2. Teorijske osnove optimalnog upravljanja

U ovom poglavlju prikazat ćemo neke ključne rezultate iz teorije optimalnog upravljanja s posebnim naglaskom na tretiranje raznih oblika ograničenja koji se mogu pojaviti u formulaciji problema.

Polazište za tretiranje problema optimalnog upravljanja je klasični varijacioni račun. Ograničenja koja nameće pristup preko varijacijskog računa mogu se izbjeći korištenjem Pontryaginovog principa maksimuma ili Bellmanovim konceptom dinamičkog programiranja. Analiza optimuma preko navedenih postupaka najčešće je ograničena na traženje nužnih uvjeta.

Izlaganje u ovom poglavlju prati reference [1]-[6], [9], [10].

2.1 Parametarska optimizacija s ograničenjima tipa jednakosti

Najjednostavnija klasa problema parametarske optimizacije je nalaženje vrijednosti m parametara $u_1, u_2, \ldots, u_m$ koje minimiziraju funkciju cilja (indeks performansi) koja je funkcija tih parametara,

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m)\,.$$

Ako uvedemo tzv. vektor odlučivanja (*decision vector*)

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}^T,$$

možemo napisati funkciju cilja kao $F(\mathbf{u})$. Ako nema ograničenja na moguće vrijednosti od $\mathbf{u}$ i ako funkcija $F(\mathbf{u})$ ima prvu i drugu derivaciju za sve vrijednosti vektora $\mathbf{u}$, tada je nužan uvjet za minimum

$$\frac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}\,, \tag{2.1}$$

odnosno, po komponentama

$$\frac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial u_i} = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{2.2}$$

Iz gornjeg uvjeta dobivamo sustav od m algebarskih jednadžbi, koje su općenito nelinearne, sa m nepoznatih parametara $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Sve moguće vrijednosti parametara $u_1, u_2, \ldots, u_m$, koje zadovoljavaju gornji uvjet nazivamo stacionarnim točkama.

Općenitija klasa problema parametarske optimizacije je nalaženje vrijednosti m parametara $u_1, u_2, \ldots, u_m$ koji minimiziraju funkciju cilja koja je skalarna funkcija $n+m$ parametara

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

gdje su n parametara stanja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ određena parametrima odlučivanja kroz skup od n jednadžbi

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Uvođenjem

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix}^T,$$

problem možemo formulirati na slijedeći način: treba naći vektor $\mathbf{u}$ koji minimizira

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{2.3}$$

gdje je vektor stanja određen vektorom odlučivanja pomoću jednadžbi

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}. \tag{2.4}$$

Rješenje (stacionarna točka) gornjeg problema je ona vrijednost vektora $\mathbf{u}$, u kojoj je $dF = 0$, za proizvoljni $d\mathbf{u}$, dok je $d\mathbf{f} = 0$. Imamo

$$dF = F_{\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + F_{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u}, \tag{2.5}$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u}, \tag{2.6}$$

gdje su $F_{\mathbf{x}}$, F, vektori parcijalnih derivacija F po komponentama vektora **x**, odnosno **u**, respektivno, dok su $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$ Jakobijeve matrice parcijalnih derivacija komponenti vektora **f** po komponentama vektora **x**, odnosno **u**, respektivno. Iz zahtjeva $d\mathbf{f} = 0$, pod uvjetom da je $\mathbf{f}$ nesingularna matrica, možemo izraziti $d\mathbf{x}$ preko $d\mathbf{u}$

$$d\mathbf{x} = -\mathbf{f}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u}. \tag{2.7}$$

Uvrstimo li gornji izraz u izraz za dF, dobivamo

$$dF = (F_{\mathbf{u}} - F_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{u}}) \cdot d\mathbf{u}. \tag{2.8}$$

Ako je $dF = 0$ za proizvoljni $d\mathbf{u}$, tada je neophodno da

$$F_{\mathbf{u}} - F_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \tag{2.9}$$

Gornjih m jednadžbi, zajedno s n jednadžbi (2.4) određuju m komponenti vektora **u** i n komponenti vektora **x**, u stacionarnoj točki.

Ako sada uvedemo

$$\lambda^T = -F_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^{-1}, \tag{2.10}$$

jednadžba (2.9) poprima oblik

$$F + \lambda^T \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{2.11}$$

dok iz (2.10) slijedi

$$F_{\mathbf{x}} + \lambda^T \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \tag{2.12}$$

Gornje dvije jednadžbe predstavljaju alternativni prikaz uvjeta (2.9), s tom razlikom što m jednadžbi (2.11), n jednadžbi (2.12), te n jednadžbi (2.4) određuju m komponenti vektora $\mathbf{u}$ i n komponenti vektora $\mathbf{x}$, te n komponenti vektora λ, u stacionarnoj točki. Ako sada uvedemo funkciju

$$H(\mathbf{x},\mathbf{u},\lambda) = F(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \lambda^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}), \tag{2.13}$$

vidimo da nužne uvjete minimuma funkcije (2.3) uz ograničenja (2.4), predstavljene jednadžbama (2.11), (2.12) i (2.4), možemo dobiti iz uvjeta $dH = 0$, tretirajući vektore $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, λ, kao međusobno nezavisne varijable funkcije (2.13). Imamo

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \cdot d\lambda, \tag{2.14}$$

odnosno, zbog uvjeta $dH = 0$ za proizvoljne $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{u}$, $d\lambda$, dobivamo slijedeće uvjete

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = F_{\mathbf{x}} + \lambda^T \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = F_{\mathbf{u}} + \lambda^T \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \tag{2.17}$$

Komponente vektora λ, zovemo Lagrangeovi multiplikatori, dok funkciju $H(\mathbf{x},\mathbf{u},\lambda)$ zovemo Hamiltonian ili Hamiltonova funkcija.

Na ovaj način smo problem minimizacije funkcije (2.3) uz ograničenja (2.4), kojima su varijable $\mathbf{x}$ ovisne o varijablama $\mathbf{u}$, sveli na problem minimizacije, bez ograničenja, funkcije (2.13), tretirajući vektore $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, λ, kao međusobno nezavisne varijable. Iz izraza (2.17) uvijek proizlaze zadane jednadžbe ograničenja, tako da se često u literaturi gleda varijacija Hamiltoniana samo u funkciji od $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{u}$, tretirajući λ kao konstantu, te se na taj način dobivenim izrazima (2.15) i (2.16) doda jednadžba (2.4).

