

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

POSLIJEDIPLOMSKI STUDIJ

TATJANA POTOČNIK

**METODA KONAČNIH TRAKA I NJENA PRIMJENA NA  
PRORAČUN STAKLENE PLOČE**

MAGISTARSKI RAD

RIJEKA, 2005.

# S a d r Ź a j

<b>1</b>	<b>UVOD U MAGISTARSKI RAD .....</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>UVOD U METODU KONAČNIH TRAKA.....</b>	<b>5</b>
2.1	ENERGETSKI PRISTUP ZA PROSTU GREДУ .....	6
2.2	PLATE STRIP (PLOČA).....	9
2.2.1.	Postavka problema.....	9
2.2.2.	Rješenje problema.....	9
2.2.2.1	Funkcija pomaka.....	9
2.2.2.2	Matrica krutosti i vektor opterećenja .....	12
2.2.3.	Primjer.....	15
2.3	PLANE STRESS STRIP (RAVNINSKO STANJE NAPREZANJA) .....	19
2.3.1.	Postavka problema.....	19
2.3.2.	Rješenje problema.....	19
2.3.2.1	Funkcija pomaka.....	19
2.3.2.2	Matrica krutosti i vektor opterećenja .....	21
2.3.3.	Primjer.....	23
2.4	FLAT SHELL STRIP .....	27
2.4.1.	Postavka problema.....	27
2.4.2.	Rješenje problema.....	27
2.4.2.1	Funkcija pomaka.....	27
2.4.2.2	Matrica krutosti i vektor opterećenja .....	27
2.4.3.	Primjer.....	29
2.5	SPAJANJE ELEMENATA I UVJETI OSLANJANJA DUŽ ČVORNE LINIJE ...	33
2.5.1.	Spajanje elemenata.....	33
2.5.2.	Uvjeti oslanjanja duž čvorne linije .....	35
2.5.2.1	Primjer.....	36
<b>3</b>	<b>STAKLO KAO GRAĐEVNI MATERIJAL.....</b>	<b>52</b>
3.1	OSNOVNA SVOJSTVA I PROIZVODNJA STAKLA .....	52
3.1.1.	Obično staklo .....	53
3.1.2.	Kaljeno staklo .....	54
3.1.3.	Toplinski ojačano staklo .....	55
3.1.4.	Lamelirano staklo.....	55
3.1.5.	Izolacijsko staklo .....	56
3.2	PRORAČUN STAKLA .....	57
3.2.1.	Mehanika loma.....	57
3.2.2.	Koncentracija napona.....	58
3.2.3.	Zamor .....	58
3.2.4.	Američki propisi za proračun stakla ASTM E1300 - 03 .....	58
<b>4</b>	<b>LABORATORIJSKO ISPITIVANJE STAKLENE PLOČE.....</b>	<b>60</b>
4.1	REZULTATI ZA STAKLO DEBLJINE 6 MM .....	61
4.2	REZULTATI ZA STAKLO DEBLJINE 8 MM .....	63

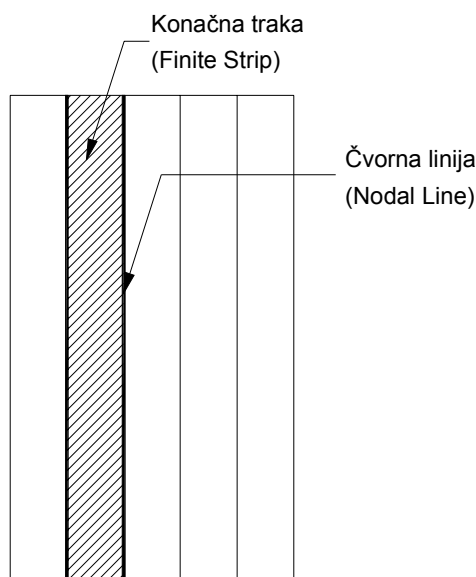
4.3	REZULTATI ZA LAMELIRANO STAKLO DEBLJINE 5+5 MM.....	65
4.4	REZULTATI ZA STAKLO DEBLJINE 15 MM .....	67
4.5	ANALIZA REZULTATA .....	69
4.5.1.	Staklo debljine 6 mm .....	69
4.5.2.	Staklo debljine 8 mm .....	70
4.5.3.	Lamelirano staklo 5+5 mm .....	71
4.5.4.	Staklo debljine 15 mm .....	72
<b>5</b>	<b>GEOMETRIJSKA NELINEARNOST PO METODI KONAČNIH TRAKA.....</b>	<b>73</b>
5.1	UVOD	73
5.2	NEWTON-RAPHSONOVA METODA .....	74
5.3	MODIFICIRANA NEWTON-RAPHSONOVA METODA .....	77
5.4	INKREMENTALNA METODA .....	77
5.5	PRIMJENA NEWTON-RAPHSONOVE METODE NA METODU KONAČNIH TRAKA.....	78
5.5.1.	Tangencijalna matrica krutosti.....	82
5.5.2.	Primjer.....	83
<b>6</b>	<b>ANALIZA NELINEARNOG PONAŠANJA STAKLENE PLOČE.....</b>	<b>84</b>
6.1	MODEL PLOČE.....	84
6.2	PRORAČUN.....	86
<b>7</b>	<b>ZAKLJUČAK .....</b>	<b>92</b>
<b>8</b>	<b>LITERATURA.....</b>	<b>93</b>

# 1 UVOD U MAGISTARSKI RAD

Ovaj magistarski rad obrađuje metodu konačnih traka preko teoretskih postavki i niz numeričkih primjera napravljenih u programu Mathcad. Danas se u inženjerstvu vrlo često koriste programski paketi koji računaju konstrukcije pomoću metode konačnih elemenata a način proračuna mnogima nije poznat. Ovi numerički primjeri pojašnjavaju način proračuna metode konačnih traka kao jedne od metoda konačnih elemenata. Primjeri su napravljeni su za staklo. Karakteristike tog materijala navedene su u posebnom odjeljku. Poseban naglasak dan je nelinearnom proračunu staklenih ploča kod kojih je debljina zanemariva u odnosu na ostale dvije veličine. Kod takvih konstrukcija ne smije se zanemariti utjecaj uzdužnih sila pa je nelinearni proračun neizbježan.

## 2 UVOD U METODU KONAČNIH TRAKA

*Metoda konačnih traka* jedna je od numeričkih metoda analize konstrukcija i smatra se varijantom metode konačnih elemenata. Za razliku od metode konačnih elemenata, upotreba ove metode ograničena je na konstrukcije sa konstantnim poprečnim presjekom i rubnim uvjetima koji se transversalno ne mijenjaju. Prednost metode konačnih traka očituje se u manjem broju elemenata što čine model konstrukcije te, kao posljedica toga, jeftiniji i efikasniji kompjuterski proračun.

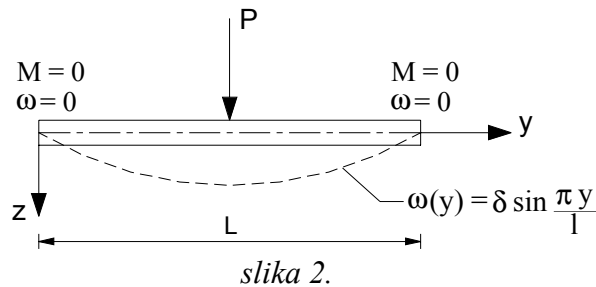


slika 1.

U kratkim crtama proračun jedne konačne trake može se opisati na slijedeći način: komponente pomaka u bilo kojoj točki konačne trake izražene su pomoću parametara pomaka *čvorne linije*, i to, u obliku *polinoma* u poprečnom smjeru i u obliku *reda sinusnih funkcija* u uzdužnom smjeru. Odabrana sinusna funkcija mora zadovoljiti rubne uvjete na krajevima konačne trake. Pomoću poznatog odnosa deformacija – pomak, unutarnja energija deformacije trake i potencijalna energija vanjskog opterećenja mogu se izraziti putem *parametara pomaka* koji za slučaj ravnotežnog stanja daju minimum potencijalne energije. Na osnovi te postavke dobiva se niz linearnih jednažbi koje imaju za nepoznanice parametre pomaka. Nakon rješenja jednažbi mogu se izračunati komponente pomaka i naprezanja u bilo kojoj točki konačne trake.

## 2.1 ENERGETSKI PRISTUP ZA PROSTU GREDU

Energetski pristup koji se koristi u metodi konačnih traka pojasniti će se na primjeru proste grede opterećene koncentriranom silom u sredini raspona.



Rubni uvjeti za  $y = 0$  i  $y = L$  glase:

$$\begin{array}{ll} \text{pomak} & \omega(y) = 0 \\ \text{moment savijanja} & M(y) = -EI \frac{d^2 \omega}{dy^2} = 0 \end{array} \quad (1)$$

Progibnu liniju proste grede predstavljamo slijedećom sinusnom funkcijom:

$$\omega(y) = \delta \sin \frac{\pi y}{l} \quad (2)$$

$\delta$  je nepoznati koeficijent (*parametar pomaka*).

Odabrana sinusna funkcija zadovoljava rubne uvjete:

$$\text{za } y = 0 \quad \text{imamo} \quad \omega(0) = \delta \sin 0 = 0; \quad M(0) = -EI \delta \frac{d^2(\sin 0)}{dy^2} = 0$$

$$\text{za } y = l \quad \text{imamo} \quad \omega(l) = \delta \sin \pi = 0; \quad M(l) = -EI \delta \frac{d^2(\sin \pi)}{dy^2} = 0$$

Koeficijent  $\delta$  treba biti takav da ukupna potencijalna energija sistema bude minimalna. Ukupna potencijalna energija definirana je kao:

$$\Pi = U + W = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy - Pw \quad (3)$$

gdje je  $U$  unutarnja energija deformacije a  $W$  potencijalna energija opterećenja. Uvjet za minimum potencijalne energije je:

$$\frac{d\Pi}{d\delta} = 0 \quad (4)$$

Uvrstimo li (2) u (3) dobivamo:

$$\Pi = \frac{\pi^4 EI \delta^2}{2l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi y}{l} dy - P \delta \quad (5)$$

$$\Pi = \frac{\pi^4 EI \delta^2}{4l^3} - P \delta \quad (6)$$

$$\frac{d\Pi}{d\delta} = \frac{\pi^4 EI \delta}{2l^3} - P \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \quad (7)$$

Uvrstimo li (7) u izraz za pomak (2) dobivamo izraz za pomak proste grede opterećene koncentriranom silom u sredini raspona:

$$w(y) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi y}{l} \quad (8)$$

Maksimalni progib u sredini grede preko izraza (8) je:

$$w(l/2) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi(l/2)}{l} = 0.02053 Pl^3 / EI$$

Teoretsko rješenje:

$$w(l/2) = Pl^3 / 48 EI = 0.02083 Pl^3 / EI$$

Ako uvrstimo (8) u (1) dobivamo izraz za moment savijanja:

$$M(y) = -EI \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi y}{l} \right) = \frac{2Pl}{\pi^2} \sin \frac{\pi y}{l} \quad (9)$$

Maksimalni moment savijanja u sredini raspona je:

$$M(l/2) = \frac{2Pl}{\pi^2} \sin \frac{\pi(l/2)}{l} = 0.2026 Pl$$

Teoretsko rješenje:

$$M(l/2) = Pl / 4 = 0.2500 Pl$$

Točnost rješenja poboljšava se ako se progib  $w$  izrazi pomoću reda sinusnih funkcija:

$$w(y) = \sum_{m=1}^r \delta_m \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (10)$$

$\delta_m$  je nepoznati koeficijent za  $m$ -ti član reda a  $r$  je broj članova reda.

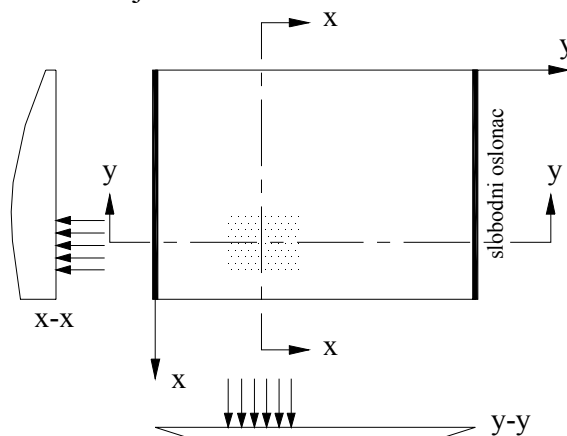


## 2.2 PLATE STRIP (PLOČA)

Analizirati će se ploča opterećena okomito na svoju ravninu.

### 2.2.1. Postavka problema

Potrebno je riješiti metodom konačnih traka problem ploče slobodno oslonjene sa dvije strane i opterećene okomito na svoju ravninu.

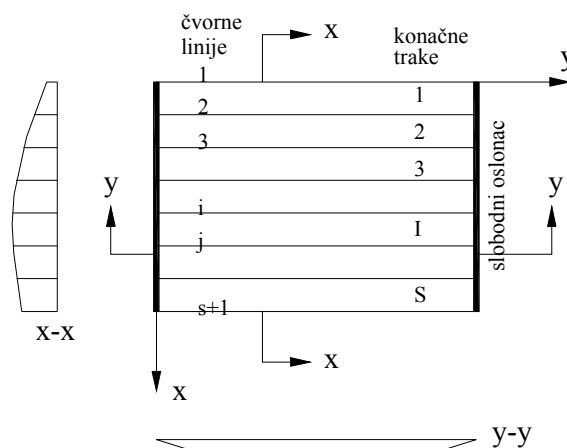


slika 3.

### 2.2.2. Rješenje problema

#### 2.2.2.1 Funkcija pomaka

Ploču ćemo podijeliti na  $S$  konačnih traka.



slika 4.

Potrebno je odrediti funkciju pomaka koja će opisati polje pomaka ploče slobodno oslonjene na dva kraja. *Funkcija pomaka* mora biti takva da pomak u osloncima bude nula te da moment savijanja oko osi  $y$  u osloncima bude nula. Za opisivanje pomaka u uzdužnom

smjeru (y-y) odabiremo *red sinusnih funkcija*, a za opisivanje pomaka u poprečnom smjeru (x-x) odabiremo *red polinoma*. Na taj način, funkcija pomaka jedne konačne trake prima slijedeći oblik:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^r f_m(x) \cdot \sin \frac{m\pi y}{l} = \sum_{m=1}^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (11)$$

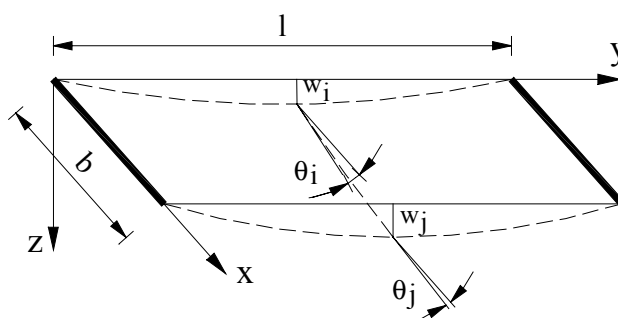
Tu je r broj članova reda a  $a_0, a_1, a_2, \dots$  su nepoznati koeficijenti koje treba odrediti.

Između dvije konačne trake sa zajedničkom čvornom linijom potrebno je osigurati kontinuitet. Iz tog se razloga koeficijenti  $a_0, a_1, a_2, \dots$  izražavaju pomoću *parametara pomaka*, ovdje su to *amplitude pomaka*  $w_{im}$  i  $w_{jm}$  u dvijema čvornim linijama i i j:

$$w_i = \sum_{m=1}^r w_{im} \cdot \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (12)$$

$$w_j = \sum_{m=1}^r w_{jm} \cdot \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (13)$$

$w_i$  je pomak čvorne linije i a  $w_{im}$  je amplituda pomaka te linije. Za dvije susjedne trake  $w_{im}$  je jednak pa je stime osiguran uvjet da dvije susjedne trake imaju isti pomak duž zajedničke čvorne linije. Osim toga, između dvije konačne trake potrebno je osigurati i kontinuitet nagiba. To izražavamo putem *amplituda poprečnog nagiba*  $\theta_{im}$  i  $\theta_{jm}$ .



slika 5.

$$\theta_i = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i = \sum_{m=1}^r \theta_{im} \cdot \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (14)$$

$$\theta_j = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_j = \sum_{m=1}^r \theta_{jm} \cdot \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (15)$$

Tako su definirana četiri parametra pomaka (amplitude pomaka):  $w_{im}$ ,  $w_{jm}$ ,  $\theta_{im}$  i  $\theta_{jm}$ . Funkcija pomaka u poprečnom smjeru mora biti stoga polinom četvrtog reda

$$f_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (16)$$

i mora zadovoljavati slijedeće uvjete:

$$\text{za } x = 0, \quad f_m(0) = w_{im}, \quad \frac{\partial f_m(0)}{\partial x} = \theta_{im}$$

$$\text{za } x = b, \quad f_m(b) = w_{jm}, \quad \frac{\partial f_m(b)}{\partial x} = \theta_{jm}$$

Tako iz izraza (16) dobivamo:

$$a_0 = w_{im}$$

$$a_1 = \theta_{im}$$

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 = w_{jm}$$

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 = \theta_{jm}$$

Koeficijenti  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  se nalaze rješavanjem gornjih jednažbi.

$$a_0 = w_{im}$$

$$a_1 = \theta_{im}$$

$$a_2 = -3 \frac{w_{im}}{b^2} + 3 \frac{w_{jm}}{b^2} - 2 \frac{\theta_{im}}{b} - \frac{\theta_{jm}}{b}$$

$$a_3 = 2 \frac{w_{im}}{b^3} - 2 \frac{w_{jm}}{b^3} + \frac{\theta_{im}}{b^2} + \frac{\theta_{jm}}{b^2}$$

Izraz za polje pomaka:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \sin \frac{m\pi y}{l}$$

Uvrstimo li izraze za  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  u izraz za polje pomaka ploče dobivamo:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^r \left[ \left( \left( 1 - 3 \left( \frac{x}{b} \right)^2 + 2 \left( \frac{x}{b} \right)^3 \right) w_{im} + \left( x - 2 \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2} \right) \theta_{im} + \left( 3 \left( \frac{x}{b} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{b} \right)^3 \right) w_{jm} + \left( -\frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2} \right) \theta_{jm} \right] \sin \frac{m\pi y}{l}$$

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^r [N_1(x) \cdot w_{im} + N_2(x) \cdot \theta_{im} + N_3(x) \cdot w_{jm} + N_4(x) \cdot \theta_{jm}] \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3X^2 + 2X^3 \\ N_2(x) &= x(1 - 2X + X^2) \\ N_3(x) &= 3X^2 - 2X^3 \\ N_4(x) &= x(X^2 - X) \end{aligned} \quad (18)$$

$$X = x / b$$

Napisano u matricnom obliku:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^r [N_1, N_2, N_3, N_4] \begin{Bmatrix} w_{im} \\ \theta_{im} \\ w_{jm} \\ \theta_{jm} \end{Bmatrix} \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (19)$$

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^r [N] \{\delta\}_m \sin \frac{m\pi y}{l} \quad (20)$$

$\delta_m$  je vektor parametara pomaka (amplituda pomaka) a N je matrica poprečnih funkcija oblika.

### 2.2.2.2 Matrica krutosti i vektor opterećenja

U izrazu za pomak  $w(x,y)$  nepoznati su parametri pomaka  $\delta_m$  u pojedinim čvornim linijama.  $\delta_m$  pronalazimo energetskim pristupom.

Kod uspostave ravnoteže ukupna potencijalna energija trebala bi imati minimalnu vrijednost, dakle prva derivacija potencijalne energije po parametru pomaka mora biti jednaka nuli.

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial w_{im}} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial \theta_{im}} = 0 \quad i = 1, \dots, N'$$

$N'$  je ukupan broj čvornih linija ( $N' = S + 1$ ).

U matričnom obliku izraz za minimizaciju potencijalne energije poprima oblik:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial \{\delta\}_{tm}} = 0$$

Ukupna potencijalna energija sastoji se od potencijalne energije unutarnjih sila (deformacije) te potencijalne energije vanjskog opterećenja.

Unutarnja energija deformacije:

$$U_t = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \{\delta\}_{tm}^T [K]_{tm} \{\delta\}_{tm}$$

Energija vanjskog opterećenja:

$$W_t = - \sum_{m=1}^r \{\delta\}_{tm}^T \{P\}_{tm}$$

Ukupna potencijalna energija:

$$\Pi_t = U_t + W_t = \sum_{m=1}^r \left[ \frac{1}{2} \{\delta\}_{tm}^T [K]_{tm} \{\delta\}_{tm} - \{\delta\}_{tm}^T \{P\}_{tm} \right]$$

$[K]_{tm}$  je matrica krutosti (4 x 4) konačne trake a  $\{p\}_{tm}$  vektor opterećenja (4 x 1).

$$[K]_m = \begin{bmatrix} [K_{ii}]_b & [K_{ij}]_b \\ [K_{ij}]_b^T & [K_{jj}]_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_3 & k_4 & -k_5 \\ k_3 & k_2 & k_5 & k_6 \\ k_4 & k_5 & k_1 & -k_3 \\ -k_5 & k_6 & -k_3 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{13lb}{70} k_m^4 D_y + \frac{12l}{5b} k_m^2 D_{xy} + \frac{6l}{5b} k_m^2 D_1 + \frac{6l}{b^3} D_x$$

$$k_2 = \frac{lb^3}{210} k_m^4 D_y + \frac{4lb}{15} k_m^2 D_{xy} + \frac{2lb}{15} k_m^2 D_1 + \frac{2l}{b} D_x$$

$$k_3 = \frac{11lb^2}{420} k_m^4 D_y + \frac{1}{5} k_m^2 D_{xy} + \frac{3l}{5} k_m^2 D_1 + \frac{3l}{b^2} D_x$$

$$k_4 = \frac{9lb}{140} k_m^4 D_y - \frac{12l}{5b} k_m^2 D_{xy} - \frac{6l}{5b} k_m^2 D_1 - \frac{6l}{b^3} D_x$$

$$k_5 = \frac{13lb^2}{840} k_m^4 D_y - \frac{1}{5} k_m^2 D_{xy} - \frac{1}{10} k_m^2 D_1 - \frac{3l}{b^2} D_x$$

$$k_6 = -\frac{lb^3}{280} k_m^4 D_y - \frac{lb}{15} k_m^2 D_{xy} - \frac{lb}{30} k_m^2 D_1 - \frac{1}{b} D_x$$

Za jednoliko raspodjeljeno opterećenje  $Q_0$  po cijeloj konačnoj traci, vektor opterećenja glasi:

$$\{p\}_m = \begin{Bmatrix} Z_{im} \\ M_{im} \\ Z_{jm} \\ M_{jm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{b^2}{12} \\ \frac{b}{2} \\ -\frac{b^2}{12} \end{Bmatrix} \left[ 1 - (-1)^m \right] \frac{Q_0 l}{m\pi}$$

Uvrštavanjem izraza za ukupnu potencijalnu energiju u izraz za minimizaciju energije dobivamo niz linearnih jednažbi iz kojih je su nepoznati samo parametri pomaka  $\delta_{tm}$ :

$$[K]_{tm} \{\delta\}_{tm} = \{P\}_{tm}$$

$$\{\delta\}_{tm} = [K]_{tm}^{-1} \{P\}_{tm}$$

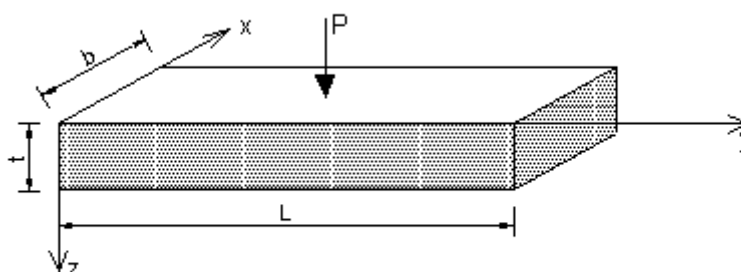
Pomake dobivamo množenjem parametara pomaka sa funkcijama oblika:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^r [N] \{\delta\}_m \sin \frac{m\pi y}{l}$$

### 2.2.3. Primjer

Pomoću programa Mathcad izračunata je ploča slobodno oslonjena na dva kraja i opterećena koncentriranom silom u sredini raspona. Proračun je izvršen preko jedne konačne trake te su rezultati uspoređeni sa teoretskim rješenjem.

