4. Optimalno upravljanje nelinearnim sustavima primjenom BPTT algoritma

Backpropagation-through-time (BPTT) algoritam, [13]-[16], je vremensko proširenje *backpropagation* algoritma (BP), za slučaj kada je greška koja se minimizira dana duž određenog vremenskog intervala (kao u slučaju optimalnog upravljanja). U srži BP algoritma leži jednostavno i egzaktno računanje derivacija funkcije cilja u odnosu na parametre (težine) sustava i podešavanje parametara na osnovi tih derivacija u samo jednom prolazu kroz sistem (gradijentni algoritam). BPTT algoritam proširuje ovu metodu primjenom na dinamičke sustave. Zbog činjenice da dinamički sustavi sadrže povratnu vezu, direktno računanje derivacija može biti vrlo komplicirano. Rješenje tog problema leži u lančanom pravilu za obične derivacije [13], [17], [18], što ima za posljedicu prostiranje pogreške (podešavanje parametara) unazad u vremenu, na osnovu čega je algoritam i dobio ime.

BPTT algoritam je vrlo efikasna metoda s primjenom na analizu osjetljivosti, prepoznavanje uzoraka, identifikaciju sustava, optimalno upravljanje, detekciju grešaka, itd. Može biti primjenjen na neuronske mreže, fuzzy sustave, ekonometrijske modele, itd.

U ovom poglavlju izvodimo numerički algoritam baziran na gradijentnoj metodi, za računanje upravljačkih varijabli koje minimiziriju zadani kriterij optimalnosti. Pri tom ćemo koristiti osnovnu ideju BPTT algoritma (lančano pravilo za obične derivacije i propagacija unazad u vremenu) bez pozivanja na formalizam dinamičkih neuronskih mreža.

4.1 Izvod BPTT algoritma za nelinearne sustave prvog reda

Na početku, radi boljeg uvida u osnovnu ideju BPTT algoritma, prikazati ćemo njegovu primjenu na nelinearne dinamičke sustave prvog reda. Dinamiku sustava prvog reda možemo prikazati općenitom nelinearnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda

$$\dot{x}(t) = \phi\big(x(t),\, u(t)\big), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.1}$$

gdje je $x(t)$ stanje sustava, dok je upravljačka funkcija $u(t)$ jednoznačno određena kriterijem optimalnosti

$$J = \min_{u(t)} \int_{t_0}^{t_f} F\big(x(t),\, u(t)\big)dt\,. \tag{4.2}$$

Problem optimalnog upravljanja sastoji se u nalaženju funkcije $u(t)$ koja minimizira kriterij optimalnosti (4.2).

Da bi pristupili numeričkom tretiranju prethodnog problema, napravit ćemo njegovu vremensku diskretizaciju

$$x_{i+1} = x_i + T\phi(x_i, u_i), \quad x_0 = x_0, \quad i = 0,1,\ldots,N-1; \tag{4.3}$$

$$J(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}) = \min_u T\sum_{i=0}^{N-1} F(x_i, u_i), \tag{4.4}$$

gdje je $x_i = x(iT)$, $u_i = u(iT)$, N je broj podintervala, a T je period diskretizacije

$$T = \frac{t_f - t_0}{N}. \tag{4.5}$$

Na ovaj način problem smo sveli, sa određivanja kontinuirane funkcije $u(t)$ koja minimizira (4.2), na određivanje skupa varijabli $(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$ koji minimizira funkciju (4.4) uz ograničenja tipa jednakosti (4.3).

Taj problem se može riješiti različitim metodama nelinearnog programiranja, npr. metodom Lagrangeovih multiplikatora, metodom kaznenih funkcija, itd. Međutim, ideja svih tih metoda je da se varijable $(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$, $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ tretiraju kao nezavisne varijable, što se postiže stavljanjem ograničenja tipa jednakosti (4.3) u funkciju cilja. U algoritmu koji ćemo sada prikazati, samo varijable $(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$ tretiramo kao nezavisne (kao što i jesu) dok ćemo ograničenja (4.3) uzimati u obzir tijekom računanja gradijenta funkcije (4.4).

Varijable $(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$ koje minimiziraju funkciju (4.4), odredit ćemo iterativno primjenom gradijentnog algoritma

$$u_j^{(k+1)} = u_j^{(k)} - \eta \frac{\partial J(u_0^{(k)}, u_1^{(k)}, \ldots, u_{N-1}^{(k)})}{\partial u_j^{(k)}}, \tag{4.6}$$

gdje je $j = 0,1,\ldots,N-1$; $k = 0,1,\ldots,M$, dok je η koeficijent konvergencije, indeks k predstavlja k-tu iteraciju gradijentnog algoritma, M je broj iteracija algoritma.

Gradijent funkcije cilja (kriterija optimalnosti), na osnovi izraza (4.4) i (4.3), za k-tu iteraciju je

$$\frac{\partial J}{\partial u_j} = T\frac{\partial F(x_j, u_j)}{\partial u_j} + T\sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\partial F(x_i, u_i)}{\partial u_j}, \tag{4.7}$$

gdje je $j = 0,1,\ldots,N-1$, i taj izraz predstavlja suštinu BPTT algoritma. Iz izraza (4.4) vidimo da funkcija cilja J predstavlja zbroj funkcija $F(x_i, u_i)$ za $i = 0,1,\ldots,N-1$, tako da od parcijalne derivacije J po u_i preostanu sumandi $F(x_i, u_i)$ za koje je $i \geq j$. Prvi član na desnoj strani izraza (4.7) posljedica je međusobne nezavisnosti varijabli $(u_0, u_1, \ldots, u_{\ -1})$, dok je drugi član na desnoj strani posljedica međusobne ovisnosti varijabli stanja i upravljačkih varijabli prema izrazu (4.3) koji možemo općenito napisati kao

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i), \qquad i = 0,1,\ldots,N-1, \tag{4.8}$$

gdje je

$$f(x_i, u_i) = x_i + T\phi(x_i, u_i). \tag{4.9}$$

Parcijalne derivacije pod sumom u izrazu (4.7) predstavljaju, zbog ovisnosti (4.8), uvjetne derivacije, pa ako tu sumu označimo s

$$S(j) = \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\partial F(x_i, u_i)}{\partial u_j}, \qquad j = 0,1,\ldots,N-2, \tag{4.10}$$

imamo

$$S(j) = \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\partial F(x_i, u_i)}{\partial u_j} = \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\partial F(x_i, u_i)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}. \tag{4.11}$$

Ako bi gornju sumu, $S(j)$, računali od $j = 0$ do $j = N-2$ imali bi ukupno $(N-1)(N-2)/2$ operacija zbrajanja i množenja. Međutim ako gornju sumu počnemo računati od $j = N-2$ do $j = 0$ dobit ćemo rekurzivne relacije za sumu koje će bitno smanjiti broj računskih operacija za njeno izračunavanje.

Za $j = N-2$ imamo

$$S(N-2) = \frac{\partial F(x_{N-1}, u_{N-1})}{\partial x_{N-1}} \frac{\partial x_{N-1}}{\partial u_{N-2}} = \frac{\partial F(x_{N-1}, u_{N-1})}{\partial x_{N-1}} \frac{\partial f(x_{N-2}, u_{N-2})}{\partial u_{N-2}}.$$

Označimo

$$P(N-2) = \frac{\partial F(x_{N-1}, u_{N-1})}{\partial x_{N-1}}.$$

Za $j = N-3$ imamo

$$\begin{aligned}
S(N-3) &= \frac{\partial F(x_{N-2}, u_{N-2})}{\partial x_{N-2}} \frac{\partial x_{N-2}}{\partial u_{N-3}} + \frac{\partial F(x_{N-1}, u_{N-1})}{\partial x_{N-1}} \frac{\partial x_{N-1}}{\partial u_{N-3}} = \\
&= \frac{\partial F(x_{N-2}, u_{N-2})}{\partial x_{N-2}} \frac{\partial x_{N-2}}{\partial u_{N-3}} + \frac{\partial F(x_{N-1}, u_{N-1})}{\partial x_{N-1}} \frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_{N-2}} \frac{\partial x_{N-2}}{\partial u_{N-3}} = \\
&= \left[\frac{\partial F(x_{N-2}, u_{N-2})}{\partial x_{N-2}} + \frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_{N-2}} \frac{\partial F(x_{N-1}, u_{N-1})}{\partial x_{N-1}} \right] \frac{\partial x_{N-2}}{\partial u_{N-3}} \\
&= \left[\frac{\partial F(x_{N-2}, u_{N-2})}{\partial x_{N-2}} + \frac{\partial f(x_{N-2}, u_{N-2})}{\partial x_{N-2}} P(N-2) \right] \frac{\partial f(x_{N-3}, u_{N-3})}{\partial u_{N-3}}
\end{aligned}$$

Izraz u uglatoj zagradi označit ćemo sa

$$P(N-3) = \left[\frac{\partial F(x_{N-2}, u_{N-2})}{\partial x_{N-2}} + \frac{\partial f(x_{N-2}, u_{N-2})}{\partial x_{N-2}} P(N-2) \right].$$

Nadalje, za $j = N-4$ imamo

$$S(N-4) = \frac{\partial F(x_{N-3},u_{N-3})}{\partial x_{N-3}}\frac{\partial x_{N-3}}{\partial u_{N-4}} + \frac{\partial F(x_{N-2},u_{N-2})}{\partial x_{N-2}}\frac{\partial x_{N-2}}{\partial u_{N-4}} + \frac{\partial F(x_{N-1},u_{N-1})}{\partial x_{N-1}}\frac{\partial x_{N-1}}{\partial u_{N-4}} =$$

$$= \frac{\partial F(x_{N-3},u_{N-3})}{\partial x_{N-3}}\frac{\partial x_{N-3}}{\partial u_{N-4}} + \frac{\partial F(x_{N-2},u_{N-2})}{\partial x_{N-2}}\frac{\partial x_{N-2}}{\partial x_{N-3}}\frac{\partial x_{N-3}}{\partial u_{N-4}} +$$

$$+ \frac{\partial F(x_{N-1},u_{N-1})}{\partial x_{N-1}}\frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_{N-2}}\frac{\partial x_{N-2}}{\partial x_{N-3}}\frac{\partial x_{N-3}}{\partial u_{N-4}} =$$

$$= \left[\frac{\partial F(x_{N-3},u_{N-3})}{\partial x_{N-3}} + \frac{\partial x_{N-2}}{\partial x_{N-3}}\left[\frac{\partial F(x_{N-2},u_{N-2})}{\partial x_{N-2}} + \frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_{N-2}}\frac{\partial F(x_{N-1},u_{N-1})}{\partial x_{N-1}}\right]\right]\frac{\partial x_{N-3}}{\partial u_{N-4}}$$

$$= \left[\frac{\partial F(x_{N-3},u_{N-3})}{\partial x_{N-3}} + \frac{\partial f(x_{N-3},u_{N-3})}{\partial x_{N-3}}P(N-3)\right]\frac{\partial f(x_{N-4},u_{N-4})}{\partial u_{N-4}}$$