2.2 Optimizacija diskretnih dinamičkih sustava

Optimizacija diskretnih dinamičkih sustava spada također u probleme parametarske optimizacije. Razmotrimo diskretni dinamički sustav opisan nelinearnom diferencijskom jednadžbom

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{f}^i\big(\mathbf{x}(i),\mathbf{u}(i)\big), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \qquad i = 0,1,\ldots,N-1, \tag{2.18}$$

koja predstavlja skup od nN jednadžbi. Gornjim sustavom jednadžbi je niz n-dimenzionalnih vektora stanja $\mathbf{x}(i)$ određen nizom m-dimenzionalnih upravljačkih vektora $\mathbf{u}(i)$. Funkciju cilja definiramo u obliku

$$J = \phi\big(\mathbf{x}(N)\big) + \sum_{i=0}^{N-1} F\big(\mathbf{x}(i),\mathbf{u}(i)\big). \tag{2.19}$$

Problem se sastoji u pronalaženju niza upravljačkih vektora $\mathbf{u}(i)$, koji minimiziraju gornju funkciju cilja i pri tome zadovoljavaju sustav jednadžbi (2.18). Dodavanjem sustava jednadžbi (2.18) sa nizom Lagrangeovih multiplikatora u jednadžbu (2.19), dobivamo

$$J = \phi\big(\mathbf{x}(N)\big) + \sum_{i=0}^{N-1}\Big[F\big(\mathbf{x}(i),\mathbf{u}(i)\big) + \lambda^T(i+1)\big(\mathbf{f}^i\big(\mathbf{x}(i),\mathbf{u}(i)\big) - \mathbf{x}(i+1)\big)\Big]. \tag{2.20}$$

Definiramo skalarni niz funkcija (Hamiltonijan)

$$H^i = F\big(\mathbf{x}(i),\mathbf{u}(i)\big) + \lambda^T(i+1)\mathbf{f}^i\big(\mathbf{x}(i),\mathbf{u}(i)\big). \tag{2.21}$$

Promjenom indeksa u sumi izraza (2.20), dobivamo

$$J = \phi\big(\mathbf{x}(N)\big) - \lambda^T(N)\cdot\mathbf{x}(N) + H^0 + \sum_{i=1}^{N-1}\Big[H^i - \lambda^T(i)\cdot\mathbf{x}(i)\Big]. \tag{2.22}$$

Nužan uvjet minimuma funkcije cilja (2.22) je $dJ = 0$, pri proizvoljnoj promjeni $d\mathbf{u}(i)$, $d\mathbf{x}(i)$. Imamo

$$dJ = \left[\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}(N)} - \lambda^T(N)\right]\cdot d\mathbf{x}(N) + \sum_{i=1}^{N-1}\left\{\left[\frac{\partial H^i}{\partial\mathbf{x}(i)} - \lambda^T(i)\right]\cdot d\mathbf{x}(i) + \frac{\partial H^i}{\partial\mathbf{u}(i)}\cdot d\mathbf{u}(i)\right\} +$$
$$+\frac{\partial H^0}{\partial\mathbf{x}(0)}\cdot d\mathbf{x}(0) + \frac{\partial H^0}{\partial\mathbf{u}(0)}\cdot d\mathbf{u}(0)$$

iz čega slijedi

$$\frac{\partial H^i}{\partial\mathbf{x}(i)} - \lambda^T(i) = \mathbf{0},$$

odnosno

$$\lambda^T(i) = \frac{\partial F^i}{\partial\mathbf{x}(i)} + \lambda^T(i+1)\cdot\frac{\partial\mathbf{f}^i}{\partial\mathbf{x}(i)}, \qquad i = 0,1,\ldots,N-1, \tag{2.23}$$

sa rubnim uvjetom

$$\lambda^T(N) = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}(N)}. \tag{2.24}$$

Slijedeći uvjet koji mora biti zadovoljen je

$$\frac{\partial H^i}{\partial\mathbf{u}(i)} = \mathbf{0}, \qquad i = 0,1,\ldots,N-1. \tag{2.25}$$

Dakle, da bi niz upravljačkih vektora $\mathbf{u}(i)$, predstavljao stacionarnu točku funkcije cilja (2.19) uz zadana ograničenja (2.18), mora biti zadovoljen slijedeći sustav jednadžbi

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{f}^i\big(\mathbf{x}(i),\mathbf{u}(i)\big), \tag{2.26}$$

$$\lambda\ \ (i) = \frac{\partial F^i}{\partial\mathbf{x}(i)} + \lambda\ \ (i+1)\cdot\frac{\partial\mathbf{f}^i}{\partial\mathbf{x}(i)}, \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial F^i}{\partial \mathbf{u}(i)} + \lambda^T(i+1) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}^i}{\partial \mathbf{u}(i)} = \mathbf{0}, \tag{2.28}$$

za $i = 0,1,\ldots,N-1$, uz zadane početne i rubne uvjete

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \qquad \lambda^T(N) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(N)}. \tag{2.29}$$

Diferencijske jednadžbe (2.26) i (2.27) su međusobno spregnute, budući da $\mathbf{u}(i)$ ovisi o $\lambda(i)$ preko (2.29). Jednadžbe (2.26)-(2.28) predstavljaju sustav od $(2n+m)N$ jednadžbi s isto toliko nepoznanica: $\mathbf{x}(1),\ldots,\mathbf{x}(N)$, $\mathbf{u}(0),\ldots,\mathbf{u}(N-1)$, $\lambda(0),\ldots,\lambda(N-1)$.

2.3 Optimizacija kontinuiranih dinamičkih sustava

Optimizacijski problemi za kontinuirane dinamičke sustave spadaju u varijacijski račun. Oni se također mogu razmatrati kao granični slučaj optimizacijskih problema za diskretne dinamičke sustave (period diskretizacije dovoljno mali u usporedbi s ukupnim vremenskim intervalom). Obrnuti slučaj je danas mnogo češći, kontinuirani sustavi aproksimiraju se diskretnim, zbog mogućnosti obrade na digitalnim računalima.