#### Proračun slobodno oslonjene ploče preko 1 konačne trake (finite strip)



#### Geometrijske karakteristike ploče i karakteristike materijala (staklo)

$$E := 71700 \text{ N/mm}^2$$

$$L := 1000 \text{ mm}$$

$$t := 10 \text{ mm}$$

$$\nu := 0.16$$

$$b := 100 \text{ mm}$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$D_x := \frac{t^3}{12} \cdot \frac{E}{(1 - \nu^2)}$$

$$D_y := D_x$$

$$D_{xy} := \frac{t^3}{12} \cdot G$$

$$D_1 := \nu \cdot D_y$$

$$D := \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

**Matrica krutosti**

$$k(m) := \frac{m \cdot \pi}{L} \quad m := 1..50$$

$$k_1(m) := \frac{13 \cdot L \cdot b}{70} \cdot k(m)^4 \cdot D_y + \frac{12 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} + \frac{6 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{6 \cdot L}{b^3} \cdot D_x$$

$$k_2(m) := \frac{L \cdot b^3}{210} \cdot k(m)^4 \cdot D_y + \frac{4 \cdot L \cdot b}{15} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} + \frac{2 \cdot L \cdot b}{15} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{2 \cdot L}{b} \cdot D_x$$

$$k_3(m) := \frac{11 \cdot L \cdot b^2}{420} \cdot k(m)^4 \cdot D_y + \frac{L}{5} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} + \frac{3 \cdot L}{5} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{3 \cdot L}{b^2} \cdot D_x$$

$$k_4(m) := \frac{9 \cdot L \cdot b}{140} \cdot k(m)^4 \cdot D_y - \frac{12 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} - \frac{6 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 - \frac{6 \cdot L}{b^3} \cdot D_x$$

$$k_5(m) := \frac{13 \cdot L \cdot b^2}{840} \cdot k(m)^4 \cdot D_y - \frac{L}{5} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} - \frac{L}{10} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 - \frac{3 \cdot L}{b^2} \cdot D_x$$

$$k_6(m) := -\frac{L \cdot b^3}{280} \cdot k(m)^4 \cdot D_y - \frac{L \cdot b}{15} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} - \frac{L \cdot b}{30} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{L}{b} \cdot D_x$$

$$K(m) := \begin{bmatrix} k_1(m) & k_3(m) & k_4(m) & -k_5(m) \\ k_3(m) & k_2(m) & k_5(m) & k_6(m) \\ k_4(m) & k_5(m) & k_1(m) & -k_3(m) \\ -k_5(m) & k_6(m) & -k_3(m) & k_2(m) \end{bmatrix}$$

**Vektor opterećenja za koncentriranu silu u sredini trake**

$$P := 100 \text{ N}$$

$$x_0 := \frac{b}{2} \quad y_0 := \frac{L}{2}$$

$$p(m) := \begin{bmatrix} 1 - 3 \cdot \left(\frac{x_0}{b}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x_0}{b}\right)^3 \\ x_0 \cdot \left[ 1 - 2 \cdot \frac{x_0}{b} + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2 \right] \\ 3 \cdot \left(\frac{x_0}{b}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x_0}{b}\right)^3 \\ x_0 \cdot \left[ \left(\frac{x_0}{b}\right)^2 - \frac{x_0}{b} \right] \end{bmatrix} \cdot P \cdot \sin(k(m) \cdot y_0)$$



**Amplitude progiba**

$$\delta^{<m>} := K(m)^{-1} \cdot p(m)$$

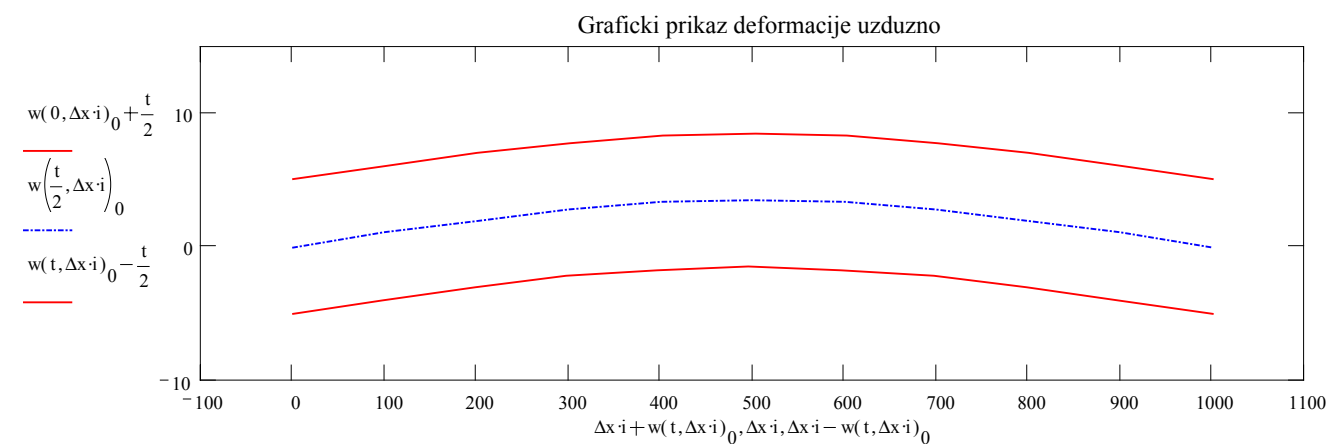
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\delta = 0$	0	3.4372	0	-0.04242	0	$5.44168 \cdot 10^{-3}$	0	$-1.37521 \cdot 10^{-3}$	0
$\delta = 1$	0	$-2.60647 \cdot 10^{-4}$	0	$2.053 \cdot 10^{-5}$	0	$-2.84576 \cdot 10^{-6}$	0	$-8.31135 \cdot 10^{-7}$	0
$\delta = 2$	0	3.4372	0	-0.04242	0	$5.44168 \cdot 10^{-3}$	0	$-1.37521 \cdot 10^{-3}$	0
$\delta = 3$	0	$2.60647 \cdot 10^{-4}$	0	$-2.053 \cdot 10^{-5}$	0	$2.84576 \cdot 10^{-6}$	0	$8.31135 \cdot 10^{-7}$	0

**Progib konačne trake**

$$N_1(x) := 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^3 \quad N_2(x) := x \cdot \left[1 - 2 \cdot \frac{x}{b} + \left(\frac{x}{b}\right)^2\right] \quad N_3(x) := 3 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^3 \quad N_4(x) := x \cdot \left[\left(\frac{x}{b}\right)^2 - \frac{x}{b}\right]$$

$$w(x, y) := \sum_m \left[ \begin{matrix} N_1(x) & 0 & N_3(x) & 0 \\ 0 & N_2(x) & 0 & N_4(x) \end{matrix} \right] \cdot \delta^{<m>} \cdot \sin(k(m) \cdot y)$$

$$n := 10 \quad i := 0..n \quad \Delta x := \frac{L}{n}$$



$$w\left(\frac{0}{2}, \frac{L}{2}\right) = \begin{bmatrix} 3.48728 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w\left(\frac{t}{2}, \frac{L}{2}\right) = \begin{bmatrix} 3.48728 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Teoretski progib proste grede**

$$I := \frac{t^3 \cdot b}{12} \quad \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} = 3.48675$$

Za broj članova reda  $m = 50$ , rezultati su zadovoljavajući:

teoretski progib	$f_1 = 3.48675$
progib dobiven metodom k.t.	$f_2 = 3.48727$

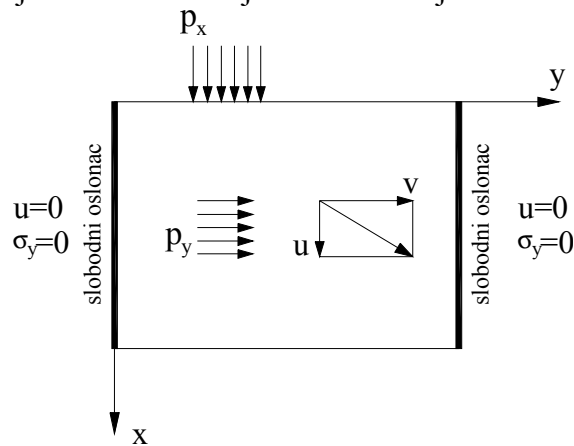
Greška je tek 0.015%.

## 2.3 PLANE STRESS STRIP (RAVNINSKO STANJE NAPREZANJA)

Analizirati će se ploča opterećena u svojoj ravnini. Sva naprezanja koja nastaju u smjeru debljine ploče su mala i zanemariva.

### 2.3.1. Postavka problema

Metodom konačnih traka potrebno je riješiti ploču koja je opterećena u svojoj ravnini u dva smjera, x i y. Ploča je slobodno oslonjena na dva kraja.

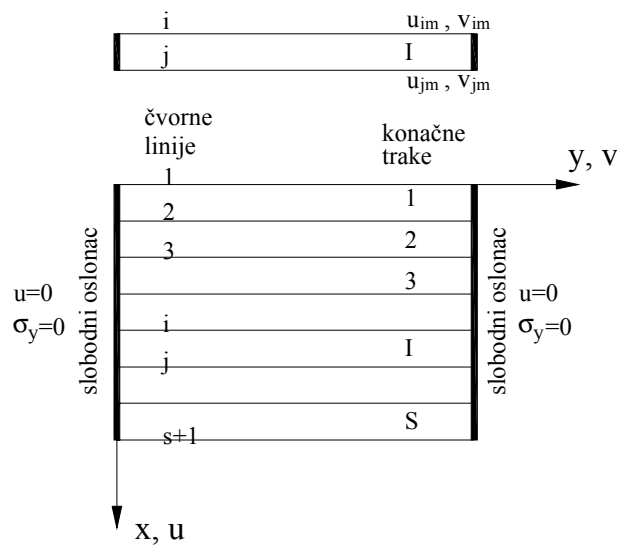


slika 6.

### 2.3.2. Rješenje problema

#### 2.3.2.1 Funkcija pomaka

Ploču ćemo podijeliti na S konačnih traka.



slika 7.

Rubni uvjeti za slobodno oslonjenu ploču su:  
 $u = 0, \sigma_y = 0$  za  $y = 0, y = 1$

Da bi se zadovoljili navedeni rubni uvjeti, komponente pomaka u smjerovima x i y mogu se izraziti na slijedeći način:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{Bmatrix} (c_0 + c_1 x + \dots) \sin k_m y \\ (d_0 + d_1 x + \dots) \cos k_m y \end{Bmatrix}$$

Tu je  $k_m = m\pi / l$  a  $c_0, c_1, d_0, d_1 \dots$  su nepoznati koeficijenti.

Nepoznate koeficijente izraziti ćemo pomoću amplituda pomaka. Vrijednosti tih koeficijenata pronaći ćemo analogno kao za ploču. Tu je funkcija pomaka za svaku pojedinu komponentu pomaka, u i v, polinom drugog reda:

$$f_{mu}(x) = c_0 + c_1 x$$

$$f_{mv}(x) = d_0 + d_1 x$$

$$\text{za } x = 0, \quad f_{mu}(0) = u_{im}$$

$$\text{za } x = b, \quad f_{mu}(b) = u_{jm}$$

$$\text{za } x = 0, \quad f_{mv}(0) = v_{im}$$

$$\text{za } x = b, \quad f_{mv}(b) = v_{jm}$$

b je širina konačne trake.

$$c_0 + c_1 \cdot 0 = u_{im} \quad \Rightarrow \quad c_0 = u_{im}$$

$$c_0 + c_1 \cdot b = u_{jm} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{u_{jm} - u_{im}}{b}$$

$$d_0 + d_1 \cdot 0 = v_{im} \quad \Rightarrow \quad d_0 = v_{im}$$

$$d_0 + d_1 \cdot b = v_{jm} \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{v_{jm} - v_{im}}{b}$$

Uvrstimo li ove koeficijente u izraz za pomake u i v dobivamo:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{Bmatrix} \left( u_{im} + \frac{u_{jm} - u_{im}}{b} x \right) \sin k_m y \\ \left( v_{im} + \frac{v_{jm} - v_{im}}{b} x \right) \cos k_m y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{Bmatrix} \left( \left( 1 - \frac{x}{b} \right) u_{im} + \frac{x}{b} u_{jm} \right) \sin k_m y \\ \left( \left( 1 - \frac{x}{b} \right) v_{im} + \frac{x}{b} v_{jm} \right) \cos k_m y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{Bmatrix} (1-X)\sin k_m y & 0 & X\sin k_m y & 0 \\ 0 & (1-X)\cos k_m y & 0 & X\cos k_m y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{im} \\ v_{im} \\ u_{jm} \\ v_{jm} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r [N]_m \{\delta\}_m$$

$X = x / b$ ,  $[N]_m$  je matrica funkcija pomaka,  $\{\delta\}_m$  je vektor parametara pomaka.

### 2.3.2.2 Matrica krutosti i vektor opterećenja

Za ravninsko stanje napreznaja izrazi za deformaciju i napreznaje su:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_x \nu_y} \begin{bmatrix} E_x & \nu_x E_x & 0 \\ \nu_y E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_x \nu_y) E_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D_p] \{\epsilon\}$$

U izraz za deformaciju i napreznaje možemo uvrstiti dobivenu funkciju pomaka:

$$\{\epsilon\} = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m$$

$$\{\sigma\} = \sum_{m=1}^r [D_p] [B]_m \{\delta\}_m$$

$$[B]_m = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} \sin k_m y & 0 & \frac{1}{b} \sin k_m y & 0 \\ 0 & -(1-X)k_m \sin k_m y & 0 & -Xk_m \sin k_m y \\ (1-X)k_m \cos k_m y & -\frac{1}{b} \cos k_m y & Xk_m \cos k_m y & \frac{1}{b} \cos k_m y \end{bmatrix}$$

Izraz za unutarnju energiju deformacije je (Timoshenko i Goodier, 1970):

$$U = \frac{t}{2} \int_0^1 \int_0^b (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = \frac{t}{2} \int_0^1 \int_0^b \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dx dy$$

Uvrstimo li izraze za deformaciju i naprezanje:

$$U = \frac{t}{2} \sum_{m=1}^r \{\delta\}_m^T \int_0^1 \int_0^b [B]_m^T [D_p] [B]_m dx dy \{\delta\}_m$$

Energija vanjskog opterećenja se isto tako može izraziti pomoću parametara pomaka:

$$W = - \int_0^1 \int_0^b [u, v] \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dx dy = - \sum_{m=1}^r \{\delta\}_m^T \int_0^1 \int_0^b [N]_m^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dx dy$$

$p_x$  i  $p_y$  su komponente opterećenja u ravnini ploče.

Matrica krutosti i vektor opterećenja za jednu konačnu traku su:

$$[k]_m = t \int_0^1 \int_0^b [B]_m^T [D_p] [B]_m dx dy$$

$$\{p\}_m = \int_0^1 \int_0^b [N]_m^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dx dy$$

Članovi matrice krutosti su:

$$[k]_m = \begin{bmatrix} [K_{ii}]_p & [K_{ij}]_p \\ [K_{ij}]_p^T & [K_{jj}]_p \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} k_1 & k_3 & k_4 & k_6 \\ k_3 & k_2 & -k_6 & k_5 \\ k_4 & -k_6 & k_1 & -k_3 \\ k_6 & k_5 & -k_3 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{1}{2b} E_1 + \frac{lbk_m^2}{6} E_{xy}$$

$$k_4 = -\frac{1}{2b} E_1 + \frac{lbk_m^2}{12} E_{xy}$$

$$k_2 = \frac{1}{2b} E_{xy} + \frac{lbk_m^2}{6} E_2$$

$$k_5 = -\frac{1}{2b} E_{xy} + \frac{lbk_m^2}{12} E_2$$

$$k_3 = \frac{lk_m}{4} v_x E_1 - \frac{lk_m}{4} E_{xy}$$

$$k_6 = \frac{lk_m}{4} v_x E_1 + \frac{lk_m}{4} E_{xy}$$

$$E_1 = \frac{E_x}{1 - v_x v_y}$$

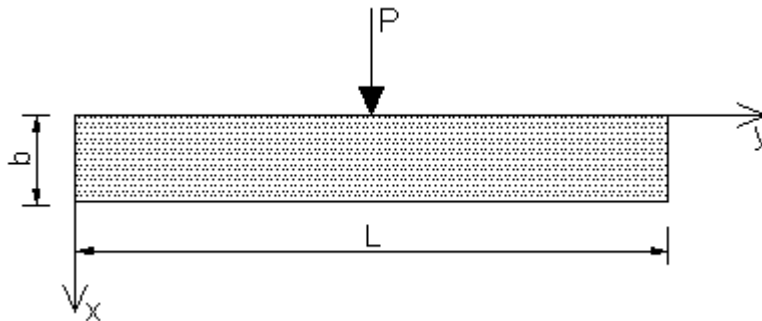
$$E_2 = \frac{E_y}{1 - v_x v_y}$$

### 2.3.3. Primjer

Pomoću programa Mathcad izračunata je ploča slobodno oslonjena na dva kraja i opterećena koncentriranom silom u sredini raspona. Proračun je izvršen preko jedne konačne trake te su rezultati uspoređeni sa teoretskim rješenjem.

#### Proračun slobodno oslonjene ploče preko 1 konačne trake (finite strip)

#### PROGIB PROSTE GREDE PREKO 1 KONAČNE TRAKE (plane stress) (FINITE STRIP)



#### 1 UNOS PODATAKA

##### Karakteristike materijala

$$E := 71700 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu := 0.16$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

##### Geometrijske karakteristike grede

$$L := 1000 \text{ mm}$$

$$b := 10 \text{ mm}$$

$$d := 10 \text{ mm}$$

$$k(m) := \frac{m \cdot \pi}{L}$$

#### 2 PRORAČUN

$$D := \frac{E}{(1 - \nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

članovi matrice krutosti:

$$k_1(m) := \frac{L}{2 \cdot b} \cdot E + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{6} \cdot G \quad k_4(m) := -\left(\frac{L}{2 \cdot b} \cdot E\right) + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{12} \cdot G$$

$$k_2(m) := \frac{L}{2 \cdot b} \cdot G + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{6} \cdot E \quad k_5(m) := -\left(\frac{L}{2 \cdot b} \cdot G\right) + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{12} \cdot E$$

$$k_3(m) := \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot \nu \cdot E - \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot G \quad k_6(m) := \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot \nu \cdot E + \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot G$$

$$K(m) := d \cdot \begin{bmatrix} k_1(m) & k_3(m) & k_4(m) & k_6(m) \\ k_3(m) & k_2(m) & -k_6(m) & k_5(m) \\ k_4(m) & -k_6(m) & k_1(m) & -k_3(m) \\ k_6(m) & k_5(m) & -k_3(m) & k_2(m) \end{bmatrix}$$

$$K(1) = \begin{bmatrix} 3.58551 \cdot 10^7 & -1.52628 \cdot 10^5 & -3.58475 \cdot 10^7 & 3.3283 \cdot 10^5 \\ -1.52628 \cdot 10^5 & 1.54644 \cdot 10^7 & -3.3283 \cdot 10^5 & -1.54467 \cdot 10^7 \\ -3.58475 \cdot 10^7 & -3.3283 \cdot 10^5 & 3.58551 \cdot 10^7 & 1.52628 \cdot 10^5 \\ 3.3283 \cdot 10^5 & -1.54467 \cdot 10^7 & 1.52628 \cdot 10^5 & 1.54644 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

vektor opterećenja za koncentriranu silu u sredini raspona:

$$P := 10 \text{ N}$$

$$x_0 := 0$$

$$y_0 := \frac{L}{2}$$

$$p(m) := \begin{bmatrix} P \cdot \left(1 - \frac{x_0}{b}\right) \cdot \sin(k(m) \cdot y_0) \\ 0 \\ P \cdot \frac{x_0}{b} \cdot \sin(k(m) \cdot y_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m := 1..10$$

amplitude progiba:

$$\delta^{<m>} := K(m)^{-1} \cdot p(m)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta = 0$	0	3.43697	0	-0.0425	0	$5.5244 \cdot 10^{-3}$	0	$-1.44465 \cdot 10^{-3}$	0	$5.31915 \cdot 10^{-4}$	0
$\delta = 1$	0	0.05398	0	$-1.99892 \cdot 10^{-3}$	0	$4.31674 \cdot 10^{-4}$	0	$-1.57265 \cdot 10^{-4}$	0	$7.39624 \cdot 10^{-5}$	0
$\delta = 2$	0	3.43697	0	-0.0425	0	$5.52426 \cdot 10^{-3}$	0	$-1.44451 \cdot 10^{-3}$	0	$5.31772 \cdot 10^{-4}$	0
$\delta = 3$	0	-0.05398	0	$1.99941 \cdot 10^{-3}$	0	$-4.31965 \cdot 10^{-4}$	0	$1.57473 \cdot 10^{-4}$	0	$-7.41239 \cdot 10^{-5}$	0



progib konačne trake:

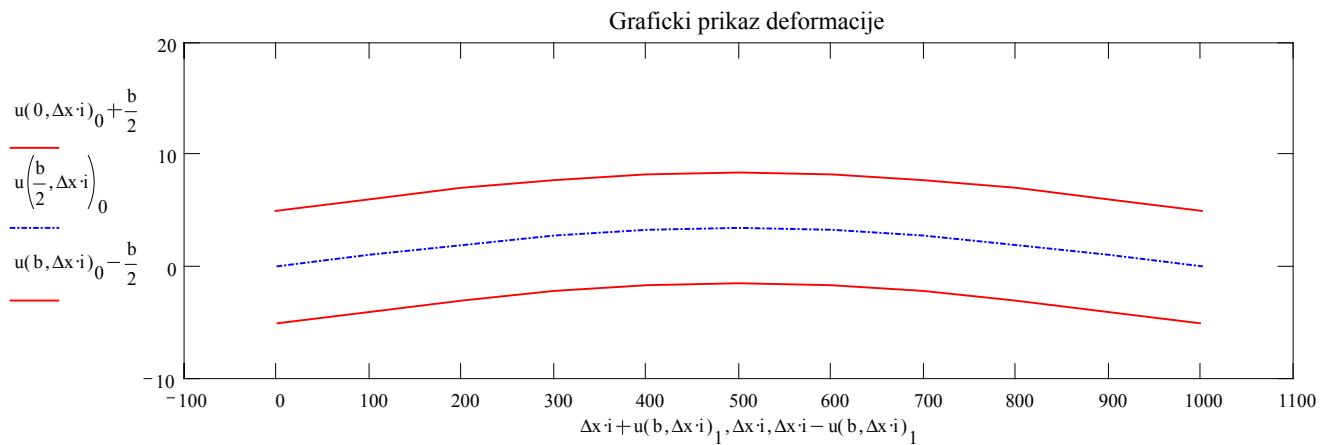
$$u(x,y) := \sum_m \left[ \begin{array}{cccc} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & 0 & \frac{x}{b} \cdot \sin(k(m) \cdot y) & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \cos(k(m) \cdot y) & 0 & \frac{x}{b} \cdot \cos(k(m) \cdot y) \end{array} \right] \cdot \delta^{<m>}$$

$$u\left(\frac{b}{2}, \frac{L}{2}\right) = \begin{bmatrix} 3.48696 \\ 0 \end{bmatrix}$$

teoretski progib proste grede:

$$I := \frac{b^3 \cdot d}{12} \quad \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} = 3.48675$$

$$n := 10 \quad i := 0..n \quad \Delta x := \frac{L}{n}$$



naprezanja:

$$\epsilon(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} u(x,y)_0 \\ \frac{d}{dy} u(x,y)_1 \\ \frac{d}{dy} u(x,y)_0 + \frac{d}{dx} u(x,y)_1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(x,y) := D \cdot \epsilon(x,y)$$

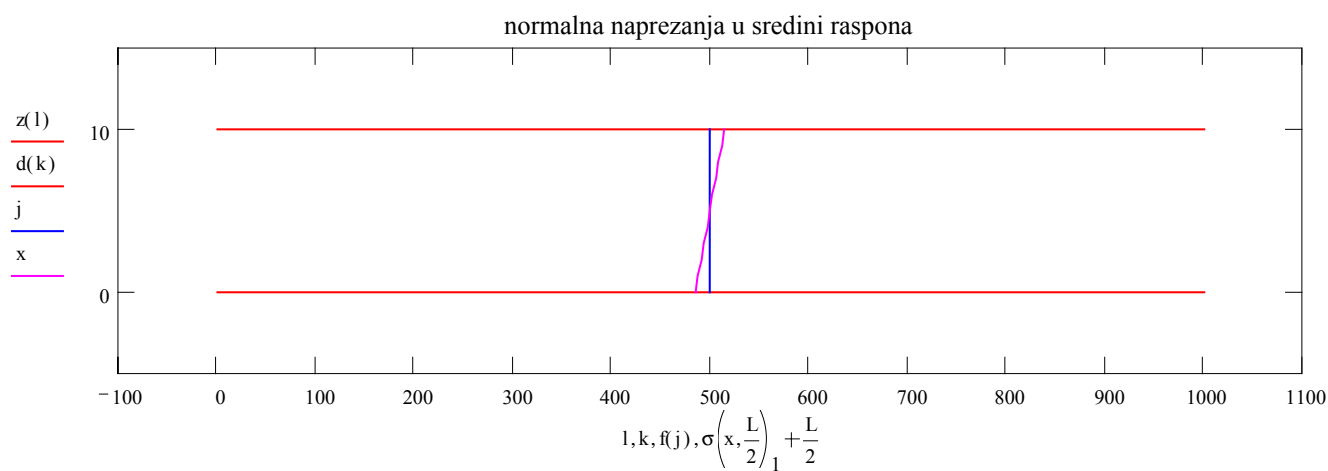
$$\sigma\left(0, \frac{L}{2}\right) = \begin{bmatrix} -2.36868 \\ -14.77224 \\ -1.60454 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix} \quad \sigma\left(b, \frac{L}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2.35843 \\ 14.77224 \\ -7.98414 \cdot 10^{-14} \end{bmatrix}$$

teoretsko naprezanje  $\sigma_y$  na gornjem rubu u sredini raspona:

$$W := \frac{d \cdot b^2}{6} \quad M := \frac{P \cdot L}{4} \quad \frac{M}{W} = 15 \text{ MPa}$$

$$l := 0..L \quad k := 1..L \quad j := 0..b \quad x := 0..b \quad z(l) := b \quad d(k) := 0$$

$$f(j) := \frac{L}{2}$$

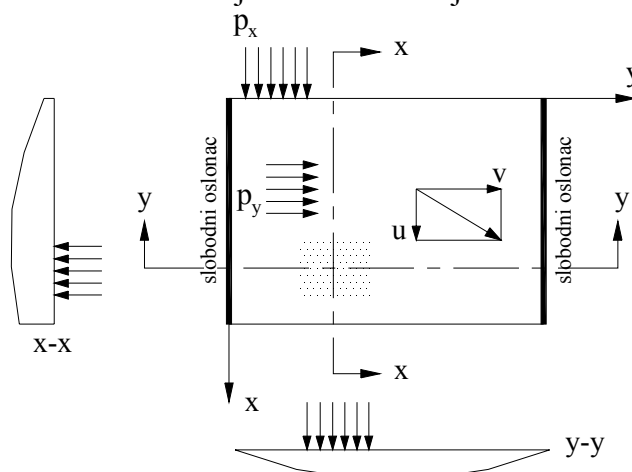


## 2.4 FLAT SHELL STRIP

Shell elementi su opterećeni u svojoj ravnini i okomito na nju pa oni predstavljaju kombinaciju plate strip i plane stress strip elemenata.

### 2.4.1. Postavka problema

Metodom konačnih traka potrebno je riješiti problem slobodno oslonjene ploče sa dvije strane i opterećene okomito na svoju ravninu i u smjeru te ravnine.



slika 8.

### 2.4.2. Rješenje problema

#### 2.4.2.1 Funkcija pomaka

Funkcija pomaka izračunata posebno za plate strip i plate stress strip, može se sastaviti u jednu jedinu matricu koja predstavlja funkciju pomaka za shell elemente.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} (1-X)\sin k_m y & 0 & 0 & 0 & X\sin k_m y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-X)\cos k_m y & 0 & 0 & 0 & X\sin k_m y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1(x)\sin k_m y & 0 & 0 & 0 & N_3(x)\sin k_m y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2(x)\sin k_m y & 0 & 0 & 0 & N_4(x)\sin k_m y \end{bmatrix}$$

#### 2.4.2.2 Matrica krutosti i vektor opterećenja

Ukupna potencijalna energija shell elementa je algebarska suma potencijalne energije ravninske deformacije i deformacije savijanja.

$$\Pi = U + W = \sum_{m=1}^r \left[ \frac{1}{2} \{\delta\}_m^T [k]_m \{\delta\}_m - \{\delta\}_m^T \{p\}_m \right]$$

$\{\delta\}_m$  je vektor pomaka:

$$\{\delta\}_m = [u_{im}, v_{im}, w_{im}, \theta_{im}, u_{jm}, v_{jm}, w_{jm}, \theta_{jm}]^T$$

$\{p\}_m$  je vektor opterećenja:

$$\{p\}_m = [X_{im}, Y_{im}, Z_{im}, M_{im}, X_{jm}, Y_{jm}, Z_{jm}, M_{jm}]^T$$

$[k]_m$  je matrica krutosti:

$$[k]_m = \begin{bmatrix} [K_{ii}]_p & 0 & [K_{ij}]_p & 0 \\ 0 & [K_{ii}]_b & 0 & [K_{ij}]_b \\ [K_{ij}]_p^T & 0 & [K_{jj}]_p & 0 \\ 0 & [K_{ij}]_b^T & 0 & [K_{jj}]_b \end{bmatrix}$$

### 2.4.3. Primjer

Pomoću programa Mathcad izračunata je ploča slobodno oslonjena na dva kraja i opterećena koncentriranom silom u sredini raspona u dva okomita smjera. Proračun je izvršen preko jedne konačne trake te su rezultati uspoređeni sa teoretskim rješenjem.