Izraz u zagradi označit ćemo

$$P(N-4) = \left[\frac{\partial F(x_{N-3},u_{N-3})}{\partial x_{N-3}} + \frac{\partial f(x_{N-3},u_{N-3})}{\partial x_{N-3}}P(N-3)\right].$$

Gornje izraze možemo sada prikazati na slijedeći način

$$P(N-2) = \frac{\partial F(x_{N-},u_{N-})}{\partial x_{N-}},$$

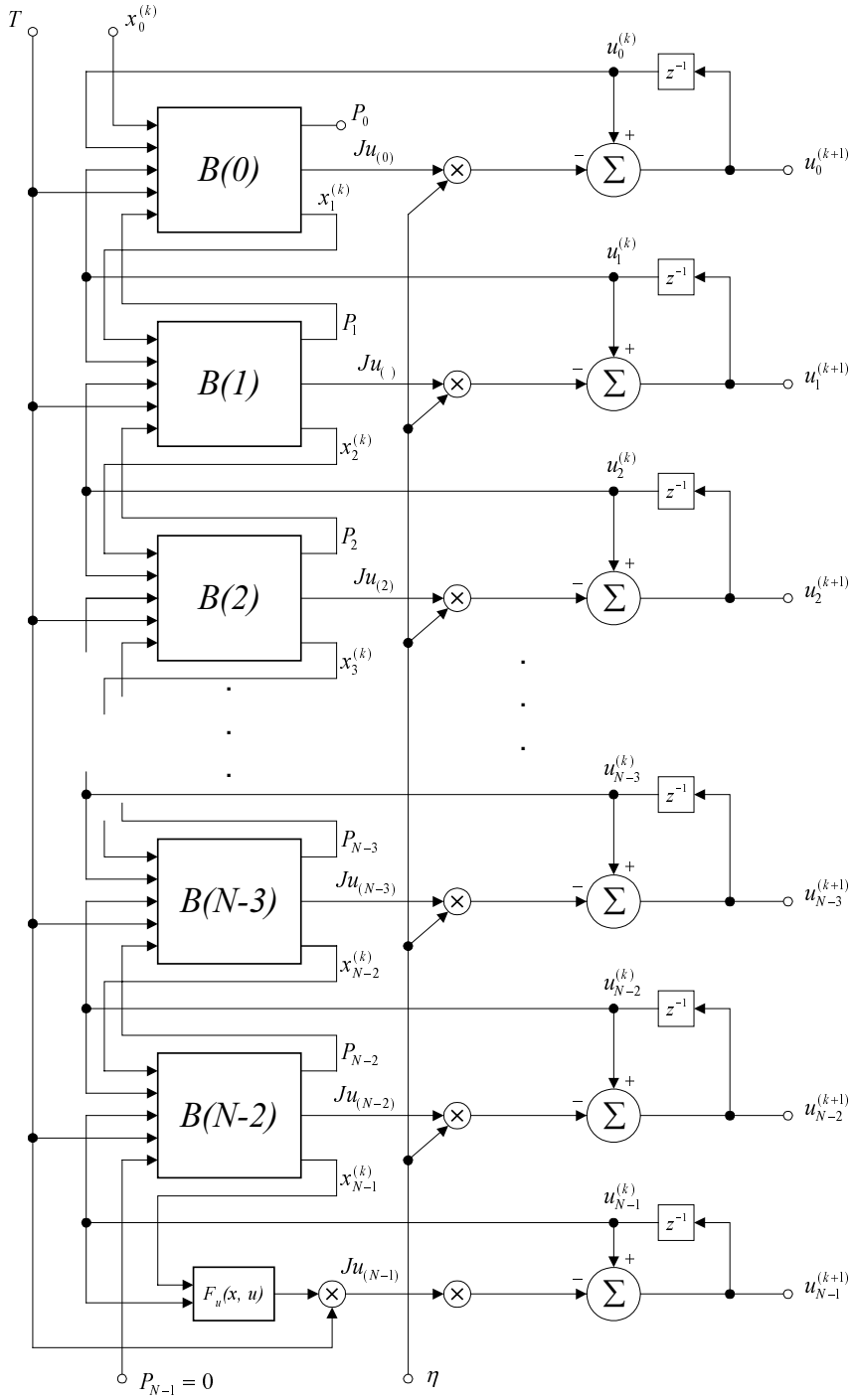
$$P(N-3) = \frac{\partial F(x_{N-2},u_{N-2})}{\partial x_{N-2}} + \frac{\partial f(x_{N-2},u_{N-2})}{\partial x_{N-2}}P(N-2),$$

$$P(N-4) = \frac{\partial F(x_{N-3},u_{N-3})}{\partial x_{N-3}} + \frac{\partial f(x_{N-3},u_{N-3})}{\partial x_{N-3}}P(N-3),$$

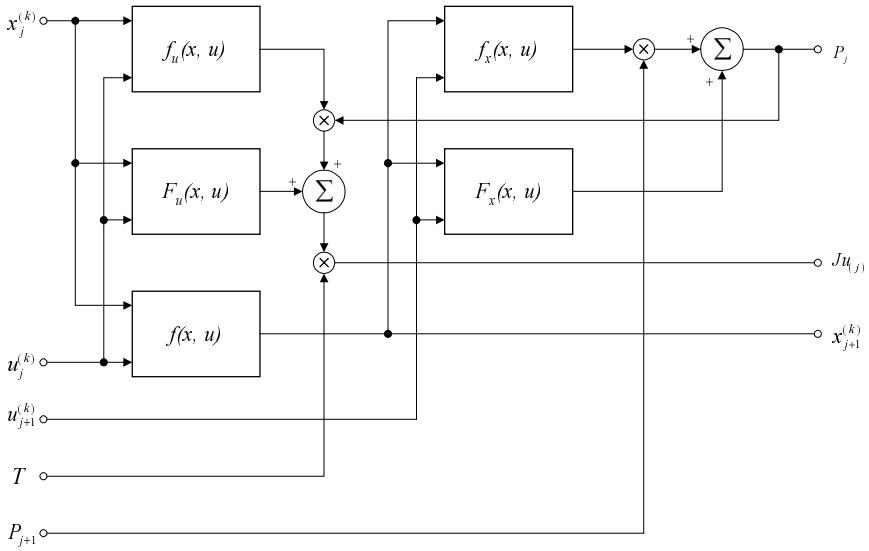
$$S(N-2) = P(N-2)\frac{\partial f(x_{N-2},u_{N-2})}{\partial u_{N-2}},$$

$$S(N-3) = P(N-3)\frac{\partial f(x_{N-3},u_{N-3})}{\partial u_{N-3}},$$

$$S(N-4) = P(N-4)\frac{\partial f(x_{N-4},u_{N-4})}{\partial u_{N-4}},$$



Slika 4.1 *Shematski prikaz gradijentnog algoritma.*



Slika 4.2 *Shematski prikaz bloka B(j) za računanje vrijednosti gradijenta na osnovi BPTT algoritma.*

iz čega se mogu napisati slijedeće rekurzivne relacije

$$P(j) = \frac{\partial F(x_{j+1}, u_{j+1})}{\partial x_{j+1}} + \frac{\partial f(x_{j+1}, u_{j+1})}{\partial x_{j+1}} P(j+1) \quad ; \qquad P(N-1) = 0\,, \tag{4.12}$$

$$S(j) = P(j) \frac{\partial f(x_j, u_j)}{\partial u_j}\,, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u_j} = T\left(\frac{\partial F(x_j, u_j)}{\partial u_j} + S(j) \right) \quad ; \qquad \frac{\partial J}{\partial u_{N-1}} = T \frac{\partial F(x_{N-1}, u_{N-1})}{\partial u_{N-1}}\,, \tag{4.14}$$

za $j = N-2,\ N-3,\ \ldots, 0$.

Na slici 4.1 i 4.2 dan je shematski prikaz gradijentnog algoritma (4.6), (4.12)-(4.14). Ako blokove *B(j)* koji računaju vrijednost gradijenta shvatimo kao perceptrone, vidimo da su izlazi perceptrona spojeni na ulaze susjednih perceptrona, odnosno, ovakav prikaz navedenog algoritma analogan je koncepciji rekurentnih (dinamičkih) neuronskih mreža. Na slici 4.3 dana je alternativna reprezentacija algoritma (4.6), (4.12)-(4.14).

Algoritam (4.12) do (4.14) izveden je za problem optimalnog upravljanja sustava (4.1) sa zadanim početnim uvjetima (rubni uvjet nije specificiran). Taj problem proširiti ćemo za slučaj sa zadanim rubnim uvjetima, odnosno

$$\dot{x}(t) = \phi\big(x(t),\ u(t)\big)\,, \qquad x(t_0) = x_0\,, \quad x(t_f) = x_f\,, \tag{4.15}$$

ili u diskretnom obliku

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i), \qquad x_0 = x_0, \qquad x_N = x_f, \tag{4.16}$$

gdje je $i = 0,1,\ldots,N-1$.

Da bi mogli koristiti algoritam (4.12) do (4.14) za problem s rubnim uvjetima, rubni uvjet ćemo razmatrati kao ograničenje i tretirat ćemo ga metodom kaznenih funkcija. Ako definiramo rubni uvjet u obliku

$$x_N - x_f = 0, \tag{4.17}$$

i formiramo kaznenu funkciju

$$G_B(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}) = K_B\left(x_N - x_f\right)^2, \tag{4.18}$$

gdje x_N ovisi o $(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$ implicitno preko (4.16), a K_B je konstantni pozitivni koeficijent kaznene funkcije, vidimo da funkcija (4.18) ima minimalnu vrijednost jednaku nuli, kada je ispunjen uvjet (4.17), dok je za slučaj kada nije ispunjen taj uvjet vrijednost funkcije veća od nule. Kada kaznenu funkciju dodamo funkciji cilja (4.4),

$$J(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}) = \min_u T\sum_{i=0}^{N-1} F(x_i, u_i) + K_B(x_N - x_f)^2 \tag{4.19}$$

gradijentni algoritam će nam garantirati da ćemo minimizacijom funkcije (4.19), odnosno (4.18), težiti zadovoljenju jednakosti (4.17). Zbog toga, moramo izvesti gradijent kaznene funkcije (4.18)

$$\frac{\partial G_B}{\partial u_j} = 2K_B\left(x_N - x_f\right)\frac{\partial x_N}{\partial u_j}, \qquad j = 0,1,\ldots,N-1. \tag{4.20}$$