Razmotrimo slijedeći sustav nelinearnih diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \qquad t_0 \le t \le t_f, \tag{2.30}$$

gdje je $\mathbf{x}(t)$ n-dimenzionalna vektorska funkcija (vektor stanja) koja je određena sa $\mathbf{u}(t)$, m-dimenzionalnom vektorskom funkcijom (vektor upravljanja). Razmotrimo funkciju cilja u obliku

$$J = \phi\big(\mathbf{x}(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big)\, dt, \tag{2.31}$$

što predstavlja kontinuirani oblik diskretne funkcije cilja (2.19). Poblem optimalnog upravljanja sa funkcijom cilja oblika (2.31) naziva se Bolzin problem. Problem se sastoji u pronalaženju vektorske funkcije $\mathbf{u}(t)$ koja minimizira funkciju cilja (2.31) pri čemu je povezanost između $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{u}(t)$ dana sustavom diferencijalnih jednadžbi (2.30). Analogno kao u diskretnom slučaju, koristimo metodu Lagrangeovih multiplikatora da bi ubacili sustav diferencijalnih jednadžbi u funkciju cilja (2.31)

$$J = \phi\big(\mathbf{x}(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} \Big[F\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big) + \lambda^T(t) \cdot \big(\mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big) - \dot{\mathbf{x}}(t)\big)\Big] dt, \tag{2.32}$$

što je analogno izrazu (2.20). Definiramo Hamiltonian

$$H\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t\big) = F\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big) + \lambda^T(t) \cdot \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big). \tag{2.32}$$

Sada imamo

$$J = \phi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} \left[H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t\right) - \lambda^T(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) \right] dt \,. \tag{2.33}$$

Parcijalnom integracijom drugog člana podintegralnog izraza u (2.33), dobivamo

$$J = \phi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) - \lambda^T(t_f) \cdot \mathbf{x}(t_f) + \lambda^T(t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left[H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t\right) + \dot{\lambda}^T(t) \cdot \mathbf{x}(t) \right] dt \,.$$

Sada uzimamo prvu varijaciju funkcije cilja, δJ, u ovisnosti o varijaciji vektora upravljanja i vektora stanja, oko optimalnog vektora upravljanja i optimalnog vektora stanja. Imamo

$$\delta J = \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \lambda^T \right) \cdot \delta \mathbf{x} \right]_{t=t_f} + \left[\lambda^T \cdot \delta \mathbf{x} \right]_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\lambda}^T \right) \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \right] dt \,. \tag{2.34}$$

Nužan uvjet minimuma funkcije cilja je iščezavanje prve varijacije, $\delta J = 0$, za proizvoljne varijacije $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{u}$. Dobivamo

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \,, \tag{2.35}$$

sa rubnim uvjetom

$$\lambda^T(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \,. \tag{2.36}$$

Drugi uvjet koji dobivamo iz (2.34) je

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \,, \tag{2.37}$$

za $t_0 \le t \le t_f$. Jednadžbe (2.35), (2.36) i (2.37) poznate su u varijacijskom računu kao Euler-Lagrangeove jednadžbe.

Dakle, da bi našli upravljački vektor $\mathbf{u}(t)$ koji predstavlja stacionarnu vrijednost funkcije cilja (2.31), moraju biti zadovoljene slijedeće jednadžbe

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t\right) , \tag{2.38}$$

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \,, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} + \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \,, \tag{2.40}$$

sa slijedećim početnim i rubnim uvjetima

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \,, \qquad \lambda \ (t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \,. \tag{2.41}$$

Vidimo da je gornji sustav jednadžbi analogan sustavu (2.26)-(2-29), s tom razlikom što ovdje imamo sustav od $2n$ diferencijalnih jednadžbi (2.38) i (2.39) s $2n$ rubnih uvjeta

(2.41), te sustav od m algebarskih jednadžbi (2.40) iz kojeg određujemo vektor $\mathbf{u}(t)$, nakon što nađemo $\mathbf{x}(t)$ i $\lambda(t)$.

Pogledajmo sada čemu je jednaka totalna vremenska derivacija Hamiltoniana, za optimalnu vrijednost vektora $\mathbf{u}(t)$ i $\mathbf{x}(t)$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial H}{\partial \lambda^T} \cdot \dot{\lambda}^T, \tag{2.42}$$

odnosno

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\lambda}^T \right) \cdot \mathbf{f} \ . \tag{2.42}$$

Zbog (2.35) i (2.37) imamo

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.43}$$

Ako H (odnosno F i $\mathbf{f}$) nije eksplicitna funkcija vremena, imamo

$$\frac{dH}{dt} = 0, \tag{2.44}$$

što znači da je Hamiltonian konstantan za optimalnu trajektoriju.

Od interesa je pogledati rješenje Bolzinog problema u slučaju kada je zadan vektor stanja u konačnom vremenu t_f. Neka je zadano općenito ograničenje vektora stanja u t_f slijedećom jednadžbom

$$\psi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) = \mathbf{0}, \tag{2.45}$$

gdje je ψ q-dimenzionalna vektorska funkcija ($q \le n-1$ ako $F = 0$, ($q \le n$ ako $F \ne 0$). Ovdje ćemo također koristiti metodu Lagrangeovih multiplikatora, te dodajemo jednadžbu (2.45) pomnoženu s q-dimenzionalnim vektorom ν, u izraz (2.32)

$$J = \phi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) + \nu^T \cdot \psi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} \left[F\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) + \lambda^T(t) \cdot \left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) - \dot{\mathbf{x}}(t) \right) \right] dt \ .$$

Ponavljajući analognu proceduru kao u predhodnom odjeljku, dobivamo sustav jednadžbi (2.38)-(2.40) s tom razlikom što rubni uvjet u (2.41) postaje

$$\lambda^T(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \nu^T \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}. \tag{2.46}$$

Skup parametara ν određujemo tako da zadovoljavaju q jednadžbi (2.45).