## Proračun slobodno oslonjene ploče preko 1 konačne trake (finite strip)

### PROGIB PROSTE GREDE PREKO 1 KONAČNE TRAKE (shell elementi) (FINITE STRIP)

#### 1 UNOS PODATAKA

##### Karakteristike materijala

$E := 71700 \text{ N/mm}^2$                       modul elastičnosti  
 $\nu := 0.16$                                       Poisson-ov koeficijent

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

##### Geometrijske karakteristike ploče

$L := 1000 \text{ mm}$                               dužina ploče  
 $t := 10 \text{ mm}$                                       debljina ploče  
 $b := 100 \text{ mm}$                                       širina ploče

#### 2 PRORAČUN

$$k(m) := \frac{m \cdot \pi}{L}$$

$$D_x := \frac{t^3}{12} \cdot \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad D_y := D_x \quad D_{xy} := \frac{t^3}{12} \cdot G \quad D_1 := \nu \cdot D_y \quad D := \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

##### članovi matrice krutosti

$$k_1(m) := \left( \frac{L}{2 \cdot b} \cdot E + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{6} \cdot G \right) \cdot t \quad k_4(m) := \left[ - \left( \frac{L}{2 \cdot b} \cdot E \right) + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{12} \cdot G \right] \cdot t$$

$$k_2(m) := \left( \frac{L}{2 \cdot b} \cdot G + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{6} \cdot E \right) \cdot t \quad k_5(m) := \left[ - \left( \frac{L}{2 \cdot b} \cdot G \right) + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{12} \cdot E \right] \cdot t$$

$$k_3(m) := \left( \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot \nu \cdot E - \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot G \right) \cdot t \quad k_6(m) := \left( \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot \nu \cdot E + \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot G \right) \cdot t$$

$$k_7(m) := \frac{13 \cdot L \cdot b}{70} \cdot k(m)^4 \cdot D_y + \frac{12 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} + \frac{6 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{6 \cdot L}{b^3} \cdot D_x$$

$$k_8(m) := \frac{L \cdot b^3}{210} \cdot k(m)^4 \cdot D_y + \frac{4 \cdot L \cdot b}{15} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} + \frac{2 \cdot L \cdot b}{15} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{2 \cdot L}{b} \cdot D_x$$

$$k_9(m) := \frac{11 \cdot L \cdot b^2}{420} \cdot k(m)^4 \cdot D_y + \frac{L}{5} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} + \frac{3 \cdot L}{5} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{3 \cdot L}{b^2} \cdot D_x$$

$$k_{10}(m) := \frac{9 \cdot L \cdot b}{140} \cdot k(m)^4 \cdot D_y - \frac{12 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} - \frac{6 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 - \frac{6 \cdot L}{b^3} \cdot D_x$$

$$k_{11}(m) := \frac{13 \cdot L \cdot b^2}{840} \cdot k(m)^4 \cdot D_y - \frac{L}{5} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} - \frac{L}{10} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 - \frac{3 \cdot L}{b^2} \cdot D_x$$

$$k_{12}(m) := -\frac{L \cdot b^3}{280} \cdot k(m)^4 \cdot D_y - \frac{L \cdot b}{15} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} - \frac{L \cdot b}{30} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{L}{b} \cdot D_x$$

$$K(m) := \begin{bmatrix} k_1(m) & k_3(m) & 0 & 0 & k_4(m) & k_6(m) & 0 & 0 \\ k_3(m) & k_2(m) & 0 & 0 & -k_6(m) & k_5(m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_7(m) & k_9(m) & 0 & 0 & k_{10}(m) & -k_{11}(m) \\ 0 & 0 & k_9(m) & k_8(m) & 0 & 0 & k_{11}(m) & k_{12}(m) \\ k_4(m) & -k_6(m) & 0 & 0 & k_1(m) & -k_3(m) & 0 & 0 \\ k_6(m) & k_5(m) & 0 & 0 & -k_3(m) & k_2(m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{10}(m) & k_{11}(m) & 0 & 0 & k_7(m) & -k_9(m) \\ 0 & 0 & -k_{11}(m) & k_{12}(m) & 0 & 0 & -k_9(m) & k_8(m) \end{bmatrix}$$

vektor opterećenja za koncentriranu silu u sredini trake:

$$P_x := 10000 \quad P_y := 0 \quad P_z := 100$$

$$x_0 := \frac{b}{2} \quad y_0 := \frac{L}{2}$$

$$N_1(x) := 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^3 \quad N_2(x) := x \cdot \left[ 1 - 2 \cdot \frac{x}{b} + \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right]$$

$$N_3(x) := 3 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^3 \quad N_4(x) := x \cdot \left[ \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \frac{x}{b} \right]$$

$$p(m) := \begin{bmatrix} P_x \cdot \left(1 - \frac{x_0}{b}\right) \cdot \sin(k(m) \cdot y_0) \\ P_y \cdot \left(1 - \frac{x_0}{b}\right) \cdot \cos(k(m) \cdot y_0) \\ P_z \cdot N_1(x_0) \cdot \sin(k(m) \cdot y_0) \\ P_z \cdot N_2(x_0) \cdot \sin(k(m) \cdot y_0) \\ P_x \cdot \frac{x_0}{b} \cdot \sin(k(m) \cdot y_0) \\ P_y \cdot \frac{x_0}{b} \cdot \cos(k(m) \cdot y_0) \\ P_z \cdot N_3(x_0) \cdot \sin(k(m) \cdot y_0) \\ P_z \cdot N_4(x_0) \cdot \sin(k(m) \cdot y_0) \end{bmatrix}$$

$$p(1) = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 50 \\ 1.25 \cdot 10^3 \\ 5 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 50 \\ -1.25 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

m := 1.. 50

**2.1 Progibi**

amplitude progiba:

$$\delta^{<m>} := K(m)^{-1} \cdot p(m)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3.50188	0	-0.04971	0	$8.12086 \cdot 10^{-3}$	0	$-2.76934 \cdot 10^{-3}$	0
2	0.53977	0	-0.01999	0	$4.3182 \cdot 10^{-3}$	0	$-1.57369 \cdot 10^{-3}$	0
3	3.4372	0	-0.04242	0	$5.44168 \cdot 10^{-3}$	0	$-1.37521 \cdot 10^{-3}$	0
4	$-2.60647 \cdot 10^{-4}$	0	$2.053 \cdot 10^{-5}$	0	$-2.84576 \cdot 10^{-6}$	0	$-8.31135 \cdot 10^{-7}$	0
5	3.50188	0	-0.04971	0	$8.12086 \cdot 10^{-3}$	0	$-2.76934 \cdot 10^{-3}$	0
6	-0.53977	0	0.01999	0	$-4.3182 \cdot 10^{-3}$	0	$1.57369 \cdot 10^{-3}$	0
7	3.4372	0	-0.04242	0	$5.44168 \cdot 10^{-3}$	0	$-1.37521 \cdot 10^{-3}$	0
8	$2.60647 \cdot 10^{-4}$	0	$-2.053 \cdot 10^{-5}$	0	$2.84576 \cdot 10^{-6}$	0	$8.31135 \cdot 10^{-7}$	0

progibi:

$$f(x,y) := \sum_m \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \cos(k(m) \cdot y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) \\ \frac{x}{b} \cdot \sin(k(m) \cdot y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{b} \cdot \cos(k(m) \cdot y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) \end{bmatrix} \cdot \delta^{<m>}$$

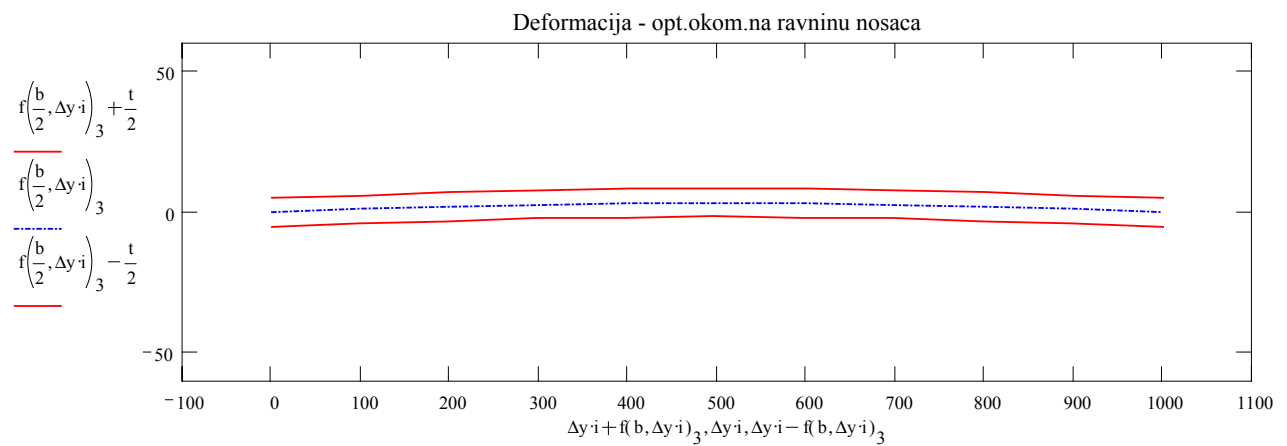
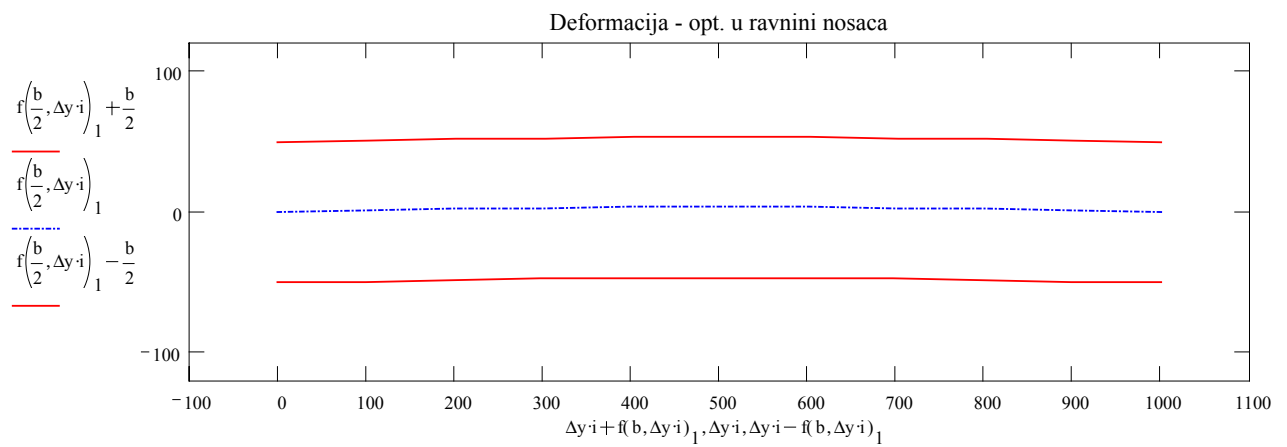
Teoretski progib proste grede:

$$I_x := \frac{t^3 \cdot b}{12} \quad \frac{P_z \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_x} = 3.48675$$

$$I_z := \frac{b^3 \cdot t}{12} \quad \frac{P_x \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_z} = 3.48675$$

$$f\left(\frac{b}{2}, \frac{L}{2}\right) = \begin{bmatrix} 3.56698 \\ 0 \\ 3.48728 \\ -6.80204 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$n := 10 \quad i := 0..n \quad \Delta y := \frac{L}{n}$$





## 2.5 SPAJANJE ELEMENATA I UVJETI OSLANJANJA DUŽ ČVORNE LINIJE

### 2.5.1. Spajanje elemenata

Energija deformacije te potencijalna energija vanjskog opterećenja za cijelu konstrukciju dobiva se zbrajanjem doprinosa svake pojedine konačne trake:

$$U_t = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^S \sum_{m=1}^r \{\delta\}_{lm}^T [k]_{lm} \{\delta\}_{lm}$$

$$W_t = - \sum_{l=1}^S \sum_{m=1}^r \{\delta\}_{lm}^T \{p\}_{lm}$$

S je broj konačnih traka na koji je konstrukcija podjeljena, podznak l označava pojedinu konačnu traku a podznak t predstavlja čitavu konstrukciju.

Zamjenom redosljeda zbrajanja dobivamo:

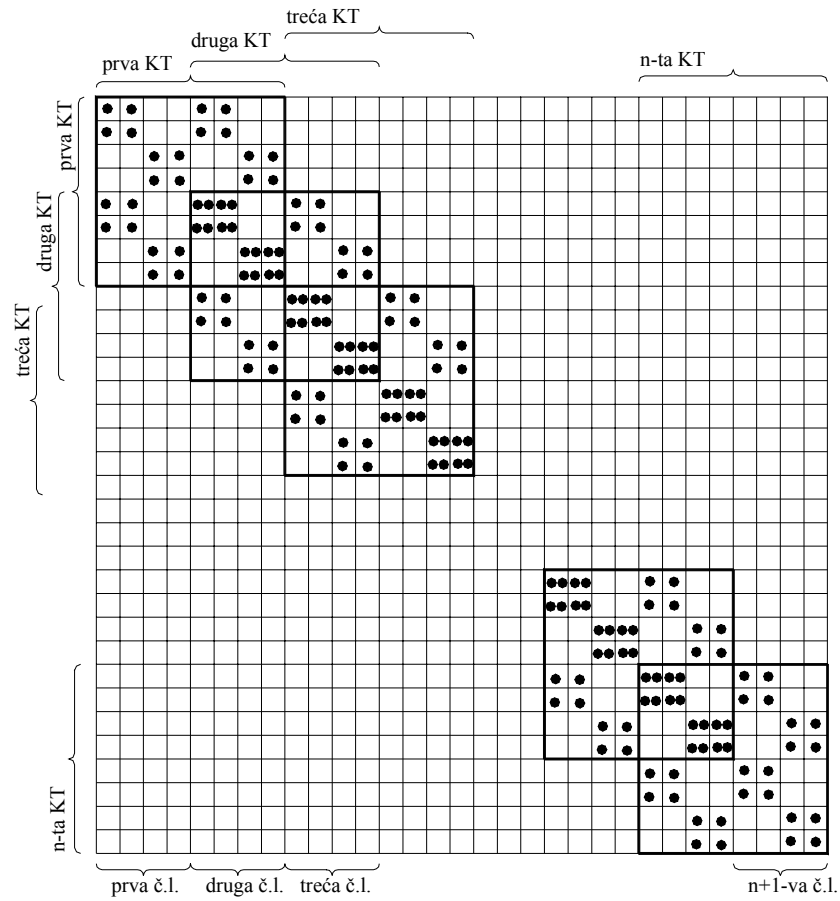
$$U_t = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \sum_{l=1}^S \{\delta\}_{lm}^T [k]_{lm} \{\delta\}_{lm}$$

$$W_t = - \sum_{m=1}^r \sum_{l=1}^S \{\delta\}_{lm}^T \{p\}_{lm}$$

Sastavljanje vektora opterećenja i matrice krutosti za cijelu konstrukciju vrši se tako da se pojedine lokacije matrice – vektora ispunjavaju odgovarajućim koeficijentima a ostale lokacije se ispunjavaju nulama.

#### Sastavljanje matrice krutosti konstrukcije

- matrica ima  $4(n+1)$  stupaca i redova. n je broj konačnih traka na koje je konstrukcija podjeljena (n+1) je čvornih linija i 4 parametra pomaka za svaku čvornu liniju)
- članovi pojedinih konačnih traka sa zajedničkim čvornim linijama se zbrajaju



slika 9.

Nakon zbrajanja po konačnim trakama dobivamo:

$$U_t = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \{\delta\}_{tm}^T [K]_{tm} \{\delta\}_{tm}$$

$$W_t = - \sum_{m=1}^r \{\delta\}_{tm}^T \{p\}_{tm}$$

Minimizacijom ukupne energije dobivamo jednažbu za proračun pomaka.

### 2.5.2. Uvjeti oslanjanja duž čvorne linije

U pojedinim slučajevima konstrukcija može biti duž čvorne linije slobodno oslonjena ili upeta.

Za slobodno oslonjenu čvornu liniju rubni uvjeti su:

$$w = 0$$

$$M_x = -\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0$$

Najjednostavniji način da se zadovolje navedeni uvjeti je taj da se odgovarajućim elementima u matrici krutosti konstrukcije zadaje beskonačno velika vrijednost (npr.  $10^{30}$ ) za krutost konstrukcije u smjeru okomito na slobodno oslonjeni rub.

Za upetu čvornu liniju rubni uvjeti su:

$$w = 0$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

### 2.5.2.1 Primjer

Pomoću programa Mathcad izračunata je ploča slobodno oslonjena na sva četiri kraja i opterećena jednoliko raspoređenim opterećenjem. Proračun je izvršen preko n konačnih traka te su rezultati uspoređeni sa teoretskim rješenjem za različite brojeve podjela ploče i različite brojeve članova reda.

## PRORAČUN SLOBODNO OSLONJENE PLOČE SA SVE ČETIRI STRANE PO METODI KONAČNIH TRAKA (FINITE STRIP)

### 1 UNOS PODATAKA

#### Karakteristike materijala

$$E := 71700 \text{ N/mm}^2 \quad \text{modul elastičnosti}$$

$$\nu := 0.22 \quad \text{Poisson-ov koeficijent}$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

#### Geometrijske karakteristike ploče

$$L := 1000 \text{ mm} \quad \text{dužina ploče}$$

$$B := 1000 \text{ mm} \quad \text{širina ploče}$$

$$t := 10 \text{ mm} \quad \text{debljina ploče}$$

$$n := 50 \quad \text{broj podjela ploče}$$

$$nm := 10 \quad \text{broj članova reda}$$

#### Opterećenje

$$q_x := 0 \text{ N/mm}^2 \quad \text{jednoliko raspodjeljeno opterećenje u ravnini ploče, smjer x}$$

$$q_y := 0 \text{ N/mm}^2 \quad \text{jednoliko raspodjeljeno opterećenje u ravnini ploče, smjer y}$$

$$q_z := 0.005 \text{ N/mm}^2 \quad \text{jednoliko raspodjeljeno opterećenje okomito na ravninu ploče, smjer z}$$

#### Rezultati

$$w_1 := 1 \quad \text{broj podjela trake po širini za prikaz rezultata (smjer x)}$$

$$w_2 := 50 \quad \text{broj podjela trake po dužini za prikaz rezultata (smjer y)}$$

### 2 PRORAČUN

$$b := \frac{B}{n}$$

$$b = 20 \quad \text{širina jedne konačne trake}$$

$$D_x := \frac{t^3}{12} \cdot \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad D_y := D_x \quad D_{xy} := \frac{t^3}{12} \cdot G \quad D_1 := \nu \cdot D_y \quad D := \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

$$k(m) := \frac{m \cdot \pi}{L}$$

članovi matrice krutosti pojedine konačne trake:

$$k_1(m) := \left( \frac{L}{2 \cdot b} \cdot E + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{6} \cdot G \right) \cdot t \quad k_4(m) := \left[ - \left( \frac{L}{2 \cdot b} \cdot E \right) + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{12} \cdot G \right] \cdot t$$

$$k_2(m) := \left( \frac{L}{2 \cdot b} \cdot G + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{6} \cdot E \right) \cdot t \quad k_5(m) := \left[ - \left( \frac{L}{2 \cdot b} \cdot G \right) + \frac{L \cdot b \cdot k(m)^2}{12} \cdot E \right] \cdot t$$

$$k_3(m) := \left( \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot \nu \cdot E - \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot G \right) \cdot t \quad k_6(m) := \left( \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot \nu \cdot E + \frac{L \cdot k(m)}{4} \cdot G \right) \cdot t$$

$$k_7(m) := \frac{13 \cdot L \cdot b}{70} \cdot k(m)^4 \cdot D_y + \frac{12 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} + \frac{6 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{6 \cdot L}{b^3} \cdot D_x$$

$$k_8(m) := \frac{L \cdot b^3}{210} \cdot k(m)^4 \cdot D_y + \frac{4 \cdot L \cdot b}{15} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} + \frac{2 \cdot L \cdot b}{15} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{2 \cdot L}{b} \cdot D_x$$

$$k_9(m) := \frac{11 \cdot L \cdot b^2}{420} \cdot k(m)^4 \cdot D_y + \frac{L}{5} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} + \frac{3 \cdot L}{5} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{3 \cdot L}{b^2} \cdot D_x$$

$$k_{10}(m) := \frac{9 \cdot L \cdot b}{140} \cdot k(m)^4 \cdot D_y - \frac{12 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} - \frac{6 \cdot L}{5 \cdot b} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 - \frac{6 \cdot L}{b^3} \cdot D_x$$

$$k_{11}(m) := \frac{13 \cdot L \cdot b^2}{840} \cdot k(m)^4 \cdot D_y - \frac{L}{5} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} - \frac{L}{10} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 - \frac{3 \cdot L}{b^2} \cdot D_x$$

$$k_{12}(m) := - \frac{L \cdot b^3}{280} \cdot k(m)^4 \cdot D_y - \frac{L \cdot b}{15} \cdot k(m)^2 \cdot D_{xy} - \frac{L \cdot b}{30} \cdot k(m)^2 \cdot D_1 + \frac{L}{b} \cdot D_x$$

$$K_I(m) := \begin{bmatrix} k_1(m) & k_3(m) & 0 & 0 & k_4(m) & k_6(m) & 0 & 0 \\ k_3(m) & k_2(m) & 0 & 0 & -k_6(m) & k_5(m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_7(m) & k_9(m) & 0 & 0 & k_{10}(m) & -k_{11}(m) \\ 0 & 0 & k_9(m) & k_8(m) & 0 & 0 & k_{11}(m) & k_{12}(m) \\ k_4(m) & -k_6(m) & 0 & 0 & k_1(m) & -k_3(m) & 0 & 0 \\ k_6(m) & k_5(m) & 0 & 0 & -k_3(m) & k_2(m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{10}(m) & k_{11}(m) & 0 & 0 & k_7(m) & -k_9(m) \\ 0 & 0 & -k_{11}(m) & k_{12}(m) & 0 & 0 & -k_9(m) & k_8(m) \end{bmatrix}$$

slaganje matrice krutosti konstrukcije:

$m := 1..nm$

```

K(m) :=
  for i ∈ 1..4·(n+1)
    for j ∈ 1..4·(n+1)
      Ki,j ← 0
    for i ∈ 1..8
      for j ∈ 1..8
        Ki,j ← KI(m)i,j
    for o ∈ 4, 8..4·(n-1)
      for i ∈ 1..8
        for j ∈ 1..8
          Ki+o,j+o ← Ki+o,j+o + KI(m)i,j
  K3,3 ← 1050
  K4n-1,4n+3 ← 1050
  K
    
```

$K(1) =$

	1	2	3
1	$1.793 \cdot 10^7$	$-1.069 \cdot 10^5$	0
2	$-1.069 \cdot 10^5$	$7.37 \cdot 10^6$	0
3	0	0	$1 \cdot 10^{50}$
4	0	0	$4.71 \cdot 10^7$
5	$-1.792 \cdot 10^7$	$-3.547 \cdot 10^5$	0
6	$3.547 \cdot 10^5$	$-7.335 \cdot 10^6$	0
7	0	0	$-4.713 \cdot 10^6$
8	0	0	$4.71 \cdot 10^7$
9	0	0	0
10	0	0	0
11	0	0	0

vektor opterećenja za jednoliko raspodjeljeno opterećenje trake:

$$\mathbf{q}_I(m) := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_x \cdot L \cdot b}{m \cdot \pi} \\ \frac{1}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_y \cdot L \cdot b}{m \cdot \pi} \\ \frac{b}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_z \cdot L}{m \cdot \pi} \\ \frac{b^2}{12} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_z \cdot L}{m \cdot \pi} \\ \frac{1}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_x \cdot L \cdot b}{m \cdot \pi} \\ \frac{1}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_y \cdot L \cdot b}{m \cdot \pi} \\ \frac{b}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_z \cdot L}{m \cdot \pi} \\ -\frac{b^2}{12} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_z \cdot L}{m \cdot \pi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_{II}(m) := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_x \cdot L \cdot b}{m \cdot \pi} \\ \frac{1}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_y \cdot L \cdot b}{m \cdot \pi} \\ \frac{b}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_z \cdot L}{m \cdot \pi} \\ \frac{b^2}{12} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_z \cdot L}{m \cdot \pi} \\ \frac{1}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_x \cdot L \cdot b}{m \cdot \pi} \\ \frac{1}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_y \cdot L \cdot b}{m \cdot \pi} \\ \frac{b}{2} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_z \cdot L}{m \cdot \pi} \\ \frac{-b^2}{12} \cdot [1 - (-1)^m] \cdot \frac{q_z \cdot L}{m \cdot \pi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_{II}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 31.831 \\ 106.103 \\ 0 \\ 0 \\ 31.831 \\ -106.103 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}(m) := \begin{array}{l} \text{for } r \in 1..4 \cdot (n+1) \\ \quad \text{for } s \in 1 \\ \quad \quad q_{r,s} \leftarrow 0 \\ \text{for } r \in 1..8 \\ \quad \text{for } s \in 1 \\ \quad \quad q_{r,s} \leftarrow q_{I(m)}_{r,s} \\ \text{for } o \in 4, 8..4 \cdot (n-1) \\ \quad \text{for } r \in 1..8 \\ \quad \quad \text{for } s \in 1 \\ \quad \quad \quad q_{r+o,s} \leftarrow q_{r+o,s} + q_{II(m)}_{r,s} \end{array} \quad \mathbf{q}$$

	1
1	0
2	0
3	31.83099
4	106.1033
5	0
6	0
7	63.66198
8	0
9	0
10	0
11	63.66198
12	0
13	0
14	0
15	63.66198

$q(1) =$

## 2.1 Progibi

amplitude progiba:

$$\delta^{<m>} := K(m)^{-1} \cdot q(m)$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0.011	0	$2.014 \cdot 10^{-4}$	0	$2.616 \cdot 10^{-5}$	0	$6.81 \cdot 10^{-6}$
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0.213	0	$4.007 \cdot 10^{-3}$	0	$5.158 \cdot 10^{-4}$	0	$1.327 \cdot 10^{-4}$
8	0.011	0	$1.983 \cdot 10^{-4}$	0	$2.511 \cdot 10^{-5}$	0	$6.316 \cdot 10^{-6}$
9	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
11	0.425	0	$7.898 \cdot 10^{-3}$	0	$9.956 \cdot 10^{-4}$	0	$2.493 \cdot 10^{-4}$
12	0.011	0	$1.902 \cdot 10^{-4}$	0	$2.272 \cdot 10^{-5}$	0	$5.311 \cdot 10^{-6}$

$\delta =$

$$o := 1, 5.. 4 \cdot (n + 1) - 7$$

$$p := 8, 12.. 4 \cdot (n + 1)$$

$$\delta_I(o, p) := \text{submatrix}(\delta, o, p, 1, nm)$$



$$\delta_I(1,8) =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.011	0	$2.014 \cdot 10^{-4}$	0	$2.616 \cdot 10^{-5}$	0	$6.81 \cdot 10^{-6}$	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0.213	0	$4.007 \cdot 10^{-3}$	0	$5.158 \cdot 10^{-4}$	0	$1.327 \cdot 10^{-4}$	0
8	0.011	0	$1.983 \cdot 10^{-4}$	0	$2.511 \cdot 10^{-5}$	0	$6.316 \cdot 10^{-6}$	0

funkcije oblika:

$$N_1(x) := 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^3$$

$$N_2(x) := x \cdot \left[ 1 - 2 \cdot \frac{x}{b} + \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right]$$

$$N_3(x) := 3 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^3$$

$$N_4(x) := x \cdot \left[ \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \frac{x}{b} \right]$$

progibi:

$$f(x,y,o,p) := \sum_m \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \cos(k(m) \cdot y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) \\ \frac{x}{b} \cdot \sin(k(m) \cdot y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{b} \cdot \cos(k(m) \cdot y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) \end{bmatrix} \cdot \delta_I(o,p)^{\langle m \rangle}$$

$$f\left(b, \frac{L}{40}, 1, 8\right)_3 = 0.018$$

$$f\left[b, \frac{L}{20}, 4 \cdot (n+1) - 7, 4 \cdot (n+1)\right]_3 = 0$$

$$\Delta x := \frac{b}{w_1}$$

$$\Delta y := \frac{L}{w_2}$$

$$F_z := \begin{cases} \text{for } i \in 1..w_2+1 \\ \quad \text{for } nn \in 1..n \\ \quad \quad \text{for } j \in (nn-1) \cdot w_1 + 1..nn \cdot w_1 \\ \quad \quad \quad F_{z,i,j} \leftarrow f\left[\left[j - nn \cdot w_1 + (w_1 - 1)\right] \cdot \Delta x, (i-1) \cdot \Delta y, 4 \cdot (nn+1) - 7, 4 \cdot (nn+1)\right]_3 \\ \quad \quad \quad F_z \\ \quad \text{for } i \in 1..w_2+1 \\ \quad \quad \text{for } j \in w_1 \cdot n + 1 \\ \quad \quad \quad F_{z,i,j} \leftarrow f(b, (i-1) \cdot \Delta y, 4 \cdot (n+1) - 7, 4 \cdot (n+1))_3 \\ \quad \quad \quad F_z \end{cases}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.014	0.029	0.043	0.056	0.07	0.083	0.095	0.107
3	0	0.029	0.057	0.085	0.112	0.139	0.165	0.189	0.213
4	0	0.043	0.085	0.127	0.167	0.207	0.245	0.282	0.318
5	0	0.056	0.112	0.168	0.221	0.274	0.325	0.373	0.42
6	0	0.07	0.139	0.207	0.274	0.339	0.402	0.462	0.52
7	0	0.083	0.165	0.246	0.325	0.402	0.476	0.548	0.617
8	0	0.095	0.19	0.283	0.374	0.462	0.548	0.631	0.711
9	0	0.107	0.213	0.318	0.42	0.52	0.617	0.711	0.8
10	0	0.118	0.236	0.352	0.465	0.576	0.683	0.787	0.886
11	0	0.129	0.257	0.384	0.508	0.628	0.746	0.859	0.967
12	0	0.139	0.277	0.414	0.548	0.678	0.805	0.927	1.044
13	0	0.149	0.297	0.442	0.585	0.725	0.86	0.991	1.116
14	0	0.158	0.314	0.469	0.62	0.768	0.912	1.051	1.184

