SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Tomislav Terzić

Diplomski rad

T–DUALNOST U TEORIJI STRUNA

Zagreb, 2007.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: DIPL. INŽ. FIZIKE

Tomislav Terzić

Diplomski rad

T–DUALNOST U TEORIJI STRUNA

Voditelj diplomskog rada: **Doc. dr. sc. Predrag Dominis Prester**

Ocjena diplomskog rada: ____________________

Povjerenstvo: 1. ____________________

2. ____________________

3. ____________________

Datum polaganja: ____________________

Zagreb, 2007.

Srdačno se zahvaljujem voditelju doc. dr. sc. Predragu Dominisu Presteru na pomoći pri odabiru teme te uloženom trudu i vremenu te ugodnom i prijateljskom odnosu.

Svim prijateljicama, prijateljima, kolegicama i kolegama, zbog vas je studij bio divno iskustvo. Pusa svima!

Bez bezgranične i bezuvjetne podrške moje obitelji, izrada ovog rada, kao ni studij, nebi bili ostvarivi. Veliko im hvala!

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Teorija struna je relativno mlada fizikalna teorija. Iako postoji tek 40–ak godina, povijest joj je vrlo burna. Prvi put je predložena kao objašnjenje jakog međudjelovanja, ali nije polučila velik uspjeh. Nakon 1974. razvija se kvantna kromodinamika, teorija, koja se pokazala daleko uspješnijom u objašnjavanju jake interakcije, uključujući i njeno partonsko ponašanje. Ovo je bio prvi pad u brojnom nizu uspona i padova teorije struna. Vrlo brzo, teorija je pobudila veliko zanimanje za sebe kada se pokazala kao kandidat za teoriju "svega", odnosno svih međudjelovanja. Razlozi koji su je učinili zanimljivom u tom pogledu su sljedeći:

1. **Gravitacija**. Svaka konzistentna teorija struna sadrži bezmaseno stanje spina 2, čije se interakcije na niskim energijama svode na opću teoriju relativnosti.

2. **Ujedinjenje svih sila**. Teorije struna vode do baždarnih grupa velikih dovoljno da sadržavaju Standardni model.

3. **Kiralna baždarna vezanja**. Baždarne teorije imaju asimetričnu parnost (kiralnost). Za razliku od mnogih prijašnjih kandidata za unifikaciju osnovnih međudjelovanja, teorija struna dozvoljava kiralna baždarna vezanja.

4. Teorija struna nema slobodnih parametara.

Teorija bozonske strune je prva razvijena teorija struna. Sada je već gotovo potpuno odbačena kao "teorija svega" zbog nekih nefizikalnih rezultata koji su proizlazili iz nje. Najveći problem predstavlja postojanje tahiona (čestice negativne mase) u spektru bozonske strune. Njegova prisutnost u spektru upućuje na nestabilnost vakuuma teorije. Osim toga, bozonska struna u svom spektru ne sadrži fermionska pobuđenja, što bi svaka teorija "svega" trebala sadržavati. Nedostatak teorije je svakako i zahtjev za 26–dimenzionalnim prostor–vremenom. Ovi problemi su u velikoj mjeri riješeni razvojem teorije superstruna. Superstrune u svom spektru sadržavaju fermionska pobuđenja, ali ne i tahion. Dimenzija prostor–vremena u teoriji superstrune je reducirana na 10 dimenzija (što nikako nije riješilo problem viška dimenzija – svaka dimenzija prostor–vremena više od 4 predstavlja poteškoću). Novi zastoj uzrokovan je otkrićem postojanja pet različitih teorija superstruna. Svaka od ovih teorija se pokazala matematički korektnom, što je predstavljalo problem. Jedan prirodni fenomen mora imati jedinstveno fizikalno objašnjenje, a postojalo ih je pet. Problem je riješio Edward Witten 1995. uvođenjem M–teorije*. On je pokazao da su svih pet teorija povezane dualnostima. Uz to, svaka od njih je specijani slučaj jedinstvene i općenitije 11–dimenzionalne M–teorije. Formulacija M–teorije još ne postoji i predstavlja veliki izazov u daljnjem razvoju teorije struna. Problem postojanja dodatnih dimenzija također još nije riješen. Postoji nekoliko modela koji nude objašnjenje zašto vidimo samo četiri prostorno–vremenske dimenzije iako živimo u prostor–vremenu koje je 10–, 11–, ili više– dimenzionalno. Ipak, niti kroz ijedan od tih modela još nije postignuto svođenje spektra superstrune na čestice predviđene u okviru Standardnog modela. Rješavanje ovog problema je također bitan zadatak za fizičare u teoriji struna.

Strune kao jednodimenzionalni objekti imaju zanimljive i privlačne značajke, koje nisu karakteristične za točkaste čestice niti za višedimenzoinalne objekte. Jedna od njih je pojava T–dualnosti. Zbog T–dualnosti teorije pojavljuje se dodatni sektor u spektru strune. Već to je izrazito zanimljiva pojava i zaslužuje da joj se posveti posebna pažnja. Međutim, kroz T–dualnost se uočava postojanje višedimenzionalnih hiperploha, takozvanih D–opni, na čijem se postojanju temelji cijela grana istraživanja u fizici teorije struna.

*E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85, hep-th/9503124

Unatoč nedostacima, teorija bozonske strune može poslužiti kao izvrstan put za pristupanje i učenje o teoriji struna te upoznavanje s načinima rada u njenim okvirima. Kako je svrha ovog rada upravo to, nisam izlazio iz okvira teorije bozonske strune. Istaknuo sam njezine značajke i rezultate koji proizlaze iz klasičnog razmatranja (Poglavlje 2). Tema rada i krajnji cilj je uvođenje T–dualnosti teorije i isticanje osnovnih značajki i posljedica. Zato su teme u drugom i trećem poglavlju obrađene tako da posluže kao što bolji temelj za razmatranje T–dualnosti. Kao što ćemo vidjeti kasnije (Poglavlje 3), postoji nekoliko ekvivalentnih načina za kvantiziranje teorije. Ja sam se odlučio za onaj, koji najbolje ističe spektar strune iako skriva kovarijantnost teorije. Naglasak sam stavio na spektar kako bih što više istaknuo posljedice T–dualnosti teorije. Iz istog razloga sam od više modela koji imaju za cilj opravdati postojanje "ekstra dimenzija" obradio upravo kompaktifikaciju. Kroz T–dualnost sam uveo D–opne. Istaknuo sam samo njihove glavne značajke (Poglavlje 4).

Poglavlje 2

Klasična bozonska struna

Prije nego što krenemo na strune, korisno je proučiti gibanje klasične relativističke točkaste čestice. Strune se gibaju u ravnom D–dimenzionalnom prostoru, čija je metrika $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,\ldots,+)$. Stoga ćemo i gibanje točkaste čestice promatrati u istom prostoru.

2.1 Relativistička točkasta čestica

Putanja čestice je jednodimenzionalna svjetska linija prikazana na slici 2.1(a). Položaj čestice u prostor–vremenu je dan s D funkcija $X^\mu(\tau)$. Pri tome je τ proizvoljni parametar, a vrijednost funkcija X^μ mora biti neovisna o izboru parametra. Matematički zapisano:

$$X'^\mu(\tau'(\tau)) = X^\mu(\tau), \tag{2.1}$$

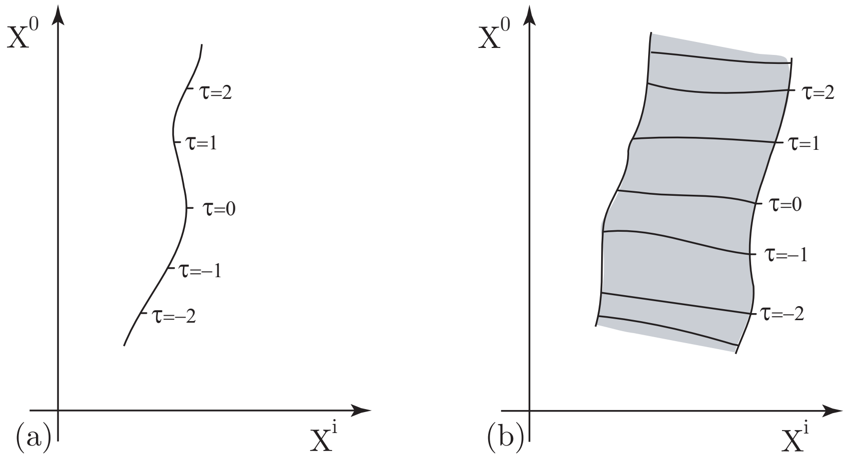
za bilo koju monotonu funkciju $\tau'(\tau)$. Najjednostavniji oblik akcije, koja je invarijantna na Poincaré–ove transformacije i neovisna o parametrizaciji, proporcionalan je vlastitom vremenu čestice duž svjetske linije:

$$S_{pp} = -m \int d\tau (-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Točkice označavaju derivaciju po τ.

Varijacija akcije daje:

$$\delta S_{pp} = m \int d\tau \frac{\dot{X}_\mu \delta \dot{X}^\mu}{\sqrt{(-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)}}, \tag{2.3}$$



Slika 2.1: (a) Parametrizirana svjetska linija točkaste čestice. (b) Parametrizirana svjetska ploha otvorene strune.

što, nakon parcijalne integracije, postaje:

$$\delta S_{pp} = -m \int d\tau \dot{u}_\mu \delta X^\mu. \tag{2.4}$$

Ovdje

$$u^\mu = \dot{X}^\mu (-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)^{-1/2} \tag{2.5}$$

predstavlja normaliziranu D–brzinu. Ako pogledamo nerelativističko približenje akcije (2.2), ona će biti dana kao razlika kinetičke i potencijalne energije, pri čemu je potencijalna energija masa čestice. Iz toga zaključujemo da normalizacijska konstanta m predstavlja masu čestice.

Akcija (2.2) nema smisla za bezmasene čestice. Osim toga, nije praktična za računanje zbog derivacija pod korijenom. Te nedostatake možemo nadoknaditi uvođenjem metrike svjetske linije $\gamma_{\tau\tau}(\tau)$. Sada je akcija dana izrazom:

$$S'_{pp} = \frac{1}{2} \int d\tau (\eta^{-1} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - \eta m^2), \tag{2.6}$$

pri čemu je $\eta(\tau) = (-\gamma_{\tau\tau}(\tau))^{1/2}$ definirana tako da bude pozitivna. Akciju S'_{pp} nismo izveli iz S_{pp}. Sastavili smo je intuitivno, zahtijevajući da bude simetrična na iste transformacije kao i (2.2) i uz to praktičnija za baratanje njome.

