7. Optimalno upravljanje kooperativnim radom dva robota

Optimalno upravljanje nelinearnim modelom robota uz definirani kriterij optimalnosti predstavlja i dalje relativno težak zadatak. Problem se usložnjava kad dva ili više robota rade u kooperaciji na zajedničkom zadatku dijeleći radni prostor, vrijeme, ograničenja i funkciju cilja.

U prethodnim poglavljima prikazali smo numerički algoritam optimalnog upravljanja i ilustrirali ga na linearnim problemima s poznatim analitičkim rješenjima. U ovom poglavlju primjenit ćemo izvedeni algoritam na problem optimalnog upravljanja robotom s dva stupnja slobode, kao i na problem optimalnog koordiniranog rada dva robota.

7.1 Dinamika robota s dva stupnja slobode gibanja

Nelinearni dinamički model manipulatora s dvije slobode gibanja [9], dan je preko cilindričnih koordinata u obliku

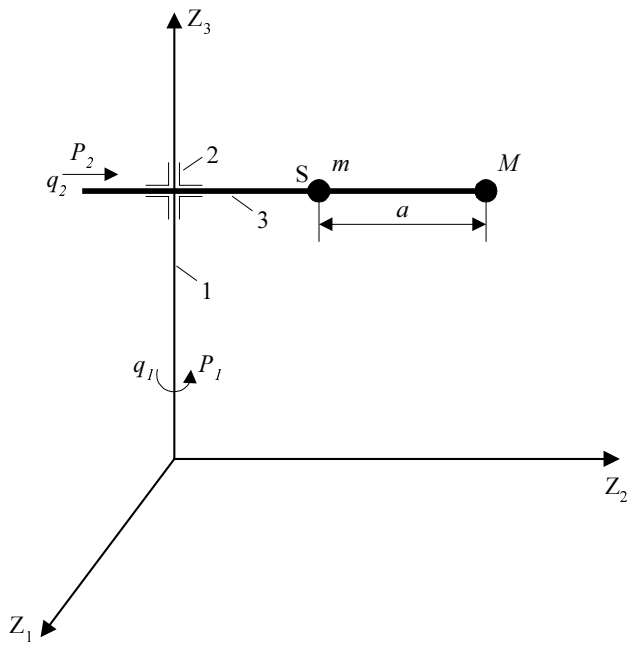
$$\begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & 0 \\ 0 & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \\ N_2(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} &M_{11}(\mathbf{q}) = J_1 + J_2 + (m+M)q_2^2 + 2Maq_2 + Ma^2, \qquad M_{22}(\mathbf{q}) = m + M, \\ &N_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = 2\left[(m+M)q_2 + Ma\right]\dot{q}_1\dot{q}_2, \\ &N_2(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = -\left[mq_2 + M\left(a+q_2\right)\right]\dot{q}_1^2, \end{aligned} \tag{7.2}$$

gdje su $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$ cilindrične koordinate centra mase štapa 3, (slika 7.1), M je totalna masa (prihvatnica plus teret), m je masa štapa, J_1 je totalni moment inercije štapova 1 i 2 u odnosu na os Z_3, J_2 je moment inercije štapa 3 u odnosu na os koja je paralelna osi Z_2 a prolazi kroz točku S, a je udaljenost između centra mase M i točke S. $P_1(t)$ predstavlja upravljački moment rotacijske slobode gibanja q_1, a $P_2(t)$ je upravljačka sila translacijske slobode gibanja q_2.

Numerički iznosi navedenih parametara su:

$$M = 50\,kg\,;\quad m = 97\,kg\,;\quad J_1 + J_2 = 193\,kg\,m^2\;;\quad a = 1.1\,m\;;$$
$$P_{1\max} = 600\,Nm\;;\quad P_{2\max} = 500\,N\,.$$



Slika 7.1 *Prikaz manipulatora s dva stupnja slobode gibanja (rotacija i translacija).*

Ako želimo gornji sustav diferencijalnih jednadžbi drugog reda prebaciti u sustav jednadžbi prvog reda uvodimo slijedeću smjenu koordinata

$$q_1 = x_1\,;\ \dot{q}_1 = x_2\,;\ q_2 = x_3\,;\ \dot{q}_2 = x_4\;;\quad P_1(t) = u_1(t)\,;\quad P\ (t) = u\ (t)\,,$$

i zbog preglednijeg zapisa uvodimo slijedeće konstante

$$A_1 = J_1 + J_2 + Ma^2\,;\quad A\ = 2\,Ma\,;\quad A\ = m + M\,,$$

tako da sada imamo

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{-2A_3x_2x_3x_4 - A_2x_2x_4}{A_1 + A_2x_3 + A_3x_3^2} + \frac{u_1(t)}{A_1 + A_2x_3 + A_3x_3^2} \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= x_3x_2^2 - \frac{A_2}{2A_3}x_2^2 + \frac{u_2(t)}{A_3}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Ovim smo, dakle, dinamiku robota s dva stupnja slobode gibanja sveli na sustav četiri nelinearne diferencijalne jednadžbe prvog reda, prema (4.35). Nakon diskretizacije, gornji sustav diferencijalnih jednadžbi prelazi u sustav diferencijskih jednadžbi oblika (4.39). Jacobbijeve matrice $\mathbf{X}(j), \mathbf{U}(j)$ za j-ti vremenski trenutak ($t_j = j\tau$, gdje je $\tau = (t_f - t_0)/N$) su

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & 1+\tau\dfrac{-C_1x_3x_4-C_2x_4}{A_1+A_2x_3+A_3x_3^2} & 0 & \tau\left(-2\dfrac{D_1}{B}x_2x_3-2\dfrac{D_{21}}{B}x_2\right) \\ 0 & X_{32} & 1 & -\tau\dfrac{D_1}{B}x_2^2 \\ 0 & \tau\dfrac{-C_1x_2x_3-C_2x_2}{A_1+A_2x_3+A_3x_3^2} & \tau & 1 \end{bmatrix}, \tag{7.4}$$

gdje je

$$X_{32}=-\tau\frac{C_1x_2x_4}{A_1+A_2x_3+A_3x_3^2}-\tau\frac{A_2+2A_3x_3}{\left(A_1+A_2x_3+A_3x_3^2\right)^2}\left(-C_1x_2x_3x_4-C_2x_2x_4+u_1(t)\right),$$

i

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} 0 & \tau\dfrac{1}{A_1+A_2x_3+A_3x_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau\dfrac{1}{B} \end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

7.2 Vremenski optimalno upravljanje robotom s dva stupnja slobode gibanja

Uz poznatu dinamiku robota, preostaje nam još da definiramo kriterij upravljanja na osnovu kojeg ćemo računati upravljačke funkcije $u_1(t)$ i $u\ (t)$. Problem koji ćemo ovdje razmatrati biti će problem najkraćeg vremena potrebnog da robot prijeđe iz početnog u konačno stanje uz zadana ograničenja upravljačkih varijabli. Drugim riječima, treba odrediti upravljačke varijable $u_1(t)$ i $u\ (t)$, za koje će robot prijeći iz početnog stanja

$$x_1(0)=q_1(0)=0\,rad,$$

$$x_2(0)=\dot{q}_1(0)=0\,rad\cdot s^{-1},$$

$$x_3(0)=q_2(0)=0\,m,$$

$$x_4(0)=\dot{q}_2(0)=0\,m\cdot s^{-1},$$

u konačno

$$x_1(t_f)=q_1(t_f)=\frac{\pi}{2}rad,$$

$$x_2(t_f)=\dot{q}_1(t_f)=0\,rad\cdot s^{-1},$$

$$x_3(t_f)=q_2(t_f)=1\,m,$$

$$x_4(t_f) = \dot{q}_2(t_f) = 0\, m \cdot s^{-1},$$

za najkraće vrijeme $t_{\min} \equiv t_f$, uz zadana ograničenja

$$\left| u_1(t) \right| \le u_{1\max},$$

$$\left| u_2(t) \right| \le u_{2\max},$$

gdje je

$$u_{1\max} = 600\, Nm, \qquad u_{2\max} = 500\, N.$$

Ukupna funkcija cilja, J, jednaka je sumi kaznene funkcije za ograničenja, G_V, i kaznene funkcije za rubne uvjete, G_B, $J = G_V + G_B$, gdje je

