1. Uvod

Temelji teorije optimalnog upravljanja postavljani su krajem pedesetih godina radovima Pontryagina [1] i Bellmana [2], da bi do kraja šesdesetih teorija poprimila svoj konačni oblik [3], [4]. Paralelno s razvojem teorije razvijale su se i različite numeričke metode za rješavanje problema optimalnog upravljanja. Iako teorija optimalnog upravljanja pruža univerzalni okvir za sintezu upravljanja multivarijabilnim dinamičkim sustavima, ona danas nije zastupljena u praktičnim primjenama s punim opsegom svojih mogućnosti, izuzev u slučajevima gdje postoje, uvjetno rečeno, analitička rješenja, kao npr. problem regulacije linearnih sustava s kvadratnim kriterijem optimalnosti. Razlog tome leži u matematičkoj kompleksnosti nužnih uvjeta optimalnosti i neophodnosti primjene numeričkih metoda. S druge strane, u odnosu na neke metode sinteze upravljanja multivarijabilnim dinamičkim sustavima, teorija optimalnog upravljanja može razmatrati i problem ograničenja varijabli stanja i upravljanja.

Iako je teorija optimalnog upravljanja u početku svog razvoja imala gotovo isključivu primjenu na problemima vođenja tehničkih sustava, primjetan je zadnjih godina sve veći trend njene primjene u ekonomiji i menadžmentu [5]-[7]. Pomoću teorije optimalnog upravljanja tretirani su mnogi problemi ekonomije i menadžmenta kao npr. optimalni ekonomski rast i ekonomsko planiranje, ekonomska stabilizacija, međunarodna trgovina, regionalna ekonomija, urbana ekonomija, kontrola populacije, kontrola zagađenja okoliša, kontrola naoružanja, dinamička teorija organizacije. Centralni problem ekonomije je optimalna raspodjela ograničenih sredstava u nekom vremenskom trenutku (statička optimizacija) ili tokom određenog vremena (dinamička optimizacija). Izbor između manje potrošnje sada i veće poslije, izbor između kratkoročnog napora i dugoročnog profita, problem je dinamičke optimizacije, itd. Drugim riječima, problem se sastoji u raspodjeli investicija po različitim sektorima tijekom cijelog perioda ekonomskog planiranja.

S druge strane, teorija optimalnog upravljanja ima ključnu ulogu u formulaciji opće teorije sustava, odnosno, opće teorije upravljanja, koja bi vrijedila kako za tehničke, tako i za ekonomske, biološke sustave i ljudske organizacije. Danas se principi, metode, tehnike i postupci ove teorije pokušavaju prenijeti i na druge oblasti, tako da tehnička teorija upravljanja dobiva širi značaj. Ta tendencija je posebno izražena u jednoj grani opće teorije sustava; teoriji hijerarhijskih sustava s više nivoa [8]. Osnovna motivacija formulacije teorije hijerarhijskih sustava proisticala je iz područja automatizacije i upravljanja kompleksnim industrijskim sustavima, da bi kasnije prerasla u teoriju upravljanja društvenim organizacijama. Ključni pojam teorije hijerarhijskih sustava je princip koordinacije između različitih nivoa (elemenata) sustava, kako vertikalnih tako i horizontalnih. S te strane, problem koji razmatramo u ovom radu, kooperativni rad dva robota, predstavlja analogiju koordinacije dva elementa sustava na istom hijerarhijskom nivou.

Osnovna motivacija ovog rada je razvoj numeričkih algoritama koji bi omogućili operativnu primjenu optimalnog upravljanja na složene, nelinearne multivarijabilne sustave sa zadanim ograničenjima varijabli stanja i upravljanja. Pri tome je nužno povlačenje analogija s poznatim arhitekturama neuronskih mreža, ako postoji namjera primjene numeričkih algoritama optimalnog upravljanja na velike, kompleksne sustave (sustave visokih dimenzija vektora stanja), radi iskorištavanja mogućnosti paralelnog procesiranja. U radu se pod pojmom nelinearnost podrazumjeva jednoznačna nelinearnost, odnosno, ne tretira se višeznačna nelinearnost poput histereze. Također, svi algoritmi (osim u slučaju podpoglavlja 8.4) su off-line algoritmi, odnosno, ne primjenjuju se direktno u procesu upravljanja.

U drugom poglavlju razmatraju se neki elementarni rezultati iz teorije optimalnog upravljanja, s posebnim naglaskom na tretiranje raznih vrsta mogućih ograničenja. Cilj tog poglavlja je da se ilustriraju matematički problemi s kojima se suočavamo u slučaju direktne primjene nužnih uvjeta optimalnosti za nalaženje optimalnog rješenja. Ograničenja tipa nejednakosti po varijablama upravljanja, a posebno po varijablama stanja, čine nužne uvjete optimalnosti gotovo neupotrebljivim za primjenu osim za nižedimenzionalne linearne sustave.

