Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet

Matematički odjel

Miroslav Jerković

Rekurzivne relacije za karaktere afine Liejeve algebre $A_\ell^{(1)}$

Disertacija

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mirko Primc

Zagreb, 2007.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Osnovni objekt proučavanja ovog rada su potprostori Feigin – Stojanovskog za afine Lijeve algebre $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})\tilde{}$, formule formalnih karaktera tih prostora te sustavi rekurzivnih jednadžbi među karakterima.

Za Liejevu algebru $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$ (s Cartanovom podalgebrom $\mathfrak{h}$, odgovarajućim sistemom korijena R te korijenskom dekompozicijom s fiksiranim korijenskim vektorima x_α) promatramo izabranu $\mathbb{Z}-$gradaciju $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ takvu da je $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Skup korijena od $\mathfrak{g}_1$ označimo s Γ.

Pripadnu afinu Liejevu algebru označavamo s $\tilde{\mathfrak{g}}$, centralni element s c, a fiksirane realne korijenske vektore s $x_\alpha(n)$. Gradacija algebre $\mathfrak{g}$ inducira $\mathbb{Z}-$gradaciju na $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1.$$

Ovdje je $\tilde{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ komutativna Liejeva algebra s bazom

$$\{x_\gamma(j) | j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma\}.$$

Za standardni $\tilde{\mathfrak{g}}-$modul nivoa $k = \Lambda(c)$ s pripadnim vektorom najveće težine v_Λ definiramo potprostor Feigin-Stojanovskog $W(\Lambda)$ kao $\tilde{\mathfrak{g}}_1-$podmodul od $L(\Lambda)$:

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda \subset L(\Lambda).$$

Kako bismo dali motivaciju za proučavanje potprostora Feigin-Stojanovskog, iznijet ćemo nekoliko povijesnih napomena.

Lepowsky i Wilson ([LW1] – [LW4]) pokazali su da se produktna strana čuvenih Rogers-Ramanujanovih identiteta pojavljuje pri glavnoj specijalizaciji karaktera određenih ireducibilnih reprezentacija najjednostavnije afine Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}$. Koristeći konstrukciju osnovnih reprezentacija te algebre pomoću verteks operatora daju isključivo u teoriji Liejevih algebri zasnovan dokaz Rogers-Ramanujanovih identiteta. Produktna strana takvih identiteta proizlazi u pravilu iz Weyl-Kacove formule karaktera, dok strana koja sadrži sumu slijedi iz konstrukcije kombinatorne baze proučavanih modula. Stoga se kao zanimljiv problem pokazuje upravo pokušaj opisa kombinatornih baza nekih modula (ili nekih njihovih potprostora) afinih Liejevih algebri.

Nakon ovih uspjeha uslijedili su pokušaji da se kroz teoriju Liejevih algebri i verteks operatora pronađu i dokažu i neki drugi identiteti Rogers-Ramanujanovog tipa. Meurman i Primc u [MP1] daju konstrukciju i dokaz linearne nezavisnosti kombinatornih baza standardnih $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}-$modula, odakle slijedi dokaz još nekih identiteta Rogers-Ramanujanovog tipa. Dva do tada nepoznata identiteta dobiva Capparelli radeći na opisu baza standardnih modula nivoa 3 za afinu Liejevu algebru $A_2^{(2)}$ (vidjeti [C]). U [MP2] Meurman i Primc razvijaju novu tehniku korištenjem tzv. anihilirajućih polja za konstrukciju kombinatornih baza standardnih $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}-$modula, dok u [MP3] dodatno razvivši ovaj postupak daju opis baze osnovnog modula za $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})\tilde{}$.

Feigin i Stojanovski (vidjeti [FS]) korištenjem kombinatorne baze tzv. glavnog potprostora osnovnog $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}-$modula $L(\Lambda_0)$ (sličnog potprostoru Feigin-Stojanovskog) dolaze do strane Rogers-Ramanujanovih identiteta koja sadrži sumu, dok produktnu stranu (jer direktan analogon Weyl-Kacove formule karaktera za glavne potprostore ne postoji) računaju razvijenim geometrijskim metodama. Proširivši pristup iz [FS], direktnom konstrukcijom baza glavnih potprostora G. Georgiev u [G] dolazi do formula karaktera za glavne potprostore svih standardnih $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})\tilde{}-$modula.