2.4 Slučaj sa nespecificiranim konačnim vremenom

U prethodnim podpoglavljima pretpostavljali smo da je konačno vrijeme t_f, specificirano, odnosno konstantno. Sada ćemo razmatrati slučaj kada je indeks performanse funkcija, ne samo vektora upravljanja i vektora stanja, nego i konačnog vremena t_f. Pretpostavljamo da je početno vrijeme i početno stanje određeno. Problem se, dakle, svodi na minimizaciju funkcije cilja

$$J = \phi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} F\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) dt\,, \tag{2.47}$$

za sistem opisan sa

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\,, \tag{2.48}$$

gdje je t_0 fiksno i gdje u nespecificiranom konačnom vremenu t_f treba zadovoljiti q jednadžbi za rubne uvjete

$$\psi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) = \mathbf{0}\,. \tag{2.49}$$

Metodom Lagrangeovih multiplikatora funkciji cilja (2.47) dodamo ograničenja (2.48) i (2.49)

$$J = \phi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) + \nu^T \cdot \psi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} \left[F\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) + \lambda^T(t) \cdot \left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) - \dot{\mathbf{x}}(t)\right)\right] dt\,,$$

te definiramo Hamiltonian

$$H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t\right) = F\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) + \lambda^T(t) \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right). \tag{2.50}$$

Parcijalnom integracijom nove funkcije cilja, dobivamo

$$\begin{aligned} J = {} & \phi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) + \nu^T \cdot \psi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) - \lambda^T(t_f) \cdot \mathbf{x}(t_f) + \lambda^T(t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0) + \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t\right) + \dot{\lambda}^T(t) \cdot \mathbf{x}(t)\right] dt \end{aligned}\,. \tag{2.51}$$

Sada uvodimo prve varijacije oko optimalnih vrijednosti

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \delta\mathbf{x}(t)\,, \qquad \mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}(t) + \delta\mathbf{u}(t) \qquad t_f = \hat{t}_f + \delta t_f\,, \tag{2.52}$$

i formiramo razliku

$$\Delta J = J\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t_f\right) - J\left(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), \hat{t}_f\right), \tag{2.53}$$

od koje ostavljamo samo linearne članove, odnosno prvu varijaciju δJ. Prvo ćemo pogledati čemu je jednaka varijacija vektora stanja u konačnom vremenu t_f

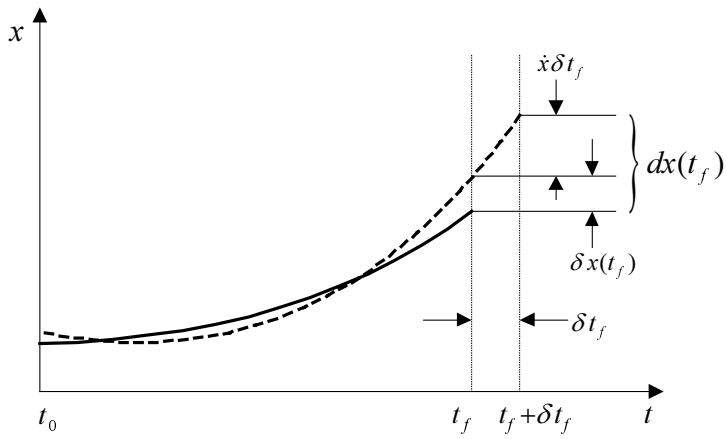
$$d\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}(t_f + \delta t_f) + \delta\mathbf{x}(t_f + \delta t_f) - \mathbf{x}(t_f)\,, \tag{2.54}$$

odnosno, nakon razvoja u Taylorov red, imamo

$$d\,\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}(t_f) + \dot{\mathbf{x}}(t_f)\delta t_f + \delta\,\mathbf{x}(t_f) + \delta\,\dot{\mathbf{x}}(t_f)\delta t_f - \mathbf{x}(t_f),$$

te zanemarenjem kvadratnog člana $\delta\,\dot{\mathbf{x}}(t_f)\delta t_f$, dobivamo konačni oblik (slika 2.1)

$$d\,\mathbf{x}(t_f) = \delta\,\mathbf{x}(t_f) + \dot{\mathbf{x}}(t_f)\delta t_f\,. \tag{2.55}$$



Slika 2.1 *Veza između* $d\,\mathbf{x}(t_f)$, $\delta\,\mathbf{x}(t_f)$ i δt_f.

Varijacija $d\,\mathbf{x}(t_f)$, zove se *neizohrona* ili *asinhrona varijacija*. Sada ćemo pogledati čemu je jednako δJ

$$\delta J = \delta\Theta\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big) + \delta\,\omega\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big) + \delta\,I\Big(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), t_f\Big), \tag{2.56}$$

gdje je

$$\Theta\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big) = \phi\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big) + \nu^T \cdot \psi\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big),$$

$$\omega\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big) = -\lambda^T(t_f)\cdot\mathbf{x}(t_f),$$

$$I\Big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\Big) = \int_{t_0}^{t_f}\Big[H\Big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t\Big) + \dot{\lambda}^T(t)\cdot\mathbf{x}(t)\Big]dt\,.$$

Pogledajmo prvo

$$\begin{aligned}\delta\Theta\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big) &= \Theta\Big(\mathbf{x}(t_f + \delta t_f) + \delta\,\mathbf{x}(t_f + \delta t_f), t_f + \delta t_f\Big) - \Theta\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big) = \\ &= \Theta\Big(\mathbf{x}(t_f) + \dot{\mathbf{x}}(t_f)\delta t_f + \delta\,\mathbf{x}(t_f), t_f + \delta t_f\Big) - \Theta\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big) = \\ &= \Theta\Big(\mathbf{x}(t_f) + d\,\mathbf{x}(t_f), t_f + \delta t_f\Big) - \Theta\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big)\end{aligned}$$

odnosno

$$\delta\Theta\Big(\mathbf{x}(t_f), t_f\Big) = \frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{x}(t_f)}d\,\mathbf{x}(t_f) + \frac{\partial\Theta}{\partial t_f}\delta t_f\,. \tag{2.57}$$

Nadalje, imamo

$$\begin{aligned}\delta\omega\Big(\mathbf{x}(t_f),t_f\Big) &= \omega\Big(\mathbf{x}(t_f+\delta t_f)+\delta\mathbf{x}(t_f+\delta t_f),t_f+\delta t_f\Big)-\omega\Big(\mathbf{x}(t_f),t_f\Big)= \\ &= -\lambda^T(t_f+\delta t_f)\cdot\Big(\mathbf{x}(t_f+\delta t_f)+\delta\mathbf{x}(t_f+\delta t_f)\Big)+\lambda^T(t_f)\mathbf{x}(t_f)= \\ &= -\Big(\lambda^T(t_f)+\dot{\lambda}^T(t_f)\delta t_f\Big)\Big(\mathbf{x}(t_f)+d\,\mathbf{x}(t_f)\Big)+\lambda^T(t_f)\mathbf{x}(t_f)\end{aligned}$$

Nakon zanemarenja članova drugog reda imamo

$$\delta\omega\Big(\mathbf{x}(t_f),t_f\Big) = -\dot{\lambda}^T(t_f)\cdot\mathbf{x}(t_f)\delta t_f-\lambda^T(t_f)\cdot d\,\mathbf{x}(t_f)\,. \tag{2.58}$$