Zbog istih razloga kao kod izvoda algoritma (4.12) - (4.14), krenuti ćemo od $j = N-1$

$$\frac{\partial G_B}{\partial u_{N-1}} = 2K_B\left(x_N - x_f\right)\frac{\partial x_N}{\partial u_{N-1}},$$

$$\frac{\partial G_B}{\partial u_{N-2}} = 2K_B\left(x_N - x_f\right)\frac{\partial x_N}{\partial u_{N-2}} = 2K_B\left(x_N - x_f\right)\frac{\partial x_N}{\partial x_{N-1}}\frac{\partial x_{N-1}}{\partial u_{N-2}},$$

$$\frac{\partial G_B}{\partial u_{N-3}} = 2K_B\left(x_N - x_f\right)\frac{\partial x_N}{\partial u_{N-3}} = 2K_B\left(x_N - x_f\right)\frac{\partial x_N}{\partial x_{N-1}}\frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_{N-2}}\frac{\partial x_{N-2}}{\partial u_{N-3}},$$

$$\frac{\partial G_B}{\partial u_{N-4}} = 2K_B\left(x_N - x_f\right)\frac{\partial x_N}{\partial u_{N-4}} = 2K_B\left(x_N - x_f\right)\frac{\partial x_N}{\partial x_{N-1}}\frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_{N-2}}\frac{\partial x_{N-2}}{\partial x_{N-3}}\frac{\partial x_{N-3}}{\partial u_{N-4}}.$$

Ako stavimo

$$D(N-2) = \frac{\partial x_N}{\partial x_{N-1}} = \frac{\partial f(x_{N-1}, u_{N-1})}{\partial x_{N-1}},$$

$$D(N-3) = \frac{\partial x_N}{\partial x_{N-1}}\frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_{N-2}} = D(N-2)\frac{\partial f(x_{N-2}, u_{N-2})}{\partial x_{N-2}},$$

$$D(N-4) = \frac{\partial x_N}{\partial x_{N-1}}\frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_{N-2}}\frac{\partial x_{N-2}}{\partial x_{N-}} = D(N-3)\frac{\partial f(x_{N-}, u_{N-})}{\partial x_{N-}},$$

možemo napisati slijedeće rekurzivne relacije

$$D(j) = D(j+1)\frac{\partial f(x_{j+1}, u_{j+1})}{\partial x_{j+1}} \; ; \qquad D(N-1) = 1, \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial G_B}{\partial u_j} = 2K_B\left(x_N - x_f\right)D(j)\frac{\partial f(x_j, u_j)}{\partial u_j}, \tag{4.22}$$

za $j = N-1, N-2, \ldots, 0$. Ovim smo rješili problem rubnih uvjeta. Slijedeći problem su ograničenja tipa nejednakosti

$$g_j\left(x(t),\, u(t)\right) \geq 0\,, \qquad j = 1, \ldots, p\,, \tag{4.23}$$

ili u diskretnom obliku

$$g_j\left(x_i,\, u_i\right) \geq 0\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1\,, \quad j = 1, \ldots, p\,, \tag{4.24}$$

koji ćemo također rješiti, formiranjem kaznene funkcije oblika

$$G_V(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}) = K_V^* \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{N-1} g_j^2(x_i, u_i) H^-\left(g_j(x_i, u_i)\right), \tag{4.25}$$

gdje je

$$H^-(g_j) = \begin{cases} 0; & g_j \geq 0 \\ 1; & g_j < 0 \end{cases}, \tag{4.26}$$

a K_V^* predstavlja koeficijent kaznene funkcije koji nam govori koliko "kažnjavamo" kršenje ograničenja (4.24). Drugim riječima, iz oblika funkcija (4.25) i (4.26) vidi se da funkcija (4.25) ima minimalnu vrijednost jednaku nuli u slučaju da su zadovoljena sva ograničenja (4.24), inače će funkcija imati vrijednost veću od nule, proporcionalno koeficijentu K_V^*. Ako sada pridružimo kaznenu funkciju (4.25) funkciji cilja (4.4) imamo

$$J(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}) = T\sum_{i=0}^{N-1}\left(F(x_i, u_i) + K_V \sum_{j=1}^{p} g_j^2(x_i, u_i) H^-\left(g_j(x_i, u_i)\right)\right) \tag{4.27}$$

gdje je $TK_V = K_V^*$. Vidimo da smo ovim problem sveli na oblik (4.4), gdje je nova 'podintegralna' funkcija

$$F'(x_i, u_i) = F(x_i, u_i) + K_V \sum_{j=1}^{p} g_j^2(x_i, u_i) H^-\left(g_j(x_i, u_i)\right), \tag{4.28}$$

a njene parcijalne derivacije

$$\frac{\partial F'(x_i, u_i)}{\partial u_i} = \frac{\partial F(x_i, u_i)}{\partial u_i} + 2K_V \sum_{j=1}^{p} g_j(x_i, u_i)\frac{\partial g_j(x_i, u_i)}{\partial u_i} H^-\left(g_j(x_i, u_i)\right), \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial F'(x_i,u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial F(x_i,u_i)}{\partial x_i} + 2K_V \sum_{j=1}^{p} g_j(x_i,u_i) \frac{\partial g_j(x_i,u_i)}{\partial x_i} H^-\Big(g_j(x_i,u_i)\Big), \quad (4.30)$$

tako da je dodatak drugog člana na desnoj strani gornjih izraza jedina modifikacija algoritma (4.12) - (4.14) u slučaju ograničenja (4.24).

Na kraju, sumirat ćemo gornje rezultate za općeniti problem optimalnog upravljanja s rubnim uvjetima i ograničenjima

$$J(u_0,u_1,\ldots,u_{N-1}) = \min_u T\sum_{i=0}^{N-1} F(x_i,u_i), \quad (4.31)$$

$$x_{i+1} = f(x_i,u_i), \quad x_0 = x_0, \quad x_N = x_f, \quad (4.32)$$

$$g_j\big(x_i,\ u_i\big) \geq 0, \quad (4.33)$$

za $i = 0,1,\ldots,N-1$, $j = 1,\ldots,p$.

Ukupna funkcija cilja s kaznenim funkcijama je

$$J(u_0,u_1,\ldots,u_{N-1}) = \min_u T\sum_{i=0}^{N-1}\left(F(x_i,u_i) + K_V \sum_{j=1}^{p} g_j^2(x_i,u_i) H^-\Big(g_j(x_i,u_i)\Big)\right) + \\ + K_B\Big(x_N - x_f\Big)^2 \quad (4.33a)$$

Gradijent gornje funkcije cilja u *k*-tom koraku gradijentnog algoritma (4.6) dobiva se na osnovi slijedećeg algoritma

1. ***Inicijalizacija gradijentnog algoritma***. *Za k=0 pridjelimo upravljačkim varijablama* $(u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, \ldots, u_{N-1}^{(0)})$ *proizvoljne vrijednosti (mogu biti i izvan dozvoljenog područja u fazi računarske simulacije).*

2. ***Računanje varijabli stanja*** $(x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \ldots, x_N^{(k)})$ *za* $k = 0, 1, \ldots, M$ *na osnovu*

$$x_{i+1}^{(k)} = f(x_i^{(k)}, u_i^{(k)}), \quad x_0^{(k)} = x_0, \quad i = 0,1,\ldots,N-1;$$

3. ***Računanje gradijenta***

$$\frac{\partial J(u_0^{(k)}, u_1^{(k)}, \ldots, u_{N-1}^{(k)})}{\partial u_j^{(k)}}$$

za $k = 0, 1, \ldots, M$ *na osnovi BPTT algoritma.*

3.1 ***Inicijalizacija BPTT algoritma*** za $j = N - 1$.

$$J_u(j) = T\left(F_u(j) + 2K_V \sum_{i=1}^{p} g^i(j) g_u^i(j) H^-\left(g^i(j)\right)\right) + 2K_B\left(x \quad - x_f\right) f_u(j) \quad ;$$

$$P(j) = 0\,;$$

$$D(j) = 1\,;$$

3.2 ***Iteriranje*** za $j = N - 2,\ N - 3,\ \ldots, 0$.

$$F_x'(j+1) = F_x(j+1) + 2K_V \sum_{i=1}^{p} g^i(j+1) g_x^i(j+1) H^-\left(g^i(j+1)\right),$$

$$F_u'(j+1) = F_u(j+1) + 2K_V \sum_{i=1}^{p} g^i(j+1) g_u^i(j+1) H^-\left(g^i(j+1)\right),$$

$$P(j) = F_x'(j+1) + f_x(j+1) P(j+1)\ ,$$

$$D(j) = D(j+1) f_x(j+1),$$

$$J_u(j) = T\left(F_u'(j) + P(j) f_u(j)\right) + 2K_B\left(x_N - x_f\right) D(j) f_u(j),$$

4. ***Računanje nove iteracije upravljačkih varijabli*** $(u_0^{(k+1)}, u_1^{(k+1)}, \ldots, u_{N-1}^{(k+1)})$ *na osnovu gradijentnog algoritma*

$$u_j^{(k+1)} = u_j^{(k)} - \eta \frac{\partial J(u_0^{(k)}, u_1^{(k)}, \ldots, u_{N-1}^{(k)})}{\partial u_j^{(k)}},$$

za $k = 0, 1, \ldots, M$. *Pomičemo indeks za jedan* $k \leftarrow k+1$ *i vraćamo se na 2. korak.*

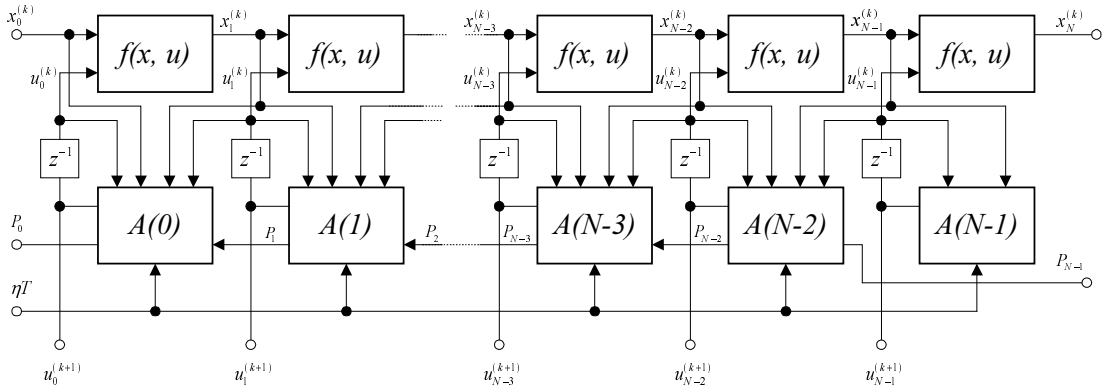
Koristili smo skraćene oznake slijedećih veličina za *k*-ti korak iteracije gradijentnog algoritma

$$F_x(i) \equiv \frac{\partial F(x_i, u_i)}{\partial x_i},\ F_u(i) \equiv \frac{\partial F(x_i, u_i)}{\partial u_i},\ f\ (i) \equiv \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x_i},\ f_u(i) \equiv \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial u_i},$$

