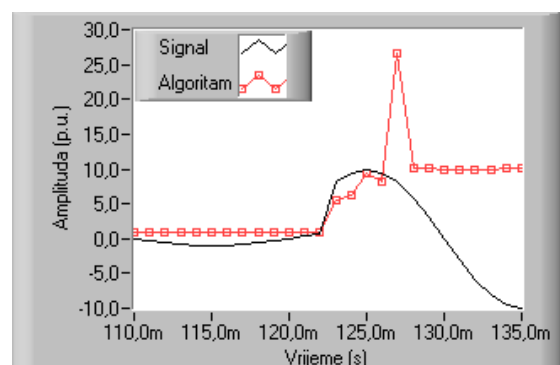
Slika 17-20 FFT algoritam

Fourierovi algoritmi, za razliku od sinusnih, nemaju nagle skokove već blagi prijelaz sa jedne vrijednosti amplitude do druge. Iz tog razloga kod njih nije potrebno zanemarivati točke. Jedini problem je što se konačna vrijednost amplitude zna tek nakon 10 do 20 milisekundi.

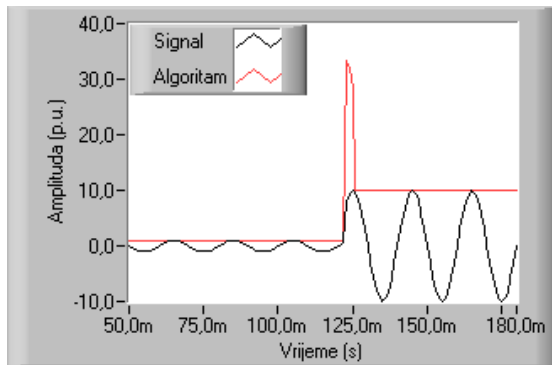
17.1.3 Algoritmi najmanjih kvadrata



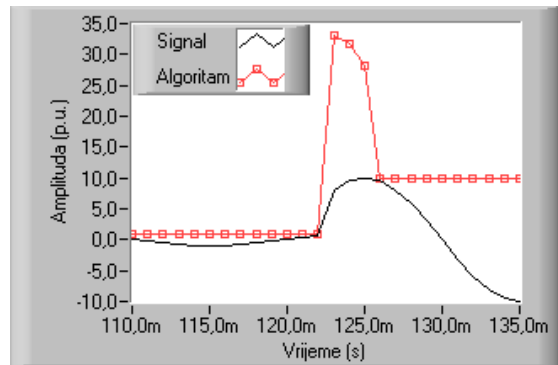
Slika 17-21 Algoritam s generalnim polinomskim oblikom



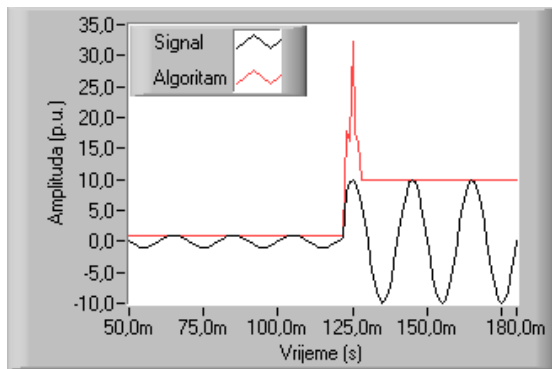
Slika 17-22 Algoritam s generalnim polinomskim oblikom



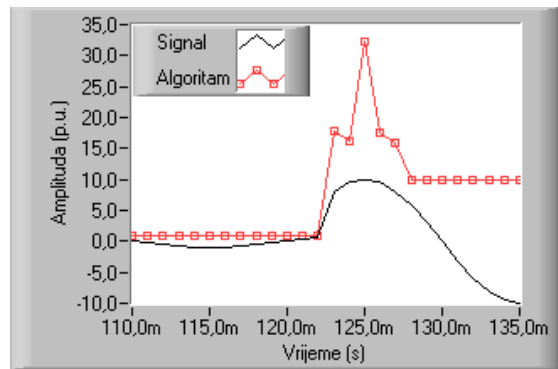
Slika 17-23 LSQ 1, 3 algoritam s više varijabli



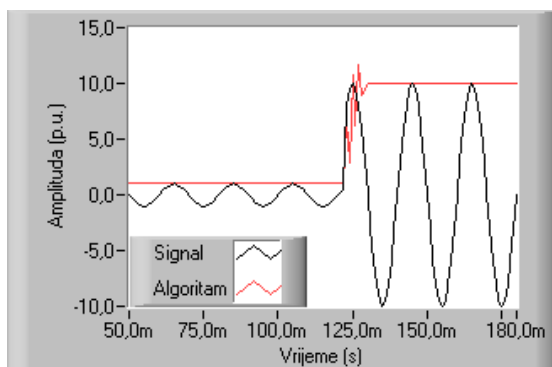
Slika 17-24 LSQ 1, 3 algoritam s više varijabli



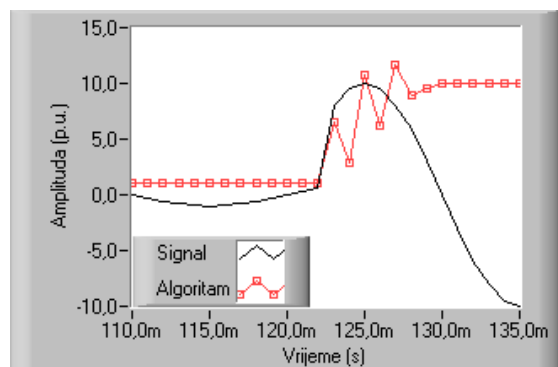
Slika 17-25 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli



Slika 17-26 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli



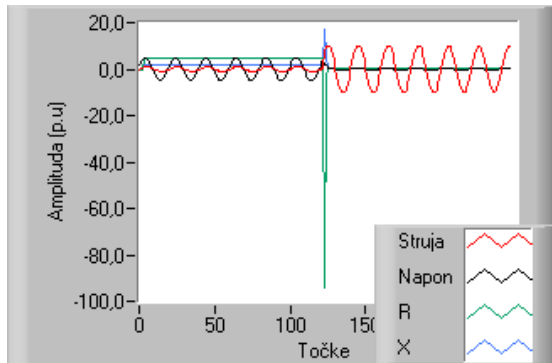
Slika 17-27 LSQ 1, 3, 5, 7 algoritam s više varijabli



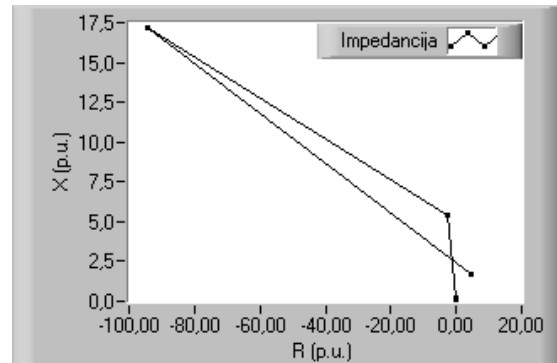
Slika 17-28 LSQ 1, 3, 5, 7 algoritam s više varijabli

Kao što je bilo govora, algoritmi najmanjih kvadrata su to bolji što je mjereni signal bolje matematički opisan. Kada bi se prostor oko trenutka kratkog spoja rastavio po Fourieru vidjelo bi se da tamo ima neparnih harmonika, pa algoritam na slici 17-27 radi najbolje jer većinu tih harmonika uzima u obzir. To ne znači da su drugi algoritmi neupotrebljivi već samo treba zanemariti neke točke kao i kod sinusnih algoritama.

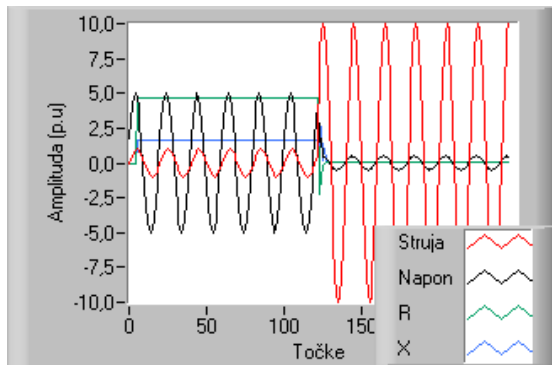
17.1.4 Algoritmi na principu modela štíćenog elementa



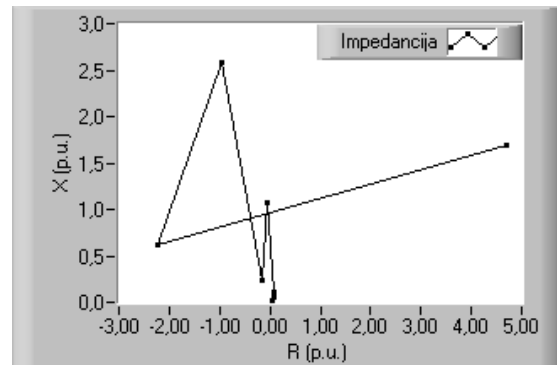
Slika 17-29 Algoritam s integriranjem diferencijalne jednadžbe



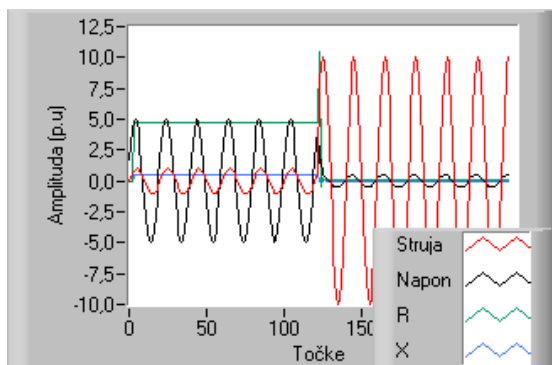
Slika 17-30 Algoritam s integriranjem diferencijalne jednadžbe



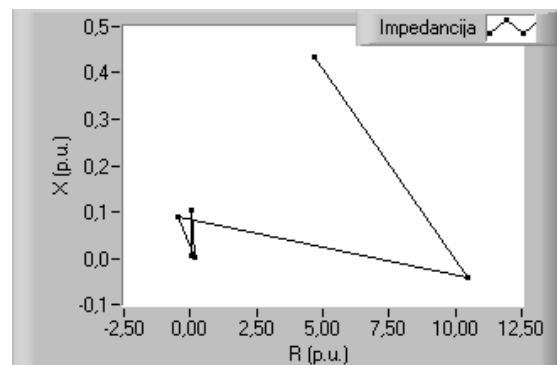
Slika 17-31 Algoritam s filtriranim trećim harmonikom



Slika 17-32 Algoritam s filtriranim trećim harmonikom



Slika 17-33 Algoritam s rješavanjem diferencijalne jednadžbe

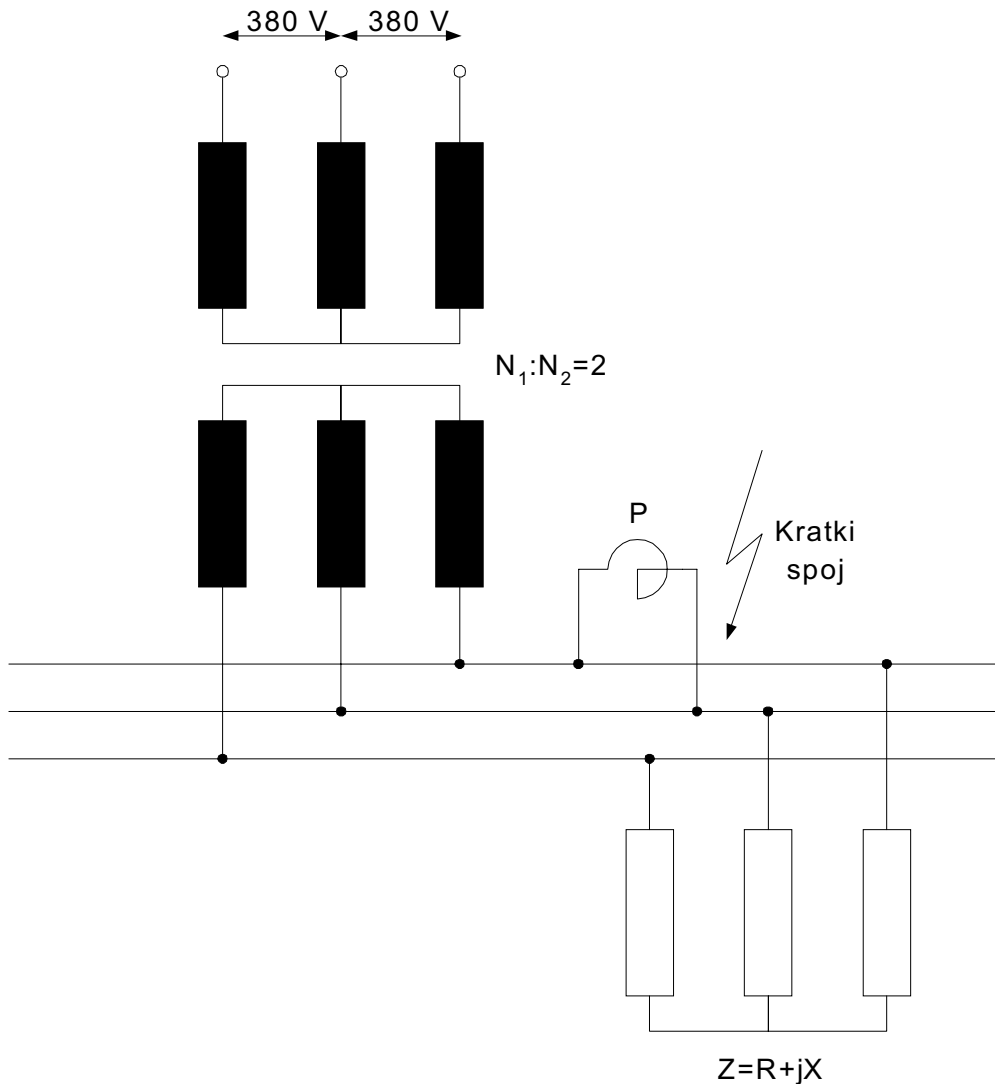


Slika 17-34 Algoritam s rješavanjem diferencijalne jednadžbe

Valja primijetiti sa slika kako impedancija kod svih algoritama nakon nekoliko točaka završi blizu nule, što je i za očekivati.

17.2 Pravi kratki spoj

Kratki spoj je snimljen na Fakultetu Elektrotehnike i Računarstva u Zagrebu, u laboratoriju iz elektrana i rasklopnih postrojenja. Konfiguracija energetskog postrojenja na kojem je napravljen i zatim snimljen kratki spoj je prikazana na slici 17-35.



