

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
POSLIJEDIPLOMSKI STUDIJ PRIRODNIH
ZNANOSTI

Martina Tudor

Numeričke nestabilnosti fizikalnih
parametrizacija u prognostičkom modelu
Aladin

Magistarski rad

Mentor: Zvezdana Bencetić Klaić

Zagreb, 2007.

Ovaj rad je predan Znanstveno-nastavnom vijeću Poslijediplomskog studija prirodnih znanosti Sveučilišta u Zagrebu radi stjecanja znanstvenog stupnja magistra prirodnih znanosti iz područja Fizike, grana Geofizika - Fizika atmosfere i mora.

Ovaj rad je izrađen na Državnom Hidrometeorološkom Zavodu pod vodstvom Prof. dr. sc. Zvezdane Bencetić Klaić sa Geofizičkog zavoda 'Andrija Mohorovičić' Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Sadržaj

1	Uvod	7
2	O modelu Aladin	10
2.1	Jednadžbe modela	11
2.2	Semi-implicitna shema	13
2.3	Semi-lagrangijanska shema	14
2.4	Preciznost i broj vremenskih trenutaka	15
3	Numerička nestabilnost	18
3.1	Primjer turbulentne difuzije	18
3.2	Potreba za kontrolom stabilnosti	21
4	Metoda provjere numeričke stabilnosti	25
4.1	Nestabilnost difuzivnog tipa - ukočenost (eng. <i>stiffness</i>)	25
4.1.1	Primjer obične linearne diferencijane jednadžbe konstantnih koeficijenata	25
4.1.2	Primjer nelinearne jednadžbe difuzije	27
5	Testovi u Aladinu	31
5.1	Nestabilnost difuzivnog tipa - ukočenost (eng. <i>stifness</i>)	31
5.1.1	Uzrok nestabilnosti u parametrizaciji oborina	33
6	Linearna i nelinearna nestabilnost u fizikalnim parametrizacijama modela ALADIN	38
6.1	Uvod	38
6.1.1	Linearna nestabilnost	38
6.1.2	Nelinearna nestabilnost	38
6.1.3	Linearna i nelinearna nestabilnost u fizikalnim parametrizacijama ALADIN-a	39
6.2	Parametrizacija utjecaja duboke konvekcije	44
6.2.1	Uzlazno strujanje (eng. <i>updraft</i>)	46
6.2.2	Silazno strujanje (eng. <i>downdraft</i>)	47
6.3	Parametrizacija utjecaja težinskih valova	47
7	Zaključak	49
8	Literatura	50
9	Sažetak	54

10 Summary	55
11 Životopis	56
12 Popis radova	59

1 Uvod

U numeričkim meteorološkim modelima procesi na skali većoj od koraka mreže su direktno opisani jednadžbama modela. Ti isti procesi na skali manjoj od koraka mreže modela nisu razlučeni te ih je potrebno parametrizirati. Tako dobivamo parametrizacije turbulentne razmjene, utjecaja nerazlučenih težinskih valova te plitke i duboke konvekcije. Procese koji opisuju promjene agregatnog stanja vodene tvari u atmosferi te utjecaj kratkovalnog sunčevog i dugovalnog zračenja tla i atmosfere je također potrebno parametrizirati. Parametrizacije u spomenutim modelima često zbirno nazivamo fizikom modela.

Nerazlučeni procesi imaju bitnu ulogu u numeričkim modelima za prognozu vremena. Obiman rad na razvoju parametrizacija je doveo do smanjenja sustavnih pogrešaka modela. S druge strane, nije se toliko radilo na razvoju numeričkih shema za rješavanje parametriziranog dijela jednadžbi zbog toga što se smatralo da su parametrizacije previše grube i samim time imaju preveliku pogrešku da bi opravdale korištenje sofisticiranih računalno zahtjevnih numeričkih metoda. Problemi numeričke prirode su prikriveni problemima u samoj parametrizaciji jer je numerička shema dio same parametrizacije pa se može dogoditi da veća rezolucija ili preciznija shema daje prognozu lošije kvalitete (Beljaars 1991).

Pri uvođenju parametrizacija u model, mogu se pojaviti različiti numerički problemi zbog nelinearnosti, pozitivnih uzajamno povratnih (*feed-back*) petlji, promjena agregatnog stanja vodene tvari ili nehomogenosti tla. Numerika fizikalnih parametrizacija je vrlo zahtjevan problem jer treba riješiti sustav nelinearnih prognostičkih jednadžbi (npr. Teixeira 2000). Parametrizacija, koja je sama po sebi numerički stabilna, bi dodavanjem još jednog forsirajućeg člana mogla postati nestabilna te je potrebno koristiti implicitan algoritam (npr. Beljaars i sur. 2004). Algoritam parametrizacije korištene u operativnom modelu mora biti vrlo robustan kako bi radio čak i kada su ulazne vrijednosti varijabli modela nerealne.

Brown i Pandolfo (1982) provode numeričku analizu nelinearne jednadžbe difuzije, koja parametrizira utjecaj turbulentnih procesa. Primjera radi, proučavaju pogrešku koja se očituje variranjem rješenja oko nekog ravnotežnog rješenja, pogreška ostaje ograničena, ali ometa rezultate modela. Za jedan slučaj u numerički nestabilnoj simulaciji dobivaju oblak koji se ne pojavljuje u numerički stabilnoj simulaciji.

Stabilnost sheme često ne ovisi o dužini vremenskog koraka integracije kao

niti o upotrebljenoj numeričkoj shemi. Davies (1983) pronalazi da nestabilnost jednadžbe difuzije nije numeričke prirode, nego svojstvo same algebarske formulacije kojom je koeficijent difuzije definiran kao funkcija statičke stabilnosti.

Kalnay i Kanamitsu (1998) proučavaju cijeli niz shema za integraciju nelinearnih jednadžbi gušenja (*damping equations*) kakve odgovaraju jednadžbi difuzije te pronalaze da stabilnost sheme opada kako nelinearnost koeficijenta difuzije raste.

Epperson (2002) pokazuje da je nestabilnost ponekad svojstvo jednadžbe koju rješavamo, a ne numeričke sheme koju pri tome koristimo. Takva jednadžba može imati sasvim dobro, ograničeno i neprekidno analitičko rješenje za zadane rubne ili početne uvjete, ali je vrlo teška za numeričko rješavanje.

Kada rješavamo veliki sustav međusobno povezanih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju procese različitih skala, brzina ili intenziteta, imamo problem koji se često u literaturi naziva *stiffness* te takav sustav može biti vrlo težak za numeričko rješavanje. Problem se očituje brzim oscilacijama numeričkog rješenja oko ravnotežnog stanja koje se polagano mijenja. Kako na engleskom "*stiff*" znači ukočen, tada bismo tu pojavu *stiffness* mogli prevesti kao ukočenost.

Pri analizi numeričke stabilnosti diskretizirane verzije neke jednadžbe fizikalne parametrizacije, često se radi samo linearna analiza koja se temelji na znatno pojednostavljenoj i lineariziranoj jednadžbi. Ako takva analiza pokaže da je neka shema stabilna, uvodimo je u stvaran nelinearan model pretpostavljajući da je taj zaključak valjan i u nelinearnoj situaciji. Međutim to nije uvijek tako.

Takav primjer je jednadžba difuzije za koju linearna analiza pokazuje da je vrlo raširena implicitna shema, u kojoj eksplicitno računamo koeficijente difuzije, a primjenjujemo implicitno na varijable modela, bezuvjetno stabilna (npr. Stull, 1988). Međutim, Girard i Delage (1989) pokazuju da je shema sa nelinearnim koeficijentom turbulentne razmjene računatim eksplicitno, a primjenjen na implicitno diskretizirano polje modela samo uvjetno stabilna. Također predlažu metodu stabilizacije rješenja.

Telišman Prtenjak i sur. (1998) pokazuju da shema plitke konvekcije također može prouzročiti pojavu fibrilacija (numerički stabilno rješenje koje brzo oscilira oko sporo promjenjivog stanja) te razvijaju efikasniju antifibrilacijsku

shemu koja uvažava činjenicu da izrazi koeficijenata turbulentne razmjene impulsa i temperature nisu jednaki. Taj problem dalje razmatraju Bénard i sur. (2000) te razvijaju metodu za stabilizaciju rješenja, koja djeluje samo kada zadane relacije u modelu pokažu da je to potrebno, jer stabilizacija narušava preciznost sheme.

U nekoliko posljednjih navedenih radova razvijena je shema za numeričku stabilizaciju koja djeluje samo kada je to neophodno potrebno - ovisno o meteorološkoj situaciji. To nam daje ideju da je moguće iskoristiti osobine dane vrste numeričke nestabilnosti te razviti općenitiju metodu provjere numeričke stabilnosti pojedine sheme. Nova metoda bi omogućila testiranje numeričke stabilnosti bilo koje parametrizacije u punom (nelinearnom) obliku unutar cjelokupnog (nelinearnog) modela, u 3 dimenzije za realnu (neidealiziranu) vremensku situaciju.

U ovom radu je predstavljena metoda kojom je moguće provjeriti da li neka parametrizacija, ili kombinacija njih, može prouzročiti pojavu fibrilacija ili drugih pojava numeričke nestabilnosti kada se koristi u numeričkom modelu za prognozu vremena. Metoda se temeljni na slijedećem principu: ako se numerička nestabilnost javlja relativno rijetko, samo u određenim vremenskim situacijama, tada bismo trebali pronaći način kako tu nestabilnost izazvati. Zatim pokušamo izazvati numeričku nestabilnost, a ako uspijemo, tražimo razlog.

U slijedećem poglavlju opisan je model za ograničeno područje Aladin te globalni model Arpége koji koristi isti sustav fizikalnih parametrizacija. U trećem poglavlju je načinjen kratak prikaz nekoliko načina na koje se numerička nestabilnost javlja u meteorološkom modelu. U četvrtom poglavlju je predložena metoda provjere numeričke stabilnosti i primjenjena na nekoliko jednostavnih primjera poznatih iz literature kako bismo provjerili njezinu djelotvornost. U petom poglavlju su prikazani rezultati opisane metode primjenjene na fizikalne parametrizacije u Aladinu. U šestom poglavlju je posvećena pažnja pojavama linearne i nelinearne nestabilnosti te osvrt na pojavu nelinearne nestabilnosti u paketu fizikalnih parametrizacija modela Aladin. Na poslijetku slijedi zaključak.

2 O modelu Aladin

ALADIN (Aire Limitee Adaptation Dynamique developement InterNational) je numerički model za prognozu vremena na ograničenom području izgrađen na temelju globalnog modela ARPÉGE (Action de Recherche Petite Echelle Grande Echelle). Velik dio modela Arpége dijeli sa IFS-om (Integrated Forecast System) globalnim modelom za prognozu vremena koji se koristi u ECMWF-u (European Center for Medium-range Weather Forecast).

Aladin ima istu vertikalnu diskretizaciju, dinamiku i fiziku kao i model Arpége. Aladin koristi spektralnu reprezentaciju polja u horizontali pomoću dvostruke Fourierove transformacije (za oba smjera u horizontali) ograničene eliptičnim odsijecanjem (Machenhauer i Haugen, 1987). Arpége koristi Legendreove transformacije u jednom smjeru u horizontali, a Fourierove transformacije u drugom. U vertikali, Aladin i Arpége koriste hibridnu η koordinatu (Simmons i Burridge 1981) na zadanom broju nivoa i metodu konačnih razlika.

Primitivne prognostičke jednadžbe rješavamo za iste varijable u oba modela: horizontalne komponente vjetra, temperaturu, specifičnu vlažnost i tlak pri tlu koristeći semi-implicitnu semi-lagrangijansku shemu integracije i dva vremenska trenutka (*two-time-level*) (McDonald, 1986). Pretpostavljamo da vrijedi hidrostatska ravnoteža i da je atmosfera plitka. Dinamičke procese računamo u spektralnom prostoru, a utjecaj parametriziranih procesa računamo u fizikalnom prostoru. Paket fizikalnih parametrizacija obuhvaća vertikalnu difuziju (Louis i sur., 1982), koja uključuje plitku konvekciju (Geleyn, 1987), duboku konvekciju (Geleyn i sur., 1982), razlučenu oborinu (Kessler, 1969), utjecaj kratkovalnog i dugovalnog zračenja (Geleyn i Hollingsworth, 1979) je modificiran prema (Ritter i Geleyn, 1992) i prijenos temperature i vlažnosti u tlu (Giard i Bazile, 2000).

Aladin se koristi za operativnu prognozu vremena na Državnom hidrometeorološkom zavodu (DHMZ) od 2000-te godine na horizontalnim rezolucijama 8 km i 2 km (Ivatek–Šahdan i Tudor, 2004). Operativna verzija Aladina se također koristi za istraživanje specifičnih vremenskih situacija na našem području (Tudor i Ivatek–Šahdan, 2002).

Fizikalne parametrizacije integriramo na točkama mreže modela u fizikalnom prostoru na razinama u vertikali koristeći tlak ili geopotencijal kao vertikalnu koordinatu u obliku koji daje tok između razina u modelu za pojedini parametrizirani proces. Iz tokova na poslijetku izračunavamo tendenciju varijable.

2.1 Jednadžbe modela

U ovom radu, Aladin je korišten u hidrostatsičnom obliku sa pojednostavljenim jednadžbama, u istom obliku u kojem se korisiti i za operativnu prognozu vremena. U modelu rješavamo prognostičke jednadžbe za dvije komponente vjetra (u i v), temperaturu (T) i vodenu paru (q) u 3 dimenzije, te tlak pri tlu (p_s) u dvije dimenzije.

Jednadžba za komponente vjetra

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -f\vec{k} \times \vec{V} - \vec{\nabla}\phi - RT\vec{\nabla} \ln p - g \frac{\partial}{\partial p} (J_{\vec{V}}^{turb} + J_{\vec{V}}^{qwd} + J_{\vec{V}}^{cnv}) \quad (1)$$

gdje je ϕ je geopotencijal, $J_{\vec{V}}^{turb}$ tok količine gibanja zbog djelovanja turbulencije, $J_{\vec{V}}^{qwd}$ tok količine gibanja zbog djelovanja orografije i $J_{\vec{V}}^{cnv}$ tok količine gibanja zbog djelovanja konvekcije.

Jednadžba za temperaturu

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{c_p} \frac{\omega}{p} + \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{phy} \quad (2)$$

gdje $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{phy}$ predstavlja ukupan doprinos fizikalnih parametrizacija promjeni temperature. Entalpija nije varijabla modela, ali je koristimo pri izračunavanju tendencije temperature zbog djelovanja parametriziranih procesa:

$$h = c_p T + \phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad \text{gdje je} \quad c_p = c_{pa} + (c_{pv} - c_{pa})q$$

c_p je specifična toplina vlažnog zraka, ϕ je geopotencijal, $E_k = \frac{u^2 + v^2}{2}$ kinetička energija, c_{pa} specifična toplina suhog zraka, c_{pv} specifična toplina vodene pare i q specifična vlažnost.

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_{phy} = -g \frac{\partial}{\partial p} (J_h^{turb} + J_h^{cnv} + J_h^{prec} + J_h^{sol} + J_h^{ther}) \quad (3)$$

gdje je J_h^{turb} tok entalpije zbog turbulentne razmjene, J_h^{cnv} tok entalpije zbog konvekcije, J_h^{prec} tok entalpije zbog oborinskih procesa, J_h^{sol} je tok entalpije zbog kratkovalnog, a J_h^{ther} zbog dugovalnog zračenja. Iz nove vrijednosti entalpije izračunavamo novu vrijednost temperature

$$T^{t+\Delta t} = \frac{h^{t+\Delta t} - E_k^{t+\Delta t} - \phi}{C_p} \quad (4)$$

Jednadžba očuvanja vlažnosti

$$\frac{dq}{dt} = -g \frac{\partial}{\partial p} (J_q^{turb} + J_q^{cnv} + J_q^{prec}) \quad (5)$$

gdje je J_q^{turb} tok specifične vlažnosti zbog turbulentne razmjene, J_q^{cnv} tok specifične vlažnosti zbog konvekcije, J_q^{prec} tok specifične vlažnosti zbog oborinskih procesa.

Jednadžba kontinuiteta prema Simmons i Burridge (1981) te Laprise (1992), kada primjenimo zakon sačuvanja mase u hibridnoj η koordinati:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = -\nabla \cdot \left(\vec{v} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \quad (6)$$

sa rubnim uvjetima:

$$\eta = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0,$$

$$\eta = 1 \quad \rightarrow \quad \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} = g(E + R + S)$$

gdje je E tok isparavanja, R tok tekuće oborine, a S tok krute oborine. Tlak zraka pri tlu se računa prema jednadžbi:

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^1 \nabla \cdot \left(\vec{v} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\eta - g(E + R + S)$$

Sustav jednadžbi modela Aladin koji opisuje evoluciju prognostičkih veličina za sve faze vode (vodena para, vodene kapi i kristali u oblaku, kiša i snijeg) koji se temelji na sačuvanju mase u obliku koji čuva tok (eng. *flux-conservative form*) i u nehidrostatskom obliku je opisan u Catry et al. (2007). Kada bismo iz tog sustava isključili jednadžbe kondenzirane faze vode, zane-marili masu kondenzirane faze vode, pretpostavili da je brzina padanja oborine beskonačna tako da je njihov umnožak jednak toku oborine $\rho_{prec} w_{prec} = P$ (poglavlje 7 iz Catry et al., 2007) dobili bismo ovdje prikazan sustav (to je ujedno i doprinos autorice magistrarskog rada spomenutom članku).

