

GEOMATEMATIKA

Tomislav MALVIĆ

Na poziv glavnoga urednika *Vijesti HGD-a* **dr. Tvrтка Korbara** sa zadovoljstvom sam pripremio temu broja koja je pred vama, čitateljima, pod naslovom „*Geomatematika*“. Sam odabir teme nije mi bio težak, no oblik pisanja ovakva priloga, istovremeno opširnijega popularnog članka, a opet zanimljivog najširem krugu čitatelja i članova HGD-a predstavljao je svojevrsan izazov. Zato sam se odlučio za iznošenje materije u obliku eseja, kao književne forme u kojoj mi je dopušteno iznijeti osobne utiske i slobodne refleksije o odabranoj temi *...osvjetljavajući je s raznih strana, osobito onih koje leže u središtu autorova interesa ili se po njegovu mišljenju ističu svojom aktualnošću* (citat iz *Opće enciklopedije* Leksikografskog zavoda „Miroslav Krleža“).

Povijest geologije, često je povijest geoloških karata kao najpoznatijega rezultata geoloških istraživanja. Koliko god to, na početku članka, neobično izgledalo, povijest geomatematike usko je povezana s geoloških kartama te opisivanjem prirode i prirodnih pojava. Od prve geološke karte koju je 1815. godine načinio **William Smith** (1769-1839, **slika 1**) na kojoj je prikazana površina Velike Britanije, pa do **dr. Harrisona Schmitta** (rođ. 1935, **slika 2**) geologa, astronauta i senatora te zadnje osobe koja je do sada hodala Mjesecom, geologija i geolozi uglavnom su se poistovjećivali s prirodom i prirodnim znanostima.



Slika 1: William Smith (1769-1839), otac engleske geologije

Pomalo kontradiktorno, geologija kao primjenjena znanost i geolozi desetljećima su uglavnom izbjegavali prevelike „izlete“ u druge prirodne znanosti poput matematike, fizike, pa i biologije. Usprkos tomu većina je prihvatila upotrebu statistike, pogotovo deskriptivne, za opisivanje prikupljenih podataka pomoću različitih grafova te veličina poput srednje vrijednosti, kvartila, standardne devijacije, varijance, odnosno različitim mjerama centralne tendencije (potpune, položajne i specifične srednje vrijednosti i dr.).



Slika 2: Dr. Harrison Schmitt, američki geolog, član misije Apollo 17

Naravno, kao u svim ljudskim djelatnostima uvijek se nađe nekolicina malo više istraživački nastrojenih pripadnika zajednice koji se „odvažno“ hvataju ukoštac s nekim tehnikama koje dosada nisu bile prihvaćene ili su upotrebljavane relativno rijetko, bilo u zemljopisnom ili znanstvenom smislu. Otprilike takav ulazak u „svijet geologije“ imala je i matematika, „kraljica znanosti“ te disciplina kojom se najelegantnije može opisati svekoliki svijet oko nas, kako priroda tako i tehnika. Elegancija njezine apstrakcije zahtijeva pripremljen i čisti um koji želi opisati svoje okruženje, te nije rijetkost da shvaćanje svijeta simbolički ili teološki često predstavlja dvije strane iste medalje. Uz to simboličko prikazivanje pojava, apstrakcija i eventualno nove spoznaje u prvo vrijeme „odbit“ će pobornike i praktikante tradicionalnih dostignuća, sve dok se kroz nekoliko iznimnih uspjeha takav pristup ne pokaže kao alat za nove proboje u znanosti.

Sličan razvojni put imala je geomatematika. Niz desetljeća, relativno skromno, to područje obuhvaćalo je elementarne statističke testove, kombinatoriku i rudimente vjerojatnosti koje nitko i nije svrstavao u geologiju. Svatko od nas prakticirao ih je barem nekoliko puta u vrijeme studija ili pri analizi

financiranja svojih istraživanja (s naglaskom na kombinatoriku). No, otprilike 60-tih godina 20. stoljeća pojavile su postupno dvije grane primjenjene matematike koje su do početka 80-tih godina bile prihvaćene u geologiji kao ravnopravni alati za izvođenje geoloških istraživanja. To su *geostatistika* koja se razvila kao posebna podvrsta geologije i *neuronske mreže* koje su svoju primjenu našle u nizu prirodnih, tehničkih i društvenih znanosti pa i u geologiji.

Obzirom na takav razvojni put područje **geomatematike** može se podijeliti u tri poddiscipline: „klasičnu“ **statistiku, geostatistiku i neuronske mreže.**

Statistički alati

Najčešći alati koje većina geologa upotrebljava može se svrstati u područje „klasične“ **statistike** te čine najveću skupinu *matematičkih metoda primjenjenih u geologiji (geomatematici)*. Teško je izdvojiti sve statističke metode koje se mogu, na razne načine, primjeniti u različitim geološkim analizama, ali nekoliko je glavnih podskupina koje se najčešće upotrebljavaju. Svatko od nas niz je puta svoje podatke prikazivao histogramom, tražeći u njima odraz normalne razdiobe, dijeleći ih u razrede i računajući minimalnu, maksimalnu i srednju aritmetičku vrijednost. Ovisno o vrsti podataka takve sredine mogu biti računate i kao harmonijske ili geometrijske.