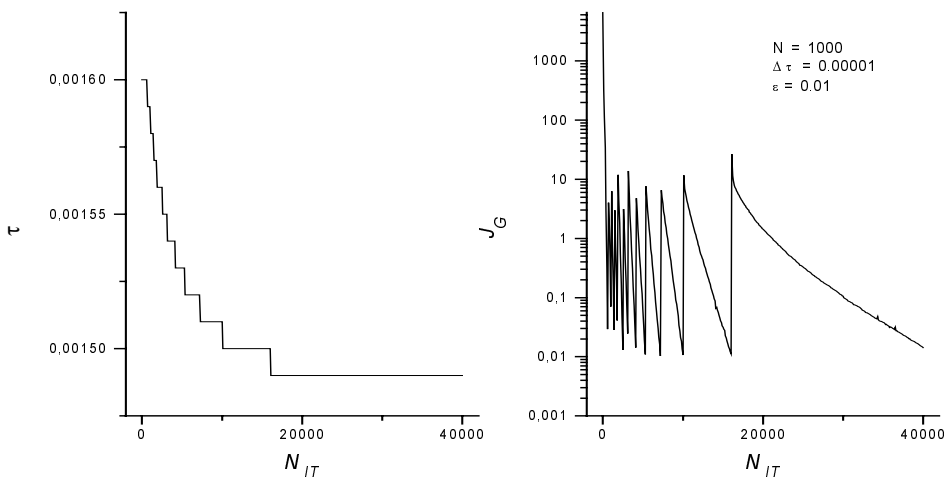
$$G_V = \tau K_V \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{2} \left((u_{k\max} - u_i^k)^2 H^-(u_{k\max} - u_i^k) + (u_{k\max} + u_i^k)^2 H^-(u_{k\max} + u_i^k) \right), \tag{7.6}$$

$$G_B = K_B \sum_{k=1}^{4} (x_N^k - x_f^k)^2, \tag{7.7}$$

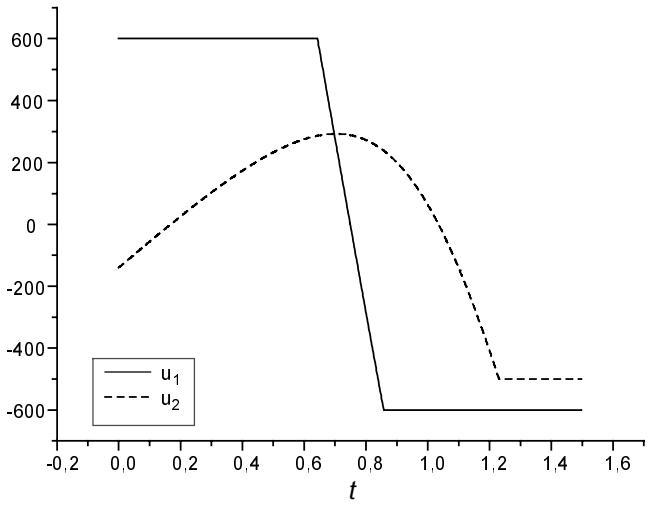
dok smo za funkciju $J_G(\tau)$ uzeli $J_G = \frac{1}{\tau} G_V + G_B$, (faktor $1/\tau$ je zbog toga da bismo izbjegli eksplicitnu ovisnost funkcije $J_G(\tau)$ o τ). Koristili smo metodu konjugiranog gradijenta. Vrijednosti konstanti su

$N = 1000$, $\qquad M = 10000$, $\qquad K_B = 800$, $\qquad K_V = 0.04$.

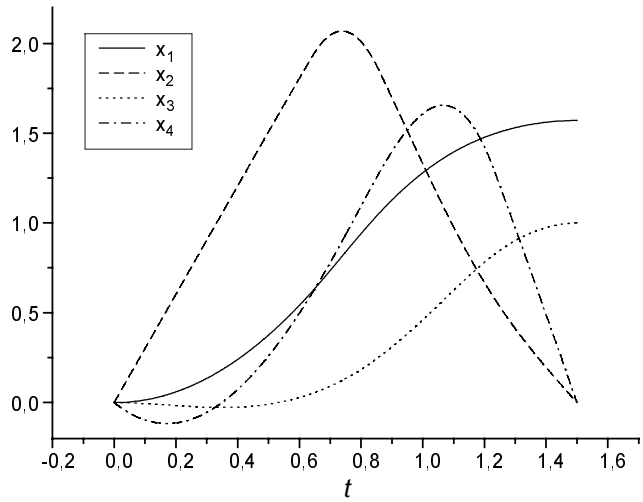
Kao što vidimo na slici 7.2, uz zadanu točnost $\varepsilon \equiv J_{\min} = 0.01$ dobili smo minimalno vrijeme $t_{\min} = 1.5\, s$, odnosno $\tau_{\min} = t_{\min} / N$. Zatim smo za to vrijeme, pomoću BPTT algoritma uz $M = 10000$, dobili rezultate prikazane na slikama 7.3 do 7.5.



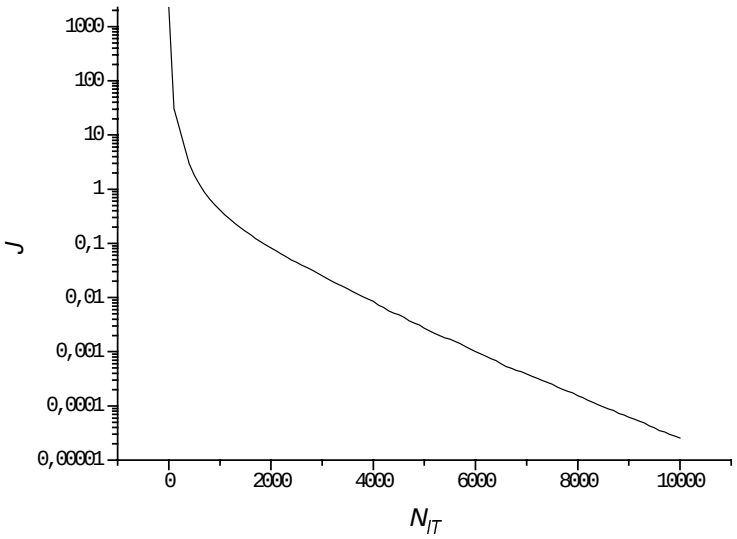
Slika 7.2 *Ovisnost τ i J_G o broju iteracija.*



Slika 7.3 *Vremenska ovisnost funkcija upravljanja.*



Slika 7.4 *Vremenska ovisnost varijabli stanja.*



Slika 7.5 *Ovisnost* J *o broju iteracija.*

7.3 Izbjegavanje prepreka

Jedan od zadataka koji postavljamo robotu jeste zaobilaženje prepreka. Pretpostavlja se poznavanje položaja i oblika prepreke. Zbog jednostavnosti, kao prepreku uzet ćemo kružnicu radijusa R', s centrom u točki (x_0, y_0). Označimo minimalnu udaljenost između kružnice i ruke manipulatora s δR. To je udaljenost do koje dopuštamo ruci manipulatora da se približi. Sada imamo kružnicu radijusa $R = R' + \delta R$ čija je jednadžba

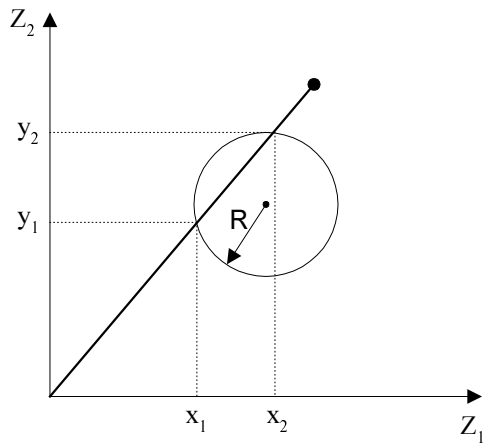
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \ . \tag{7.8}$$

Ruku manipulatora možemo prikazati kao dužinu koja leži na pravcu

$$y = \tan q_1 \cdot x \ , \tag{7.9}$$

tako da iz gornje dvije jednadžbe možemo naći uvjete presjeka kružnice i pravca, kao i same koordinate točaka presjeka. Uvjet da bi pravac sjekao kružnicu jeste da je vrijednost determinante D veća ili jednaka nuli

$$D = 4\left(x_0 + y_0 \tan q_1\right)^2 - 4\left(1 + \tan^2 q_1\right)\left(x_0^2 + y_0^2 - R^2\right) \geq 0 \, . \tag{7.10}$$



Slika 7.6 *Prikaz presjeka ruke manipulatora i prepreke.*

U tom slučaju, možemo naći koordinate presjeka

$$x_{1,2} = \frac{2\left(x_0 + y_0 \tan q_1\right) \pm \sqrt{D}}{2\left(1 + \tan^2 q_1\right)}$$
$$y_{1,2} = \tan q_1 \cdot x_{1,2} \tag{7.11}$$

odnosno, udaljenosti točaka presjeka od ishodišta koordinatnog sustava

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ , \qquad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\ . \tag{7.12}$$

Ako sa $r_{\min} = \min\{r_1, r_2\}$ označimo manju od te dvije udaljenosti, tada možemo formulirati uvjet koji će nam garantirati da ruka manipulatora zaobilazi prepreku u *i*-tom vremenskom trenutku

$$a + q_i^2 \le r_{\min}(q_i^1)\,, \tag{7.13}$$

za $i = 0,1,\ldots,N$, tako da možemo za kaznenu funkciju napisati

$$G_p = K_p \sum_{i=0}^{N} \left(r_{\min}(q_i^1) - q_i^2 - a\right)^2 H^-\left(r_{\min}(q_i^1) - q_i^2 - a\right) H^+\left(D_i\right), \tag{7.14}$$

gdje je

$$D_i = 4\left(x_0 + y_0 \tan q_i^1\right)^2 - 4\left(1 + \tan^2 q_i^1\right)\left(x_0^2 + y_0^2 - R^2\right), \tag{7.15}$$

i

$$H^+(x) = H^-(-x)\,.$$

Parcijalne derivacije kaznene funkcije po varijablama stanja su

$$\frac{\partial G_p}{\partial q_i^1} = 2K_p\left(r_{\min}(q_i^1) - q_i^2 - a\right)\frac{\partial r_{\min}(q_i^1)}{\partial q_i^1} H^-\left(r_{\min}(q_i^1) - q_i^2 - a\right) H^+\left(D_i\right), \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial G_p}{\partial q_i^2} = -2K_p\left(r_{\min}(q_i^1) - q_i^2 - a\right) H^-\left(r_{\min}(q_i^1) - q_i^2 - a\right) H^+\left(D_i\right), \tag{7.17}$$

Ako pretpostavimo da se kružnica nalazi u prvom kvadrantu, odnosno x_0, y_0, $\tan q_1$ su pozitivni, tada je očigledno da je $r_{\min} = r_2$, odnosno

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = x_2\sqrt{1+\tan^2 q_1} =$$
$$= \frac{(x_0 + y_0 \tan q_1) - \sqrt{(x_0 + y_0 \tan q_1)^2 - (1+\tan^2 q_1)(x_0^2 + y_0^2 - R^2)}}{\sqrt{1+\tan^2 q_1}}$$

što nagovještava popriličnu složenost parcijalne derivacije $\frac{\partial r_{\min}}{\partial q_1} = \frac{\partial r_2}{\partial q_1}$.