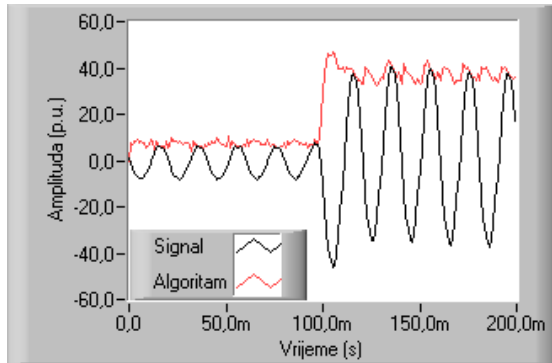
Slika 17-35 Trofazna šema postrojenja na kojem je napravljen kratki spoj

Slika pokazuje energetski transformator, spojen na sabirnice, koji napaja teret Z . Struja koja je tekla u normalnom pogonu je iznosila 10 ampera. Nakon što je sve bilo pušteno u pogon napravljen je kratki spoj na sabirnicama između dvije faze. To se u biti može promatrati kao kratki spoj između dvije faze transformatora na krajevima namota tog transformatora. Kratki spoj je napravljen preko prigušnice P kako bi se ograničila sama struja kratkog spoja. Struju je bilo potrebno ograničiti kako ne bi došlo do uništenja energetskog transformatora i spojnih vodova. Struja kratkog spoja između dvije faze je iznosila oko 40 ampera.

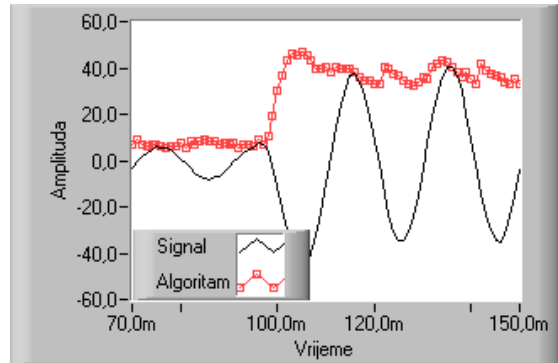
Sveukupno je napravljeno i snimljeno 22 kratka spoja. U daljnjem tekstu će kroz svaki algoritam biti pušten samo jedan kratki spoj, a ne svih 22 zbog toga što bi to zauzelo previše prostora. Ako se žele vidjeti odzivi algoritma za sve snimljene kratke

spojeve tada je to moguće učiniti sa CD-a koji se nalazi u koricama rada i na kojem se nalaze snimljeni kratki spojevi i svi algoritmi koji se nalaze u ovom radu.

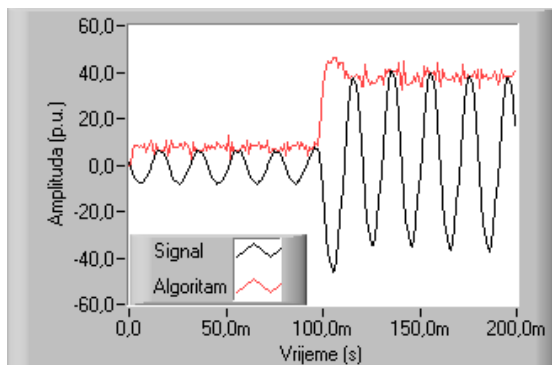
17.2.1 Sinusni algoritmi



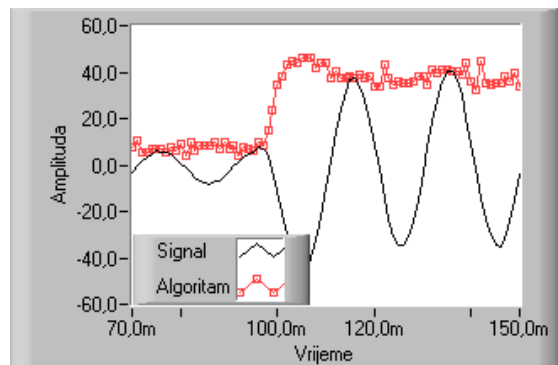
Slika 17-36 Uzorak i prva derivacija s dvije točke



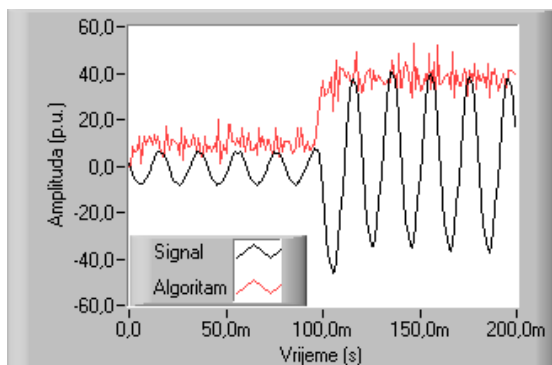
Slika 17-37 Uzorak i prva derivacija s dvije točke



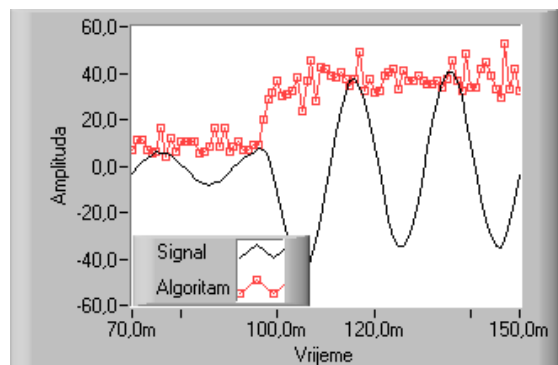
Slika 17-38 Uzorak i prva derivacija s tri točke



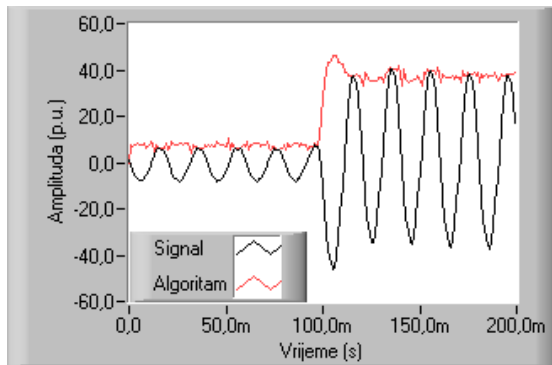
Slika 17-39 Uzorak i prva derivacija s tri točke



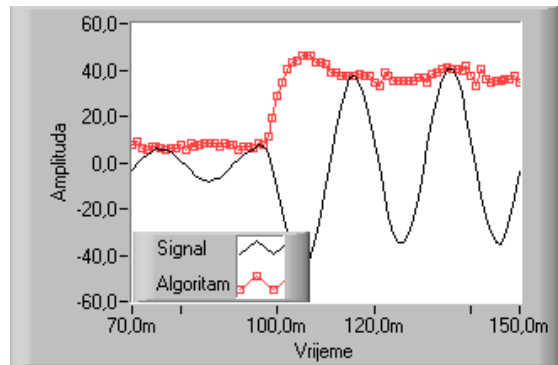
Slika 17-40 Algoritam s prvom i drugom derivacijom



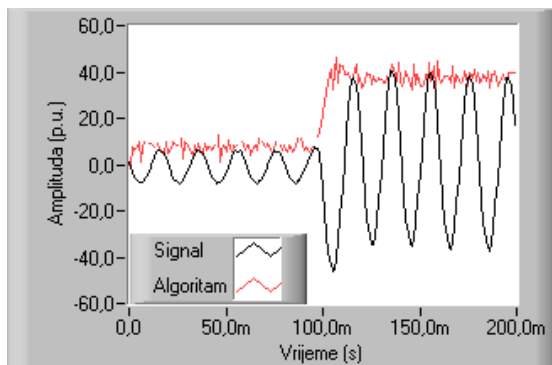
Slika 17-41 Algoritam s prvom i drugom derivacijom



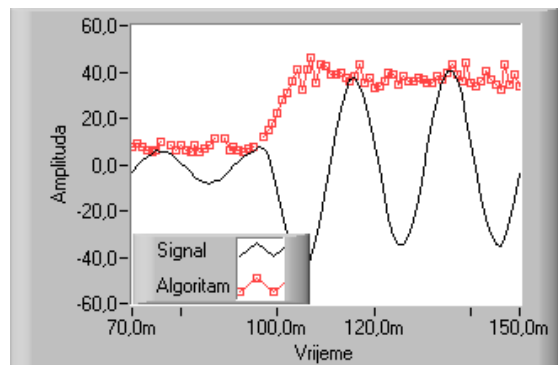
Slika 17-42 Algoritam s dva uzorka bez derivacije



Slika 17-43 Algoritam s dva uzorka bez derivacije



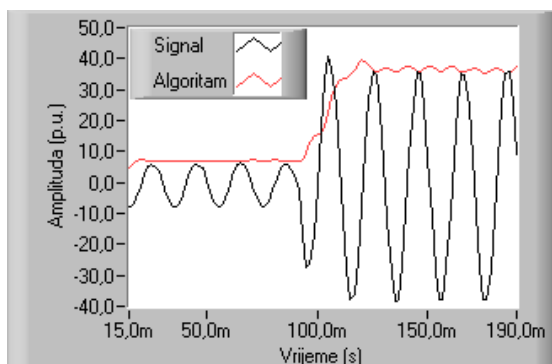
Slika 17-44 Algoritam s tri uzorka bez derivacije



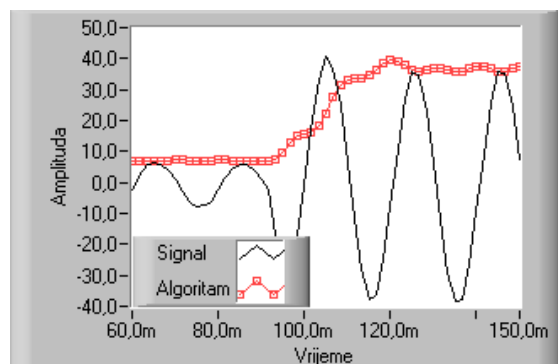
Slika 17-45 Algoritam s tri uzorka bez derivacije

Valja naglasiti kako sada nema velikih šiljaka kao kod simulacije kratkog spoja. Razlog je taj što je ovaj kratki spoj ipak nešto blaži nego onaj u simulaciji (di/dt je sporiji). Također se vidi osjetljivost algoritma na harmonike koji se nalaze u signalu (sve do jedanaestog), a nisu bili filtrirani jer nije korišten niskopropusni analogni filter.

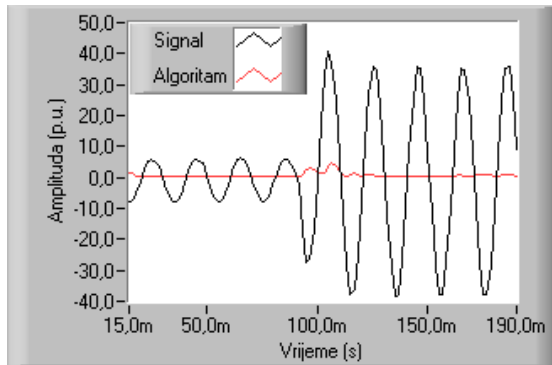
17.2.2 Fourierovi algoritmi



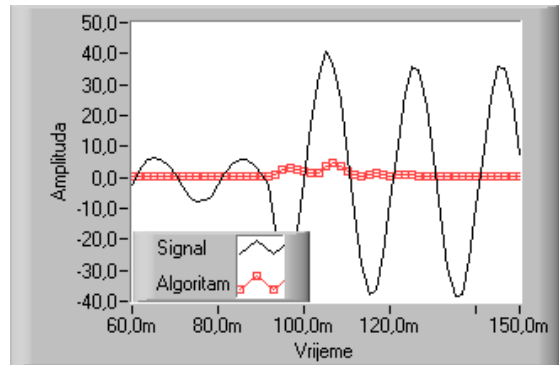
Slika 17-46 Fourierov red s cijelim periodom



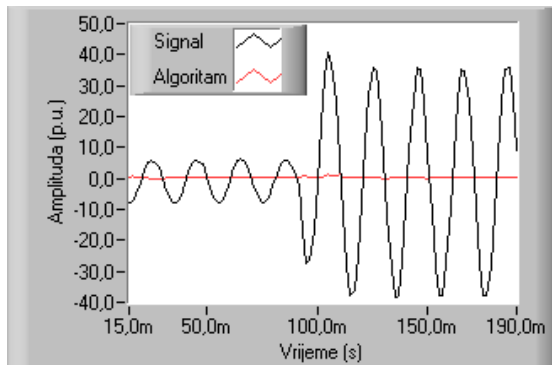
Slika 17-47 Fourierov red s cijelim periodom



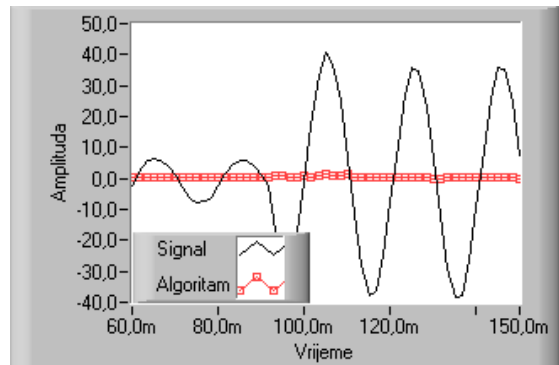
Slika 17-48 Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom



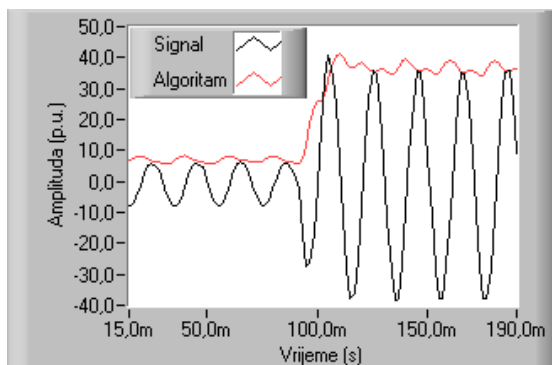
Slika 17-49 Fourierov red samo treći harmonik s cijelim periodom



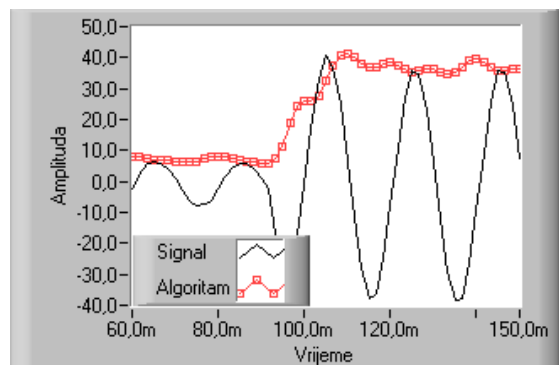
Slika 17-50 Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom



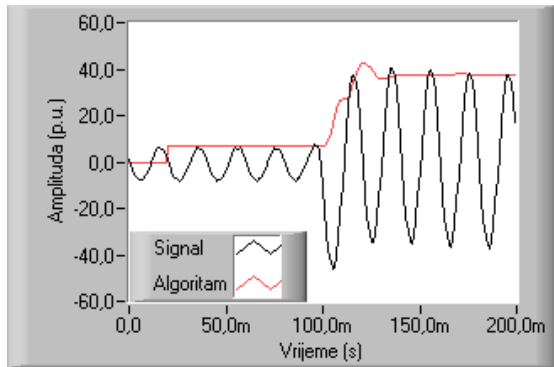
Slika 17-51 Fourierov red samo peti harmonik s cijelim periodom



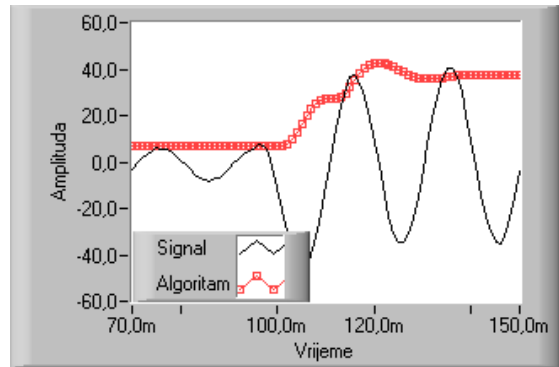
Slika 17-52 Fourierov red s pola perioda



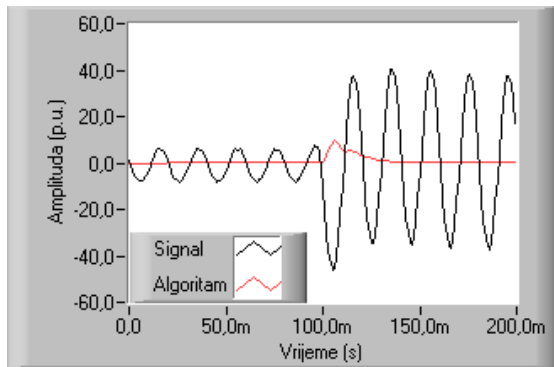
Slika 17-53 Fourierov red s pola perioda



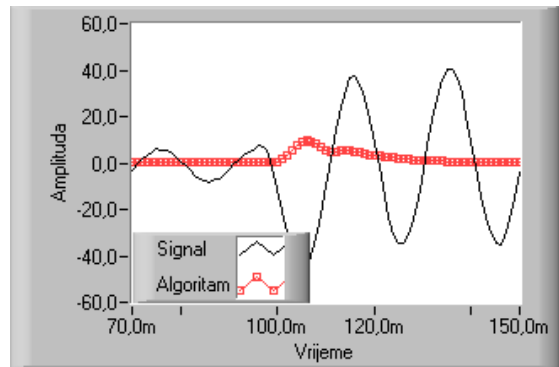
Slika 17-54 FFT algoritam



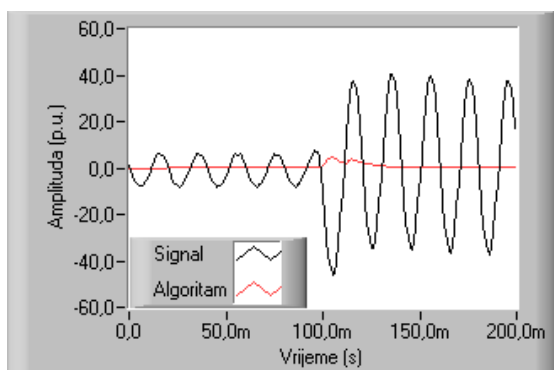
Slika 17-55 FFT algoritam



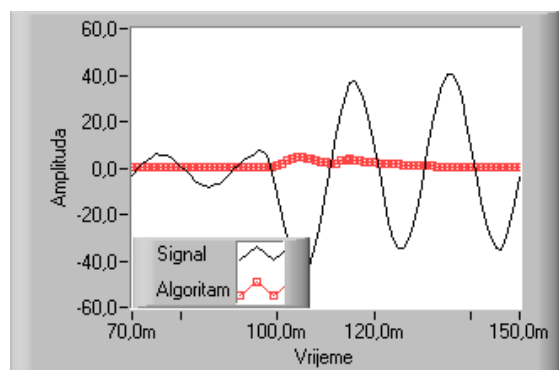
Slika 17-56 FFT algoritam samo drugi harmonik



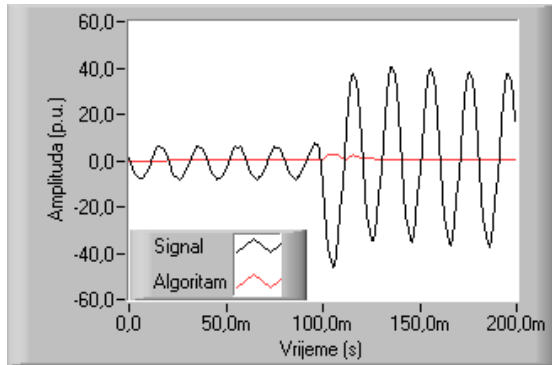
Slika 17-57 FFT algoritam samo drugi harmonik



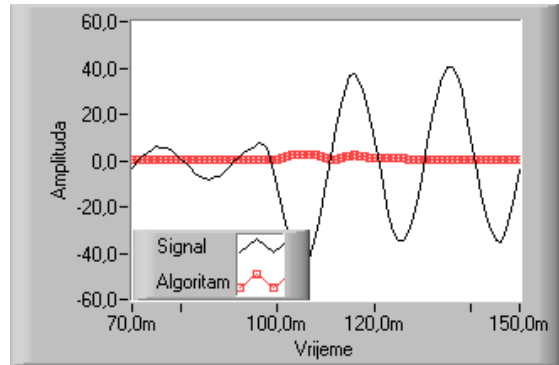
Slika 17-58 FFT algoritam samo treći harmonik



Slika 17-59 FFT algoritam samo treći harmonik

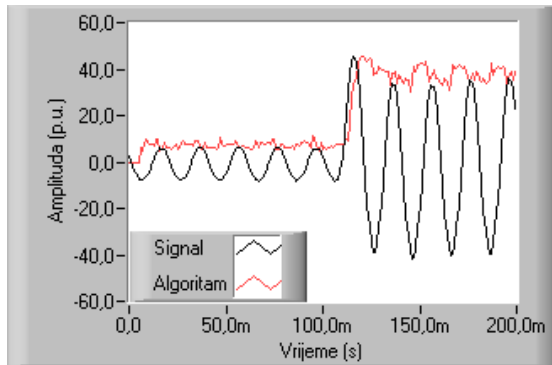


Slika 17-60 FFT algoritam samo peti harmonik

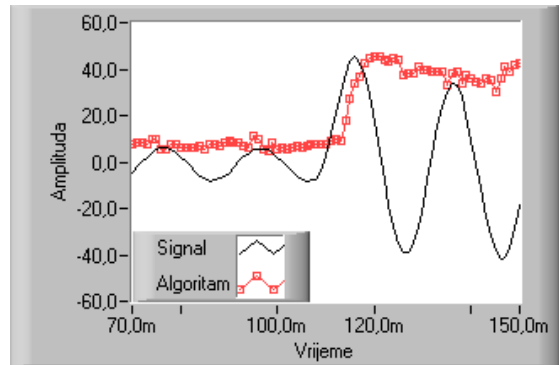


Slika 17-61 FFT algoritam samo peti harmonik

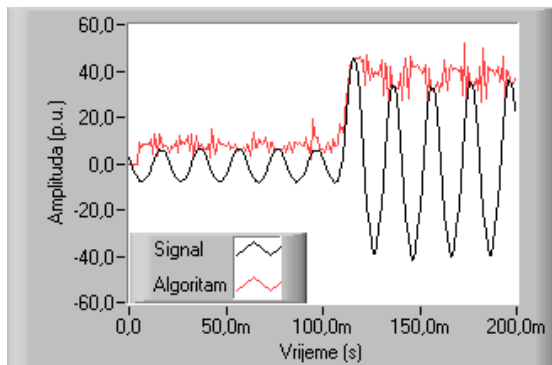
17.2.3 Algoritmi najmanjih kvadrata



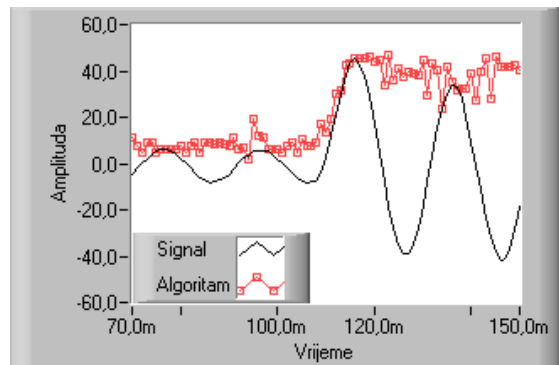
Slika 17-62 Algoritam s generalnim polinomskim oblikom



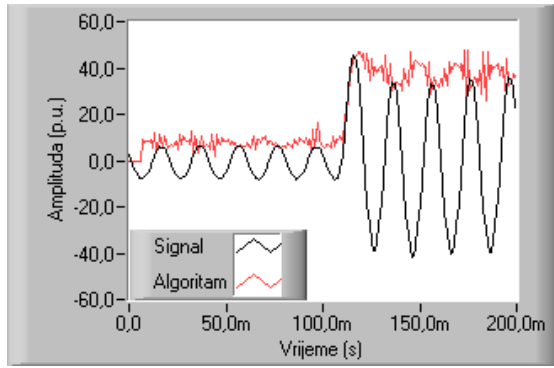
Slika 17-63 Algoritam s generalnim polinomskim oblikom



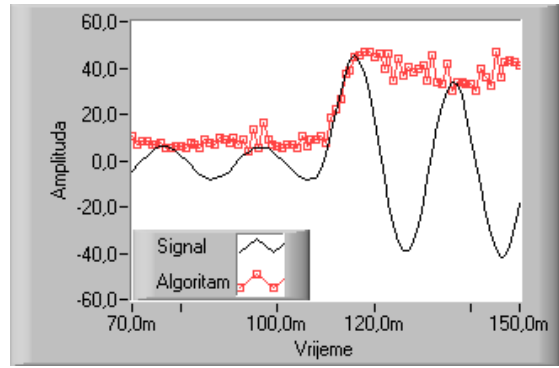
Slika 17-64 LSQ 1, 3 algoritam s više varijabli



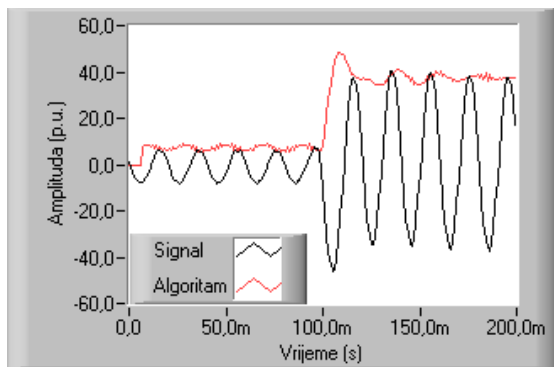
Slika 17-65 LSQ 1, 3 algoritam s više varijabli



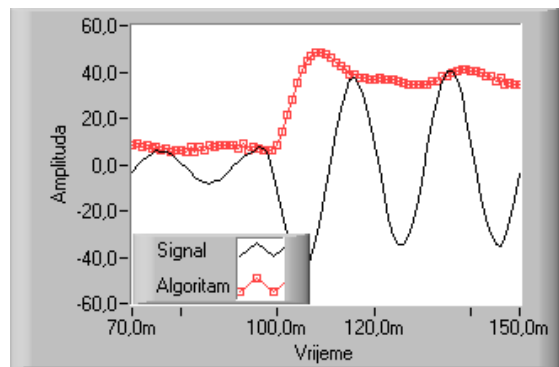
Slika 17-66 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli



Slika 17-67 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli



Slika 17-68 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli



Slika 17-69 LSQ 1, 3, 5 algoritam s više varijabli

18 ZAKLJUČAK

Uz brojne kvarove koji se javljaju u elektroenergetskom sustavu, najčešći su kratki spojevi. Oni su ujedno i najopasniji, pa je stoga u ovom magistarskom radu pri ispitivanju rada pojedinih algoritama korišten simulirani i stvarni signal struje kratkog spoja, koji ima karakteristiku da u vrlo kratkom vremenu promijeni svoju amplitudu od nazivne pa do amplitude kratkog spoja, a ona je i do nekoliko desetaka puta veća od nazivne struje. Kada se govori o kratkom vremenu misli se na svega nekoliko milisekundi, a moguće je i vrijeme nešto manje od jedne milisekunde.

Digitalni algoritmi koji su izvedeni i ispitani u magistarskom radu imaju svoje prednosti i mane jedni u odnosu na druge. Svaki od njih je bolji u jednom području, ali lošiji u drugom. Tako se pokazalo da sinusni algoritmi mogu brzo predvidjeti kolika će biti amplituda kratkog spoja, znatno prije nego se ona javi, i to u svega nekoliko milisekundi (jednu, dvije ili manje, ovisno o frekvenciji uzimanja uzoraka). Problem kod njih je što su izrazito osjetljivi na harmonike koji se mogu javiti u signalu, a većina ih je osjetljiva i na istosmjerne komponente u signalu. Također su osjetljivi i na naglu promjenu amplitude signala, u kojem se slučaju javljaju šiljci. Jedno od rješenja je korištenje niskopropusnih analognih filtera, koji ne propuštaju frekvencije iznad 50 Hz, ili korištenje tih algoritama u distribucijskim sistemima gdje valni oblici vrlo brzo poprime sinusni oblik nakon kvara. Što se tiče šiljaka to se lako rješava tako da algoritam zanemari tu točku i koristi drugu izmjerenu umjesto nje.

Fourierovi algoritmi su bolji od sinusnih u smislu osjetljivosti na harmonike i istosmjernu komponentu u signalu zbog toga jer su to zapravo digitalni filteri koji filtriraju sve harmonike osim onih koje se želi propustiti i koji se podese pri izvodu algoritma. Također je karakterističan lagani prijelaz, bez šiljaka, pri nagloj promjeni amplitude signala koji se mjeri. Posljedica takvog prijelaza je da se točna amplituda kvara može dobiti tek nakon što prođe cijeli period signala, što je u slučaju elektroenergetskog sustava 50 Hz, odnosno 20 ms. Dakle, oni su znatno sporiji od sinusnih algoritama. Zbog toga je razvijen algoritam koji koristi pola perioda signala i njemu je potrebno samo 10 ms da izmjeri maksimalnu amplitudu kratkog spoja, no njegova je pak mana da je osjetljiv na parne harmonike. Problem koji se javlja zbog laganog prijelaza i nije tako strašan, osobito ako nastupe velike struje kratkog spoja, jer će tada algoritam mnogo prije izračunati vrijednost struje koja je jednaka prorađnoj vrijednosti releja, a koja je manja od amplitude kratkog spoja koji je upravo nastupio.