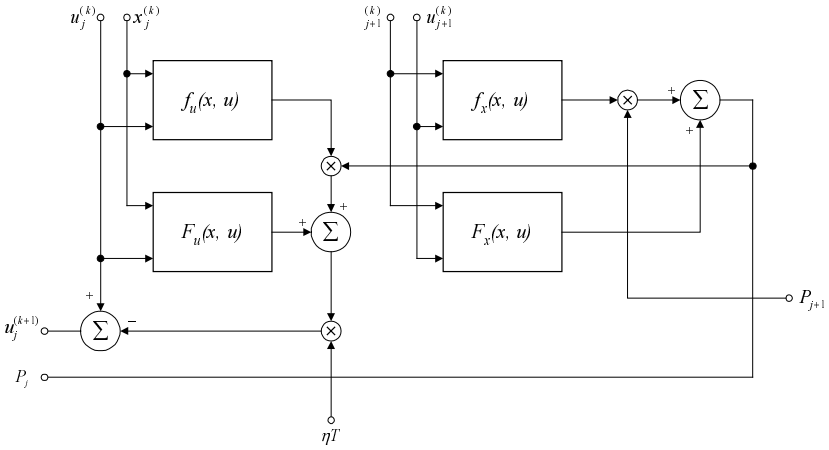
$$g_x^j(i) \equiv \frac{\partial g_j(x_i, u_i)}{\partial x_i},\ g^j(i) \equiv g_j(x_i, u_i),\ J_u(i) \equiv \frac{\partial J}{\partial u_i}.$$

Na slici 4.3 shematski je prikazan gore naveden algoritam (za slučaj bez zadanog rubnog uvjeta i ograničenja) na drugi način nego na slici 4.1. Imamo unaprijednu strukturu koja odgovara dinamici sustava (4.8) za koji tražimo optimalnu upravljačku funkciju (odgovara 2. koraku u navedenom algoritmu), a ispod nje imamo strukturu koja predstavlja 3. i 4. korak u navedenom algoritmu i ima propagaciju vrijednosti

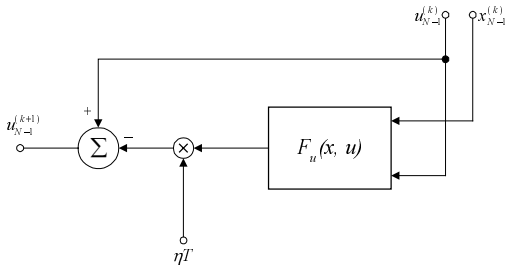
upravljačkih varijabli unazad u vremenu. Ova struktura je potpuno analogna sa strukturom unaprijednih neuronskih mreža s *N-1* skrivenih slojeva i s povratnim prostiranjem greške (*error backpropagation*) kao mehanizmom učenja (podešavanja parametara). Kad to usporedimo s prikazom na slici 4.1, možemo reći da navedeni algoritam možemo shvatiti kao dinamičku neuronsku mrežu s jednim slojem, ili kao statičku neuronsku mrežu s *N-1* skrivenih slojeva.



Slika 4.3 *Shematski prikaz BPTT algoritma kao prostiranje greške unazad u vremenu.*



Slika 4.4 *Shematski prikaz bloka A(j).*



Slika 4.5 *Shematski prikaz bloka A(N-1).*

Primjer 4.1 Razmotrimo problem optimalnog upravljanja za sustav prvog reda

$$\dot{x} = -x + u\,,$$

sa zadanim početnim i rubnim uvjetima

$$x(0) = 2\,, \qquad x(2) = 0\,,$$

i ograničenjima

$$\left| u \right| \le 1\,,$$

te s kriterijem optimalnosti

$$J = \min_u \int_0^2 \left| u \right| dt\,.$$

Analitičko rješenje ovog problema je

$$u(t) = \begin{cases} 0; & 0 \le t \le 1.685 \\ -1; & 1.685 \le t \le 2 \end{cases}, \qquad x(t) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-t}\ ; & 0 \le t \le 1.685 \\ \mathrm{e}^{2-t} - 1; & 1.685 \le t \le 2 \end{cases}.$$

Ako sada primjenimo prethodno izvedeni algoritam na rješavanje ovog problema, imamo

$$F(x,u) = \left| u \right| = u \cdot \mathrm{sgn}(u)\,,$$

$$F_x(x,u) = 0\,, \qquad F_u(x,u) = \mathrm{sgn}(u)\,,$$

$$f(x,u) = x + T(-x+u)\,,$$

$$f_x(x,u) = 1 - T\,, \qquad f_u(x,u) = T\,,$$

$$g_1(x,u) = 1 - u\,, \qquad g_2(x,u) = 1 + u\,.$$

Uvrstimo li te vrijednosti u algoritam imamo

$$F_x'(j) = 0\,,$$

$$F_u'(j) = \mathrm{sgn}(u_j) + 2K_V\Big((1+u_j)H^-(1+u_j) - (1-u_j)H^-(1-u_j)\Big)\,,$$

$$P(j) = (1-T)P(j+1)\,,$$

$$D(j) = (1-T)D(j+1)\,,$$

$$J_u(j) = T\Big(F_u'(j) + TP(j)\Big) + 2K_B\Big(x_N - x_f\Big)D(j)\,,$$

za $j = N-2,\ N-3,\ \ldots, 0$.

Imajući u vidu da je za $j = N-1$

$$P(j) = 0\,; \quad D(j) = 1\,,$$

gornje jednadžbe svode se na

$$F_u'(j) = \text{sign}(u_j) + 2K_V\Big((1+u_j)H^-(1+u_j) - (1-u_j)H^-(1-u_j)\Big),$$

$$J_u(j) = TF_u'(j) + 2K_B\Big(x_N - x_f\Big)\cdot(1-T)^{N-j+1},$$

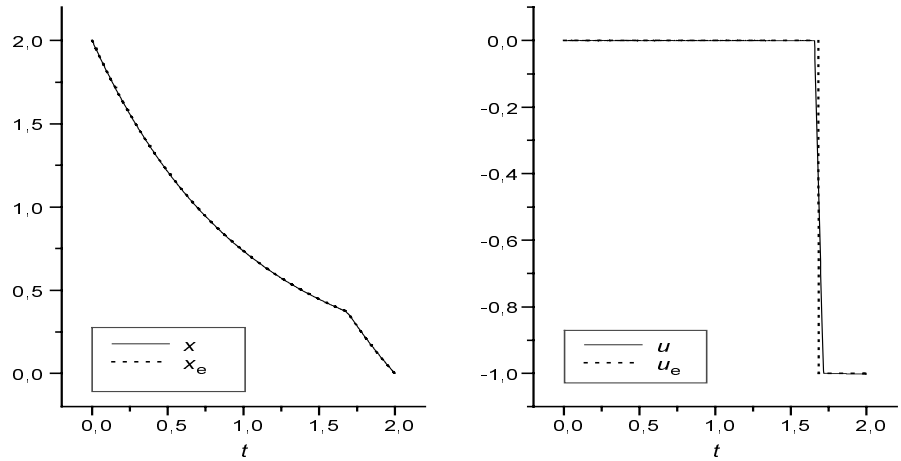
za $j = N-1,\ N-2,\ \ldots, 0$.

Na slici 4.6 prikazana su rješenja $x(t)$, $u(t)$, dobivena BPTT algoritmom, u usporedbi s analitičkim rješenjima $x_e(t)$, $u_e(t)$, dok su na slici 4.7 prikazana odstupanja analitičkih rješenja od numeričkih, $e_x = x_e(t) - x(t)$, $e_u = u_e(t) - u(t)$.

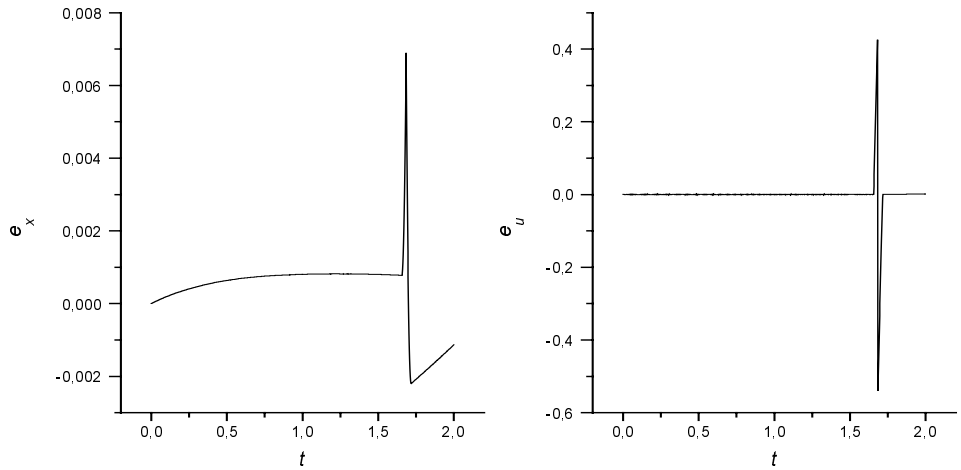
Vrijednosti numeričkih parametara su

$N = 1000$, $M = 20000$,

$\eta = 0.2$, $K_B = 600$, $K_V = 100$.



Slika 4.6 *Usporedba analitičkih rješenja (x_e, u_e) s numeričkim (x, u).*



Slika 4.7 *Odstupanja analitičkih rješenja (x_e, u_e) od numeričkih (x, u).*

Definirajmo slijedeće funkcije

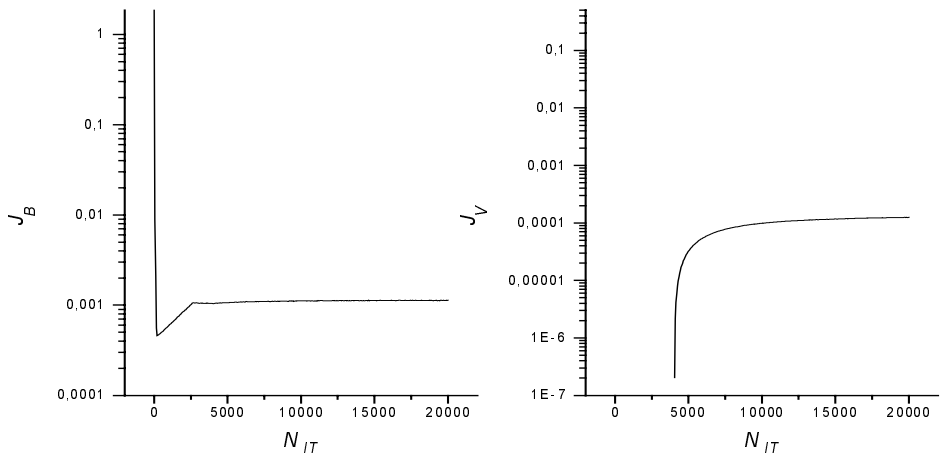
$$J_B = \left| x_N - x_f \right|,$$

$$J_V = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\left| 1 + u_j \right| \cdot H^-(1 + u_j) + \left| 1 - u_j \right| \cdot H^-(1 - u_j) \right),$$