Da bi izbjegli komplikacije oko računanja gore navedene parcijalne derivacije, uzet ćemo samo promjenu radijusa uslijed kršenja ograničenja, odnosno

$$\frac{\partial G_p}{\partial q_i^1} = 0, \tag{7.18}$$

$$\frac{\partial G_p}{\partial q_i^2} = -2K_p\left(r_2 - q_i^2 - a\right)H^-\left(r_2 - q_i^2 - a\right)H^+\left(D_i\right), \tag{7.19}$$

ili, u drugom slučaju, još jednostavniji oblik

$$\frac{\partial G_p}{\partial q_i} = 0, \tag{7.20}$$

$$\frac{\partial G_p}{\partial q_i^2} = K_p H^-\left(r_2 - q_i^2 - a\right)H^+\left(D_i\right), \tag{7.21}$$

Kao što ćemo vidjeti, gornje aproksimacije ne utječu na kvalitetu rješenja, osim što eventualno smanjuju brzinu konvergencije optimalnom rješenju. Izrazi (7.19) i (7.20) govore nam da u slučaju presjeka ruke manipulatora s preprekom, kut q ne mjenjamo, dok duljinu ruke, odnosno q_2, smanjujemo konstantnom stopom smanjivanja izraženom pozitivnim koeficijentom K_p. Time smo problem bitno pojednostavili i sveli ga samo na geometrijsko određivanje presjeka pravca na kojem leži ruka manipulatora s rubom prepreke.

Međutim, izbjegavši komplikacije oko egzaktnog računanja parcijalnih derivacija, došli smo do drugog problema. Metoda konjugiranog gradijenta nam u ovom slučaju ne daje dobre rezultate jer gore navedene parcijalne derivacije ne pripadaju kaznenoj funkciji. Zbog toga koristimo gradijentni algoritam s konstantnim koeficijentom konvergencije.

Problem koji smo razmatrali je prijelaz robota iz početnog stanja

$$x_1(0) = q_1(0) = \frac{\pi}{12} rad \quad ,$$

$$x_2(0) = \dot{q}_1(0) = 0\, rad \cdot s^{-1},$$

$$x_3(0) = q_2(0) = 1\, m,$$

$$x_4(0) = \dot{q}_2(0) = 0\, m \cdot s^{-1},$$

u konačno

$$x_1(t_f) = q_1(t_f) = \frac{5\pi}{12} rad\,,$$

$$x_2(t_f) = \dot{q}_1(t_f) = 0\, rad \cdot s^{-1},$$

$$x_3(t_f) = q_2(t_f) = 1\, m,$$

$$x_4(t_f) = \dot{q}_2(t_f) = 0\, m \cdot s^{-1},$$

izbjegavajući prepreku u obliku kružnice radijusa $R' = 0.2\, m$, s koordinatama središta kružnice u $x_0 = 1.0\, m$, $y_0 = 1.0\, m$, te zadanom minimalnom udaljenošću $\delta R = 0.01\, m$, za najkraće vrijeme $t_{\min} \equiv t_f$, uz zadana ograničenja

$$\left| u_1(t) \right| \le u_{1\max},$$

$$\left| u_2(t) \right| \le u_{2\max},$$

gdje je

$$u_{1\max} = 600\, Nm, \qquad u_{2\max} = 500\, N\,.$$

Funkcija cilja jednaka je $J = G_V + G_p + G_B$, gdje je G_V kaznena funkcija za ograničenja upravljačkih varijabli dana sa (7.6), a G_p je kaznena funkcija za ograničenja varijabli stanja koja je jednaka

$$G_p = \tau K_p \sum_{i=0}^{N} (r_{\min} - a - q_i^2)^2 H^-\left(r_{\min} - a - q_i^2\right) H^+\left(D_i\right), \tag{7.22}$$

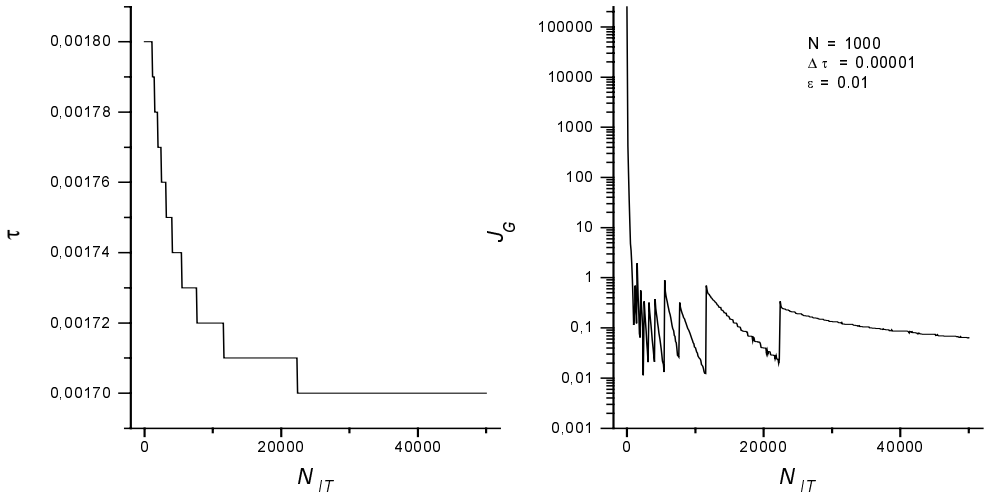
Za funkciju $J_G(\tau)$ uzeli smo isti oblik kao za J, s tom razlikom što smo umjesto promjenjive vrijednosti τ stavili konstantnu τ^0, početnu vrijednost iteracijskog procesa za računanje τ_{in} (zbog izbjegavanja eksplicitne ovisnosti $J_G(\tau)$ o τ). Koristili smo gradijentni algoritam s konstantnim koeficijentom konvergencije η.

Vrijednosti konstanti su

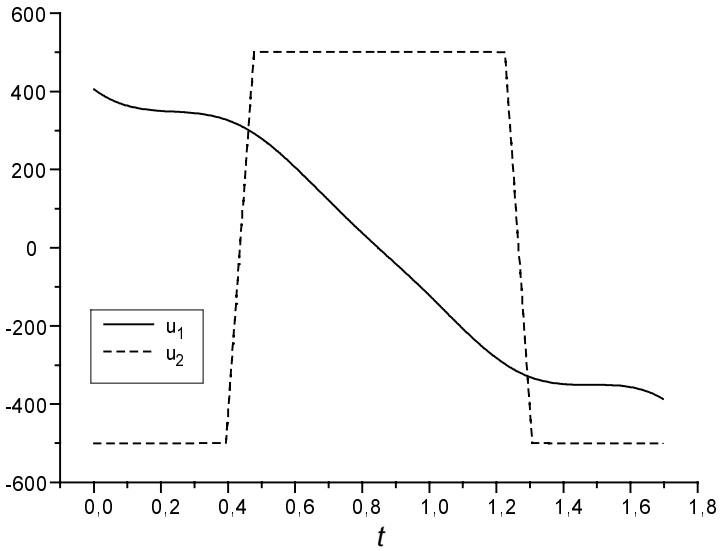
$N = 1000$, $M = 30000$, $K_B = 600$, $K_V = 0.01$, $K_p = 1000$, $\eta = 1000$.

Kao što vidimo na slici 7.7, uz zadanu točnost $\varepsilon \equiv J_{\text{in}} = 0.01$ dobili smo minimalno vrijeme $t_{\min} = 1.71\, s$. Za to vrijeme, $t_{\min} = 1.71\, s$, pomoću BPTT algoritma uz $M = 30000$, dobili smo rezultate prikazane na slikama 7.8 do 7.11.

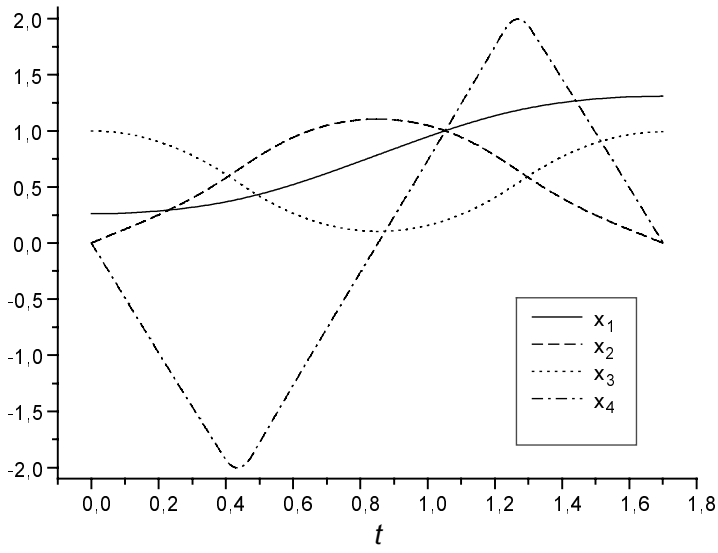
Slika 7.11 prikazuje trajektoriju ruke robota ($q + a$) u ravnini $x - y$. Prepreka je kružnica radijusa $R' = 0.2\, m$ (*prepreka 1*). Sa zadanom minimalnom udaljenošću imamo kružnicu radijusa $R = 0.21\, m$ (*prepreka 2*). Vidimo da optimalna trajektorija (*trajektorija 1*) tangira kružnicu radijusa R, odnosno, zaobilazi prepreku dostigavši minimalnu udaljenost u jednoj točki. Na slici je također prikazana trajektorija, za isto vrijeme $t_{\min} = 1.71\, s$, u slučaju kada nema prepreke.