2.2 Semi-implicitna shema

Evoluciju stanja atmosfere opisanu jednađbama modela možemo simbolički opisati kao

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = M(\psi)$$

gdje je ψ stanje atmosfere koje obuhvaća sve varijable modela, a M opisuje djelovanje svih procesa opisanih jednađbama modela kao što su pretvorbe energije ili advekcija zračnom strujom. Model možemo rješavati implicitno ili eksplicitno. Eksplicitna shema poput

$$\frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^t}{\Delta t} = M(\psi^t)$$

zahtjeva vrlo kratke vremenske korake integracije ograničene Courant-Friedricks-Levy (CFL) kriterijem $c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$. Implicitna shema

$$\frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^t}{\Delta t} = M(\psi^t + \Delta t)$$

je stabilna za znatno dulje vremenske korake integracije te je duljina vremenskog koraka ograničena preciznošću modela, ali zahtjeva rješavanje sustava nelinearnih jednađbi što znatno produljuje računanje.

Procese iz nelinearnog operatora M možemo aproksimirati linearnim operatorom L . Razlika između M i L se često naziva nelinearni ostatak N .

Semi-implicitna shema prvo izračunava preliminarnu prognostičku vrijednost eksplicitnim rješavanjem jednađbi modela i potom primjenjuje semi-implicitnu korekciju koja stabilizira sustav. Kriterij stabilnosti više nije najveća valna brzina (Lamb-ovi valovi tj. kvazi-horizontalna brzina zvuka), nego je povezan sa najvećom brzinom zračne struje. Semi-implicitna shema model rješava ovako

$$\frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^t}{\Delta t} = M(\psi^t) + \beta L\left(\frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^t}{2} - \psi^0\right)$$

što postaje

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2}\beta L\right)\psi^{t+\Delta t} = \Delta t M(\psi^t) + \psi^t - \frac{\Delta t}{2}\beta L(\psi^t + 2\psi^0)$$

gdje parametar β određuje stupanj implicitnosti sheme, a ψ^0 vrijednost oko koje lineariziramo sustav.

2.3 Semi-lagrangijanska shema

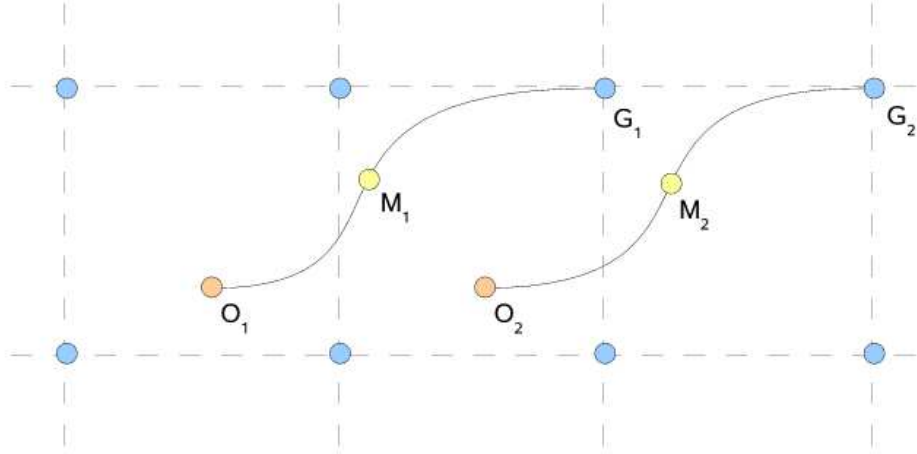
Semi-lagrangijanska shema (Bates i McDonald, 1982) izračunava advektivni doprinos rješavajući jednadžbu

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\psi + \dot{\eta} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \quad (7)$$

gdje je ψ varijabla modela, $\vec{V}$ horizontalna komponenta zračne struje, ∇ je horizontalna komponenta operatora gradijenta, a $\dot{\eta}$ vertikalna brzina. Shema izračunava vrijednost varijable modela u točki mreže G, koja je advektirana iz polazne točke putanje O trodimenzionalnim poljem vjetra uzetim u središnjoj točki putanje M (Slika 1). Kako ni O niti M ne moraju biti točke mreže, potrebno je koristiti trodimenzionalne interpolacije. Semi-implicitan algoritam glasi

$$\frac{\psi_G^{t+\Delta t} - \psi_O^t}{\Delta t} = L\left(\frac{\psi_G^{t+\Delta t} - \psi_O^t}{2}\right) + N(\psi_M^{t+\frac{\Delta t}{2}}) + \Phi(\psi_O^t) \quad (8)$$

gdje Φ označava doprinos fizikalnih parametrizacija koji računamo iz varijabli u trenutku t i interpoliramo u polaznu točku putanje.



Slika 1: Prikaz polazne (O) i središnje (M) točke putanje koja završava u točki mreže G za dvije putanje.

Duljinu vremenskog koraka integracije više ne ograničuje CFL kriterij $u\Delta t < \Delta x$, Durran (1999) zaključuje da je moguće koristiti proizvoljno dug vremenski korak integracije (na temelju analize stabilnosti za slučaj s konstantnom brzinom). Ipak, vremenski korak je ograničen u slučaju varijabilne brzine, jer

Lipschitzov kriterij (Smolarkiewicz i Pudykiewicz, 1992) $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \Delta t < 1$ zahtjeva da se putanje O-M-G ne sijeku, odnosno ograničava konfluenciju i difluenciju putanja česti zraka tijekom jednog vremenskog koraka.

U semi-lagrangianskom modelu, Lipschitzov kriterij stabilnosti advektivne sheme, koristeći tlak p kao vertikalnu koordinatu, možemo pisati kao

$$\left| \frac{\partial \omega}{\partial p} \right| \Delta t < 1,$$

(gdje je ω vertikalna brzina u Pa/s) što diskretizirano u konačnim razlikama, koje koristimo za rješavanje jednadžbi u vertikali, možemo pisati kao

$$|\Delta \omega| \Delta t < \Delta p.$$

Ukoliko problem želimo prenijeti u fizikalne parametrizacije modela, tada bi gornji uvjet glasio

$$|\Delta M| \Delta t < \Delta p$$

gdje je M tok kroz međunivo, odnosno tok između dva nivoa modela.

2.4 Preciznost i broj vremenskih trenutaka

Neka je ψ varijabla modela koja se mijenja u vremenu. Promatramo razvoj u Taylorov red funkcije $\psi(t + \Delta t)$ za konačnu vrijednost Δt i fiksni t .

$$\psi(t + \Delta t) = \psi(t) + \Delta t \psi'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \psi''(t) + \dots$$

pa dobivamo jednadžbu kojom definiramo derivaciju u konačnim razlikama

$$\psi'(t) = \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2!} \psi''(t) - \dots$$

odnosno

$$\psi'(t) = \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} - O(\Delta t)$$

gdje je $O(\Delta t)$ ostatak koji zanemarujemo kada derivaciju prikazujemo ovom shemom metodom konačnih razlika. Ovo je eksplicitna shema i kažemo da je prvog reda točnosti jer $O(\Delta t)$ ovisi linearno o Δt . Na sličan način možemo razviti $\psi(t - \Delta t)$ u Taylorov red.

$$\psi'(t) = \frac{\psi(t) - \psi(t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Ovo je implicitna shema koja je također prvog reda točnosti jer $O(\Delta t)$ ovisi linearno o Δt .

Trapezna shema aproksimacije derivacije konačnim razlikama je

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t - \Delta t)}{2\Delta t} \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\psi(t) + \Delta t \psi'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \psi''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} \psi'''(t) + \dots \right. \\ &\quad \left. - \psi(t) + \Delta t \psi'(t) - \frac{\Delta t^2}{2!} \psi''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} \psi'''(t) - \dots \right) \\ &= \psi'(t) + \frac{\Delta t^2}{3!} \psi'''(t) + \dots \\ &= \psi'(t) + O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

je drugog reda točnosti jer $O(\Delta t)$ ovisi kvadratno o Δt i kažemo da je trapezna shema preciznija od ranije prikazane eksplicitne i implicitne sheme.

Općenito, kada rješavamo model, rješavamo sustav jednadžbi tipa

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f(\psi(t))$$

koji u vremenu možemo diskretizirati eksplicitno

$$\frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^t}{\Delta t} = f(\psi^t)$$

implicitno

$$\frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^t}{\Delta t} = f(\psi^{t+\Delta t})$$

ili trapezno

$$\frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = f(\psi^t)$$

Vidimo da za implicitnu i eksplicitnu shemu trebamo varijable modela iz samo dva vremenska trenutka, dok za trapeznu shemu trebamo varijable modela iz tri vremenska trenutka ($\psi^{t-\Delta t}$, ψ^t i $\psi^{t+\Delta t}$).

Međutim, trapeznu shemu možemo izvesti i koristeći samo dva vremenska trenutka uz slijedeći trik:

$$\frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^t}{\Delta t} = f\left(\psi^{t+\frac{\Delta t}{2}}\right)$$

gdje $f\left(\psi^{t+\frac{\Delta t}{2}}\right)$ možemo aproksimirati npr. ovako

$$\frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^t}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(f\left(\psi^{t+\Delta t}\right) + f\left(\psi^t\right) \right)$$

pa dobivamo trapeznu shemu koja koristi samo dva vremenska trenutka. U modelima ALADIN, ARPEGE, IFS i HIRLAM (<http://hirlam.org/>) postoji nekoliko mogućnosti aproksimacije člana $\psi^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ kao i pojedinih $f\left(\psi^{t+\frac{\Delta t}{2}}\right)$ koje su detaljnije prikazane u Hortal (2002).

3 Numerička nestabilnost

Semi-implicitna semi-lagrangijanska diskretizacija se primjenjuje u mnogim numeričkim modelima za operativnu prognozu vremena (Aladin, Arpège, IFS, HIRLAM) jer dozvoljava vrlo duge vremenske korake integracije (Hortal, 2002). Istovremeno rezolucija modela je rasla, kako u horizontali tako i u vertikali. Zbog dugih koraka u vremenu paket fizikalnih parametrizacija može prouzročiti numeričku nestabilnost u modelu. Pojedina parametrizacija daje vertikalni tok varijabli modela zbog djelovanja parametriziranog (nerazlučenog) fizikalnog procesa. Iz tokova se potom izračunava tendencija varijable. Fizikalne tendencije varijabli su često veće od dinamičkih što daje jak transport u vertikali unatoč malim vrijednostima vertikalne brzine.

Ukoliko je tendencija dovoljno velika, u modelu se pojavljuje nestabilnost koja se može očitovati na nekoliko načina. Možemo reći da postoje tri vrste rješenja, stabilno koje ne oscilira, stabilno koje brzo oscilira oko sporo promjenjivog stanja (fibrilacije) i nestabilno koje jako odstupa ili čak divergira od analitičkog. U slučaju fibrilacija, govorimo o numeričkoj degradaciji rješenja.

3.1 Primjer turbulentne difuzije

Najpoznatiji primjer zanimljivog numeričkog ponašanja u svijetu fizikalnih parametrizacija ima jednadžba vertikalne difuzije. Promatramo promjenu varijable modela ψ u vremenu zbog djelovanja vertikalne difuzije.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} K_\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (9)$$

gde je K_ψ koeficijent vertikalne difuzije za varijablu ψ koji računamo iz stanja atmosfere u trenutku t korištenjem funkcije Richardsonovog broja $f_\psi(R_i)$.

$$K_\psi = l_m l_\psi \left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right| f_\psi(R_i) \quad (10)$$

gdje je l karakteristična duljina turbulentnog miješanja. $f_\psi(R_i)$ je funkcija Richardsonovog broja, oblik funkcije ovisi o stabilnosti atmosfere. Za stabilnu atmosferu (Louis i sur., 1982):

$$f_m(R_i) = \frac{1}{1 + \frac{2bR_i}{\sqrt{1+dR_i}}} \quad (11)$$

$$f_h(R_i) = \frac{1}{1 + \frac{3bR_i}{\sqrt{1+dR_i}}} \quad (12)$$

Problem parametrizacije turbulencije u vrlo stabilnoj atmosferi u principu nije riješen, ali to je izvan djelokruga ove radnje. Tom temom se bave npr. Jeričević i Grisogono (2005).

Za nestabilnu atmosferu:

$$f_m(R_i) = 1 - \frac{2bR_i}{1 + 3bc\sqrt{\frac{|R_i|}{27}} \left(\frac{l_m}{z+z_0}\right)^2} \quad (13)$$

$$f_h(R_i) = 1 - \frac{3bR_i}{1 + 3bc\sqrt{\frac{|R_i|}{27}} \left(\frac{l_h}{z+z_0}\right)^2} \quad (14)$$

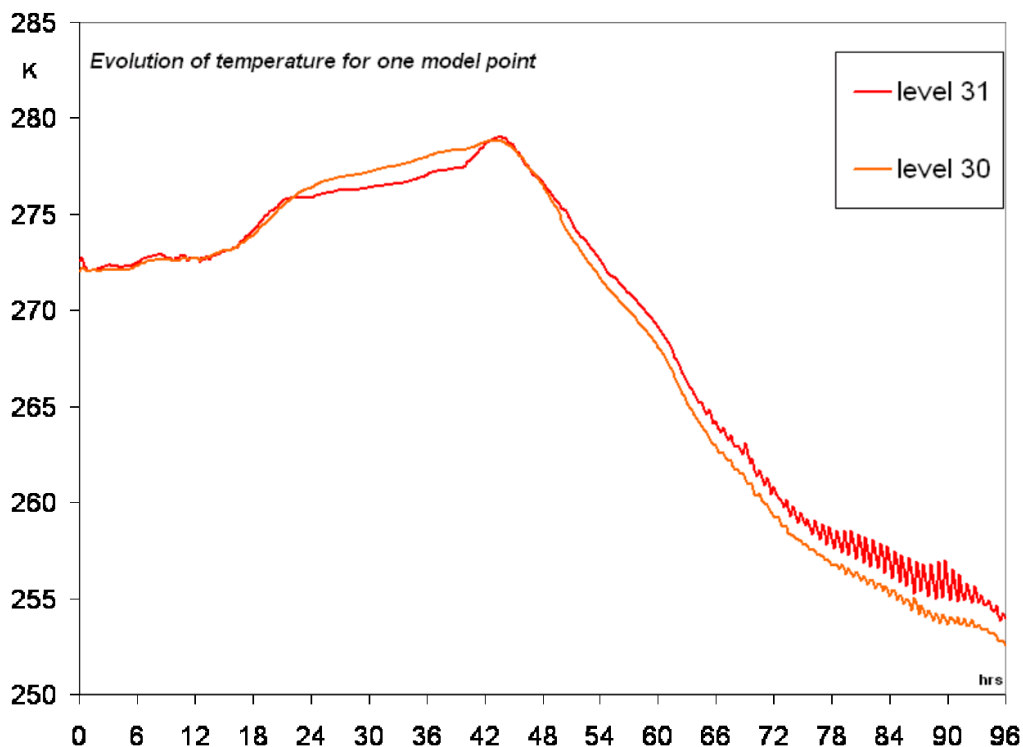
b , c i d su parametri koje prilagođavamo pomoću nameliste, l_m i l_h su duljine miješanja, z_0 je duljina trenja. Gradijentni Richardsonov broj u konačnim razlikama $Ri = \frac{g\Delta z}{\theta_0} \frac{\Delta\theta}{(\Delta\vec{V})^2}$ je funkcija varijabli modela.

Implicitan algoritam, kakav se koristi u mnogim modelima za prognozu vremena, izračunava koeficijente K_ψ iz stanja atmosfere u trenutku t , a potom te koeficijente primjenjuje na implicitno diskretizirane varijable modela kako bismo izračunali stanje atmosfere u trenutku $t + \Delta t$. Koeficijenti vertikalne difuzije se mogu jako brzo mijenjati u ovisnosti o stanju atmosfere, pogotovo kada je stanje blisko neutralnom. Jedan vremenski korak sa velikim koeficijentima turbulentne razmjene i malim vertikalnim gradijentima meteoroloških polja za kojim slijedi drugi korak sa malim koeficijentima i velikim gradijentima daje rješenje koje brzo oscilira (s periodom $2\Delta t$) oko ravnotežnog stanja koje se istovremeno polagano mijenja. Primjer evolucije temperature tijekom 96 satne prognoze u jednoj točki mreže je prikazan na Slici 2.

Ovakav problem je moguće riješiti tako da shema postane više nego implicitna (eng. *over-implicit*). Promatramo slijedeću diskretizaciju u vremenu

$$\frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^t}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 - \beta)K_\psi \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^t + \beta K_\psi \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^{t+\Delta t} \right] \quad (15)$$

Implicitnost ove sheme ovisi o parametru β . Za $\beta = 0$ shema je eksplicitna, a za $\beta = 1$ shema je implicitna. Te dvije sheme su prvog reda točnosti. Precizniju shemu, drugog reda točnosti dobivamo za $\beta = 0.5$ i zovemo trapezna



Slika 2: Prikaz evolucije temperature u jednoj točki mreže modela Aladin za dva najniža nivoa u atmosferi (31 je najniži nivo u atmosferi, oko 17 m nad tлом, a 30 prvi slijedeći iznad njega) tijekom 96 sati integracije sa korakom integracije 15 minuta.

shema (npr. Pielke, 2002) i ona je polu-implicitna.