Kako je spomenuto, najčešća prirodna razdioba kojom se odlikuju geološki podatci je normalna ili Gaussova, ali različitim testovima može se provjeriti ponašaju li se mjerenja ponekad u skladu s binomnom ili Poissonovom distribucijom. Takva provjera često je i vrlo poželjna, jer pretpostavka normalnosti ili log-normalnosti geološki je aksiom kojim je olakšana analiza, a ne prirodno pravilo koje uvijek opisuje stvarnost (REIMANN & FILZMOSE, 2000). Nadalje, jedno od čestih pitanja je pripadaju li dva skupa mjerenja, na različitim lokacijama, geološkim istovrsnim jedinicama. Takva ispitivanja moguće je načiniti usporedbom varijanci (F-test ili Fisherov test) ili sredina (t-test ili Studentov test), odnosno provjeravanjem tzv. nulte hipoteze. Ako se takva sličnost utvrdi statistički, znatno je lakše zatim potražiti i geološka objašnjenja koja takvu vezu mogu objasniti (stratigrafija, petrofizika i taložni okoliši). Ispitivanje jednakosti varijanci F-testom, a srednjih vrijednosti t-testom *simbolički* se može prikazati testiranjem sljedećih hipotezi:

- 1) $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$
 $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2;$
- 2) $H_0: \mu_1 = \mu_2$
 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

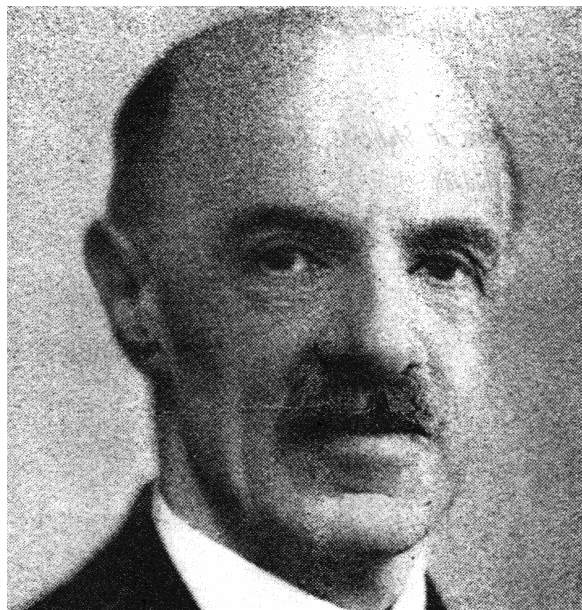
Testiranje podrazumijeva ispitivanje navedenih razlika obzirom na prihvaćanje ili odbacivanje polazne hipoteze o jednakosti dviju geoloških jedinica, a obzirom na stupanj značajnosti, odnosno dopuštene pogreške takvoga testa (prag značajnosti najčešće je $\alpha=0,05$). Obično se prvo testira sličnost varijanci. Ako je ista dokazana prelazi se na dodatni test ispitivanja sličnosti sredina. Za čitatelje zainteresirane detaljnije za takvu vrstu statističkih analiza preporučam rad MALVIĆ et al. (2005) u kome je opisano testiranje načinjeno u cilju usporedbe miocenskih pješčenjaka u Bjelovarskoj subdepresiji.

Najčešći statistički test koji se primjenjuje je izračun koeficijenta korelacije. U ljudskom duhu (inženjerskom malo manje) postoji želja da zavisnost nepoznate ili slabo poznate veličine iskaže kroz odnos s nečime što je dobro poznato. Svatko od nas je nebrojeno puta računao vrijednost R, razmišljao je li zaključak potrebno donijeti na temelju R ili R^2 te da li upotrijebiti „snažnu“ izjavu o korelaciji ili „ublažiti“ svoja opažanja pišući o trendu. Čak i osobe kojima inženjerstvo nije struka mogu kvantificirati naše izjave kada govorimo ili pišemo o „korelaciji“, toliko je taj pojam raširen u kolokvijalnom govoru i pismu. Postoji niz testova za izračun korelacije, poput najčešćeg korištenoga linearnog koeficijenta (produkt-momenta) korelacije imenovanog prema **Karl Pearsonu** (1857-1936, **slika 3**). *Pearson* predstavlja jedno od najvećih imena u razvoju cijele statistike, a 1911. godine osnovao je statistički odjel na Londonskom sveučilištu (*engl. University College London*), prvi sveučilišni odjel takve vrste na svijetu. Zanimljivo je da je *Pearson* bio i zagovornik **eugenike**, vrste socijalne filozofije koja je zagovarala unaprijeđivanje ljudskih nasljednih osobina kroz različite oblike intervencije u društvu i na samim ljudima.



Slika 3: Karl Pearson, engleski statističar

Kada se spominje korelacija, posebno u geologiji gdje različita mjerenja mogu biti na potpuno različitim skalama, nezaobilazna je upotreba koeficijenata korelacije ranka, odnosno neparametarskih mjera korelacije. Najpoznatiji takav test je *Spearmanov* koeficijent korelacije imanovan prema **Charlesu Edwardu Spearmanu** (1863-1945, **slika 4**), engleskom *psihologu* poznatom po radovima u statistici (*faktorska analiza* te *Spearmanov koeficijent korelacije*).



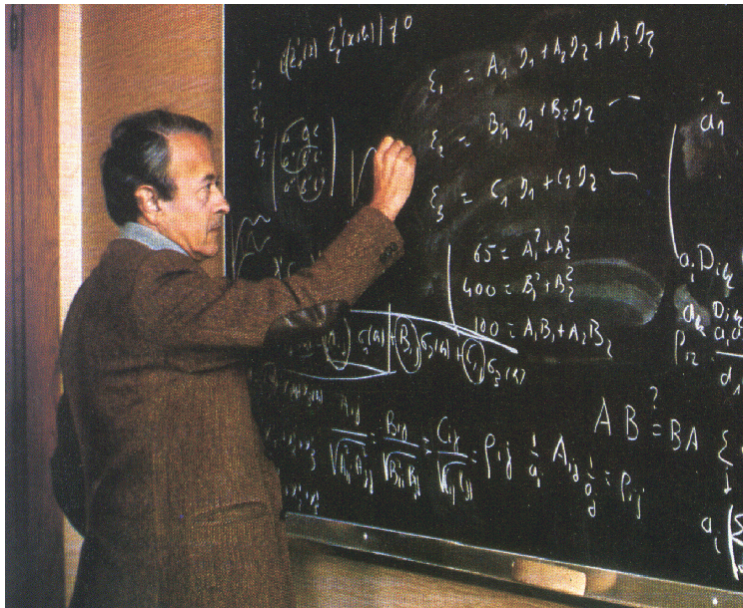
Slika 4: Charles Edward Spearman, engleski psiholog
(preuzeto sa stranica University of York, Dept. of Mathematics)

Na brojne načine nam *klasične statističke metode* olakšavaju analizu geoloških podataka. Vrlo često ako mjerenja ne zadovolje statističke testove te na taj način ne iskažu smislenost njihova smještanja u analitičke skupine, nema smisla niti prelaziti na geološke usporedbe. Iako takva tvrdnja nije aksiomska, svakako ima veliku težinu i vrijednost te pokazuje mjesto i vrijednost statistike u geologiji.