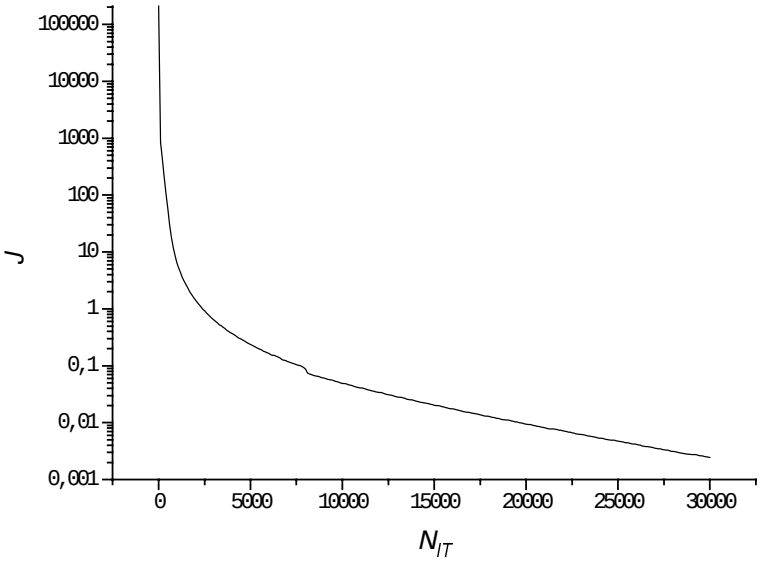
Slika 7.7 *Ovisnost* τ *i* J_G *o broju iteracija.*



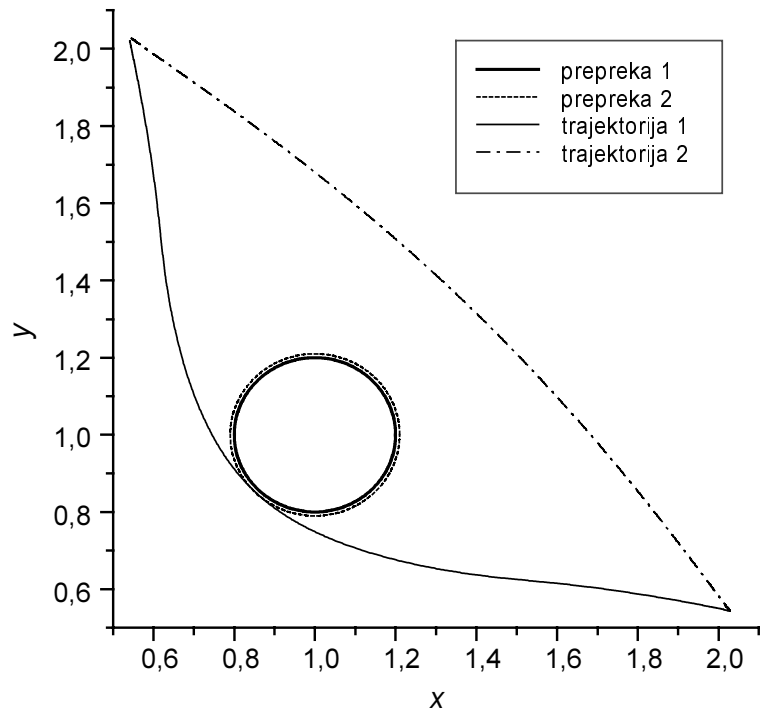
Slika 7.8 *Vremenska ovisnost funkcija upravljanja.*



Slika 7.9 *Vremenska ovisnost varijabli stanja.*



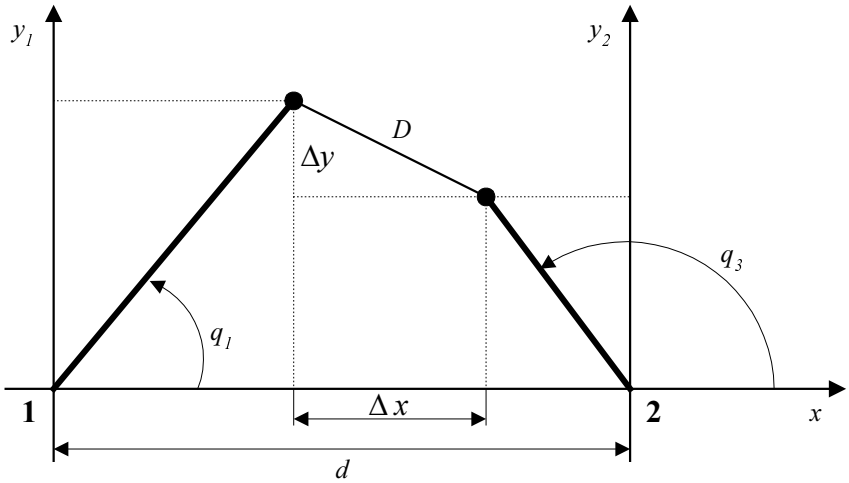
Slika 7.10 *Ovisnost* J *o broju iteracija.*



Slika 7.11 *Prikaz trajektorije s preprekom u koordinatnom sustavu.*

7.4 Kooperativni rad dva robota

Slijedeći problem koji ćemo razmatrati je kooperativni rad dva robota. Pod kooperativnim radom podrazumjevamo međusobno usklađeni rad robota na zajednički definiranom cilju. U našem slučaju razmatrat ćemo problem prenošenja krutog tereta s jednog mjesta na drugo pomoću dva robota. Pretpostavljamo da teret ima dva hvatišta za prenošenje. Pošto se radi o krutom teretu, razmak između hvatišta je konstantan tokom prenošenja tereta, što znači da je uvjet koji moramo postaviti robotima konstantna udaljenost između ruku (prihvatnica) manipulatora za vrijeme prenošenja tereta.



Slika 7.12 *Prijenos krutog tereta duljine* D *pomoću dva robota.*

Jednadžbama gibanja prvog robota (7.3), analogno dodajemo jednadžbe gibanja drugog robota

$$\begin{aligned}
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= \frac{-2A_3x_6x_7x_8 - A_2x_6x_8}{A_1 + A_2x_7 + A_3x_7^2} + \frac{u_3(t)}{A_1 + A_2x_7 + A_3x_7^2} \\
\dot{x}_7 &= x_8 \\
\dot{x}_8 &= x_7x_6^2 - \frac{A_2}{2A_3}x_6^2 + \frac{u_4(t)}{A_3}
\end{aligned} \tag{7.23}$$

gdje je $q_3 = x_5$; $\dot{q}_3 = x_6$; $q_4 = x_7$; $\dot{q}_4 = x_8$ (q_3 i q_4 drugog robota imaju analogna značenja kao q_1 i q_2 za prvog robota, respektivno). Treba naglasiti da se varijable stanja drugog robota odnose na njegov vlastiti koordinatni sustav (u slučaju kada roboti nisu mobilni), na slici 7.12 sustav 2.

Razmak između ruku manipulatora dva robota u *i*-tom vremenskom trenutku možemo dobiti kao

$$r_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}\,, \tag{7.24}$$

gdje je

$$\Delta x_i = d + (x_i^7 + a)\cos x_i^5 - (x_i^3 + a)\cos x_i^1, \tag{7.25}$$

$$\Delta y_i = (x_i^7 + a)\sin x_i^5 - (x_i^3 + a)\sin x_i^1. \tag{7.26}$$

Uvjet da je razmak između ruku manipulatora dva robota u *i*-tom vremenskom trenutku, r_i, jednak razmaku između hvatišta, *D*, možemo izraziti kao

$$r_i = D\,, \tag{7.27}$$

za $i = 0,1,\ldots,N$. Na osnovu gore navedenog uvjeta možemo formirati kaznenu funkciju čijom minimizacijom zadovoljavamo postavljena ograničenja

$$G_E = K_E \sum_{i=0}^{N} (r_i - D)^2\,. \tag{7.28}$$

Parcijalne derivacije gornje funkcije po varijablama stanja su

$$\frac{\partial G_E}{\partial x_i^k} = 2K_E T(r_i - D)\frac{\partial r_i}{\partial x_i^k}\,, \tag{7.29}$$

za $i = 0,1,\ldots,N$, $k = 1,2,\ldots,8$, gdje je

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_i^k} = \frac{1}{r_i}\left(\Delta x_i \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i^k} + \Delta y_i \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x_i^k}\right), \tag{7.30}$$

odnosno

$$\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i^1} = (x_i^3 - a)\sin x_i^1, \qquad \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x_i^1} = -(x_i^3 + a)\cos x_i^1,$$

$$\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i^3} = -\cos x_i^1, \qquad \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x_i^3} = -\sin x_i^1,$$

$$\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i^5} = -(x_i^7 - a)\sin x_i^5, \qquad \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x_i^5} = (x_i^7 + a)\cos x_i^5,$$

$$\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i^7} = \cos x_i^5, \qquad \frac{\partial \Delta y_i}{\partial x_i^7} = \sin x_i^5,$$

dok su ostale parcijalne derivacije jednake nuli.