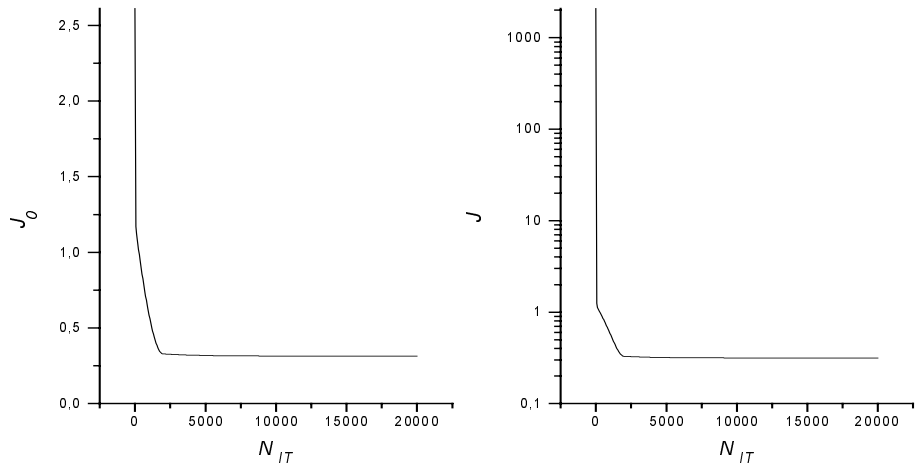
$$J_0 = T \sum_{j=0}^{N-1} \left| u_j \right|,$$

$$J = T \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left| u_j \right| + K \left((1 + u_j)^2 H^-(1 + u_j) + (1 - u_j)^2 H^-(1 - u_j) \right) \right] + K_B (x_N - x_f)^2,$$

gdje J_B predstavlja mjeru odstupanja od rubnog uvjeta, J_V mjeri odstupanje od zadanih ograničenja, J_0 je zadana funkcija cilja, J je ukupna funkcija cilja s ograničenjima. Vrijednosti ovih funkcija, u ovisnosti o broju iteracija gradijentnog algoritma, prikazane su na slici 4.8 i 4.9.



Slika 4.8 *Vrijednosti* J_B, J_V *u ovisnosti o broju iteracija* N_{IT}.



Slika 4.9 *Vrijednosti* J_0, J *u ovisnosti o broju iteracija* N_{IT}.

4.2 Izvod BPTT algoritma za nelinearne multivarijabilne sustave

Izveli smo BPTT algoritam za nelinearne sustave prvog reda, radi jasnije ilustracije osnovne ideje algoritma, dok ćemo ovdje izvesti, po istom principu, algoritam za multivarijabilne nelinearne sustave, oblika

$$\dot{x}_k = \phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad x_k(t_0) = x_0^k, \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{4.34}$$

ili u vektorskom obliku

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \qquad \mathbf{x}(t\ ) = \mathbf{x}\ , \tag{4.35}$$

gdje je $\mathbf{x}(t)$ vektor stanja, a $\mathbf{u}(t)$ vektor upravljanja,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}^T, \tag{4.36}$$

Analogno (4.2) imamo kriterij optimalnosti

$$J = \min_{\mathbf{u}(t)} \int_{t_0}^{t_f} F\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\big) dt\ . \tag{4.37}$$

Problem optimalnog upravljanja sastoji se u nalaženju vektorske funkcije upravljanja, $\mathbf{u}(t)$, koja minimizira kriterij optimalnosti (4.37).

Vremenskom diskretizacijom sustava diferencijalnih jednadžbi (4.34) dobivamo sustav diferencijskih jednadžbi

$$x_{i+1}^k = f^k(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n, u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^m), \quad k = 1,2,\ldots,n \qquad i = 0,1,\ldots,N-1 \tag{4.38}$$

odnosno

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \tag{4.39}$$

gdje je

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) = \mathbf{x}_i + T\phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i^1 & x_i^2 & \cdots & x_i^n \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i^1 & u_i^2 & \cdots & u_i^m \end{bmatrix}^T,$$

dok je funkcija cilja

$$\begin{aligned} &J(u_0^1, u_0^2, \ldots, u_0^m, u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^m, \ldots, u_{N-1}^1, u_{N-1}^2, \ldots, u_{N-1}^m) = \\ &= \min_{\mathbf{u}} T \sum_{i=0}^{N-1} F(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n, u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^m) \end{aligned}, \tag{4.40}$$

odnosno

$$J(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{N-1}) = \min_{\mathbf{u}} T \sum_{i=0}^{N-1} F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)\ . \tag{4.41}$$

Gradijentni algoritam je u ovom slučaju

$$\mathbf{u}_j^{\ k+1} = \mathbf{u}_j^{\ k} - \eta \frac{\partial J(\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_1^k, \ldots, \mathbf{u}_{N-1}^k)}{\partial \mathbf{u}_j^{\ k}}, \tag{4.42}$$

gdje je $j = 0,1,\ldots,N-1$; $k = 0,1,\ldots,M$, dok je η koeficijent konvergencije, indeks k predstavlja k-tu iteraciju gradijentnog algoritma, M je broj iteracija algoritma.

Gradijent funkcije cilja je

$$\frac{\partial J}{\partial u_j^k} = T\frac{\partial F(\mathbf{x}_j,\mathbf{u}_j)}{\partial u_j^k} + T\sum_{i=j+1}^{N-1}\frac{\partial F(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)}{\partial u_j^k}, \tag{4.43}$$

$k = 1,2,\ldots,m$; $j = 0,1,\ldots,N-1$, što je analogno izrazu (4.7) s tom razlikom što sada imamo n varijabli stanja, x_i^l, $(l = 1,2,\ldots,n)$, koje implicitno ovise o upravljačkoj varijabli u_j^k, $k = 1,2,\ldots,m$, te stoga moramo računati s totalnim diferencijalom funkcije $F(\mathbf{x}_j,\mathbf{u}_j)$ po varijablama stanja $\mathbf{x}_i$, tako da imamo

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)}{\partial u_j^k} = \frac{\partial F(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)}{\partial x_i^1}\frac{\partial x_i^1}{\partial u_j^k} + \frac{\partial F(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)}{\partial x_i^2}\frac{\partial x_i^2}{\partial u_j^k} + \ldots + \frac{\partial F(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)}{\partial x_i^n}\frac{\partial x_i^n}{\partial u_j^k},$$

ili

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)}{\partial u_j^k} = \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)}{\partial x_i^r}\frac{\partial x_i^r}{\partial u_j^k}.$$

Slijedeće što treba izračunati su parcijalne derivacije $\dfrac{\partial x_i^p}{\partial u_j^k}$.

Imamo

$$\frac{\partial x_{j+1}^p}{\partial u_j^k} = \frac{\partial f^p(\mathbf{x}_j,\mathbf{u}_j)}{\partial u_j^k} \qquad p = 1,2,\ldots,n$$

$$\frac{\partial x_{j+2}^p}{\partial u_j^k} = \frac{\partial f^p(\mathbf{x}_{j+1},\mathbf{u}_{j+1})}{\partial x_{j+1}^1}\frac{\partial x_{j+1}^1}{\partial u_j^k} + \frac{\partial f^p(\mathbf{x}_{j+1},\mathbf{u}_{j+1})}{\partial x_{j+1}^2}\frac{\partial x_{j+1}^2}{\partial u_j^k} + \ldots + \frac{\partial f^p(\mathbf{x}_{j+1},\mathbf{u}_{j+1})}{\partial x_{j+1}^n}\frac{\partial x_{j+1}^n}{\partial u_j^k}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial x_i^p}{\partial u_j^k} = \frac{\partial f^p(\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{u}_{i-1})}{\partial x_{i-1}^1}\frac{\partial x_{i-1}^1}{\partial u_j^k} + \frac{\partial f^p(\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{u}_{i-1})}{\partial x_{i-1}^2}\frac{\partial x_{i-1}^2}{\partial u_j^k} + \ldots + \frac{\partial f^p(\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{u}_{i-1})}{\partial x_{i-1}^n}\frac{\partial x_{i-1}^n}{\partial u_j^k}$$

ili

$$\frac{\partial x_i^p}{\partial u_j^k} = \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f^p(\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{u}_{i-1})}{\partial x_{i-1}^r}\frac{\partial x_{i-1}^r}{\partial u_j^k}$$

za $p = 1,2,\ldots,n$; $k = 1,2,\ldots,m$; $j = 0,1,\ldots,N-1$; $i = j+1,\ldots,N-1$.

Sada ćemo izvesti rekurzivne relacije za izračunavanje sume u izrazu (4.43)

$$S_k(j) = \sum_{i=j+1}^{N-1}\frac{\partial F(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)}{\partial u_j^k}$$

Krenut ćemo unazad u vremenu. Imamo za $j = N-2$; $i = N-1$

$$S_k(N-2)=\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial u_{N-2}^k}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r}\frac{\partial x_{N-1}^r}{\partial u_{N-2}^k}$$

gdje je

$$\frac{\partial x_{N-1}^r}{\partial u_{N-2}^k}=\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial u_{N-2}^k}$$

odnosno

$$S_k(N-2)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial u_{N-2}^k}$$

Nadalje za $j=N-3;\ i=N-1,\ N-2$

$$S_k(N-3)=\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial u_{N-3}^k}+\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial u_{N-3}^k}=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}\frac{\partial x_{N-2}^r}{\partial u_{N-3}^k}+\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r}\frac{\partial x_{N-1}^r}{\partial u_{N-3}^k}$$

Pošto je

$$\frac{\partial x_{N-1}^r}{\partial u_{N-3}^k}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^l}\frac{\partial x_{N-2}^l}{\partial u_{N-3}^k}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^l}\frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^k}$$

i

$$\frac{\partial x_{N-2}^r}{\partial u_{N-3}^k}=\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^k}$$

imamo

$$S_k(N-3)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^k}+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^l}\frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^k}$$

odnosno

$$S_k(N-3)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^k}+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^k}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^l}$$

i poslije zamjene indeksa $r\to l,\ l\to r$

$$S_k(N-3)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^k}+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^k}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^l}\frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}$$

dobivamo

$$S_k(N-3)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^k}\left[\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^l}\frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}\right]$$

Idemo dalje ponoviti analognu proceduru za još jedan korak
$j=N-4;\ i=N-1,\ N-2,\ N-3$

$$S_k(N-4)=\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-4}^k}+\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial u_{N-4}^k}+\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial u_{N-4}^k}=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial x_{N-3}^r}\frac{\partial x_{N-3}^r}{\partial u_{N-4}^k}+\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}\frac{\partial x_{N-2}^r}{\partial u_{N-4}^k}+\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r}\frac{\partial x_{N-1}^r}{\partial u_{N-4}^k}$$