Geostatistika

Geostatistika se, obzirom na raširenost, ponekad čak smatra sinonimom za geomatematiku, posebno u *geologiji nafte i plina*. Takva tvrdnja nije istinita, no svakako ističe njezinu važnost te razlog zašto je postala zasebna statistička disciplina koja se primjenjuje u gotovo svim *geoznanostima*.

Ocem **geostatistike** smatra se **prof. Georges Matheron** (1930–2000, **slika 5**). Taj Francuz najveći dio svoga rada posvetio je istraživanju *prostorne statistike* (engl. *spatial statistics*). Nakon nešto više od desetljeća rada na tome području 1968. godine utemeljio je na Pariškoj rudarskoj školi (franc. *Ecole des mines de Paris*) u Fontainbleau Centar za geostatistiku i morfološku matematiku (franc. *Centre de géostatistique et de morphologie mathématique*). Taj institut i danas se smatra jednim od 2-3 najveća edukacijska i istraživačka središta u području geostatistike.



Slika 5: Prof. Georges Matheron

(preuzeto s <http://cg.ensmp.fr> - Centre de geostatistique de l'Ecole des mines de Paris)

Matheronov rad predstavljao je iznimnu teorijsku nadogradnju postupaka koje je prvi upotrijebio **prof. Danie G. Krige**. Taj Južnoafrikanac, rudarski inženjer te profesor na Sveučilištu Witwatersrand u Johannesburgu razvio je temelje prostornog predviđanja koncentracije zlata u rudnom kompleksu Witwatersrand u ranim 50-tim godinama prošloga stoljeća (KRIGE, 1951). Njegov teorijski rad rezultirao je otkrićem nekoliko novih ležišta zlata, a kao rezultat predviđanja njihova položaja iz postojećih točkastih uzoraka na različitim koordinatama u konačnom prostoru. Kasnije je *prof. Matheron* upotrijebio tu spoznaju za dokaz i razvoj metode *kriginga* kojom se procjena iz skupa raspršenih točkastih podataka može načiniti „otežavanjem“ temeljenom na njihovoj međusobnoj udaljenosti od točke procjene.

Prof. Krige također nije bio usamljen u svome radu. Dvojica poznatih statističara pomogla su mu razviti novu teoriju procjene. To su bili **dr. Herbert Sichel** te **H. J. de Wijs**. *Dr. Herbert Sichel* (1915–1995) bio je statističar poznat po doprinosima na polju teorijske i primjenjene statistike. Godine

1952. osnovao je *Operativni istraživački zavod* (engl. *Operational Research Bureau*), a također je kao profesor statistike i operacijskih istraživanja predavao na Sveučilištu Witwatersrand. Drugi suradnik *H. J. de Wijs*, Nizozemac, postavio je temelje razvoju geostatistike svojim modelima u tzv. predgeostatističkoj eri (de WIJS, 1951, 1953).

Krige, *Mathéron* i njihovi sljedbenici (na sreću) nisu znali da postavljanjem izravne veze između udaljenosti točaka i varijance svih ulaznih podataka krše zakone prihvaćene statistike. U stvari prvi geostatističari zamijenili su *pravu varijancu* svih mjerenja s **pojedinlačnom varijancom** koja se računala u svakoj točki procjene i to iz svih vrijednosti u elipsoidu utjecaja, još k tomu otežanih udaljenošću. Tako su u stvari predložili upotrebu takozvane **pseudovarijance** koja je računana iz niza zavisnih, odnosno otežanih točkastih (prosječnih) koncentracija zlata. Takve „nove varijance“ statistički su neutemeljene, ali ipak su imenovane **varijancama kriginga** (engl. *Kriging variance*). U stvari **kriging** kao interpolacijska metoda podrazumijeva funkcionalnu vezu između procjene načinjene *osrednjavanjem* okolnih vrijednosti otežanih obzirom na njihovu udaljenost te *varijance* tako izračunanih procjena. Metoda podrazumijeva postojanje autokorelacije u svim vrstama podataka, čiji doseg ovisi o njihovu rasporedu i udaljenostima. Pojam *varijance kriginga* prvo je prihvaćen u geostatistici kao temelj tamošnjeg rječnika, a kasnije je ušao i u statistiku. Time je geostatistika priznata kao podskupina matematičke statistike, koja se uspješno primjenjuje na raspršene (ponekad i grupirane) točkaste skupove podatka. Dva su pojma postala gotovo sinonimi za *Krigeov* i *Mathéronov* rad te geostatistiku općenito. Prvi je pojam *regionalizirane varijable*, a drugi *interpolacije metodom kriginga*. Prvi puta javno objedinjene rezultate geostatističkih istraživanja *Mathéron* je objavio u svojoj doktorskoj disertaciji (MATHÉRON, 1965). To djelo te još niz drugih njegovih radova i danas se smatraju kapitalnim u geostatistici te se često citiraju.