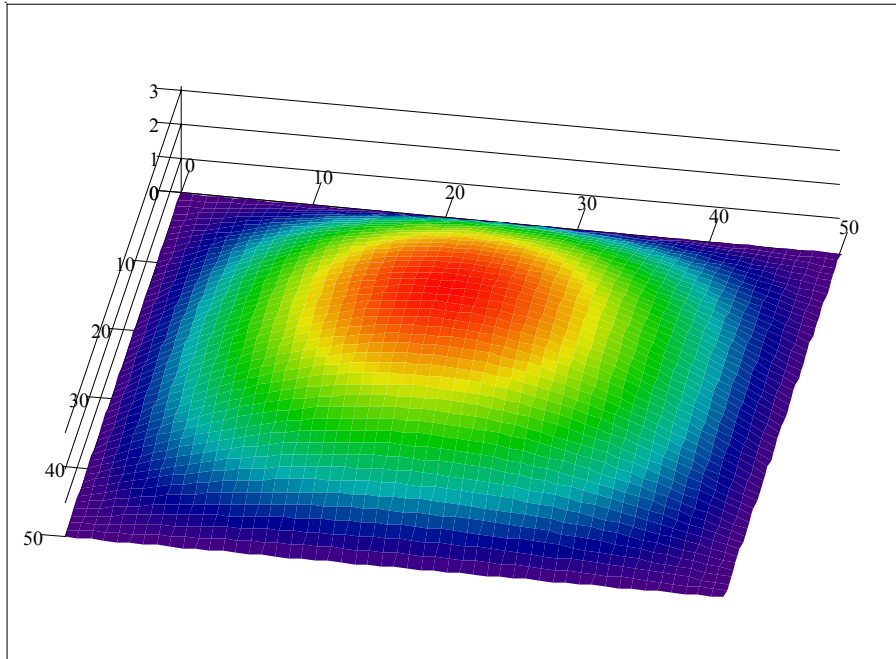
$$F_{zmax} := \max(F_z)$$

$$F_{zmax} = 3.12$$

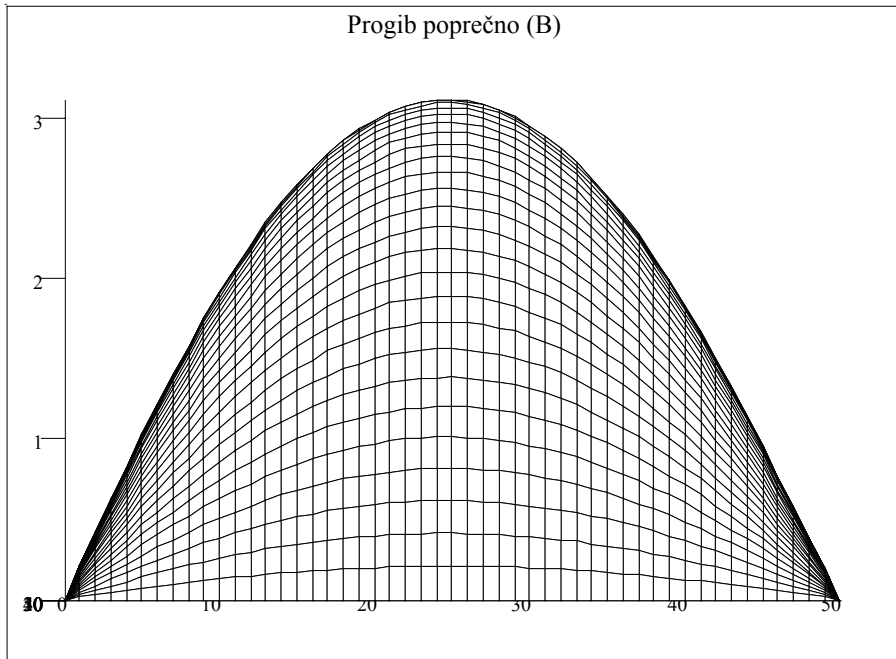
Analitičko rješenje za pravokutnu ploču

$$f_{amax} := 0.004062 \frac{q_z \cdot L^4}{D_x}$$

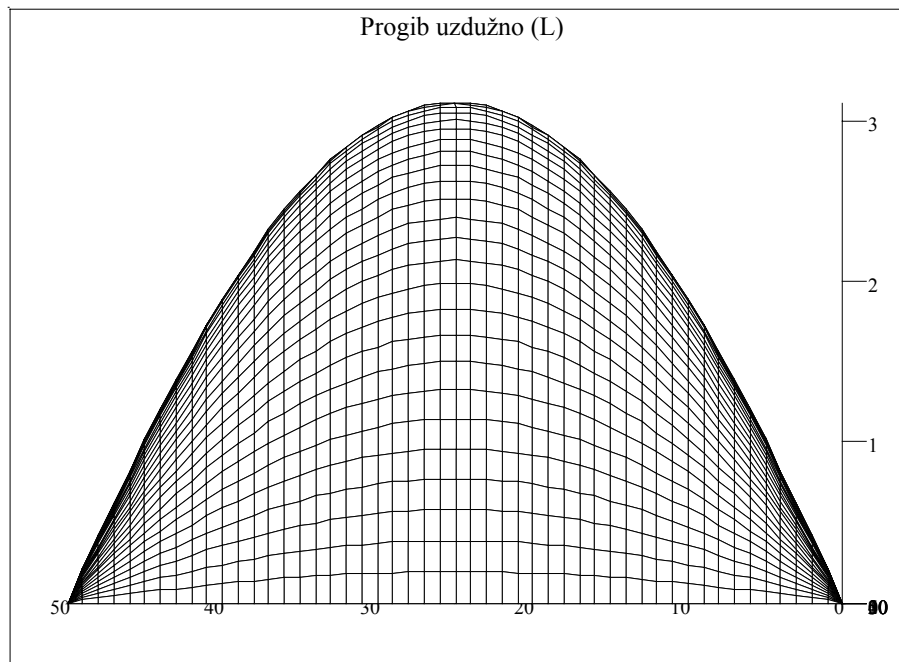
$$f_{amax} = 3.235$$



$F_z$



$F_z$


 $F_z$ 

## 2.2 Momenti savijanja

$$M(x,y,0,p) := D \sum_m \left[ \begin{array}{cccc} \frac{-1}{b} \sin(k(m) \cdot y) & 0 & -\left(\frac{d^2}{dx^2} N_1(x)\right) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & -\left(\frac{d^2}{dx^2} N_2(x)\right) \cdot \sin(k(m) \cdot y) \\ 0 & -\left(1 - \frac{x}{b}\right) k(m) \sin(k(m) \cdot y) & k(m)^2 \cdot N_1(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & k(m)^2 \cdot N_2(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) \\ \left(1 - \frac{x}{b}\right) k(m) \cos(k(m) \cdot y) & \frac{-1}{b} \cos(k(m) \cdot y) & 2k(m) \cdot \left(\frac{d}{dx} N_1(x)\right) \cdot \cos(k(m) \cdot y) & 2k(m) \cdot \left(\frac{d}{dx} N_2(x)\right) \cdot \cos(k(m) \cdot y) \\ \frac{1}{b} \sin(k(m) \cdot y) & 0 & -\left(\frac{d^2}{dx^2} N_3(x)\right) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & -\left(\frac{d^2}{dx^2} N_4(x)\right) \cdot \sin(k(m) \cdot y) \\ 0 & \frac{-x}{b} k(m) \sin(k(m) \cdot y) & k(m)^2 \cdot N_3(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) & k(m)^2 \cdot N_4(x) \cdot \sin(k(m) \cdot y) \\ \frac{x}{b} k(m) \cos(k(m) \cdot y) & \frac{1}{b} \cos(k(m) \cdot y) & 2k(m) \cdot \left(\frac{d}{dx} N_3(x)\right) \cdot \cos(k(m) \cdot y) & 2k(m) \cdot \left(\frac{d}{dx} N_4(x)\right) \cdot \cos(k(m) \cdot y) \end{array} \right] \delta_I(0,p)^{\langle m \rangle}$$

$$\Delta x := \frac{b}{w_1}$$

$$\Delta y := \frac{L}{w_2}$$

2.2.1 Momenti savijanja  $M_x$

```

M_x :=
  for i ∈ 1.. w_2 + 1
    for nn ∈ 1.. n
      for j ∈ (nn - 1) · w_1 + 1.. nn · w_1 + 1
        M_{x,i,j} ← M[[j - nn · w_1 + (w_1 - 1)] · Δx, (i - 1) · Δy, 4 · (nn + 1) - 7, 4 · (nn + 1)]_1
      M_x
    M_x
  M_x

```

$M_{xmax} := \max(M_x)$

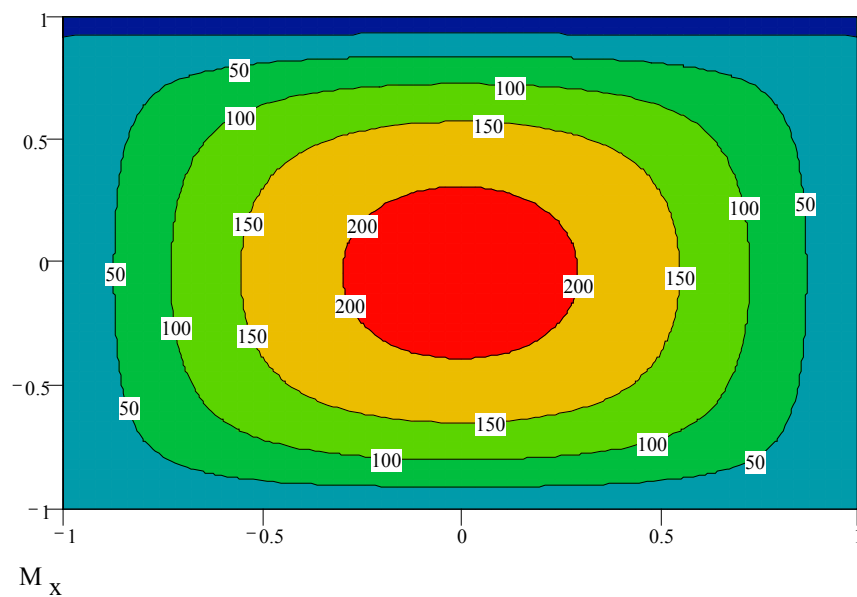
$M_{xmax} = 220.644$

	45	46	47	48	49	50	51
1	0	0	0	0	0	0	0
2	7.63	6.311	4.752	2.873	0.544	-2.47	0.072
3	15.075	12.447	9.352	5.637	1.064	-4.803	0.136
4	22.173	18.26	13.673	8.203	1.538	-6.884	0.182
5	28.812	23.648	17.629	10.516	1.958	-8.644	0.207
6	34.935	28.564	21.187	12.557	2.325	-10.067	0.213
7	40.539	33.015	24.364	14.349	2.653	-11.183	0.204
8	45.664	37.048	27.212	15.937	2.959	-12.057	0.187
9	50.373	40.733	29.8	17.38	3.262	-12.771	0.168
10	54.733	44.139	32.194	18.73	3.577	-13.397	0.155
11	58.796	47.319	34.446	20.024	3.911	-13.987	0.15
12	62.592	50.303	36.578	21.275	4.261	-14.564	0.154
13	66.127	53.092	38.588	22.476	4.617	-15.121	0.163
14	69.388	55.671	40.456	23.603	4.965	-15.635	0.174

- Analitičko rješenje za pravokutnu ploču

$M_{xamax} := 0.04789q_z \cdot L^2$

$M_{xamax} = 239.45$



**2.2.2 Momenti savijanja  $M_y$** 

$$M_y := \begin{cases} \text{for } i \in 1..w_2 + 1 \\ \quad \text{for } nn \in 1..n \\ \quad \quad \text{for } j \in (nn - 1) \cdot w_1 + 1..nn \cdot w_1 \\ \quad \quad \quad M_{y_{i,j}} \leftarrow M \left[ \left[ j - nn \cdot w_1 + (w_1 - 1) \right] \cdot \Delta x, (i - 1) \cdot \Delta y, 4 \cdot (nn + 1) - 7, 4 \cdot (nn + 1) \right]_2 \\ \quad \quad \quad M_y \\ \quad \text{for } i \in 1..w_2 + 1 \\ \quad \quad \text{for } j \in w_1 \cdot n + 1 \\ \quad \quad \quad M_{y_{i,j}} \leftarrow f(b, (i - 1) \cdot \Delta y, 4 \cdot (n + 1) - 7, 4 \cdot (n + 1))_2 \\ \quad \quad \quad M_y \end{cases}$$

$$M_{y_{\max}} := \max(M_y)$$

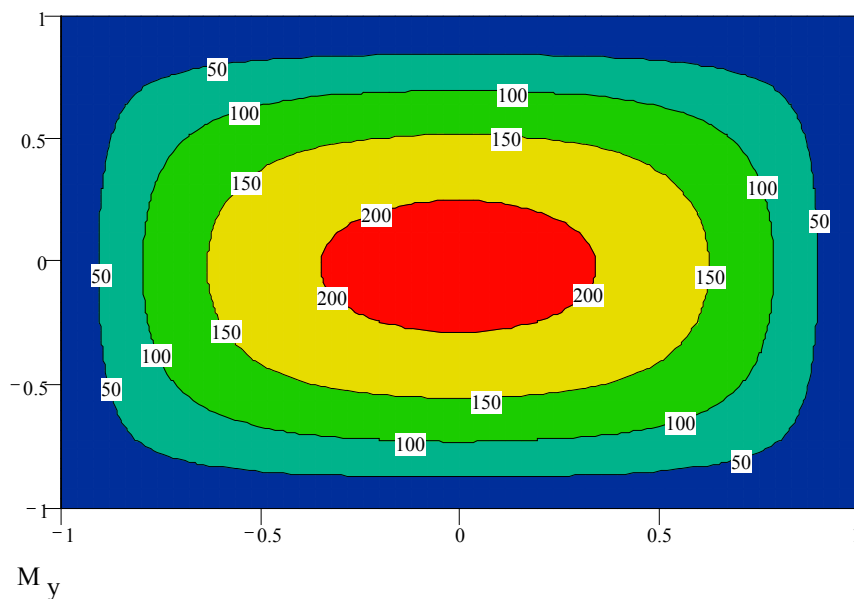
$$M_{y_{\max}} = 217.402$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0.012	2.273	4.345	6.231	7.946	9.506	10.928
3	0.023	4.412	8.448	12.134	15.496	18.563	21.365
4	0.031	6.309	12.111	17.439	22.323	26.798	30.902
5	0.036	7.898	15.213	21.979	28.221	33.974	39.274
6	0.038	9.166	17.726	25.708	33.128	40.011	46.39
7	0.038	10.147	19.706	28.695	37.118	44.986	52.32
8	0.037	10.907	21.268	31.092	40.365	49.085	57.26
9	0.035	11.529	22.557	33.084	43.086	52.546	61.459
10	0.033	12.083	23.7	34.846	45.486	55.597	65.162
11	0.033	12.622	24.789	36.499	47.714	58.404	68.551
12	0.033	13.162	25.862	38.098	49.838	61.053	71.719
13	0.034	13.695	26.905	39.635	51.856	63.544	74.677
14	0.036	14.194	27.875	41.055	53.711	65.823	77.372

- Analitičko rješenje za pravokutnu ploču

$$M_{y_{\max}} := 0.04789q_z \cdot L^2$$

$$M_{y_{\max}} = 239.45$$



### 2.2.3 Momenti savijanja $M_{xy}$

$$M_{xy} := \begin{cases} \text{for } i \in 1..w_2+1 \\ \quad \text{for } nn \in 1..n \\ \quad \quad \text{for } j \in (nn-1) \cdot w_1 + 1..nn \cdot w_1 + 1 \\ \quad \quad \quad M_{xy_{i,j}} \leftarrow M \left[ \left[ j - nn \cdot w_1 + (w_1 - 1) \right] \cdot \Delta x, (i-1) \cdot \Delta y, 4 \cdot (nn+1) - 7, 4 \cdot (nn+1) \right]_3 \\ \quad \quad \quad M_{xy} \\ \quad \quad M_{xy} \\ \quad M_{xy} \end{cases}$$

$$M_{xy\max} := \max(M_{xy})$$

$$M_{xy\max} = 176.737$$

$$M_{xy\min} := \min(M_{xy})$$

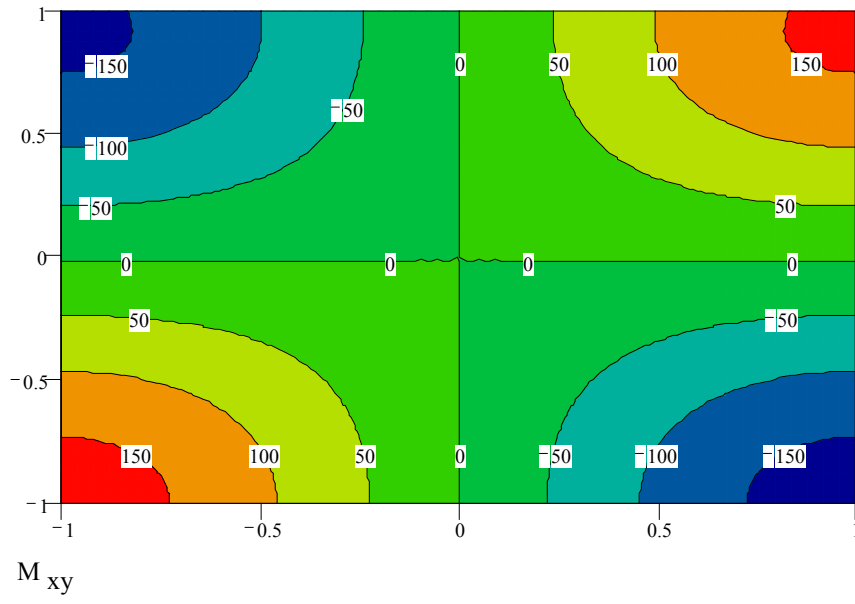
$$M_{xy\min} = -176.737$$

	1	2	3	4	5	6
$M_{xy} =$	176.737	175.859	173.525	170.066	165.708	160.611
	176.026	175.166	172.872	169.46	165.149	160.097
	173.94	173.133	170.952	167.673	163.497	158.573
	170.609	169.88	167.868	164.79	160.82	156.095
	166.227	165.588	163.774	160.939	157.222	152.746
	161.01	160.459	158.848	156.268	152.825	148.626
	155.167	154.693	153.265	150.926	147.755	143.841
	148.868	148.452	147.174	145.048	142.129	138.491
	142.228	141.851	140.687	138.737	136.043	132.663
	135.309	134.954	133.872	132.067	129.571	126.43
	128.127	127.786	126.766	125.083	122.763	119.846
	120.675	120.347	119.384	117.813	115.659	112.953
	112.945	112.634	111.733	110.276	108.285	105.788
	104.943	104.656	103.83	102.494	100.67	98.381

- Analitičko rješenje za pravokutnu ploču

$$M_{xy\max} := -0.03246q_z \cdot L^2$$

$M_{xy\max} = -162.3$





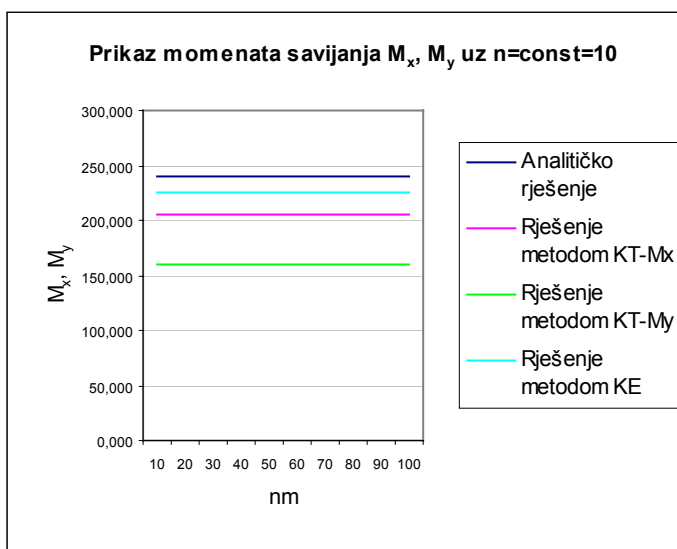
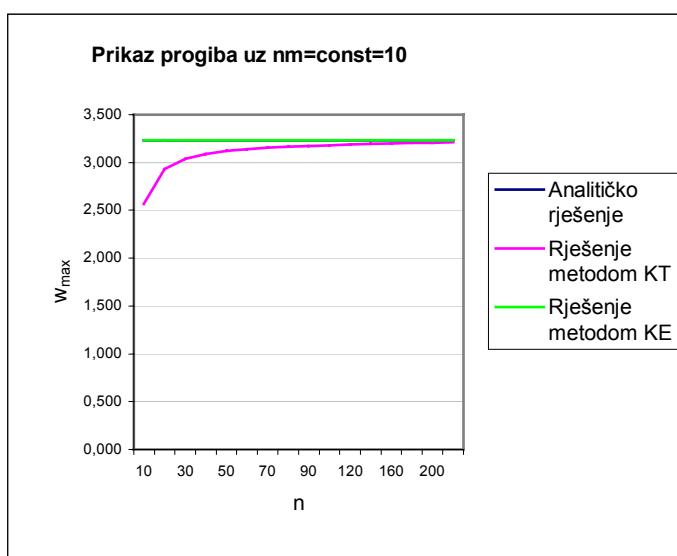
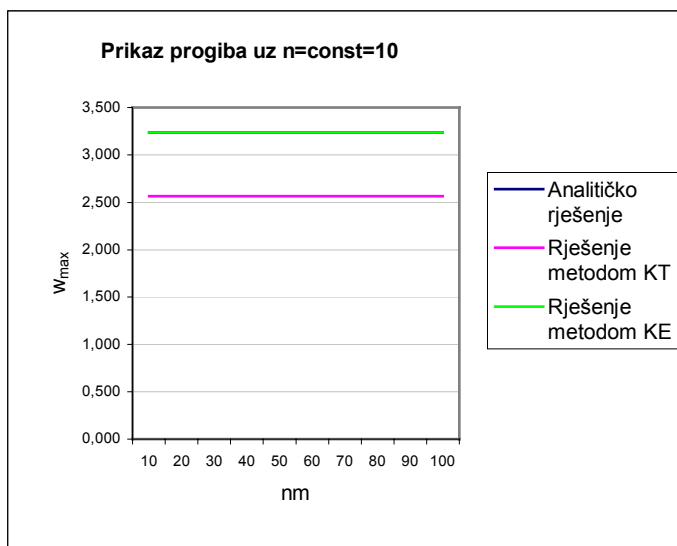
### Usporedba proračuna metodom konačnih traka sa teoretskim rješenjem i rješenjem metodom konačnih elemenata za različite brojeve podjela ploče i različite brojeve članova reda

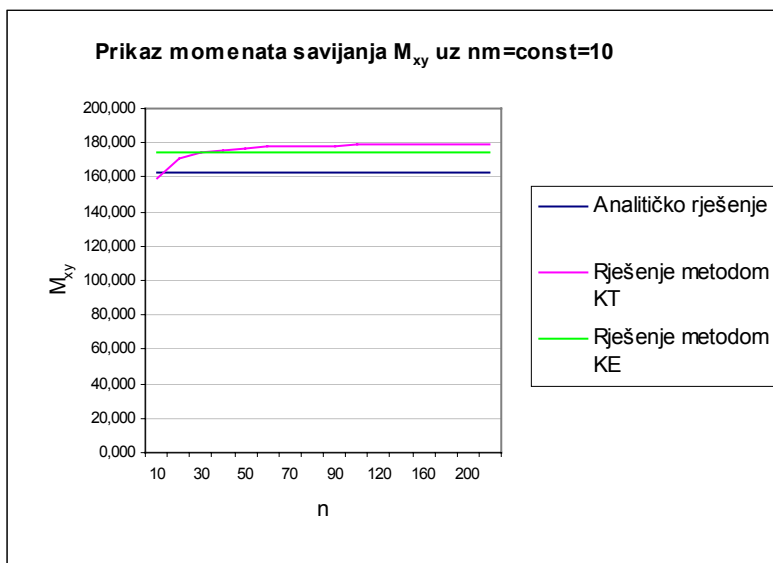
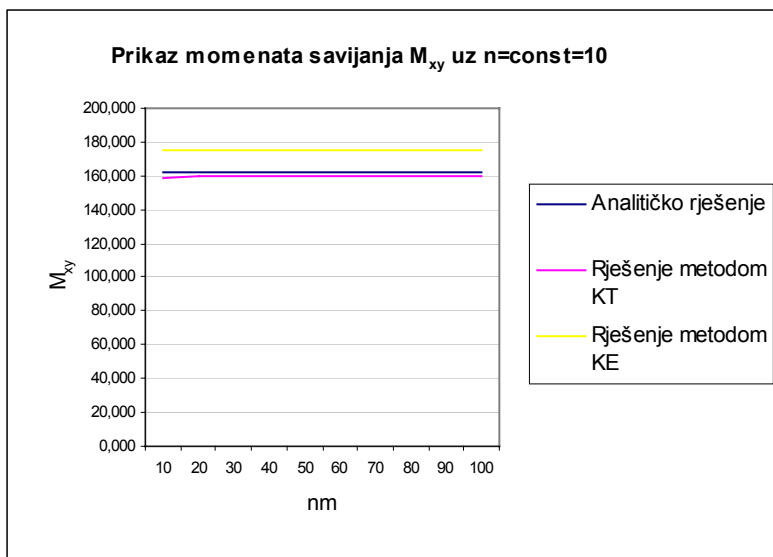
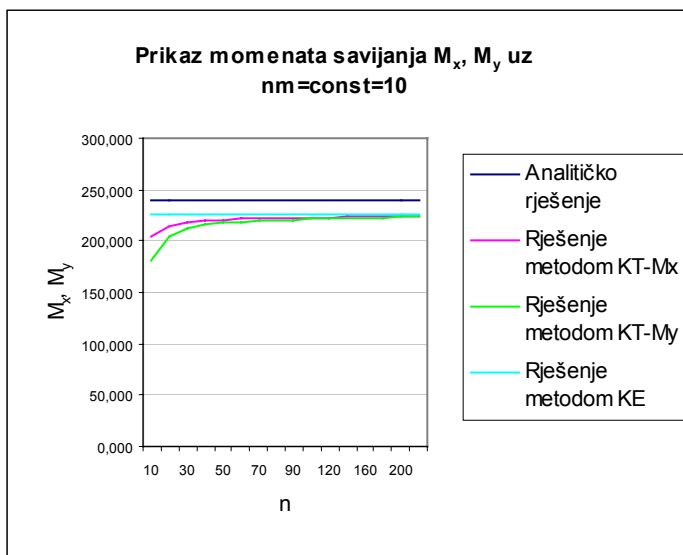
Dimenzije ploče:       $B = 1000 \text{ mm}$       širina  
                                   $t = 10 \text{ mm}$       debljina  
                                   $nm$       broj članova reda  
                                   $n$       broj podjela ploče

Materijal:               $E = 71700 \text{ N/mm}^2$       modul elastičnosti  
                                   $\nu = 0.22$       Poisson-ov koeficijent

Opterećenje:               $q_z = 0.005 \text{ N/mm}^2$       ravnomjerno raspodjeljeno opterećenje

	n	nm	Rješenje metodom K.T.				Analitičko rješenje			Rješenje met. K.E. (10x10 el.)		
			$w_{\max}$	$M_{x,\max}$	$M_{y,\max}$	$M_{xy,\max}$	$w_{\max}$	$M_{x,\max}$	$M_{xy,\max}$	$w_{\max}$	$M_{x,\max}$	$M_{xy,\max}$
<b>n = const.</b>	10	10	2,565	204,930	180,904	159,092	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	10	20	2,565	204,854	180,559	159,585	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	10	30	2,565	204,865	182,349	159,673	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	10	40	2,565	204,862	182,332	159,700	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	10	50	2,565	204,863	182,340	159,711	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	10	60	2,565	204,862	182,336	159,716	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	10	70	2,565	204,863	182,338	159,719	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	10	80	2,565	204,863	182,337	159,720	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	10	90	2,565	204,863	182,338	159,721	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	10	100	2,565	204,863	182,337	159,722	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
<b>nm = const.</b>	10	10	2,565	204,930	180,904	159,092	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	20	10	2,931	214,701	205,285	170,757	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	30	10	3,039	217,978	212,175	174,166	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	40	10	3,090	219,638	215,500	175,788	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	50	10	3,120	220,644	217,457	176,737	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	60	10	3,140	221,320	218,746	177,359	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	70	10	3,154	221,805	219,659	177,798	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	80	10	3,164	222,170	220,339	178,125	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	90	10	3,172	222,455	220,866	178,378	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	100	10	3,179	222,683	221,286	178,579	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	120	10	3,188	223,027	221,913	178,879	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	140	10	3,195	223,273	222,353	179,092	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	160	10	3,200	223,458	222,688	179,251	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
	180	10	3,204	223,603	222,948	179,375	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649
200	10	3,207	223,718	223,155	179,473	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649	
220	10	3,210	223,813	223,324	179,554	3,235	239,450	162,300	3,233	226,149	174,649	





### 3 STAKLO KAO GRAĐEVNI MATERIJAL

#### 3.1 OSNOVNA SVOJSTVA I PROIZVODNJA STAKLA

Materijali se mogu podijeliti u slijedeće skupine:

- metali i legure
- polimeri
- keramike i stakla
- kompoziti

Razlika između keramika i stakala je ta da keramike imaju kristalnu strukturu, anorganske su i ne-metali. Stakla nemaju kristalnu strukturu (amorfna kruta tijela). Osim toga, iako su većina stakala ne-metali, danas postoji određeni broj stakala koji su metali (eng. metallic glass, glassy metals, metglass). To su metali ili legure koje se hlade toliko naglo da nema vremena za razvoj kristalizacije.