Glavni problem kod algoritama najmanjih kvadrata je taj što se što točnije mora matematički modelirati signal koji će se javiti i zatim obrađivati pomoću algoritma. Ako se algoritam matematički modelira tako da se izostave pojedine komponente signala koje se javljaju, tada se pri izračunu amplitude signala javljaju šiljci kao i kod sinusnih algoritama. Ako se signal, koji u sebi ima harmonike za koje se zna da će se javiti, modelira točno, broj računskih operacija je to veći što signal ima više harmonika i algoritam postaje sve veće opterećenje za računalo zbog velikog broja računskih operacija. Da se smanji broj računskih operacija, a poveća točnost algoritma, valja ugraditi analogni niskopropusni filter koji propušta sve frekvencije signala do neke granične frekvencije koja je jednaka najvećem harmoniku modeliranom u samom algoritmu. Prednost ovih algoritama je da se oni, ako su dobro modelirani, ponašaju kao digitalni filteri i znatno brže dođu do vrijednosti

amplitude kvara nego Fourierovi algoritmi. Mana im je velik broj računskih operacija [L36].

Algoritmi koji rade na principu modela štíćenog elementa daju upravo onakvu sliku impedancije na štíćenom elementu kakvu taj relej registrira. No problem je taj da, na primjer, vod koji se štiti distantnom zaštitom ima izračunatu vrijednost impedancije za nazivni napon i struju koji imaju čisti sinusni oblik. Stoga, ako se jave neki harmonici relej ima krivu sliku o vodu. Iz tog razlog iz signala koji se mjeri na vodu treba izvući osnovne komponente napona i struje koji se uspoređuju s nazivnima. To se također može postići pomoću niskopropusnih analognih filtera. Umjesto njih se može razviti i algoritam koji digitalno filtrira signal, kao što je algoritam s integriranjem diferencijalne jednadžbe voda. Ako se pak želi prava slika impedancije, potreban je samo analogni niskopropusni filter koji sprječava «aliasing», a propušta harmonike signala.

Algoritmi su ispitani da li rade u realnom vremenu pri normalnom signalu i pri signalima stvarnih kratkih spojeva, koji su realizirani u Laboratoriju za električna postrojenja FER-a. To je više bio test sklopovlja nego samih algoritama, koji je završio uspješno, odnosno, pokazalo se da je moguć rad u realnom vremenu. Budući tehnologija, a time i izrada sklopovlja, napreduje sve većom brzinom i iz godine u godinu su sve manje cijene, već je danas moguće za relativno mala sredstva, u odnosu na gotove digitalne zaštitne releje renomiranih proizvođača, i u kratkom vremenu, što omogućuju programski paketi kao LabVIEW™, u laboratorijskim uvjetima konstruirati digitalni zaštitni uređaj. Pri tome su, od sklopovlja, potrebani ulazni transformatori, štampana pločica koja na sebi ima sklopovlje za podešenje i prilagodbu signala, te druga štampana pločica koja na sebi ima krugove za uzimanje uzoraka i procesor koji omogućuje rad u realnom vremenu. Za kraj, potrebno je izraditi programsku podršku, čiji su glavni dio gore navedeni algoritmi. Ova programska podrška se izrađuje na osobnom računalu, te se nakon provjere pohrani u memoriju opisanog DSP sklopovlja.

U sklopu ovog rada izrađeni su: ulazni regulacijski transformator, sklopovlje za prihvata, prilagodbu i uzimanje uzoraka signala iz elektroenergetskog sustava, te programska podrška za obradu signala u realnom vremenu, programske podrške za pojedine algoritme, te program za simulaciju pomoću kojeg se ispituju obrađeni algoritmi.

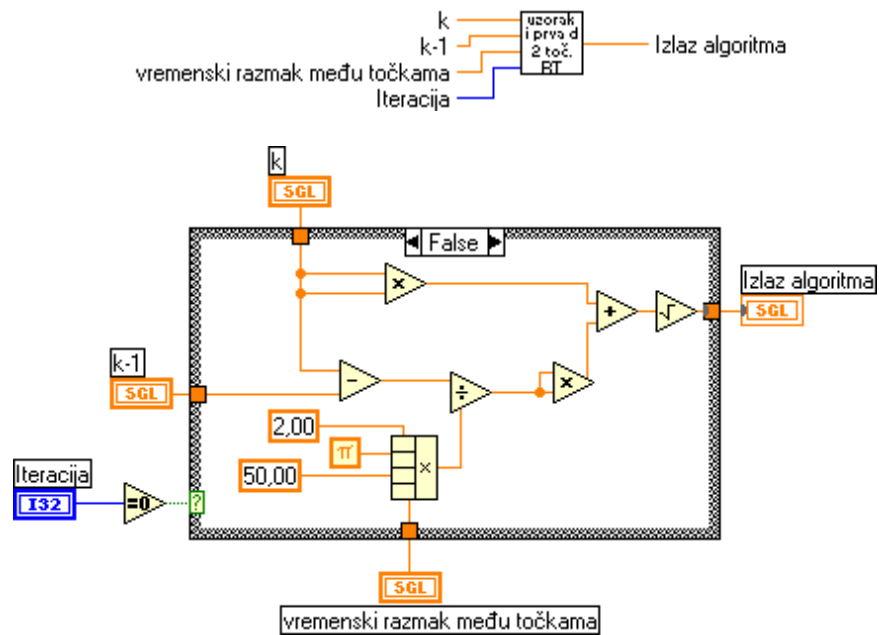
POPIS LITERATURE

1. The Electricity Training Association: Power system protection, vol. 1, IEE, 1995
2. Jeffrey Travis: LabView for everyone, Prentice Hall PTR, 2002
3. Bruce Mihura: LabView for data acquisition, Prentice Hall PTR, 2001
4. National Instruments application note 007: Data acquisition fundamentals, 1996
5. M. L. Chugani, A. R. Samant, M. Cerna: LabView signal processing, Prentice Hall PTR, 1998
6. C. D. McGillem, G. R. Cooper: Continuous and discrete signal and system analysis, Holt, Rinehart and Winston, 1974
7. A. T. Johns, S. K. Salman: Digital protection for power systems, IEE, 1995
8. Hrvoje Požar. Visokonaponska rasklopna postrojenja, Tehnička knjiga Zagreb, 1963
9. National Instruments application note 048: Signal conditioning fundamentals for computer-based measurement systems, 2001
10. Gary W. Johnson: LabView graphical programming, McGraw-Hill, 1997
11. I. M. Khabaza: Numerical analysis, Pergamon press, 1965
12. Ivan Ivanšić: Numerička matematika, Element, 1998
13. Robert H. Bishop: Learning with LabView, Addison-Wesley, 1999
14. A. F. Harvey, M. Cerna: The fundamentals of FFT-based signal analysis and measurement in LabView and LabWindows, National Instruments application note 041, 1993
15. National Instruments: Measurements manual, National Instruments, part number 322661A-01, 2000
16. Murray R. Spiegel: Schaum's outline series theory and problems of advanced mathematics for engineers & scientists, McGraw-Hill, 1971
17. Murray R. Spiegel: Schaum's outline series theory and problems of advanced calculus, McGraw-Hill, 1963
18. Jeffrey Y. Beyon: Hands-on manual for LabView programming, data acquisition and analysis, Prentice Hall PTR, 2001
19. Jeffrey Y. Beyon: LabView programming, data acquisition and analysis, Prentice Hall PTR, 2001

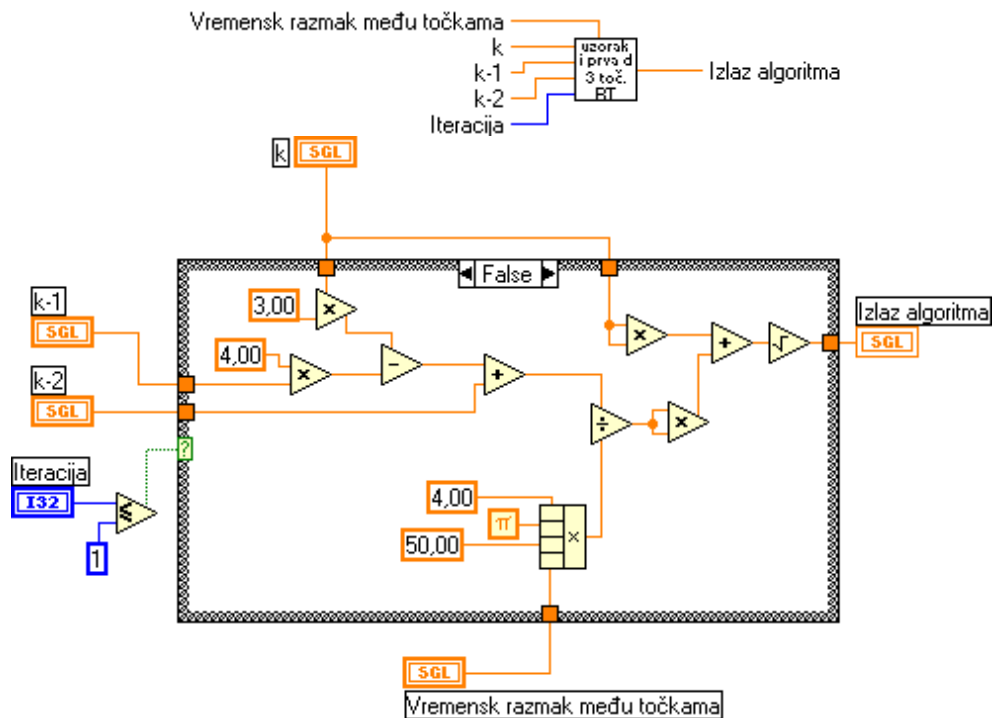
20. National Instruments: LabView user manual, National Instruments, part number 320999C-01, 2000
21. National Instruments: Function and VI reference manual, National Instruments, part number 321526B-01
22. D. Koenig: Digital signal processing fundamentals, National Instruments application note 023, 1995
23. A. A. Girgis: Application of Kalman filtering in computer relaying of power systems, dissertation, Iowa state university, 1981
24. Viktor Pinter: Osnove elektrotehnike, knjiga druga, Tehnička knjiga Zagreb, 1987
25. Viktor Pinter: Osnove elektrotehnike, knjiga prva, Tehnička knjiga Zagreb, 1989
26. D. Koenig: Digital signal processing hardware, National Instruments application note 024, 1992
27. J. Makino, Y. Miki: Study of operating principles and digital filters for protective relays with digital computers, IEEE PES Winter Power Meeting, New York, 75CHO990-2 PWR, Paper C75, 197-9, pp. 1-8
28. P. G. McLaren, M. A. Redfern: Fourier-series techniques applied to distance protection, Proc. IEE, 1975, 122, pp. 1301-1305
29. M. S. Sachdev, M. A. Baribeau: A new algorithm for digital impedance relays, IEEE Trans., PAS-98, 1979, pp. 2232-2240
30. A. M. Ranjbar, B. J. Cory: Algorithm for distance protection, Developments in power system protection, IEE Conf. Publ. 125, London, 1975, pp. 276-283
31. Syed Jaffar Shah: Field wiring and noise considerations for analog signals, National Instruments application note 025, 2001
32. Končar: Tehnički priručnik, peto izdanje, Končar elektroindustrija d.d., 1991
33. National Instruments: G programming reference manual, National Instruments, part number 321296B-01, 1998
34. National Instruments: Development guidelines, National Instruments, part number 321393C-01, 2000
35. Ante Marušić: Predavanja iz predmeta relejna zaštita, FER Zagreb, šk.god. 1996/97
36. Janez Gorišek: Mikroračunalnik v aplikaciji zaštite, Magistarski rad, Univerza v Mariboru Visoka tehniška šola vto elektrotehnika, 1984

37. Žarko Markov: Prenaponska zaštita u elektronici i telekomunikacijama, Tehnička knjiga, 1987
38. Nedžad Pašalić: Osnove regulacijske tehnike, FER Zagreb, 1989
39. D. Welbourne: Analog computing methods, Pergamon press, 1965
40. Hrvoje Požar: Proizvodnja električne energije, svezak 2, Sveučilište u Zagrebu, 1966
41. Ante Marušić: Analiza algoritama digitalne distantne zaštite visokonaponskih vodova, Magistarski rad, FER Zagreb, 1987