Regionalizirana varijabla opisuje mjerenu ili modeliranu veličinu čije ponašanje se dijelom opisuje slučajnom, a dijelom determinističkom varijablom. Na taj način moguće je opisati prostorno ponašanje veličina poput slojevitosti, topografije ili neke druge varijable mjerene i omeđene nekim prostorom. Svaka takva veličina, premda pokazuje svojstvo prostorne kontinuiranost i kao takva je modelirana, nije mjerena na svakom mjestu zamišljene plohe ili tijela kojim se pruža. U stvari, radi se o točkastim mjerenjima iz kojih se želi rekonstruirati što točnije cjelovito prostorno pružanje promatrane veličine u jednoj, dvije ili tri dimenzije. Nove vrijednosti procjenjene su iz podataka koji su točkasto izmjereni na konačnom broju lokacija. Promjena tih vrijednosti u prostoru, obzirom na pružanje i oblik tijela kojem pripadaju, posljedica je ponašanja svojstvenog promatranoj varijabli (što je ujedno jedna od ključnih pretpostavki geostatistike). Što točnijim opisivanjem tih svojstava moguće je dobro procijeniti vrijednosti regionalizirane varijable, a dva ključna geostatistička alata za tu namjenu su *variogram* i *kriging*.

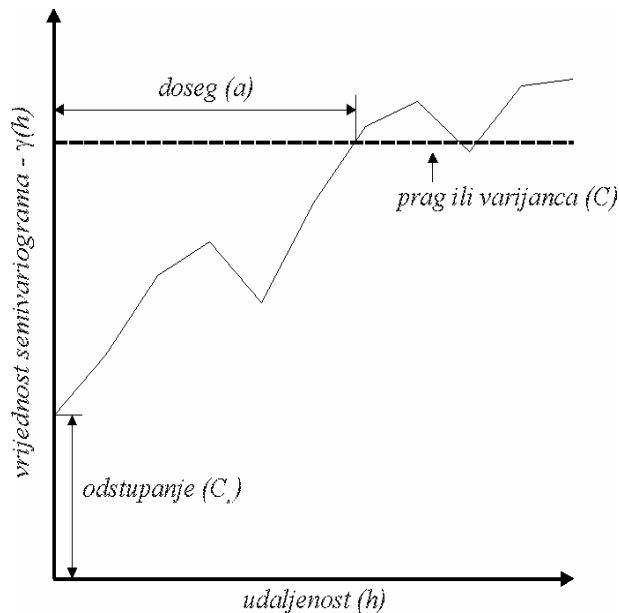
Variogramaska analiza se temelji na izračunu variogramske funkcije (1):

$$2\gamma(h) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \quad (1)$$

gdje su:

- $2\gamma(h)$ - variogram
- n - broj parova podataka uspoređenih na udaljenosti h
- $z(x_i)$ - vrijednost varijable na odabranoj lokaciji (x_i)
- $z(x_i+h)$ - vrijednost varijable na lokaciji udaljenoj za "h" od početne lokacije (x_i+h)

Vrijednost variograma ovisi jedino o prostornom rasporedu lokacija, tj. broju poznatih vrijednosti na odabranoj udaljenosti. Rezultat su *eksperimentalne variogramske krivulje*. Gotovo sve takve krivulje moguće je aproksimirati teoretskim modelima koji su definirani matematičkom jednažbom. Takav teoretski model, s određenim variogramskim parametrima, predstavlja neophodni ulaz za metode *kriginga* ili *kokringinga*. Najčešći teoretski modeli su sferni, eksponencijalni i Gaussov model.



Slika 6: Krivulja eksperimentalnog variograma

Na svakoj variogramskoj krivulji može se očitati pet parametara (**slika 6**): *odstupanje* (engl. *nugget*), *prag* (engl. *sill*), *doseg* (engl. *range*), *udaljenost* ili *korak* (engl. *distance*) i eventualno *odmak* (engl. *lag*). **Odstupanje (C_0)** predstavlja slučajnu komponentu *regionalizirane varijable*, odnosno pojavu

kada krivulja siječe os Y u nekoj pozitivnoj vrijednosti (C_0). Na nekim mjestima pojavljuje se i prijevod "efekt grumena" što dolazi iz početaka geostatistike vezane uz rudarstvo, odnosno istraživanje koncentracija zlata koje se najčešće pojavljuje u grumenima. **Prag (C)** odgovara vrijednosti stvarne varijance podataka. Nakon dosezanja praga (ako ga postiže) krivulja semivariograma najčešće će prestati pravilno rasti te nastaviti oko njega oscilirati. **Doseg (a)** je vrijednost koraka (h) na kojoj semivariogram prvi put presijeca prag, nakon čega se pretpostavlja da ne postoji prostorna korelacija podataka. **Udaljenost** ili **korak (h)** je vrijednost na kojoj se međusobno uspoređuju podaci u izabranom smjeru. Svaka udaljenost čini jednu klasu. Toj vrijednosti često je dodijeljena određena tolerancija kako bi se povećao broj ulaznih podataka, a nazvana je **odmakom**. To znači da granicama klase dodajemo vrijednost odmaka, šireći tako klasu. Tako su variogramski razredi predstavljeni intervalima širine 0,5-1,5 metara, 1,5-2,5 metara i tako dalje, a ne točkastim udaljenostima poput točno 1, 2 ili više metara. *Odmak* se u najvećem broju primjena semivariogramskog računa postavlja na 1/2 vrijednosti udaljenosti ("h"), jer se na taj način maksimalno uvećava broj parova podataka, a time i pouzdanost prostorne analize.