Čisto staklo za ostakljivanje sastoji se od:

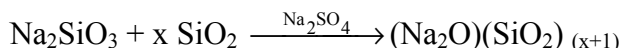
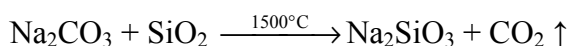
- |   |         |
|---|---------|
| - silicijev oksid SiO <sub>2</sub> (kremen) | 70-74 % |
| - kalcijev oksid CaO (vapno)                | 5-12 %  |
| - natrijev oksid Na <sub>2</sub> O          | 12-16 % |

sa malim primjesama magnezija, aluminija, željeza i drugih elemenata.

Kremen ima vrlo visoku temperaturu taljenja od oko 1700° C i njegovo agregatno stanje na toj temperaturi je poput sirupa u hladnom prostoru. Atomska struktura kremenata ima oblik tetraedra sa silicijem u sredini vezanim sa četiri atoma kisika u kutevima: kemijska formula je SiO<sub>4</sub> i ima negativni naboj.

Kod hlađenja rastopljenog kremenata, ubrzo se formira nasumce organizirana mreža navedenih tetraedara međusobno povezanih u kutevima. Nastaje tako amorfna struktura poznata kao stakleni kremen.

Kemijski proces kod proizvodnje stakla karakteriziran je slijedećim kemijskim reakcijama:



Iz praktičnih i ekonomskih razloga, visoka temperatura taljenja kremenata smanjuje se dodavanjem natrijevog oksida u obliku karbonata (natrijev karbonat – soda). Na taj način atomi natrija i oksida ulaze u mrežu silicijevog oksida u skladu sa njihovom valentnošću. Ti atomi poznati su kao izgrađivači mreže (Network Formers). Ostali sastojci stakla, kalcij i magnezij, ulaze u strukturu mreže kao modifikatori mreže (Network Modifiers). Njihova zadaća je da učine strukturu što kompleksnijom, tako da, kada su sastojci zajedno rastopljeni, tijekom procesa hlađenja, onemogućuje pravilno raspoređivanje atoma koje dovodi do kristalizacije.

Kod proizvodnje stakla, brzina hlađenja određuje se tako da se time ometa porast viskoznosti i mobilnost atoma, što ometa proces kristalizacije.

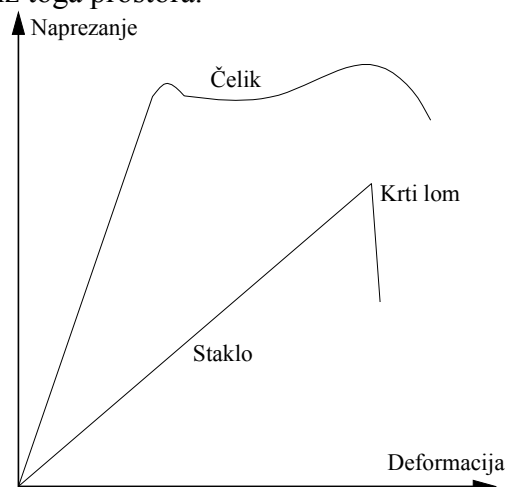
Osnovne karakteristike običnog, netemperiranog, stakla (eng. annealed glass):

Gustoća	2500 kg/m <sup>3</sup>
Modul elastičnosti	70000-74000 N/mm <sup>2</sup>
Modul posmika	30000 N/mm <sup>2</sup>
Poisson-ov koeficijent	0.22
Granica tečenja	Teoretska vrijednost iznosi 3600 N/mm <sup>2</sup> ali zakazivanje nastaje krtnim lomom
Vlačna čvrstoća	5000 N/mm <sup>2</sup> ali nastaje krtni lom
Vlačna duktilnost	0
Tlačna čvrstoća	>1000 N/mm <sup>2</sup> ali prevladavaju dodatna vlačna naprezanja
Tvrdoća	6 MoH (prema Mohsovoj ljestvici)
Žilavost	0.01 kJ/m <sup>2</sup>
Temperatura omekšanja	Oko 530°C – varira prema sastavu stakla
Maksimalna temperatura upotrebljivosti	Oko 280°C
Toplinska provodljivost	1 W/m/K
Koeficijent termalne ekspanzije	7.7 – 8.8 x 10 <sup>-6</sup> 1/K

### 3.1.1. Obično staklo

Obično staklo danas se najčešće proizvodi procesom **plutanja??** (eng. Float Process). Sastojci, kremenij pijesak, soda u prahu, kamen vapnenac i **SALT CAKE????**, pomiješaju se sa recikliranim razbijenim staklom i zagriju u visokoj peći na oko 1500° C. Rastopina stakla izlije se u plitki bazen rastopljenog kositra. U bazenu kositra kontrolirano grijanje omogućuje staklu da teče formirajući tako ravnu traku konstantne debljine. U bazenu se staklo polagano hladi. Nakon toga staklo se vodi u prostor za daljnje kontrolirano hlađenje (eng. annealing). Debljina stakla kontrolira se brzinom izlaza traka iz toga prostora.

Obično staklo ponaša se potpuno elastično sve do trenutka loma. Krhotine takvog stakla su opasne. Otkazivanje je stohastično, tj. predviđanje loma je statističko. Kod stakla nema tečenja niti zamora kakav je poznat u metalurgiji. Naprotiv, dolazi do sporog rasta pukotina kod stalnog ili cikličnog opterećenja.



slika 10.

Uzrok loma stakla nije samo trenutni koncentrirani udar, već i naprezanje uslijed savijanja, toplinsko naprezanje i zadana deformacija. Nema nikakvog upozorenja koji može ukazati na lom. Lom zavisi primarno o broju površinskih pukotina (površinska oštećenja),

nivou naprežanja, veličini napregnute površine i trajanju opterećenja. Pukotine u staklu mogu biti inherentne ali mogu se uzrokovati i rezanjem, brušenjem i bušenjem. Isto tako, broj oštećenja ovisi o okolini kojom je staklo okružen tijekom eksploatacije. Vlažnost zraka pospješuje rast pukotina. Reznani rubovi stakla obično su slabiji od njegovih unutarnjih površina. Zbog toga se su dozvoljeni naponi za staklene grede manji od onih za staklene ploče.

Uvjet nastupa krčkog loma obično se opisuje slijedećim izrazom:

$$\sigma\sqrt{(\pi a)} = \sqrt{(EG_c)}$$

Tu je  $a$  pola dužine pukotine,  $E$  je Young-ov modul,  $G_c$  je žilavost stakla izražena u  $\text{kJ/m}^2$  (poznata i kao kritična energija deformacije). Prema tom izrazu, krčki lom nastaje u materijalu koji je opterećen naponom  $\sigma$  kada pukotina dostigne kritičnu dužinu  $a$ . Ova formula isto tako pojašnjava fenomen o većoj čvrstoći običnog stakla kod kratkotrajnog nego kod dugotrajnog opterećenja.

Kada obično staklo pukne ono se raspadne u velike oštre krhotine koje mogu biti vrlo opasne. Ipak, može se se isto tako desiti da staklo ne ispadne iz svog okvira i nastavi nositi mala opterećenja zbog postojanja alternativnih mogućnosti nošenja u ravnini. Obično staklo ne lomi se spontano kao neke truge vrste ojačanog stakla.

### 3.1.2. Kaljeno staklo

Početak proizvodnje kaljenog stakla (eng. toughened glass, am. fully tempered glass) isti je kao i za obično staklo. Nakon toga staklo se grije na  $620^\circ\text{C}$  i naglo hladi naletima hladnog zraka. Na taj način najprije se hladi i skrućuje površina stakla. Kako se unutrašnjost hladi ona se nastoji stisnuti uzrokujući tlačne napone na površini stakla a vlačne napone u unutrašnjosti. U Evropi površinski tlačni naponi iznose od 90 do  $150 \text{ N/mm}^2$ .

Kod kaljenog stakla pukotine se ne propagiraju zbog tlačnih napona na površini pa takvo staklo može podnijeti veća opterećenja od običnog stakla.

Drugi način prednaprežanja površine stakla je kemijsko ojačanje. Staklo se uroni u otopinu iona kalija koji putem elektrolise zamjenjuju ione natrija na površini stakla. Ioni kalija su oko 30% veći od iona natrija pa tako nastaje površinska napetost. Prednost ove metode je ta da nema toplinskih deformacija stakla i ta što se mogu ojačati tanja stakla. Nedostatak je da dolazi do mnogo tanjeg tlačnog sloja koji je manje čvrst od mnogo debljeg sloja koji se dobije termalnim postupkom.

Prema američkim propisima ASTM, standard C1048-85, minimalni površinski tlačni napon koji se propisuje za temperirano staklo je  $69 \text{ N/mm}^2$ . U Evropi minimalni napon koji proizvođačač garantira je  $85 \text{ N/mm}^2$ .

Rupe za vijke u staklu ne uzrokuju velike promjene u površinskim naponima sve dok je njihov promjer najmanje jednak debljini stakla. To omogućuje da hladan zrak prođe nesmetano kroz rupe tako da se one hlade na sličan način kao i ostatak površine. Bušenje i rezanje kaljenog stakla mora se obaviti prije procesa kaljenja da se izbjegne lomljenje zbog površinskih napona.

Staklo može sadržavati nečistoće. Kod običnog stakla one obično ne uzrokuju probleme. Kod kaljenog stakla nečistoće su zaslužne za nenadano lomljenje bez ikakvog vidljivog razloga. Uzrok tome su male količine nikel sulfida koje doživljavaju određenu promjenu faze kod koje one ekspandiraju. Na taj način staklo puca i lomi se na vrlo sitne komade nalik na kišu malih kockica. Postoji proces kontrole kvalitete kaljenog stakla (eng. heat-soaking) putem kojeg većina stakla prođe kroz promjenu faze u tvornici.

Kaljeno staklo se lomi i ako je dubina površinske pukotine dostigla vlačnu zonu. Komadi razbijenog kaljenog stakla su manji ili jednaki debljini stakla.

### 3.1.3. Toplinski ojačano staklo

Proces toplinskog ojačanja je isti kao i onaj kaljenja samo što je nivo postignute površinske napetosti manji. Lom toplinski ojačanog stakla sličniji je lomu običnog nego temperiranog stakla.

Prema američkom standardu minimalna površinska napetost za toplinski ojačano staklo je  $24 \text{ N/mm}^2$ .

### 3.1.4. Lamelirano staklo

Lamelirano staklo sastoji se od dve ili više staklenih ploha međusobno povezanih prozirnim plastičnim među-slojem. Koriste se dva osnovna materijala za povezivanje: polivinilbutiral (PVB) ili smole kao npr. akrilik. Debljina plastičnog sloja iznosi od 0.4 do 6 mm. Sve tri vrste stakla, obično, temperirano i toplinski ojačano, mogu se koristiti za povezivanje kod lameliranog stakla. Kod temperiranja i toplinskog ojačanja staklo dobiva valove vrlo malih amplituda uzrokovane valjcima preko kojih staklo prolazi tijekom procesa temperiranja. To pospješuje odvajanje slojeva stakla kod lameliranog stakla pa PVB plastični među-slojevi nisu preporučljivi. Rješenje problema pronašlo se u korištenju smola za povezivanje.

*Povezivanje PVB folijom* – “sendvič” od stakla sa među-slojem od PVB-a prolazi kroz peć koja ga zagrije na oko  $70^\circ \text{ C}$ . Nakon toga, staklo se provuče kroz valjke koji istisnu sav suvišan zrak. Na kraju, lamelirano staklo ide u autoklavu gdje se zagrije na  $140^\circ \text{ C}$  pod pritiskom od  $0.8 \text{ N/mm}^2$ .

*Povezivanje smolom* – dvije glavne vrste smola koje se koriste su akrilik i poliester. Dva sloja stakla stave se jedno do drugog na određenu udaljenost putem samoljepljive trake zaljepljene po njihovom obodu. Smola se tada izlije između dva sloja. Kada se istisne sav zrak, rubovi se brtve a lamelirano staklo se čuva u horizontalnom položaju sve dok smola ne stvrdne.

Ponašanje lameliranog stakla različito je pod dugotrajnim i kratkotrajnim opterećenjem. Za kratkotrajno opterećenje lamelirano staklo djeluje kao sastavljeni nosač. Za dugotrajno opterećenje teret se raspoređuje na dvije staklene plohe prema njihovim krutostima zbog deformacije među-sloja.

Povećanje temperature omekšava među-sloj i na taj način umanjuje djelovanje sastavljenog nosača.

Lamelirano staklo je vrlo pogodno za upotrebu u sigurnosnom smislu. Kod loma stakla međusloj i dalje povezuje razbijene komade stakla. To minimizira opasnost od ozljeda uzrokovanim padom staklenih krhotina. Deblji međuslojevi povećavaju sigurnost od prodiranja kod udara. Lamelirana stakla od više slojeva pružaju još veću sigurnost. Ako je lamelirano staklo prikladno pričvršćeno za okvir, ono može pružati otpor eksploziji.

### 3.1.5. Izolacijsko staklo

Izolacijsko staklo sastoji se od dvije staklene plohe separirane po obodu sa šupljim profilom (eng. spacer), obično aluminjskim. Profil je ispunjen materijalom za isušivanje koji održava suhoću zraka u šupljini između dva stakla. Staklene plohe zajedno sa šupljim profilom se brtve po obodu. Pri tome se koristi silikon. Brtvljenjem se stakla spajaju, omogućuju se mali međusobni pomaci i onemogućuje se prodiranje vode.

Dimenzije šupljina variraju od 6 do 20 mm. Šupljine se mogu puniti zrakom ili drugim inertnim plinom.

Glavne prednosti takvog stakla su bolja termička i zvučna izolacija.

Zbog vakuma koji se stvara između dvije staklene plohe, opterećenje se raspoređuje na oba stakla.

Temperaturne promjene utječu na ponašanje izolacijskog stakla. Niski atmosferski pritisak i povećane temperature uzrokuju ekspanziju unutarnjeg plina. Visoki atmosferski pritisak kombiniran sa niskom temperaturom uzrokuje kontrakciju plina. O tome kako su stakla međusobno povezana zavisiti će inducirani naponi zbog promjene temperature. Tako npr. kruto brtvljenje može uzrokovati velike napone u staklu kod ekspanzije unutarnjeg zraka.



## 3.2 PRORAČUN STAKLA

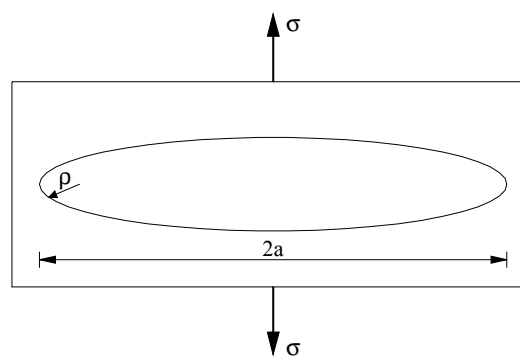
Kod proračuna stakla treba obratiti pažnju na slijedeće činjenice:

- Prije početka proračuna, potrebno je imati jasnu ideju o tome kako će se konstrukcija ponašati. To je vrlo bitno osobito kod stakla zbog njegove krte prirode i mnogobrojnih faktora koji utječu na njegovu čvrstoću.
- Kod velikih staklenih ploha koje se pod opterećenjem prognu više od same debljine stakla proračun se mora vršiti prema nelinearnoj teoriji velikih pomaka kako bi se uzelo u obzir djelovanje membranskih naprezanja.
- Čvrstoća običnog, neojačanog, stakla zavisi o trajanju opterećenja, veličini napregnute površine, uvjetima okoline posebice vlažnosti, distribuciji napona po napregnutoj površini i stanju površine i rubova stakla

### 3.2.1. Mehanika loma

Ako se tijekom eksploatacije kaljenog ili toplinski ojačanog stakla, zbog induciranih površinskih tlačnih napona, ne pojavljuju vlačni naponi u staklu, tada se površinske pukotine ne mogu povećavati, pa proračun po metodi mehanike loma nije potreban. Površinske pukotine mogu rasti kod pojavljivanja vlačnih napona što se obično dešava kod eksploatacije običnog stakla.

Temelje mehanike loma postavio je britanski arhitekt brodova prof. Inglis koji je uočio da zarez u metalnoj ploči reducira vlačnu nosivost više nego što bi se to moglo predvidjeti uzimajući u obzir redukciju površine zbog smanjenja presjeka. On je dokazao da se naponi u okolini diskontinuiteta povećavaju zavisno o odnosu radiusa i dužine diskontinuiteta okomite na smjer napona.



slika 11.

Nakon njega, početkom 20-og stoljeća, A.A. Griffith je analizirao pukotine nasumce raspoređene po površini stakla. Pod opterećenjem, naponi se koncentriraju na vrhovima pukotina koje prostom oku mogu biti nevidljive. Propagacija pukotine ili lom će nastupiti ako energija oslobođena kod širenja pukotine dostigne određenu kritičnu vrijednost:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{EG_c}{\pi a}}$$

tu je  $\sigma_c$  napon potreban za lom ploče sa pukotinom dužine  $2a$ ,  $E$  je Young-ov modul a  $G_c$  je kritična vrijednost oslobođene energije ili žilavost stakla. Žilavost se izražava u jedinici energije po jedinici debljine ploče i po jedinici dužine pukotine ( $\text{kJ/m}^2$ ). Prema navedenom izrazu, lom će se desiti ako u materijalu sa naponom  $\sigma$  pukotina dostigne kritičnu dužinu  $a$  ili, suprotno, ako je pukotina dužine  $a$  podvrgnuta kritičnom naponu  $\sigma$ . Jednažba pokazuje da je kritična kombinacija napona i dužine pukotine materijalna konstanta.

U praksi se proračun širenja pukotina prema teoriji mehanike loma ne provodi već se u propisima uzima u obzir broj pukotina na određenoj opterećenoj površini što povećava vjerojatnost pucanja stakla. To će se pojasniti u daljnjem tekstu.

### 3.2.2. Koncentracija napona

Čelik u okolici lokalne koncentracije napona teče. Staklo zbog svoje krte prirode ne teče nego se naglo lomi. Zbog toga, kod proračuna staklenih konstrukcija treba paziti da se izbjegnu rješenja koja dovode do pojavljivanja koncentracija napona. Posebnu pažnju treba posvetiti vijčanim spojevima stakla koja su sve više u upotrebi. Tu se u bušene rube između stakla i vijka koristi PVC cijevčica koja raspoređuje napone na veću površinu. Kod prijenosa sila sa stakla na metalni okvir uvijek se koriste meki materijali.

### 3.2.3. Zamor

Staklo nije podložno zamoru zbog potpuno elastičnog ponašanja do trenutka loma. Naime, kod rasterećenja u staklu nema zaostalih napona.

Ipak, zamor se kod stakla očituje u porastu pukotina kod cikličkog opterećenja.

### 3.2.4. Američki propisi za proračun stakla ASTM E1300 - 03

ASTM E1300 - 03 je standard koji je danas najviše u upotrebi za proračun staklenih ploča opterećinih jednolikim kontinuiranim opterećenjem i slobodno oslonjenih na jednoj, dvije, tri ili četiri strane. Dvoznamenkasti broj iza broja 1300 označava godinu izdanja, u ovom slučaju je to 2003. Obuhvaćeni su svi tipovi stakla (obično, temperirano, toplinski ojačano i lamelirano) kao i pojedinačna i izolacijska stakla. U izrazima za nosivost stakla inkorporirani su faktori površinski oštećenog stakla koje je nekoliko godina u upotrebi (sa sitnim abrazijama na površini izloženoj vanjskim utjecajima).

Standardom se određuje nosivost pojedine staklene plohe određene debljine:

$$LR = GT \cdot LS \cdot NFL$$

*LR* – load resistance, nosivost kPa

*GT* – glass type factor, faktor tipa stakla

*LS* – load share factor, faktor raspodjele opterećenja (samo za izolacijsko staklo)

*NFL* – non-factored load, nefaktorirano opterećenje u kPa

*Faktor tipa stakla (GT)* je koeficijent koji određuje ponašanje pojedinog tipa stakla, običnog, toplinski ojačanog ili temperiranog. Dan je posebno za monolitno i posebno za lamelirano staklo i to za kratkotrajno (do 60 sec) i za dugotrajno opterećenje (do 30 dana).

*Faktor raspodjele opterećenja (LS)* je koeficijent za raspodjelu opterećenja prema krutostima. Odnosi se na izolacijsko staklo koje je sastavljeno od dvije staklene površine koje dijeli vakuum.

*Nefaktorirano opterećenje (NFL)* odabire se iz posebno izrađenih dijagrama. Za pojedinu debljinu, širinu i visinu stakla određen je faktor *NFL*. Dijagrami nefaktoriranog opterećenja izrađeni su ne temelju modela zakazivanja stakla (eng. failure prediction model for glass). Model dozvoljava određenu vjerojatnost loma stakla koja je zadana sa dva parametra površinskih pukotina, *m* i *k*. Ta dva faktora variraju ovisno o stanju staklene površine. Kod izrade dijagrama korištene su slijedeće vrijednosti za *m* i *k*:

$$m = 7$$

$$k = 2.86 \cdot 10^{-53} N^7 m^{12}$$

Ove vrijednosti parametara odgovaraju staklu koje je izloženo vanjskim utjecajima oko 20 godina. Model zakazivanja stakla sadrži i ostale faktore koji utječu na čvrstoću stakla kao npr. trajanje opterećenja i geometrija ploče.

Vjerojatnost loma koja je obuhvaćena u ovom standardu je 8/1000 (preporučljivo za vertikalno ostakljivanje).

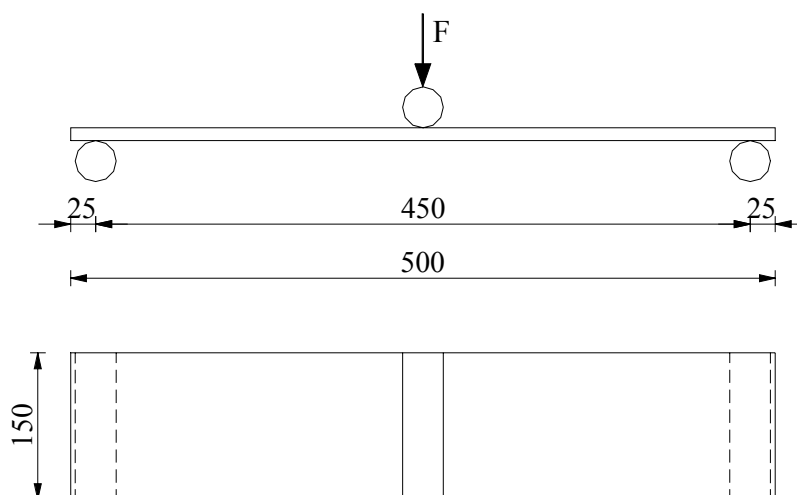
## 4 LABORATORIJSKO ISPITIVANJE STAKLENE PLOČE

Ispitivanje staklene ploče izvršeno je u laboratoriju Instituta građevinarstva Hrvatske u Rijeci. Korištena je hidraulična preša i ekstenziometar putem kojeg su bilježeni pomaci ploče. Za svaki od uzoraka dobiven je dijagram napon – deformacija.

Ispitani su uzorci slijedećih dimenzija:

150 x 500 x 6 mm	- obično staklo
150 x 500 x 8 mm	- obično staklo
150 x 500 x 5 + 5 mm	- lamelirano obično staklo sa PVB folijom
150 x 500 x 15 mm	- obično staklo

Staklo je oslonjeno na dva kraja a opterećenje je nanošeno preko valjka kao koncentrirana sila u sredini raspona:



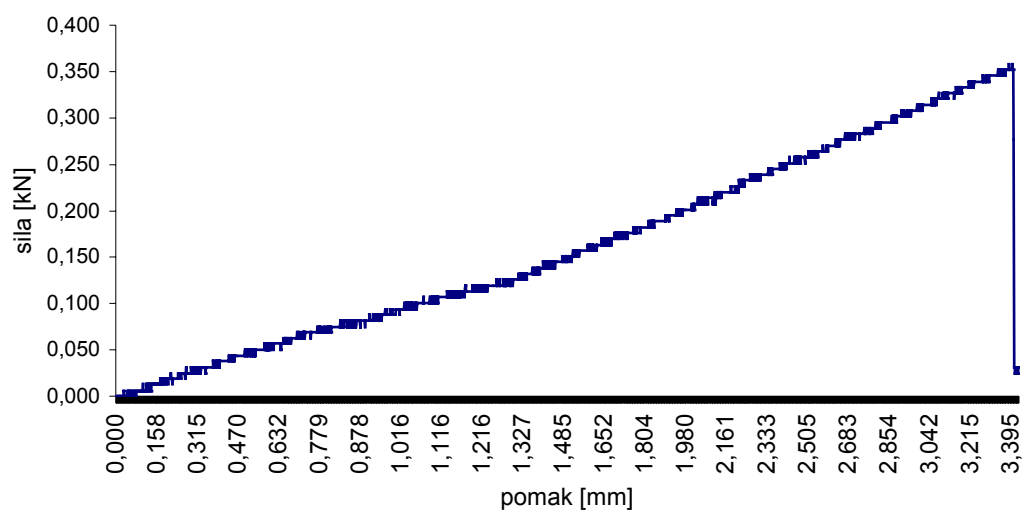
slika 12.

