9. Zaključak

Na osnovi rezultata prikazanih u prethodnim poglavljima mogu se uočiti određene dobre strane kao i određene slabosti dobivenog algoritma. Na primjerima problema s poznatim analitičkim rješenjem dobili smo gotovo savršeno poklapanje numeričkih rezultata sa analitičkim za relativno mali broj iteracija. Korištenjem metode konjugiranog gradijenta brzina konvergencije još se više povećava. U situacijama gdje dobivene numeričke rezultate ne možemo usporediti s analitičkim, kao u slučaju optimalnog upravljanja robotom, mjera točnosti rješenja je ukupna suma kaznenih funkcija. Što je ta suma manja, to je rješenje točnije.

Usporedimo li metodu s konstantnim koeficijentom konvergencije sa metodom konjugiranog gradijenta, dolazimo do slijedećih zaključaka. Metoda s konstantnim koeficijentom konvergencije jednostavnija je za upotrebu; nije potrebna dodatna jednodimenzionalna minimizacija funkcije cilja. Međutim, zbog činjenice da stabilnost algoritma ovisi o koeficijentu konvergencije (odnosno, postoji gornja granica vrijednosti tog koeficijenta iznad koje algoritam postaje nestabilan) imamo i ograničenje brzine konvergencije algoritma. Metodom konjugiranog gradijenta rješavamo pitanje stabilnosti (koeficijent konvergencije određujemo u svakom koraku iteriranja) i bitno ubrzavamo konvergenciju.

S druge strane, kao što smo vidjeli na primjeru zaobilaženja prepreke i primjeru kooperativnog rada dva robota, zbog složenosti izračunavanja parcijalnih derivacija kaznenih funkcija pribjegli smo, može se reći, grubim aproksimacijama tih derivacija što je onemogućilo upotrebu metode konjugiranog gradijenta, ali je zato metoda s konstantnim koeficijentom konvergencije dala dobre rezultate. Razlog za neefikasnost metode konjugiranog gradijenta, u ovom slučaju, leži u raskoraku između aproksimativne vrijednosti gradijenta funkcije cilja i točne vrijednosti funkcije cilja. Sa stanovišta metode s konstantnim koeficijentom konvergencije, aproksimativna vrijednost gradijenta znači određeno skretanje sa smjera najbržeg spusta, odnosno, određeno usporavanje konvergencije.

Vidjeli smo da ograničenja po varijablama stanja mogu biti prilično složena, a derivacije kaznenih funkcija za ta ograničenja izuzetno komplicirane. Stoga se čini prilično značajna činjenica da se grubom aproksimacijom tih derivacija mogu dobiti dobri rezultati, pa makar uz cijenu smanjenja brzine konvergencije. Imajući u vidu specifičnu geometrijsku interpretaciju gradijentnog algoritma, mogli bi zaključiti da je gradijentni algoritam s konstantnim koeficijentom konvergencije možda jedini algoritam koji je u stanju rješavati problem optimalnog upravljanja s navedenim tipom aproksimacija.

Primjenom BPTT (*backpropagation-through-time*) algoritma na problem optimalnog upravljanja s konstantnim konačnim vremenom (odnosno, vremenskim

intervalom upravljanja) dobili smo vrlo elegantan oblik algoritma u kojem se zahtijeva poznavanje samo prvih derivacija odgovarajućih veličina. Primjenom istog principa na vremenski optimalno upravljanje dobili smo vrlo glomazan algoritam, nepraktičan za upotrebu, s derivacijama drugog reda. Čak i kad bi dobiveni algoritam implementirali, ostalo bi otvoreno pitanje stabilnosti algoritma. Osnovni problem u realizaciji vremenski optimalnog upravljanja koje je bazirano na simultanom iteriranju varijabli upravljanja i vremenskog intervala, leži u činjenici da za dani vremenski interval nemamo dovoljno točno rješenje varijabli upravljanja. Taj problem smo rješili tako da smo vrijednost vremenskog intervala držali konstantnom sve dok ne bi postigli odgovarajuću točnost rješenja, definiranu sumom kaznenih funkcija. Taj pristup garantira stabilnost algoritma i, kao što smo vidjeli, daje vrlo dobre rezultate.

Pošto je dokazivanje egzistencije rješenja problema optimalnog upravljanja s ograničenjima vrlo težak problem u općenitom slučaju, tretiranje ograničenja primjenom kaznenih funkcija vrlo je korisno i kao indikacija rješivosti problema. Ako kaznena funkcija ne konvergira prema nuli (za stabilan algoritam s konstantnim koeficijentom konvergencije) to je siguran znak da problem nema rješenje u okviru zadanih ograničenja. Upravo to svojstvo kaznenih funkcija je iskorišteno u algoritmu za vremenski optimalno upravljanje.