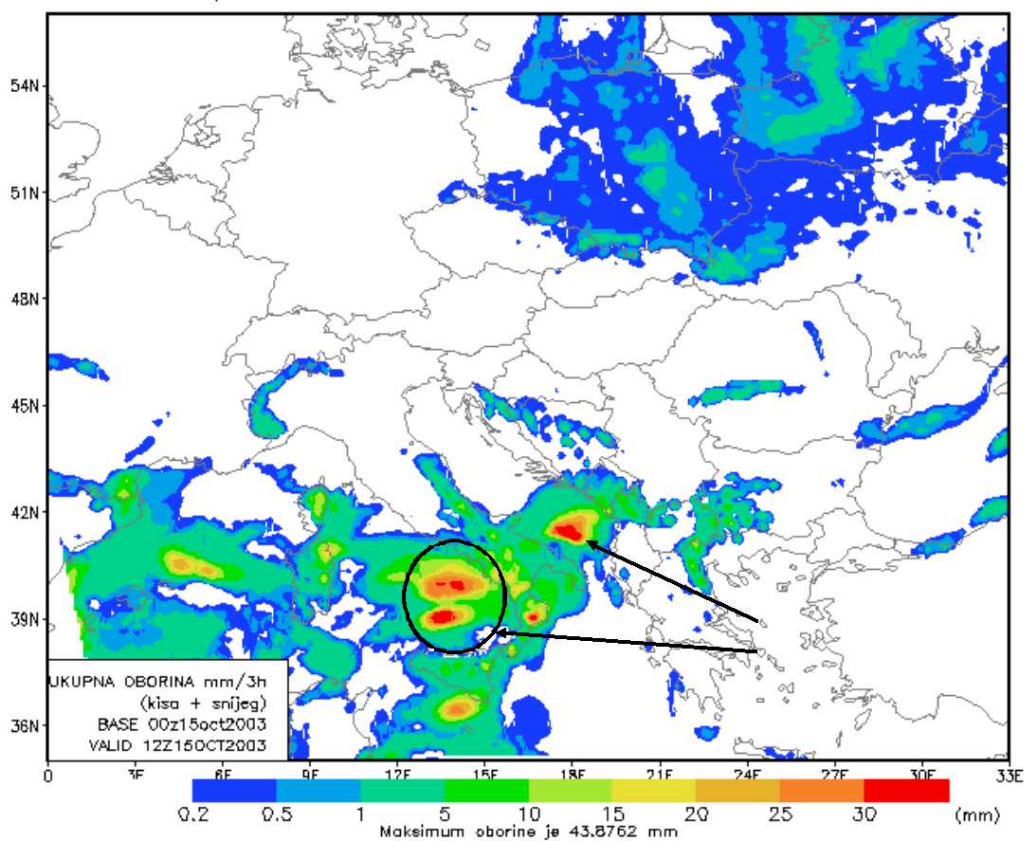
Međutim, ovaj zaključak vrijedi samo kada K ne ovisi o varijablama u modelu. Kalnay i Kanamitsu (1988) su pokazali da implicitan tretman u kojem je $\beta = 1$ nije dovoljan za numeričku stabilizaciju ovakve sheme za vertikalnu difuziju. U modelu se javljaju brze oscilacije varijabli u vremenu te je potrebno koristiti $\beta > 1$ koji dalje umanjuje točnost sheme. Teixeira (2000) pokazuje da se takve oscilacije javljaju i u modelu ECMWF-a (IFS). Rješenje oscilira čak i za vrlo kratke vremenske korake, ali sa znatno smanjenom amplitudom. Kako bi stabilizirali shemu za vertikalnu difuziju, u modelima IFS i HIRLAM koriste $\beta = 1.5$.

Stoga Girard i Delage (1990) predlažu da β ovisi o stanju atmosfere u modelu. Konačnu verziju antifibrilacijske sheme kakva se koristi u shemi vertikalne di-

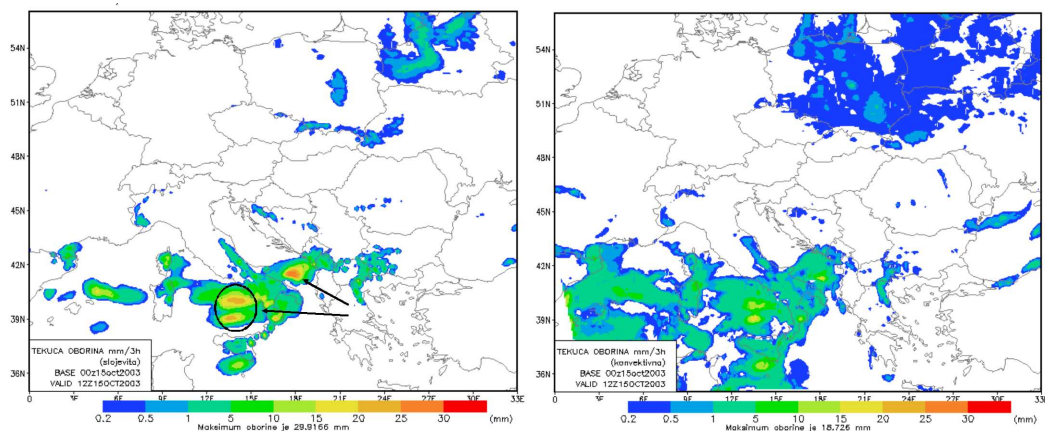
fuzije u modelu Aladin daju Prtenjak i sur. (1998) i Bénard i sur. (2000) u kojoj β varira između 1 i 1.25.

Prilikom rada na modelima Aladin i Arpége primjećene su oscilacije meteoroloških polja u prostoru i vremenu. Te oscilacije su se znatno smanjile kada je u modelu primjenjeno rješenje $\beta = 1.5$ ili kada je prepolovljen vremenski korak integracije. Prvo rješenje znatno degradira točnost sheme. Drugo rješenje nije prikladno u operativnoj primjeni, kada vremenski korak treba biti što dulji kako bi se povećala efikasnost modela. Također, nije moguće pouzdano utvrditi da je upravo shema turbulentne difuzije ta koja uzrokuje uočene oscilacije.

3.2 Potreba za kontrolom stabilnosti

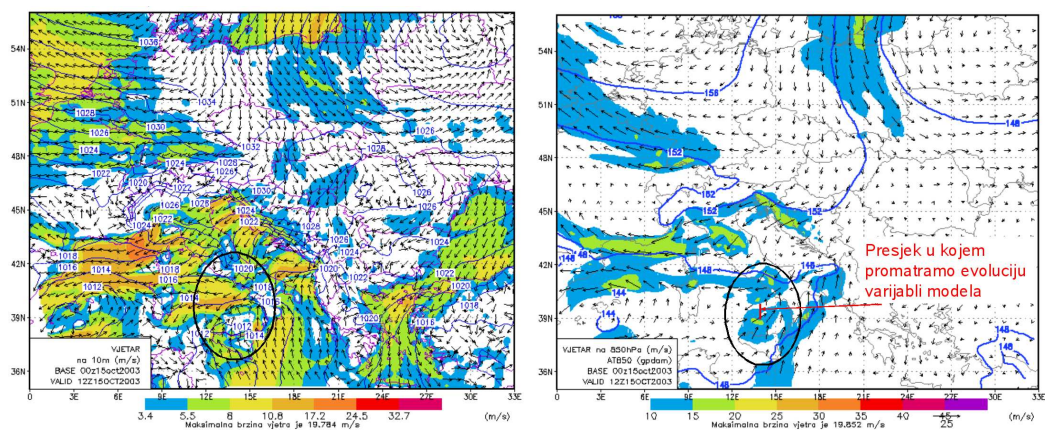


Slika 3: 12 satna prognoza ukupne oborine akumulirane kroz posljednja 3 sata start 00 UTC za 12 UTC 15tog listopada 2003.

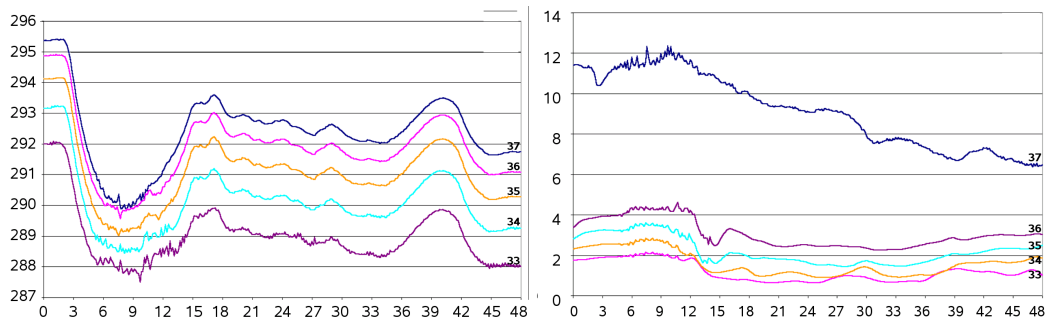


Slika 4: 12 satna prognoza oborine akumulirane kroz posljednja 3 sata razlučene (lijevo) i konvektivne (desno) start 00 UTC za 12 UTC 15tog listopada 2003.

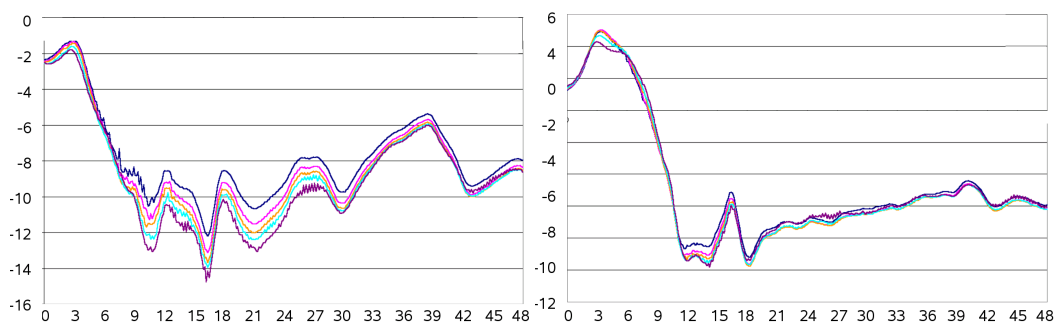
Možda se na prvi pogled čini da rješenje koje brzo oscilira oko ravnotežnog stanja koje se polagano mijenja, kao na Slici 2, nije razlog za pretjeranu zabrinutost. Međutim takve oscilacije mogu prouzročiti pogrešan rad neke druge parametrizacije u modelu. Na primjer, prognoza količine oborine u Južnom Jadranu i Tirenskom Moru za 12 UTC 15tog listopada 2003. je prevelika. Slika 3 prikazuje prognoziranu ukupnu oborinu akumuliranu tijekom 3 sata, od 9 do 12 UTC 15tog listopada 2003. Velika količina oborine potječe većinom iz sheme za razlučenu oborinu (Slika 4).



Slika 5: 12 satna prognoza polja vjetra 10 m nad tlom (lijevo) i na 850 hPa plohi (desno) start 00 UTC za 12 UTC 15tog listopada 2003.



Slika 6: Evolucija temperature (lijevo) i specifične vlažnosti (desno) u jednoj točki mreže tijekom 48 satne integracije modela.

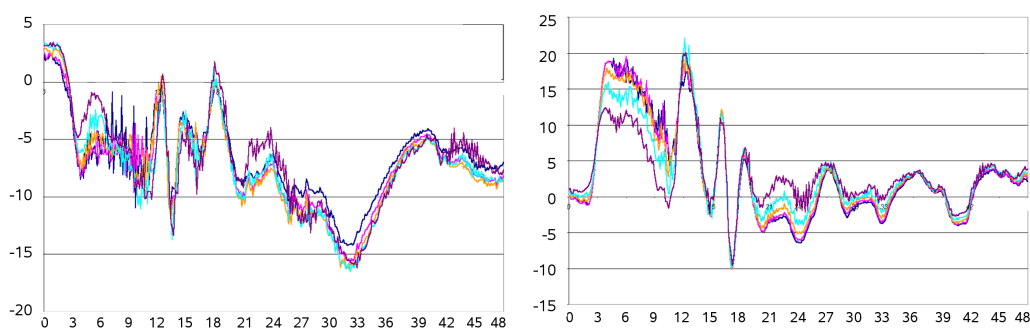


Slika 7: Evolucija u (lijevo) i v (desno) komponenta vjetra u jednoj točki mreže tijekom 48 satne integracije modela (boje označavaju iste nivoe kao na slici 6).

Polje vjetra na 10m i 850hPa (Slika 5) pokazuje jaku konvergenciju u područjima velike količine oborine. Korisno je pogledati kako se mijenjaju prognostičke veličine u modelu u jednoj točki u području velike količine oborine. U vrijeme kada je na tom području numerički model dao preveliku količinu oborine, pogotovo u razdoblju od 6 do 12 sati prognoze. U točki modela u tom području temperatura i vlažnost (Slika 6) na 5 najnižih nivoa u atmosferi brzo osciliraju oko stanja koje se polagano mijenja. Slične oscilacije moguće je uočiti i u polju vjetra (Slika 7), a pogotovo divergencije i vrtložnosti (Slika 8).

Preostale oscilacije varijabli modela, koje se javljaju tijekom integracije, zahtijevaju princip koji bi omogućio provjeru stabilnosti pojedine sheme fizikalne parametrizacije dok međudjeluje sa svim ostalim procesima u modelu.

Tijekom razvoja modela, vodi se računa da parametrizacije koje se uključuju u model moraju biti što robusnije i preciznije, pri čemu robusnost ima pred-



Slika 8: Evolucija vrtložnosti (lijevo) i divergencije (desno) u jednoj točki mreže tijekom 48 satne integracije modela (boje označavaju iste nivoe kao na slici 6).

nost pred preciznosti zato što shema treba biti numerički stabilna u svakoj vremenskoj situaciji za bilo koje vrijednosti ulaznih varijabli modela.

Ako neku shemu parametrizacije pokušamo destabilizirati, a ona ostane stabilna, možemo zaključiti da ne bi prouzročila numeričku nestabilnost u modelu ni u kojoj vremenskoj situaciji. S druge strane, ako uvedena smetnja izazove pojavu fibrilacija ili rješenje postane čak nestabilno, trebamo potražiti uzrok. Kako je moguće integrirati model sa uključenim, isključenim ili znatno izmjenjenim intenzitetima pojedinih parametriziranih procesa, možemo uključivati i isključivati pojedine fizikalne parametrizacije te promatrati kada će izazvana nestabilnost nestati.

4 Metoda provjere numeričke stabilnosti

4.1 Nestabilnost difuzivnog tipa - ukočenost (eng. *stiffness*)

Nestabilnost može biti svojstvo jednadžbe koju rješavamo, a ne posljedica numeričke sheme koju pri tome koristimo. Pri tome, jednadžba može imati sasvim dobro definirano, ograničeno i neprekidno analitičko rješenje (za zadane početne i rubne uvjete), ali je istovremeno vrlo teška za numeričko rješavanje (Epperson, 2001). Kada rješavamo sustav povezanih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju procese različitih brzina ili intenziteta, imamo problem nestabilnosti difuzivnog tipa koji nazivamo ukočenost prema engleskom nazivu *stiffness* te takav sustav može biti vrlo težak za numeričko rješavanje.

Ukočenost (eng. *Stiffness*) se javlja kada jednadžba ili sustav jednadžbi koji promatramo ima rješenje koje se brzo mijenja u vremenu, a superponirano je na sporo promjenjivu evoluciju srednjeg stanja atmosfere. Pri tome je brzo ono što se odvija na vremenskoj skali manjoj ili približno jednakoj vremenskom koraku integracije, a sporo ono što uzrokuje promjene na vremenskoj skali znatno duljoj od koraka u vremenu. Kao posljedica, javljaju se brze oscilacije oko sporog, ali fizikalno važnijeg rješenja. Takve oscilacije vrijednosti varijabli modela mogu poremetiti djelovanje drugih procesa opisanih u modelu. Stoga je vrlo poželjno pronaći oscilacije (ukoliko postoje), otkriti njihove uzroke i ispraviti ih.

Kada bismo, u svrhu testiranja, u model ugradili mehanizam koji bi amplificirao te oscilacije, mogli bismo otkriti koji dio modela bi mogao prouzročiti problematične brze oscilacije u vremenu.

4.1.1 Primjer obične linearne diferencijalne jednadžbe konstantnih koeficijenata

Ovaj primjer je prikazan u McDonald (1998). Promatramo jednadžbu čije rješenje ima brzu i sporu komponentu:

$$\frac{du}{dt} = -Ku(t) + KF(t) + \frac{dF}{dt}, \quad (16)$$

gdje je K pozitivna konstanta, a $F(t)$ je proizvoljna, sporo promjenjiva funkcija vremena. Za zadane početne uvjete, ova linearna jednadžba prvog reda

ima analitičko rješenje

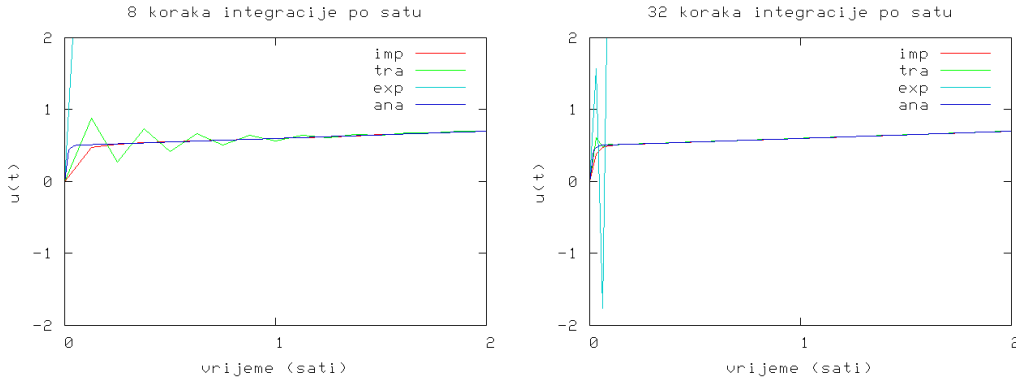
$$u(t) = [u(t=0) - F(t=0)] e^{-Kt} + F(t). \quad (17)$$

Ako odaberemo $K = 100\text{hr}^{-1}$, i $F(t) = t/10\text{hr} + 0.5$, tada je sporo promjenjiv dio rješenja $F(t)$, a brzi e^{-100t} . Pretpostavimo da nas zanima samo sporo promjenjivo rješenje. Tada želimo koristiti i vrlo dug vremenski korak integracije. Jednadžbu numerički diskretiziramo i rješavamo.

$$\frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t} = -K [\beta u^{t+\Delta t} + (1 - \beta)u^t] + KF(t) + F'(t) \quad (18)$$

gdje je $F'(t) = 0.1$, a β parametar kojime određujemo implicitnost rješenja.