Pri reparametrizaciji svjetske linije, $\eta(\tau)$ se transformira prema pravilu:

$$\eta'(\tau')d\tau' = \eta(\tau)d\tau. \tag{2.7}$$

Varijacija akcije (2.6) po $\eta(\tau)$ mora iščezavati, što daje jednadžbu gibanja

$$\eta^2 = -\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu / m^2. \tag{2.8}$$

Ubacimo li ovaj izraz u (2.6), akcija S'_{pp} će se svesti na S_{pp}.

2.2 Relativistička struna

Promotrimo sada na analogan način gibanje relativističkog jednodimenzionalnog objekta – strune! Putanja sada više nije jednodimenzionalna svjetska linija, nego dvodimenzionalna svjetska ploha (slika 2.1(b)). Položaj na svjetskoj plohi je određen s dva parametra σ i τ. Prvi od njih predstavlja položaj na struni i poprima vrijednosti od 0 do l (l je duljina strune). Pri tome krajevi strune mogu biti spojeni pa govorimo o zatvorenoj struni, ili neovisni jedan o drugome; u tom slučaju radi se o otvorenoj struni. Ova dva slučaja su prikazani na slici 2.2.

Slika 2.2: Otvorena i zatvorena struna.

τ ponovo ima ulogu parametra evolucije. Može ga se smatrati vremenskom koordinatom promatrača koji se nalazi na položaju σ na struni. Položaj strune u D–dimenzionalnom prostor–vremenu je opisan s D dvoparametarskih funkcija $X^\mu(\tau, \sigma)$.

Na teoriju struna možemo gledati i kao na dvodimenzionalnu teoriju polja, gdje je dvodimenzionalni prostor u stvari svjetska ploha, a $X^\mu(\tau, \sigma)$ su pobuđenja u tom prostoru.

Analogno primjeru točkaste čestice, akcija strune je proporcionalna površini svjetske plohe

$$S_{NG} = -T \int_M d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}. \tag{2.9}$$

Točkica predstavlja derivaciju po parametru τ, a crtica po σ. Normalizacijska konstanta T ima dimenziju energije po jedinici dužine, a može se interpretirati kao napetost strune. Može se povezati s još jednom važnom konstantom Regge–ovim nagibom* α'

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}. \tag{2.10}$$

Oblik akcije (2.9) se naziva Nambu–Goto akcija.

Izraz za akciju se može pojednostaviti uvođenjem inducirane metrike na svjetskoj plohi h_{ab} (indeksi $a, b, \ldots$ mogu imati vrijednosti τ ili σ). Inducirana metrika se dobije ako metriku prostor–vremena povežemo s metrikom svjetske plohe na sljedeći način:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma^a} \frac{dX^\nu}{d\sigma^b} d\sigma^a d\sigma^b = h_{ab} d\sigma^a d\sigma^b. \tag{2.11}$$

Sada je Nambu–Goto akcija

$$S_{NG} = -T \int_M d\tau d\sigma \sqrt{-\mathrm{det} h_{ab}}. \tag{2.12}$$

Invarijantna je na Poincaré–ovu transformaciju i reskaliranje. Matematički zapisano:

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu \tag{2.13}$$

$$X'^\mu(\tau'(\tau, \sigma), \sigma'(\tau, \sigma)) = X^\mu(\tau, \sigma) \tag{2.14}$$

Invarijantnost na transformaciju (2.14) još se naziva invarijantnost na difeomorfizam.

Kao u slučaju bezdimenzionalne čestice i S_{pp}, Nambu–Goto akciju možemo pojednostaviti uvođenjem nezavisne metrike svjetske plohe $\gamma_{ab}(\tau, \sigma)$. Nova akcija zove se Polyakov–ljeva akcija i, uz oznaku $\gamma \equiv \mathrm{det}\gamma_{ab}$, izgleda ovako:

$$S_P = -\frac{T}{2} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \tag{2.15}$$

Variramo li akciju po metrici, dobit ćemo sljedeći izraz:

$$\delta_\gamma S_P = -\frac{T}{2} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \delta\gamma^{ab} \left(h_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd} \right), \tag{2.16}$$

*Iako važan pojam u teoriji struna, Regge–ov nagib nije bitan za ovaj rad pa o njemu više neće biti govora. Zainteresiranog čitatelja upućujem na [1] gdje smo se poslužili izrazom za varijaciju determinante:

$$\delta\gamma = \gamma\gamma^{ab}\delta\gamma_{ab} = -\gamma\gamma_{ab}\delta\gamma^{ab}. \tag{2.17}$$

Varijacija akcije će očito iščezavati kada vrijedi

$$h_{ab} = \frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma^{cd}h_{cd}. \tag{2.18}$$

Iz toga slijedi

$$h = \det\left(\frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma^{cd}h_{cd}\right) = \left(\frac{1}{2}\gamma^{cd}h_{cd}\right)^2 \det\gamma_{ab} = \left(\frac{1}{2}\gamma^{cd}h_{cd}\right)^2 \gamma. \tag{2.19}$$

Ako relaciju (2.18) podijelimo s $\sqrt{-h}$, dobit ćemo sljedeći izraz

$$h_{ab}(-h)^{-1/2} = \gamma_{ab}(-\gamma)^{-1/2}. \tag{2.20}$$

Njega pak možemo upotrijebiti da eliminiramo γ_{ab} iz akcije (2.15) i Polyakov–ljevu akciju svedemo na Nambu–Goto (2.9).

Polyakov–vljeva akcija zadovoljava sljedeće simetrije:

1. D–dimenzionalna Poincaré–ova invarijantnost:

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\tau,\sigma) &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}X^{\nu}(\tau,\sigma) + a^{\mu}, \\ \gamma'_{ab}(\tau,\sigma) &= \gamma_{ab}(\tau,\sigma). \end{aligned} \tag{2.21}$$

2. Invarijantnost na difeomorfizam:

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\tau',\sigma') &= X^{\mu}(\tau,\sigma), \\ \frac{d\sigma'^{c}}{d\sigma^{a}}\frac{d\sigma'^{d}}{d\sigma^{b}}\gamma'_{cd}(\tau',\sigma') &= \gamma_{ab}(\tau,\sigma), \end{aligned} \tag{2.22}$$

za nove koordinate $\sigma'^{a}(\tau,\sigma)$.

3. Dvodimenzionalna Weyl–ova invarijantnost:

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\tau,\sigma) &= X^{\mu}(\tau,\sigma), \\ \gamma'_{ab}(\tau,\sigma) &= \exp(2\omega(\tau,\sigma))\gamma_{ab}(\tau,\sigma), \end{aligned} \tag{2.23}$$

za proizvoljni $\omega(\tau,\sigma)$.

Weyl–ova transformacija je lokalno reskaliranje metrike svjetske plohe. Proizlazi iz jednadžbe (2.20) i određuje γ_{ab} do na lokalno reskaliranje, tako da Weyl–ekvivalentne metrike odgovaraju istom smještanju u prostor–vrijeme. Weyl–ova invarijantnost je svojstvena za Polyakov–ljevu akciju i ne postoji analogna invarijantnost Nambu–Goto akcije. Jedna od privlačnosti strune kao fundamentalnog objekta leži u tome da isključivo akcija jednodimenzionalnog objekta može biti Weyl–invarijantna. Pokažimo to. Jedini dijelovi akcije (2.15) koji se mijenjaju pri treansformaciji (2.23) su oni koji sadržavaju metrički tenzor, dakle $\sqrt{\gamma} \to \sqrt{\gamma'}$ i $\gamma^{ab} \to \gamma'^{ab}$.

$$\begin{aligned} \gamma' &= \det\gamma'_{ab} = \det\left(e^{2\omega}\gamma_{ab}\right) = e^{2d\omega}\det\gamma_{ab} = e^{2d\omega}\gamma, & (2.24) \\ \gamma'^{ab} &= e^{2\omega}\frac{\gamma}{\gamma'}\gamma^{ab}. & (2.25) \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \sqrt{-\gamma'}\gamma'^{ab} &= e^{2\omega}\sqrt{-\gamma'}\frac{\gamma}{\gamma'}\gamma^{ab} = e^{2\omega}\sqrt{-e^{2d\omega}\gamma}\frac{\gamma}{e^{2d\omega}\gamma}\gamma^{ab} \\ &= e^{-2(d-2)\omega}\sqrt{-\gamma}\gamma. & (2.26) \end{aligned}$$

Vidimo da će ovaj član biti invarijantan na Weyl–ovu transformaciju samo za d=2, gdje d predstavlja dimenziju traga promatranog objekta. Dakle radi se o dvodimenzionalnoj svjetskoj plohi – tragu koji ostavlja jednodimenzionalna čestica.

Varijacijom akcije po metrici dobivamo tenzor energije–impulsa

$$\begin{aligned} T^{ab}(\tau,\sigma) &= -4\pi(-\gamma)^{-1/2}\frac{\delta}{\delta\gamma_{ab}}S_P \\ &= -\frac{1}{\alpha'}\left(\partial^a X^\mu \partial^b X_\mu - \frac{1}{2}\gamma^{ab}\partial_c X^\mu \partial^c X_\mu\right), & (2.27) \end{aligned}$$

iz čega proizlazi uvjet na gibanje

$$T_{ab} = 0. \tag{2.28}$$

Kada kvantiziramo teoriju, ovaj uvjet će postati uvjet na fizikalna stanja. Iz invarijantnosti akcije na difeomorfizam slijedi sačuvanje tenzora energije–impulsa $\nabla_a T^{ab} = 0$ (∇ predstavlja kovarijantnu derivaciju). Weyl–ova invarijantnost za posljedicu ima iščezavanje traga tenzora energije–impulsa

$$\gamma_{ab}\frac{\delta}{\delta\gamma_{ab}}S_P = 0 \Rightarrow T_a{}^a. \tag{2.29}$$