Na kraju, imamo

$$\begin{aligned}\delta I\Big(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\Big) = &\int_{t_0}^{t_f+\delta t_f}\Big[H\Big(\mathbf{x}(t)+\delta\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)+\delta\mathbf{u}(t),\lambda(t),\,t\Big)+\dot{\lambda}^T(t)\cdot\Big(\mathbf{x}(t)+\delta\mathbf{x}(t)\Big)\Big]d\,t- \\ &-\int_{t_0}^{t_f}\Big[H\Big(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\lambda(t),\,t\Big)+\dot{\lambda}^T(t)\cdot\mathbf{x}(t)\Big]d\,t\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\delta I\Big(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\Big) = &H\Big(\mathbf{x}(t_f),\mathbf{u}(t_f),\lambda(t_f),\,t_f\Big)\delta t_f+\dot{\lambda}^T(t_f)\cdot\mathbf{x}(t_f)+ \\ &+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}(t)}+\lambda^T(t)\mathbf{x}(t)\right)\cdot\delta\mathbf{x}(t)+\frac{\partial H}{\partial\mathbf{u}(t)}\right]d\,t\end{aligned}\,. \tag{2.59}$$

Sada stavimo (2.57)-(2.59) u (2.56) i dobivamo

$$\begin{aligned}\delta J = &\left(H\Big(\mathbf{x}(t_f),\mathbf{u}(t_f),\lambda(t_f),\,t_f\Big)+\frac{\partial\Theta}{\partial t_f}\right)\delta t_f+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{x}(t_f)}-\lambda^T(t_f)\right)\cdot d\,\mathbf{x}(t_f)+ \\ &+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}(t)}+\dot{\lambda}^T(t)\right)\cdot\delta\mathbf{x}(t)+\frac{\partial H}{\partial\mathbf{u}(t)}\cdot\delta\mathbf{u}(t)\right]d\,t\end{aligned} \tag{2.60}$$

Da bi dobili nužne uvjete za minimum funkcije cilja, mora biti $\delta J=0$, pa iz (2.60) proizlaze jednadžbe koje određuju optimalni vektor upravljanja

$$\frac{\partial H}{\partial\lambda^T}=\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}\Big(\mathbf{x},\mathbf{u},t\Big), \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}}=-\dot{\lambda}^T=\frac{\partial F}{\partial\mathbf{x}}+\lambda^T\cdot\frac{\partial\,\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}, \tag{2.62}$$

$$\frac{\partial H}{\partial\mathbf{u}}=\mathbf{0}=\frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}}+\lambda^T\cdot\frac{\partial\,\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}, \tag{2.63}$$

sa početnim i rubnim uvjetima

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0\,,\qquad \lambda^T(t_f)=\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}(t_f)}+\nu^T\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}(t_f)},\qquad \psi\Big(\mathbf{x}(t_f),t_f\Big)=\mathbf{0}\,, \tag{2.64}$$

i

$$H\left(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f\right) + \frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \nu \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t_f} = 0 . \tag{2.65}$$

Vidimo da su jednadžbe (2.61)-(2.64) identične jednadžbama za Bolzin problem sa složenim rubnim uvjetima (2.49), s tom razlikom da ovdje imamo dodatni uvjet iz kojeg određujemo nespecificirano konačno vrijeme t_f.

Posebna klasa problema optimalnog upravljanja s nespecificiranim konačnim vremenom je problem najmanjeg vremena (*minimum time problem*) za koji vrijedi

$$\phi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) = t_f , \qquad F\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) = 0 , \tag{2.66}$$

sa rubnim uvjetom

$$\psi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) = \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0} . \tag{2.67}$$

Hamiltonian (2.50) postaje

$$H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t\right) = \lambda^T(t) \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) . \tag{2.68}$$

U tom slučaju jednadžbe (2.61)-(2.65) poprimaju oblik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t\right) , \tag{2.69}$$

$$\dot{\lambda}^T = -\lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} , \tag{2.70}$$

$$\lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} , \tag{2.71}$$

sa početnim i rubnim uvjetima

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 , \qquad \lambda(t_f) = \nu , \qquad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0} , \tag{2.72}$$

i

$$H\left(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f\right) = -1 . \tag{2.73}$$

Ako Hamiltonian nije eksplicitna funkcija vremena, tada vrijedi jednakost (2.44), što znači da je Hamiltonian konstantan tokom cijelog vremenskog intervala, pa vrijedi

$$H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t\right) = H\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t)\right) = -1 , \tag{2.74}$$

za $t_0 \le t \le t_f$.

Međutim, pored uvjeta (2.69)-(2.73), jedinstveno rješenje ovog problema postoji onda i samo onda ako vektor upravljanja ima ograničenja.

Iste uvjete bi dobili da smo umjesto (2.66) stavili

$$\phi\left(\mathbf{x}(t_f), t_f\right) = 0 , \qquad F\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right) = 1 , \tag{2.75}$$

s tim da bi Hamiltonian, u tom slučaju, bio

$$H\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\lambda(t),t\right)=1+\lambda^{T}(t)\cdot\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\right), \tag{2.76}$$

uvjet (2.73) postao bi

$$H\left(\mathbf{x}(t_f),\mathbf{u}(t_f),\lambda(t_f),t_f\right)=0, \tag{2.77}$$

dok bi uvjet (2.74) postao

$$H\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\lambda(t),t\right)=H\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\lambda(t)\right)=0, \tag{2.78}$$

za $t_0 \le t \le t$.

2.5 Optimalno upravljanje s ograničenjima vektora upravljanja

Do sada smo razmatrali probleme optimalnog upravljanja bez ograničenja na vektor upravljanja. S druge strane, rješenja (optimalni vektor upravljanja i stanja) su bila neprekidna u cijelom intervalu $t_0 \le t \le t$. Ako je vektor upravljanja ograničen skupom nejednadžbi

$$\mathbf{g}\left(\mathbf{u}(t),t\right)\ge\mathbf{0}, \tag{2.79}$$

gdje je $\mathbf{g}$ r-komponentna vektorska funkcija, tada je jasno da ne možemo više koristiti nužan uvjet optimalnosti rješenja u obliku

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}=\mathbf{0}, \tag{2.80}$$

zbog toga što rješenje dobiveno izrazom (2.80) može kršiti ograničenja (2.79).