Problem koji smo razmatrali je prenošenje tereta iz početnog položaja, definiranog početnim uvjetima oba robota

$$x_1(0) = q_1(0) = 0\,rad \quad , \qquad x_5(0) = q_3(0) = \pi\,rad \quad ,$$

$$x_2(0) = \dot{q}_1(0) = 0\,rad \cdot s^{-1}, \qquad x_6(0) = \dot{q}_3(0) = 0\,rad \cdot s^{-1},$$

$$x_3(0) = q_2(0) = 0.4\,m, \qquad x_7(0) = q_4(0) = 0.2\,m,$$

$$x_4(0) = \dot{q}_2(0) = 0\,m \cdot s^{-1}, \qquad x_8(0) = \dot{q}_4(0) = 0\,m \cdot s^{-1},$$

u konačni položaj, definiran rubnim uvjetima oba robota

$$x_1(t_f) = q_1(t_f) = \frac{\pi}{2} rad, \qquad x_5(t_f) = q_3(t_f) = 2.62604\,rad,$$

$$x_2(t_f) = \dot{q}_1(t_f) = 0\,rad \cdot s^{-1}, \qquad x_6(t_f) = \dot{q}_3(t_f) = 0\,rad \cdot s^{-1},$$

$$x_3(t_f) = q_2(t_f) = 0.4\,m, \qquad x_7(t_f) = q_4(t_f) = 2.34818\,m,$$

$$x_4(t_f) = \dot{q}_2(t_f) = 0\,m \cdot s^{-1}, \qquad x_8(t_f) = \dot{q}_4(t_f) = 0\,m \cdot s^{-1},$$

uz zadana ograničenja upravljačkih varijabli

$$\left| u_1(t) \right| \le u_{1\max}, \qquad \left| u_3(t) \right| \le u_{1\max},$$

$$\left| u_2(t) \right| \le u_{2\max}, \qquad \left| u_4(t) \right| \le u_{2\max},$$

gdje je

$$u_{1\max} = 600\,Nm, \qquad u_{2\max} = 500\,N,$$

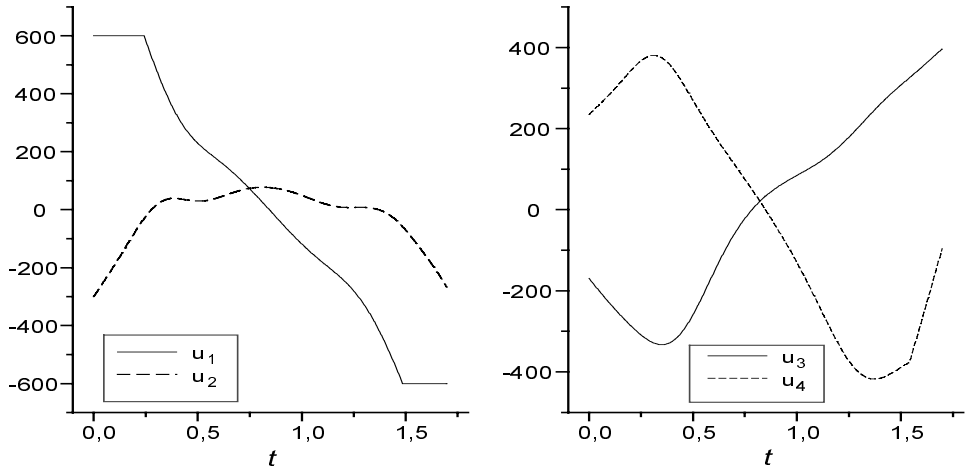
unutar vremenskog intervala $t_f = 1.7\,s$.

Ukupna funkcija cilja, J, jednaka je sumi kaznene funkcije za ograničenja, G_V, kaznene funkcije za rubne uvjete, G_B, te kaznene funkcije ograničenja varijabli stanja, G_E, odnosno $J = G_V + G_B + G_E$.

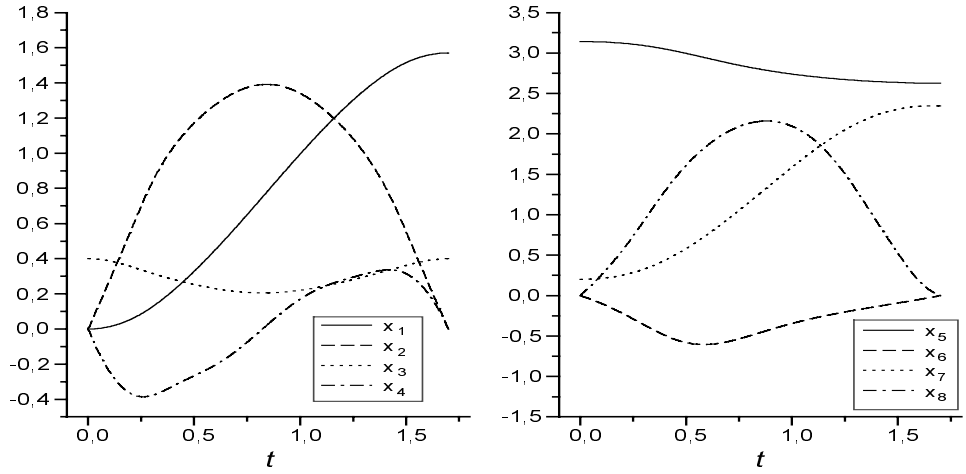
Koristili smo gradijentnu metodu s konstantnim koeficijentom konvergencije. Vrijednosti konstanti koje smo koristili su

$N = 1000$, $M = 30000$, $K_B = 100$, $K_V = 0.01$, $K_E = 1000$, $\eta = 3000$.

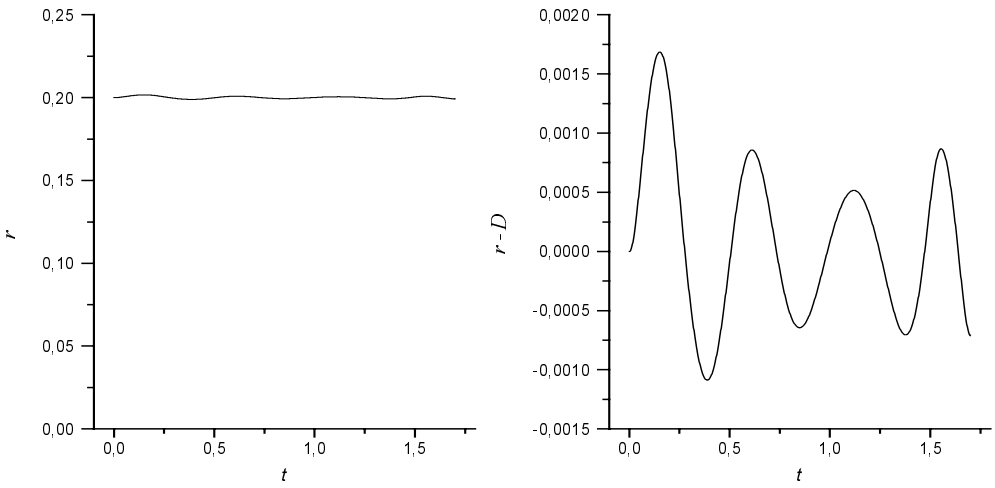
Slike 7.13 i 7.14 prikazuju vremensku ovisnost upravljačkih funkcija, odnosno varijabli stanja, dok slika 7.15 prikazuje vremensku promjenu međusobne udaljenosti prihvatnica dva robota i odstupanje te vrijednosti od definirane udaljenosti među hvatištima tereta koji se prenosi. Vidimo da postoje male oscilacije oko definirane međusobne udaljenosti koje se mogu kompenzirati pomičnim hvatištima tereta ili elastičnošću prihvatnice manipulatora.