#### 4.1 REZULTATI ZA STAKLO DEBLJINE 6 MM

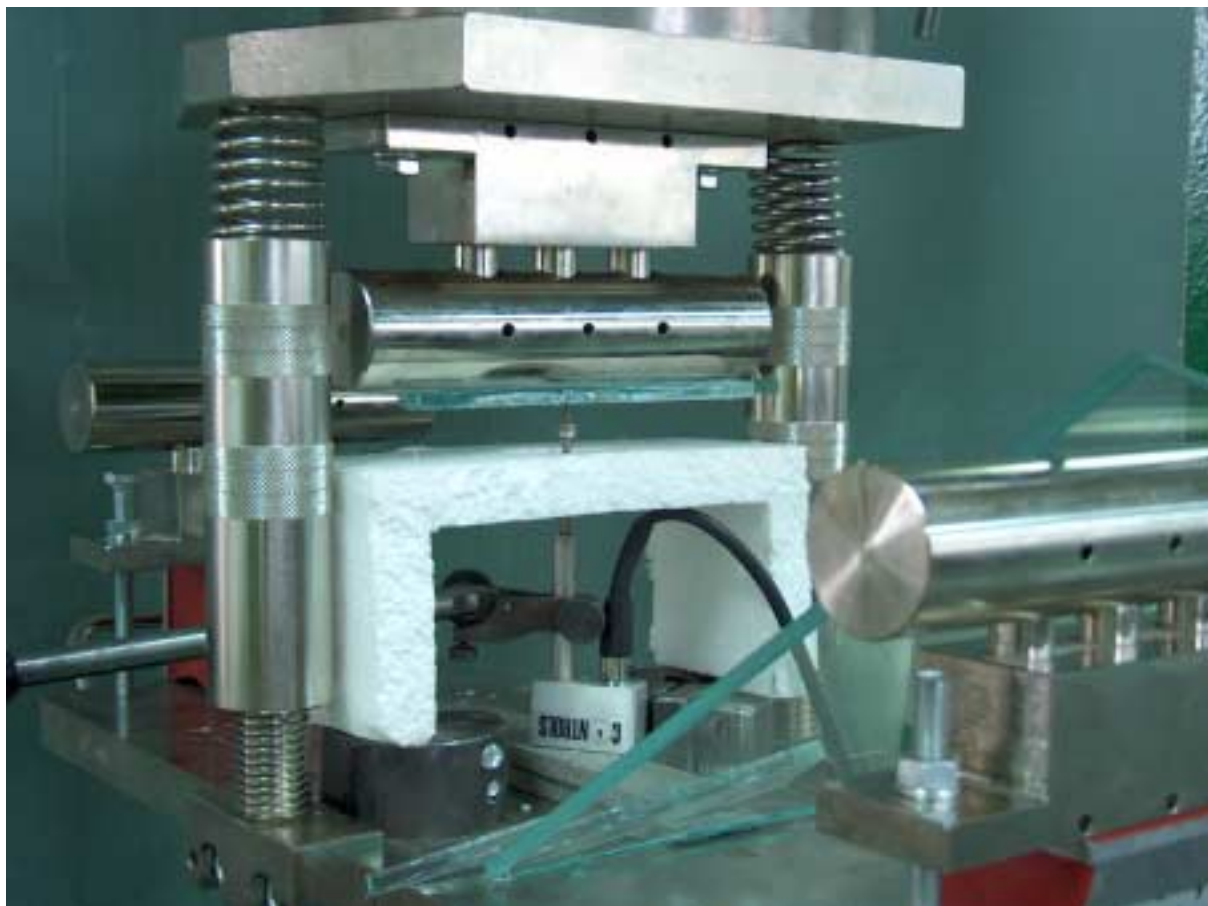


Brzina nanošenja opterećenja: 0.3 mm/min

Staklo 6 mm



Sila loma: 0.358 kN  
 Odgovarajući pomak: 3.401 mm

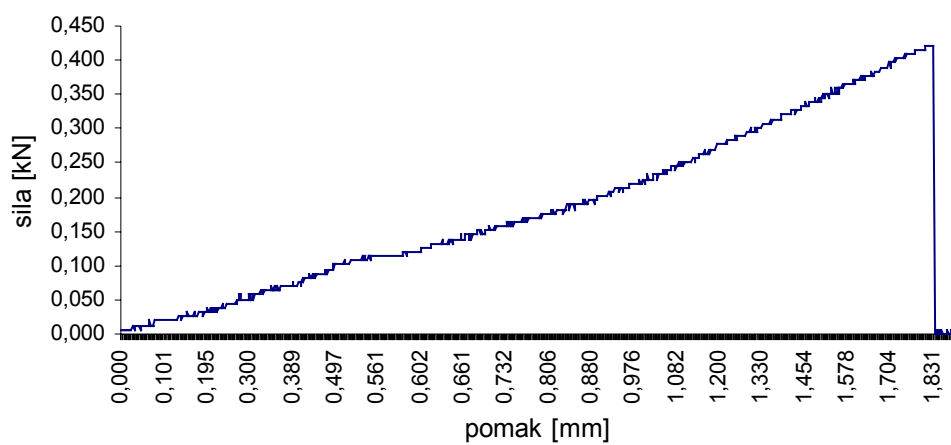


## 4.2 REZULTATI ZA STAKLO DEBLJINE 8 MM



Brzina nanošenja opterećenja: 0.3 mm/min

**Staklo 8 mm**



Sila loma: 0.421 kN  
Odgovarajući pomak: 1.834 mm



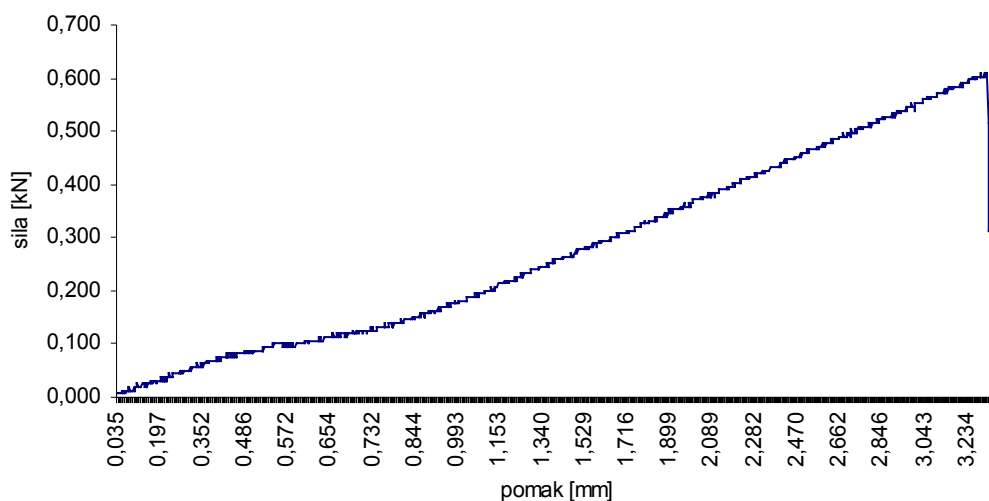


### 4.3 REZULTATI ZA LAMELIRANO STAKLO DEBLJINE 5+5 MM

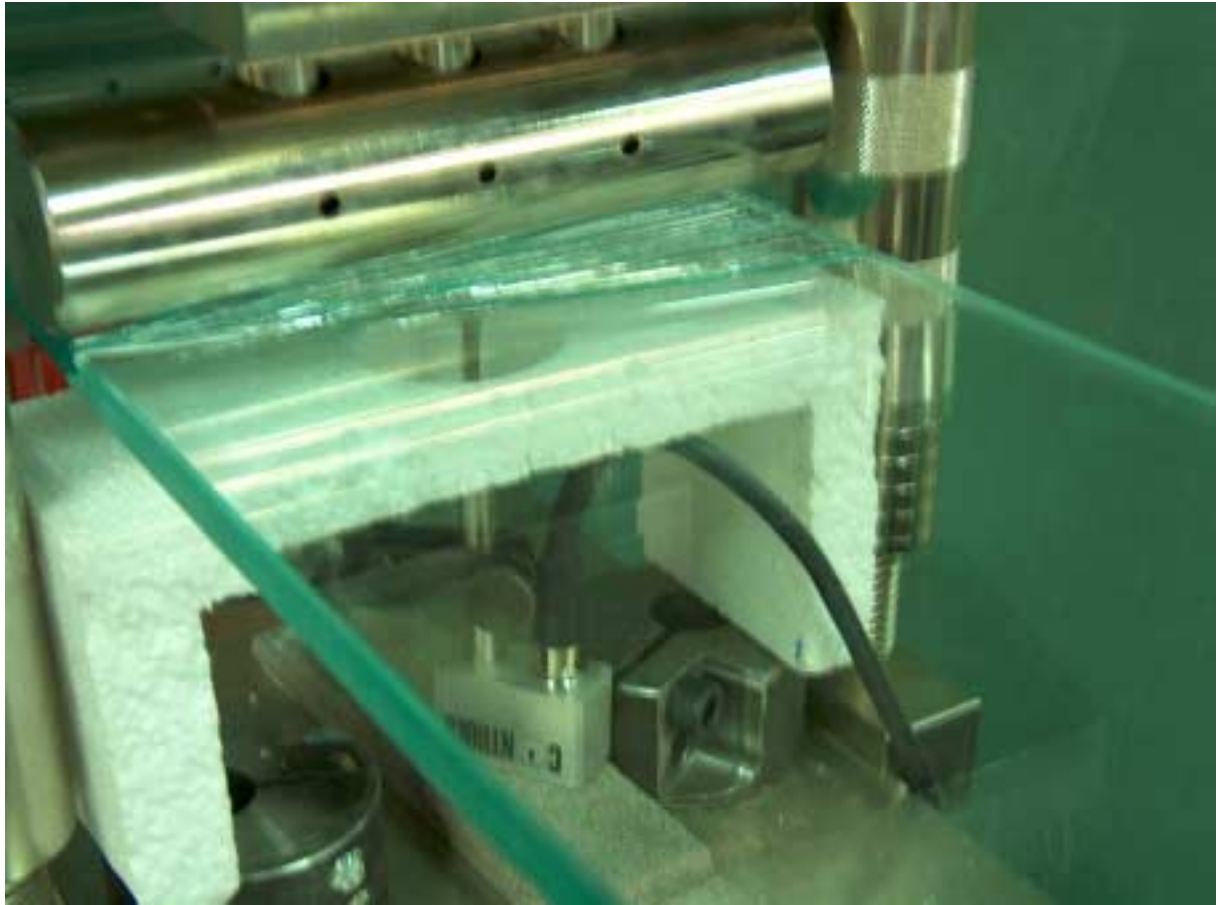


Brzina nanošenja opterećenja: 0.3 mm/min

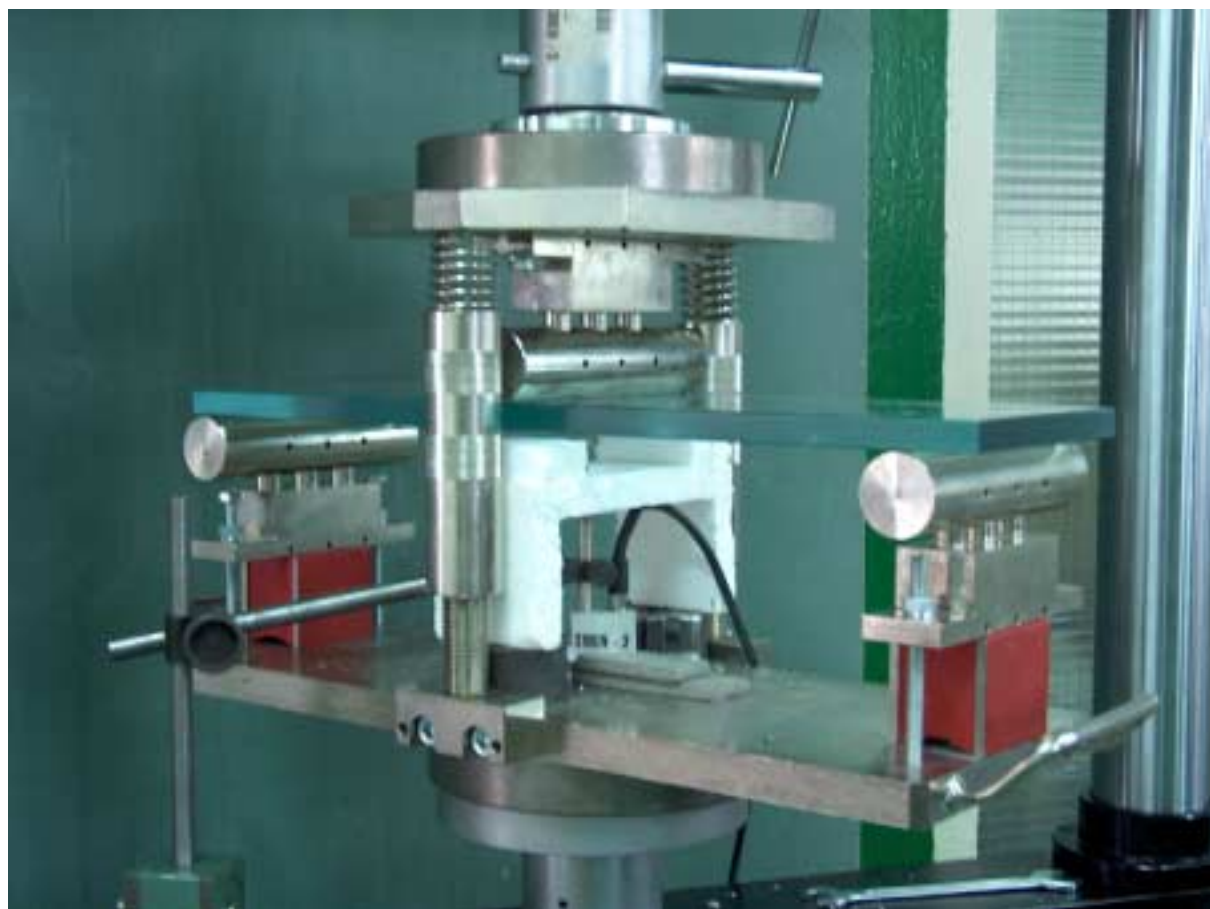
Lamelirano staklo 5+5 mm



Sila loma: 0.610 kN  
Odgovarajući pomak: 3.332 mm

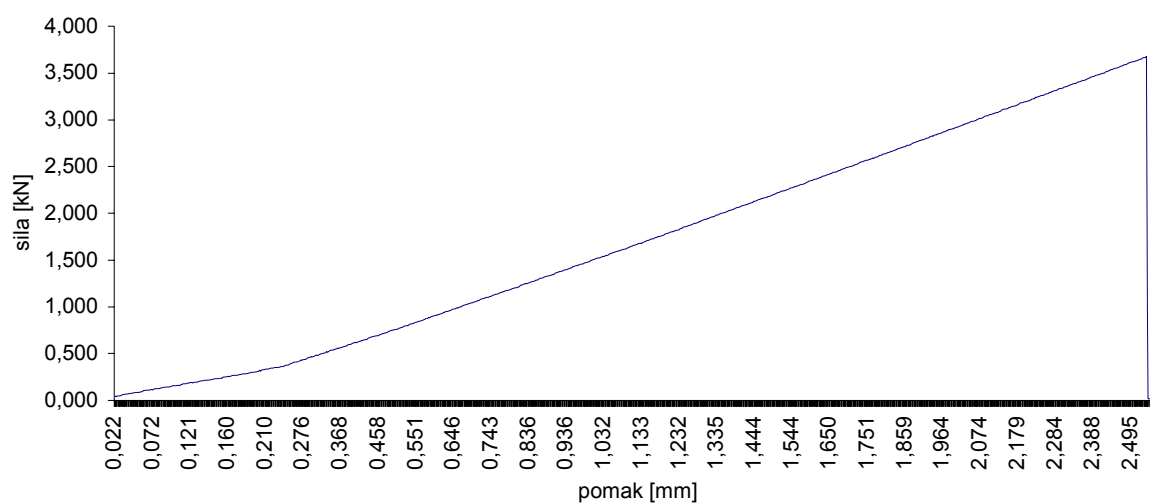


### 4.4 REZULTATI ZA STAKLO DEBLJINE 15 MM

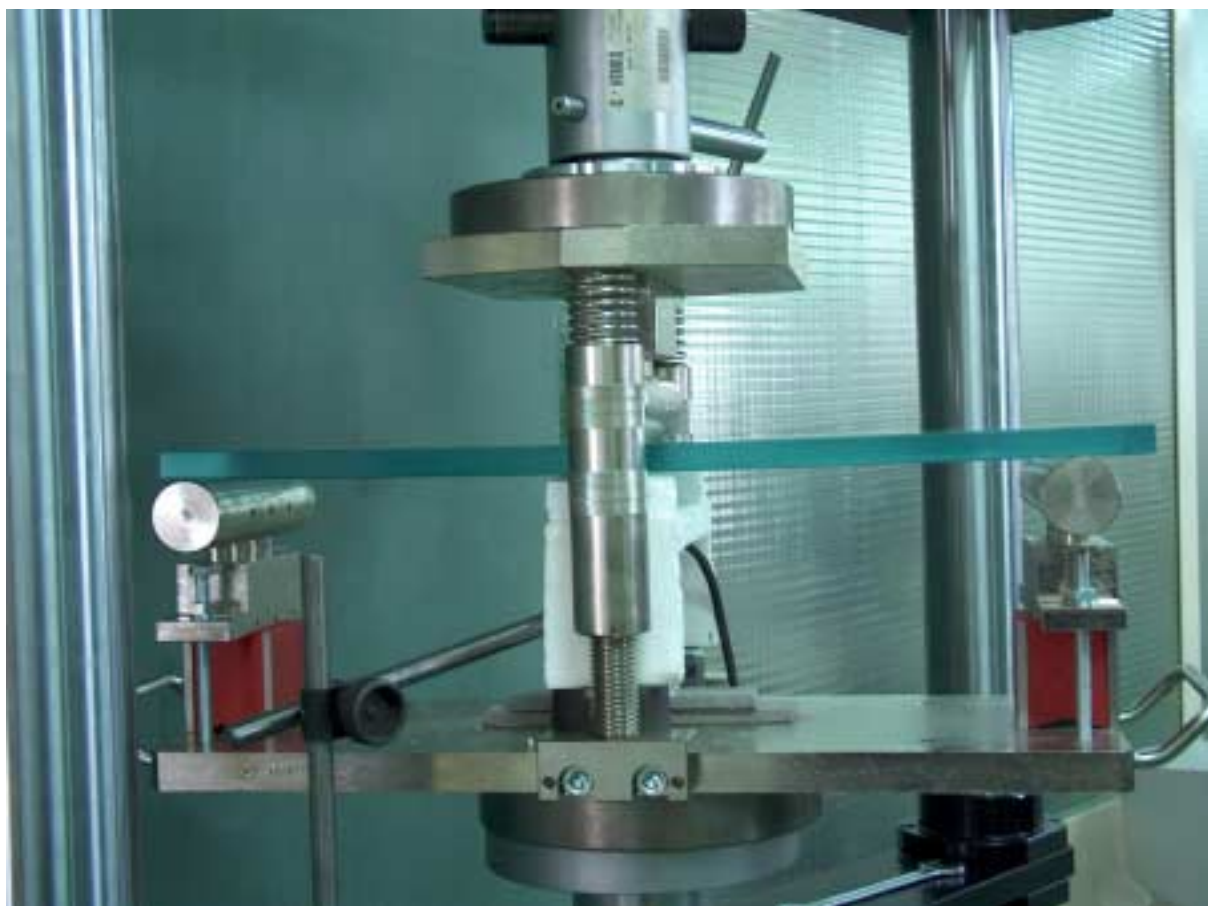


Brzina nanošenja opterećenja: 0.3 mm/min

Staklo 15 mm



Sila loma: 3.677 kN  
 Odgovarajući pomak: 2.539 mm



## 4.5 ANALIZA REZULTATA

Za svaki od četiri uzoraka odrediti će se modul elastičnosti na slijedeći način: statički sustav ploče je prosta greda sa koncentriranom silom u sredini raspona. Modul elastičnosti slijedi iz poznatog izraza za pomak u sredini raspona:

$$f = \frac{Pl^3}{48EI} \Rightarrow E = \frac{Pl^3}{48If}$$

Sila loma usporediti će se sa vrijednostima sila loma određene prema srednjem naponu loma ( $\sigma_{\text{loma}}$ ) za obično i kaljeno staklo na slijedeći način: maksimalni moment savijanja grede je  $M = Pl/4$ . Naponi uslijed savijanja su  $\sigma = M/W = Pl/4W$ , gdje je  $W$  moment otpora grede. Slijedi sila loma  $P_{\text{loma}} = 4W\sigma_{\text{loma}}/l$ .

### 4.5.1. Staklo debljine 6 mm

MODUL ELASTIČNOSTI	SILA LOMA
Modul elastičnosti ispitivanog uzorka: $P_{\text{loma}} = 358 \text{ N}$ $l = 450 \text{ mm}$ $I = 150 \cdot 6^3 / 12 = 2700 \text{ mm}^4$ $f = 3.401 \text{ mm}$  $E = \frac{358 \cdot 450^3}{48 \cdot 2700 \cdot 3.401} = 74013 \text{ MPa}$	Sila loma ispitivanog uzorka: $P_{\text{loma}} = 358 \text{ N}$
Vrijednost modula elastičnosti koji se navodi u literaturi: $E_{\text{stakla}} = 70000\text{-}74000 \text{ N/mm}^2$	Sila loma prema srednjem neponu loma stakla: $\sigma_{\text{loma}} = 41.3 \text{ MPa}$ $W = 150 \cdot 6^2 / 6 = 900 \text{ mm}^3$ $l = 450 \text{ mm}$  $P_{\text{loma}} = 4 \cdot 900 \cdot 41.3 / 450 = 330 \text{ N}$

## 4.5.2. Staklo debljine 8 mm

MODUL ELASTIČNOSTI	SILA LOMA
Modul elastičnosti ispitivanog uzorka: $P_{\text{loma}} = 421 \text{ N}$ $l = 450 \text{ mm}$ $I = 150 \cdot 8^3 / 12 = 6400 \text{ mm}^4$ $f = 1.834 \text{ mm}$  $E = \frac{421 \cdot 450^3}{48 \cdot 6400 \cdot 1.834} = 68092 \text{ MPa}$	Sila loma ispitivanog uzorka: $P_{\text{loma}} = 421 \text{ N}$
Vrijednost modula elastičnosti koji se navodi u literaturi: $E_{\text{stakla}} = 70000\text{-}74000 \text{ N/mm}^2$	Sila loma prema srednjem neponu loma stakla: $\sigma_{\text{loma}} = 41.3 \text{ MPa}$ $W = 150 \cdot 8^2 / 6 = 1600 \text{ mm}^3$ $l = 450 \text{ mm}$  $P_{\text{loma}} = 4 \cdot 1600 \cdot 41.3 / 450 = 587 \text{ N}$

### 4.5.3. Lamelirano staklo 5+5 mm

Krutost lameliranog stakla zavisi o posmičnoj otpornosti veze staklene plohe i PVB folije. U praksi se za kratkotrajno opterećenje (vjetar) takva veza smatra krutom pa se moment inercije računa kao za monolitno staklo. Kod dugotrajnog opterećenja (snijeg) dolazi do relaksacije plastične folije te ona nije u mogućnost prenijeti vlačna naprezanja u svojoj ravnini. U tom slučaju moment inercije stakla računa se kao zbroj momenata inercije pojedinih staklenih ploha. Za ispitanu staklenu ploču izračunati ćemo moment inercije uzimajući u obzir modul elastičnosti 70000 i 74000 MPa.

E = 70000 Mpa	E = 74000 MPa
$P_{\text{loma}} = 610 \text{ N}$ $l = 450 \text{ mm}$ $f_{\text{loma}} = 3.332 \text{ mm}$	$P_{\text{loma}} = 610 \text{ N}$ $l = 450 \text{ mm}$ $f_{\text{loma}} = 3.332 \text{ mm}$
$I = \frac{Pl^3}{48Ef}$	$I = \frac{Pl^3}{48Ef}$
$I = \frac{610 \cdot 450^3}{48 \cdot 70000 \cdot 3.332} = 4965 \text{ mm}^4$	$I = \frac{610 \cdot 450^3}{48 \cdot 74000 \cdot 3.332} = 4697 \text{ mm}^4$

Za monolitni presjek moment inercije je:  $I = \frac{150 \cdot 10^3}{12} = 12500 \text{ mm}^4$ . Koeficijent umanjenja momenta inercije zbog podatljivosti veze, za modul elastičnosti od 70000 do 74000 MPa kreće se od  $4965/12500=0.397$  do  $4697/12500=0.376$ .

Ako uzmemo u obzir oba koeficijenta umanjenja od 0.397 i 0.376 sila loma za srednji napon loma iznosi :

$$1) \quad k = 0.397$$

$$I = 0.397 \cdot 12500 = \frac{150 \cdot h^3}{12}$$

$$\text{zamjenjujuća visina nosača} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 0.397 \cdot 12500}{150}} = 7.35 \text{ mm}$$

$$W = \frac{150 \cdot 7.35^2}{6} = 1351 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{\text{loma}} = 41.3 \text{ MPa}$$

$$l = 450 \text{ mm}$$

$$P_{\text{loma}} = 4 \cdot 1351 \cdot 41.3 / 450 = 495 \text{ N}$$

$$2) \quad k = 0.376$$

$$I = 0.376 \cdot 12500 = \frac{150 \cdot h^3}{12}$$

$$\text{zamjenjujuća visina nosača} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 0.376 \cdot 12500}{150}} = 7.22 \text{ mm}$$

$$W = \frac{150 \cdot 7.22^2}{6} = 1303 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{\text{loma}} = 41.3 \text{ MPa}$$

$$l = 450 \text{ mm}$$

$$P_{\text{loma}} = 4 \cdot 1303 \cdot 41.3 / 450 = 478 \text{ N}$$

#### 4.5.4. Staklo debljine 15 mm

MODUL ELASTIČNOSTI	SILA LOMA
Modul elastičnosti ispitivanog uzorka: $P_{\text{loma}} = 3677 \text{ N}$ $l = 450 \text{ mm}$ $I = 150 \cdot 15^3 / 12 = 42187.5 \text{ mm}^4$ $f = 2.539 \text{ mm}$  $E = \frac{3677 \cdot 450^3}{48 \cdot 42187.5 \cdot 2.539} = 65169 \text{ MPa}$	Sila loma ispitivanog uzorka: $P_{\text{loma}} = 3677 \text{ N}$
Vrijednost modula elastičnosti koji se navodi u literaturi: $E_{\text{stakla}} = 70000 - 74000 \text{ N/mm}^2$	Sila loma prema srednjem neponu loma stakla: $\sigma_{\text{loma}} = 41.3 \text{ MPa}$ $W = 150 \cdot 15^2 / 6 = 5625 \text{ mm}^3$ $l = 450 \text{ mm}$  $P_{\text{loma}} = 4 \cdot 5625 \cdot 41.3 / 450 = 2065 \text{ N}$



## 5 GEOMETRIJSKA NELINEARNOST PO METODI KONAČNIH TRAKA

### 5.1 UVOD

Kod dimenzioniranja konstrukcija linearni proračun ne daje uvijek rezultate koji odgovaraju stvarnom ponašanju konstrukcije. Da bi rezultati bili što bliži realnosti, ponekad se primjenjuje nelinearni proračun. Tu razlikujemo *materijalnu* i *geometrijsku nelinearnost*.

Materijalna nelinearnost podrazumijeva nelinearni odnos napona i deformacija. Ta metoda koristi se naprimjer kod proračuna čeličnih papuča kod kojih u okolici ležajeva dolazi do prekoračenja granice elastičnosti te nastupa tečenje materijala i preraspodjela naprezanja.

Geometrijska nelinearnost podrazumijeva promjenu jednažbi ravnoteže nakon što konstrukcija doživi određenu deformaciju. To je značajno za proračun tankih ploča gdje je značajan utjecaj membranskih sila. Naravno, rubni uvjeti moraju biti takvi da se omogući prihvaćanje membranskih sila.