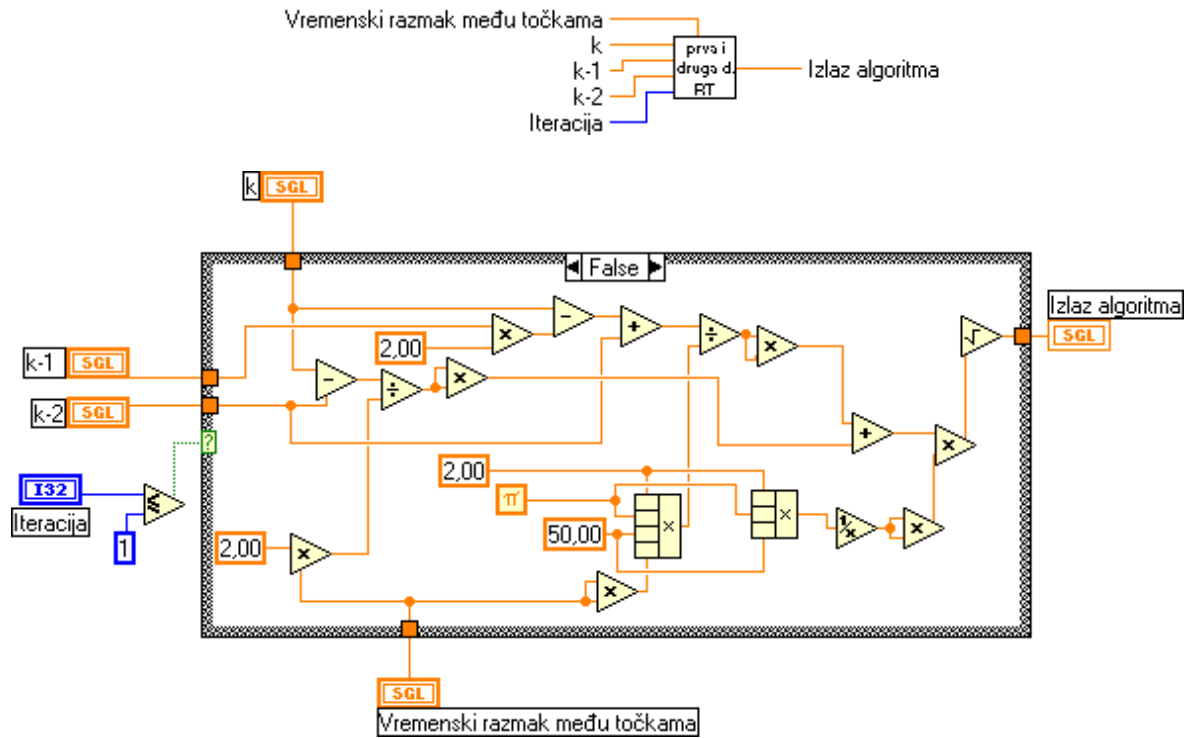
DODATAK



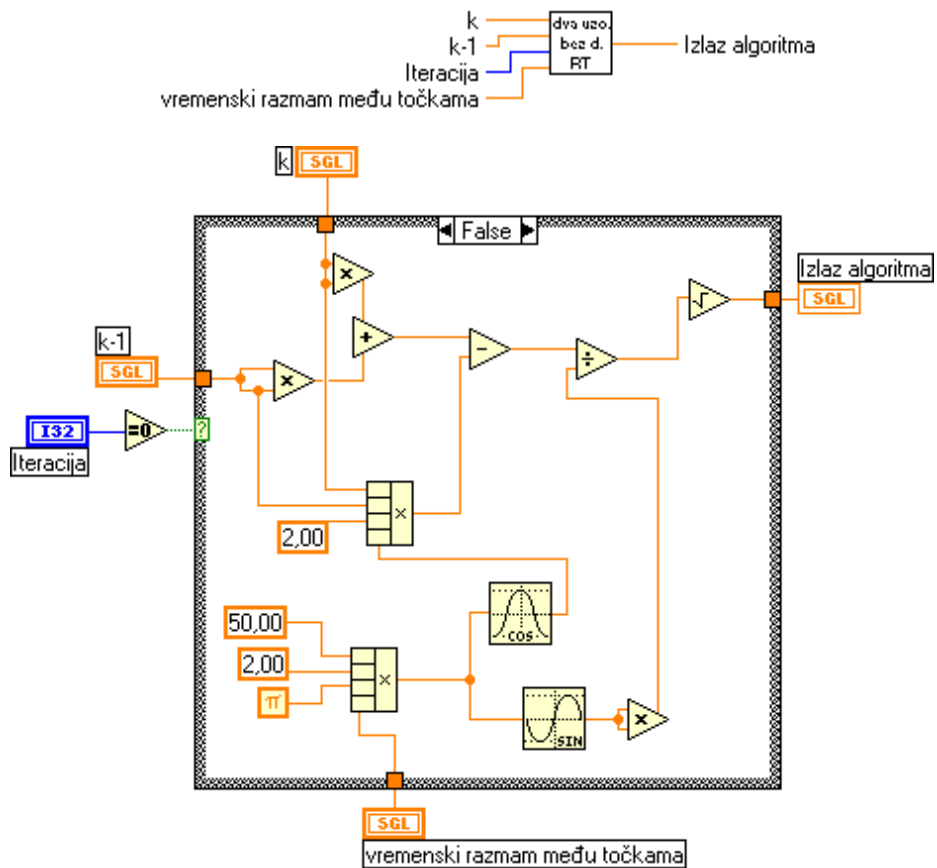
Blok dijagram algoritma s uzorkom i prvom derivacijom s dvije točke



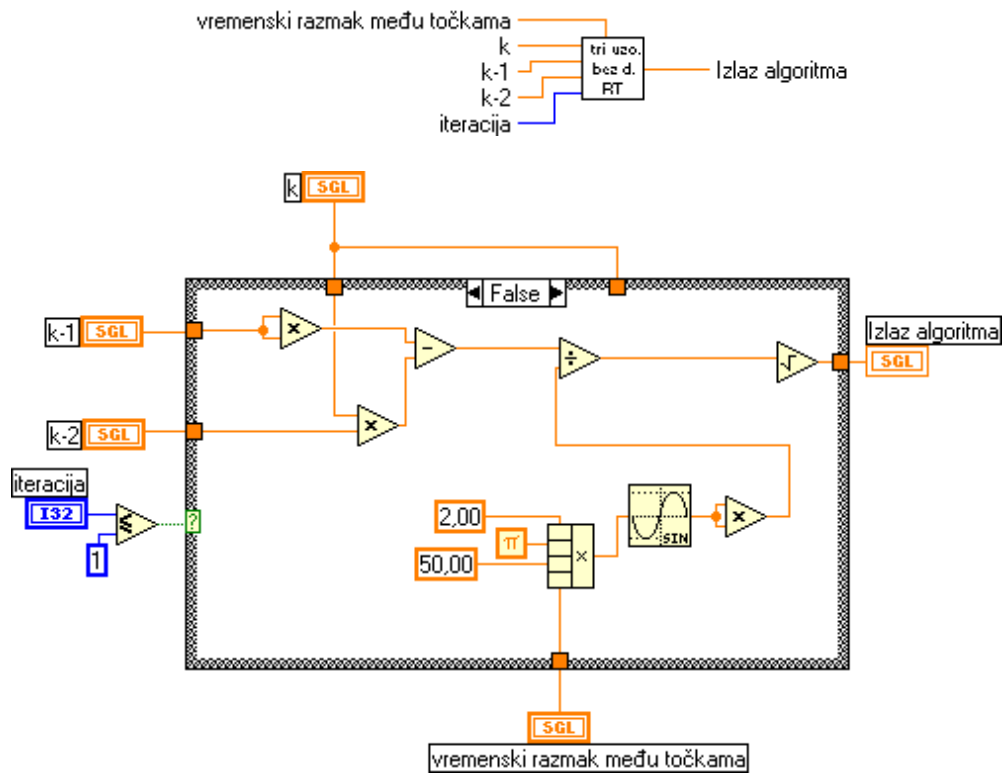
Blok dijagram algoritma s uzorkom i prvom derivacijom s tri točke



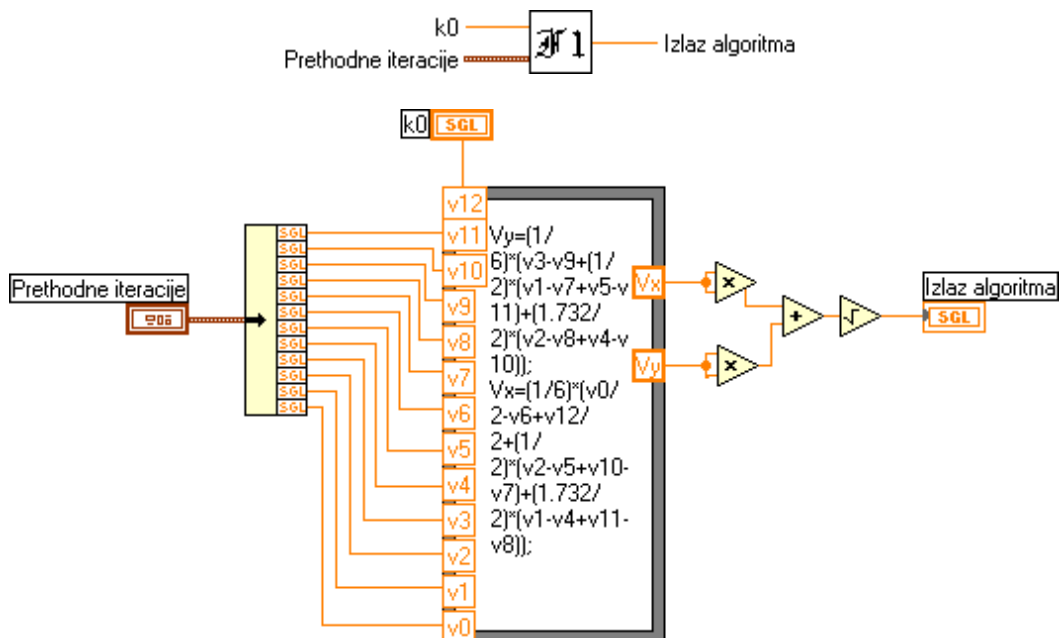
Blok dijagram algoritma s prvom i drugom derivacijom



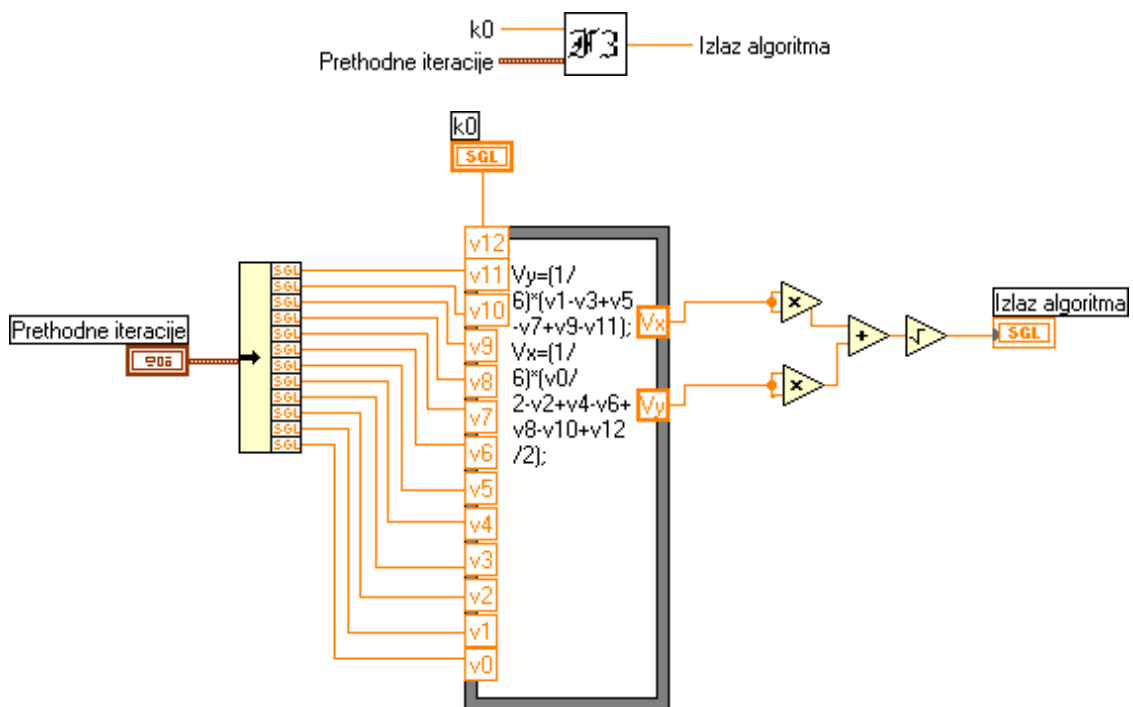
Blok dijagram algoritma s dva uzorka bez derivacije



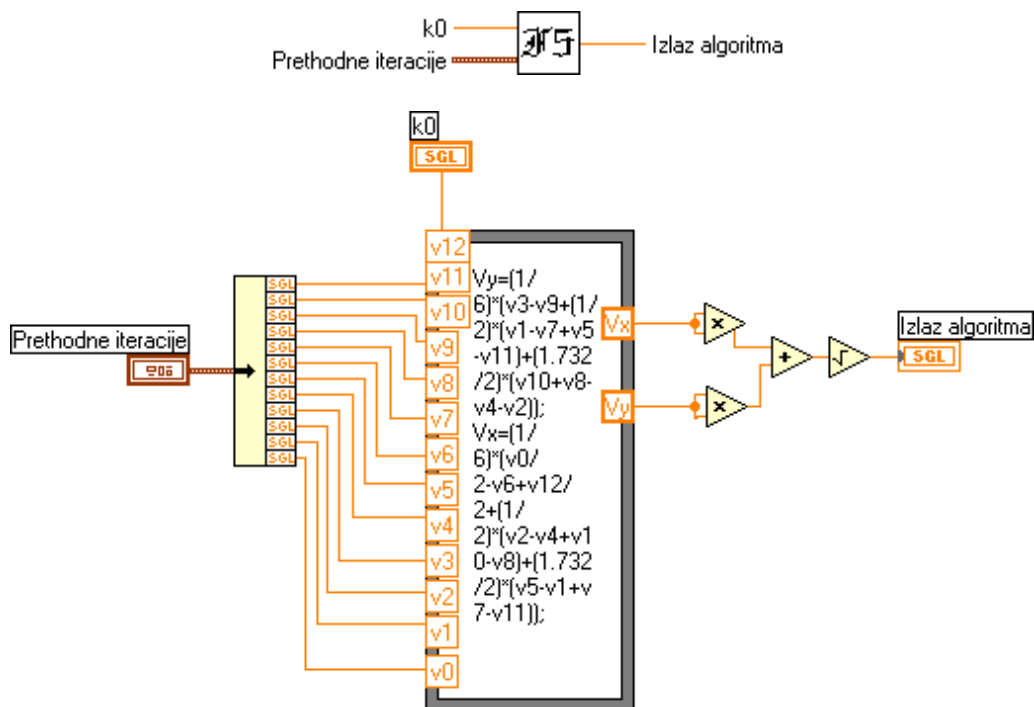
Blok dijagram algoritma s tri uzorka bez derivacije



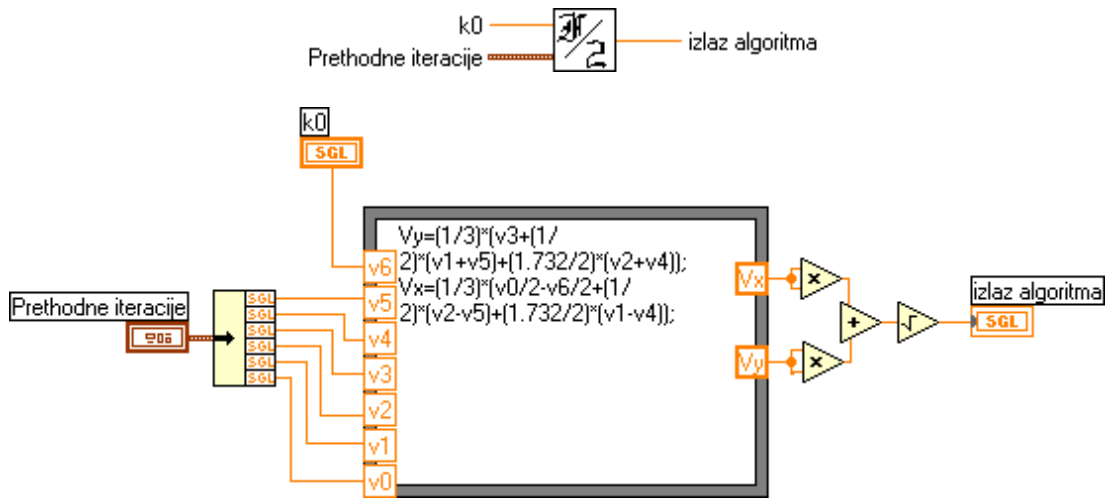
Blok dijagram algoritma s Fourierovim redom koji koristi cijeli period