Slika 7.13 *Vremenska ovisnost upravljačkih funkcija 1. i 2. robota.*



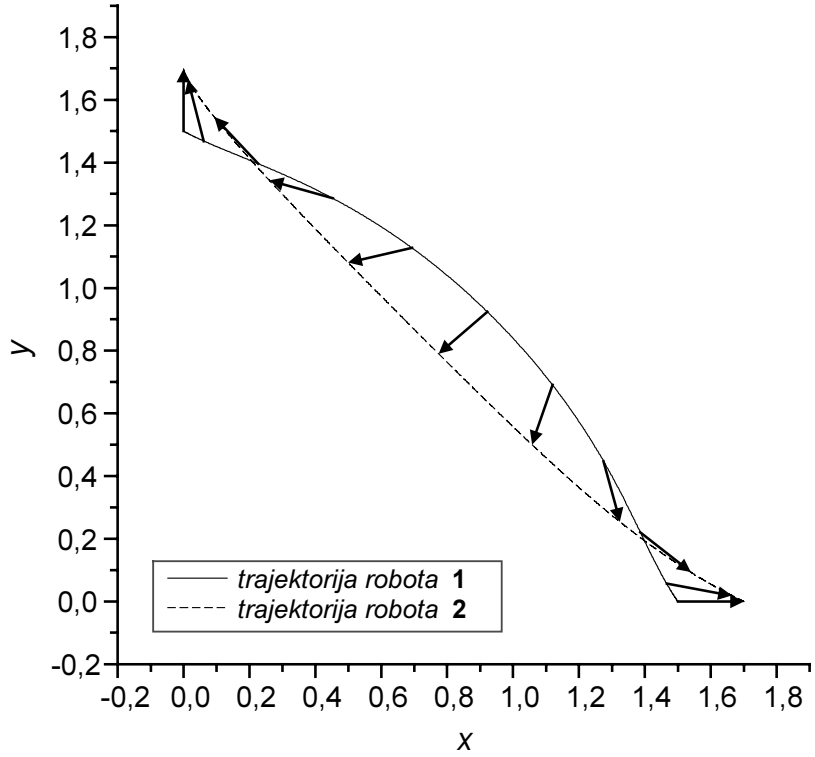
Slika 7.14 *Vremenska ovisnost varijabli stanja 1. i 2. robota.*



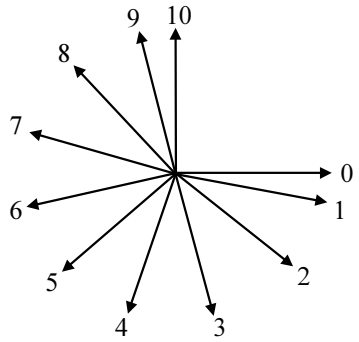
Slika 7.15 *Udaljenost između ruku manipulatora dva robota,* r*, te razlika između te udaljenosti i razmaka između hvatišta krutog tereta,* D.

Slika 7.16 prikazuje trajektorije oba robota u koordinatnom sustavu prvog robota. Također, prikazani su položaji tereta u različitim vremenskim trenucima tokom prijenosa, a na slici 7.17 prikazana je rotacija tereta tokom prijenosa u nepomičnom koordinatnom sustavu. Vidimo da tokom prijenosa iz početnog u krajnji položaj dolazi do rotacije tereta u jednom smjeru za kut od $3\pi / 2\,rad$. Iz slike se vidi da u jednom vremenskom intervalu, koji počinje od sredine trajektorije prikazane na slici (odnosno, za kut rotacije tereta od $3\pi / 4\,rad$), dolazi do presjeka ruku manipulatora dva robota, što je preciznije prikazano na slici 7.18. Slika 7.19 ilustrira brzinu konvergencije ukupne funkcije cilja.

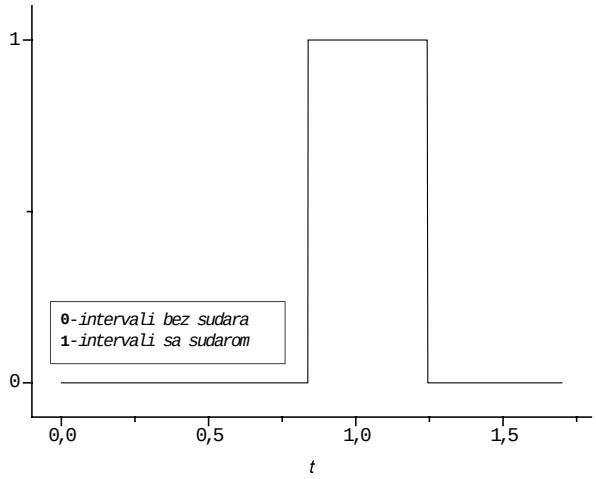
Iz gore navedenog vidimo da, bez obzira što smo dobili dobre rezultate u smislu zadovoljenja postavljenih uvjeta i ograničenja, pojavio se problem međusobnog sudara ruku robota koji naravno u realnoj situaciji moramo izbjeći. Taj problem tretiramo u slijedećem podpoglavlju.



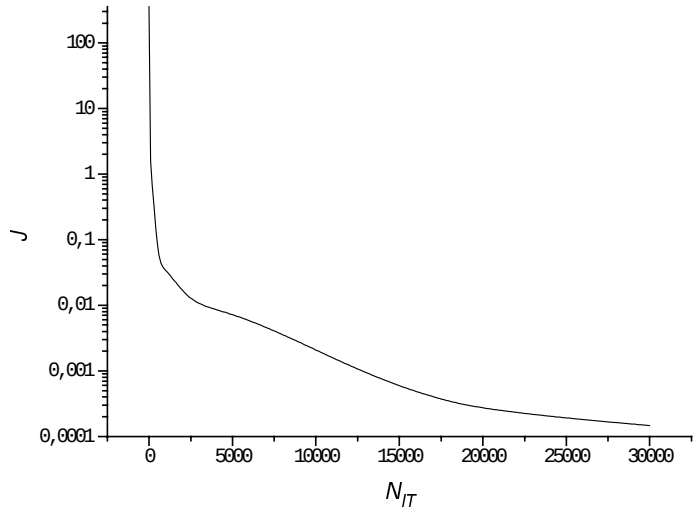
Slika 7.16 *Trajektorije dva robota s prikazom položaja tereta u različitim vremenskim trenucima.*



Slika 7.17 *Prikaz rotacije tereta tokom prijenosa u odnosu na nepomični koordinatni sustav.*



Slika 7.18 *Prikaz vremenskih intervala unutar kojih dolazi do sudara (nivo* 1*), odnosno, ne dolazi do sudara (nivo* 0*).*



Slika 7.19 *Ovisnost ukupne funkcije cilja,* J *, o broju iteracija,* N_{IT} *.*

7.5 Izbjegavanje međusobnih sudara dva robota

Kada imamo dva robota u kooperativnom radu tada je nužno osigurati izbjegavanje međusobnih sudara. Ako imamo dva manipulatora s dvije slobode gibanja, međusobno udaljena za *d* (slika 7.20), rotacionu slobodu gibanja prvog robota označimo sa q_1, a translacionu slobodu gibanja sa q_2, dok ćemo rotacionu slobodu gibanja drugog robota označiti sa q_3, a translacionu slobodu gibanja sa q_4.

Tada ruka manipulatora 1 predstavlja dužinu koja leži na pravcu

$$y = \tan q_1 \cdot x \,, \tag{7.31}$$

dok ruka manipulatora 2 predstavlja dužinu koja leži na pravcu

$$y = \tan q_3 \cdot (x - d) . \tag{7.32}$$

Presjek ta dva pravca je u točki (x_p, y_p), gledano iz koordinatnog sustava prvog robota

$$x_p = d \frac{\tan q_3}{\tan q_3 - \tan q_1} , \tag{7.33}$$

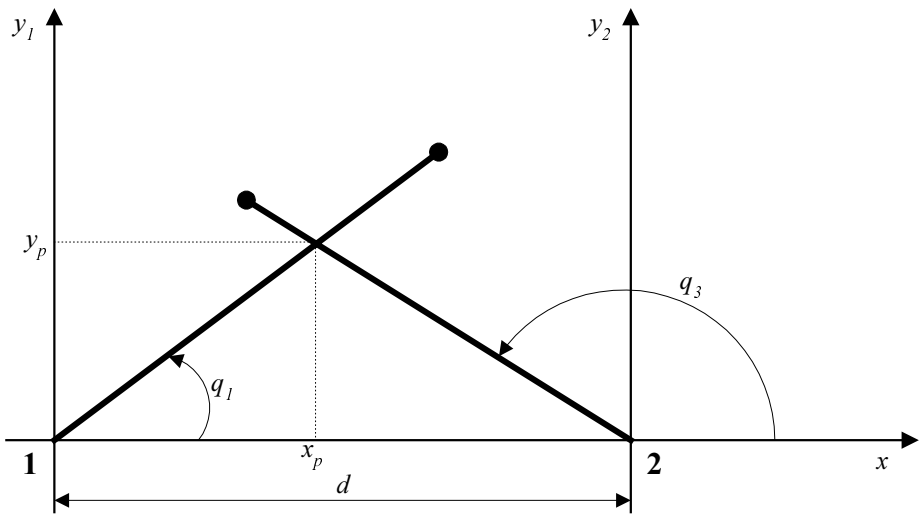
$$y_p = d \frac{\tan q_1 \cdot \tan q_3}{\tan q_3 - \tan q_1} . \tag{7.34}$$

U cilindričnim koordinatama, točka presjeka iz koordinatnog sustava prvog robota je

$$r_{1p} = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} , \tag{7.35}$$

a iz koordinatnog sustava drugog robota

$$r_{2p} = \sqrt{(x_p - d)^2 + y_p^2} . \tag{7.36}$$



Slika 7.20 *Prikaz presjeka ruku dva manipulatora.*

Ako sada uzmemo pravac na kome leži ruka manipulatora 1 za *x*-os novog koordinatnog sustava koji se dobije rotacijom sustava $y_1 - x$ za kut q_1 (slika 7.21), tada vidimo da ruka manipulatora leži na pozitivnoj strani *x*-osi od ishodišta do točke $a + q_2$. Ako točku (x_p, y_p) u sustavu $y - x$ transformiramo u sustav $y_1^* - x_1^*$, dobivamo točku $(x_{1p}^*, 0)$. Veličina x_{1p}^* je po apsolutnoj vrijednosti jednaka s r_{1p}, ali može biti negativna i u tom slučaju nema presjeka s rukom manipulatora 1. Analognu situaciju imamo s drugim manipulatorom.