Kod nelinearne analize, zbog nelinearnog odnosa deformacije i pomaka ili naprezanja i deformacije, matrica krutosti postaje funkcijom pomaka. Jednažbe ravnoteže konstrukcije poprimaju slijedeći oblik:

$$[K(\{\delta\})] \{\delta\} - \{P\} = 0$$

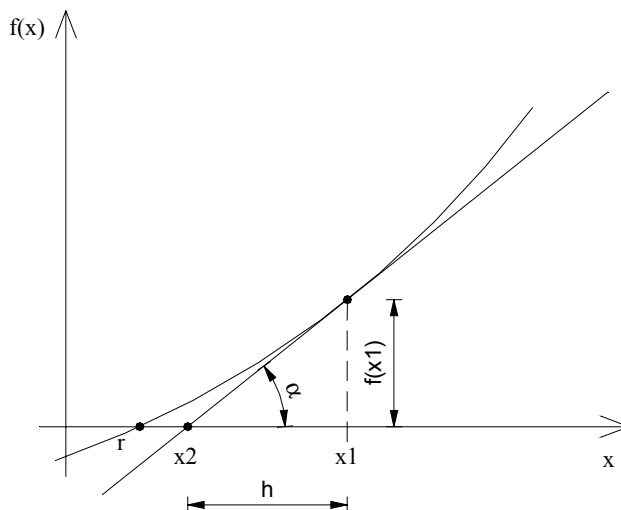
Sa lijeve strane jednažbe prvi izraz predstavlja otpor konstrukcije a drugi opterećenje. Ova jednažba može se riješiti metodom iteracije. U svakoj iteraciji matrica krutosti se ažurira prema pomacima dobivenim u prethodnoj iteraciji. Taj postupak se nastavlja sve dok se greška ne smanji do neke zadovoljavajuće male veličine.

Jedna od najčešće upotrebljivanih metoda za nelinearni proračun je *Newton-Raphsonova metoda*.

## 5.2 NEWTON-RAPHSONOVA METODA

Općenito, pomoću te metode pronalazimo nulu pojedine funkcije  $f(x)$  tako da funkciju aproksimiramo tangentama.

Neka je "r" nula funkcije  $f(x)$  tako da je  $f(r)=0$ .



slika 13. Newton-Raphsonova metoda

Odaberimo  $x_1$  na pravcu  $x$  i izračunajmo tangentu funkcije  $f(x)$  u točki  $x_1$ ,  $f'(x_1)$ .  $f'(x_1)$  sječe pravac  $x$  u točki  $x_2$  koja je bliža točki  $r$  nego  $x_1$ .  $x_2$  izračunamo na slijedeći način:

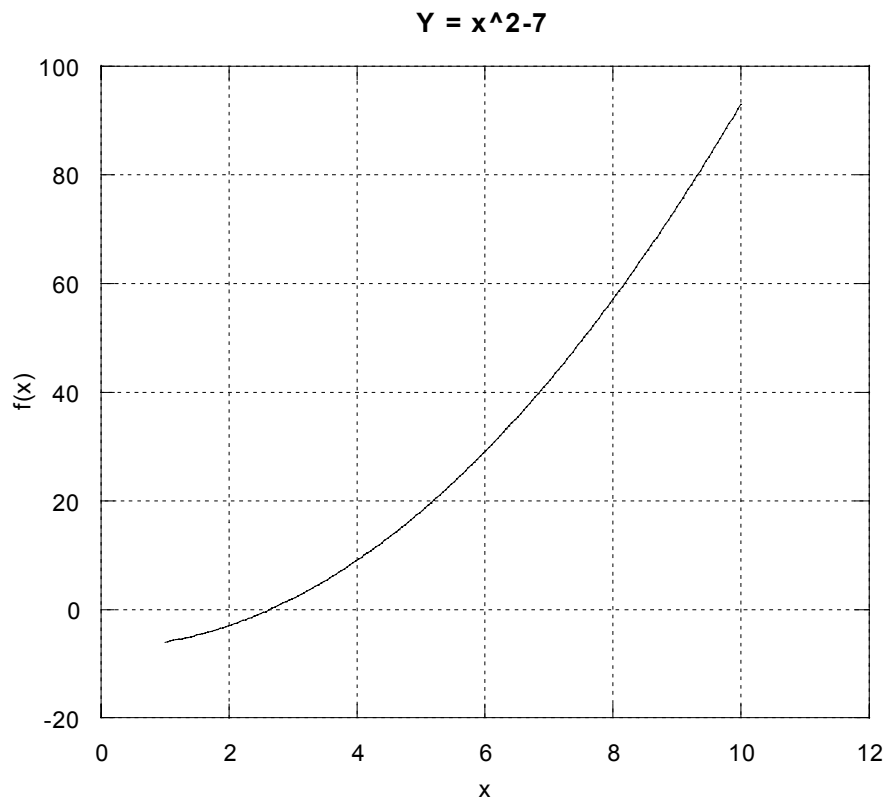
prema slici 17. imamo 
$$x_2 = x_1 - h = x_1 - \frac{f(x_1)}{\operatorname{tg}\alpha} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

nastavimo li postupak do  $x_n$  dobivamo 
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
 gdje je  $x_n$  aproksimacija broja

$r$ .

Primjer:

Potrebno je pronaći korjen broja 7.  $r = \sqrt{7}$  je nula funkcije  $f(x) = x^2 - 7$ .



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 7}{2 \cdot x_n}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 2.75$$

$$x_3 = 2.647727273$$

$$x_4 = 2.645752049$$

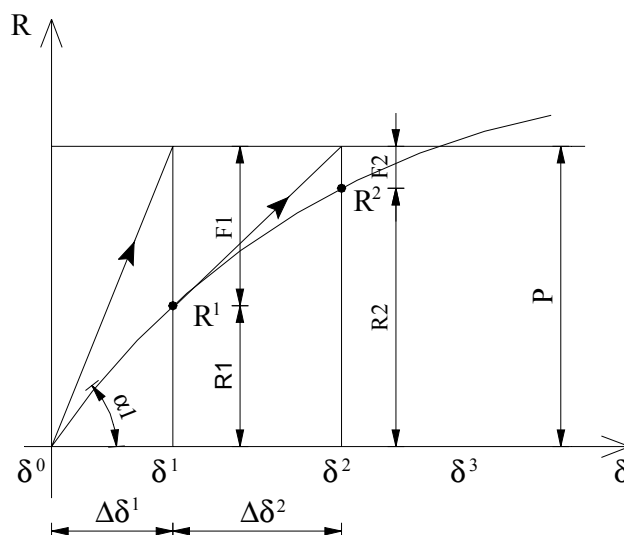
$$x_5 = 2.645751311$$

Kod broja  $x_5 = 2.645751311$  rezultat se stabilizirao i to je dovoljno točna aproksimacija korijena broja 7.

U metodi konačnih traka Newton-Raphsonova metoda naziva se i metoda tangencijalne matrice krutosti (eng. tangential stiffness method). Naime, pomoću te metode matrica krutosti koja je ovisna o pomaku iterativnim postupkom aproksimira se tangentama.

Ukupno opterećenje aplicira se u nekoliko koraka a tijekom svakog koraka rješava se niz linearnih problema koji su aproksimacija točnog rješenja. Kada se dođe do zadovoljavajuće točnosti prelazi se na slijedeći korak opterećenja. Postupak se nastavlja do krajnjeg koraka koji predstavlja ukupno opterećenje na konstrukciju.

Iterativni postupak koji se primijenjuje tijekom pojedinog koraka opterećenja pojašnjen je na slijedećoj skici...



slika 14. Iterativni postupak – Newton-Raphsonova metoda

U prvom koraku pronalazimo pomak konstrukcije  $\{\delta\}^1$  uzimajući u obzir krutost nedeformirane konstrukcije. Odgovarajući otpor konstrukcije  $\{R\}^1$  zavisi o pomaku  $\{\delta\}^1$  i iznosi:

$$\{R\}^1 = \{R(\{\delta\}^1)\} = [K] \{\delta\}^1$$

Razlika između otpora sistema  $\{R\}^1$  i vanjskog opterećenja naziva se neuravnoteženo opterećenje:

$$\{F\}^1 = \{P\} - \{R\}^1$$

Do uravnoteženja sistema konstrukcija se i dalje deformira a otpori se aproksimiraju na slijedeći način:

$$R_i = R_i^1 + \left( \frac{\partial R_i}{\partial \{\delta\}} \right)^T \Delta \{\delta\}$$

Tu je  $R_i$  i-ta komponenta otpora  $R$  a  $\left( \frac{\partial R_i}{\partial \{\delta\}} \right)$  je derivacija  $R_i$  po pomaku izračunatom u prvom koraku,  $\{\delta\}^1$ . Nelinearni sistem se tako aproksimira linearnim sistemom:

$$\{R\} = \{R\}^1 + [K_T] \Delta \{\delta\}$$

$[K_T]$  naziva se tangencijalna matrica krutosti i izračunava se deriviranjem otpora po pomaku. U daljnjem proračunu sistem se usavršava poboljšanom aproksimacijom:

$$\{\delta\}^2 = \{\delta\}^1 + \Delta\{\delta\}^2 = \{\delta\}^1 + \frac{\{F\}^1}{\text{tg}\alpha_1} = \{\delta\}^1 + \frac{\{F\}^1}{\frac{\partial\{R\}^1}{\partial\{\delta\}}} = \{\delta\}^1 + [K_T]^{-1} (\{P\} - \{R\}^1)$$

$$\{\delta\}^2 = \{\delta\}^1 + [K_T]^{-1} (\{P\} - \{R\}^1)$$

Isti proračun ponavlja se i dalje iterativnim postupkom:

$$\{\delta\}^k = \{\delta\}^{k-1} + [K^{k-1}_T]^{-1} (\{P\} - \{R\}^{k-1})$$

Iteracija se prekida kada greška  $\Delta\{\delta\} = \{\delta\}^k - \{\delta\}^{k-1}$  postaje beskonačno mala.

### 5.3 MODIFICIRANA NEWTON-RAPHSONOVA METODA

Modificirana Newton-Raphsonova metoda nastala je da bi se izbjegao proračun novog sistema jednažbi u svakom idućem koraku iteracije. U ovoj metodi koristi se slejedeća aproksimacija

$$[K_T] = [K]$$

Tangencijalna matrica krutosti izjednačava se sa elastičnom matricom krutosti. Iz toga slijedi:

$$\{\delta\}^k = \{\delta\}^{k-1} + [K]^{-1} (\{P\} - \{R\}^{k-1})$$

Matrica krutosti se formira i invertira samo jednom.

Jedini problem koji nastaje kod ove metode je spora konvergencija. No to se da riješiti ažuriranjem  $[K_T]$  svakih 5 do 10 koraka ili uvođenjem korektivnog faktora.

### 5.4 INKREMENTALNA METODA

Ova metoda se upotrebljava da se izbjegne moguća divergencija kada opterećenje u velikoj mjeri nadmašuje linearno ponašanje konstrukcije. U tom se slučaju opterećenje djeli u nekoliko koraka i u svakom od njih primjenjuje se jedna od prethodno navedenih metoda.

## 5.5 PRIMJENA NEWTON-RAPHSONOVE METODE NA METODU KONAČNIH TRAKA

Nelinearni proračun konstrikcije započinjemo izračunom početne matrice krutosti. Izraz za početnu matricu krutosti glasi:

$$[\mathbf{K}_{mn}] = \int [\mathbf{B}]_m^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]_n \, dx \, dy$$

$[\mathbf{B}]$  predstavlja linearnu matricu deformacije i glasi:

$$[\mathbf{B}]_m = \begin{bmatrix} \frac{-1}{b} Y_m^u & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} Y_m^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-X) Y_{m,y}^v & 0 & 0 & 0 & X Y_{m,y}^v & 0 & 0 \\ (1-X) Y_{m,y}^u & \frac{-1}{b} Y_m^v & 0 & 0 & X Y_{m,y}^u & \frac{1}{b} Y_m^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{1m,xx} & -N_{2m,xx} & 0 & 0 & -N_{3m,xx} & -N_{4m,xx} \\ 0 & 0 & -N_{1m,yy} & -N_{2m,yy} & 0 & 0 & -N_{3m,yy} & -N_{4m,yy} \\ 0 & 0 & 2N_{1m,xy} & 2N_{2m,xy} & 0 & 0 & 2N_{3m,xy} & 2N_{4m,xy} \end{bmatrix}$$

$$Y_m^u(y) = \sin \frac{m\pi y}{l}$$

$$Y_m^v(y) = \cos \frac{m\pi y}{l}$$

$$Y_m^w(y) = \sin \frac{(m+1)\pi y}{l}$$

$$X = x/b$$

- za slobodno oslonjenu gredu koja se nad osloncima može micati u horizontalnom smjeru

- za slobodno oslonjenu gredu kojoj je nad osloncima spriječen horizontalni pomak

(b je širina pojedine konačne trake, l dužina)

$$N_{1m} = (1 - 3X^2 + 2X^3) Y_m^w(y)$$

$$N_{2m} = x (1 - 2X + X^2) Y_m^w(y)$$

$$N_{3m} = (3X^2 - 2X^3) Y_m^w(y)$$

$$N_{4m} = x (X^2 - X) Y_m^w(y)$$

$$Y_m^w(y) = \sin \frac{m\pi y}{l}$$

- za slobodno oslonjenu gredu

Matrica  $[\mathbf{B}]_m$  dobivena je uvrštavanjem izraza za pomake u izraz za relativnu deformaciju. Pomaci čvorne linije su:

$$\{\delta\}_m = [u_{im}, v_{im}, w_{im}, \theta_{im}, u_{jm}, v_{jm}, w_{jm}, \theta_{jm}]^T$$

Polje pomaka unutar konačne trake dano je slijedećim izrazima:

$$u = \sum_{m=1}^r ((1-X)u_{im} + Xu_{jm}) Y_m^u(y)$$

$$v = \sum_{m=1}^r ((1-X)v_{im} + Xv_{jm}) Y_m^v(y)$$

$$w = \sum_{m=1}^r (N_{1m} w_{im} + N_{2m} \theta_{im} + N_{3m} w_{jm} + N_{4m} \theta_{jm})$$

Izrazi za relativnu deformaciju glase:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\chi_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

ili:

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \chi_x, \chi_y, \chi_{xy}]^T = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m$$

[D] predstavlja matricu elastičnosti:

$$[D] = \begin{bmatrix} K_x & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_x & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

$$K_x = E_x h / (1 - \nu_x \nu_y)$$

$$K_{xy} = E_{xy} h$$

$$D_x = E_x h^3 / 12 (1 - \nu_x \nu_y)$$

$$D_{xy} = E_{xy} h^3 / 12$$

$$K_y = E_y h / (1 - \nu_x \nu_y)$$

$$K_1 = \nu_x K_x = \nu_y K_y$$

$$D_y = E_y h^3 / 12 (1 - \nu_x \nu_y)$$

$$D_1 = \nu_x D_x = \nu_y D_y$$

(h je debljina ploče.)

Kada smo dobili početnu matricu krutosti možemo izračunati progibe za neko pretpostavljeno opterećenje koje je manje od stvarnog opterećenja. Nakon toga računamo otpor konstrukcije  $\{R\}$  koji je ovisan o dobivenim progibima.  $\{R\}$  predstavlja vanjsko opterećenje koje održava dobiveni progib. Izraz za otpor konstrukcije može se dobiti pomoću principa virtualnog rada.

Rad vanjskog opterećenja je:

$$dW_{ex} = d\{\delta\}_m^T \{R\}_m$$

Rad unutarnjih sila je:

$$\begin{aligned} dW_{in} &= \int d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx dy = \int ([\bar{B}]_m d\{\delta\}_m)^T \{\sigma\} dx dy \\ &= d\{\delta\}_m^T \int [\bar{B}]_m^T \{\sigma\} dx dy \end{aligned}$$

Izjednačavanjem vanjskog i unutarnjeg rada slijedi da je otpor konstrukcije:

$$\{\mathbf{R}\}_m^k = \int [\bar{\mathbf{B}}^k]_m^T \{\sigma\}^k dx dy$$

$k$  predstavlja korak iteracije.  $[\bar{B}]_m$  matrica deformacije koja uključuje i nelinearni utjecaj velikih deformacija. Ona je zbroj linearne matrice deformacije  $[B]_m$  i matrice  $[B_L]_m$  koja uključuje nelinearnost:

$$[\bar{B}]_m = [B]_m + [B_L]_m$$

Kako bismo dobili matricu  $[B_L]_m$  moramo izračunati ikrementalni odnos deformacija – pomak:

$$d\{\varepsilon\} = d[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \chi_x, \chi_y, \chi_{xy}]^T = \sum_{m=1}^r [\bar{B}]_m d\{\delta\}_m$$

Izrazi za deformaciju koja uključuje utjecaj velikih deformacija na uzdužne sile glase:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\chi_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Prirast deformacije  $\varepsilon_x$  je:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= d \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ &= d \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} d \frac{\partial w}{\partial x} = \\ &= \sum_{m=1}^r \left( -\frac{1}{b} du_{im} + \frac{1}{b} du_{jm} \right) Y_m^u(y) + \frac{\partial w}{\partial x} \sum_{m=1}^r \left( \frac{\partial N_{1m}}{\partial x} dw_{im} + \frac{\partial N_{2m}}{\partial x} d\theta_{im} + \frac{\partial N_{3m}}{\partial x} dw_{jm} + \frac{\partial N_{4m}}{\partial x} d\theta_{jm} \right) \end{aligned}$$



$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{m=1}^r \left( \frac{\partial N_{1m}}{\partial x} dw_{im} + \frac{\partial N_{2m}}{\partial x} d\theta_{im} + \frac{\partial N_{3m}}{\partial x} dw_{jm} + \frac{\partial N_{4m}}{\partial x} d\theta_{jm} \right)$$

Na sličan način izračunamo i ostale priraste deformacija te tako dobijemo

$$d\{\varepsilon\} = \sum_{m=1}^r [B]_m d\{\delta\}_m = \sum_{m=1}^r ([B]_m + [B_L]_m) d\{\delta\}_m$$

gdje je:

$$[B_L] = \begin{bmatrix} 0 & w_{,x} N_{1m,x} & w_{,x} N_{2m,x} & 0 & w_{,x} N_{3m,x} & w_{,x} N_{4m,x} \\ 0 & w_{,y} N_{1m,y} & w_{,y} N_{2m,y} & 0 & w_{,y} N_{3m,y} & w_{,y} N_{4m,y} \\ 0 & w_{,x} N_{1m,y} + w_{,y} N_{1m,x} & w_{,x} N_{2m,y} + w_{,y} N_{2m,x} & 0 & w_{,x} N_{3m,y} + w_{,y} N_{3m,x} & w_{,x} N_{4m,y} + w_{,y} N_{4m,x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podznaci  $_{,x}$  i  $_{,y}$  označavaju derivacije po  $x$  i  $y$ :

$$w_{,x} = \sum_{m=1}^r (N_{1m,x} w_{im} + N_{2m,x} \theta_{im} + N_{3m,x} w_{jm} + N_{4m,x} \theta_{jm})$$

$$w_{,y} = \sum_{m=1}^r (N_{1m,y} w_{im} + N_{2m,y} \theta_{im} + N_{3m,y} w_{jm} + N_{4m,y} \theta_{jm})$$

U matričnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{1m,x} & N_{2m,x} & 0 & 0 & N_{3m,x} & N_{4m,x} \\ 0 & 0 & N_{1m,y} & N_{2m,y} & 0 & 0 & N_{3m,y} & N_{4m,y} \end{bmatrix} \{\delta\}_m = \sum_{m=1}^r [G]_m \{\delta\}_m$$

Naponi  $\{\sigma\}$  u izrazu za otpor konstrukcije mogu se izračunati prema izrazu:

$$\{\sigma\}^k = [D] \{\varepsilon\}^k$$

s time da relativna deformacija uključuje i nelinearnost:

$$\{\varepsilon\}^k = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m^k + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right), 0, 0, 0 \right]^T_k$$

Nakon što smo izračunali otpor konstrukcije u prvom koraku, možemo dobiti razliku između dobivenog i stvarnog progiba, tj. grešku:

$$\Delta \delta^{k+1} = [K]^{-1} (\{P\} - \{R\}^k)$$

Ažurirani progibi glase:

$$\{\delta\}^{k+1} = \{\delta\}^k + \Delta \delta^{k+1}$$

[K] predstavlja tangencijalnu matricu krutosti ako koristimo Newton-Raphsonovu metodu ili početna elastična matrica krutosti ako koristimo modificiranu Newton-Raphsonovu metodu. Postupak se nastavlja dok ne dobijemo dovoljno malu grešku:

$$e = \frac{\sqrt{\sum (\Delta \delta_i^{k+1})^2}}{\sqrt{\sum (\delta_i^{k+1})^2}} \cong 0.02$$

### 5.5.1. Tangencijalna matrica krutosti

Tangencijalnu matricu krutosti dobivamo deriviranjem otpora konstrukcije po pomaku  $\{\delta\}_n$ :

$$d\{R\}_m = \int d[\bar{B}]_m^T \{\sigma\} dx dy + \int [\bar{B}]_m^T d\{\sigma\} dx dy = [K_T]_{mn} d\{\delta\}_n$$

$$d\{\sigma\} = [D] d\{\varepsilon\} = [D] [\bar{B}]_n d\{\delta\}_n$$

$$d[\bar{B}]_m = d([B]_m + [B_L]_m) = d[B_L]_m \quad \text{jer } [B]_m \text{ nije ovisna o progibu.}$$

$$d\{R\}_m = \int d[B_L]_m^T \{\sigma\} dx dy + [\bar{K}_T]_{mn} d\{\delta\}_n$$

$$[\bar{K}_T]_{mn} = \int [\bar{B}]_m^T [D] [\bar{B}]_n dx dy$$

Prvi dio izraza  $d\{R\}_m$  predstavlja doprinos uzdužnih sila na krutost savijanja pod pretpostavkom da su uzdužne sile konstantne u odnosu na progibe. u tom se slučaju taj izraz može promijeniti u:

$$\int d[\bar{B}]_m^T \{\sigma\} = [K_G]_{mn} d\{\delta\}_n$$

Tu je  $[K_G]_{mn}$  geometrijska matrica krutosti:

$$[K_G]_{mn} = \int [G]_m \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [G]_n dx dy$$

Matrica  $[G]$  je definirana u prethodnom paragrafu a  $N_x$ ,  $N_y$ , i  $N_{xy}$  su vrijednosti uzdužnih sila.

Slijedi tangencijalna matrica krutosti:

$$[K_T]_{mn} = [\bar{K}_T]_{mn} + [K_G]_{mn}$$

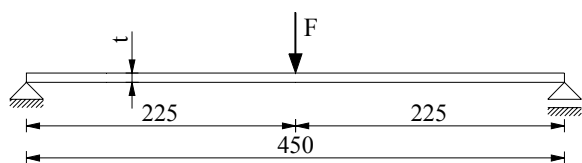
### 5.5.2. Primjer

Primjer nelinearnog proračuna staklene ploče nalazi se u prilogu ovoga magistarskog rada. Proračunata je staklena ploča istih dimenzija kao ona za koju su rađena laboratorijska ispitivanja: 450 x 150 mm a debljine 4mm. Uvjeti oslanjanja predstavljeni su dvama slobodnim osloncima s time da je spriječen horizontalni pomak. Radi usporedbe, za istu gredu napravljen je i linearni proračun. Sila je 300 N. Linearnim proračunom dobiven je pomak od 10 mm dok je nelinearnim proračunom dobiven pomak od 3.352 mm.

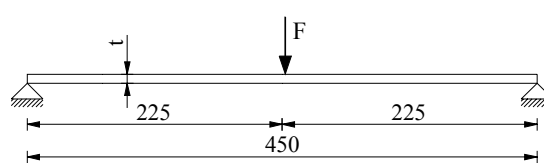
U slijedećem paragrafu napravljeni su i proračuni za istu gredu metodom konačnih elemenata pomoću F.E.M. programa Strauss. Za gredu istih dimenzija i uvjeta oslanjanja (U.O. 2) linearnim proračunom dobiven je pomak od 10.06 mm dok je nelinearnim proračunom dobiven pomak od 3.45 mm. Dobivena razlika u nelinearnom proračunu između dvije metode vjerojatno je uvjetovana postavljanjem nešto većeg praga greške kod metode konačnih traka radi ubrzavanja proračuna.

## 6 ANALIZA NELINEARNOG PONAŠANJA STAKLENE PLOČE

Pomoću F.E.M. softverskog paketa Straus 2.2.5 analizirano je ponašanje staklene ploče pod dva različita uvjeta oslanjanja. Varirana je debljina ploče od 4, 6, 8, 10, 15 i 20 mm a širina i dužina ostale su konstantne, tj. 150 x 450 mm. Za svaku od navedenih debljina izvršen je linearni i nelinearni proračun za slijedeće uvjete oslanjanja grede:



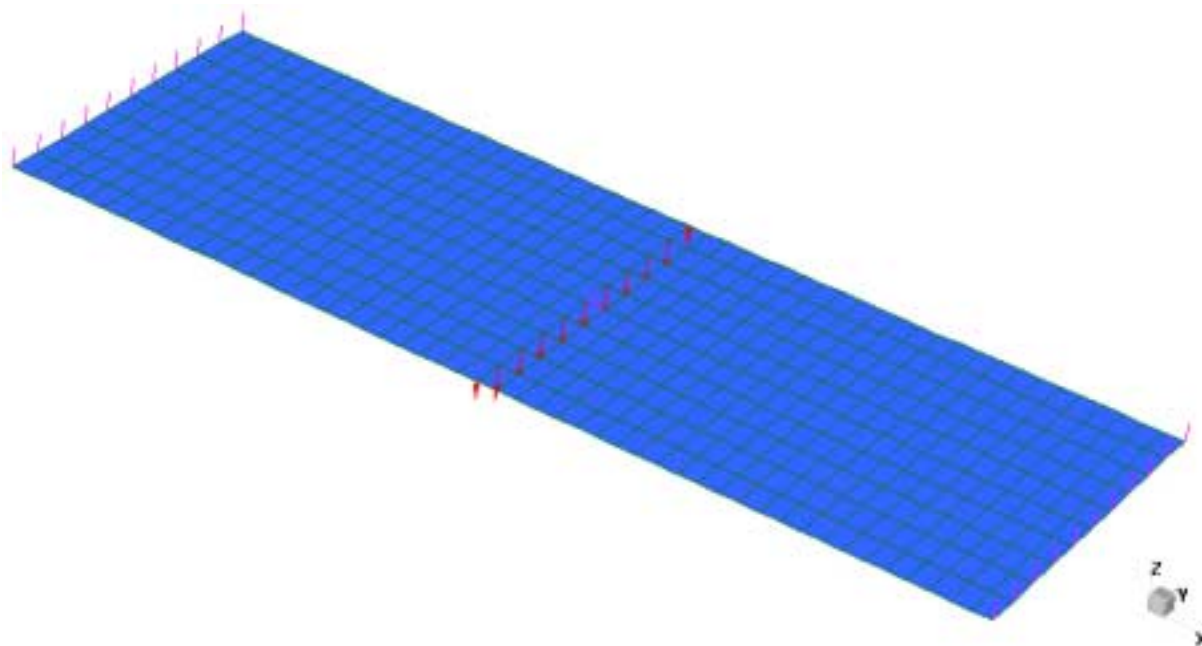
slika 15. slobodno oslonjena greda



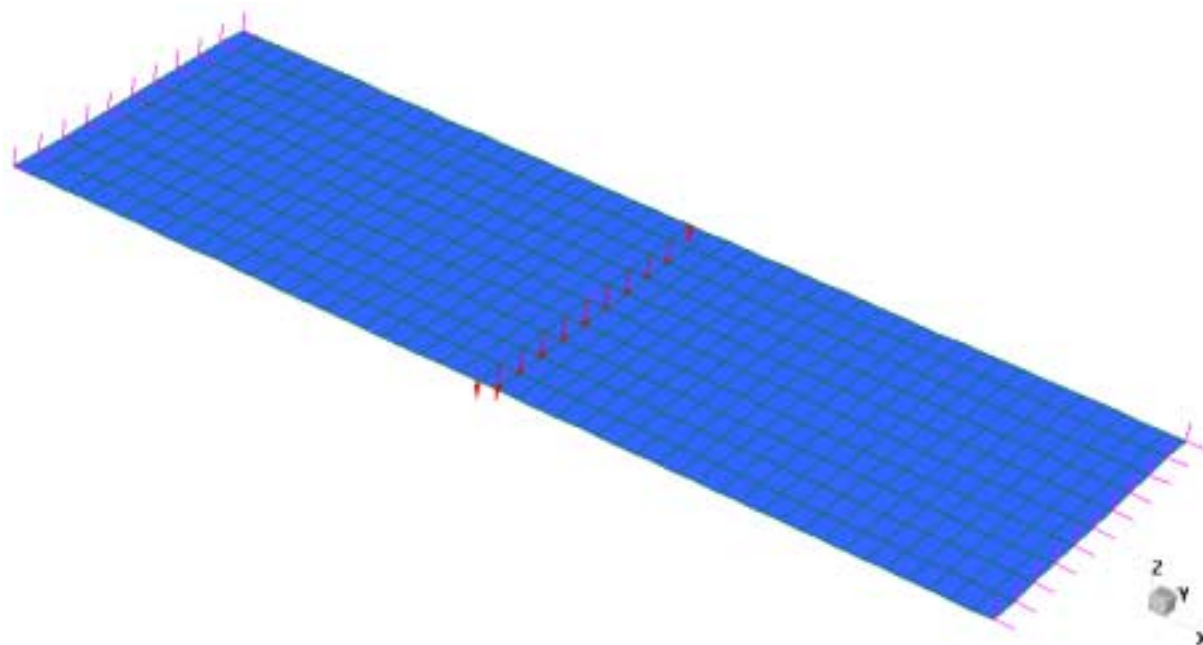
slika 16. greda sa spriječenim horizontalnim pomacima