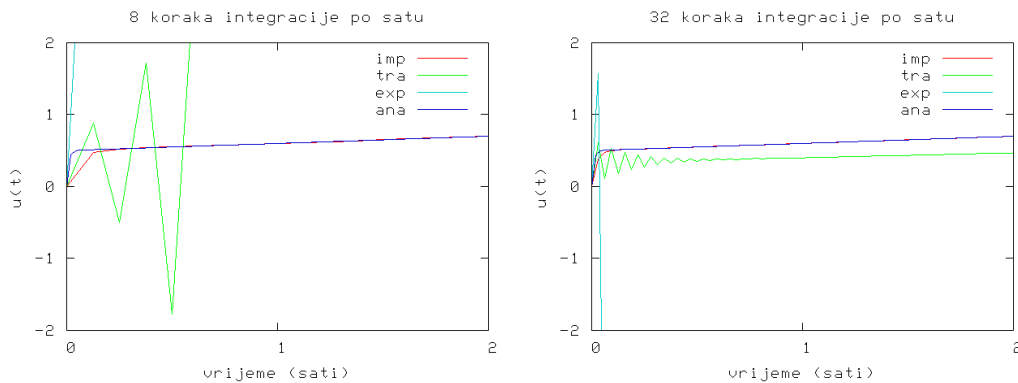
$$u^{t+\Delta t} = \frac{1}{1 + \beta K \Delta t} [u^t - K \Delta t (1 - \beta)u^t + \Delta t K F(t) + \Delta t F'(t)] \quad (19)$$



Slika 9: Analitičko i numerička rješenja jednadžbe 19 sa implicitnom, eksplicitnom i trapeznom shemom za vremenske korake $1/8$ hr (lijevo), $1/32$ hr (desno).

Ovu jednadžbu rješavamo koristeći različite vrijednosti za parametar β (0, 0.5, 1) i različite vremenske korake integracije ($1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$, $1/64$, $1/128$ i $1/256$ sata) od kojih su odabrani rezultati prikazani na slici 9.

- Eksplicitna shema ($\beta = 0$) daje numerički nestabilno rješenje osim za vrlo kratke vremenske korake integracije (za $1/64$ još oscilira).
- Trapezna shema ($\beta = 1/2$) daje numerički stabilno, ali oscilirajuće rješenje, što znači da tendencija mijenja predznak iz jednog vremenskog koraka integracije u drugi. Oscilacije se brže guše kada je korak u vremenu kraći.



Slika 10: Analitičko i numerička rješenja jed. 19 sa implicitnom, eksplicitnom i trapeznom shemom kada amplificiramo oscilacije brzo promjenjive komponente rješenja za vremenske korake 1/8 hr (lijevo), 1/32 hr (desno).

- Implicitna shema daje stabilno rješenje bez oscilacija.

U referentnim integracijama se oscilacije uvijek guše, kako odmiče integracija, čak i za najdulji korišten vremenski korak integracije. Kada amplificiramo brzo promjenjivu komponentu rješenja (Slika 10), amplituda oscilacija može rasti u vremenu, te oscilacije postaju toliko velike da izlaze iz promatranog područja skale na grafičkom prikazu, ako oscilacija nema, u nekim situacijama se pojavljuju.

Ovo je vrlo jednostavan primjer kako očekujemo da će metoda kontrole stabilnosti djelovati. Unutar numeričkog meteorološkog modela djeluju brojni drugi fizikalni i dinamički procesi te numerička difuzija koji oscilacije kakve uočavamo u lijevom stupcu mogu prikriti, ali očekujemo da neće moći prikriti amplificirane oscilacije.

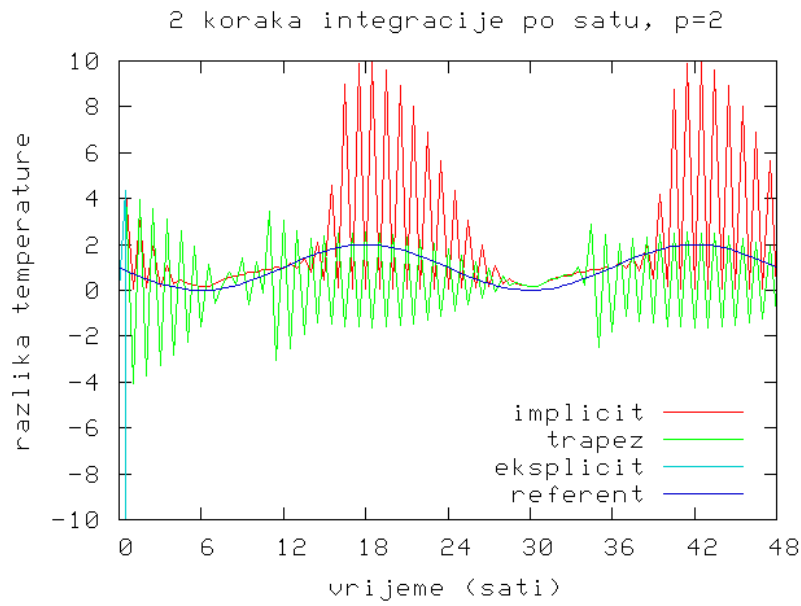
Radi iscrpnije ilustracije djelovanja ove metode prvo je upotrebljena na još jednom primjeru iz literature pa tek onda na fizikalne parametrizacije u modelu Aladin.

4.1.2 Primjer nelinearne jednadžbe difuzije

Promatramo nelinearan primjer kakav su razmatrali Kalnay i Kanamitsu (1988) te McDonald (1998), kako bismo razmotrili dodatne probleme koje nameću nelinearni članovi, kada integriramo jednadžbe fizikalnih parametrizacija koristeći duge vremenske korake. Promatramo jednostavnu jednadžbu gušenja:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -K\psi^{p+1}(t) + D(t) \quad (20)$$

gdje sa p kontroliramo stupanj nelinearnosti sheme. Ovu jednadžbu u meteorološkom smislu možemo interpretirati kao razliku temperature između tla i zraka, gdje $K\psi^p$ predstavlja koeficijent razmjene koje ovisi o ψ , a $D(t)$ je sporo promjenjivi član, npr. dnevni hod temperature, $D(t) = 1 - \sin(2\pi t/24)$.

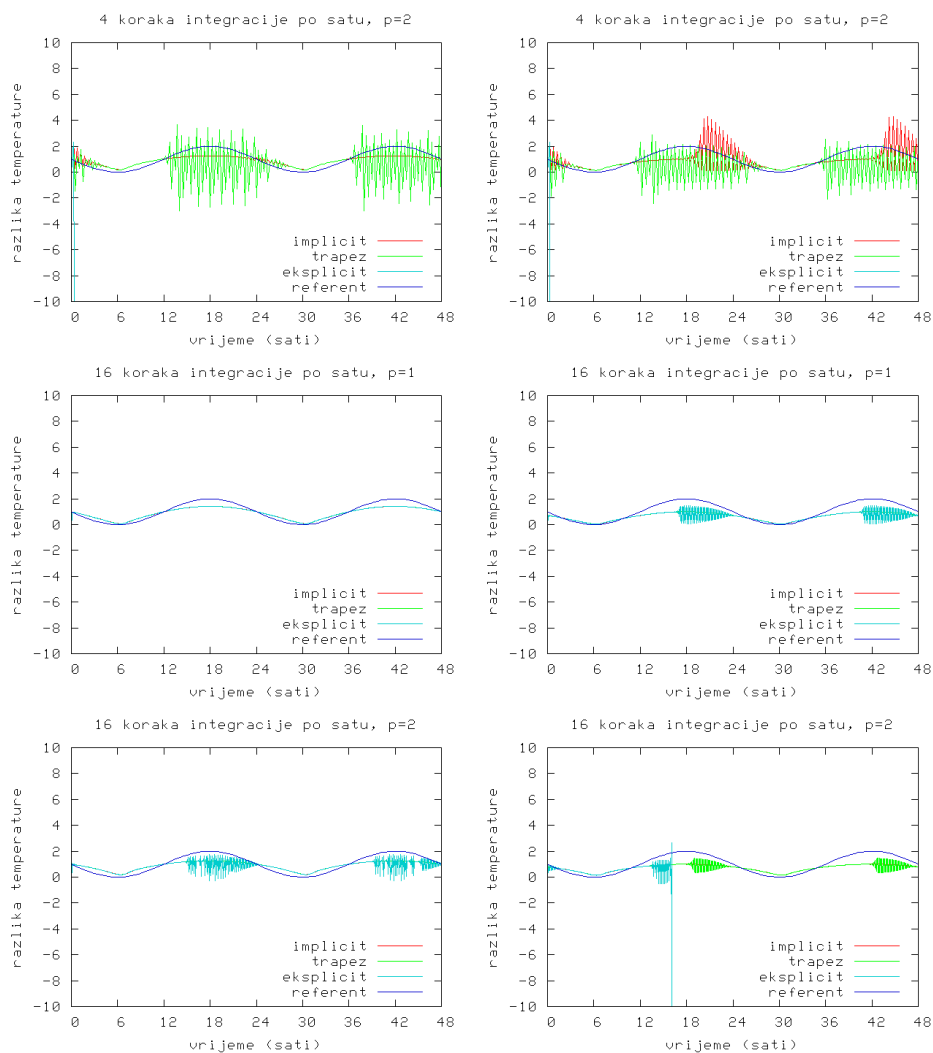


Slika 11: Numeričko rješenje jednadžbe 21 sa implicitnom, eksplicitnom i trapeznom shemom za eksponent $p = 2$ i vremenski korak $\Delta t = 0.5$ sata, također je prikazana i funkcija $D(t)$.

Ovu jednadžbu diskretiziramo kao i dosadašnje

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{t+\Delta t} - \psi^t}{\Delta t} &= -K(\psi^t)^p \left(\beta \psi^{t+\Delta t} + (1 - \beta) \psi^t \right) + D^t \\ \psi^{t+\Delta t} &= \frac{(1 - (1 - \beta)\Delta t K(\psi^t)^p) \psi^t + \Delta t D^t}{1 + \beta \Delta t K(\psi^t)^p} \end{aligned} \quad (21)$$

gdje je β parametar kojim određujemo implicitnost rješenja.



Slika 12: Referentno (lijevo) numeričko rješenje jednadžbe 21 i rješenje sa izazvanim fibrilacijama (desno) sa implicitnom (crvena), eksplicitnom (svjetlo plava) i trapeznom (zeleno) shemom za eksponent $p = 2$ i vremenski korak $\Delta t = 1/4$ hr (gore), $p = 1$ i $\Delta t = 1/16$ sati (sredina) i $p = 2$ i $\Delta t = 1/16$ sati (dolje), također je prikazana i funkcija $D(t)$ kao referentna krivulja (tamno plavo).

Na slici 12 u lijevom stupcu prikazana su numerička rješenja dobivena eksplicitnom, trapeznom i implicitnom shemom za odabrane vrijednosti eksponenta p i vremenske korake integracije. Očekujemo da se rješenje polagano mijenja između 0 i 1 sa periodom od 24 sata. Zbog toga je na slici 12 prikazana i funkcija $D(t)$ radi usporedbe. Vrijednosti $\psi(t)$ odstupaju od vrijednosti $D(t)$ samo zbog djelovanja difuzijskog člana u jednadžbi. Difuzijski član ovisi o vrijednosti varijable ψ , pa očekujemo da će odstupanje od $D(t)$ biti veće što je koeficijent difuzije nelinearniji i ψ veći.

Oscilacije u stabilnom, ali oscilirajućem rješenju se pojavljuju tek kada ψ , odnosno $K\psi^p$ (koji predstavlja koeficijent turbulentne razmjene), poprimi dovoljno veliku vrijednost.

- Eksplicitna shema (svijetloplavo) je, prema očekivanjima, najmanje stabilna. Za dulje vremenske korake integracije, shema daje nestabilno rješenje čak i za linearan slučaj. Moguće je dobiti stabilno i neoscilirajuće rješenje i za nelinearan problem ($p = 3$) ako je vremenski korak dovoljno kratak.
- Trapezna shema (zeleno) daje stabilnije rješenje kada koeficijent turbulentne razmjene ne ovisi o vrijednosti varijable u početku daje nekoliko oscilacija koje se potom smire. Kada povećamo nelinearnost problema, tj. kada koeficijent difuzije ovisi o vrijednosti varijable, rješenje oscilira.
- Implicitna shema (crveno) za nelinearan problem i dug vremenski korak integracije 11 daje oscilirajuće rješenje u kojem amplituda oscilacija raste s ψ odnosno $D(t)$.

Ako ψ interpretiramo kao razliku temperature između tla i zraka, amplituda oscilacija ψ raste s porastom forsiranja $D(t)$. Kada forsiranje oslabi, smanji se i amplituda oscilacija, te oscilacije iščeznu za dovoljno slabo forsiranje, koje se ponovno pojave s jačanjem forsiranja.

Kako bismo provjerili da li se u numeričkom rješenju krije nestabilnost, koja bi se mogla aktivirati u modelu u kojem djeluju i drugi fizikalni i dinamički procesi, izazivamo amplifikaciju oscilacija. Dobivena numerička rješenja su prikazana na slici 12 u desnom stupcu. Neka stabilna i neoscilirajuća rješenja (za određeni nivo implicitnosti i nelinearnosti) pokazuju intenzivne fibrilacije, a mogu čak postati i nestabilna.

5 Testovi u Aladinu

Očekujemo pojavu numeričke nestabilnosti samo u relativno rijetkim vremenskim situacijama koje modeliramo relativno dugim vremenskim korakom. Stoga je poželjno provesti testiranje na što većem rasponu vremenskih situacija sa što duljim vremenskim korakom integracije. Kako je moguće fizikalne parametrizacije iz Aladina koristiti i u globalnom modelu Arpége, koji pokriva cijelu Zemlju, a time i najveću raznolikost vremenskih situacija, na nižoj horizontalnoj rezoluciji koja omogućuje dulje korake u vremenu. Arpége je korišten sa vremenskim korakom 13.8 minuta (13 vremenskih koraka integracije u 3 sata) na 41 razini u vertikali, najniža razina se nalazi oko 17 metara iznad površine tla.

5.1 Nestabilnost difuzivnog tipa - ukočenost (eng. *stiffness*)

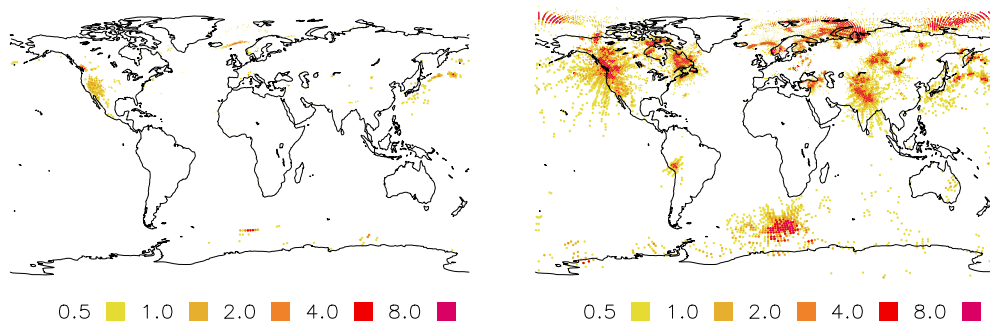
Metoda provjeravanja numeričke stabilnosti opisana u prethodnom poglavlju primjenjena je na fizikalne parametrizacije u operativnom numeričkom modelu za prognozu vremena tako da je u pojedinoj fizikalnoj parametrizaciji korišten upola kraći vremenski korak integracije nego u ostatku modela. Kako promatrana parametrizacija želi dovesti atmosferu u ravnotežno stanje tijekom vremenskog koraka integracije, dati će jači tok nego što bi ga dala sa istim vremenskim korakom kao u ostalim dijelovima modela. Taj tok se na poslijetku zbraja sa ostalim tokovima u modelu te dobivamo ukupnu fizikalnu tendenciju varijable. Ukoliko je promatrana parametrizacija potencijalno numerički nestabilna u nekoj meteorološkoj situaciji, očekujemo da će se u modelu pojaviti oscilacije ili bi varijable modela mogle postići tako velike vrijednosti da program prekine sa izvršenjem.

Ovako zamišljena metoda provjeravanja numeričke stabilnosti primjenjena je na parametrizacije utjecaja nerazlučenih težinskih valova i orografije, konvekcije i oborine. Parametrizacija turbulentne razmjene nije uključena u testiranje jer je već ustanovljeno da je samo uvjetno numerički stabilna.