Varijacija S_P po X^μ, uz upotrebu parcijalne integracije, daje

$$\begin{aligned}
\delta S_P &= -T\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma\, (-\gamma)^{1/2}\, \gamma^{ab}\partial_a(\delta X^\mu)\partial_b X_\mu \\
&= T\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma\, (-\gamma)^{1/2}\, [\partial^\tau(\delta X^\mu)\partial^\tau X_\mu - \partial^\sigma(\delta X^\mu)\partial^\sigma X_\mu] \\
&= T\Bigg[\int_0^l d\sigma\, (-\gamma)^{1/2}\, \delta X^\mu \partial^\tau X_\mu\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma\, (-\gamma)^{1/2}\, \delta X^\mu \partial_\tau^2 X_\mu \\
&- \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, (-\gamma)^{1/2}\, \delta X^\mu \partial^\sigma X_\mu\Big|_0^l + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma\, (-\gamma)^{1/2}\, \delta X^\mu \partial_\sigma^2 X_\mu\Bigg] \\
&= T\Bigg[\int_0^l d\sigma\, (-\gamma)^{1/2}\, \delta X^\mu \partial^\tau X_\mu\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, (-\gamma)^{1/2}\, \delta X^\mu \partial^\sigma X_\mu\Big|_0^l \\
&- \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma\, (-\gamma)^{1/2}\, \delta X^\mu \left(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2\right) X_\mu\Bigg]. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Prvi član u zadnjem redu iščezava zbog $\delta X^\mu(\tau_1, \sigma) = 0 = \delta X^\mu(\tau_2, \sigma)$. Drugi član je rubni i iz njega proizlaze rubni uvjeti na X^μ, a treći član daje jednadžbu gibanja za X^μ

$$\left(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2\right) X^\mu = \nabla^2 X^\mu = 0. \qquad (2.31)$$

Postoje tri oblika rubnih uvjeta za koje rubni član u (2.30) iščezava:

1. Neumann–ovi rubni uvjeti, za koje se krajevi otvorene strune gibaju slobodno u prostor–vremenu

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, l) = 0, \qquad (2.32)$$

2. Dirichlet–ovi rubni uvjeti, za koje su krajevi otvorene strune fiksirani

$$\delta X^\mu(\tau, l) = \delta X^\mu(\tau, 0) = 0. \qquad (2.33)$$

3. Periodički rubni uvjeti:

$$\begin{aligned}
X^\mu(\tau, l) &= X^\mu(\tau, 0), \qquad \partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, l) = 0, \qquad (2.34) \\
\gamma_{ab}(\tau, l) &= \gamma_{ab}(\tau, 0). \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Prva dva slučaja očito pokrivaju otvorenu strunu, a nadalje ćemo raditi samo s Neumann–ovim rubnim uvjetima. Treći rubni uvjet će kao rješenje dati zatvorenu strunu.

Rješenja jednadžbe gibanja (2.31) u odnosu na Neumann–ove rubne uvjete su

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + il \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^\mu \exp\left(-\frac{in\pi\tau}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi\sigma}{l}\right). \tag{2.36}$$

Za duljinu strune uzimamo da iznosi

$$l = \sqrt{2\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}. \tag{2.37}$$

Treba imati na umu da ovo nije stvarna fizikalna veza niti su strune točno toliko dugačke[†]. Duljina strune nije fundamentalna veličina kao α' i T. Ovo je odabir kojemu je svrha stvoriti predodžbu o skali. Kasnije ćemo, zbog praktičnosti, uzeti da l iznosi π.

Podražaj na zatvorenoj struni će putovati s lijeva na desno i s desna na lijevo pa će rješenje biti superpozicija ta dva sektora

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X_R^\mu(\tau-\sigma) + X_R^\mu(\tau+\sigma), \tag{2.38}$$

pri čemu je

$$X_R^\mu(\tau-\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l^2 p^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}l\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu \exp\left(-\frac{2in\pi(\tau-\sigma)}{l}\right), \tag{2.39}$$

$$X_L^\mu(\tau+\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l^2 p^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}l\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^\mu \exp\left(\frac{-2in\pi(\tau+\sigma)}{l}\right). \tag{2.40}$$

Kod otvorene strune lijevi i desni sektor nisu nezavisni, jer ih veže rubni uvjet.

α_n^μ su Fourier–ove komponente. Kasnije ćemo izračunati njihove Poisson–ove zagrade (a u drugom poglavlju i komutatore) iz čega ćemo vidjeti da se ponašaju kao komponente oscilatora (operatori stvaranja i poništavanja modova). Kod zatvorene strune $\tilde{\alpha}_n^\mu$ je izdvojen da se razlikuju lijevi od desnih modova.

[†]Duljina strune nije konstantna. Mijenja se ovisno o energiji strune.

x^μ i p^μ se interpretiraju kao položaj i impuls centra mase strune. $X^\mu(\tau,\sigma)$ moraju biti realni za oba oblika strune. Stoga su i x^μ i p^μ također realni, a za α_n^μ vrijedi

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^\dagger, \qquad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^\dagger. \tag{2.41}$$

Fourier–ove koeficijente možemo izračunati uzevši $\tau = 0$ integriranjem po duljini strune

$$\begin{aligned}
\alpha_m^\mu &= \frac{1}{l^2}\int_0^l d\sigma \exp\left(\frac{2im\pi\sigma}{l}\right)\partial_- X^\mu(\sigma^-) \\
&= \frac{1}{2}p^\mu \int_0^l d\sigma \exp\left(\frac{2im\pi\sigma}{l}\right) + \frac{1}{l}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu \int_0^l d\sigma \exp\left(\frac{-2i(n-m)\pi\sigma}{l}\right) \\
&= \frac{1}{2}lp^\mu\delta_{m,0} + \sum_{n\neq 0}\alpha_n^\mu \delta_{n,m}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Vidimo da se impuls centra mase strune može prikazati kao nulti oscilator. Isto će vrijediti i za lijevi način titranja. Zbog jedinstvenosti rješenja za X^μ, nulti oscilatori lijevog i desnog moda će biti jednaki. Zato ćemo često koristiti pokratu

$$\tilde{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu = \frac{1}{2}lp^\mu. \tag{2.43}$$

Izvrijednjavanjem Fourier–ovih komponenti α_0^μ za otvorenu strunu, dobije se

$$\alpha_0^\mu = lp^\mu. \tag{2.44}$$

Korisno je izračunati Poisson–ove zagrade koordinata X^μ i njihovih derivacija po τ za istu vrijednost tog parametra.

$$\{X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')\} = \{\dot{X}^\mu(\sigma), \dot{X}^\nu(\sigma')\} = 0 \tag{2.45}$$

$$\{\dot{X}^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')\} = T^{-1}\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu} \tag{2.46}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (2.39) i (2.40) dobivamo Poisson–ove zagrade za Fourier–ove komponente

$$\begin{aligned}
\{\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu\} &= 0, \\
\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} &= \{\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu\} = im\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.47}$$

iz čega se vidi da su α_n^μ koordinate harmoničkog oscilatora. Uvrštavanjem (2.36) u (2.46) dobivamo još jednu Poisson–ovu zagradu

$$\{p^\mu, x^\nu\} = \eta^{\mu\nu}, \tag{2.48}$$

iz koje vidimo da su položaj i impuls centra mase strune kanonski konjugirane varijable.

Pogledajmo sada kakve informacije možemo dobiti iz uvjeta (2.28). Ovdje je zgodno uvesti novi koordinatni sustav koordinata na svjetskoj plohi; koordinate svjetlosnog stošca su

$$\sigma^- = \tau - \sigma \tag{2.49}$$

$$\sigma^+ = \tau + \sigma. \tag{2.50}$$

Vidimo da je u novim koordinatama X_R u jednadžbi (2.39) funkcija samo od σ^-, a X_L iz (2.40) samo od σ^+. Derivacije konjugirane koordinatama $\sigma^\pm$ su definirane na način

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}\left(\partial_\tau \pm \partial_\sigma\right), \tag{2.51}$$

tako da metrički tenzor prostora Minkowskog u koordinatama svjetlosnog stošca postaje

$$\eta_{+-} = \eta_{-+} = -\frac{1}{2}, \qquad \eta_{++} = \eta_{--} = 0. \tag{2.52}$$

Inverz tenzora ima koordinate $\eta^{+-} = \eta^{-+} = -2$, $\eta^{++} = \eta^{--} = 0$. Uvjet (2.28) u starim koordinatama ima komponente

$$T_{01} = T_{10} = \dot{X} \cdot X' = 0, \tag{2.53}$$

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}\left(\dot{X}^2 + X'^2\right) = 0, \tag{2.54}$$

što u koordinatama svjetlosnog stošca izgleda ovako

$$T_{++} = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X \cdot \partial_+ X = 0, \tag{2.55}$$

$$T_{--} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_- X \cdot \partial_- X = 0. \tag{2.56}$$

Zanimljivo je pogledati Fourier–ov razvoj komponenti tenzora energije–impulsa. Radi jednostavnosti, u daljnjim računima, ćemo uzimati da je $l = \pi$.

Komponente, izvrijednjene u $\tau = 0$, uz rubne uvjete za otvorenu strunu, su

$$\begin{aligned} L_m &= T\int_0^{\pi}\left(e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--}\right)d\sigma = T\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\sigma}T_{++}d\sigma \\ &= \frac{T}{4}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\sigma}\left(\dot{X} + X'\right)^2 d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Neumann–ov rubni uvjet (2.32) ne daje nužno periodično rješenje jednadžbe gibanja (2.31). Zato smo rješenje simetrično proširili na interval $[-\pi, 0]$, da bi olakšali izračun Fourier–ovih komponenti tenzora energije–impulsa.

Rješenja zatvorene strune su periodična pa ovakva manipulacija nije potrebna. Zbog lijevog i desnog sektora rješenja, postojat će i dva skupa Fourier–ovih komponenti.

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{T}{2}\int_0^{\pi} e^{-2im\sigma}T_{--}d\sigma \\ &= \frac{T}{2}\int_0^{\pi} e^{-2im\sigma}\dot{X}_R^2 d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n, \end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_m &= \frac{T}{2}\int_0^{\pi} e^{2im\sigma}T_{++}d\sigma \\ &= \frac{T}{2}\int_0^{\pi} e^{2im\sigma}\dot{X}_L^2 d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{\alpha}_{m-n}\cdot\tilde{\alpha}_n. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Nađimo sada hamiltonijan strune. Iz Polyakov–ljeve akcije (2.15) dobivamo impuls konjugiran varijabli X^μ na sljedeći način (upotrebom Weyl–ove transformacije, odabrali smo γ^{ab} tako da bude $\gamma = -1$)

$$\begin{aligned} P^\mu &= \frac{\partial}{\partial \dot{X}_\mu}\left[-\frac{T}{2}\gamma^{ab}\partial_a X^\nu \partial_b X_\nu\right] = -\frac{T}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{X}_\mu}\left(-\dot{X}^\nu\dot{X}_\nu + X'^\nu X'_\nu\right) \\ &= -\frac{T}{2}\left(-\frac{\partial \dot{X}^\nu}{\partial \dot{X}_\mu}\dot{X}_\nu - \dot{X}^\nu\frac{\partial \dot{X}_\nu}{\partial \dot{X}_\mu}\right) = \frac{T}{2}\left(\eta^{\nu\alpha}\frac{\partial \dot{X}_\alpha}{\partial \dot{X}_\mu}\dot{X}_\nu + \dot{X}^\nu\delta^\mu_\nu\right) \\ &= \frac{T}{2}\left(\delta^\mu_\alpha\dot{X}^\alpha + \dot{X}^\nu\delta^\mu_\nu\right) = \frac{T}{2}\left(\dot{X}^\mu + \dot{X}^\mu\right) \\ &= T\dot{X}^\mu. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Sada je hamiltonijan

$$\begin{aligned} H = \int_0^\pi d\sigma \left(\dot{X}^\mu P_\mu - L\right) &= \int_0^\pi d\sigma \left[T\dot{X}^2 - \frac{T}{2}\left(\dot{X}^2 - X'^2\right)\right] \\ &= \frac{T}{2}\int_0^\pi d\sigma \left(\dot{X}^2 + X'^2\right). \end{aligned} \tag{2.61}$$

Vratimo li se na izračune Fourier–ovih komponenti tenzora energije–impulsa (2.57) – (2.59), vidimo da je hamiltonijan upravo

$$H = L_0 = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n \tag{2.62}$$

za otvorenu strunu te

$$H = L_0 + \tilde{L}_0 = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n}\alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n}\tilde{\alpha}_n) \tag{2.63}$$

za zatvorenu strunu.