Imamo nadalje

$$S_k(N-4)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial x_{N-3}^r}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-4},\mathbf{u}_{N-4})}{\partial u_{N-4}^k}+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial x_{N-3}^l}\frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{N-4},\mathbf{u}_{N-4})}{\partial u_{N-4}^k}+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^l}\frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial x_{N-3}^q}\frac{\partial f^q(\mathbf{x}_{N-4},\mathbf{u}_{N-4})}{\partial u_{N-4}^k}$$

Poslije zamjene indeksa $r\to l,\ l\to r$ u drugoj sumi i $q\to r,\ r\to q$ u trećoj imamo

$$S_k(N-4)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-4},\mathbf{u}_{N-4})}{\partial u_{N-4}^k}\left[\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial x_{N-3}^r}+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial x_{N-3}^r}\left[\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}+\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^q}\frac{\partial f^q(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^l}\right]\right]$$

Ako sada uvedemo oznake

$$P^r(N-2)=\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r},$$

$$P^r(N-3)=\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^r}P^l(N-2)$$

$$P^r(N-4)=\frac{\partial F(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial x_{N-3}^r}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial x_{N-3}^r}P^l(N-3)$$

imamo

$$S_k(N-2)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2},\mathbf{u}_{N-2})}{\partial u_{N-2}^k}P^r(N-2)$$

$$S_k(N-3)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-3},\mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^k}P^r(N-3)$$

$$S_k(N-4) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-4}, \mathbf{u}_{N-4})}{\partial u_{N-4}^k} P^r(N-4)$$

Sada možemo postupak generalizirati u obliku algoritma

$$P^r(j) = \frac{\partial F(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+1})}{\partial x_{j+1}^r} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f^l(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+1})}{\partial x_{j+1}^r} P^l(j+1); \quad P^r(N-1) = 0, \tag{4.44}$$

$$S_k(j) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f^r(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j)}{\partial u_j^k} P^r(j), \tag{4.45}$$

gdje je $r = 1,2,\ldots,n; \quad j = N-2, N-3,\ldots,0$.

Na kraju možemo navesti kompletan algoritam optimalnog upravljanja

$$u_j^k(i+1) = u_j^k(i) - \eta(i) \frac{\partial J}{\partial u_j^k(i)}, \qquad i = 0,1,\ldots,M, \tag{4.46}$$

Gradijent za *i*-tu iteraciju je

$$\frac{\partial J}{\partial u_j^k} = T\left(\frac{\partial F(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j)}{\partial u_j^k} + S_k(j) \right),$$

$$S_k(j) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f^r(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j)}{\partial u_j^k} P^r(j), \tag{4.47}$$

$$P^r(j) = \frac{\partial F(\mathbf{x}_{j\ 1}, \mathbf{u}_{j\ 1})}{\partial x_{j\ 1}^r} + \sum_{=1}^{n} \frac{\partial f\ \ (\mathbf{x}_{j\ 1}, \mathbf{u}_{j\ 1})}{\partial x_{j\ 1}^r} P\ \ (j+1)\ ; \quad P^r(N-1) = 0,$$

za $r = 1,2,\ldots,n; \quad k = 1,2,\ldots,m; \quad j = N-2, N-3,\ldots,0$.

U matričnoj interpretaciji, uvodeći

$$\mathbf{U}(j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u_j^1} & \frac{\partial f^2}{\partial u_j^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial u_j^1} \\ \frac{\partial f^1}{\partial u_j^2} & \frac{\partial f^2}{\partial u_j^2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial u_j^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial u_j^m} & \frac{\partial f^2}{\partial u_j^m} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial u_j^m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}(j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_j^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_j^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_j^1} \\ \frac{\partial f^1}{\partial x_j^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x_j^2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_j^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial x_j^n} & \frac{\partial f^2}{\partial x_j^n} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_j^n} \end{bmatrix}, \tag{4.47a}$$

$$\mathbf{S}(j)=\begin{bmatrix} S_1(j) \\ S_2(j) \\ \vdots \\ S_m(j) \end{bmatrix},\quad \mathbf{P}(j)=\begin{bmatrix} P^1(j) \\ P^2(j) \\ \vdots \\ P^n(j) \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_x(j)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_j^1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_j^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_j^n} \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_u(j)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u_j^1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_j^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_j^m} \end{bmatrix},\quad \mathbf{J}_u(j)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial J}{\partial u_j^1} \\ \dfrac{\partial J}{\partial u_j^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial J}{\partial u_j^m} \end{bmatrix},$$

algoritam (4.47) poprima oblik

$$\begin{aligned} &\mathbf{J}_u(j)=T\big(\mathbf{F}_u(j)+\mathbf{S}(j)\big), \qquad \mathbf{J}_u(N-1)=T\,\mathbf{F}_u(N-1), \\ &\mathbf{S}(j)=\mathbf{U}(j)\cdot\mathbf{P}(j), \\ &\mathbf{P}(j)=\mathbf{F}_x(j+1)+\mathbf{X}(j+1)\cdot\mathbf{P}(j+1), \qquad \mathbf{P}(N-1)=\mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4.48}$$

za $j=N-2,N-3,\ldots,0$.

4.3 Metoda kaznenih funkcija za ograničenja tipa rubnih uvjeta

Gore navedeni algoritam izveden je za problem optimalnog upravljanja za dinamiku nelinearnih sustava sa zadanim početnim uvjetima (4.35). Sada ćemo razmotriti problem sa zadanim rubnim uvjetima

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\phi\big(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)\big), \qquad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0, \qquad \mathbf{x}(t_f)=\mathbf{x}_f, \tag{4.49}$$

Da bi uračunali rubni uvjet, dodat ćemo funkciji cilja (4.41) kaznenu funkciju u obliku

$$G_B(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{N-1})=K_B\sum_{k=1}^{n}\left(x_N^k-x_f^k\right)^2, \tag{4.50}$$

gdje je K_B koeficijent kaznene funkcije, a x_f^k su zadane vrijednosti varijabli stanja na kraju vremenskog intervala.

Parcijalna derivacija kaznene funkcije po upravljačkoj varijabli je

$$\frac{\partial G_B}{\partial u_j^p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial G_B}{\partial x_N^k}\frac{\partial x_N^k}{\partial u_j^p}. \tag{4.51}$$

Sada nam preostaje odrediti parcijalne derivacije varijabli stanja po upravljačkim varijablama, počevši od kraja vremenskog intervala

$$\frac{\partial x_N^k}{\partial u_{N-1}^p}=\frac{\partial f^k(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{u}_{N-1})}{\partial u_{N-1}^p}$$

$$\frac{\partial x_N^k}{\partial u_{N-2}^p} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f^k(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r} \frac{\partial x_{N-1}^r}{\partial u_{N-2}^p} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f^k(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r} \frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2})}{\partial u_{N-2}^p} \tag{4.51a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_N^k}{\partial u_{N-3}^p} &= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f^k(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r} \frac{\partial x_{N-1}^r}{\partial u_{N-3}^p} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f^k(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r} \frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2})}{\partial u_{N-3}^p} = \\
&= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f^k(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r} \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^q} \frac{\partial x_{N-2}^q}{\partial u_{N-3}^p} = \\
&= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f^k(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})}{\partial x_{N-1}^r} \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial f^r(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2})}{\partial x_{N-2}^q} \frac{\partial f^q(\mathbf{x}_{N-3}, \mathbf{u}_{N-3})}{\partial u_{N-3}^p}
\end{aligned}$$

Ako uvedemo matričnu notaciju, koristeći oznake matrica iz (4.47a), i uvodeći slijedeće matrice

$$\mathbf{X}_u(j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_N^1}{\partial u_j^1} & \frac{\partial x_N^1}{\partial u_j^2} & \cdots & \frac{\partial x_N^1}{\partial u_j^m} \\ \frac{\partial x_N^2}{\partial u_j^1} & \frac{\partial x_N^2}{\partial u_j^2} & \cdots & \frac{\partial x_N^2}{\partial u_j^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N^n}{\partial u_j^1} & \frac{\partial x_N^n}{\partial u_j^2} & \cdots & \frac{\partial x_N^n}{\partial u_j^m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_u(j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_B}{\partial u_j^1} \\ \frac{\partial G_B}{\partial u_j^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_B}{\partial u_j^m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_x(N) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_B}{\partial x_N^1} \\ \frac{\partial G_B}{\partial x_N^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_B}{\partial x_N^n} \end{bmatrix}, \tag{4.51b}$$

možemo napisati

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_u(N-1) = \mathbf{U}^T(N-1) \\
&\mathbf{X}_u(N-2) = \mathbf{X}^T(N-1) \cdot \mathbf{U}^T(N-2) \\
&\mathbf{X}_u(N-3) = \mathbf{X}^T(N-1) \cdot \mathbf{X}^T(N-2) \cdot \mathbf{U}^T(N-3) \\
&\mathbf{X}_u(N-4) = \mathbf{X}^T(N-1) \cdot \mathbf{X}^T(N-2) \cdot \mathbf{X}^T(N-3) \cdot \mathbf{U}^T(N-4) \\
&\vdots \\
&\mathbf{X}_u(j) = \mathbf{X}^T(N-1) \cdot \mathbf{X}^T(N-2) \cdot \ldots \cdot \mathbf{X}^T(j+1) \cdot \mathbf{U}^T(j)
\end{aligned} \tag{4.51c}$$

gdje su $\mathbf{U}^T$ i $\mathbf{X}^T$ transponirane matrice.

Gornji sustav, zajedno sa (4.51) možemo preglednije zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
&\mathbf{G}_u(j) = \mathbf{X}_u^T(j)\cdot\mathbf{G}_x(N)\ , \qquad \mathbf{G}_u(N-1) = \mathbf{U}(N-1)\cdot\mathbf{G}_x(N)\ ,\\
&\mathbf{X}_u(j) = \mathbf{D}(j)\cdot\mathbf{U}^T(j),\\
&\mathbf{D}(j) = \mathbf{D}(j+1)\cdot\mathbf{X}^T(j+1),\quad \mathbf{D}(N-1) = \mathbf{I},
\end{aligned} \tag{4.52}$$

za $j = N-2, N-3, \ldots, 0$.

4.4 Metoda kaznenih funkcija za ograničenja tipa nejednakosti

Za ograničenja tipa nejednakosti

$$\mathbf{g}\big(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t)\big) \geq 0\,, \tag{4.53}$$

ili za diskretizirani slučaj i napisano po komponentama

$$g\ (\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i) \geq 0\,, \tag{4.54}$$

za $i = 0,1,\ldots,N-1;\quad j = 1,2,\ldots,p$,

također možemo koristiti metodu kaznenih funkcija u obliku

$$G_V(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{N-1}) = K_V^* \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{p} g_j^2(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i) H^-\Big(g_j(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)\Big), \tag{4.55}$$

gdje je funkcija $H^-(x)$ definirana prema (4.26), a konstanta K_V^* predstavlja veličinu "kazne" za prekoračenje ograničenja.