Kako bismo pronašli poručja u kojima se pojavljuju fibrilacije, promatramo veličinu

$$A = \frac{1}{2} [T(t + \Delta t) + T(t - \Delta t) - 2T(t)] \quad (22)$$

koja približno opisuje amplitudu fibrilacija u polju temperature. A može

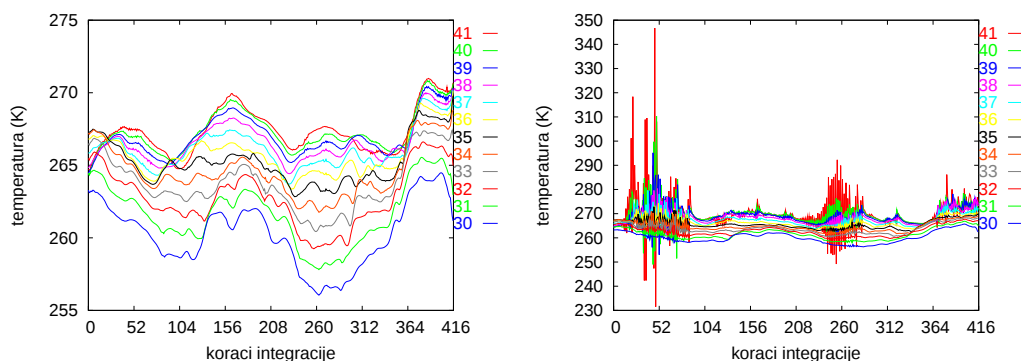


Slika 13: Amplituda oscilacija temperature na najnižoj razini modela nakon 96 sati integracije (tj. veličina $\frac{1}{2}(T(t + \Delta t) + T(t - \Delta t) - 2T(t))$) za referentnu integraciju modela (lijevo) i integraciju modela kada je provjeravana numerička stabilnost parametrizacije oborine (desno).

postići zamijetne vrijednosti u područjima intenzivnih i naglih promjena stanja atmosfere kao npr. u blizini atmosferskih fronti, koje nisu prouzročene numeričkom nestabilnosti. Ne očekujemo da će amplituda oscilacija na takvim mjestima amplificirati. U referentnoj integraciji modela (slika 13 lijevo) se mogu uočiti neka područja zamjetne vrijednosti A . Pretpostavljamo da su prihvatljiva i meteorološki opravdana te posvećujemo pažnju kontrolnim integracijama modela u kojima smo neku parametrizaciju podvrgli kontroli stabilnosti.

Sheme koje parametriziraju utjecaj nerazlučene orografije i konvekcije pri testiranju nisu izazvale nestabilnost u modelu. Kada je provjeri podvrgnuta parametrizacija koja opisuje stvaranje oborine i promjene agregatnog stanja oborine, u modelu su se pojavile brze oscilacije vrlo velike amplitude (slika 13 desno). Zaključujemo da je došlo do bitne promjene amplitude oscilacija temperature te da je parametrizacija oborine potencijalno numerički nestabilna.

Slika 14 prikazuje evoluciju temperature u vremenu u jednoj točki modela kroz 96 sati integracije na 10 razina u modelu, počevši od najdonjeg. Prikazane su vrijednosti za svaki vremenski korak integracije. Iako evolucija temperature u referentnoj integraciji ne pokazuje znakove nestabilnosti, tj. nema oscilacija (slika 14 lijevo), pri provjeri numeričke stabilnosti parametrizacije oborine (slika 14 desno) u polju temperature se povremeno javljaju oscilacije vrlo velike amplitude oko sporo promjenjivog, ali meteorološki važnijeg, rješenja.



Slika 14: Razvoj temperature u vremenu u jednoj točki modela na 10 najnižih razina u atmosferi za referentnu integraciju modela (lijevo) i integraciju modela kada je provjeravana numerička stabilnost parametrizacije oborine (desno). Prikazane su vrijednosti za svaki vremenski korak integracije. x-os prikazuje vrijeme kao broj vremenskih koraka od početka integracije, a y-os prikazuje temperaturu u Kelvinima.

Također je bitno naglasiti da vrijednost niti jedne varijable modela nije toliko narasla da bi model prekinuo sa izvršenjem. To znači da je model nastavio integraciju i završio te proizveo nekakvu prognozu vremena čak i kada su varijable modela vrlo intenzivno oscilirale. Naravno, ta prognoza je imala upitnu meteorološku vrijednost.

Kako bismo spriječili negativan utjecaj na stabilnost modela, potrebno je pronaći uzrok ovih jakih oscilacija. Zbog toga je načinjen cijeli niz testova u kojima su pojedine komponente modela isključene ili bitno izmjenjene.

5.1.1 Uzrok nestabilnosti u parametrizaciji oborina

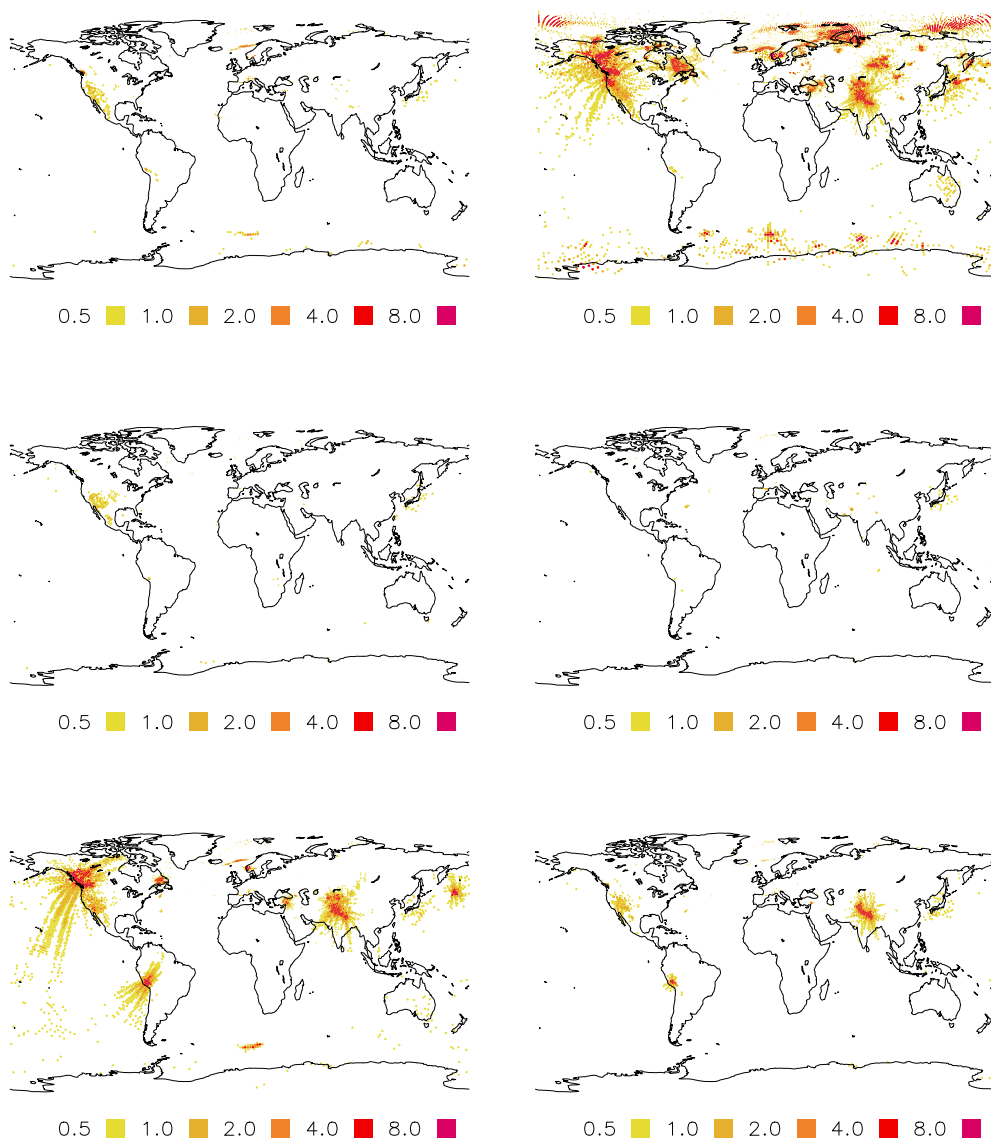
Parametrizacija oborine utječe na temperaturu i specifičnu vlažnost. U modelu su opisani i mnogi drugi procesi koji utječu na ove varijable. Potrebno je pronaći koji proces ili međudjelovanje dvaju ili više procesa je odgovorno za oscilacije velike amplitude kakve su prikazane na slikama 13 i 14.

Ravnotežna točka specifične vlažnosti i temperature za zasićen zrak izračunava se iterativnim postupkom Newtonovom metodom (npr. Mesinger, 1976). Proces plitke i duboke konvekcije također utječu na preraspodjelu temperature i specifične vlažnosti. Ne treba zaboraviti da je i u samoj parametrizaciji oborine opisano nekoliko procesa: otapanje, isparavanje i zaleđivanje oborine.

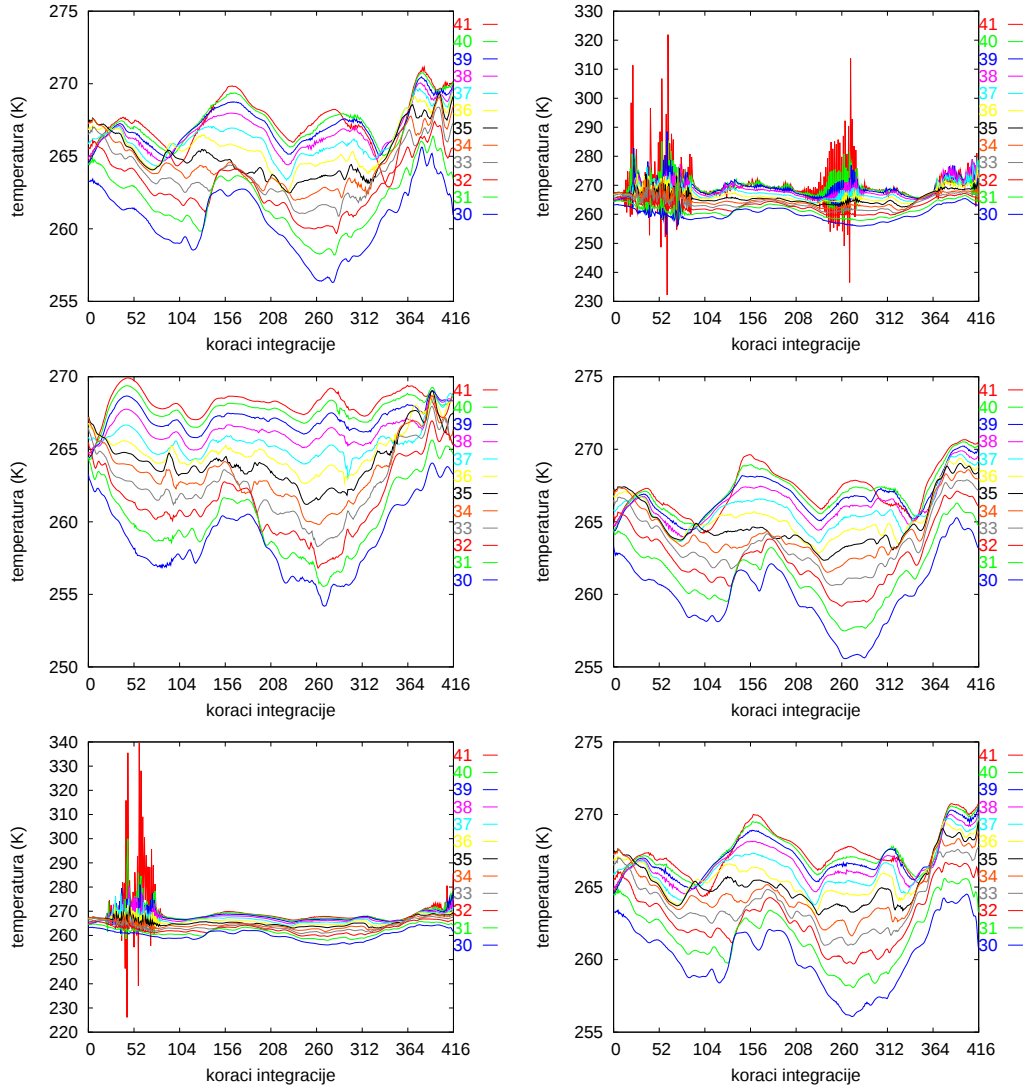
U svakom od ovih testova, primjenjena je metoda amplifikacije oscilacija te je navedeni proces isključen ili izmjenjen, a ostali procesi djeluju jednako kao i u referentnoj integraciji. Nadamo se da ćemo ovi testovima otkriti koji proces je odgovoran za pojavljivanje oscilacija:

- povećan je broj iteracija u Newtonovoj petlji, bez povoljnog utjecaja;
- isključena parametrizacija plitke konvekcije, bez povoljnog utjecaja;
- isključena parametrizacija duboke konvekcije, bez povoljnog utjecaja, štoviše, fibrilacije su amplificirale;
- isključeni su procesi isparavanja i otapanja oborine, oscilacije su nestale;
- isključen je samo proces isparavanja oborine, oscilacije su ponovno nestale (slika 15. gore lijevo, slika 16. gore lijevo);
- isključen je samo proces otapanja oborine, integracija je prekinula prije kraja, znatno smanjenje ili povećanje koeficijenta koji kontrolira intenzitet otapanja i zamrzavanja nije znatno umanjilo amplitudu oscilacija (slika 15. gore desno, slika 16. gore desno);
- isključeno ukapljivanje, oscilacije su nestale (slika 15. sredina lijevo, slika 16. sredina lijevo);
- isključen je proces zaleđivanja i otapanja, tj. sva oborina je tretirana kao tekuća i oscilacije su nestale (slika 15. sredina desno, slika 16. sredina desno);
- omjer brzine isparavanja ledenih kristala u odnosu na kapljice vode je smanjen sa 80 na 8 i dio oscilacija je nestao, a dio se zadržao (slika 15. dolje lijevo, slika 16. dolje lijevo);
- omjer brzine isparavanja ledenih kristala u odnosu na kapljice vode je smanjen sa 80 na 4 i oscilacije su se većinom povukle (slika 15. dolje desno, slika 16. dolje desno);
- omjer brzine isparavanja ledenih kristala u odnosu na kapljice vode je smanjen sa 80 na 0.8 i oscilacije su u potpunosti nestale.

Zaključeno je da su fibrilacije povezane sa parametrizacijom procesa isparavanja ledenih kristala, koja se temelji na slijedećim pretpostavkama:



Slika 15: Amplituda oscilacija temperature na najnižoj razini modela nakon 96 sati integracije za integraciju modela kada je provjeravana numerička stabilnost parametrizacije oborine i isključeno isparavanje oborine (gore lijevo), znatno reducirano zaleđivanje oborine (gore desno), isključeno ukapljivanje (sredina lijevo), isključena pojava ledenih kristala (*cryoscopic cycle*) (sredina desno), omjer brzine isparavanja ledenih kristala i kapi vode smanjen 8 (dolje lijevo), 4 (dolje desno).



Slika 16: Razvoj temperature u vremenu u jednoj točki modela na 10 najnižih razina u atmosferi za integraciju modela kada je provjeravana numerička stabilnost parametrizacije oborine i isključeno isparavanje oborine (gore lijevo), znatno reducirano zaleđivanje oborine (gore desno), isključeno ukapljivanje (sredina lijevo), isključena pojava ledenih kristala (*cryoscopic cycle*) (sredina desno), omjer brzine isparavanja ledenih kristala i kapi vode smanjen 8 (dolje lijevo), 4 (dolje desno). Prikazane su vrijednosti za svaki vremenski korak integracije. x-os prikazuje vrijeme kao broj vremenskih koraka od početka integracije, a y-os prikazuje temperaturu u Kelvinima.

- sva oborina nastala tijekom jednog vremenskog koraka integracije padne na tlo ili se ispari putem tijekom tog istog vremenskog koraka,
- oborina ima istu temperaturu kao i okolna atmosfera (zrak), te se nalazi u obliku ledenih kristala, ako je temperatura ispod 273.15 K, a iznad te granice u obliku vodenih kapi.

Vodene kapi padaju oko 4 puta brže nego ledeni kristali (npr. Pielke, 2002). Vodene kapi i ledeni kristali u istom vremenskom koraku u kojem su nastali dopiru o tla. Putem prema tlu prolaze kroz vlagom nezasićene slojeve u kojima se isparavaju. Ledeni kristali se u danom sloju atmosfere zadržavaju 4 puta dulje nego kapi vode, pa se 4 puta više ispare. Također, ledeni kristal dane mase ima puno veću površinu nego kapljica vode iste mase pa se puno brže isparava. Kada uzmemo u obzir oba čimbenika, tijekom jednog koraka integracije ledeni kristali se efektivno isparavaju 80 puta više nego kapi vode zato što imaju puno veću površinu i sporije padaju.

Fibrilacije su nastale kao produkt međudjelovanja procesa isparavanja vodenih kapi i ledenih kristala te zaleđivanja i otapanja. Ako ledeni kristal pada kroz nezasićeni topli sloj, on se jako brzo ispari ili otopi. Pri tome se za isparavanje i otapanje utroši velika količina energije zbog čega se smanji temperatura zraka. Temperatura zraka se smanji toliko da u slijedećem vremenskom koraku taj sloj postane zasićen, ledeni kristali se više ne isparavaju nego vodena para prelazi u ledene kristale. Pri kondenzaciji se oslobađa energija zbog koje temperatura u tom sloju raste. Temperatura se toliko poveća da zrak postane nezasićen. Proces se tako odvija u krug, dok se ne "iscijedi" sva vlaga iz promatranog stupca atmosfere.

6 Linearna i nelinearna nestabilnost u fizikalnim parametrizacijama modela ALADIN

6.1 Uvod

6.1.1 Linearna nestabilnost

Prema npr. Mesinger (1976) kada promatramo linearnu jednodimenzionalnu jednadžbu advekcije

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

diskretiziranu metodom u konačnih razlika

$$\frac{u_x^{t+\Delta t} - u_x^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + u_0 \frac{u_{x+\Delta x}^t - u_{x-\Delta x}^t}{2\Delta x} = 0.$$

Uvjet za numeričku stabilnost rješenja

$$u_0 \Delta t < \Delta x \quad (23)$$

nazivamo CFL kriterijem stabilnosti prema Courant, Friedrichs i Lewy. Ako umjesto konstantne brzine (u vremenu i prostoru) u_0 , koristimo u koji se mijenja u prostoru i vremenu, tada CFL uvjet glasi

$$u_{max} \Delta t < \Delta x \quad (24)$$

gdje je u_{max} maksimalna brzina zračne struje u domeni. Pojava kada se dogodi da je $u_{max} \Delta t > \Delta x$ naziva se **linearna nestabilnost**. Možemo izbjeći linearnu nestabilnost korištenjem vrlo kratkog vremenskog koraka u eksplisitnoj shemi. Implicitna shema osigurava linearnu stabilnost.