Korisna će nam biti i sljedeća relacija

$$L_0 - \tilde{L}_0 = 0. \tag{2.64}$$

Poisson–ove zagrade Fourier–ovih komponenti tenzora energije–impulsa čine Virasoro algebru. Navest ćemo samo neke ključne korake u računu

$$\{L_m, L_n\} = \frac{1}{4}\sum_{k,l}\{\alpha_{m-k}\cdot\alpha_k, \alpha_{n-l}\cdot\alpha_l\}. \tag{2.65}$$

Koristeći poznati identitet [AB,CD]=A[B,C]D+AC[B,D]+[A,C]DB+C[A,D]B i Poisson–ove zagrade oscilatora, dobivamo

$$\begin{aligned} \{L_m, L_n\} &= \frac{i}{4}\sum_{k,l}(k\alpha_{m-k}\cdot\alpha_l\delta_{k+n-l,0} + k\alpha_{m-k}\cdot\alpha_{n-l}\delta_{k+l,0} \\ &\quad +(m-k)\alpha_l\cdot\alpha_k\delta_{m-k+n-l,0} + (m-k)\alpha_{n-l}\cdot\alpha_k\delta_{m-k+l,0}) \\ &= \frac{i}{2}\sum_k k\alpha_{m-k}\cdot\alpha_{k+n} + \frac{i}{2}\sum_k (m-k)\alpha_{m-k+n}\cdot\alpha_k. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Uz zamjenu indeksa sumacije prve sume $k \to k' = k + n$, ovo postaje

$$\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n}. \tag{2.67}$$

Ove relacije koristit ćemo u sljedećem poglavlju da dobijemo spektar strune i uvjete na dimenzionalnost prostor–vremena.

Poglavlje 3

Kvantizacija bozonske strune

U prethodnom poglavlju su izvedene sve (ili gotovo sve) bitne jednadžbe koje se mogu dobiti iz Polyakov–ljeve akcije za klasičnu bozonsku strunu. Da bi izračunali spektar strune, potrebno je teoriju kvantizirati. Postoji nekoliko ekvivalentnih načina da se to napravi: stara kovarijantna kvantizacija, kvantizacija na svjetlosnom stošcu, kovarijantna kvantizacija preko integrala po stazama i BRST kvantizacija. Svaki od načina ima svoje prednosti. Stara kovarijantna kvantizacija čuva (kako joj i naziv kaže) kovarijantnost teorije, međutim jedina ograničenja koja postavlja na Fock–ov prostor stanja su ona koja odgovaraju Virasoro uvjetima stanja. Zbog toga se u Fock–ovom prostoru pojavljuju nefizikalna stanja, koja na neki način treba eliminirati. Kvantizacija svjetlosnog stošca s druge strane daje Fock–ov prostor koji sadrži samo fizikalna stanja. Cijena koju plaćamo je ta, da kovarijantnost nove teorije nije očigledna pa je moramo provjeravati u svakom koraku. Ipak, moguće je pokazati ekvivalentnost formalizma svjetlosnog stošca s kovarijantnim formalizmom. Budući da je u ovom radu spektar bozonske strune od primarnog interesa, kvantizacija će biti provedena kroz formalizam svjetlosnog stošca. Kvantizacijom u ovom baždarenju ispoljit će se kritična dimenzija prostor–vremena. No prije toga samo nekoliko napomena iz starog kovarijantnog pristupa.

3.1 Stari kovarijantni pristup

Iskoristit ćemo stari kovarijantni pristup da komponente položaja, impulsa i oscilatora pretvorimo u kvantnomehaničke operatore. Standardna metoda prijelaza iz klasične u kvantnu fiziku sastoji se u tome da Poisson–ove zagrade ovih veličina pretvorimo u komutacijske relacije. Korespondencija je sljedeća

$$\{\ldots\} \to -i[\ldots]. \tag{3.1}$$

Sada relacije (2.45)–(2.48) prelaze u:

$$\begin{aligned}
[X^\mu(\tau,\sigma), X^\nu(\tau,\sigma')] &= [P^\mu(\tau,\sigma), P^\nu(\tau,\sigma')] = 0, && (3.2)\\
[P^\mu(\tau,\sigma), X^\nu(\tau,\sigma')] &= -i\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu}, && (3.3)\\
[\alpha^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n] &= 0, && (3.4)\\
[\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n] &= [\tilde{\alpha}^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n] = m\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu}, && (3.5)\\
[p^\mu, x^\nu] &= i\eta^{\mu\nu}. && (3.6)
\end{aligned}$$

Vidimo da α_m zadovoljavaju komutacijske relacije operatora podizanja ($m < 0$) i spuštanja ($m > 0$) harmoničkog oscilatora.

Osnovno stanje oscilatora je $|0\rangle$, ali struna ima dodatni stupanj slobode – impuls centra mase strune p^μ. Stoga je osnovno stanje strune dano sa $|0; p^\mu\rangle$.

Fock–ov prostor stanja strune dobije se primjenom operatora podizanja na osnovno stanje. Bitno je primijetiti da taj Fock–ov prostor nije pozitivno definitan. Naime, komutacijske relacije vremenskih komponenti, zbog metrike prostora, imaju negativan predznak, $\left[\alpha^0_m, \alpha^0_{-m}\right] = -m$. Zbog toga se javlja stanje sa negativnom normom, $\langle 0 \left|\alpha^0_m, \alpha^0_{-m}\right| 0\rangle = -m$. Ovakva stanja se nazivaju duhovi. Da bi fizikalna teorija imala smisla, ne smije sadržavati duhove. Tako će prostor fizikalnih stanja biti podprostor Fock–ovog prostora.

U starom kovarijantnom formalizmu, naravno, postoji način da se prostor fizikalnih stanja izdvoji iz cijelog Fock–ovog prostora. Ipak mi ćemo spektar dobiti u sljedećem odjeljku kroz formalizam svjetlosnog stošca.

3.2 Kvantizacija svjetlosnog stošca

U prethodnom poglavlju je korišteno baždarenje svjetlosnog stošca, ali za koordinate svjetske plohe (τ, σ). Sada ćemo baždarenje svjetlosnog stošca primijeniti na prostorno–vremenske koordinate. Uzimamo da je prostor–vrijeme D–dimenzionalno, dakle opisano sa D koordinata. Od njih odabiremo dvije x^0 i x^1, preko kojih definiramo x^+ i x^-, dok su ostale transverzalne x^i

$$x^{\pm} = 2^{-1/2}\left(x^0 \pm x^1\right), \qquad x^i,\ i = 2, \dots, D-1. \tag{3.7}$$

Metrika koja vrijedi u ovom baždarenju je

$$a^\mu b_\mu = -a^+ b^- - a^- b^+ + a^i b^i, \tag{3.8}$$

$$a_- = -a^+, \quad a_+ = -a^-, \quad a_i = a^i. \tag{3.9}$$

Pri tome mala slova označavaju koordinate prostor–vremena x^μ, a velika pridružena polja na svjetskoj plohi $X^\mu(\sigma, \tau)$.

Parametar τ odabiremo tako da vrijedi*

$$X^+(\tau, \sigma) = x^+ + 2\alpha' p^+ \tau, \tag{3.10}$$

što odgovara klasičnom opisu za vrijednosti oscilatora $\alpha_n^+ = 0$, za $n \neq 0$. Ovaj izbor je praktičan jer sada vremenska komponenta nije više $X^0(\tau, \sigma)$. Tu ulogu preuzima $X^+(\tau, \sigma)$. Kao posljedica toga, neće postojati stanja s negativnom normom kao u kovarijantnom pristupu, odnosno sva stanja će biti fizikalna. Budući da X^+ ne ovisi o σ, za neki odabrani (fiksirani) τ, svaka točka na struni će imati istu vrijednost vremena. Virasoro–v uvjet na gibanje $\left(\dot{X} + X'\right)^2 = 0$ u ovom baždarenju postaje

$$\dot{X}^- + X'^- = \frac{\left(\dot{X}^i + X'^i\right)^2}{4\alpha' p^+}. \tag{3.11}$$

Ako u ovu jednadžbu uvrstimo

$$X^- = x^- + 2\alpha' p^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma, \tag{3.12}$$

lijeva strana će biti jednaka

$$\dot{X}^- + X'^- = 2\alpha' p^- + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \alpha_n^- e^{-in(\tau+\sigma)}. \tag{3.13}$$

*Radi lakšeg računanja za duljinu strune uzet ćemo da iznosi $l = \pi$. Ipak u svim izrazima zadržat ćemo α'. Razlog za ovaj izbor postat će jasan kasnije, kada budemo razmatrali spektar strune.