Ruke manipulatora sjeći će se u slučaju da su *istovremeno* zadovoljene slijedeće nejednakosti

$$1.\ \ 0 \le x_{1p}^{*}(q_1, q_3) \le q_2 + a\,, \tag{7.37}$$

$$2.\ \ 0 \le x_{2p}^{*}(q_1, q_3) \le q_4 + a\,, \tag{7.38}$$

odnosno

$$1.\ \ a + q_2 - x_{1p}^{*} \ge 0\,, \tag{7.39}$$

$$2.\ \ x_{1p}^{*} \ge 0\,, \tag{7.40}$$

$$3.\ \ a + q_4 - x_{2p}^{*} \ge 0\,, \tag{7.41}$$

$$4.\ \ x_{2p}^{*} \ge 0\,. \tag{7.42}$$

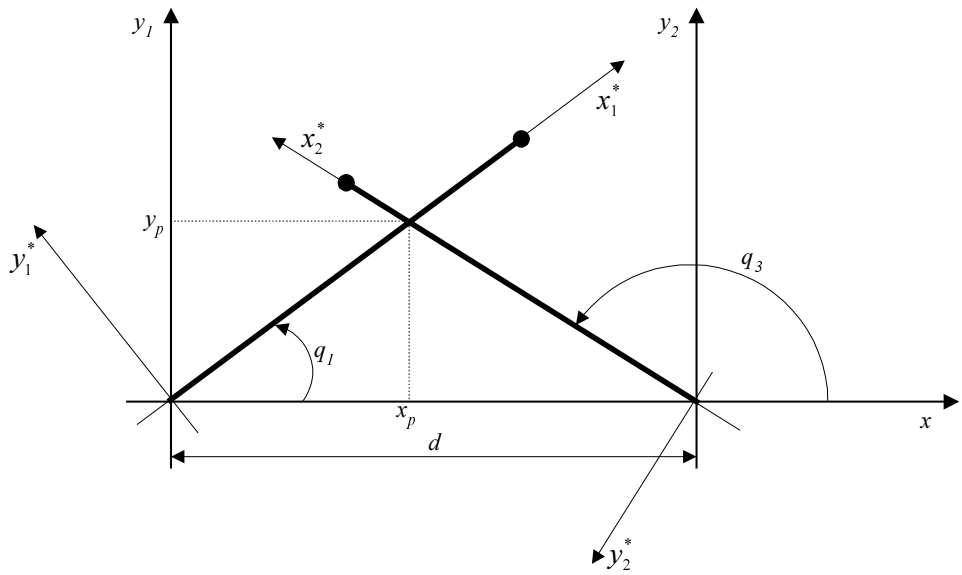
gdje je

$$x_{1p}^{*}(q_1, q_3) = x_p \cos q_1 + y_p \sin q_1\,, \tag{7.43}$$

$$x_{2p}^{*}(q_1, q_3) = (x_p - d)\cos q_3 + y_p \sin q_3\,, \tag{7.44}$$

uključujući nužni uvjet da bi uopće bilo presjeka

$$\tan q_1 \ne \tan q_3\,. \tag{7.45}$$



Slika 7.21 *Prikaz zarotiranih koordinatnih sustava manipulatora.*

Iz svega navedenog slijedi da je dovoljan uvjet izbjegavanja sudara zadovoljenje *bilo koje* od slijedećih nejednakosti u *i*-tom vremenskom trenutku

1. $x_{1p}^*(q_i^1, q_i^2) - a - q_i^2 \geq 0$, (7.46)

2. $x_{1p}^*(q_i^1, q_i^2) \leq 0$, (7.47)

3. $x_{2p}^*(q_i^1, q_i^2) - a - q_i^4 \geq 0$, (7.48)

4. $x_{2p}^*(q_i^1, q_i^2) \leq 0$, (7.49)

za $i = 0, 1, \ldots, N$.

Na osnovi gornjih nejednakosti možemo formirati kaznenu funkciju

$$G_S = K_S \sum_{i=0}^{N} F_G(q_i^1, q_i^2, q_i^3, q_i^4) H^*(q_i^1, q_i^2, q_i^3, q_i^4), \tag{7.50}$$

gdje je

$$F_G(q_i^1, q_i^2, q_i^3, q_i^4) = \left(x_{1p}^* - q_i^2 - a\right)^2 + \left(x_{2p}^* - q_i^4 - a\right)^2 + x_{1p}^{*\,2} + x_{2p}^{*\,2}, \tag{7.51}$$

$$H^*(q_i^1, q_i^2, q_i^3, q_i^4) = H^-(x_{1p}^* - q_i^2 - a) H^-(x_{2p}^* - q_i^4 - a) H^+(x_{1p}^*) H^+(x_{2p}^*). \tag{7.52}$$

Kaznenu funkciju oblika (7.52) uveli smo zbog toga što u slučaju zadovoljavanja *bilo koje* nejednadžbe (7.46)-(7.49), jedna od kaznenih funkcija u produktu biti će jednaka nuli, a time će ujedno cijeli izraz (7.52) biti jednak nuli.

Sada ponovo, kao u slučaju zaobilaženja prepreke, dolazimo do problema prekompliciranosti i preglomaznosti izraza za parcijalne derivacije funkcije (7.50) po varijablama stanja. Da bi dobili parcijalne derivacije funkcije (7.50), trebamo uzeti u obzir izraze (7.33), (7.34), (7.43), (7.44) i (7.50), što ilustrira glomaznost postupka i jednadžbi koje bi pri tom dobili. Zbog toga ćemo, analogno kao u slučaju zaobilaženja prepreke, uzeti aproksimaciju u obliku

$$\frac{\partial G_S}{\partial q_i^2} = K_S H^*(q_i^1, q_i^2, q_i^3, q_i^4), \qquad \frac{\partial G_S}{\partial q_i^1} = 0,$$

$$\frac{\partial G_S}{\partial q_i} = K_S H\ (q_i^1, q_i, q_i, q_i), \qquad \frac{\partial G_S}{\partial q_i^3} = 0.$$

Gornji izrazi govore nam da u slučaju međusobnog presjeka ruku manipulatora dva robota, kuteve prvog i drugog robota q_1 i q_3 ne mjenjamo, dok duljine ruku oba robota, odnosno q_2 i q_4, smanjujemo konstantnom stopom smanjivanja, izraženom pozitivnim koeficijentom K_s. Ovim smo, dakle, problem sveli samo na geometrijsko utvrđivanje međusobnog presjeka ruku manipulatora.

Problem koji smo razmatrali je identičan problemu u prethodnom podpoglavlju s tom razlikom da smo za vremenski interval uzeli $t_f = 2.0\,s$ zbog toga što vrijeme od $t_f = 1.7\,s$ nije bilo dovoljno da zadovolji, pored prethodna tri ograničenja, još i uvjet međusobnog izbjegavanja sudara ruku dva robota.

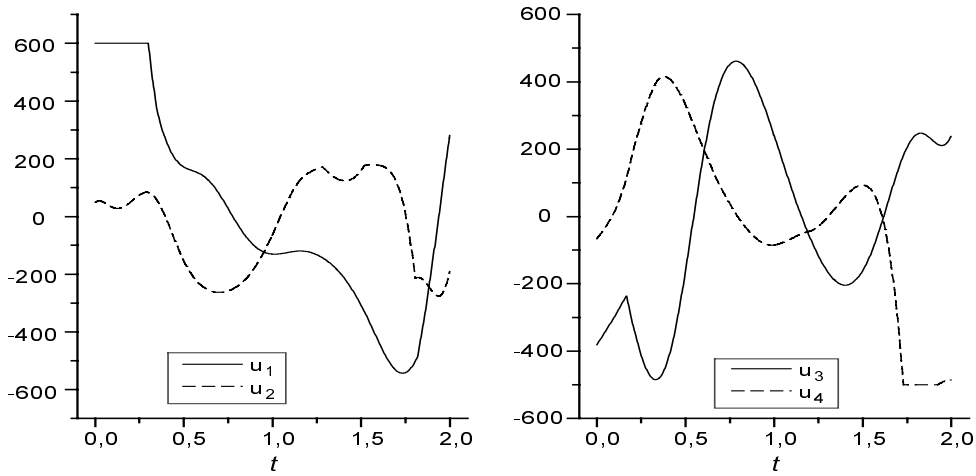
Ukupna funkcija cilja jednaka je $J = G_V + G_B + G_E + G_S$. Koristili smo gradijentnu metodu s konstantnim koeficijentom konvergencije. Vrijednosti konstanti koje smo koristili su

$$N = 1000, \quad M = 160000, \quad \eta = 3000,$$

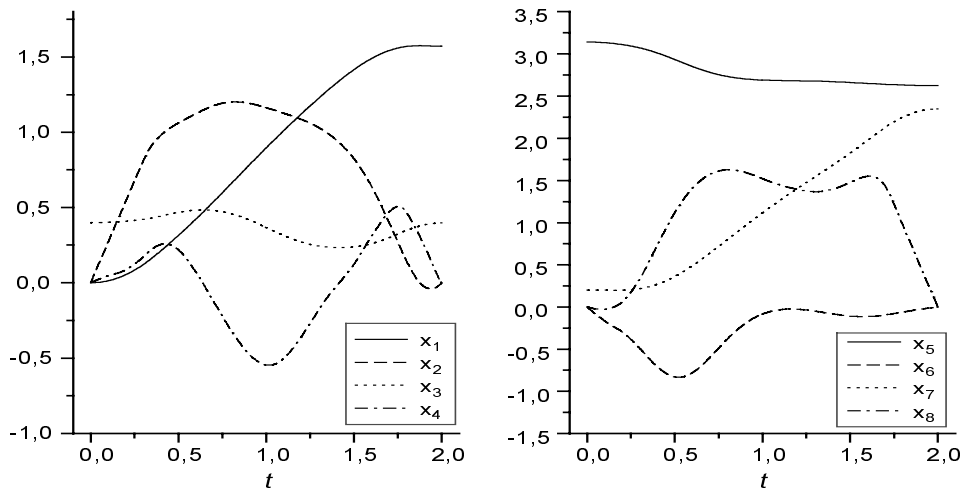
$$K_B = 100, \quad K_V = 0.01, \quad K_E = 1000, \quad K_E = 500.$$

Vidimo da je dodavanje novog uvjeta bitno usporilo brzinu konvergencije algoritma. Slike 7.22 i 7.23 prikazuju vremensku ovisnost upravljačkih funkcija, odnosno varijabli stanja, dok slika 7.24 prikazuje vremensku promjenu međusobne udaljenosti prihvatnica dva robota i odstupanje te vrijednosti od definirane udaljenosti među hvatištima tereta koji se prenosi. Vidimo da postoje male oscilacije oko definirane međusobne udaljenosti koje se mogu kompenzirati pomičnim hvatištima tereta ili elastičnošću prihvatnice manipulatora. Slika 7.25 ilustrira brzinu konvergencije ukupne funkcije cilja.