Također, moguće je da čak i u slučaju kada nisu zadana ograničenja vektora upravljanja, Hamiltonian ovisi linearno o vektoru upravljanja i zbog toga parcijalne derivacije (2.80) ne sadrže komponente vektora upravljanja što onemogućava nalaženje rješenja. Takav slučaj naziva se *singularno optimalno upravljanje*.

Nadalje, postoji mogućnost da jednadžba (2.80) ima višestruke korijene. Postavlja se pitanje, koje od tih rješenja izabrati kao optimalno rješenje.

Da bi rješili gore navedene probleme, moramo imati općenitiji nužni uvjet optimalnosti od (2.80). Takav općeniti nužan uvjet optimalnosti daje Pontryaginov princip maksimuma (odnosno minimuma, ako se radi o minimizaciji), koji glasi: U slučaju svih singularnih i neregularnih situacija uključujući i ograničenja vektora upravljanja, izbor komponenti vektora upravljanja mora biti takav da maksimizira (odnosno minimizira) vrijednost Hamiltoniana (2.50). Također, kao i do sada, vrijede jednadžbe

$$\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial H}{\partial \lambda^{T}}, \qquad \dot{\lambda}^{T}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \tag{2.81}$$

sa odgovarajućim rubnim uvjetima.

Pri tome se dopušta mogućnost da komponente vektora upravljanja ne moraju biti neprekidne funkcije vremena, već mogu biti prekidne funkcije u konačnom broju vremenskih trenutaka unutar intervala $t_0 \le t \le t$ (po dijelovima neprekidne funkcije).

Ako vektor upravljanja nije ograničen, tada iz Pontryaginovog principa direktno proizlazi uvjet (2.80). Strogi dokaz principa maksimuma može se naći u monografiji [1].

Rješavanje problema primjenom principa maksimuma može u nekim slučajevima da se bitno pojednostavi prebacivanjem skupa nejednadžbi (2.79) u skup jednadžbi uvođenjem dodatnih varijabli

$$\dot{\mathbf{z}}^2 = \mathbf{g}\big(\mathbf{u}(t), t\big), \tag{2.82}$$

ili

$$\mathbf{y}^2 = \mathbf{g}\big(\mathbf{u}(t), t\big). \tag{2.83}$$

Dodatne varijable pojavljuju se u kvadratnom obliku jer je tada desna strana gornjih jednadžbi uvijek veća ili jednaka nuli, čime je zadovoljena nejednadžba (2.79).

Sada kada smo ograničenja sveli na oblik jednakosti, možemo primjeniti metodu Lagrangeovih multiplikatora ubacujući jednakosti (2.83) u funkciju cilja

$$\begin{aligned} J &= \phi\big(\mathbf{x}(t_f), t_f\big) + \nu^T \cdot \psi\big(\mathbf{x}(t_f), t_f\big) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \Big[H\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda^T(t), t\big) - \lambda^T(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) + \gamma^T(t) \cdot \big(\mathbf{g}\big(\mathbf{u}(t), t\big) - \mathbf{y}^2(t)\big)\Big] dt \end{aligned} \tag{2.84}$$

Ponavljajući proceduru traženja prve varijacije funkcije cilja, dobivamo slijedeće uvjete koji moraju biti zadovoljeni da bi prva varijacija iščezavala, $\delta J = 0$,

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda^T} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t\big), \qquad \frac{\partial H}{\partial \gamma^T} = \mathbf{y}^2 = \mathbf{g}\big(\mathbf{u}, t\big), \tag{2.85}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\dot{\lambda}^T = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}, \tag{2.86}$$

$$\gamma_i y_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{2.87}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} + \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} + \gamma^T \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \tag{2.88}$$

sa početnim i rubnim uvjetima

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \qquad \lambda^T(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \nu^T \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}, \qquad \psi\big(\mathbf{x}(t_f), t_f\big) = \mathbf{0}, \tag{2.89}$$

i

$$H\big(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f\big) + \frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \nu \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t_f} = 0. \tag{2.90}$$

Jednadžbama (2.85)-(2.90) definirano je $2n+2r+m+q+1$ jednadžbi za određivanje veličina $\mathbf{x}(t)$, $\lambda(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\gamma(t)$, $\mathbf{u}(t)$, ν, t_f.

2.6 Optimalno upravljanje s ograničenjima vektora stanja

Sada ćemo proširiti razmatranja iz prethodnog podpoglavlja uključujući ograničenja na vektor stanja, koja možemo prikazati sustavom nejednadžbi

$$\mathbf{h}\big(\mathbf{x}(t), t\big) \geq \mathbf{0}, \tag{2.91}$$

gdje je $\mathbf{h}$ s-dimenzionalna vektorska funkcija. Gornje nejednadžbe definiraju prostor dozvoljenih stanja $G \subset R^n$. Gornji izraz u slučaju jednakosti predstavlja jednadžbu za graničnu plohu prostora G, dok je u slučaju stroge nejednakosti definiran otvoreni podprostor prostora G. Pontryaginov princip maksimuma može se primjeniti za određivanje onog dijela optimalne trajektorije koji pripada otvorenom podprostoru prostora G, dok dio trajektorije koji se nalazi na graničnoj plohi prostora G mora zadovoljavati poseban skup uvjeta, uključujući i uvjete skoka u karakterističnim točkama trajektorije koji moraju biti zadovoljeni zbog diskontinuiranosti trajektorije u faznom prostoru. Detaljan prikaz ovih uvjeta može se naći u [9]. Ovdje ćemo se ograničiti na tretiranje gornjeg problema svođenjem sustava nejednadžbi (2.91) na sustav jednadžbi uvođenjem dodatnih varijabli.

Postoji nekoliko načina na koje možemo gornja ograničenja tipa nejednadžbi prebaciti u ograničenja tipa jednadžbi. Definirajmo novu varijablu x_{n+1} sa

$$\dot{x}_{n+1} = f_{n+1} = \sum_{i=1}^{s} h_i^2(\mathbf{x},t) H(h_i), \tag{2.92}$$

gdje je $H\big(h_i(\mathbf{x},t)\big)$ modificirana Heavisideova step funkcija definirana kao

$$H\big(h_i(\mathbf{x},t)\big) = \begin{cases} 0 \ ; & h_i(\mathbf{x},t) \geq 0 \\ K_i \ ; & h_i(\mathbf{x},t) < 0 \end{cases} \tag{2.93}$$

gdje je $K_i > 0$, $i = 1,...,s$, i početni uvjet je

$$\dot{x}_{n+1}(t_0) = 0. \tag{2.94}$$

Uz ovakvu definiciju dodatne varijable x_{n+1}, vidimo da je $\dot{x}_{n+1}(t_f)$ direktna mjera kršenja ograničenja, tako da je zahtjev koji postavljamo na tu varijablu

$$\dot{x}_{n+1}(t_f) = 0, \tag{2.95}$$

što nam garantira da su sva ograničenja zadovoljena.