Za X^i uzimamo isti izraz kao za X^- uz zamijenu indeksa $(- \to i)$ pa s desne strane dobivamo

$$\begin{aligned}\left(\dot{X}^i + X'^i\right)^2 &= \sum_{i=2}^{D-1}\Bigg[4\alpha'^2 p^i p^i + 2(2\alpha')^{3/2} p^i \sum_{n\neq 0}\alpha_n^i e^{-in(\tau+\sigma)} \\ &+ 2\alpha' \sum_{n,m\neq 0}\alpha_n^i\alpha_m^i e^{-i(n+m)(\tau+\sigma)}\Bigg]. \qquad (3.14)\end{aligned}$$

Sada obje strane izvrijednimo u $\tau = 0$ i integriramo po σ kao u izrazu (2.57). S lijeve strane se dobije

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{ik\sigma}\left(\dot{X}^- + X'^-\right) &= 2\pi\left(2\alpha' p^-\delta_{k,0} + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_n^-\delta_{k-n,0}\right) \\ &= 2\pi\left(2\alpha' p^-\delta_{k,0} + \sqrt{2\alpha'}\alpha^-_{k(\neq 0)}\right), \qquad (3.15)\end{aligned}$$

a s desne

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{ik\sigma}\left(\dot{X}^i + X'^i\right)^2 &= 2\pi\sum_{i=2}^{D-1}\Bigg[4\alpha'^2 p^i p^i\delta_{k,0} + 2(2\alpha')^{3/2}p^i\sum_{n\neq 0}\alpha_n^i\delta_{k-n,0} \\ &+ 2\alpha'\sum_{n,m\neq 0}\alpha_n^i\alpha_m^i\delta_{k-n-m,0}\Bigg] \\ &= 2\pi\sum_{i=2}^{D-1}\Bigg[4\alpha'^2 p^i p^i\delta_{k,0} + 2(2\alpha')^{3/2}p^i\alpha^i_{k(\neq 0)} + 2\alpha'\sum_{n\neq 0,k}\alpha_n^i\alpha_{k-n}^i\Bigg] \\ &= 2\pi\sum_{i=2}^{D-1}\Bigg[4\alpha'^2 p^i p^i\delta_{k,0} + (2\alpha')^{3/2}\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}\left(\alpha_0^i\alpha^i_{k(\neq 0)} + \alpha^i_{k(\neq 0)}\alpha_0^i\right) \\ &+ 2\alpha'\sum_{n\neq 0,k}\alpha_{k-n}^i\alpha_n^i\Bigg] \\ &= 2\pi\sum_{i=2}^{D-1}\Bigg[4\alpha'^2 p^i p^i\delta_{k,0} + 2\alpha'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{k-n}^i\alpha_n^i\Bigg]. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Pri tome u zadnjoj sumi ne mogu k i n u isto vrijeme biti 0. Koristili smo identitet $p^i = (2\alpha')^{-1/2}\alpha_0^i$ i činjenicu da neovisni oscilatori komutiraju. Izjednačimo sada lijevu i desnu stranu za $k = 0$.

$$p^- = \frac{1}{2p^+}\sum_{i=2}^{D-1}\left[\frac{1}{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i + p^i p^i\right] \qquad (3.17)$$

S obzirom da su sada komponente oscilatora kvantnomehanički operatori, treba ih posložiti u normalnom uređenju (operatori poništavanja stoje desno od operatora stvaranja). Prema tome, prvi član s desne strane trebamo zamijeniti na sljedeći način

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\neq 0} :\alpha_{-n}^i\alpha_n^i: &= \sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\geq 1} :\alpha_{-n}^i\alpha_n^i: + \sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\leq -1} :\alpha_{-n}^i\alpha_n^i: \\
&= \sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\geq 1} \alpha_{-n}^i\alpha_n^i + \sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\leq -1} \alpha_n^i\alpha_{-n}^i \\
&= \sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\geq 1} \alpha_{-n}^i\alpha_n^i + \sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\leq -1} \alpha_{-n}^i\alpha_n^i + \sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\leq -1} n \\
&= \sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\neq 0} \alpha_{-n}^i\alpha_n^i - (D-2)\sum_{n\geq 1} n. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Kao posljedica izmjene operatora poništavanja i stvaranja pojavila se konstanta

$$a = -\frac{(D-2)}{2}\sum_{n\geq 1} n, \qquad (3.19)$$

tako da sada vrijedi

$$\sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\neq 0} \alpha_{-n}^i\alpha_n^i = \sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\neq 0} :\alpha_{-n}^i\alpha_n^i: -2a. \qquad (3.20)$$

Ako vratimo ovo u (3.17), impuls p^- postaje

$$p^- = \frac{1}{2p^+}\left[\sum_{i=2}^{D-1}\left(\frac{1}{2\alpha'}\sum_{n\neq 0} :\alpha_{-n}^i\alpha_n^i: + p^ip^i\right) - \frac{2a}{2\alpha'}\right]. \qquad (3.21)$$

Iz ove relacije možemo dobiti izraz za masu stanja strune

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = 2p^+p_- - p^ip^i = \frac{1}{\alpha'}(N-a), \qquad (3.22)$$

gdje N predstavlja operator broja stanja

$$N = \sum_{n\geq 1} \alpha_{-n}^i\alpha_n^i = \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0} :\alpha_{-n}^i\alpha_n^i: . \qquad (3.23)$$

U oba prethodna izraza podrazumijeva se sumacija po i.

Ovo su osnovne relacije u baždarenju svjetlosnog stošca. Konstanta a je ostala neodređena. Njenu vrijednost ćemo dobiti zahtijevajući da teorija bude Lorentz invarijantna. U baždarenju svjetlosnog stošca samo transverzalni oscilatori uzrokuju pobuđenja na struni pa se samo oni pojavljuju u operatoru broja stanja. Iz istog razloga, prvo pobuđeno stanje strune je dano sa $\alpha^i_{-1}|0;p\rangle$, što je (D-2)-komponentna vektorska reprezentacija grupe rotacija SO(D-2). Transverzalno polarizirana čestica će pri Lorentz–ovim transformacijama poprimiti longitudinalnu polarizaciju osim u slučaju bezmasene čestice. Budući da prvo pobuđeno stanje ima samo transverzalnu polarizaciju, zaključujemo da je to stanje bezmaseno. Iz relacije (3.22) sada slijedi a=1.

Sada iz relacije (3.19) možemo izračunati dimenziju prostor–vremena. Suma n–ova za $n \geq 1$ divergira pa je treba regularizirati. Poslužit ćemo se metodom regularizacije preko zeta funkcije. Općenitija suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{3.24}$$

za $Re\ s \geq 1$ konvergira Riemann–ovoj zeta funkciji $\zeta(s)$. Ona ima jedinstveno analitičko produljenje za $s = -1$, gdje vrijedi $\zeta(-1) = -1/12$. Kada ovaj rezultat vratimo u izraz (3.19), dobivamo

$$\frac{D-2}{24} = 1. \tag{3.25}$$

Ova relacija je zadovoljena za $D = 26$. Dakle, fizikalnost stanja strune i Lorentz–ova kovarijantnost zahtijevaju da prostor–vrijeme bude 26–dimenzionalno.

Pogledajmo sada koja stanja se pojavljuju u spektru strune! Za razliku od teorije polja operatori stvaranja i poništavanja ne stvaraju niti poništavaju strune, nego pobuđenja na njima. Kao što je već rečeno u prethodnom odjeljku osnovno stanje strune, čiji se centar mase giba s impulsom p, označavamo sa $|0;p\rangle$. Kako niti jedan oscilator nije pobuđen u ovom stanju, operator broja stanja iznosi $N = 0$ pa je, prema (3.22), kvadrat mase tog stanja $M^2 = -1/\alpha'$. Budući da ovdje niti jedan oscilator nije pobuđen, ovo stanje je vakuum za teoriju polja na svjetskoj plohi. Treba biti oprezan!

Ovaj vakuum ne znači da nema niti jedne strune; samo da nema pobuđenja na struni. U teoriji polja potencijalna energija skalarnog polja je $\frac{1}{2}m^2\phi^2$ pa negativan kvadrat mase upućuje na nestabilan vakuum, slično simetričnom stanju u spontano slomljenoj teoriji ("meksički šešir"). Ovo stanje se naziva *tahion*. Prvo pobuđeno stanje već smo susreli kada smo izračunavali vrijednost konstante a. Dobiva se tako da na osnovno stanje jednom primijenimo operator stvaranja α^i_{-1}. Ovo stanje je bezmaseni vektorski bozon s 24 nezavisne transverzalne polarizacije. Drugim riječima, transformira se kao vektor grupe rotacija $SO(24)$. Prva stanja s pozitivnim kvadratom mase ($M^2 = 1/\alpha'$) su

$$\alpha^i_{-2}|0;p\rangle \qquad \text{i} \qquad \alpha^i_{-1}\alpha^j_{-1}|0;p\rangle. \tag{3.26}$$

Ova stanja imaju $D-2$, odnosno $\frac{1}{2}(D-2)(D-1)$ polarizaciju. Iznad ovih postoji beskonačan toranj masivnih stanja.

Spektar zatvorene strune možemo lako dobiti analogijom sa spektrom otvorene strune. Zatvorene strune u baždarenju svjetlosnog stošca su opisane s dva skupa transverzalnih oscilatora $\{\alpha^i_n\}$ i $\{\tilde{\alpha}^i_n\}$. Po jedan skup iz lijevog i desnog sektora. Uz to, lijevi i desni modovi su povezani ograničenjem iz prvog poglavlja $L = \tilde{L}$ (2.64), prema kojem broj pobuđenja u lijevom i desnom sektoru mora biti međusobno jednak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^i_{-n}\alpha^i_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_n. \tag{3.27}$$

Zbog toga će stanja zatvorene strune biti dana kao tenzorski umnožak stanja otvorene strune sa samim sobom. Izraz za kvadrat mase ćemo dobiti na isti način kao u slučaju otvorene strune. Longitudinalna i transverzalna stanja ćemo dobiti kao zbroj lijevog i desnog sektora, uz isti izbor baždarenja

$$X^+ = x^+ + 2\alpha' p^+ \tau, \tag{3.28}$$

$$X^- = x^- + 2\alpha' p^- \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=0} \frac{1}{n}\left(\alpha^-_n e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}^-_n e^{-2in(\tau+\sigma)}\right) \tag{3.29}$$

$$X^i = x^i + 2\alpha' p^i \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=0} \frac{1}{n}\left(\alpha^i_n e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}^i_n e^{-2in(\tau+\sigma)}\right). \tag{3.30}$$

Primijetimo faktor 1/2 koji množi oscilatorske članove. On se ne javlja u slučaju otvorene strune, a zbog njega će izraz za kvadrat mase u slučaju zatvorene strune biti nešto drukčiji

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2a). \tag{3.31}$$

Budući da lijevi i desni oscilatori zadovoljavaju istu algebru, ne postoji $\tilde{a}$, odnosno $\tilde{a} = a = 1$.