Sa ovom kaznenom funkcijom ukupna funkcija cilja ima slijedeći oblik

$$J(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{N-1}) = \min_{\mathbf{u}} T\sum_{i=0}^{N-1}\left[F(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i) + K_V \sum_{j=1}^{p} g_j^2(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i) H^-\Big(g_j(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)\Big)\right], \tag{4.56}$$

gdje je $K_V^* = TK_V$. Sada 'podintegralna funkcija' ima slijedeći oblik

$$F'(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i) = F(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i) + K_V \sum_{j=1}^{p} g_j^2(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i) H^-\Big(g_j(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)\Big), \tag{4.57}$$

a njene parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial F'(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)}{\partial u_i^k} = \frac{\partial F(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)}{\partial u_i^k} + 2K_V \sum_{j=1}^{p} g_j(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)\frac{\partial g_j(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)}{\partial u_i^k} H^-\Big(g_j(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)\Big), \tag{4.57a}$$

$$\frac{\partial F'(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)}{\partial x_i^k} = \frac{\partial F(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)}{\partial x_i^k} + 2K_V \sum_{j=1}^{p} g_j(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)\frac{\partial g_j(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)}{\partial x_i^k} H^-\Big(g_j(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{u}_i)\Big). \tag{4.57b}$$

U matričnoj notaciji, ako stavimo

$$\mathbf{V}_u(i)=\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_i^1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_i^1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_i^1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_i^2} & \frac{\partial g_2}{\partial u_i^2} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_i^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_i^m} & \frac{\partial g_2}{\partial u_i^m} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_i^m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_x(i)=\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_i^1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_i^1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_i^1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_i^2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_i^2} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_i^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_i^n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_i^n} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_i^n} \end{bmatrix},$$

(4.57c)

$$\mathbf{g}(i)=\begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)H^-\big((g_1(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)\big) \\ g_2(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)H^-\big((g_2(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)\big) \\ \vdots \\ g_p(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)H^-\big((g_p(\mathbf{x}_i,\mathbf{u}_i)\big) \end{bmatrix},$$

možemo gornje izraze napisati u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_u'(i) &= \mathbf{F}_u(i)+2K_V\mathbf{V}_u(i)\cdot\mathbf{g}(i) \\ \mathbf{F}_x'(i) &= \mathbf{F}_x(i)+2K_V\mathbf{V}_x(i)\cdot\mathbf{g}(i) \end{aligned}, \tag{4.57d}$$

Iz ovoga slijedi da jedina modifikacija koju trebamo učiniti u algoritmu je da vektorima $\mathbf{F}_u(i)$ i $\mathbf{F}_x(i)$ dodamo drugi član na desnoj strani prethodnih izraza, koji odgovara derivaciji kaznene funkcije.

4.5 Metoda kaznenih funkcija za ograničenja tipa jednakosti

Na kraju, razmotrit ćemo slučaj ograničenja tipa jednakosti

$$\mathbf{h}\big(\mathbf{x}(t),\,\mathbf{u}(t)\big)=0\,, \tag{4.58}$$

ili za diskretizirani slučaj i napisano po komponentama

$$h_j(\mathbf{x}_i,\,\mathbf{u}_i)=0\,, \tag{4.59}$$

za $i=0,1,\ldots,N-1;\quad j=1,2,\ldots,r$,

Kaznena funkcija je u obliku

$$G_E(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{N-1})=K_E^*\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{r}h_j^2(\mathbf{x}_i,\,\mathbf{u}_i)\,, \tag{4.60}$$

gdje je K_E^* koeficijent proporcionalnosti uz kaznenu funkciju. Vidimo da gornja kaznena funkcija ima minimalnu vrijednost jednaku nuli, u slučaju kada su zadovoljena ograničenja tipa jednakosti.

Sa ovom kaznenom funkcijom ukupna funkcija cilja ima slijedeći oblik

$$J(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{N-1}) = \min_{\mathbf{u}} T \sum_{i=0}^{N-1} \left[F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + K_E \sum_{j=1}^{r} h_j^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \right], \tag{4.61}$$

gdje je $K_E^* = TK_E$. Sada 'podintegralna funkcija' ima slijedeći oblik

$$F'(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + K_E \sum_{=} h \ (\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{4.62}$$

a njene parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial F'(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)}{\partial u_i^k} = \frac{\partial F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)}{\partial u_i^k} + 2K_E \sum_{j=1}^{r} h_j(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \frac{\partial h_j(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)}{\partial u_i^k}, \tag{4.62a}$$

$$\frac{\partial F'(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)}{\partial x_i^k} = \frac{\partial F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)}{\partial x_i^k} + 2K_E \sum_{j=1}^{r} h_j(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \frac{\partial h_j(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)}{\partial x_i^k}. \tag{4.62b}$$

U matričnoj notaciji, stavljajući

$$\mathbf{E}_u(i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_i^1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_i^1} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial u_i^1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial u_i^2} & \frac{\partial h_2}{\partial u_i^2} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial u_i^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial u_i^m} & \frac{\partial h_2}{\partial u_i^m} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial u_i^m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_x(i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_i^1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_i^1} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial x_i^1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_i^2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_i^2} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial x_i^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_i^n} & \frac{\partial h_2}{\partial x_i^n} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial x_i^n} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h}(i) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \\ h_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \\ \vdots \\ h_r(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \end{bmatrix}, \tag{4.62c}$$

možemo gornje izraze napisati u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_u'(i) &= \mathbf{F}_u(i) + 2K_V \mathbf{E}_u(i) \cdot \mathbf{h}(i) \\ \mathbf{F}_x'(i) &= \mathbf{F}_x(i) + 2K_V \mathbf{E}_x(i) \cdot \mathbf{h}(i) \end{aligned}, \tag{4.62d}$$

4.6 Konačni oblik BPTT algoritma za multivarijabilne sustave

Na kraju ćemo dati prikaz BPTT algoritma za općeniti problem optimalnog upravljanja s ograničenjima za multivarijabilne nelinerne dinamičke sustave, gdje ćemo sumirati rezultate dobivene u prethodnim podpoglavljima. Općenita formulacija problema je

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{x}}(t) = \phi\big(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{u}(t)\big), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \qquad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \\
&\mathbf{g}\big(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{u}(t)\big) \geq 0, \\
&\mathbf{h}\big(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{u}(t)\big) = 0, \\
&J = \min_{\mathbf{u}(t)} \int_{t_0}^{t_f} F\big(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{u}(t)\big) dt .
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

Nakon vremenske diskretizacije imamo

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \qquad \mathbf{x} \;\; = \mathbf{x} \;\; , \qquad \mathbf{x}_N = \mathbf{x}_f, \\
&g_j(\mathbf{x}_i,\, \mathbf{u}_i) \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, p, \\
&h_k(\mathbf{x}_i,\, \mathbf{u}_i) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, r, \\
&J(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{N-1}) = \min_{\mathbf{u}} T \sum_{i=0}^{N-1} F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

za $i = 0, 1, \ldots, N-1$, gdje je

$$
\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) = \mathbf{x}_i + T\phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \qquad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i^1 & x_i^2 & \cdots & x_i^n \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i^1 & u_i^2 & \cdots & u_i^m \end{bmatrix}^T .
$$

Problem se sastoji u pronalaženju upravljačkih varijabli $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{N-1})$, koje minimiziraju navedeni kriterij optimalnosti. Algoritam možemo prikazati u slijedećem obliku

1. ***Inicijalizacija gradijentnog algoritma***. *Za k=0 pridjelimo upravljačkim varijablama* $(\mathbf{u}_0^{(0)},\ \mathbf{u}_1^{(0)},\ \ldots,\ \mathbf{u}_{N-1}^{(0)})$ *proizvoljne vrijednosti (mogu biti i izvan dozvoljenog područja za vrijeme računarske simulacije).*

2. ***Računanje varijabli stanja*** $(\mathbf{x}_0^{(k)},\ \mathbf{x}_1^{(k)},\ \ldots,\ \mathbf{x}_N^{(k)})$ *za* $k = 0, 1, \ldots, M$ *na osnovu*

$$\mathbf{x}_{i+1}^{(k)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^{(k)}, \mathbf{u}_i^{(k)}), \quad \mathbf{x}_0^{(k)} = \mathbf{x}_0, \qquad i = 0,1,\ldots,N-1;$$

3. ***Računanje gradijenta***

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}_0^{(k)},\ \mathbf{u}_1^{(k)},\ \ldots,\ \mathbf{u}_{N-1}^{(k)})}{\partial \mathbf{u}_j^{(k)}}$$

za $k = 0, 1, \ldots, M$ *na osnovi BPTT algoritma.*

3.1 ***Inicijalizacija BPTT algoritma*** za $j = N-1$.

$$\mathbf{J}_u(j) = T\Big(\mathbf{F}_u(j) + 2K_V\mathbf{V}_u(j)\cdot\mathbf{g}(j) + 2K_E\mathbf{E}_u(j)\cdot\mathbf{h}(j)\Big) + \mathbf{U}(N-1)\cdot\mathbf{G}_x(N),$$
$$\mathbf{P}(N-1) = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{D}(N-1) = \mathbf{I},$$

3.2 ***Iteriranje*** za $j = N-2,\ N-3,\ \ldots, 0$.

$$\mathbf{F}_u'(j+1) = \mathbf{F}_u(j+1) + 2K_V\mathbf{V}_u(j+1)\cdot\mathbf{g}(j+1) + 2K_E\mathbf{E}_u(j+1)\cdot\mathbf{h}(j+1),$$
$$\mathbf{F}_x'(j+1) = \mathbf{F}_x(j+1) + 2K_V\mathbf{V}_x(j+1)\cdot\mathbf{g}(j+1) + 2K_E\mathbf{E}_x(j+1)\cdot\mathbf{h}(j+1),$$
$$\mathbf{P}(j) = \mathbf{F}_x'(j+1) + \mathbf{X}(j+1)\cdot\mathbf{P}(j+1),$$
$$\mathbf{D}(j) = \mathbf{D}(j+1)\mathbf{X}^T(j+1),$$
$$\mathbf{J}_u(j) = T\Big(\mathbf{F}_u'(j) + \mathbf{U}(j)\cdot\mathbf{P}(j)\Big) + \mathbf{U}(j)\cdot\mathbf{D}^T(j)\cdot\mathbf{G}_x(N)$$

4. ***Računanje nove iteracije upravljačkih varijabli*** $(\mathbf{u}_0^{(k+1)},\ \mathbf{u}_1^{(k+1)},\ \ldots,\ \mathbf{u}_{N-1}^{(k+1)})$ *na osnovu gradijentnog algoritma*

$$\mathbf{u}_j^{(k+1)} = \mathbf{u}_j^{(k)} - \eta\frac{\partial J(\mathbf{u}_0^{(k)},\ \mathbf{u}_1^{(k)},\ \ldots,\ \mathbf{u}_{N-1}^{(k)})}{\partial \mathbf{u}_j^{(k)}},$$

za $k = 0, 1, \ldots, M$. *Pomičemo indeks za jedan* $k \leftarrow k+1$ *i vraćamo se na 2. korak.*