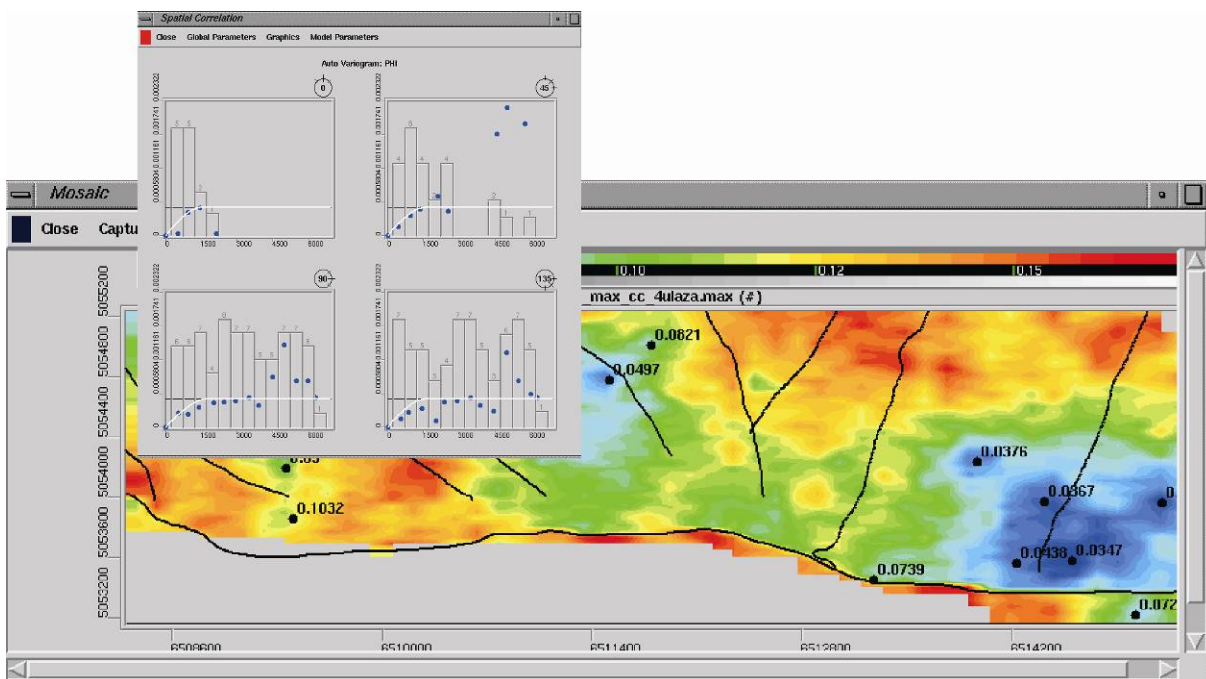
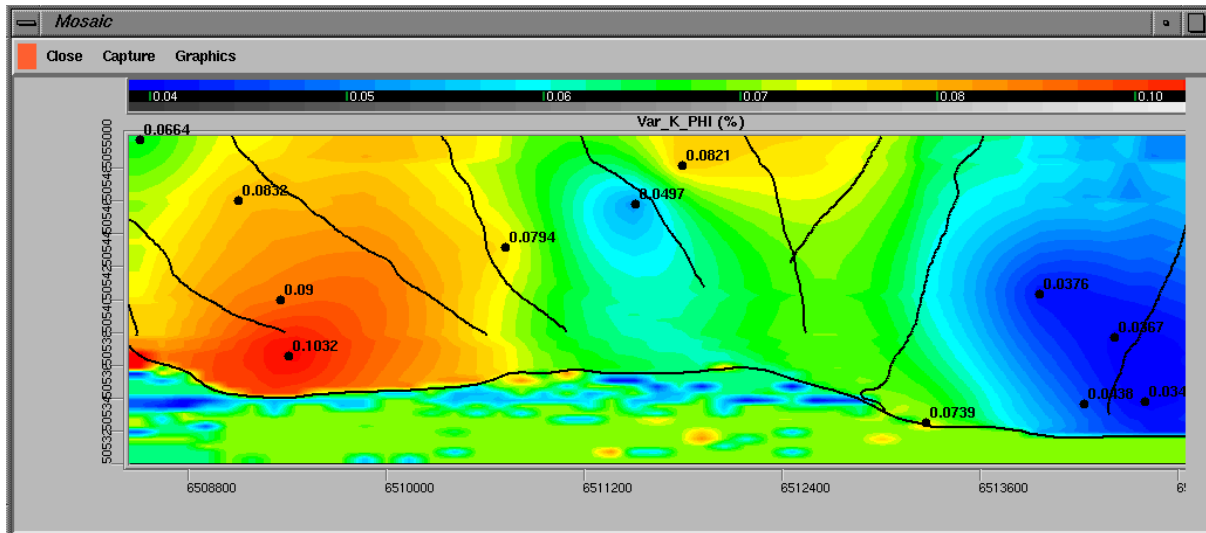
Kriging je danas jedna od najpoznatijih interpolacijskih metoda. U čast *prof. Krigea* metoda je imenovana krigingom (*engl. Kriging*), a to ime uveo je MATHÉRON (1966). Veliku popularnost vremenom je doživjela u mnogim geoznanostima, prvenstveno naftnoj geologiji i geologiji općenito, ali i drugim područjima u kojima se uobičajeno prikazuje prostorni raspored kartirane veličine, koncentracije ili mjerenja poput *šumarstva, poljoprivrede, geografije, demografije* pa i drugim. Metoda obuhvaća niz tehnika koje se razlikuju prema obliku matičnih jednadžbi, no svima je zajedničko da procjenjuju vrijednost na nepoznatoj lokaciji **(2)**:

$$z_K = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i \quad (2)$$

gdje su:

- z_K - procjenjena vrijednost iz 'n' okolnih vrijednosti
- λ_i - težinski koeficijent na lokaciji 'i'
- z_i - stvarna vrijednost na lokaciji 'i'

Izračun odgovarajućih težinskih koeficijenata za sve uključene okolne vrijednosti predstavlja rezultat rješavanja matičnih jednadžbi odabrane metode kriginga ili kokriginga. Kao rezultat računaju se različite karte odabrane varijable koje za veliki broj ulaznih skupova ujedno predstavljaju i najpreciznija moguća rješenja za razne geološke sredine (**slika 7**).