Najlakše stanje je kao u slučaju otvorene strune ono bez pobuđenja i s negativnim kvadratom mase, dakle tahion

$$|0,0;p\rangle, \qquad M^2 = -\frac{4}{\alpha'}. \tag{3.32}$$

Prvo pobuđeno stanje nastaje djelovanjem s po jednim operatorom stvaranja iz lijevog i desnog sektora na osnovno stanje

$$\alpha^i_{-1}\tilde{\alpha}^j_{-1}|0,0;p\rangle. \tag{3.33}$$

Ovo stanje je ponovo bezmaseno. Ono se transformira kao tenzor ranga 2 pod grupom transformacija $SO(24)$, a može se dobiti kao tenzorki umnožak dva vektora s 24 polarizacije. Ova reprezentacija je reducibilna, a može se reducirati na simetrični tenzor traga nula, antisimetrični tenzor i skalar na sljedeći način:

$$e^{ij} = \frac{1}{2}\left(e^{ij} + e^{ji} - \frac{1}{12}\delta^{ij}e^{kk}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{ij} - e^{ji}\right) + \frac{1}{24}\delta^{ij}e^{kk}. \tag{3.34}$$

Ova tri dijela se ne miješaju pri rotacijama grupe $SO(24)$. Prvi član se pod $SO(24)$ transformira kao bezmasena čestica spina 2. To je *graviton*. Drugi dio je antisimetrični tenzor, a treći skalar – *dilaton*.

Kao i kod otvorene strune, iznad ova dva stanja postoji beskonačan toranj masivnih stanja. Iako ih teorija predviđa, niti jedno od njih nije eksperimentalno opaženo. Razlog za to leži u obrnutoj proporcionalnosti kvadrata mase s α'. Budući da teoriju struna smatramo ujedinjenom teorijom gravitacije i fizike čestica, red veličine α' će biti određen fundamentalnim konstantama gravitacije i kvantne mehanike. Dakle $\alpha' \sim M_P^{-2}$. Prema tome, sva masivna stanja u teoriji struna imat će masu na Planck–ovoj skali i time biti eksperimentalno nedostižna. Zato očekujemo da bezmasena stanja sadržavaju sve čestice Standardnog modela. Iako je većina poznatih čestica masivna, njihove mase su toliko male u usporedbi s M_P da su u prvoj aproksimaciji bezmasene, a masu dobivaju kao posljedica slamanja simetrije.

Iako ne možemo "uloviti" ni jedno od masivnih stanja, adut teorije struna je sadržan u bezmasenom stanju spektra zatvorene strune. Potraga za gravitonom je bila glavna motivacija za razvoj teorije struna. Sada smo našli što smo tražili. Međutim, teorija koja nije u skladu sa svijetom koji nas okružuje nam nije od velike koristi. Rezultat koji smo dobili za dimenziju prostor–vremena, svakako odstupa od svakodnevnog iskustva. U sljedećem poglavlju ćemo vidjeti kako možemo napasti taj problem.

Poglavlje 4

T–dualnost i D–opne

Jedan od rezultata prethodnog poglavlja koji se ističe jest dimenzija prostor–vremena. Fizikalnost stanja strune i kovarijantnost teorije zahtijevaju 26–dimenzionalno prostor–vrijeme, koje se sastoji od jedne vremenske i 25 prostornih dimenzija. Kako taj zahtjev pomiriti s našim svakodnevnim iskustvom (i iskustvom iz ostalih fizikalnih teorija, koje se za sada pokazuju ispravnima) da prostor u kojem živimo ima samo tri prostorne dimenzije? Jedna od mogućnosti je, naravno, odbaciti teoriju struna. Ta opcija nam nije privlačna pa predlažemo sljedeće objašnjenje. U općoj teoriji relativnosti geometrija prostor–vremena je dinamična. Tri naše prostorne dimenzije se šire, a jednom su bile zakrivljene. Možemo pretpostaviti da postoje dodatne dimenzije koje se (još) nisu razmotale. Razlog zbog kojeg do sada nismo detektirali te *ekstra* dimenzije je taj što su one zamotane i to s jako malim radijusom – kompaktificirane su. No, kao što ćemo vidjeti u ovom i sljedećem poglavlju, kompaktifikacija pruža mnogo više od objašnjenja za nevidljivost ekstra dimenzija. Novi i zanimljivi koncepti, karakteristični isključivo za strune kao jednodimenzionalne objekte, se javljaju kao posljedica kompaktifikacije jedne ili više prostornih dimenzija.

U ovom radu je obrađen samo najjednostavniji, školski primjer kompaktifikacije. To je kompaktifikacija na torusu. Čitatelja, kojeg zanimaju realistične kompaktifikacije teorije struna, upućujem na [1].

4.1 Toroidalna kompaktifikacija u teoriji polja

Kao i do sada, proučavanje počinjemo s teorijom polja za točkastu česticu.

Razmotrimo peterodimenzionalnu teoriju, u kojoj je x^4 periodična koordinata

$$x^4 \cong x^4 + 2\pi R, \tag{4.1}$$

dok su x^μ nekompaktne za $\mu = 0, \ldots, 3$. Ovo je toroidalna kompaktifikacija. Peterodimenzionalna metrika se može rastaviti na $G_{\mu\nu}$, $G_{\mu 4}$ i G_{44}. Iz perspektive četverodimenzionalne teorije, ovi dijelovi su metrički tenzor, vektor i skalar.

Uzmimo općenitiji slučaj u kojem prostor–vrijeme ima dimenziju $D = d + 1$, pri čemu je x^d periodična dimenzija. Metriku možemo parametrizirati tako da vrijedi

$$ds^2 = G^D_{MN} dx^M dx^N = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + G_{dd} \left(dx^d + A_\mu dx^\mu \right)^2 . \tag{4.2}$$

Indeksi M, N poprimaju vrijednosti $0, \ldots, d$, dok indeksi μ, ν pokrivaju samo nekompaktne koordinate $0, \ldots, d-1$. D–dimenzionalnu metriku označavamo G^D_{MN}. U d–dimenzionalnoj akciji indekse dižemo i spuštamo s $G_{\mu\nu}$. Bitno je primijetiti da $G_{\mu\nu} \neq G^D_{\mu\nu}$. Za sada za polja $G_{\mu\nu}$, G_{dd}, i A_μ uzimamo da ovise samo o nekompaktnim koordinatama x^μ. Metrika u obliku (4.2) je najopćenitija metrika invarijantna na translacije u kompaktnoj dimenziji x^d. Također je invarijantna na reparametrizacije nekompaktnih koordinata $x'^\mu(x^\nu)$, ali i na sljedeću reparametrizaciju

$$x'^d = x^d + \lambda(x^\mu). \tag{4.3}$$

Invarijantnost metrike na ovu transformaciju je moguća samo ako vrijedi

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda. \tag{4.4}$$

Vidimo da se baždarna transformacija pojavljuje kao dio većedimenzionalne grupe. Na ovaj način su Kaluza još 1912. i Klein 1914. pokušali unificirati elektromagnetsko polje s gravitacijskim kao komponente jednog polja više dimenzije. Zato se ovo naziva *Kaluza–Klein* mehanizam.

Efekt ovisnosti o x^d vidjet ćemo na primjeru bezmasenog skalarnog polja ϕ u D dimenzija. Radi jednostavnosti uzimamo $G_{dd} = 1$. Impuls u periodičnoj dimenziji je kvantiziran, $p_d = n/R$. Razvijmo ϕ po potpunom skupu stanja uzimajući u obzir kvantiziranost impulsa p_d.

$$\phi\left(x^M\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x^\mu) e^{inx^d/R} \tag{4.5}$$

Valna jednadžba u D dimenzija $\partial_M \partial^M = 0$ postaje

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi_n\left(x^\mu\right) = \frac{n^2}{R^2} \phi_n\left(x^\mu\right). \tag{4.6}$$

Vidimo da se modovi $\phi_n(x^\mu)$, D–dimenzionalnog polja $\phi(x^M)$ ponašaju kao beskonačni toranj d–dimenzionalnih polja s masom

$$m^2 = -p_\mu p^\mu = \frac{n^2}{R^2}. \tag{4.7}$$

Novo polje je bezmaseno samo za $p^d = 0$. $\phi(X^M)$ će biti bezmaseno i u d–dimenzionalnom prostoru, samo ako je neovisno o x^p. Zato ćemo na energijama niskim u usporedbi s inverznim radijusom kompaktifikacije R^{-1} moći vidjeti samo takva polja. No dosegnemo li energije usporedive s R^{-1} vidjet ćemo toranj Kaluza–Klein–ovih stanja.

4.2 Toroidalna kompaktifikacija u teoriji struna

Bacimo se sada ponovo na strune! Uzmimo da je jedno od skalarnih polja X^μ periodično!

$$X \cong X + 2\pi R \tag{4.8}$$

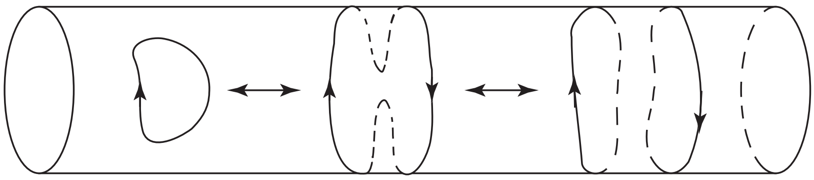
Ponovo zbog jednostavnosti uzimamo $G_{dd} = 1$, a polje X^d pišemo bez gornjeg indeksa. Akcija ostaje nepromijenjena u odnosu na nekompaktificiranu teoriju, stoga se ne mijenjaju ni jednadžbe gibanja ni tenzor energije–impulsa. Konformalna invarijantnost teorije je također zadržana. Periodičnost polja uzrokuje dva efekta. Prvi je kao i kod teorije polja: stanje strune mora imati jedinstveno rješenje pri identifikaciji (4.8). To znači da operator koji translatira strunu jednom oko periodične dimenzije $\exp(2\pi i R p)$, mora ostavljati stanja invarijantnima. Stoga impuls centra mase u tom smjeru mora biti kvantiziran

$$k = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

Drugi efekt je karakterističan samo za strune. Zatvorena struna se može namotati oko kompaktne dimenzije. Polje u tom smjeru, kada se napravi puni krug po struni, će biti

$$X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma) + 2\pi R w, \quad w \in \mathbb{Z}, \tag{4.10}$$

gdje je w (engl. *winding number*) broj namatanja. Svaka konzistentna teorija struna mora sadržavati stanja s konačnim brojem namatanja, budući da se stanje s w=0 može pretvoriti u w=+1 $w = -1$ par stanja. Lako se vidi da je u ovakvim procesima razdvajanja i spajanja broj namatanja očuvan.



Slika 4.1: Namatanje zatvorene strune oko kompaktne dimenzije i prijelaz iz stanja $w = 0$ u par stanja $w = +1$ i $w = -1$.