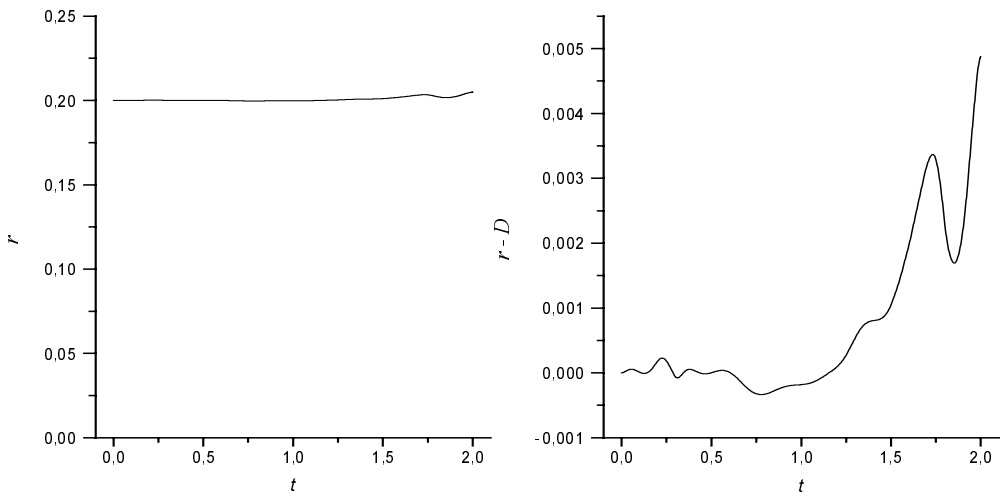
Slika 7.26 prikazuje trajektorije oba robota u koordinatnom sustavu prvog robota. Također, prikazani su položaji tereta u različitim vremenskim trenucima tokom prijenosa, a na slici 7.27 prikazana je rotacija tereta tokom prijenosa u nepomičnom koordinatnom sustavu. Vidimo da tokom prijenosa iz početnog u krajnji položaj dolazi do rotacije tereta u jednom smjeru za kut od $\pi / 2 rad$, a nakon toga dolazi do rotacije tereta u suprotnom smjeru za kut od πrad. Sve skupa, teret je prebrisao kut od $3\pi / 2 rad$, kao u primjeru iz prethodnog podpoglavlja, s tom razlikom što nije došlo do rotacije u jednom smjeru za kritičnih $3\pi / 4 rad$, kada dolazi do sudara ruku manipulatora dva robota.



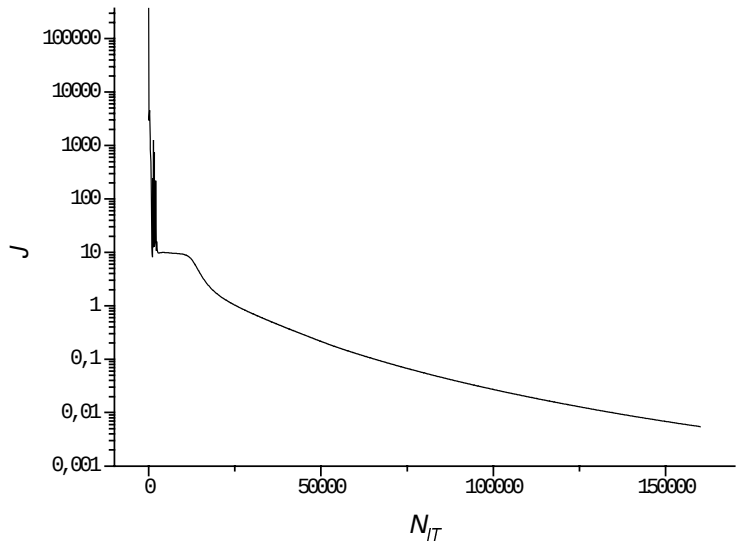
Slika 7.22 *Vremenska ovisnost upravljačkih funkcija 1. i 2. robota.*



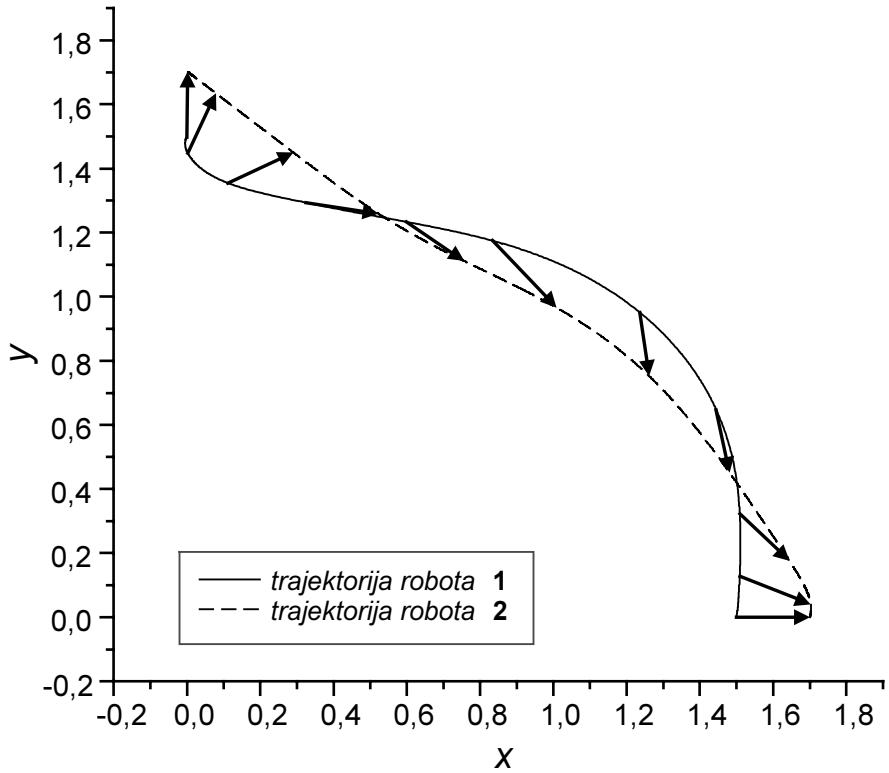
Slika 7.23 *Vremenska ovisnost varijabli stanja 1. i 2. robota.*



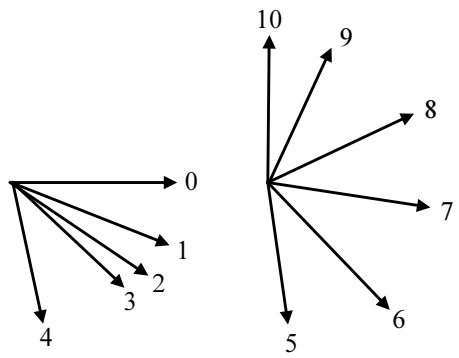
Slika 7.24 *Udaljenost između ruku manipulatora dva robota* r*, te razlika između te udaljenosti i razmaka između hvatišta krutog tereta,* D.



Slika 7.25 *Ovisnost ukupne funkcije cilja,* J *, o broju iteracija,* N_{IT} *.*



Slika 7.26 *Trajektorije dva robota s prikazom položaja tereta u različitim vremenskim trenucima.*



Slika 7.27 *Prikaz rotacije tereta tokom prijenosa u odnosu na nepomični koordinatni sustav.*

Ukupan broj računskih operacija koji nam je potreban da bi dobili zadovoljavajuću točnost rješenja, bitno je veći nego u prethodnim primjerima. Razlog za to je veći broja iteracija s jedne strane (zbog dodatnog uvjeta izbjegavanja sudara) i veći red sustava ($n = 8$) s druge strane. Broj računskih operacija unutar jedne iteracije gradijentnog algoritma proporcionalan je kvadratu reda sustava (broj elemenata Jacobijeve matrice $\mathbf{X}(j)$). Zbog toga je mogućnost realizacije BPTT algoritma primjenom neuronskih mreža vrlo bitna u slučaju sustava velikih dimenzija zbog mogućnosti iskorištavanja svojstva paralelizma, čime bi se bitno smanjio broj računskih operacija (serijskih) po jednoj iteraciji gradijentnog algoritma.