Linearna nestabilnost je u advektivnoj shemi modela Aladin izbjegnuta semi-lagrangijanskom shemom koja ne podliježe CFL kriteriju (npr. Durran, 1999). U paketu fizikalnih parametrizacija modela Aladin, linearna nestabilnost se sprječava korištenjem implicitnih shema za integraciju.

6.1.2 Nelinearna nestabilnost

Kada promatramo nelinearnu jednadžbu advekcije (npr. Mesinger, 1976)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

u kojoj se u mijenja u prostoru i vremenu $u = u(x, t)$. Član $u \frac{\partial u}{\partial x}$ je nelinearan. Ako je $u = \sin kx$, tada je

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = k \sin kx \cos kx = \frac{1}{2} \sin 2kx.$$

Zbog nelinearnog člana u rješenju možemo imati komponentu dvostruko većeg valnog broja $2k$ (odnosno upola kraće valne duljine) od polaznog valnog broja k . Na mreži ekvidistantnih točaka, najkraći val koji možemo prikazati u konačnim razlikama je $2\Delta x$ (npr. Mesinger, 1976, Pielke, 2002), odnosno najveći valni broj je $\pi/\Delta x$. Nelinearni član može napraviti član valnog broja $2k$ koji je veći od $\pi/\Delta x$, te ga više ne možemo ispravno prikazati s konačnim razlikama. Javlja se pogrešan val valnog broja $k^* = \frac{2\pi}{\Delta x} - 2k$ (jer je $2k > \pi/\Delta x$).

Pogrešno prepoznavanje valne duljine prekratkih valova se na engleskom naziva *aliasing*. Kako ova pojava potječe od nelinearnih članova, naziva se **nelinearna nestabilnost** (Mesinger, 1976). Za ovu vrstu nestabilnosti je karakteristično nakupljanje energije na kratkim valnim duljinama.

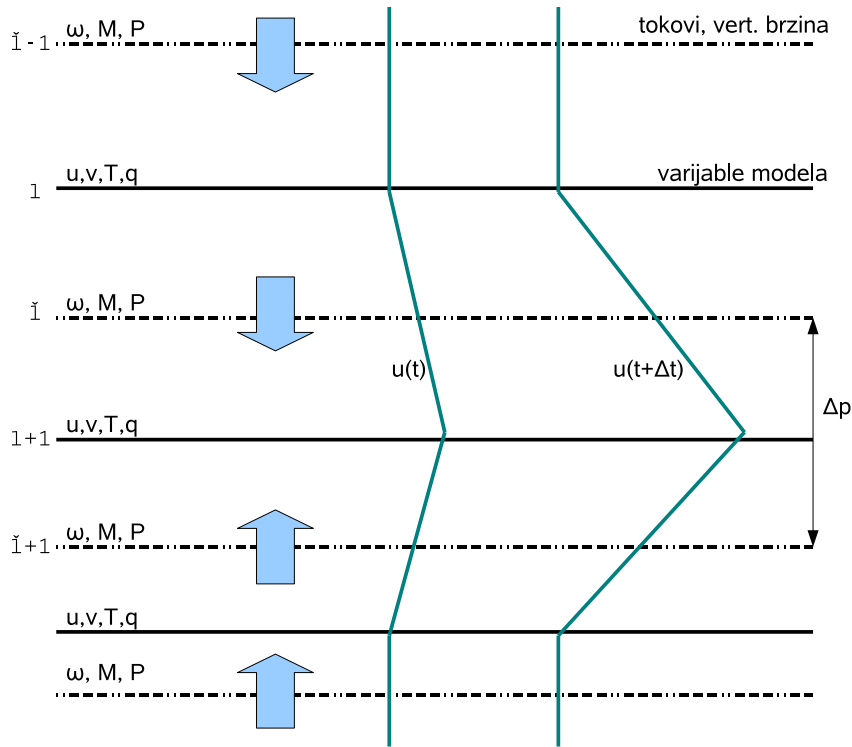
U Mesinger (1976) je predstavljeno i nekoliko metoda za uklanjanje ove vrste nestabilnosti iz rješenja za slučaj jednostavne jednodimenzionalne nelinearne jednadžbe advekcije diskretizirane na ekvidistantnoj mreži točaka. Jedna od navedenih mogućnosti je semi-lagrangijanska shema (navedena je kao druga mogućnost, u Mesinger, 1976). Nelinearna nestabilnost advektivne sheme u modelu Aladin je izbjegnuta korištenjem semi-lagrangijske advekcije.

Nelinearna nestabilnost koja se može pojaviti u rješenjima nekih fizikalnih parametrizacija otklanja se naknadnim izmjenama izračunatih tokova, kako je opisano u slijedećem poglavlju.

6.1.3 Linearna i nelinearna nestabilnost u fizikalnim parametrizacijama ALADIN-a

Vertikalna koordinata u Aladinu je hibridna η koordinata (Simmons i Burridge, 1981) pa se visina nivoa u modelu (promatrana u z , tlak p ili geopotencijal ϕ koordinati) mijenja i u prostoru i u vremenu. Također, razmak između nivoa se mijenja s visinom ako ga promatramo u z , p ili ϕ koordinati. Fizikalne parametrizacije rješavamo u vertikalnom stupcu, većinom koristeći p ili ϕ kao vertikalnu koordinatu.

Linearna nestabilnost je uklonjena iz rješenja korištenjem implicitnih shema pri računanju doprinosa različitih fizikalnih procesa, osim za dugovalno i kratkovalno zdračenje.



Slika 17: Shematski prikaz nivoa (pune crne linije) i međunivoa (isprekidana linija), tokova između nivoa (svjetloplave strelice) te zamišljena promjena funkcije u tijekom jednog vremenskog koraka zbog djelovanja prikazanih tokova, ($u(t)$ je prikazana lijevo, a $u(t + \Delta t)$ je prikazana desno).

Nelinearna nestabilnost nastaje kada se nakuplja energija u valovima na kratkim valnim duljinama zbog nelinearnih članova. Kako se i sam korak mreže u vertikali nelinearno mijenja sa vertikalnom koordinatom, tj. $\Delta p = \Delta p(p)$, u diskretiziranim jednadžbama neki članovi postanu nelinearni. Vertikalna rezolucija modela je veća pri tlu nego više u atmosferi, promatrana sa Δp , tada pri vrhu atmosfere vertikalna rezolucija opet raste. Zbog toga "val" u vertikali može biti prikazan sa dovoljno točaka mreže pri tlu, ali ne i više u atmosferi. Za umanjivanje problema nelinearne nestabilnosti zbog nejednolike vertikalne diskretizacije, potrebno je vrlo pažljivo definirati nivoe u modelu (Simmons i Burridge, 1981). Možemo očekivati pojavu nelinearne

nestabilnosti u bilo kojoj parametrizaciji. Ustanovljeno je da su joj podložne shema za duboku konvekciju (Geleyn i sur., 1982) te parametrizacija utjecaja nerazlučene orografije i težinskih valova (Geleyn, 1987).

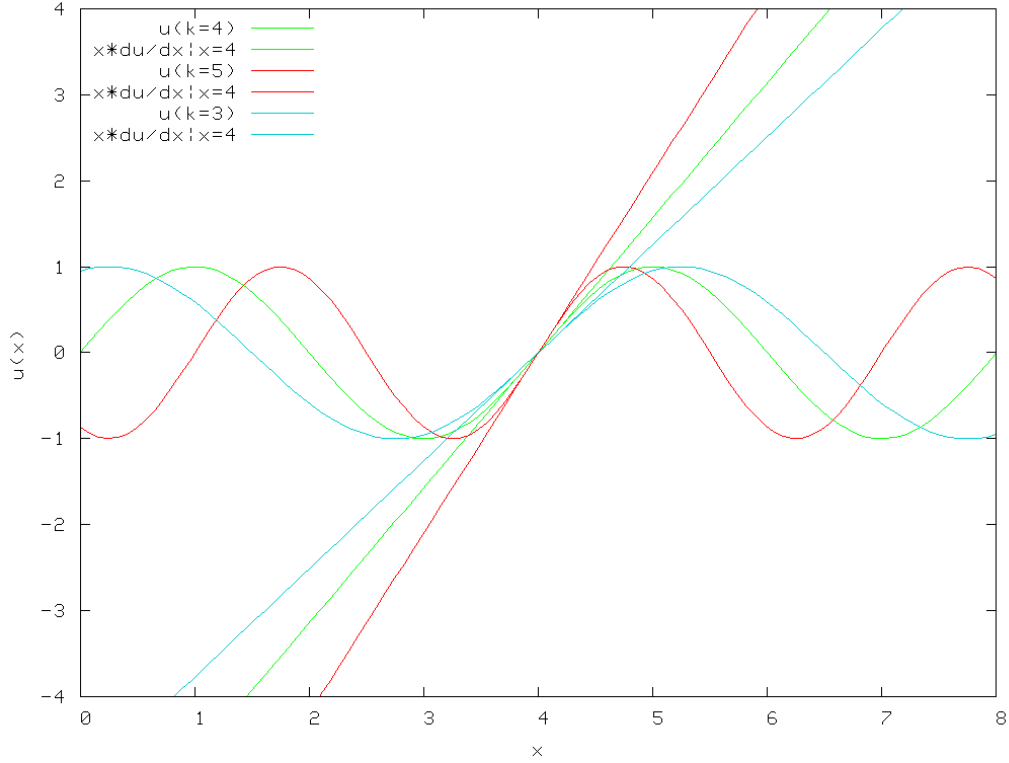
Neki procesi u atmosferi su aktivni samo u nekim slojevima atmosfere, a u drugima ne, npr. oblačni sloj se može nalaziti u samo nekoliko slojeva atmosfere, ili čak samo jednom sloju. Oblačan sloj je osobit po mikrofizičkim procesima koji se u njemu odvijaju, a u slojevima bez naoblake ispod i iznad tih istih procesa nema. Takav diskontinuitet na bazi i vrhu oblaka također doprinosi dodatnom sakupljanju energije u kratke valne duljine, karakterističnom za nelinearnu nestabilnost.

Slika 17 shematski prikazuje kako može doći do sakupljanja energije u malim valnim duljinama zbog djelovanja fizikalnih parametrizacija u vertikalni. Tok varijable modela u zbog djelovanja nekog parametriziranog procesa M (prikazan debelim strelicama u vertikalni) se mijenja s visinom. Sama varijabla u se također mijenja s visinom. Djelovanjem nelinearnog člana (npr. $M_u \frac{\partial u}{\partial p}$) dolazi do povećanja ekstrema i gradijenata u zbog sakupljanja energije u kratkim valnim duljinama, što je karakteristično za nelinearnu nestabilnost (npr. $u(t + \Delta t)$ na slici 17).

Iz slike 17 možemo vidjeti da do sakupljanja energije u kratkim valnim duljinama dolazi zbog konvergencije toka u vertikalni. Dakle, iako je pojava linearne nestabilnosti izbjegnuta korištenjem implicitnih shema, koje istovremeno omogućuju relativno duge vremenske korake, nagle promjene toka i varijabli modela u vertikalni mogu dovesti do pojave nelinearne nestabilnosti zbog nelinearnih članova u jednadžbama fizikalnih parametrizacija. Dulji vremenski korak integracije dodatno pogoršava situaciju.

Nelinearnu nestabilnost rješenja jednadžbe advekcije na jednoliko razmaknutoj mreži točaka možemo suzbiti na niz načina (npr. Mesinger, 1976). Kako to učiniti na nejednoliko razmaknutoj mreži točaka za nelinearnije ili čak diskontinuirane probleme fizikalnih parametrizacija u meteorološkom modelu? Nelinearnu nestabilnost prouzroči nelinearan član u jednadžbi, koji se sastoji od veličina koje se brzo mijenjanju u prostoru, te zbog toga proizvede rješenje koje se u prostoru mijenja još brže. Na slici 18 vidimo da što je veći valni broj k to je razlika vrijednosti u i između dvije susjedne točke u diskretiziranom prostoru (npr. između $u(x = 4)$ i $u(x = 5)$).

Do pojave nelinearne nestabilnosti pri računanju utjecaja parametriziranih procesa dolazi zbog velike razlike u toku mase između dva sloja u atmo-



Slika 18: Shematski prikaz tri vala $u(kx)$ na ekvidistantnoj mreži za $k = \frac{\pi}{2\Delta x}$ (zeleno), $k = \frac{2\pi}{5\Delta x}$ (crveno) i $k = \frac{2\pi}{3\Delta x}$ (plavo). Također je prikazan pravac $x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=4}$.

sferi (ΔM , slika 17) na nekom nivou atmosfere (npr. na nivou $l + 1$ na slici 17). Stoga bismo mogli spriječiti pojavu nelinearne nestabilnosti tako da ograničimo ΔM na nekom nivou. Pri tome ne ograničavamo vrijednost toka M između dva nivoa, tako da M može poprimiti gotovo proizvoljno veliku vrijednost, dokle god je ΔM između dva nivoa dovoljno malen, ne bi trebalo doći do pojave nelinearne nestabilnosti. Stoga, pojednostavljeno prikazano, ΔM ograničavamo tako da bude

$$\Delta M \Delta t < \Delta p. \quad (25)$$

Iako ovaj uvjet na prvi pogled jako liči na CFL kriterij za linearnu nestabilnost ($c\Delta t < \Delta x$), ovim uvjetom ne ograničavamo maksimalnu vrijednost M , nego njegovu varijabilnost u prostoru, te na taj način ne dozvoljavamo nakupljanje energije na (pre)kratkim valnim duljinama.

U samom postupku stabilizacije rješenja, kada primjenjujemo jed. (25), ΔM predstavlja nelinearni član, tj. pri postupku stabilizacije, ograničavamo razliku za cijeli nelinearni član (npr. koristimo $M = F\Delta u$) a na poslijetku izmjenimo samo tok F , a varijablu modela u ne diramo.

Kako bismo provjerili da li je neka shema podložna ovoj vrsti nestabilnosti, možemo provesti test tako da u danoj shemi koristimo manji Δp nego u ostatku modela. Na taj način potaknuti ćemo shemu da proizvede "kraće valove" koji bi svojim međudjelovanjem mogli prouzročiti nelinearnu nestabilnost.

Stabilizacija modela zbog pojave nelinearne nestabilnosti je provedena u shemama za parametrizaciju utjecaja nerazlučenih težinskih valova i konvekcije i to modifikacijom toka mase. Time je narušena preciznost sheme. Kako bismo provjerili da li je takva stabilizacija uistinu neophodna, a isto tako provjerili kako predložena metoda provjere nelinearne nestabilnosti radi, uklonjen je stabilizirajući dio sheme i primjenjen test.

U ovom radu provjerena je otpornost numeričkih shema korištenih u paketu fizikalnih parametrizacija modela Aladin na pojavu nelinearne nestabilnosti. Osmišljen je način na koji se može izazvati nelinearna nestabilnost u pojedinoj fizikalnoj parametrizaciji. Zatim je ta ideja provjerena na onim parametrizacijama u Aladinu za koje je već poznato da su potencijalno nelinearno nestabilne. Napravljene su integracije modela s uključenom i isključenom shemom koja spriječava pojavu nelinearne nestabilnosti. U testu je istovremeno bio uključen mehanizam koji izaziva nelinearnu nestabilnost. U referentnim integracijama mehanizam koji izaziva nelinearnu nestabilnost nije bio aktivan. Isti postupak je proveden i sa parametrizacijom utjecaja nerazlučenih težinskih valova.

Kako su ovi testovi pokazali da predloženi mehanizam za provjeru nelinearne nestabilnosti uistinu može izazvati nelinearnu nestabilnost, čak i kada je uključena shema koja spriječava pojavu nelinearne nestabilnosti. Stabilizacijska shema je izmjenjena tako, da čak niti upotrebljeni destabilizacijski mehanizam, nije uspio izazvati nelinearnu nestabilnost. Ovime se pokazalo da mehanizam izazivanja nelinearne nestabilnosti uistinu radi, pa je isti upotrebljen u preostalim parametrizacijama u modelu Aladin, koje su se pokazale otpornim na pojavu ovog tipa numeričke nestabilnosti.

6.2 Parametrizacija utjecaja duboke konvekcije

U Geleyn i sur. (1982) objavljeni su detalji parametrizacije utjecaja duboke konvekcije, uključujući i numeričku shemu kojom se stabilizira rješenje. Potonja je također opisana u Courtier i sur. (1991). Tendencija varijable modela ψ zbog djelovanja duboke konvekcije, pojednostavljeno prikazano, parametrizina je:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta M_c \frac{\partial \psi}{\partial p} + D(\psi_c - \psi) \quad (26)$$

gdje je

- ψ je varijabla modela $(u, v, q, s = \phi + C_p T)$,
- $\Delta M_c = E_v/q$ u sloju pri tlu, E_v je isparavanje tla, a q je specifična vlažnost,
- $\Delta M_c = \frac{d\omega}{dp} \Delta p$, ω je vertikalna brzina u sustavu koji koristi tlak kao vertikalnu koordinatu,
- $D = \Delta M_c / \Delta p_t$ u sloju na vrhu oblaka, inače je jednak nuli.