Za opisati stanja zatvorene strune korisno je uvesti Laurent–ove razvoje

$$\partial X(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m}{z^{m+1}}, \qquad \bar{\partial} X(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m}{\bar{z}^{m+1}}. \tag{4.11}$$

∂ i $\bar{\partial}$ predstavljaju derivaciju po z i $\bar{z}$, a polja $X(z)$ i $X(\bar{z})$ smo dobili iz (2.39) i (2.40) respektivno, uz supstitucije

$$z = e^{2i(\tau-\sigma)}, \qquad \bar{z} = e^{2i(\tau+\sigma)}. \tag{4.12}$$

Napravimo li puni krug po zatvorenoj struni, ukupna promjena kompaktne koordinate će iznositi

$$2\pi R w = \oint \left(dz \partial X + d\bar{z} \bar{\partial} X\right) = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} (\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0). \tag{4.13}$$

Ukupni sačuvani moment će biti

$$p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \oint \left(dz \partial X - d\bar{z} \bar{\partial} X\right) = \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}} (\alpha_0 + \tilde{\alpha}_0). \tag{4.14}$$

Zbog kompaktnosti dimenzije, više ne vrijedi $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = p(\alpha'/2)^{1/2}$, ali zbog periodičnosti imamo

$$p_L \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_0 = \frac{n}{R} + \frac{wR}{\alpha'}, \tag{4.15}$$

$$p_R \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\tilde{\alpha}_0 = \frac{n}{R} - \frac{wR}{\alpha'}. \tag{4.16}$$

Izračunajmo sada masu stanja zatvorene strune, uzimajući u obzir da je jedna dimenzija periodična (X^{25}). Izraz za masu u 26–dimenzionalnom prostor–vremenu bit će kao u (3.31). Međutim, nas zanima masa koju će to stanje imati u 25–dimenzionalnom podprostoru. Treba imati na umu da se impulsi lijevih i desnih modova u 25–dimenzionalnom podprostoru neće razlikovati, budući da u njemu ni jedna dimenzija nije periodična. Razlika će ipak postojati u 26–dimenzionalnom prostor–vremenu.

$$\begin{aligned} m^2 = -k^\mu k_\mu &= -k_L^M k_{LM} + (k_L^{25})^2 = M^2 + (k_L^{25})^2 \\ &= -k_R^M k_{RM} + (k_R^{25})^2 = M^2 + (k_R^{25})^2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Kada se ova dva doprinosa zbroje, a k_L^{25} i k_R^{25} se zamijene preko (4.15) i (4.16) respektivno, a M^2 preko (3.31), dobije se

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2). \tag{4.18}$$

Još jedna korisna relacija se dobije oduzimanjem lijevog i desnog doprinosa iz (4.17)

$$0 = nw + N - \tilde{N}. \tag{4.19}$$

Postoje četiri doprinosa kvadratu mase stanja strune. Redom, to su: doprinos od kompaktnog impulsa, potencijalna energija namotane strune, doprinos od oscilatora i energija nultog gibanja. Ponovo u obzir uzimamo samo transverzalne oscilatore.

Promotrimo prvo bezmaseni dio spektra. Za općenitu vrijednost radijusa kompaktifikacije R, bezmasena stanja se javljaju samo za $n = w = 0$ i $N = \tilde{N} = 1$. Ovdje se također javlja 24^2 stanja, baš kao u nekompaktnoj teoriji (Poglavlje 2), ali sada je korisno razdvojiti stanja prema tome osciliraju li u internom smjeru 25 ili u jednom od ostalih smjerova transverzalnih μ:

$$\begin{aligned} &\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0;k\rangle, \qquad (\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^{25} + \alpha_{-1}^{25}\tilde{\alpha}_{-1}^\mu)|0;k\rangle \\ &(\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^{25} - \alpha_{-1}^{25}\tilde{\alpha}_{-1}^\mu)|0;k\rangle, \qquad \alpha_{-1}^{25}\tilde{\alpha}_{-1}^{25}|0;k\rangle \end{aligned} \tag{4.20}$$

Prvo od ovih stanja se može dodatno reducirati na 25–dimenzionalni graviton plus dilaton plus antisimetrični tenzor. Drugo stanje, graviton s jednim prostornovremenskim i jednim internim indeksom, je Kaluza–Klein–ov vektor. Treće stanje je vektor koji dolazi iz antisimetričnog tenzora. Zadnje stanje je skalar, a predstavlja modul radijusa kompaktnog smjera.

Ovaj dio smo manje–više već vidjeli u teoriji polja s jednom kompaktnom dimenzijom. Međutim, razmatrali smo bezmasena stanja samo za općenite vrijednoti radijusa kompaktifikacije. Zadivljujući efekti se javljaju na nekim određenim vrijednostima R. Najbogatiji je slučaj za $R = \alpha'^{1/2}$. Vrijednost internog impulsa tada postaje $k^{25}_{L,R} = (n \pm w)\alpha'^{-1/2}$, a uvjet na bezmasena stanja (4.17) se svodi na

$$(n + w)^2 + 4N = (n - w)^2 + 4\tilde{N} = 4. \tag{4.21}$$

Osim općenitog slučaja $n = w = 0$, $N = \tilde{N} = 1$, sada se bezmasena stanja javljaju i za

$$n = w = \pm 1,\ N = 0,\ \tilde{N} = 1, \qquad n = -w = \pm 1,\ N = 1,\ \tilde{N} = 0, \tag{4.22}$$

te

$$n = \pm 2,\ w = N = \tilde{N} = 0, \qquad w = \pm 1,\ n = N = \tilde{N} = 0. \tag{4.23}$$

Stanja (4.22) uključuju četiri nova baždarna bozona.

4.3 T–dualnost

Pogledajmo sada što se događa s masom stanja za ekstremne vrijednosti R. Iz formule mase (4.18) vidimo da će namotana stanja za $R \to \infty$ postati beskonačno masivna. U isto vrijeme će kompaktni impuls prijeći u kontinuirani spektar. Ovaj slučaj odgovara teoriji bez kompaktne dimenzije. Novi i iznenađujući efekt vidimo kada pustimo da R ide u 0. Sada stanja s kompaktnim impulsom postaju beskonačno masivna, ali spektar namotanih stanja postaje kontinuiran. Spektar se ponovo ponaša kao u teoriji bez kompaktne dimenzije. Ovakvo ponašanje se ne javlja u teoriji polja. Budući da ne postoji broj namatanja w, ne postoje stanja koja će postati lagana kako

$R \to 0$. Slučajevi $R \to \infty$ i $R \to 0$ su u stvari fizikalno identični. Lako se vidi da je spektar (4.18) invarijantan na zamjenu

$$R \to R' = \frac{\alpha'}{R}, \quad n \leftrightarrow w. \tag{4.24}$$

Zamjena n i w je isto što i zamjena

$$p_L^{25} \to p_L^{25}, \qquad p_R^{25} \to -p_R^{25}. \tag{4.25}$$

Kao što smo prije stanje X^{25} razdvojili na lijevi i desni mod (2.38), što u novim koordinatama zapisujemo $X^{25}(z, \bar{z}) = X_L^{25}(z) + X_R^{25}(\bar{z})$, sada ćemo definirati novo polje

$$X'^{25}(z, \bar{z}) = X_L^{25}(z) - X_R^{25}(\bar{z}). \tag{4.26}$$

Novo polje ima isti tezor energije–impulsa kao X^{25}. Jedina razlika koja se javlja kada radimo s X'^{25} umjesto X^{25} je promjena predznaka (4.25). Tom zamjenom se spektar mijenja iz onog za teoriju s radijusom kompaktifikacije R u spektar teorije s radijusom R', a gore smo pokazali da je to ista teorija. Bitno je naglasiti da su polja lijevih i desnih modova nelokalni operatori na svjetskoj plohi pa je stoga i odnos između X^{25} i X'^{25} nelokalan.

Ova ekvivalencija se naziva T–dualnost. To je naznaka da strune geometriju prostor–vremena vide bitno drukčije na malim udaljenostima. Istaknimo još jednom. Teorije s radijusom kompaktifikacije iz intervala $0 \le R \le \alpha'^{1/2}$ ekvivalentne su teorijama s $R \ge \alpha'^{1/2}$. Budući da je pojam kontinuiranog impulsa intuitivniji od kontinuiranog broja namatanja, radit ćemo u području većih radijusa. Drugim riječima, ne postoje radijusi kompaktifikacije manji od onog za koji je teorija sama sebi dualna

$$R_{self-dual} = \alpha'^{1/2}. \tag{4.27}$$

Sjetimo se da smo u prvom poglavlju konstantu α' povezali s kvadratom duljine strune (2.37). To znači da je minimalni radijus kompaktifikacije usporediv s duljinom strune. Ili, gledano s druge strane, da je duljina strune određena minimalnim radijusom kompaktifikacije.

4.3.1 T–dualnost otvorene strune

Što je s otvorenim strunama? Njihovi krajevi su slobodni pa se uvijek mogu odmotati s kompaktne dimenzije. Kvantni broj namatanja w kod njih nema smisla. Zato, kada $R \to 0$ stanja s konačnim momentom u kompaktnom smjeru postaju beskonačno masivna, ali niti jedan dio spektra ne prelazi u kontinuum stanja. Nastala stanja se gibaju u 25 dimenzija prostor–vremena; isti rezultat kao u teoriji polja. Međutim, teorija s otvorenim strunama mora sadržavati i zatvorene strune. Kako je onda moguće da se u granici $R \to 0$ zatvorene strune gibaju u 26 dimenzija, a otvorene u samo 25? Paradoks je samo prividan. Unutrašnjost otvorenih struna se ni po čemu ne razlikuje od zatvorenih. Jedina razlika je to što otvorene strune imaju krajeve. Unutrašnjost otvorenih struna će stoga titrati u 26 dimenzija, kao i zatvorene strune, ali krajevi otvorenih struna će biti ograničeni na gibanje po 25–dimenzionalnoj hiperplohi. Da bi to detaljno pokazali polje X^{25} otvorene strune ćemo zapisati na sljedeći način:

$$X^{25}(z,\bar{z}) = X^{25}(z) + X^{25}(\bar{z}), \tag{4.28}$$

gdje je

$$\begin{aligned} X^{25}(z) &= \frac{1}{2}x^{25} + \frac{1}{2}x'^{25} - i\alpha' p^{25}\ln z + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{25}z^{-n}, \\ X^{25}(z) &= \frac{1}{2}x^{25} - \frac{1}{2}x'^{25} - i\alpha' p^{25}\ln \bar{z} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{25}\bar{z}^{-n}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Sličan raspis smo već koristili za zatvorenu strunu. Treba uočiti bitnu razliku: u slučaju otvorene strune lijevi i desni modovi su vezani pa se pojavljuje samo α, ali ne i $\tilde{\alpha}$. Osim toga, z i $\bar{z}$ su sada

$$z = e^{i(\tau-\sigma)}, \qquad \bar{z} = e^{i(\tau+\sigma)}, \tag{4.30}$$

za razliku od (4.12). Lako se vidi da je $X^{25}(z,\bar{z})$ od prije poznato rješenje za otvorenu strunu (2.36). Definirajmo sada novo polje X'^{25} na isti način kao za zatvorenu strunu u prethodnom odjeljku!