Brzina konvergencije algoritma ne ovisi bitno o redu sustava, koliko o broju ograničenja, odnosno kaznenih funkcija, po varijablama stanja i upravljanja. Na osnovi dobivenih rezultata možemo zaključiti da je optimalna primjena algoritma na nelinearne dinamičke sustave sa zadanim rubnim uvjetima, ograničenjima upravljačkih varijabli i jednim tipom ograničenja po varijablama stanja. Već dva tipa ograničenja po varijablama stanja, kao što smo vidjeli (međusobno izbjegavanje sudara i održavanje konstantne udaljenosti ruku manipulatora), mogu značajno smanjiti brzinu konvergencije algoritma.

Analogija BPTT algoritma za optimalno upravljanje sa strukturom dinamičke neuronske mreže, odnosno unaprijedne (statične) neuronske mreže s *N-1* skrivenih slojeva, korisna je zbog mogućnosti korištenja svojstava paralelizma neuronskih mreža, što bi omogućilo (primjenom paralelnog procesiranja) bitno smanjenje ovisnosti brzine računanja o redu dinamičkog sustava.

Na kraju još nekoliko riječi o mogućim pravcima daljnjeg rada i istraživanja. Interesantno bi bilo ispitati razne moguće modifikacije dobivenog algoritma. Problem modifikacije funkcije cilja u obliku integrala možemo transformirati u problem minimizacije dodatne varijable stanja u konačnom vremenu. Zatim, umjesto da kaznene funkcije dodamo funkciji cilja, moguće je uvesti dodatne varijable stanja s rubnim uvjetima jednakim nuli. Međusobnom usporedbom raznih modifikacija utvrdile bi se verzije algoritma koje daju najbolje rezultate pod određenim okolnostima. Također, interesantno bi bilo ispitati razne heurističke gradijentne algoritme s promjenjivim koeficijentom konvergencije u cilju dobivanja boljih konvergencijskih svojstava.

Algoritam za optimalno upravljanje dinamičkim sustavima s povratnom vezom i s ograničenjima upravljačkih varijabli (sinteza regulatora) izveden je za slučaj statičkog regulatora. Nadalje, trebalo bi provesti analizu stabilnosti i ispitati osjetljivost na stohastičke poremećaje (šum mjerenja). Daljnje poboljšanje ostvarilo bi se primjenom BPTT algoritma za slučaj dinamičkog regulatora. Također, valjalo bi ispitati mogućnosti povratne veze u slučaju ograničenja po varijablama stanja.

Interesantna bi bila primjena dobivenog algoritma na problem diferencijalnih igara. U formulaciji problema diferencijalne igre imamo dinamički sustav s dva vektora upravljanja, gdje jedan vektor upravljanja nastoji maksimizirati određenu funkciju cilja, dok drugi vektor upravljanja nastoji minimizirati istu funkciju cilja. Tako formuliran problem bitno je složeniji od standardnog problema optimalnog upravljanja. Proučavanje diferencijalnih igara za sada se svodi ili na opće teoreme ili na rješavanje jednostavnih modela. Teško se nalazi optimalno rješenje koje bi slijedilo iz općih principa teorije optimalnog upravljanja. Proširenje primjene gradijentnog algoritma na problem diferencijalne igre bilo bi relativno jednostavno. Za one upravljačke varijable koje minimiziraju funkciju cilja stavio bi se negativan predznak ispred gradijenta, dok bi se za one upravljačke varijable koje maksimiziraju funkciju cilja stavio pozitivan predznak. Mogućnost rješenja diferencijalne igre vrlo je korisna, jer bi razne neodređenosti u sustavu koje ne možemo modelirati, poput stohastičkih smetnji, promjenjivih parametara sustava, nemodelirane dinamike, mogli tretirati kao dodatni vektor stanja koji nastoji maksimizirati definiranu funkciju cilja (ako je u pitanju problem minimizacije). Sve što bi trebali učiniti je da te dodatne varijable stanja dodamo na odgovarajuća mjesta u modelu dinamike sustava i definiramo interval unutar kojeg se te varijable mogu naći. S druge strane, u ekonomskim primjenama optimalnog upravljanja rješavanje problema u obliku diferencijalne igre ima izuzetan značaj.

Problem nemodelirane dinamike mogli bi također riješiti primjenom neuronske mreže koja bi na osnovu odgovarajućeg broja različitih ulazno-izlaznih podataka dovoljno dobro “naučila” dinamiku sustava kojim upravljamo.