Modifikacija gore navedenog pristupa je da uvedemo s pomoćnih varijabli i isto toliko ograničenja tipa jednakosti

$$\dot{x}_{n+i} = h_i^2(\mathbf{x},t) H(h_i), \qquad \dot{x}_{n+i}(t_0) = 0, \qquad i = 1,...,s, \tag{2.96}$$

koja dodamo funkciji cilja

$$\hat{J} = J + \sum_{i=1}^{s} x_{n+i}(t_f)\,. \tag{2.97}$$

Pošto je minimalna vrijednost sume vrijednosti pomoćnih varijabli u t_f jednaka nuli, vidimo da minimizacijom gornje funkcije cilja ujedno zadovoljavamo i ograničenja (2.91).

Pošto smo problem sveli na ograničenja tipa jednakosti, možemo primjeniti metodu Lagrangeovih multiplikatora. Podintegralna funkcija ili Lagrangian, sada poprima oblik, za slučaj (2.92),

$$L = H - \lambda^T \cdot \dot{\mathbf{x}} + \gamma^T \cdot \left(\mathbf{g} - \mathbf{y}^2\right) + \lambda_{n+1}\left(f_{n+1} - \dot{x}_{n+1}\right). \tag{2.98}$$

Euler-Lagrangeove jednadžbe, u tom slučaju, poprimaju isti oblik kao (2.85)-(2.90) s tom razlikom da se (2.86) modificira s

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \lambda^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} - \lambda_{n+1}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{x}}, \tag{2.99}$$

i imamo još

$$\dot{\lambda}_{n+1}(t) = 0\,, \tag{2.100}$$

tako da se sustav jednadžbi (2.85)-(2.90) uz (2.99) proširuje s još dvije jednadžbe, (2.92) i (2.100), s dodatnim rubnim uvjetima (2.94) i (2.95).

2.7 Hamilton-Jacobi-Bellmanova jednadžba

Ovdje ćemo prikazati još jedan oblik općenitog kriterija optimalnosti baziranog na Bellmanovom principu optimalnosti, odnosno, konceptu dinamičkog programiranja.

Razmotrimo kontinuirani nelinearni dinamički sustav opisan s (2.30) i kriterij optimalnosti (2.31). Vektor upravljanja $\mathbf{u}(t)$ ograničen je na podprostor m-dimenzionalnog Euklidskog prostora, $\mathbf{u}(t) \in E$, gdje je $E \subset R^m$. Pretpostavimo da je poznata optimalna trajektorija vektora stanja $\hat{\mathbf{x}}(t)$ od početnog stanja $\mathbf{x}(t_0)$ do stanja u krajnjoj točki $\mathbf{x}(t_f)$.

Po Bellmanovom konceptu optimiranja stanja promatranog sistema (2.30), svaki segment (odsječak) optimalne trajektorije $\hat{\mathbf{x}}(t)$, mora sam po sebi biti optimalna trajektorija. Ako je moguće pronaći barem jedan segment trajektorije stanja koji nije optimalna trajektorija, onda se on može zamjeniti optimalnom trajektorijom, što znači da promatrana trajektorija u cjelini ipak nije optimalna trajektorija. Taj Bellmanov princip najopćenitiji je nužan uvjet optimalnosti.

Minimum funkcionala (2.31) označit ćemo s $J_m\left(\mathbf{x}(t), t\right)$. Budući da po Bellmanovom principu svaki segment optimalne trajektorije između bilo koje točke na optimalnoj trajektoriji $\hat{\mathbf{x}}(t)$ i krajnje točke $\hat{\mathbf{x}}(t\ )$ mora biti optimalan, vrijedi slijedeća relacija

$$J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)=\min_{\mathbf{u}\in E}\left\{\phi\left(\hat{\mathbf{x}}(t_f),t_f\right)+\int_t^{t_f}F\left(\hat{\mathbf{x}}(s),\mathbf{u}(s),t\right)d\,s\right\}. \tag{2.101}$$

Iz gornjeg izraza jasno je da je rubni uvjet za J_m

$$J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t_f),t_f\right)=\phi\left(\hat{\mathbf{x}}(t_f),t_f\right). \tag{2.102}$$

Za vremenski trenutak $t_1=t+\Delta t$ gdje je Δt dovoljno mali vremenski interval, imamo

$$J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t_1),t_1\right)=\min_{\mathbf{u}\in E}\left\{\phi\left(\hat{\mathbf{x}}(t_f),t_f\right)+\int_{t_1}^{t_f}F\left(\hat{\mathbf{x}}(s),\mathbf{u}(s),t\right)d\,s\right\}. \tag{2.103}$$

Koristeći aproksimaciju

$$J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)=\min_{\mathbf{u}\in E}\left\{F\left(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t),t\right)\Delta t+J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t_1),t_1\right)\right\}, \tag{2.104}$$

možemo drugi član na desnoj strani razviti u Taylorov red, zadržavajući samo linearne članove

$$J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t_1),t_1\right)=J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)+\mathbf{f}^T\left(\hat{\mathbf{x}}(t),\,\mathbf{u}(t),\,t\right)\cdot\frac{\partial J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)}{\partial\hat{\mathbf{x}}(t)}+\frac{\partial J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)}{\partial t}\Delta t\,. \tag{2.105}$$

Nakon supstitucije gornjeg izraza u (2.104) i dijeljenja sa Δt, imamo

$$-\frac{\partial J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)}{\partial t}=\min_{\mathbf{u}\in E}\left\{F\left(\hat{\mathbf{x}}(t),\,\mathbf{u}(t),\,t\right)+\mathbf{f}^T\left(\hat{\mathbf{x}}(t),\,\mathbf{u}(t),\,t\right)\cdot\frac{\partial J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)}{\partial\hat{\mathbf{x}}(t)}\right\}. \tag{2.106}$$