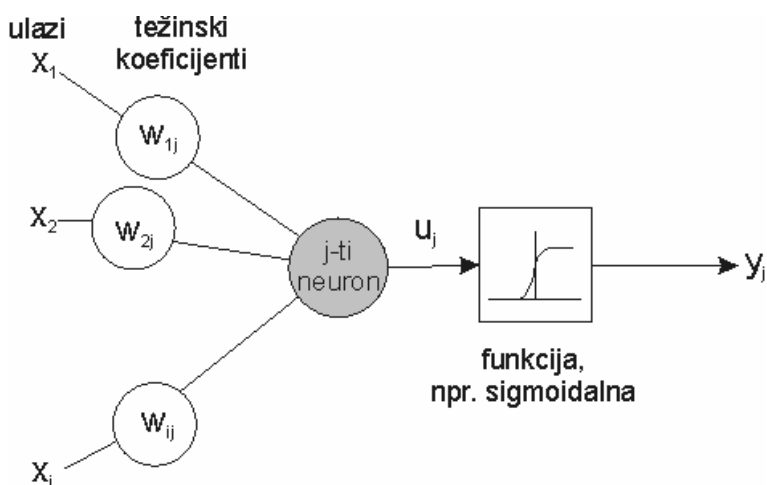
Slika 7: Karta poroznosti naftoga ležišta u Dravskoj depresiji interpolirana metodama kriginga (gore) i kokriginga (dolje)

Geostatistika se danas primjenjuje u gotovo cijelome svijetu. Njezina izvorna terminologija razvijena je na engleskom jeziku i veliki broj izraza jednostavno je „prenesen“ u druge velike i male jezike (poput *variograma* i *kriginga*). No, niz pojmova jednostavno zahtijeva prijevod na jezik u kojem se rade i publiciraju geostatističke analize, a neki primjeri takvih prijevoda dani su i u ovome tekstu, poput ranije

navedenog *odstupanja*, *praga* ili *dosega* kao hrvatskih inačica engleskih riječi *nugget*, *sill* ili *range*. Autor ovoga teksta dosada je objavio dvije publikacije koje su vjerojatno u ovome trenutku najopširniji pokušaji uvođenja hrvatske geostatističke terminologije. To su njegova disertacija (MALVIĆ, 2003) te prvi hrvatski rječnik geostatističkih pojmova (MALVIĆ, 2005). Vjerujem da će takvih radova biti u budućnosti još više, jer jezik je ogledalo naroda i njegovanja pojedinačne struke u tom narodu.

Neuronske mreže

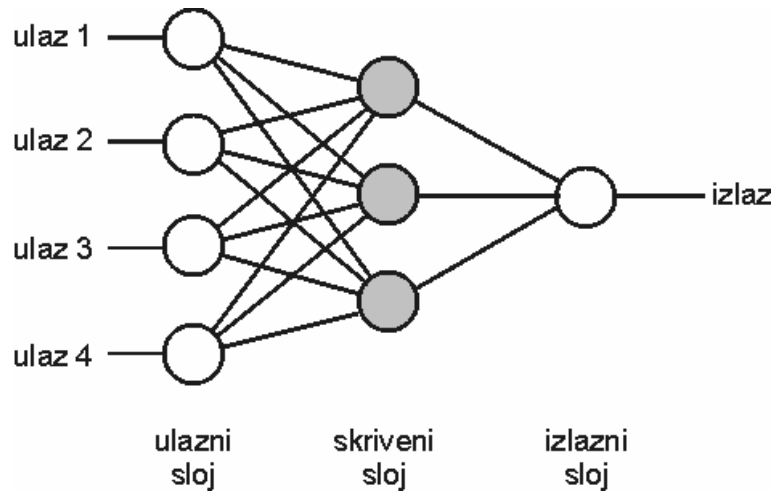
Kao treće veliko područje koje se ubraja u geomatematiku izdvajaju se **neuronske mreže** kao matematički alat brojnih namjena opisan u brojnim publikacijama (npr. ANDERSON i ROSENFELD, 1989). U ranim danima istraživanja pojma *umjetne inteligencije* **Rosenblatt** je na *Cornell Aeronautical Laboratory* 1957. godine razvio stroj nazvan **perceptron** čiji rad se temeljio na postavkama memoriranja kakve koristi ljudski um (ROSENBLATT, 1957, 1958). Takav stroj mogao je „učiti“ i predstavljao je prototip neuronske mreže, dok je zamišljeni perceptron bio analog asocijativnoj ljudskoj memoriji. Na isti način projektiran je **umjetni neuron** kao temelj umjetne mreže (**slika 8**) koji *podražaje* prima kroz jedan ili više ulaza, a obrađeni rezultat odašilje kroz jedinstveni izlaz. Rangiranje ulaznih veza načinjeno je kroz *težinske koeficijente* po čemu mehanizam nalikuje na neke druge poznate linearne interpolatore poput kriginga. Ulazni signal(i) može izazvati aktivaciju ili neuron zadržati u stanju mirovanja o čemu odlučuje **aktivacijska funkcija**.



Slika 8: Model umjetnog neurona

Umjetni neuroni mogu izgraditi jednostavnu mrežu kroz jedan sloj, ali i znatno složeniji varijetet obilježen nizom slojeva (**slika 9**). Svaka neuronska mreža sadrži **ulazni sloj** s nekoliko neurona, od kojih svaki od njih ima vlastite ulaze. Dodatni neuroni i slojevi mogu biti poredani u niz *međuslojeva*

koji nemaju vezu s okolinom (zato su i nazvani **skrivenim slojevima**), a na kraju ponovno dolazi jedinstveni **izlazni sloj** koji imaju sve mreže.