### 6.1 MODEL PLOČE

Model ploče sa dva uvjeta oslanjanja prikazan je na slijedećim slikama:



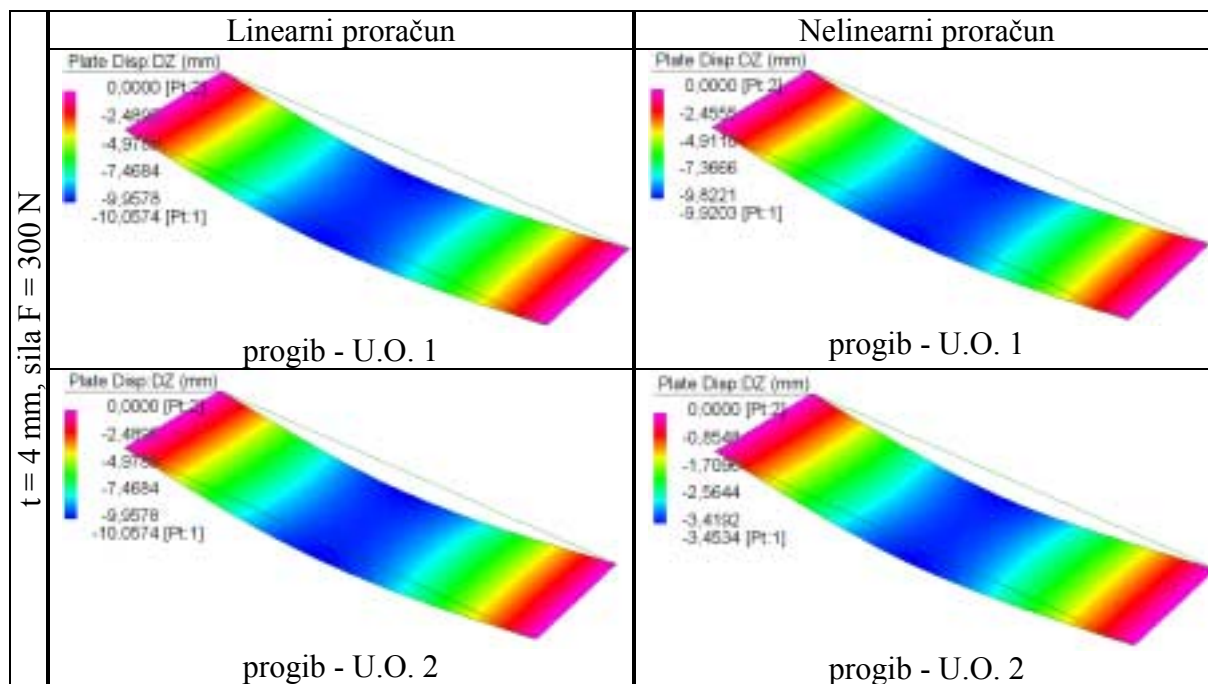
slika 17. slobodno oslonjena ploča – U.O. 1 (uvjet oslanjanja 1)



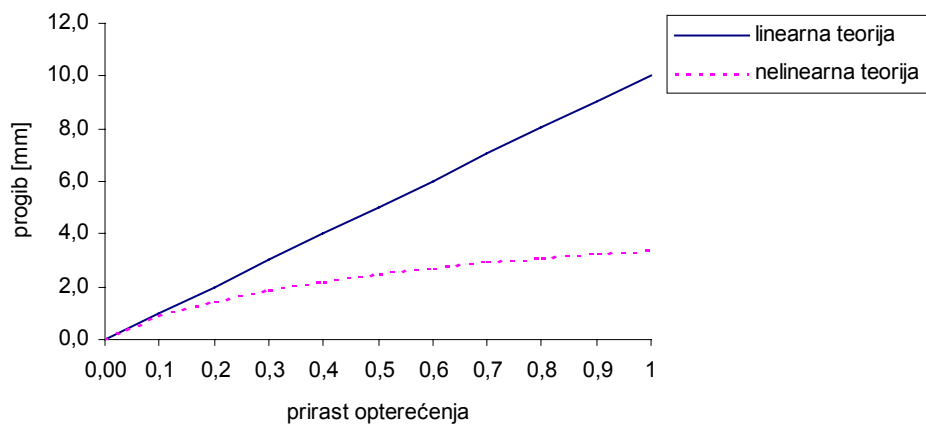
slika 18. ploča sa spriječenim horizontalnim pomacima – U.O. 2 (uvjet oslanjanja 2)

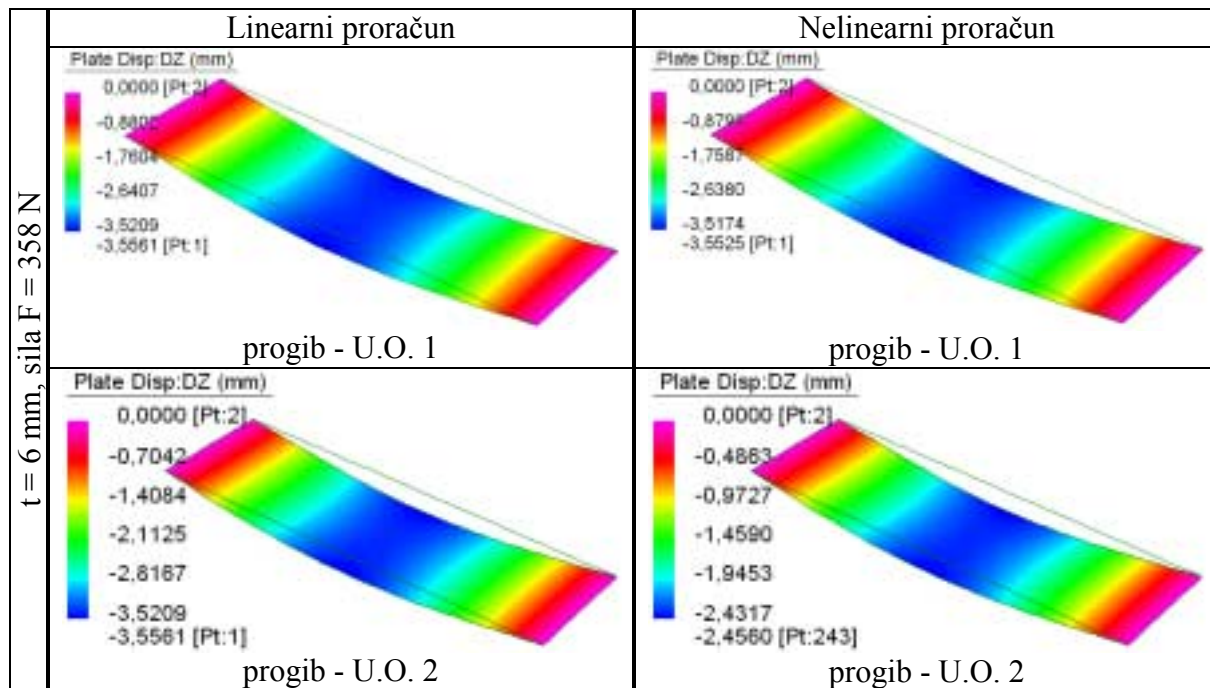
Sila je raspoređena ravnomjerno po čvorovima u sredini raspona. Za ploče koje su ispitane upotrebljena je sila loma kao opterećenje.

## 6.2 PRORAČUN

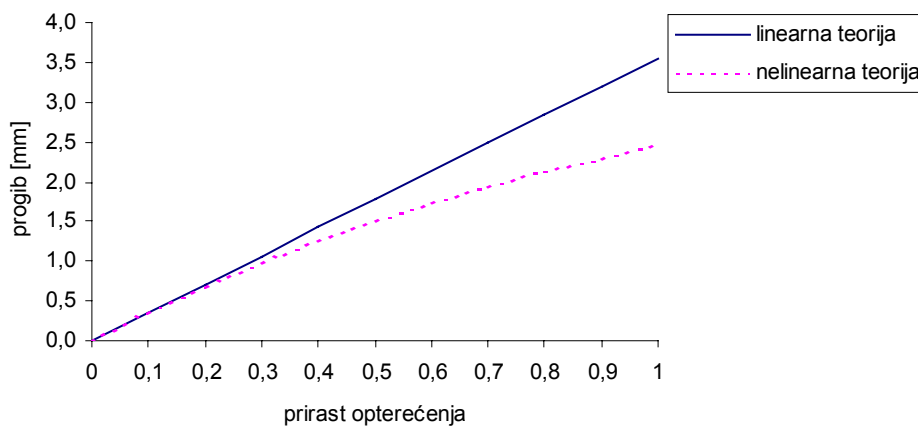


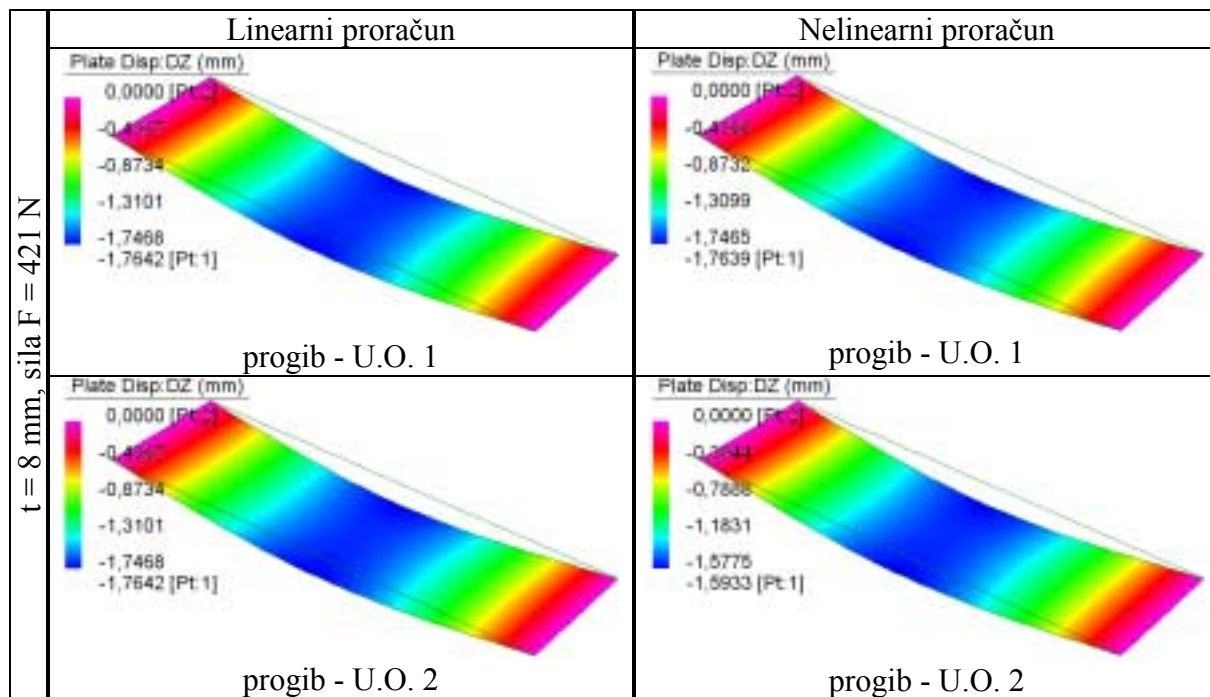
Staklo 4 mm, U.O. 2



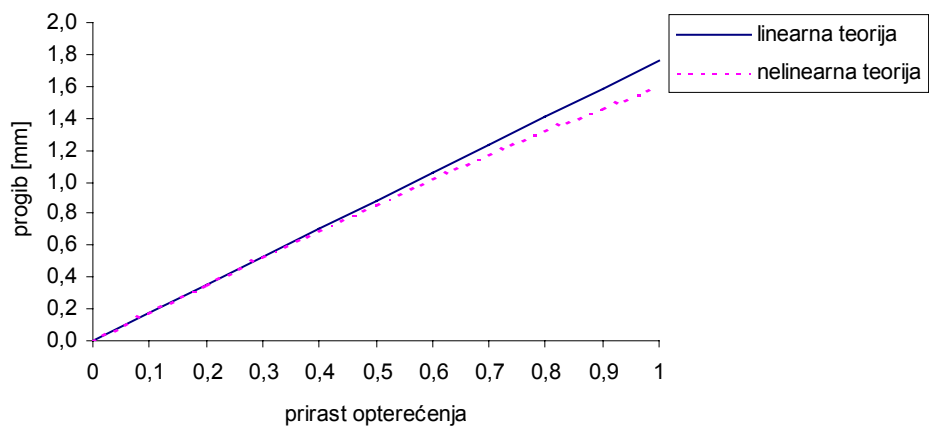


Staklo 6 mm, U.O. 2

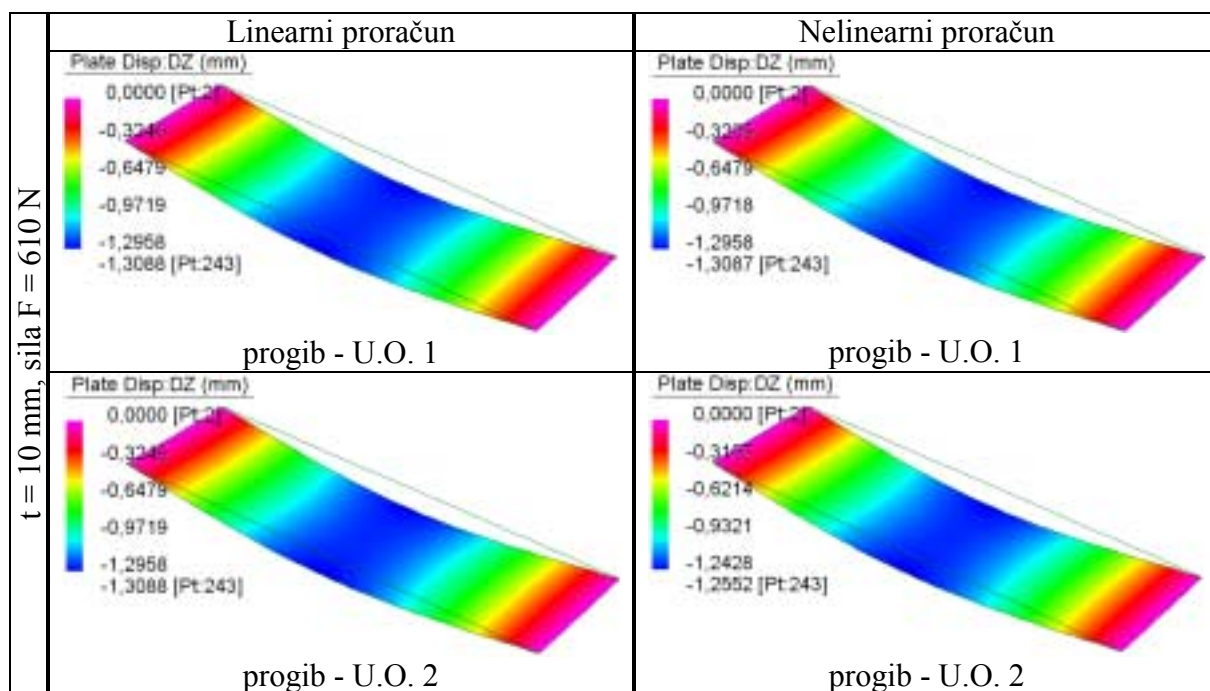




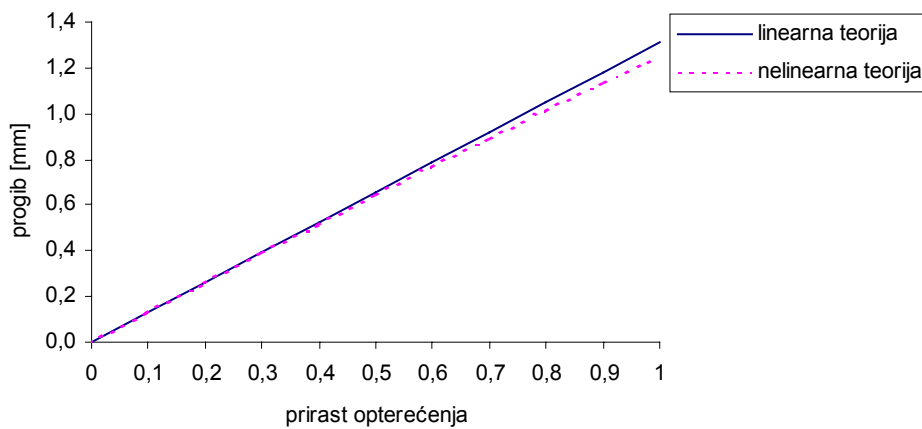
**Staklo 8 mm, U.O. 2**

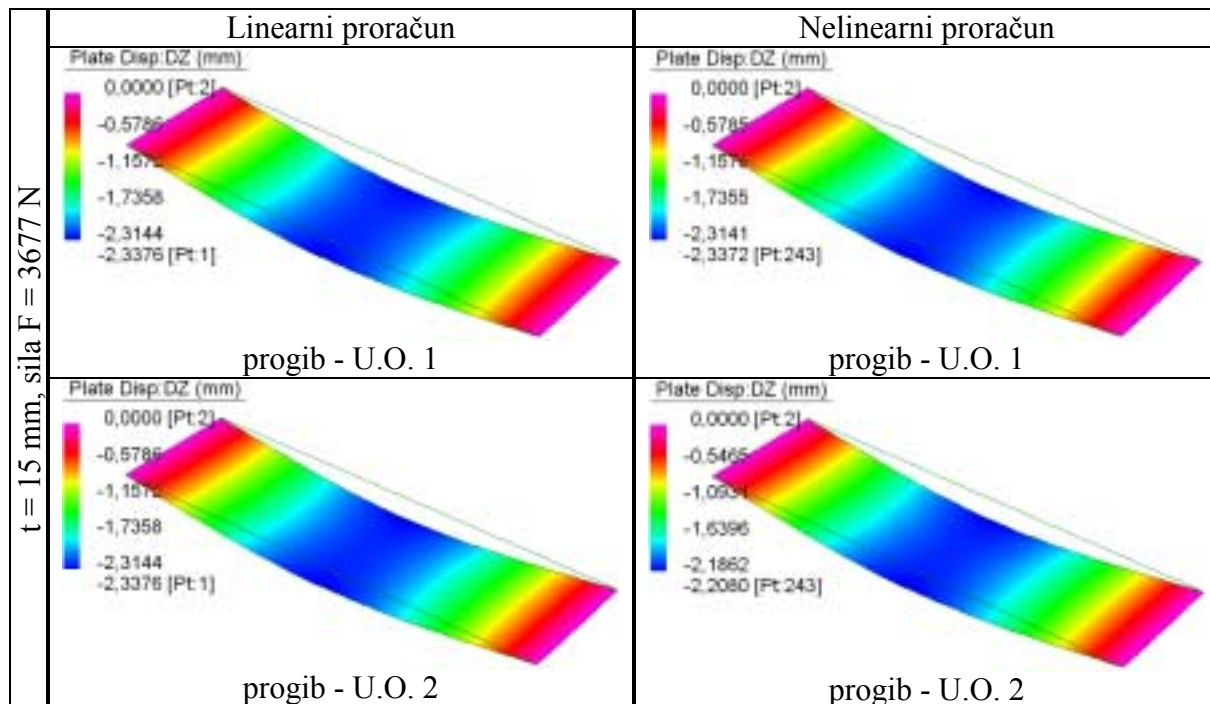




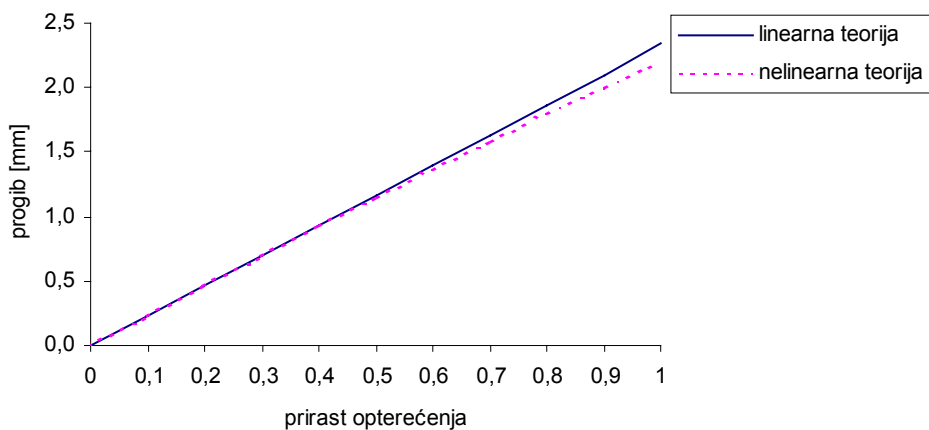


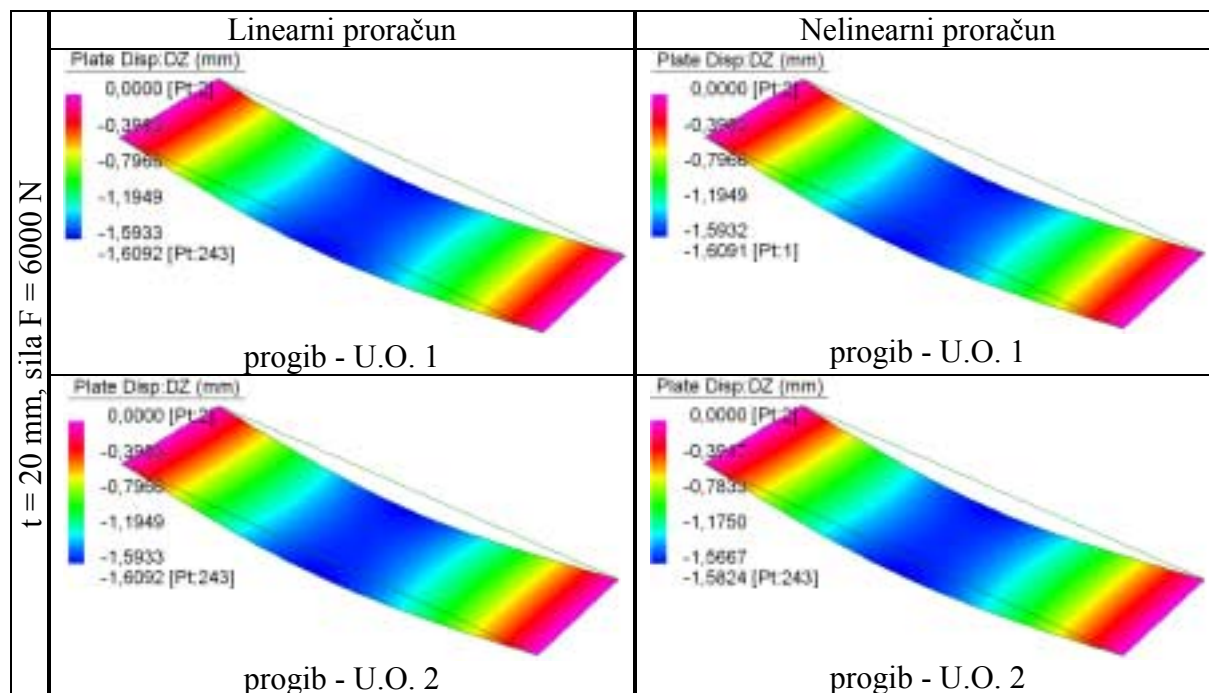
Staklo 10 mm, U.O. 2



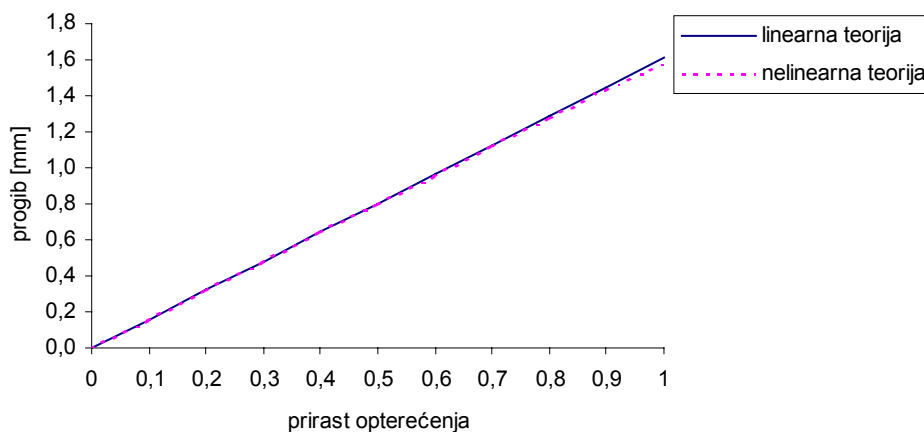


Staklo 15 mm, U.O. 2





Staklo 20 mm, U.O. 2



Iz rezultata zaključujemo da geometrijska nelinearnost kod proračunate ploče ima svoje značenje ako su zadovoljeni slijedeći uvjeti:

- rubni uvjeti su takvi da omogućuju prihvaćanje uzdužnih sila koje nastaju u ploči
- progib ploče je puno veći od njene debljine

Za ploče čija je nosivost ispitana pomoću hidraulične preše nelinearni proračun nema smisla jer su oba ležaja ploče bila klizna.

## 7 ZAKLJUČAK

Metoda konačnih traka razvila se kao jedna od varijanti metode konačnih elementa i to specifično za projektiranje mostova. Njezina se upotreba ograničava na modeliranje prizmatičnih struktura kao npr. ploče. Zbog toga je njeno korištenje prihvatljivo i kod modeliranja staklenih ploča. Naime, propisi za staklo ASTM ograničeni su na pravokutne staklene ploče, jednoliko raspoređeno kontinuirano opterećenje i samo neke određene uvjete oslanjanja. Iako dimenzioniranje stakla prema dozvoljenim naponima ne obuhvaća sve faktore koji utječu na njegovu nosivost, za neke druge slučajeve opterećenja i uvjete oslanjanja staklene ploče moramo modelirati.

Kako su geometrijske karakteristike staklenih ploča često takve da je debljina mnogo manja od ostalih dviju dimenzija, neophodan je proračun koji uzima u obzir geometrijsku nelinearnost. Iz niz pokusa i proračuna pokazalo se da je nelinearni proračun metodom konačnih traka bliži rezultatima iz laboratorijskih ispitivanja kada je riječ o većim progibima<sup>1</sup> pa možemo zaključiti da je u nekim slučajevima upotreba metode konačnih traka opravdana kao alternativa metodi konačnih elemenata.

---

<sup>1</sup> M.S. Cheung, W. Li, S.E. Chidiac, Finite Strip Analysis of Bridges, E & FN Spon, London 1996, str. 191.

## **8 LITERATURA**

- [1] M.S. Cheung, W. Li, S.E. Chidiac, Finite Strip Analysis of Bridges, E & FN Spon, London 1996.
- [2] ASTM International E1300 – 03, West Conshohocken, USA 2003.
- [3] The Institution of Structural Engineers, Structural use of glass in buildings, London 1999.
- [4] GANA Glazing Manual, 1997.