Tok mase ΔM_c ovisi o varijablama modela $(u, v, q, s = \phi + C_p T)$, te se mijenja i u prostoru i u vremenu. Koristimo implicitnu shemu jer onemogućuje pojavu linearne nestabilnosti, koju možemo uvesti samo ako jednadžbu lineariziramo u vremenu, problem i dalje ostaje nelinearan u prostoru te može prouzročiti nelinearnu nestabilnost. Za tok mase vrijedi $\frac{\partial M_c}{\partial p} = D - E$, D je član koji opisuje konvektivno uvlačenje (eng. *entrainment*), a E opisuje konvektivno izvlačenje (eng. *detrainment*). U shemi za jednadžbu vertikalne difuzije pretpostavljamo da se koeficijent turbulentne razmjene ne mijenja u vremenu kako bismo mogli problem riješiti implicitno bez korištenja iterativnog postupka. Na sličan način, implicitnu shemu izvodimo tako da pretpostavimo da je M_c konstantan u vremenu (ali se i dalje mijenja u prostoru, pogotovo vertikalni) te jednadžbu možemo pojednostaviti tako da postaje:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial M_c \psi}{\partial p} + D\psi_c - E\psi. \quad (27)$$

Promatramo samo advektivni dio jednadžbe.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial M_c \psi}{\partial p}$$

Rješavamo sustav jednadžbi

$$\frac{\psi_i^{t+\Delta t} - \psi_i^t}{\Delta t} = -\frac{M_{ci}}{2} \frac{\psi_i^{t+\Delta t} + \psi_{i+1}^{t+\Delta t}}{\Delta p_i} + \frac{M_{ci-1}}{2} \frac{\psi_{i-1}^{t+\Delta t} + \psi_i^{t+\Delta t}}{\Delta p_i}$$

ili pojednostavljeno

$$\psi_i^{t+\Delta t} - \psi_i^t = -C_{i+} \frac{\psi_i^{t+\Delta t} + \psi_{i+1}^{t+\Delta t}}{2} + C_{i-} \frac{\psi_{i-1}^{t+\Delta t} + \psi_i^{t+\Delta t}}{2}$$

gdje je $C_{i+} = \frac{M_{ci}\Delta t}{\Delta p_i}$, $C_{i-} = \frac{M_{ci-1}\Delta t}{\Delta p_i}$.

Kada implicitno rješavamo jednadžbe modela na razinama u atmosferi, dolazimo do matematičkog problema inverzije tri-dijagonalne matrice. Dobivamo linearan sustav jednadžbi koji u matricnom obliku možemo pisati kao

$$\begin{pmatrix} \vdots & 0 & 0 \\ 2 + C_{i-1,+} - C_{i-1,-} & C_{i-1,+} & 0 \\ -C_{i-} & 2 + C_{i,+} - C_{i,-} & C_{i,+} \\ 0 & -C_{i+1,-} & 2 + C_{i+1,+} - C_{i+1,-} \\ 0 & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \psi_{i-1}^{t+\Delta t} \\ \psi_i^{t+\Delta t} \\ \psi_{i+1}^{t+\Delta t} \\ \vdots \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \vdots \\ \psi_{i-1}^t \\ \psi_i^t \\ \psi_{i+1}^t \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (28)$$

te se problem svodi na nalaženje inverza prve matrice u sustavu. Kako bismo mogli invertirati matricu na numerički siguran način, trebamo osigurati dijagonalnu dominantnost matrice, tj. apsolutna vrijednost bilo kojeg elementa na dijagonali treba biti veća od sume apsolutnih vrijednosti svih ostalih elemenata u istom redu ili stupcu. U suprotnom, čak i kada matrica formalno posjeduje inverz, može doći do dijeljenja s nulom tijekom numeričkog računanja inverza. Nelinearna nestabilnost je povezana sa nedostatkom dijagonalne dominantnosti matrice, odnosno stupnjem singularnosti matrice. Promatramo uvjet $|2 + C_{i,+} - C_{i,-}| > |C_{i,+}| + |C_{i,-}|$ u različitim vremenskim situacijama:

- uvlačenje zraka $|1 + C_{i,+}| > |C_{i,-}| > |C_{i,+}|$ - dijagonalna dominantnost nije osigurana.

- izvlačenje zraka $|C_{i,-}| < |C_{i,+}|$ - dijagonalna dominantnost nije osigurana.

Nelinearna nestabilnost u konvektivnoj shemi onemogućuje pronalaženje inverza matrice u nekoj (vrlo rijetkoj) vremenskoj situaciji. Tada model u nekom koraku pokuša dijeliti s nulom i program se prestane izvršavati. Do tog trenutka, varijable u modelu ne poprimaju neke izuzetne vrijednosti, samo njihovi odnosi u tom trenutku daju problematične odnose u matrici.

Pojavu nelinearne nestabilnosti možemo spriječiti ako osiguramo dijagonalnu dominantnost matrice, što možemo učiniti na nekoliko načina

- Koeficijente u matrici možemo promijeniti kada je to potrebno tako da osiguramo dijagonalnu dominantnost matrice (Geleyn i sur., 1982).
- napravimo shemu jednostrano uzvodnom (eng. *upstream*) pa matrica postane bi-dijagonalna i dijagonalno dominantna.

Drugu metodu ne možemo primjeniti u operativnoj parametrizaciji konvekcije jer parametrizacija uvlačenja ne ograničuje smjer toka mase. Tok mase može poprimiti takve vrijednosti da gornje pretpostavke više ne vrijede. Stoga je potrebno prvo modificirati koeficijente u matrici kako bismo osigurali dijagonalnu dominantnost matrice, naravno, na fizikalno prihvatljiv način, a zatim rješavamo jednostrano uzvodni problem.

6.2.1 Uzlazno strujanje (eng. *updraft*)

Problem možemo popraviti modifikacijom izračunatog toka mase $M_{\tilde{l}}$ na razini $\tilde{l}$:

$$M'_{\tilde{l}} = M'_{\tilde{l}-1} + (M_{\tilde{l}} - M'_{\tilde{l}-1}) \frac{\Delta p_l + \Delta t M'_{\tilde{l}-1}}{\Delta p_l + \Delta t |M_{\tilde{l}} - M'_{\tilde{l}-1}|}$$

$M'_{\tilde{l}}$ izračunavamo u petlji od vrha atmosfere prema dolje koristeći novu vrijednost za $M'_{\tilde{l}+1}$ (u Aladinu razine brojimo od vrha atmosfere prema tlu).

Ovakva shema prekomjerni tok može sakupiti u sloj između najnižeg razini u modelu i tla što također može prouzročiti nestabilnost. Stoga je mehanizam zaštite od nelinearne nestabilnosti izmjenjen, a nova shema izgleda ovako:

$$M'_{\tilde{l}} = M'_{\tilde{l}+1} + (M_{\tilde{l}} - M'_{\tilde{l}+1}) \frac{\Delta p_l}{\Delta p_l + \Delta t \cdot \max(0, M_{\tilde{l}} - M'_{\tilde{l}+1})}$$

i računamo u petlji od tla prema gore koristeći popravljenu vrijednost $M'_{\tilde{l}+1}$.

6.2.2 Silazno strujanje (eng. *downdraft*)

Problem možemo popraviti modifikacijom izračunatog toka mase $M_{\tilde{l}}$ na razini $\tilde{l}$:

$$M'_{\tilde{l}-1} = M'_{\tilde{l}} + (M_{\tilde{l}-1} - M'_{\tilde{l}}) \frac{\Delta p_l + \Delta t M'_{\tilde{l}}}{\Delta p_l + \Delta t |M_{\tilde{l}-1} - M'_{\tilde{l}}|}$$

$M'_{\tilde{l}-1}$ izračunavamo u petlji od tla prema gore koristeći novu vrijednost za $M'_{\tilde{l}}$.

Shema je izmjenjena kako bi odgovarala novom mehanizmu zaštite u shemi za uzlaznu struju (eng. *updraft*), pa nova shema glasi:

$$M'_{\tilde{l}} = M'_{\tilde{l}-1} + (M_{\tilde{l}} - M'_{\tilde{l}-1}) \frac{\Delta p_l}{\Delta p_l + \Delta t \max(0, M_{\tilde{l}} - M'_{\tilde{l}-1})}$$

te računamo u petlji od vrha atmosfere prema dolje koristeći novu, popravljenu vrijednost $M'_{\tilde{l}-1}$.

6.3 Parametrizacija utjecaja težinskih valova

Parametrizacija utjecaja nerazlučene orografije i težinskih valova u modelu Aladin (npr. Geleyn, 1987) daje vertikalni tok horizontalnog impulsa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \tau}{\partial p} \quad (29)$$

gdje τ nelinearno ovisi o u . Problem pojednostavimo tako da je $\tau = \frac{1}{g} u M$ gdje je $M = M(u)$ koeficijent koji opisuje tok impulsa. Eksplicitna diskretizacija u vremenu bi glasila

$$u_l^{t+\Delta t} = u_l^t - \frac{M_l \Delta t}{\Delta p_l} u_l^t + \frac{M_{l-1} \Delta t}{\Delta p_l} u_{l-1}^t$$

ako računamo od vrha atmosfere prema tlu (u Aladinu razine brojimo od vrha atmosfere prema tlu). Zbog linearne stabilnosti bismo morali koristiti vrlo kratak vremenski korak integracije u ovoj shemi. Kako bismo izbjegli linearnu nestabilnost, koristimo implicitnu shemu za izračunavanje tendencije horizontalne brzine zbog djelovanja orografskog potezanja (*orographic drag*). Implicitnu shemu dobivamo modifikacijom toka količine gibanja po slijedećem principu:

$$\frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t} = -K u^{t+\Delta t} \quad (30)$$

je implicitna shema. Iz ove jednadžbe možemo izvesti $u^{t+\Delta t}(1 + K\Delta t) = u^t$ iz čega slijedi da je $u^{t+\Delta t} = \frac{u^t}{1+K\Delta t}$, kada to uvrstimo u 30, dobivamo

$$\frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t} = -\frac{K}{1 + K\Delta t}u^t.$$

U ovom primjeru K može varirati i u prostoru i u vremenu i ovisiti o varijablama modela. Kako bismo problem mogli riješiti implicitno i bez upotrebe iterativnog postupka, zanemarujemo promjene K u vremenu, odnosno koristimo $K = K(u^t)$.

Schema izračunava tok količine gibanja zbog djelovanja nerazlučene orografije i težinskih valova, tokovi su modificirani tako da iz njih možemo dobiti implicitno rješenje za tendenciju horizontalnog vjetrova. Modifikacija algoritma ako računamo od vrha atmosfere prema dolje je

$$\frac{u_l^{t+\Delta t} - u_l^t}{\Delta t} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t M_l}{\Delta p_l}} \left[\frac{\Delta t M_{l-1}}{\Delta p_l} (u_{l-1}^{t+\Delta t} - u_{l-1}^t) - \Delta t \frac{M_l u_l^t - M_{l-1} u_{l-1}^t}{\Delta p_l} \right],$$

a modifikacija toka količine gibanja je

$$\tau_l^m = \tau_{l-1}^m - \frac{1}{1 + \frac{\Delta t M_l}{\Delta p_l}} (\tau_{l-1}^m - \tau_l).$$

Nelinearnu nestabilnost efikasije eliminiramo kada računamo od tla prema vrhu atmosfere. U suprotnom, može doći do akumulacije toka između najniže razine modela u atmosferi i tla. Ako računamo od tla prema vrhu atmosfere, algoritam glasi ovako

$$\frac{u_{l-1}^{t+\Delta t} - u_{l-1}^t}{\Delta t} = \frac{1}{\frac{\Delta t M_{l-1}}{\Delta p_l}} \left[\left(1 + \frac{\Delta t M_l}{\Delta p_l} \right) (u_l^{t+\Delta t} - u_l^t) + \Delta t \frac{M_l u_l^t - M_{l-1} u_{l-1}^t}{\Delta p_l} \right],$$

a modifikacija toka količine gibanja je

$$\tau_{l-1}^m = \tau_l^m + \frac{1}{\frac{\Delta t M_l}{\Delta p_l}} (\tau_l^m - \tau_{l-1}).$$

Numeričku shemu stabiliziramo tako da izmjenimo već izračunati tok mase. Ovim postupkom, tok mase je izmjenjen samo ako bi uistinu došlo do pojave nelinearne nestabilnosti.

7 Zaključak

Kompleksni meteorološki numerički modeli za prognozu vremena sadrže mnoge potencijalne izvore numeričke nestabilnosti. Ti modeli se koriste za operativnu prognozu, pa rade sa vrlo dugim vremenskim koracima integracije, što samo pogoršava problem. Teorijska analiza numeričke stabilnosti cjelokupnog sustava jednadžbi modela nije moguća. Stoga se do sada analiziralo samo pojedine dijelove, odvojeno od ostatka modela, a pri analizi su se uvođila znatna pojednostavljenja.

Stabilnost i točnost numeričke sheme se često međusobno natječu. Stabilizacija numeričke sheme modificira utjecaj parametrizacije na evoluciju varijabli u modelu, a često degradira točnost sheme pa je treba primjenjivati samo ako je ugrožena stabilnost modela.

Pronađeni znakovi postojanja numeričke nestabilnosti paketa fizikalnih parametrizacija koji u modelima Aladin i Arpège ukazuje na potrebu za metodom kojom bismo mogli provjeriti numeričku stabilnost nelinearne parametrizacijske sheme (bez pojednostavljenja) na istoj mreži točaka na kojoj integriramo model uključujući i međudjelovanja sa ostalim procesima u modelu. U ovom radu je prikazana jedna takva metoda, koja pokušava aktivirati prikrivene izvore nestabilnosti te prepoznati njihov utjecaj na evoluciju varijabli modela.

Prikrivene izvore nestabilnosti u nekoj parametrizaciji u modelu pronalazimo tako da pokušamo destabilizirati numeričku shemu korištenjem različitog vremenskog koraka ili različitog koraka u vertikalni, nego u ostatku modela. Ako pri tome rješenje modela ne pokazuje znakove numeričke nestabilnosti zaključujemo da je shema numerički stabilna. Ukoliko se u rješenju pojave fibrilacije ili se čak model prestane izvršavati, tada možemo potražiti uzrok numeričke nestabilnosti.

Primjenom kraćeg vremenskog koraka, nađeno je da je parametrizacija koja opisuje nastanak razlučene oborine podložna nastanku fibrilacija. Te je otkriveno da fibrilacije nastaju zbog međudjelovanja procesa isparavanja vodenih kapi i ledenih kristala te zaleđivanja i otapanja.

Primjenom manjeg koraka u vertikali, potvrđena je potreba za mehanizmom uklanjanja nelinearne nestabilnosti u shemama duboke konvekcije i nerazlučenih težinskih valova. Otkriveno je da je isti mehanizam efikasniji ukoliko ga računamo od tla prema vrhu atmosfere (tj. iz područja s finijim prema području s grubljim rezlučivanjem).

8 Literatura

- 1 Bates, J.R., and A. McDonald, 1982: Multiply-upstream, semi-Lagrangian advective schemes: Analysis and application to a multilevel primitive equation model. *Mon. Wea. Rev.*, **110**, 1831-1842.
- 2 Beljaars, A.C.M., 1991: Numerical schemes for parameterizations. ECMWF Seminar proceedings, 9-13 September 1991, Numerical methods in atmospheric models, Vol II, 1-42.
- 3 Beljaars, A.C.M., 2001: Issues in boundary layer parameterization for large scale models. ECMWF Seminar proceedings, 3-7 September 2001, Key issues in the parameterization of subgrid physical processes, 71-88.
- 4 Beljaars, A.C.M., P.Bechtold, M.Kohler, J-J.Morcrette, A.Tompkins, P. Viterbo i N.P. Wedi 2004: The numerics of physical parameterization. ECMWF Seminar proceedings, 6-10 September 2004, Recent developments in numerical methods for atmosphere and ocean modelling, 113-134.
- 5 Bénard,P., A. Marki, P. N. Neytchev i M. T. Prtenjak, 2000: Stabilization of nonlinear vertical diffusion schemes in the context of NWP models. *Mon. Wea. Rev.*, **128**, 1937-1948.
- 6 Brown, P. i J.P. Pandolfo, 1982: A numerical predictability problem in solution of the nonlinear diffusion equation. *Mon. Wea. Rev.*, **110**, 1214-1223.
- 7 Catry, B., J.-F. Geleyn, M. Tudor, P. Benard and A. Trojakova, 2007: Flux-conservative thermodynamic equations in a mass-weighted framework. *Tellus*, **59A**, 71-79.
- 8 Courtier, P. and J.-F. Geleyn, 1988: A global spectral model with variable resolution application to the shallow water equations. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **114**, 1321-1346.
- 9 Courtier, P., C. Freydier, J.-F. Geleyn, F. Rabier and M.Rochas, 1991: The ARPEGE project at METEO-FRANCE. Proceedings from the ECMWF workshop on numerical methods in atmospheric models. 9-13 September 1991, **2**, 193-231.
- 10 Cuxart, J. 1997: Planetary boundary layer simulation: from LES to general circulation models. *PhD Thesis*, Universitat de Barcelona, pp. 200.

- 11 Davies, H.C., 1983: The stability of some planetary boundary layer diffusion equation. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 2140-2143.
- 12 Durran, D.R., 1999: Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics. *Springer-Verlag New York inc.*, pp. 465.
- 13 Epperson, J.F., 2001: An introduction to numerical methods and analysis, *John Wiley & sons*, 576 pp.
- 11 Geleyn, J-F., 1987: Use of a modified Richardson number for parameterizing the effect of shallow convection. In: Matsuno Z. (ed)., Short and medium range weather prediction, special volume of *J. Meteor. Soc. Japan*, 141-149.
- 14 Geleyn, J-F., C. Girard i J-F. Louis, 1982: A simple parameterization of moist convection for large-scale atmospheric models. *Beitr. Phys. Atmos.*, **55**, 325-334.
- 15 Geleyn, J-F. i A. Hollingsworth, 1979: An economical analytical method for computation of the interaction between scattering and line absorption of radiation. *Contr. Atmos. Phys.*, **52**, 1-16.
- 16 Giard, D. i E. Bazile, 2000: Implementation of a new assimilation scheme for soil and surface variables in a global NWP model. *Mon. Wea. Rev.*, **128**, 997-1015.
- 17 Girard, C. i Y. Delage, 1990: Stable schemes for nonlinear vertical diffusion in atmospheric circulation models. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 737-745.
- 18 Hortal, M. 2002: The development and testing of a new two-time-level semi-Lagrangian scheme (SETTLS) in the ECMWF forecast model. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **128**, 1671-1687.
- 19 Ivatek-Šahdan, S. i M. Tudor, 2004: Use of high-resolution dynamical adaptation in operational suite and research impact studies. *Meteorologische Zeitschrift*, **13**, No. 2, 1-10.
- 20 Jeričević, A. i B. Grisogono, 2006: The critical bulk Richardson number in urban areas: verification and application in a numerical weather prediction model. *Tellus*, **58A**, 19-27.
- 21 Kalnay, E. i M. Kanamitsu, 1988: Time schemes for strongly nonlinear damping equations. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 1945-1958.