Slika 9: Neuronska mreža organizirana preko slojeva

Slično *krigingu* aktiviranje umjetnog neurona može se iskazati kao zbir svih ulaza otežanih odgovarajućim koeficijentima (3), te aktiviranja obzirom na rezultat *aktivacijske funkcije* (4):

$$U_j = \sum (X_i \times w_{ij}) \quad (3)$$

gdje su:

j - broj neurona

i - broj ulaza

X_i - vrijednost "i"-tog ulaza

w_{ij} - ranije utvrđeni težinski koeficijent za ulaz "i" i neuron „j“

U_j - vrijednost izlaza „j“-tog neurona

$$Y_j = F (U_j + t_j) \quad (4)$$

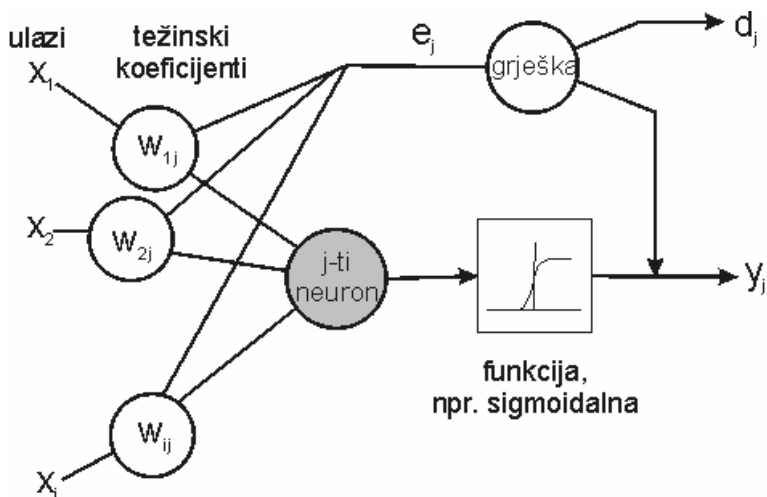
gdje su:

F - aktivacijska funkcija

t_j - ciljna vrijednost „j“-tog neurona

Y_j - izlaz sloja ili ukupni izlaz neurona ako se radi o zadnjem sloju

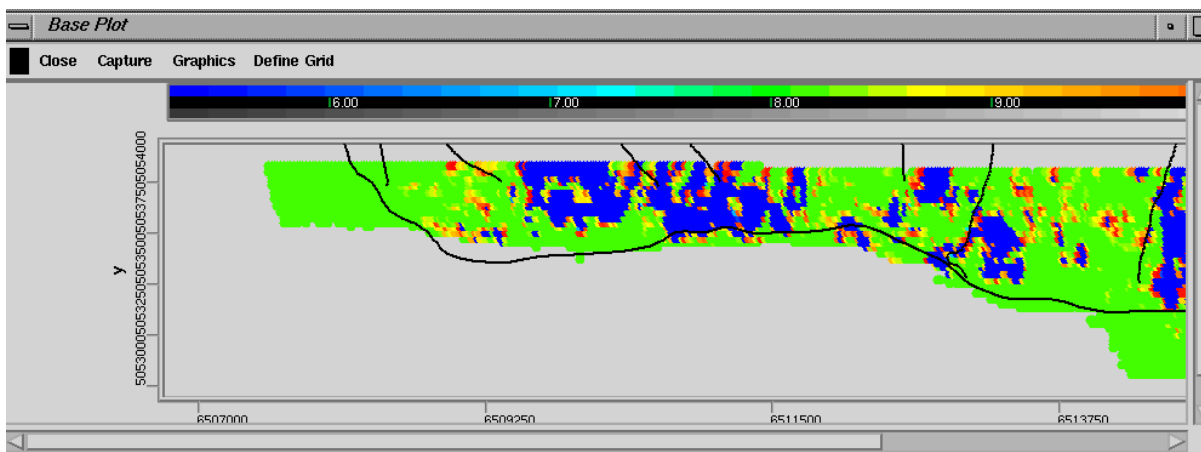
Prvobitne mreže temeljene su isključivo na perceptronima, što je omogućavalo samo linearno raspoznavanje uzoraka. To ograničenje prevladano je uvođenjem paradigme **povratne pogriješke** (engl. *back error propagation*, **backpropagation** ili *backprop*) kojom se u praksu uvodi ranije opisana *višeslojna perceptronska mreža*. Takav način treniranja mreže uključuje određivanje razlike između stvarnoga i željenoga odgovora mreže, odnosno izračun iznosa *pogriješke* koji se vraća nazad u mrežu kako bi se ista bolje uvježbala (**slika 10**). Takva pogriješka određena je na svakome neuronu, gdje su prilagođeni težinski koeficijenti i vrijednosti njihove aktivacije.



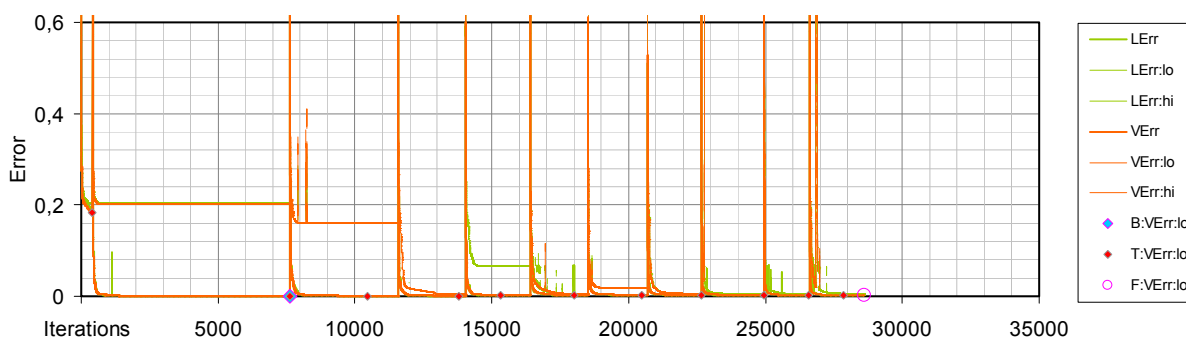
Slika 10: Primjer „backpropagation“ mreže

Takva korektivna procedura nazvana je mrežom s *postupkom povratne informacije* (engl. *backpropagation network*) koja opisuje proces učenja i provjere mreže, a ponavlja se dok se pojedinačna ili ukupna pogriješka ne spusti ispod željene vrijednosti. „*Backprop*“ je najpopularnija paradigma koja se danas upotrebljava u neuronskim mrežama uopće, a vremenom su razvijeni još neki algoritmi koji ubrzavaju i poboljšavaju proces učenja i procjene neuronskom mrežom, poput **RProp algoritma** (engl. *resilient propagation algorithm*).