Za optimalni vektor upravljanja $\hat{\mathbf{u}}(t)$ gornja jednadžba postaje

$$-\frac{\partial J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)}{\partial t}=F\left(\hat{\mathbf{x}}(t),\,\hat{\mathbf{u}}(t),\,t\right)+\mathbf{f}^T\left(\hat{\mathbf{x}}(t),\,\hat{\mathbf{u}}(t),\,t\right)\cdot\frac{\partial J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)}{\partial\hat{\mathbf{x}}(t)}. \tag{2.107}$$

S obzirom da vrijedi

$$\frac{d\,J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)}{d\,t}=\frac{\partial J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)}{\partial t}+\mathbf{f}^T\left(\hat{\mathbf{x}}(t),\,\hat{\mathbf{u}}(t),\,t\right)\cdot\frac{\partial J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)}{\partial\hat{\mathbf{x}}(t)},$$

jednadžbu (2.106) možemo prikazati u slijedećem obliku

$$\min_{\mathbf{u}\in E}\left\{F\left(\hat{\mathbf{x}}(t),\,\mathbf{u}(t),\,t\right)+\frac{d\,J_m\left(\hat{\mathbf{x}}(t),t\right)}{d\,t}\right\}=0\,. \tag{2.108}$$

Da bi uspostavili vezu između jednadžbe (2.107) i Hamiltonovih kanonskih jednadžbi, pogledat ćemo čemu je jednaka mala promjena indeksa performanse $J_m\left(\mathbf{x}(t),\,t\right)$ u odnosu na malu promjenu početnih uvjeta i malu promjenu početnog vremena. Taj problem se svodi na određivanje prve varijacije izraza (2.101) s nespecificiranim početnim vremenom, što je ekvivalentno problemu s nespecificiranim konačnim vremenom uz negativan predznak ispred integrala (podpoglavlje 2.4). Kao rezultat dobivamo izraz (2.60) s negativnim predznakom. Pošto funkcija Θ nije definirana u početnom vremenu, odnosno $\Theta=0$, izraz (2.60) postaje

$$\delta J_m = -H\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t\big)\delta t + \lambda^T(t)\cdot d\,\mathbf{x}(t) - \int_t^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\lambda}^T\right)\cdot \delta\mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\cdot \delta\mathbf{u}\right] d\,\tau\,.$$

Pošto je izraz pod integralom zbog Bellmanovog principa optimalnosti jednak nuli na optimalnoj trajektoriji unutar vremenskog intervala $t \le t \le t_f$, imamo

$$d\,J_m = -H\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t\big)d\,t + \lambda^T(t)\cdot d\,\mathbf{x}\ , \tag{2.109}$$

odnosno

$$H = -\frac{\partial J_m}{\partial\, t}, \qquad \lambda^T = \frac{\partial J_m}{\partial \mathbf{x}}\ . \tag{2.110}$$

Na osnovi gornjih izraza, jednadžbu (2.106) možemo napisati kao

$$-\frac{\partial J_m}{\partial\, t} = \hat{H}\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\partial J_m}{\partial \mathbf{x}}, t\right) \tag{2.111}$$

gdje je

$$\hat{H}\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\partial J_m}{\partial \mathbf{x}}, t\right) = \min_{u\in E} H\left(\hat{\mathbf{x}}, \frac{\partial J_m}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{u}, t\right). \tag{2.112}$$

Jednadžba (2.111), odnosno (2.106), naziva se Hamilton-Jacobi-Bellmanova jednadžba. Radi se o nelinearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi prvog reda s rubnim uvjetom (2.102). Jednadžba (2.112) predstavlja, u stvari, drugi prikaz Pontryaginovog principa maksimuma (odnosno minumuma u našem slučaju), optimalni vektor upravljanja $\hat{\mathbf{u}}(t)$ minimizira Hamiltonovu funkciju. Drugim riječima, lijeva strana izraza (2.112) predstavlja desnu stranu izraza (2.107), dok desna strana izraza (2.112) predstavlja desnu stranu izraza (2.106). Ovim je, na neki način, pokazana ekvivalentnost između Pontryaginovog principa maksimuma i Bellmanovog koncepta dinamičkog programiranja.

Ako nema ograničenja na vektor stanja i upravljanja, tada $\hat{\mathbf{u}}(t)$ mora biti takav da zadovoljava nužan uvjet optimalnosti (2.80).

Nadalje, ako pomoću uvjeta optimalnosti (2.80) možemo izraziti $\mathbf{u}(t)$ kao funkciju od $\mathbf{x}(t), \lambda(t), t$, tada u Hamiltonovoj funkciji možemo eliminirati vektor upravljanja i dobiti jednadžbu (2.111) koja ovisi samo o $\mathbf{x}(t)$, t, odnosno samo o $\mathbf{x}(t)$ ukoliko Hamiltonian ne ovisi eksplicitno o vremenu. U tom slučaju, pod uvjetom da uspijemo riješiti jednadžbu (2.111), možemo dobiti vektor upravljanja $\mathbf{u}(t)$ u funkciji vektora stanja $\mathbf{x}(t)$, drugim riječima, dobili bi rješenje problema optimalnog upravljanja u obliku povratne veze po varijablama stanja. Time bi ujedno bio riješen i problem optimalne regulacije.

Nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (2.107) s rubnim uvjetom (2.102) općenito je vrlo teško riješiti numerički. Najčešće metode za njeno rješavanje su metoda karakteristika i razvoj u red potencija. Razvojem u red potencija funkcije $J_m\big(\mathbf{x}(t), t\big)$, dobivamo

$$J_m\left(\mathbf{x}(t), t\right) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jk} x_j x_k + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{jkl} x_j x_k x_l + \ldots \ , \tag{2.113}$$

što znači da se problem svodi na određivanje nepoznatih koeficijenata p_j, p_j , p_{jkl}, itd. Ako gornji izraz uvrstimo u jednadžbu (2.107) te koeficijente uz sve potencije vektora stanja izjednačimo s nulom, dobivamo sustav od

$$L = \sum_{j=1}^{N} \frac{(n-1+j)!}{(n-1)!\,j!}, \tag{2.114}$$

Riccatijevih diferencijalnih jednadžbi, gdje je N stupanj najviše potencije u razvoju. Npr. za $n = 4$, $N = 4$, trebamo riješiti sustav od 69 diferencijalnih jednadžbi da bi dobili rješenje u obliku povratne veze. Dobra strana ovog pristupa je da trebamo riješiti problem s početnim uvjetima, dok su loše strane to što nema garancije da je sistem stabilan, i drugo, broj Riccatijevih diferencijalnih jednadžbi rapidno se povećava s porastom reda sustava n i reda polinoma N.