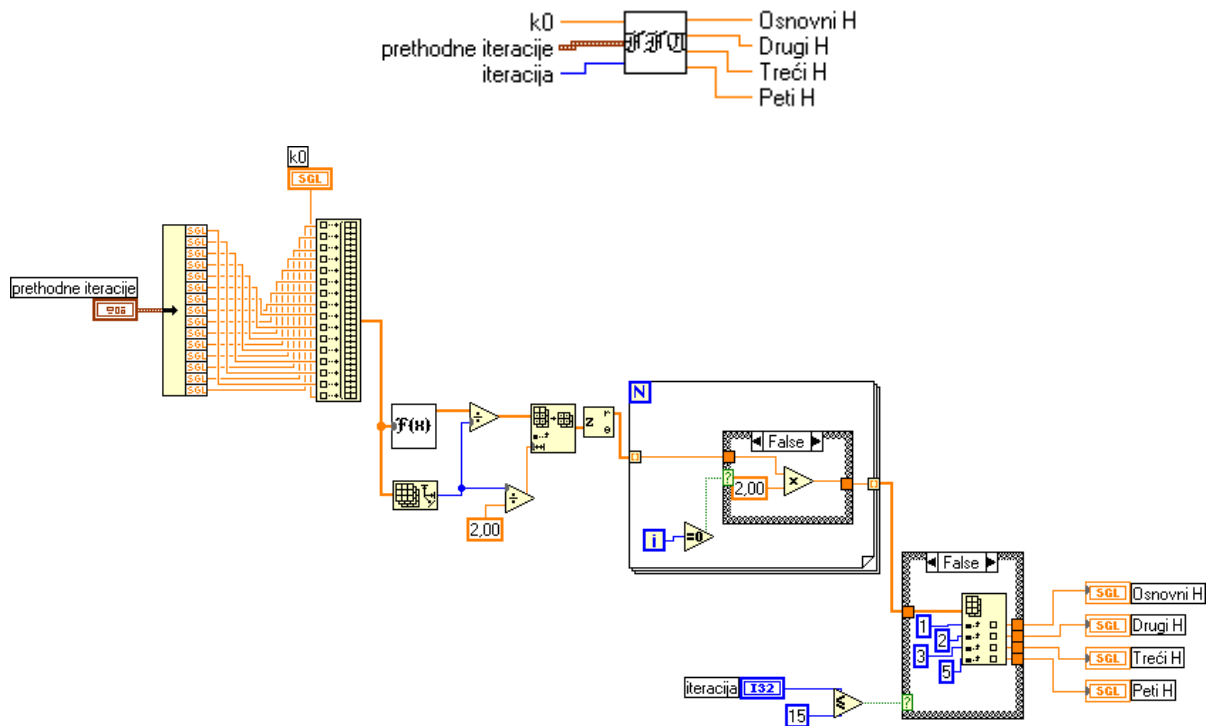
Blok dijagram algoritma s Fourierovim redom za treći harmonik koji koristi cijeli period



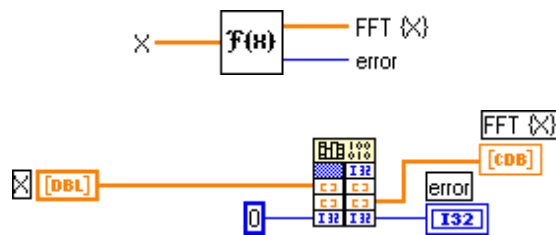
Blok dijagram algoritma s Fourierovim redom za peti harmonik koji koristi cijeli period



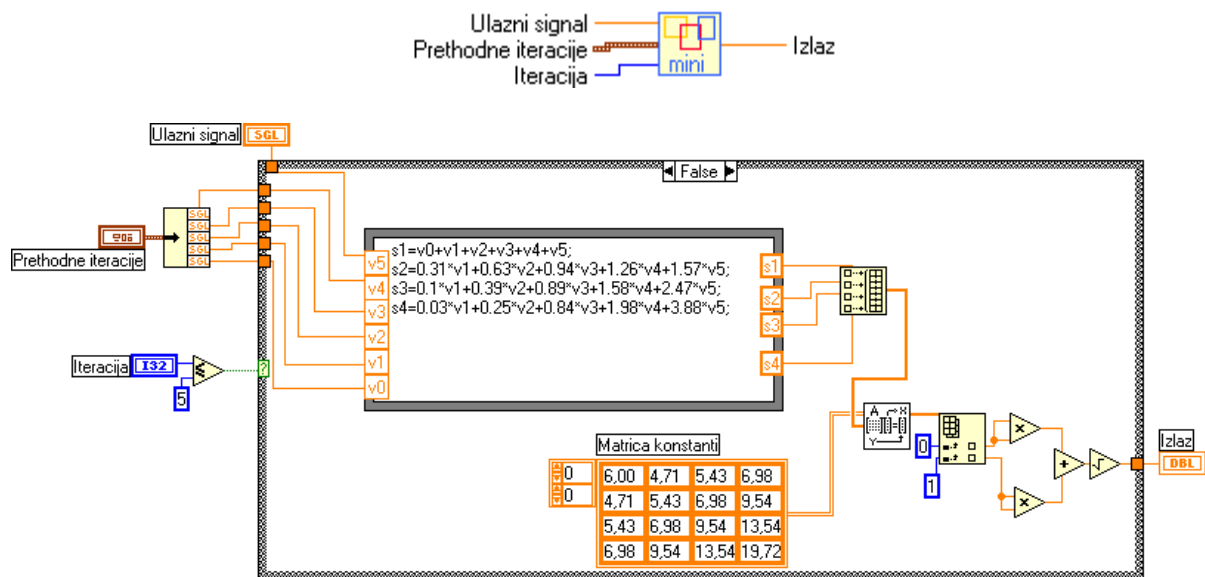
Blok dijagram algoritma s Fourierovim redom koji koristi pola perioda



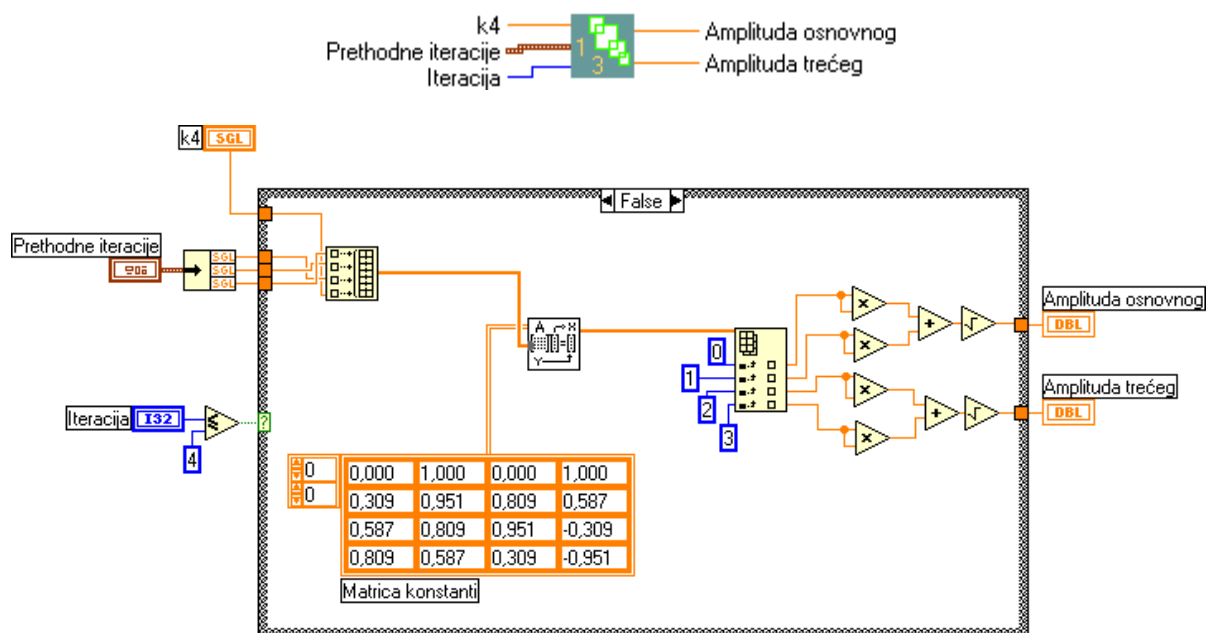
Blok dijagram FFT algoritma



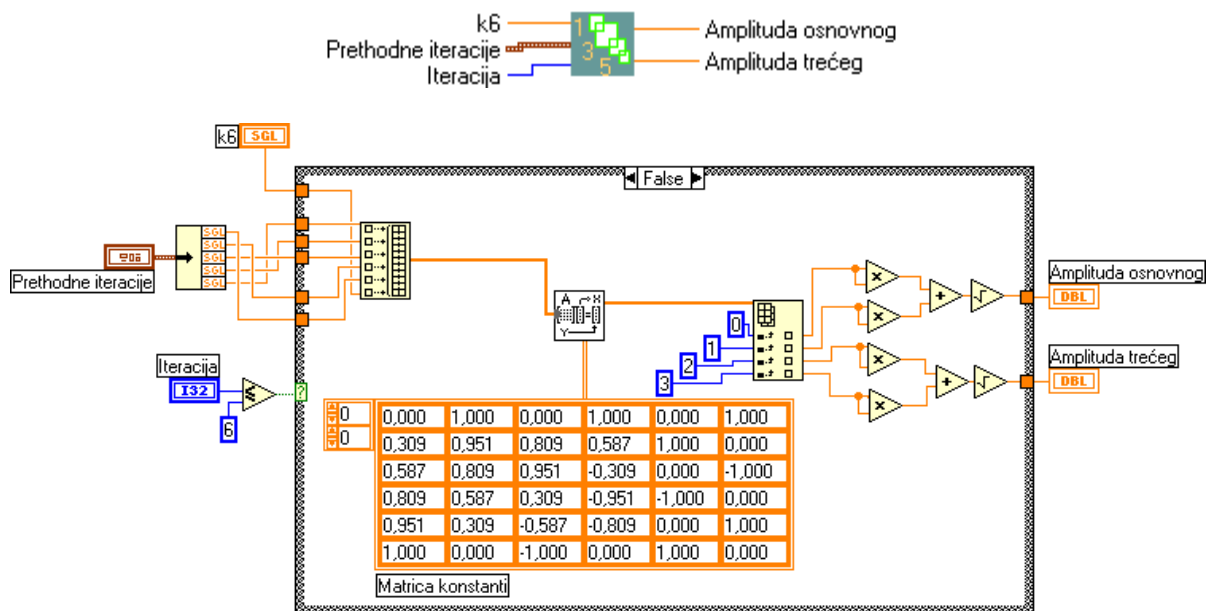
Blok dijagram brze Fourierove transformacije



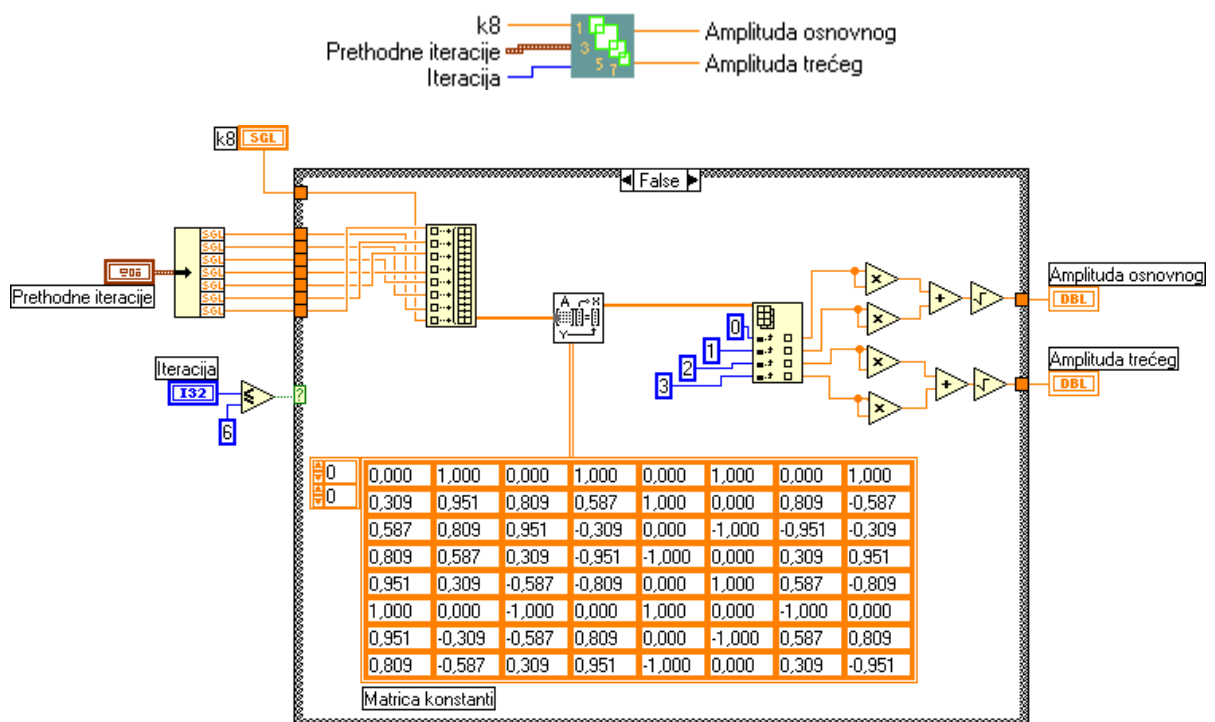
Blok dijagram algoritma najmanjih kvadrata s generalnim polinomskim oblikom



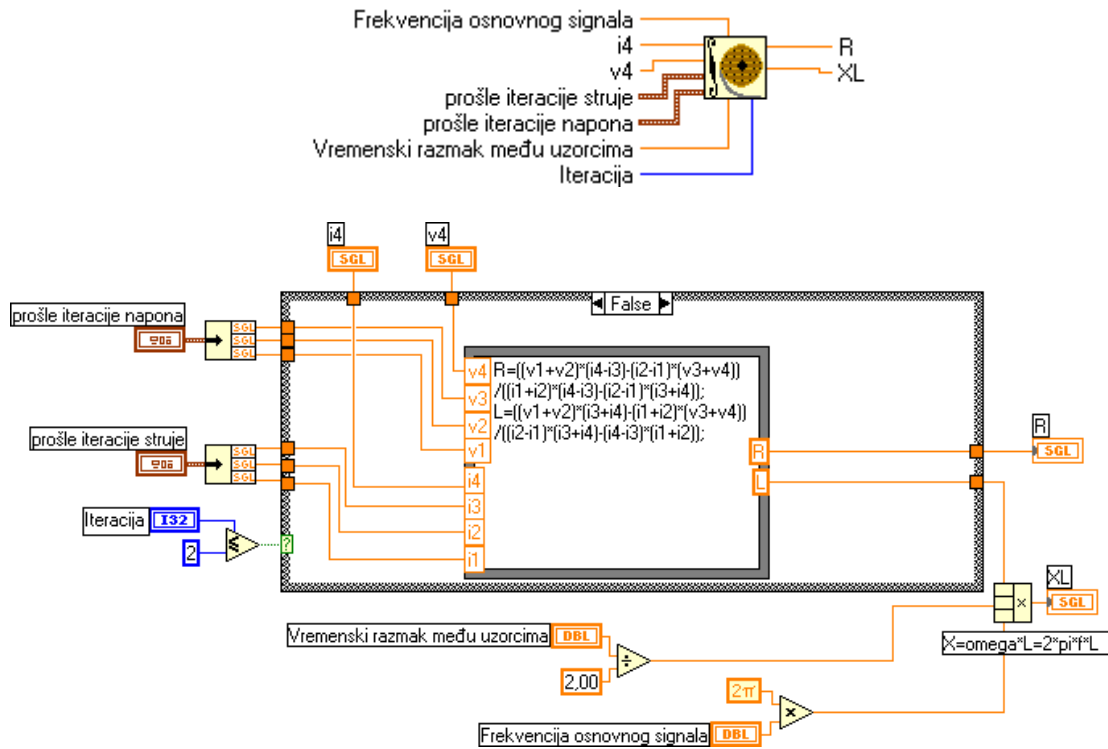
Blok dijagram LSQ 1, 3 algoritma s više varijabli