Primjer 4.2 Razmotrimo problem optimalnog upravljanja za sustav drugog reda

$$\dot{x}_1 = x_2 ,$$

$$\dot{x}_2 = u$$

sa zadanim početnim i rubnim uvjetima

$$x_1(0) = 1 , \qquad x_1(2) = 0 ,$$

$$x_2(0) = 1 , \qquad x_2(2) = 0 ,$$

te s kriterijem optimalnosti

$$J = \min_u 0.5 \int_0^2 u^2 dt .$$

Analitičko rješenje ovog problema je

$$x_1(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{7}{4}t^2 + t + 1 , \qquad x_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1 ,$$

$$u(t) = 3t - \frac{7}{2}$$

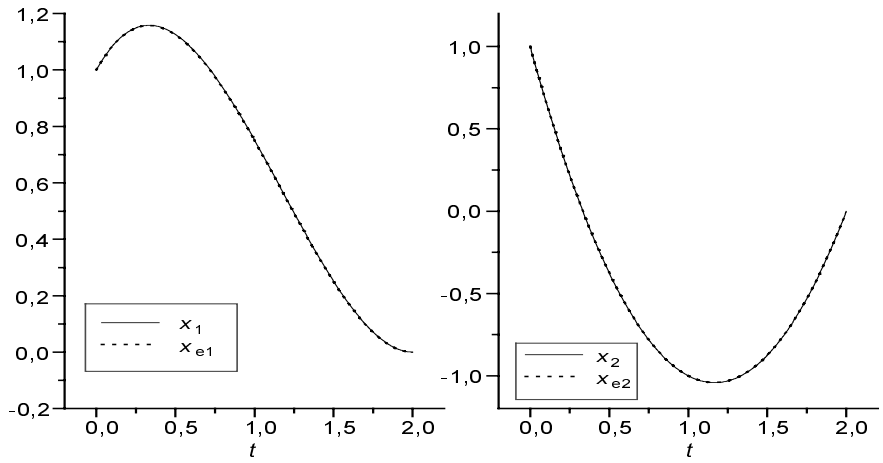
Ako sada primjenimo prethodno izvedeni algoritam na rješavanje ovog problema, imamo

$$\mathbf{X}(j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{U}(j) = \begin{bmatrix} 0 & T \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G}_x(N) = 2K_B \begin{bmatrix} (x_N^1 - x_f^1) \\ (x_N^2 - x_f^2) \end{bmatrix}$$

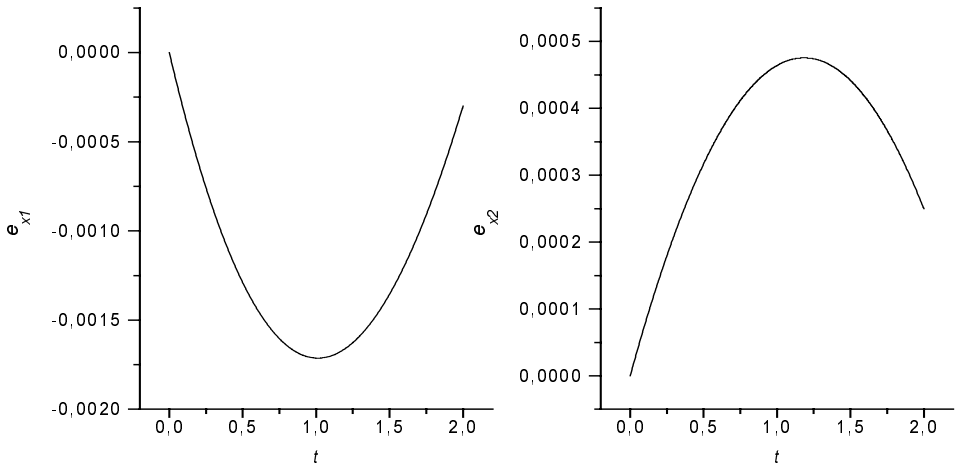
odnosno,

$$\mathbf{F}'_x(j) = \mathbf{0} , \qquad \mathbf{F}'_u(j) = u ,$$

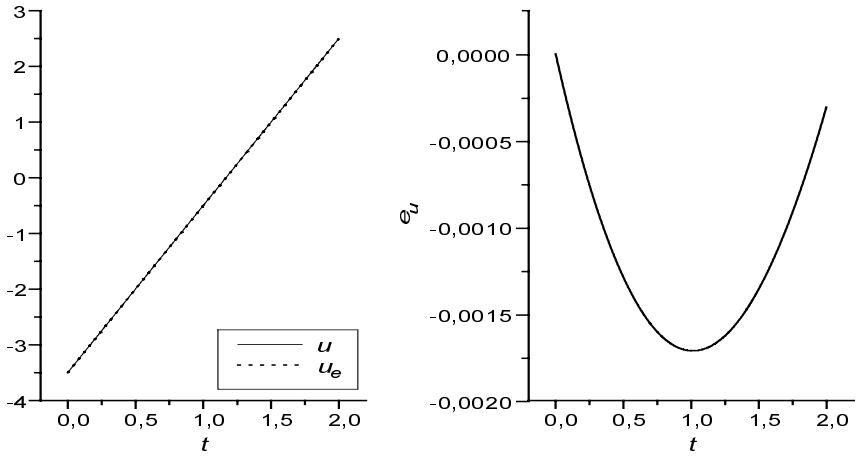
za $j = N-2,\ N-3,\ \ldots, 0$.



Slika 4.10 *Usporedba analitičkih rješenja (x_{e1}, x_{e2}) s numeričkim (x_1, x_2).*



Slika 4.11 *Odstupanja analitičkih rješenja od numeričkih* $\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_e - \mathbf{x}$.



Slika 4.12 *Usporedba i međusobno odstupanje analitičkog rješenja* (u_e) *od numeričkog* (u).

Na slici 4.10 prikazana su rješenja $x_1(t)$, $x_2(t)$, dobivena BPTT algoritmom, u usporedbi s analitičkim rješenjima $x_{e1}(t)$, $x_{e2}(t)$, dok su na slici 4.11 prikazana odstupanja analitičkih rješenja od numeričkih, $e_{x1} = x_{e1}(t) - x_1(t)$, $e_{x2} = x_{e2}(t) - x_2(t)$. Slika 4.12 prikazuje upravljačku varijablu $u(t)$, dobivenu BPTT algoritmom, u usporedbi s analitičkim rješenjima $u_e(t)$ i odstupanja ta dva rješenja $e_u = u_e(t) - u(t)$.

Vrijednosti numeričkih parametara su

$$N = 1000, \qquad M = 300, \qquad \eta = 0.01, \qquad K_B = 5000.$$

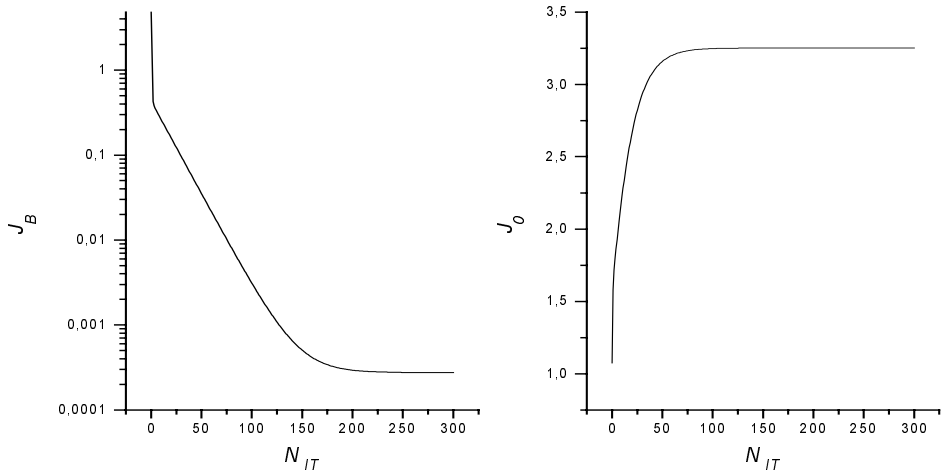
Definirajmo slijedeće funkcije

$$J_B = \frac{1}{2}\left(\left|x_N^1 - x_f^1\right| + \left|x_N^2 - x_f^2\right|\right),$$

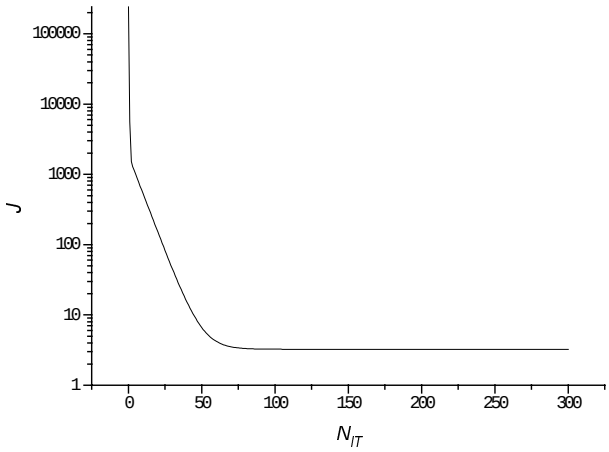
$$J_0 = 0.5T\sum_{j=0}^{N-1} u_j^2 ,$$

$$J = 0.5T\sum_{j=0}^{N-1} u_j^2 + K_B \sum_{k=1}^{2} (x_N^k - x_f^k)^2 ,$$

koje imaju ista značenja kao u prvom primjeru. Vrijednosti tih funkcija u ovisnosti o broju iteracija gradijentnog algoritma prikazane su na slikama 4.13 i 4.14.



Slika 4.13 *Vrijednosti* J_B, J_0, *u ovisnosti o broju iteracija* N_{IT}.



Slika 4.14 *Vrijednosti* J *u ovisnosti o broju iteracija* N_{IT}.

Ako usporedimo prvi i drugi primjer, primjećujemo da je u drugom primjeru potrebno bitno manje iteracija za dostizanje minimalne vrijednosti ukupne funkcije cilja, zbog toga što u drugom primjeru nema kaznene funkcije za ograničenja tipa nejednakosti, koja bitno usporava konvergenciju optimalnom rješenju.

S druge strane, brzina konvergencije ovisi o međusobnim omjerima koeficijenata kaznenih funkcija, kao i o samom koeficijentu konvergencije η. Npr. ako uzmemo veliki omjer K_B / K_V tada će vrijednost funkcije J_B konvergirati nuli puno brže nego J_V. Vrijednosti tih koeficijenata treba birati tako da postignemo što je moguće veću brzinu konvergencije, a da pri tom ne narušimo stabilnost algoritma.