- 22 Kessler, E., 1969: On distribution and continuity of water substance in atmospheric circulations. *Met. Mon. Am. Met. Soc.*, **vol. 10**, No. 32, 84 str.
- 23 Laprise, R., 1992: The Euler equations of motion with hydrostatic pressure as an independent variable. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 197-207.
- 24 Louis, J.-F., M. Tiedke i J.-F. Geleyn, 1982: A short history of PBL parameterization at ECMWF. Proceedings from the ECMWF workshop on planetary boundary layer parameterization, 25-27 November 1981, 59-79.
- 25 Machenhauer, B. i J. E. Haugen, 1987: Test of a spectral limited area shallow water model with time-dependent lateral boundary conditions and combined normal mode/semi-Lagrangian time integration schemes. Proceedings from the ECMWF workshop on techniques for horizontal discretization in numerical weather prediction models. 2-4 November 1987, 361-377.
- 26 McDonald, A., 1986: A semi-Lagrangian and semi-implicit two time level integration scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 824-830.
- 27 McDonald, A. 1998: The origin of noise in semi-Lagrangian integrations. ECMWF Seminar proceedings, 7-11 September 1998, Recent developments in numerical methods for atmospheric modelling, 308-334.
- 28 Mesinger, F., 1976: Dinamička meteorologija. *Građevinska knjiga*, pp. 224.
- 29 Pielke, R.A., 2002: Mesoscale meteorological modeling. *Academic press*, pp. 676.
- 30 Ritter, B. i J.-F. Geleyn, 1992: A comprehensive radiation scheme for numerical weather prediction models with potential applications in climate simulations. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 303-325.
- 31 Simmons, A. J. i D. M. Burridge, 1981: An energy and angular momentum conserving vertical finite-difference scheme and hybrid vertical coordinate. *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 758-766.
- 32 Smolarkiewicz, P. K., Pudykiewicz, J. A., 1992: A class of semi-Lagrangian approximations for fluids. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **49**, 2082-2096.

- 33** Stull R. B., 1988: An Introduction to Boundary Layer Meteorology. Kluwer, 666 pp.
- 34** Teixeira, J. 2000: Boundary layer clouds in large scale atmospheric models: cloud schemes and numerical aspects. *PhD Thesis*, ECMWF, Reading, UK, pp. 190.
- 35** Telišman Prtenjak, M., A. Marki i Pierre Bénard, 1998: Refinement of the vertical diffusion scheme in the ARPÉGE/ALADIN model. *Geofizika*, **15**, 27-51.
- 36** Tudor, M. i S. Ivatek-Šahdan, 2002: MAP IOP 15 case study. *Hrv. Met. Časopis*, **37**, 1-14.

9 Sažetak

Do nedavno se fizikalne parametrizacije smatralo isuviše grubim te je njihovom numeričkom rješavanju bilo posvećeno malo vremena. Pojednostavljenja uvedena u samoj parametrizaciji su davala velike pogreške pa su numeričke pogreške pri tome smatrane zanemarivim. Tim više što je numerička shema često sastavni dio sheme parametrizacije te je teško razlučiti numeričku pogrešku od fizikalne. Do sada je najveća pažnja posvećena numeričkim problemima vezanim uz jednadžbu vertikalne difuzije. U mnoge modele za operativnu prognozu vremena ugrađeni su mehanizmi koji stabiliziraju tu shemu pa tako i u modelu Aladin odnosno Arpége.

Istovremeno, znatan napredak u razvoju numeričkih shema za rješavanje dinamičkog dijela modela je doveo do široke upotrebe semi-implicitne semi-lagrangijanske sheme na dvije vremenske razine. Ta shema je iznimno efikasna za računanje te omogućuje znatno brže računanje prognoze pa se koristi u meteorološkim modelima za operativnu prognozu vremena.

Analiza numeričke stabilnosti sheme kojom se u modelu računa neka parametrizacija se često radi na izoliranoj pojednostavljenoj (lineariziranoj) verziji parametrizacije. Kako su parametrizacije obično nelinearne te međudjeluju sa ostalim procesima u modelu, postoji potreba za provjerom numeričke stabilnosti parametrizacije u njenom pravom obliku unutar samog modela.

U ovom radu je prikazana metoda kojom se može provjeriti numerička stabilnost parametrizacije u onom obliku u kojem se ona nalazi u modelu dok međudjeluje sa ostalim procesima opisanim u modelu. Cilj metode je aktivirati prikrivene izvore nestabilnosti te prepoznati njihov utjecaj na evoluciju varijabli modela.

Fizikalne parametrizacije koje se koriste u modelima Aladin i Arpége su podvrgnute provjeri numeričke stabilnosti. Potvrđeno je postojanje nelinearne nestabilnosti u shemama duboke konvekcije te utjecaja nerazlučenih težinskih valova i orografije. Sheme su izmjenjene kako bi se spriječila pojava nelinearne nestabilnosti.

Također je uočena pojava ukočenosti (eng. *stiffness*) u shemi za razlučenu oborinu te je pronađen i njen uzrok u vrijednosti koeficijenta kojim se opisuje omjer brzine isparavanja ledenih kristala i vodenih kapi.

10 Summary

Until recently, physical parameterisations have been considered crude and numerical methods used for solving them received little attention. Simplifications introduced in parameterizations have introduced significant errors so the numerical error was considered less important. Moreover, since the numerical scheme is usually an integral part of the parameterization scheme, it is difficult to distinguish between the numerical and physical error. Among the physical parameterization schemes, numerical issues related to the vertical diffusion parameterisation have received the most attention. Some operational models have built-in mechanisms that stabilize the vertical diffusion scheme when used with long time-steps, and these models include Arpège and Aladin.

Simultaneously, considerable development of the numerical schemes used to integrate the dynamical part of the model has led to wide usage of the two-time-level semi-implicit semi-lagrangian schemes in many meteorological models used for the operational weather forecast. Their computational efficiency allows faster computation of the weather forecast.

Stability analysis of a scheme used to solve a particular parameterization in a model is usually done with an isolated and simplified (linearized) version of the scheme. Since the parameterization is usually non-linear and interacts with the rest of the model, there is a need for a stability check of the true nonlinear scheme inside the meteorological model. The method is based on the particular instability properties that may affect certain meteorological model. The aim of the method is to activate hidden sources of instability and to recognize their effect on the evolution of the model variables.

Physical parameterizations used in Aladin and Arpège models have been checked for the signs of the numerical instability. The existence of nonlinear instability in deep convection and gravity wave drag parameterizations has been confirmed. These schemes have been modified in order to prevent further occurrence of the nonlinear instability in them.

The large scale precipitation scheme has been found to be stiff due to the value of the ratio between the speed of evaporation of ice crystals to water droplets.

11 Životopis

Rođena sam 20-tog srpnja 1976. u Celju, Republika Slovenija. Osnovnu i srednju školu sam pohađala u Virovitici gdje sam završila Opću gimnaziju 1994. godine. Iste godine sam upisala Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu. Diplomirala sam 2000. sa temom "Prijenos česti zraka na područje Hrvatske" pod vodstvom Mr. sc. Alice Bajić. Poslijediplomski studij Geofizike sam upisala 2000. godine.

Od 2000. godine sam zaposlena na Državnom hidrometeorološkom zavodu u Službi za meteorološka istraživanja i razvoj u Odjelu za istraživanje i modeliranje atmosferskih procesa u Odsjeku za numeričko modeliranje. Tijekom radnog vijeka sam sudjelovala u utemeljenju operativne prognoze vremena numeričkim modelom Aladin. Također aktivno sudjelujem u istraživanjima na modelu Aladin, kako u Hrvatskoj tako i u inozemstvu, širom zajednice zemalja koje sudjeluju u razvoju modela Aladin.

Od 2002. sudjelujem na projektu "Oluje i prirodne katastrofe u Hrvatskoj" koji financira Ministarstvo znanosti i tehnologije Republike Hrvatske.

Stručno sam se usavršavala na nekoliko konferencija, radionica i seminara:

- EMEP Workshop on Air Pollution Modelling, Dubrovnik (HR), 4 – 8 Listopad 1999.
- ALATNET Seminar of High Resolution Modelling, Radostovice (CZ), 15 – 26 Svibanj 2000.
- ECMWF Seminar on Key issues in the parameterization of subgrid physical processes, Reading (UK), 3 – 7 Rujan 2001.
- ALATNET Seminar on numerical methods, Kranjska gora (SI), 27 Svibanj – 1 Lipanj 2002.
- 12th ALADIN workshop, Medulin (HR), 3 – 7 Lipanj 2002.
- ALADIN maintenance and phasing workshop, Budapest (H), 25 – 29 Studeni 2002.
- ALADIN mini coupling workshop, Ljubljana (SI), 17 – 21 Veljaa 2003.
- ALADIN ODB Training, Budapest (H), 14 – 18 Travanj 2003.
- Second Workshop on Statistical and Dynamical Adaptation, Vienna (A), 5 – 6 Svibanj 2003.

- ICAM/MAP Meeting 2003, Brig (CH), 19 – 23 Svibanj 2003.
- Summer School on Mountain Meteorology, Trento (I), 17 – 22 Kolovoz 2003.
- 13th ALADIN workshop, Prague (CZ), 24 – 28 Studeni 2003.
- 14th ALADIN Workshop, Innsbruck (AU) 1 – 4 Lipanj 2004.
- Summer School on Mountain Meteorology, Trento (II), 26 – 30 Srpanj 2004.
- ECMWF Seminar on Recent developements in numerical methods in atmosphere and ocean modelling, Reading (UK), 6 – 10 Rujan 2004.
- TCWGPDI Prague (CZ), 22 – 26 Studeni 2004.
- ICAM/MAP Meeting 2005, Zadar (HR), 23 – 27 Svibanj 2005.
- 15th ALADIN Workshop, Bratislava (SK) 6 – 10 Lipanj 2005.
- EWGLAM/SRNWP meeting, Ljubljana (SLO), 3 – 5 October, 2005.
- ALADIN maintenance and assimilation workshop, Budimpešta (HU), 14 – 18 Studeni, 2005.
- 1st AROME training course, Poina Brasov (RO), 21 – 25 Studeni, 2005.
- 16th Aladin Workshop, Sofia (BG), 12 – 17 Svibanj, 2006.
- Summer school on non-hydrostatic dynamics and data assimilation, Sestroretsk (RU), 12 – 16 Lipanj, 2006.
- EWGLAM/SRNWP meeting, Zurich (CH), 9 – 12 Listopad, 2006.
- SRNWP-NT 2006 mini-workshop, Zagreb(HR), 5 – 6 Prosinac, 2006.

Stručni boravci u inozemstvu:

- Developement of PBL diagnostics for DIAGPACK, Prag (CZ), 2 Travanj – 14 Svibanj 2000.
- PBL height diagnostics, Prag (CZ), 8 Listopad – 3 Studeni 2000.
- PBL height diagnostics, Prag (CZ), 10 Ožujak – 6 Travanj 2001.
- PBL height and fibrillations, Toulouse (FR), 15 Listopad – 15 Prosinac 2001.

- Stability of physics schemes and fibrillations, Prag (CZ), 17 Kolovoz – 4 Listopad 2002.
- Robustness of physical parameterization, Toulouse (FR), 1 – 30 Ožujak 2003.
- Physics-dynamics interface for predictor-corrector scheme, Prag (CZ), 1 – 30 Lipanj 2003.
- Phasing, Toulouse (FR), 15 Rujan – 31 Listopad 2003.
- Phasing, Toulouse (FR), 1 – 29 Veljače 2004.
- Aladin-Arome equations, Prag (CZ), 15 Ožujak – 9 Travanj 2004.
- Physics timestepping for predictor-corrector scheme, Prag (CZ), 27 Lipanj – 24 Srpanj 2004.
- MesoNH physics, 1 Studeni – 18 Prosinac 2004.
- Alaro0 moist physics and pTKE scheme, Prag (CZ), 7 – 11 Studeni, 2005.
- Alaro0 phasing, Brussels (BE), 16 Siječanj – 16 Veljače, 2006.
- DART06a cruise, Adriatic, 26 Veljače – 28 Ožujak, 2006.
- Alaro0 phasing, Prague (CZ), 9 Travanj – 6 Svibanj, 2006.
- DART06b cruise, Adriatic, 13 – 31 Kolovoz, 2006.
- Physics-dynamics interface, Prague (CZ), 23 Listopad – 18 Studeni, 2006.

12 Popis radova

Izvorni znanstveni radovi

- Tudor, M. and S. Ivatek–Šahdan, 2002: MAP IOP 15 case study. *Hrv. Met. Časopis*, **37**, 1-14.
- Ivatek–Šahdan, S. and M. Tudor, 2004: Use of High-Resolution Dynamical Adaptation in Operational Suite and Research Impact Studies. *Meteorologische Zeitschrift*, Vol. **13**, No. **2**, 1-10.
- Catry, B., J-F. Geleyn, M. Tudor, P. Benard and A. Trojakova, 2007: Flux-conservative thermodynamic equations in a mass-weighted framework. *Tellus*, **59A**, 71-79.

Znanstveni skupovi

- M. Tudor, 2002. MAP IOP 15 Case Study, 12th ALADIN Workshop, Medulin (HR), 2-7 Lipanj 2002.
- M. Tudor i S. Ivatek–Šahdan, 2002. The Operational Croatian ALADIN Suite, 12th ALADIN Workshop, Medulin (HR), 2 – 7 Lipanj 2002.
- M. Tudor, 2003. Use of High Resolution Dynamical Adaptation in Impact Studies, SRNWP workshop on dynamical and statistical adaptation, Beč (A), 5 – 6 Svibanj 2003.
- M. Tudor, 2003. Use of High Resolution Dynamical Adaptation in Impact Studies, ICAM/MAP Meeting 2003, Brig (CH), 19 – 23 Svibanj 2003.
- M. Tudor, 2003. Robustness of the physical parameterization schemes, 13th ALADIN Workshop, Prag (CZ), 24 – 28 Studeni 2003.
- M. Tudor S. Ivatek–Šahdan, 2003. The Operational Croatian ALADIN Suite, 13th ALADIN Workshop, Prag (CZ), 24 – 28 Studeni 2003.
- M. Tudor, 2003. High resolution dynamical adaptation using hydrostatic ALADIN, 13th ALADIN Workshop, Prag (CZ), 24 – 28 Studeni 2003.
- M. Tudor, 2004. Arome equations, 14th ALADIN Workshop, Innsbruck (AU) 1 – 4 Lipanj 2004.

- M. Tudor i S. Ivatek–Šahdan, 2004. The Operational Croatian ALADIN Suite, 14th ALADIN Workshop, Innsbruck (AU) 1 – 4 Lipanj 2004.
- M. Tudor, 2004. Mass conservation in Arome and Aladin, TCWGPDI Prag (CZ), 22 – 26 Studeni 2004.
- M. Tudor, 2004. Stiffness and non-linear instability of the physical parameterization schemes, TCWGPDI Prag (CZ), 22 – 26 Studeni 2004.
- M. Tudor, V. Tutiš, I. Stiperski i F. Vaña, 2005. Testing the new semi-lagrangian horizontal diffusion scheme, ICAM/MAP konferencija, Zadar (HR), 23 – 27 Svibanj 2005.
- M. Tudor, I. Stiperski, V. Tutiš i D. Drvar, 2005. Comparison of few radiation and cloudiness parametrisations on a persistent low stratus case ICAM/MAP konferencija, Zadar (HR), 23 – 27 Svibanj 2005.
- D. Drvar, I. Stiperski, M. Tudor i V. Tutiš, 2005. Testing the new subgrid-scale orography representation on bora cases ICAM/MAP konferencija, Zadar (HR), 23 – 27 Svibanj 2005.
- I. Janeković i M. Tudor 2005. The Adriatic Sea wave response to severe bura wind ICAM/MAP konferencija, Zadar (HR), 23 – 27 Svibanj 2005.
- M. Tudor i S. Ivatek–Šahdan, 2005. The Operational Croatian ALADIN Suite, 15th ALADIN Workshop, Bratislava (SK) 6 – 10 Lipanj 2005.
- M. Tudor, I. Stiperski, V. Tutiš i D. Drvar, 2005. Testing radiation and cloud schemes in Aladin on a fog case, 15th ALADIN Workshop, Bratislava (SK) 6 – 10 Lipanj 2005.
- M. Tudor, V. Tutiš, I. Stiperski i F. Vaña, 2005. SLHD performance, 15th ALADIN Workshop, Bratislava (SK) 6 – 10 Lipanj 2005.
- M. Tudor, 2005. Impact of horizontal diffusion, radiation and cloud schemes, EWGLAM/SRNWP meeting, Ljubljana (SLO), 3 – 5 Listopad 2005.
- M. Tudor, 2005. Physics in the data-flow, ALADIN maintenance and assimilation workshop, Budimpešta(HU), 14 – 18 Studeni 2005.
- M. Tudor i B. Catry, 2006. Microphysics for Alaro0, 16th Aladin Workshop, Sofia (BG), 12 – 17 Svibanj 2006.

- M. Tudor, 2006. The semi-Lagrangian horizontal diffusion scheme, Summer school on non-hydrostatic dynamics and data assimilation, Sestroretsk (RU), 12 – 16 Lipanj 2006.