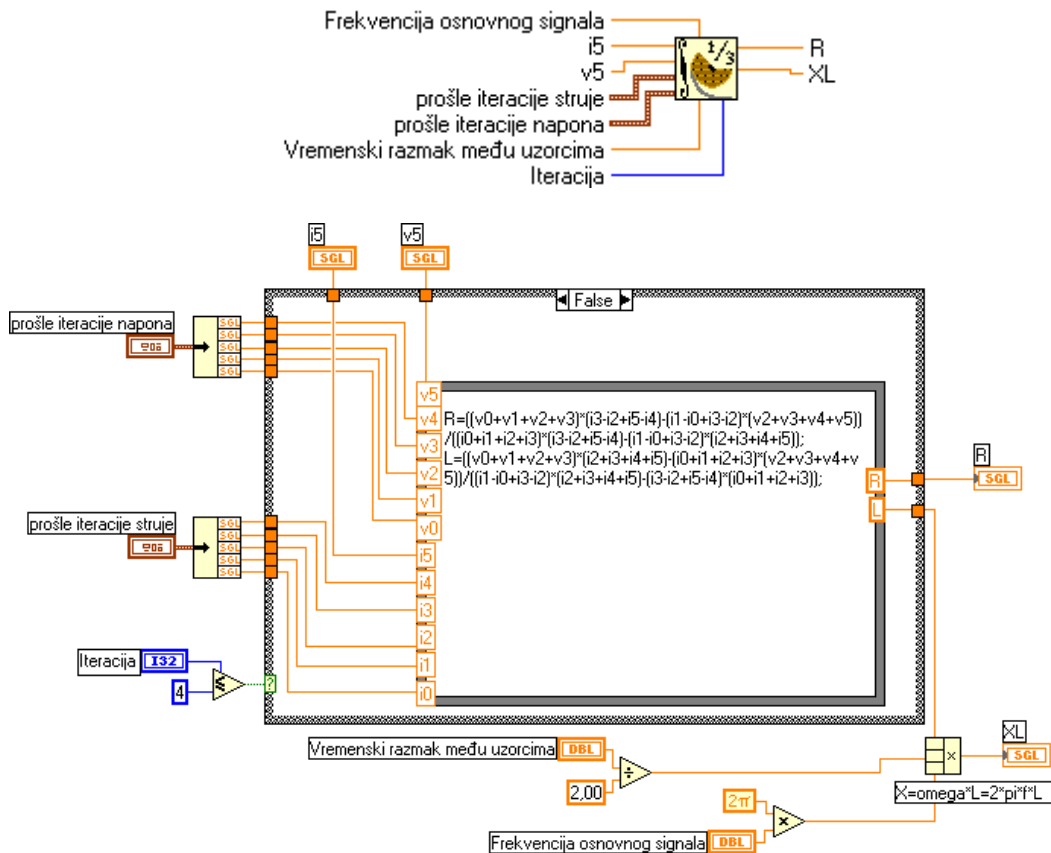
Blok dijagram LSQ 1, 3, 5 algoritma s više varijabli



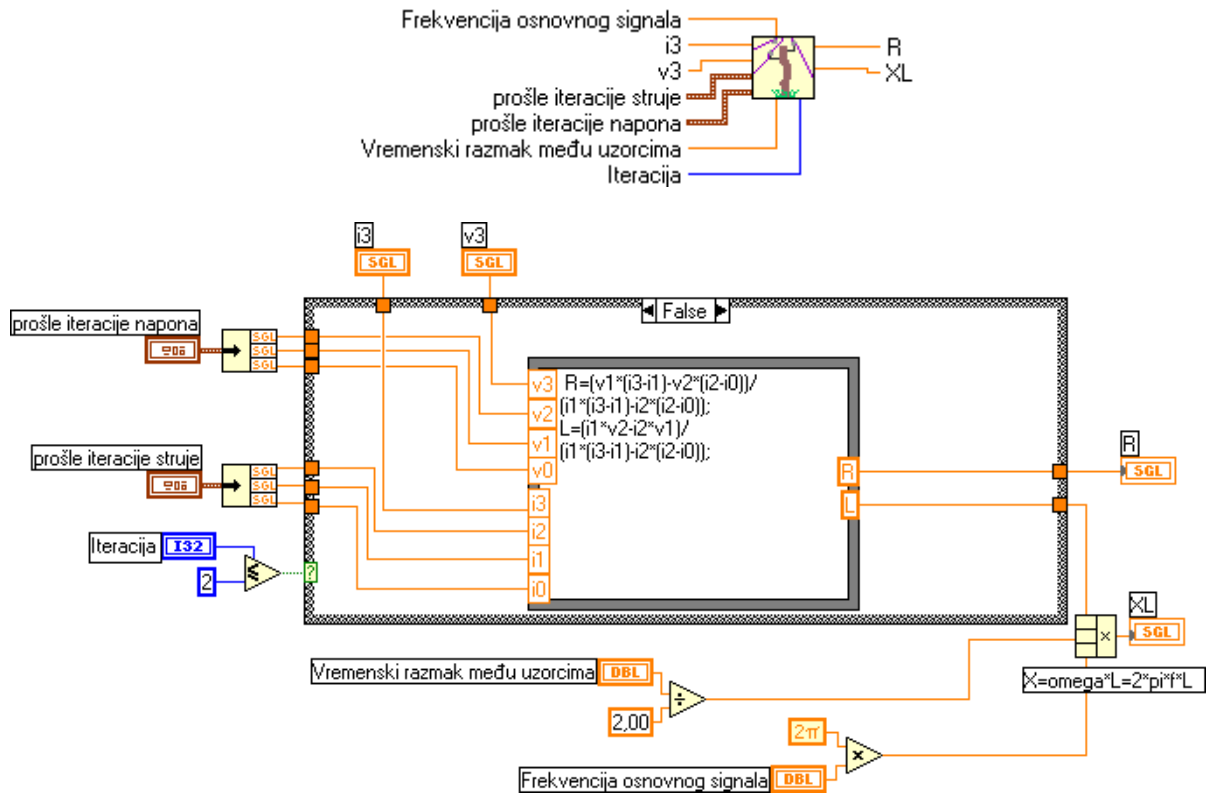
Blok dijagram LSQ 1, 3, 5, 7 algoritma s više varijabli



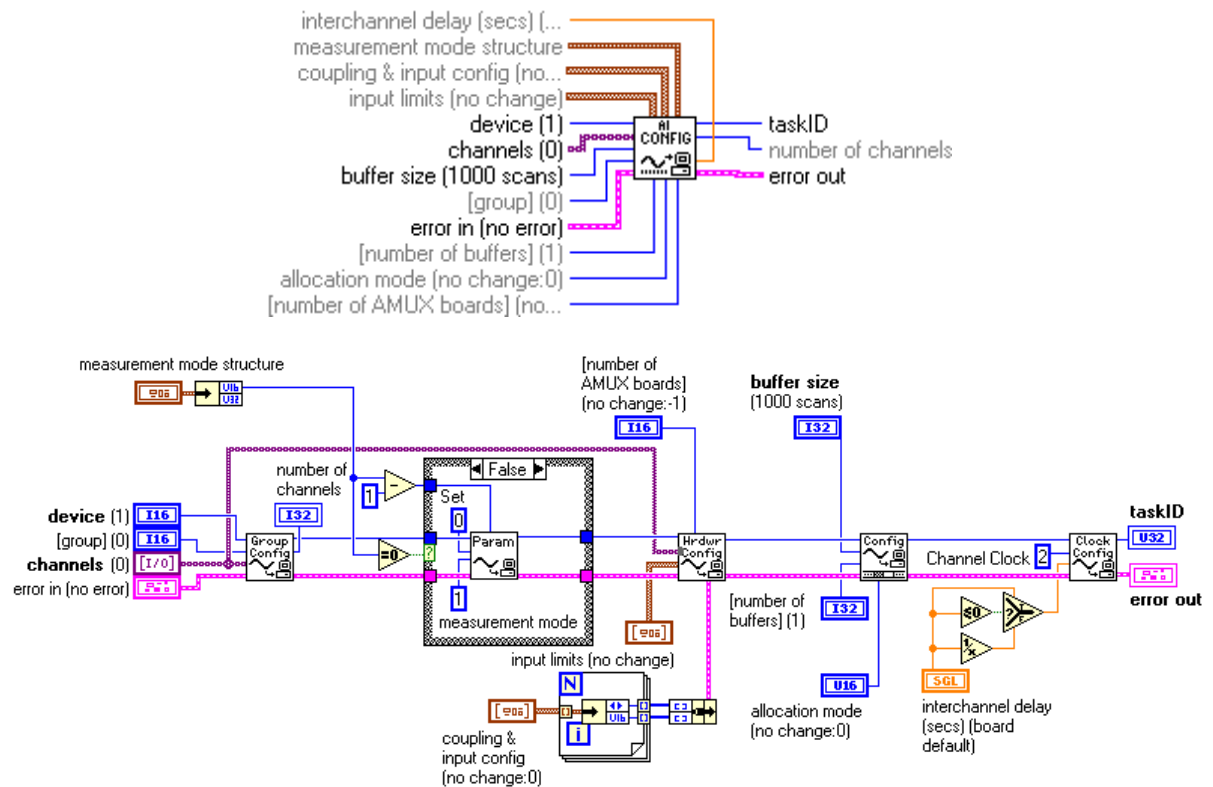
Blok dijagram algoritma s integriranjem diferencijalne jednadžbe voda



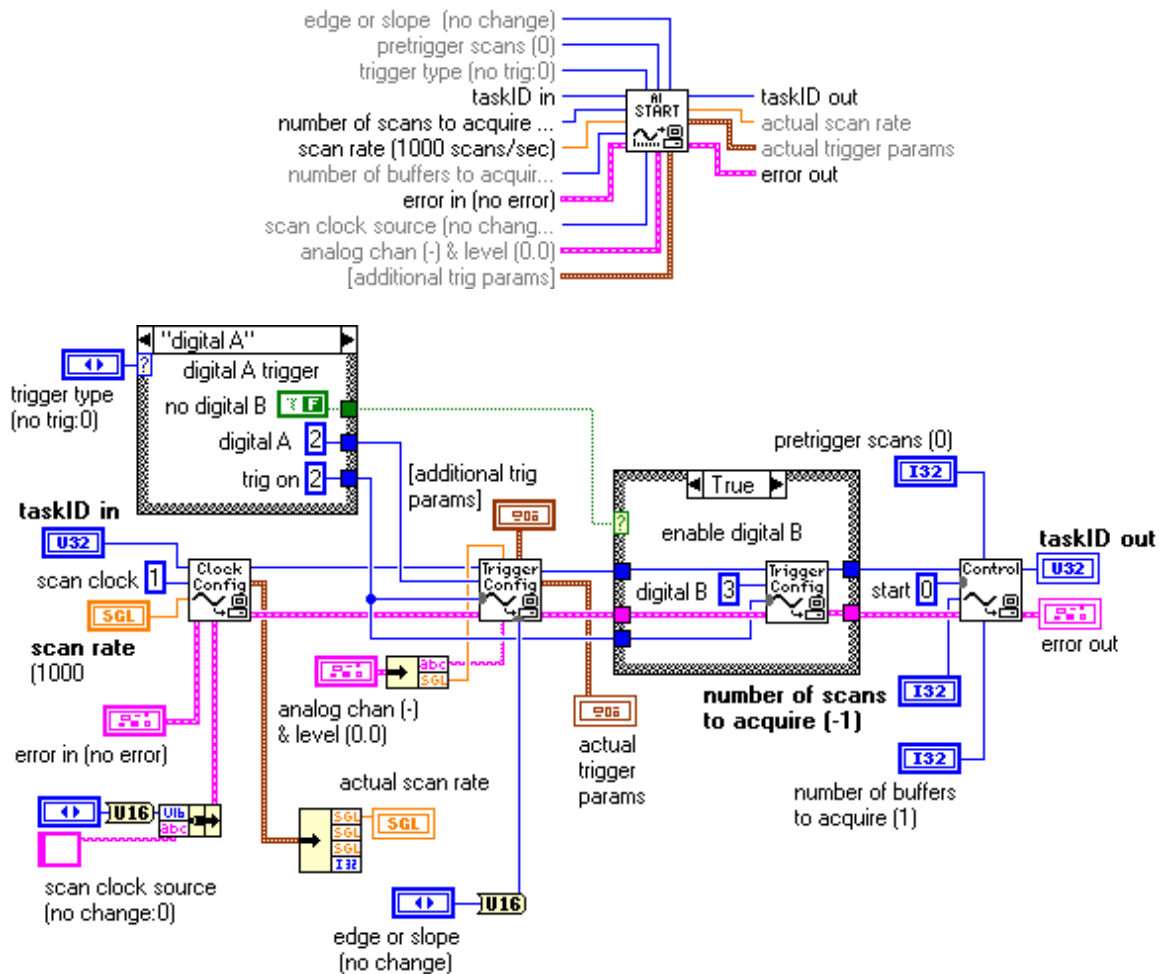
Blok dijagram algoritma s integriranjem diferencijalne jednadžbe voda s filtriranim trećim harmonikom