Primjene neuronskih mreža u geologiji su vrlo važne i danas već česte. Gotovo sve vrste procjena u kojima postoji nekoliko ulaza mogu se raditi s ovim alatima (**slika 11**). Uz to, neuronske alate „krasi“ i jedna velika kvaliteta – a to je da omogućavaju stvaranje nove, sintetičke varijable iz niza različitih ulaznih mjerenja. Naravno, uvjet je da ta mjerenja budu na neki način funkcionalno povezana, bilo fizikalnim bilo geološkim značenjem. Tu je uloga inženjera da odredi takvu funkcijsku vezu, dodijeli joj smisleno značenje unutar prirodnog sustava koji opisuje te, poznavajući teoriju neuronskih alata, modelira rješenje problema na novi način (**slika 12**).



Slika 11: Primjer predviđanja poroznosti uz pomoć seizmičkih atributa u miocenskom ležištu nafte (Dravska depresija) upotrebom „backpropagation“ mreže



Slika 12: Varijacija pogreške kroz niz iteracija uvježbavanja neuronske mreže u cilju stvaranja novog, sintetskog, karotažnog dijagrama (iz MALVIĆ, 2006)

Kako je prikazano, područje **geomatematike** može se razdijeliti u *tri podcjeline*: *deskriptivnu statistiku*, *analizu razdiobi i statističke testove*, zatim *geostatistiku* te na kraju *neuronske mreže*. Otprilike ovim redom može se poredati učestalost upotrebe tih podcjelina u geologiji, naravno ne podrazumijevajući to kao pravilo.

Nadam se da je ovaj kratki prilog barem dijelom ukazao na geomatematiku kao nadasve koristan alat koji se može primjeniti u brojnim i raznovrsnim geološkim analizama. Većina radova danas uključuje pojedine geomatematičke alate, a ako će se samo dio čitatelja odlučiti na prakticiranje istih u nekom svom budućem istraživanju i radu smatrat ću da je moj trud na promidžbi tih alata urodio više nego korisnim plodom.

Literatura

- ANDERSON, J.A. i ROSENFELD, E. (1989): *Neurocomputing: Foundations of Research*. Cambridge, MA: MIT Press.
- de WIJS, H.J. (1951): *Statistics of ore distribution. Part I: frequency distribution of assay values*. Journal of the Royal Netherlands Geological and Mining Society, 13, 365–375, New Series.
- de WIJS, H.J. (1953): *Statistics of ore distribution. Part II: Theory of binomial distribution applied to sampling and engineering problems*. Journal of the Royal Netherlands Geological and Mining Society, 15:125–24, 1953. New Series.
- KRIGE, D.G. (1951): *A Statistical Approach to Some Basic Mine Valuation Problems on the Witwatersrand*. Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa, 52, 119-139.
- MALVIĆ, T. (2003): *Naftnogeološki odnosi i vjerojatnost pronalaska novih zaliha ugljikovodika u bjelovarskoj uleknini*. Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, 123 p.
- MALVIĆ, T. (2005): *Rječnik osnovnih geostatističkih pojmova*. Vijesti Hrvatskoga geološkog društva, 42/2.
- MALVIĆ, T.; VELIC, J. i PEH, Z. (2005): *Qualitative-quantitative analyses of depth and lithological composition influence on Lower Pontian sandstones porosity in the central part of Bjelovar sag (Croatia)*. Geologia Croatica, 58, 1.
- MALVIĆ, T. (2006): *Clastic facies prediction using neural networks (Case study from Okoli field)*. Nafta, 57, 10; 415-431.
- MATHERON, G. (1965): *Les variables régionalisées et leur estimation: une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature*. Paris, Masson, 306 p.
- MATHERON, G. (1954-2005): popis svih publikacija dostupan je na http://cg.ensmp.fr/bibliotheque/index_bynome.html#MATHERON
- REIMANN, C. & FILZMOSE, P. (2000): *Normal and lognormal distribution in geochemistry: death of a myth. Consequences for the statistical treatment of geochemical and environmental data*. Environmental Geology, 39(9), 1001-1014.
- ROSENBLATT, F. (1957): *The perceptron: A perceiving and recognizing automaton*. Technical report 85-460-1, Project PARA, Cornell Aeronautical Lab.
- ROSENBLATT, F. (1958): *The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain*. Psychological Review, 65, 386-408.

Zahvala

Autor zahvaljuje glavnome uredniku *Vijesti* Hrvatskog geološkog društva, dr. sc. Tvrtku Korbaru, što mu je uputio poziv te omogućio prirediti prilog za rubriku „Tema broja“ toga našeg renomiranog časopisa za popularizaciju geologije.

Napomena

Znatni dijelovi teksta i slika preneseni su s Wikipedie–slobodne enciklopedije (engleske i hrvatske inačice) i prilagođeni vrsti priloga. Sam autor također je pisao priloge za hrvatsku Wikipediju u kategoriji Geologija (geostatistika, kriging, kokriging, naftna geologija), a ovim radom je nastavio popularizaciju geomatematike na hrvatskom jeziku.