U trećem poglavlju razmatraju se neke standardne numeričke metode optimalnog upravljanja. Numeričko tretiranje problema optimalnog upravljanja je neophodno zbog matematičke kompleksnosti nužnih uvjeta optimalnosti. Numeričke metode optimalnog upravljanja mogu se podjeliti na metode koje numerički tretiraju nužne uvjete optimalnosti (metoda kvazilinearizacije, diskretno dinamičko programiranje) i direktne metode u koje možemo ubrojiti Ritzovu metodu i metodu diskretizacije kojom kontinuirani problem optimalnog upravljanja svodimo na problem nelinearnog programiranja.

U četvrtom poglavlju daje se izvod gradijentnog algoritma za diskretizirani problem optimalnog upravljanja. Izvod je baziran na principu BPTT (*backpropagation-through-time*) algoritma, odnosno na primjeni svojstva ulančanih derivacija i iteriranja unazad u vremenu. Zbog kompleksnosti izvoda algoritma za nelinearne multivarijabilne sustave, najprije smo izveli algoritam za jednodimenzionalni slučaj radi ilustracije osnovnog principa izvođenja algoritma. Također smo dali prikaz analogije između dobivenog algoritma za jednodimenzionalan slučaj i arhitekture dinamičkih neuronskih mreža, kao i unaprijednih neuronskih mreža s N-1 skrivenih slojeva (N je broj diskretiziranih vremenskih podintervala). Zatim slijedi izvod algoritma za općenite nelinearne multivarijabilne sustave bez ograničenja varijabli stanja i upravljanja. Nakon toga, u osnovnu shemu algoritma postepeno dodajemo modifikacije za slučaj ograničenja tipa rubnih uvjeta, te ograničenja tipa nejednakosti i jednakosti po varijablama stanja i upravljanja. Na kraju dajemo pregled konačnog oblika algoritma za problem optimalnog upravljanja u kojeg su uključeni svi, gore navedeni, tipovi ograničenja. Dobiveni algoritam smo testirali na nekim jednostavnim linearnim primjerima (s poznatim analitičkim rješenjem) radi mogućnosti direktne usporedbe numeričkih rezultata s analitičkim.

U petom poglavlju dajemo prikaz metode konjugiranog gradijenta, koja spada u metode drugog reda i ima puno bolja konvergencijska svojstva od gradijentnog algoritma s konstantnim koeficijentom konvergencije. Metoda konjugiranog gradijenta zahtijeva dodatnu jednodimenzionalnu minimizaciju funkcije cilja u svakom koraku iteriranja algoritma što povećava vrijeme izračunavanja jedne iteracije gradijentnog

algoritma. Međutim, ubrzanje konvergencije koje pri tome postižemo svakako opravdava korištenje metode konjugiranog gradijenta u slučajevima gdje možemo dobiti egzaktnu vrijednost gradijenta funkcije cilja.

U šestom poglavlju razmatramo problem vremenski optimalnog upravljanja. Prvo primjenjujemo analognu proceduru kao u četvrtom poglavlju uzimajući period diskretizacije promjenjivom varijablom i računamo derivaciju definirane funkcije cilja po periodu diskretizacije. Dobiveni algoritam je vrlo glomazan i nepraktičan za implementaciju. Nakon toga prikazali smo drugi algoritam koji je vrlo jednostavan i zahtijeva samo izračunavanje sume kaznenih funkcija.

U sedmom poglavlju razmatramo primjenu algoritama prikazanih u prethodnim poglavljima na problem optimalnog upravljanja robotom s dva stupnja slobode. Prvo se razmatra vremenski optimalno upravljanje robotom s ograničenjima varijabli upravljanja, a zatim isti problem s uvjetom zaobilaženja prepreke. Nakon toga razmatramo problem optimalnog upravljanja kooperativnim radom dva robota tokom prenošenja krutog tereta s jednog mjesta na drugo. Najprije smo razmatrali problem uz uvjet ograničenja upravljačkih varijabli i uvjet konstantne udaljenosti između prihvatnica manipulatora. Iz analize dobivenih rezultata proizlazi da bi, i pored zadovoljavanja svih postavljenih uvjeta, dolazilo do međusobnog sudara ruku manipulatora. Zatim smo, pored navedenih uvjeta, dodali uvjet međusobnog izbjegavanja sudara čime smo otklonili navedeni problem.

U osmom poglavlju izvodimo algoritam za određivanje koeficijenata pojačanja statičkog regulatora u povratnoj petlji. Izvod se, također, temelji na principu BPTT algoritma. Razmatra se problem regulacije za nelinearne multivarijabilne sustave s ograničenjima varijabli upravljanja.