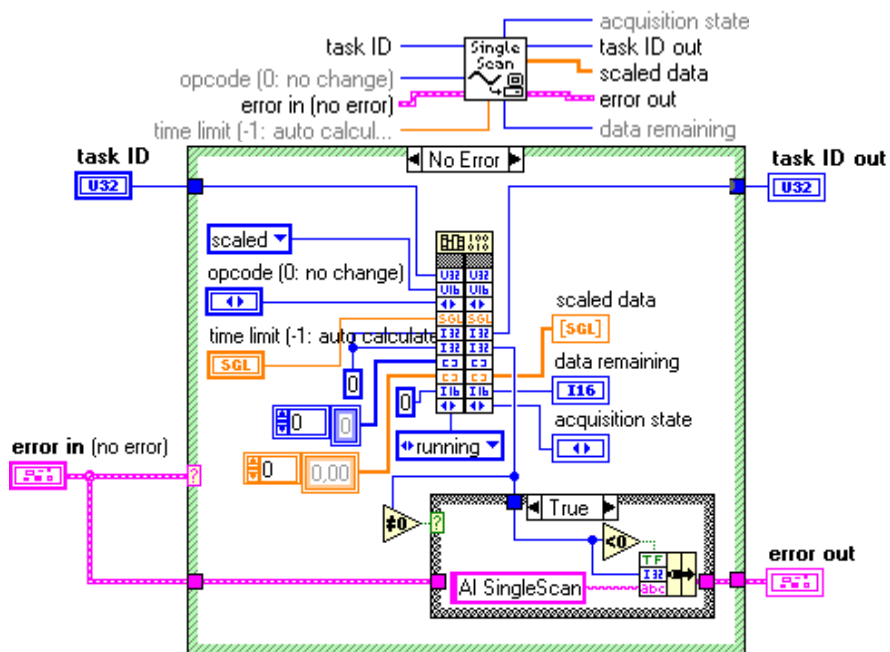
Blok dijagram algoritma s rješavanjem diferencijalne jednačbe voda



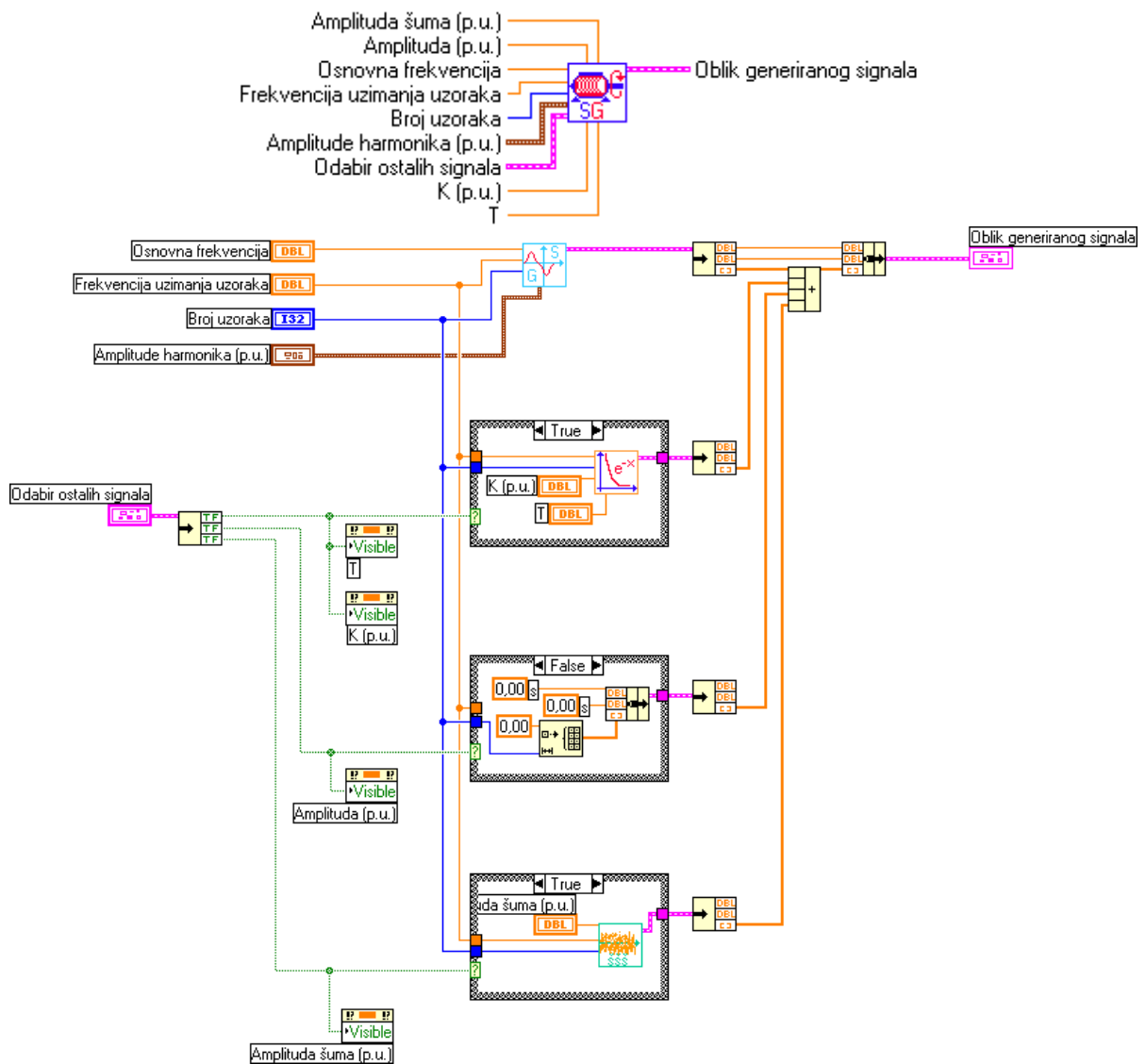
Blok dijagram programa koji konfigurira DAQ pločicu



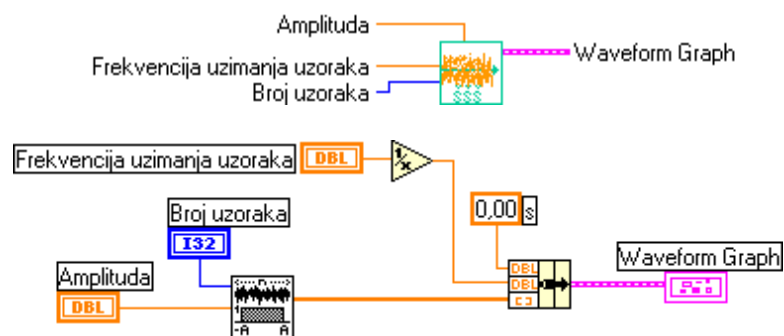
Blok dijagram programa koji starta mjerenje na DAQ pločici



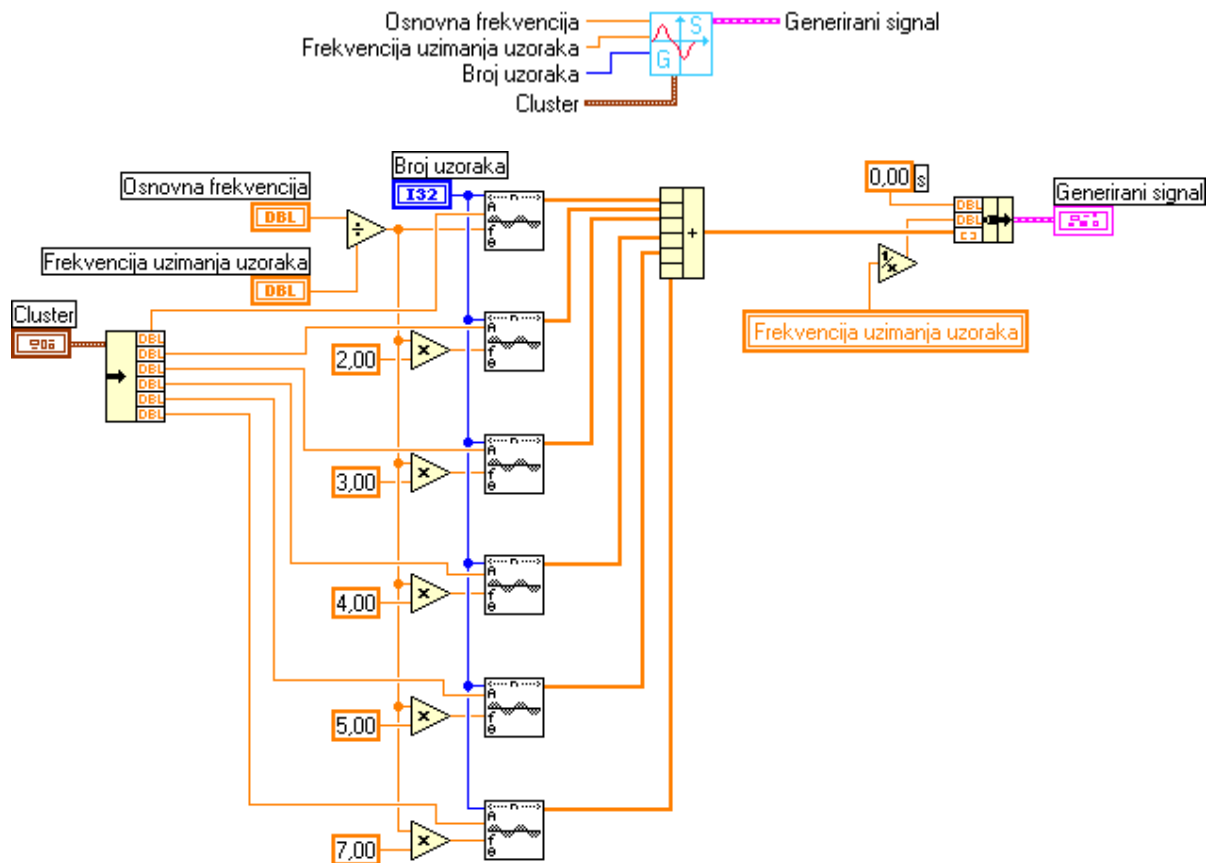
Blok dijagram programa koji uzima uzorak i šalje ga u računalo



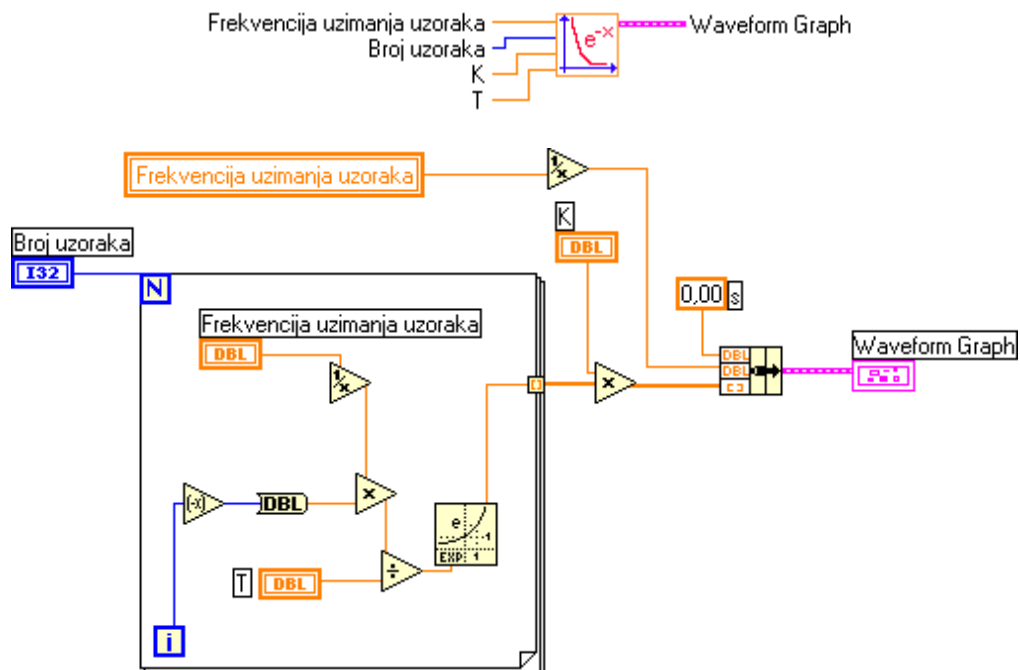
Blok dijagram generatora signala



Blok dijagram generatora visokofrekventnog šuma



Blok dijagram generatora sinusnih oblika



Blok dijagram generatora istosmjernog prigušujućeg signala

SAŽETAK

Juraj Havelka

Numerički algoritmi u zaštiti elektroenergetskog sustava

Numerical algorithms for power system protection

U uvodnom dijelu magistarskog rada obrađena je teorija uzimanja uzoraka te razne numeričke metode za analizu izmjerene signala pomoću računala, kao što su numeričko deriviranje i integriranje, interpolacijske formule, Fourierova transformacija u diskretnom obliku i tehnike uokvirivanja i digitalnog filtriranja signala.

Zatim su izvedeni brojni numerički zaštitni algoritmi i ispitani pomoću simulacijskog programa ALGORITAM. Nakon ispitivanja pomoću simulacije izvršeno je i ispitivanje sklopovlja i algoritama u realnom vremenu te se pokazalo da i u tom slučaju rade isto kao i u simulaciji.

U zadnjem dijelu rada algoritmi su bili ispitani sa simuliranim kratkim spojem i nakon toga s pravim kratkim spojem koji je bio izveden u laboratoriju Zavoda za visoki napon i energetiku na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu.

Ključne riječi: digitalna zaštita EES-a, algoritmi zaštite, digitalna obrada signala, kratki spoj, rad u realnom vremenu, DSP sklopovlje.

SUMMARY

Numerical algorithms for power system protection

The introductory section of the paper discusses the sampling theory and different numerical methods for signal analysis, like, for instance, numerical differentiation and integration, interpolation formulas, discrete Fourier transformation, and windowing and digital signal filtering techniques.

Many numerical protection algorithms were derived and tested by ALGORITAM simulation program. Following investigation by simulation, the testing of hardware and algorithms carried out in real time showed that they operate in the same way as in simulation.

The final section of the paper describes the testing of algorithms with simulated short circuit and real short circuit, performed at the laboratory of Department of Power Systems, Zagreb University Faculty of Electrical Engineering and Computing.

Key words: power systems digital protection, protection algorithms, digital signal processing, short circuit, real time issues, DSP hardware.

ŽIVOTOPIS

Rođen sam 28.10.1974.godine, u Zagrebu. Tamo sam završio osnovnu školu A.G. Matoš i maturirao na V. Gimnaziji, Klaićeva 5, također u Zagrebu 1993. godine.

Iste godine upisujem Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirao sam na istom Fakultetu, na Zavodu za energetiku i visoki napon, smjer: elektroenergetika, godine 1997. s diplomskim radom naslova: Zaštita sinkronog generatora, a mentor je bio prof.dr.sc. Ante Marušić.

Od ožujka 1993. radim kao znanstveni novak na Zavodu za visoki napon i energetiku Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu na znanstvenom projektu Ministarstva znanosti i tehnologije: Planiranje i vođenje srednje razvijenih EES-a.

Bavim se problematikom relejne zaštite energetske sustava. Također sudjelujem u praktičnom dijelu nastave iz predmeta: Zaštita i automatika EES-a; Elektrane; i Rasklopna postrojenja, kao voditelj laboratorijskih vježbi.

Sudjelovao sam i u nekoliko studija koje je Zavod za visoki napon i energetiku obavljao za HEP.

Do sada sam objavio kao autor i suautor tri članka na međunarodnim konferencijama.