$$\begin{aligned} X'^{25}(z,\bar{z}) &= X^{25}(z) - X^{25}(\bar{z}) \\ &= x'^{25} - 2\alpha' p^{25}\sigma - \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{25}e^{-in\tau}\sin n\sigma. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Vidimo da oscilatorski članovi iščezavaju na rubovima strune ($\sigma = 0, \pi$), a dva člana koja ostaju konačni ne ovise o vremenu. Znači da se rubovi strune ne gibaju u kompaktnom smjeru. Do ovog zaključka možemo doći na još jedan način. Neumann–ov rubni uvjet (2.32) je $\partial_n X \equiv \partial_\sigma X = 0$, gdje je ∂_n derivacija u smjeru normale na rub svjetske plohe. Derivaciju u smjeru tangencijalnom na rub svjetske plohe možemo povezati uz derivaciju po parametru τ na način $\partial_t X \equiv i\partial_\tau X$. Izjednačeno s nulom, to postaje Dirichlet–ov rubni uvjet (2.33). Direktnim računom možemo vidjeti da vrijedi

$$\partial_n X^{25} = -i\partial_t X'^{25}. \tag{4.32}$$

Neumann–ov rubni uvjet originalne koordinate je Dirichlet–ov rubni uvjet dualne koordinate. Već je nekoliko puta rečeno da su originalna i dualna teorija ekvivalentne pa prihvaćamo da se krajevi otvorene strune ne gibaju u kompaktnoj dimenziji. Izračunajmo promjenu X'^{25} između dva kraja strune!

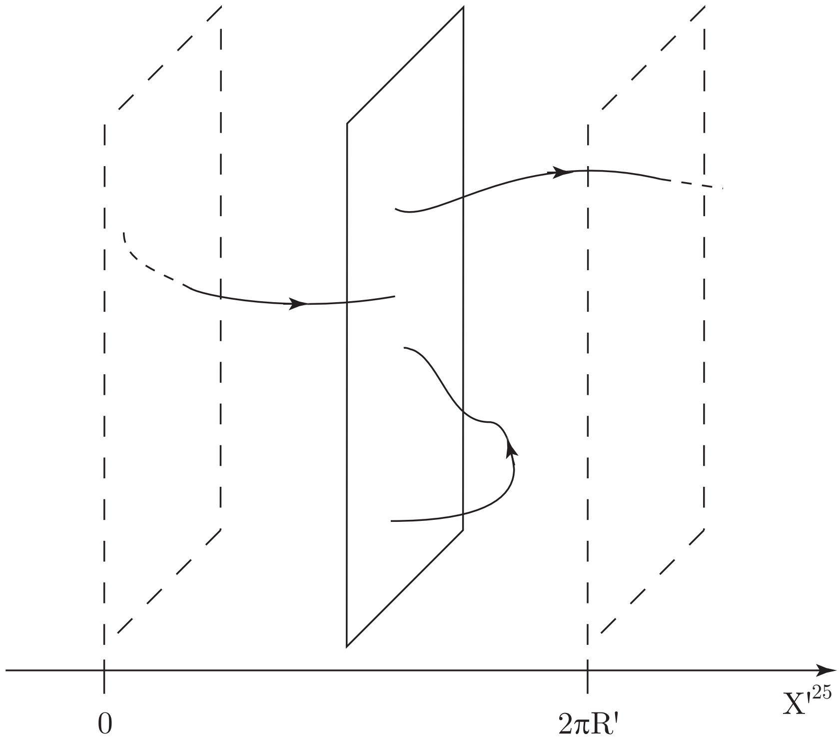
$$X'^{25}(\pi) - X'^{25}(0) = 2\pi\alpha' p^{25} = \frac{2\pi\alpha' n}{R} = 2\pi n R' \tag{4.33}$$

Kompaktna dimenzija se između krajeva razlikuje za cijeli broj perioda dualne dimenzije. Prema tome oba kraja strune leže na istoj hiperplohi u periodičnom T–dualnom prostoru (slika 4.2). Cijelo vrijeme treba naravno imati na umu da se ova analiza odnosi samo na kompaktificiranu dimenziju. Krajevi strune se u ostalim smjerovima mogu slobodno gibati te tako brišu 24–dimenzionalnu hiperplohu, koja se zove D–opna. Budući da ima 24 prostorna smjera, naziva se D24–opna. U slučaju da je više koordinata kompaktificirano

$$X^m = \{X^{25}, X^{24}, ..., X^{p+1}\}, \tag{4.34}$$

krajevi struna će brisati $(p+1)$–dimenzionalne hiperplohe, D(p+1)–opne.

Važno je primijetiti i istaknuti sljedeće: D–opne su podprostori cijelog (25–dimenzionalnog) prostora, a time i cijelog prostor–vremena. Uz to, umjesto da kažemo da su krajevi struna slobodni da se gibaju u nekompaktnim smjerovima i da brišu $(p+1)$–dimenzionalne hiperplohe, možemo na tu sliku gledati ovako: D–opne su stvarni dinamički objekti, a strune se kreću po njima, ali ne mogu s njih otići. Kada se kaže da su *D*–opne dinamički objekti, to znači da očekujemo da će im položaj i oblik fluktuirati. Ovakav



Slika 4.2: D–opna i strune vezane na nju.

zahtjev nije neobičan kada se sjetimo da teorija sadržava gravitaciju. U stvari bi bilo čudno da u takvim uvjetima postoji savršeno kruti objekt. U ovom kontekstu, “naše” (četverodimenzionalno) prostor–vrijeme bi moglo biti $D3$–opna po kojoj se strune gibaju i koja se sama giba u vremenu. Što se tiče zatvorenih struna, one nemaju krajeve pa ne mogu ni biti vezani za D–opne. One zato mogu putovati između otvorenih struna ili D–opni. Već smo vidjeli da zatvorene strune u svom spektru sadržavaju graviton pa će na taj način prenositi gravitacijsko međudjelovanje.

Teorija opisana u ovom poglavlju imala je zanimljiv i neočekivan razvoj. Krenuli smo od kompaktifikacije s motivom da opravdamo postojanje ekstra dimenzija i razlog zbog kojeg njihovo postojanje još nije uočeno. Kompaktifikacija nam je otkrila zadivljujuće svojstvo teorije struna, T–dualnost, koja nas je pak dovela do postojanja novih višedimenzionalnih dinamičkih objekata, D–opni.

Poglavlje 5

Zaključak

Kao što je već više puta rečeno, motivacija ovog rada bilo je upoznati se s osnovnim značajkama teorije bozonske strune. Uobičajeno je da se u teoriju struna uđe preko klasičnog opisa, a ja nisam vidio niti jedan razlog zašto da napustim tu tradiciju. U klasičnom opisu su strune opisane kao žica na gitari s jedinom razlikom što se za rubne uvijete uzimaju Neumann–ovi i, naravno, periodički za zatvorene strune. Budući da teorija struna (odnosno njezin usavršeniji oblik, teorija superstruna) puca na naslov teorije svega, prirodan slijedeći korak je kvantizacija strune. Spektar koji se otkriva kvantizacijom daje opravdanje za ovako visoke ambicije. Naime, pokazuje se da je jedno od stanja, koje se pojavljuje kao pobuđenje zatvorene strune, bezmaseno stanje spina dva. Ono se može identificirati s gravitonom. Ovo je prva konzistentna fizikalna teorija u kojoj se pojavljuje medijator gravitacijskog međudjelovanja. Doduše, u teoriji se javljaju druge nekonzistentnosti (postojanje čestice s negativnim kvadratom mase, tahiona), ali one nisu uzrokovane problemima s kvantizacijom gravitacije. Teorija struna zaslužuje pohvale čak i na područjima na kojima je naizgled propala. Zahtjev za dodatnim dimenzijama prostor–vremena se svakako čini kao nedostatak teorije, ali pri pokušaju da se višak dimenzija reducira, teorija struna otkriva novo bogatstvo kroz svojstvo T–dualnosti. Kao da to nije dovoljno, pojavljuju se i D–opne.

Želim otkloniti mogućnost zabune. Teorija struna je daleko šire i bogatije područje istraživanja nego što to ovaj rad možda predstavlja. Pri pisanju, trudio sam se biti sažet i jasan. Željа mi je bila da netko ovaj rad izabere za prvi korak prema upoznavanju i radu u teoriji struna. Nadam se da će se u tome pokazati koristan, zanimljiv i motivirajući. Iz tog razloga nisam želio puno ići u širinu i uvoditi mnoštvo novih pojmova i koncepata, kojima je teorija struna svakako bogata. Tako nisam uopće spomenuo da strune mogu biti orijentirane i neorijentirane; uveo sam samo dva načina kvantizacije teorije; nisam ništa rekao o formalizmu integrala po stazama, koji se pokazuje izrazito važan i koristan u teoriji polja i struna; nisam uvodio fermionska pobuđenja struna, odnosno supersimetrije i supersimetrične strune; nisam spominjao naboje koje nose krajevi otvorenih struna (*Chan–Paton–ovi faktori*); u dijelu o D–opnama, obradio sam samo slučaj jedne D–opne, dok ih u stvarnosti ima neizmjerno mnogo, a strune mogu istovremeno biti vezane za dvije, a ne samo za jednu. Uz sve ovo, ovaj rad pokriva samo slučaj slobodne strune. Dakle međudjelovanja nisu uopće obrađena. Nadam se da će ovaj rad zainteresirati čitateljicu/čitatelja za teoriju struna i potaknuti je/ga da uđe dublje i šire u ovu problematiku. Kao daljnji korak u tom smjeru preporučam radove navedene u popisu literature. Jedan od navedenih radova [5] sadržava kratak povijesni pregled razvoja teorije struna.

Bibliografija

[1] J. Polchinski, *String Theory*, Svezak 1; Cambridge University Press, New York (1998), (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)

[2] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Svezak 1; Cambridge University Press, New York (1987), (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)

[3] C. V. Johnson, *D–Branes*; Cambridge University Press, New York (2003), (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)

[4] A. Samsarov, *Teorija bozonske strune*, Diplomski rad; Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno matematički fakultet, Fizički odsjek, Zagreb (2002)

[5] M. J. Duff, *Benchmarks on the brane*, hep–th/0407175