Capparelli, Lepowsky i Milas koriste strukturu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}-$modula $L(k\Lambda_0)$ kao algebre verteks operatora te teoriju operatora ispreplitanja da dobiju Rogers-Ramanujanove rekurzije i Rogers-Selbergove rekurzije (vidjeti [CLM1] i [CLM2]). Dobiveni sustav rekurzivnih relacija otkrio je i riješio već G. Andrews radeći na tzv. Gordonovim identitetima (vidjeti npr. u [A1]). U kontekstu teorije Liejevih algebri rješenje tog sustava predstavlja zatvorene izraze za formalne karaktere potprostora Feigin-Stojanovskog za Liejevu algebru $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}$, i to za sve standardne module općeg cjelobrojnog nivoa k.

U [FJMMT] autori dualni prostor potprostora Feigin-Stojanovskog za standardne $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})\tilde{}-$module proizvoljnog nivoa ulažu u prostor simetričnih polinoma i definiraju na njemu tzv. Gordonovu filtraciju. Iz eksplicitnog računa komponenti pripadnog graduiranog prostora (uz korištenje verteks operatora) slijede na odgovarajući način specijalizirane formule karaktera potprostora Feigin-Stojanovskog nekih standardnih modula proizvoljnog nivoa.

Pristup Mirka Primca (vidjeti [P1]) vodi do konstrukcije kombinatorne baze (parametrizirane tzv. $(k,l)-$dopustivim konfiguracijama) svih potprostora Feigin-Stojanovskog za afine Liejeve algebre tipa A_ℓ. U [P2] Primc daje dokaz linearne nezavisnosti potprostora $W(\Lambda_0)$ (za sve klasične proste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i sve izbore gore opisane $\mathbb{Z}-$gradacije) pomoću formule karaktera za kristalne baze. Koristeći metodu koju su razvili Capparelli, Lepowsky i Milas, Primc u [P3] daje i jednostavniji dokaz linearne nezavisnosti kombinatorne baze.

Činjenica da je kombinatorni opis baze poznat za proizvoljan rang ℓ i nivo k, te postojanje odgovarajućih operatora ispreplitanja i tzv. operatora proste struje $[\omega]$, otvara mogućnost da se pokušaju napisati sustavi rekurzivnih relacija među formalnim karakterima potprostora Feigin-Stojanovskog istog fiksnog nivoa. Rješavanje ovih sustava vodilo bi do formula karaktera potprostora Feigin-Stojanovskog za više rangove i proizvoljne nivoe. To je pristup kojeg ćemo u ovom radu koristiti.

Dajemo sada pregled najbitnijih rezultata. Najprije dokazujemo rezultat o egzaktnosti nekih nizova potprostora Feigin-Stojanovskog istog fiksnog nivoa k za $\tilde{\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})}$:

Propozicija 4 *Sljedeći niz je egzaktan:*

$$0 \to W_{k_\ell,k_0,k_1,\ldots,k_{\ell-1}} \xrightarrow{[\omega]^{\otimes k}} W \xrightarrow{\varphi_0} \prod_{I_1\in D_1(K)} W_{I_1} \xrightarrow{\varphi_1}$$
$$\xrightarrow{\varphi_1} \prod_{I_2\in D_2(K)} W_{I_2} \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \prod_{I_m\in D_m(K)} W_{I_m} \to 0.$$

Za fiksnu težinu $\Lambda = k_0\Lambda_0 + \cdots + \Lambda_\ell k_\ell$ formalni karakter $\chi(W(\Lambda))$ definiramo formulom

$$\chi(W(\Lambda))(z_1,\ldots,z_\ell;q) = \sum \dim W(\Lambda)^{m,n_1,\ldots,n_\ell} q^m z_1^{n_1}\cdots z_\ell^{n_\ell},$$

gdje $W(\Lambda)^{m,n_1,\ldots,n_\ell}$ označava graduirani potprostor $W(\Lambda)$ monomijalnih vektora stupnja m koji sadrže n_i članova oblika $x_{\gamma_i}(-j_i)$, $j_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,\ldots,\ell$.

Iz Propozicije 4 slijedi sustav rekurzivnih relacija među formulama karaktera:

$$\begin{aligned}\chi(W)(z_1,\ldots,z_\ell;q) = &\sum_{I\in D(K)} (-1)^{|I|-1}\chi(W_I)(z_1,\ldots,z_\ell;q)+\\ &+(z_1q)^{k_0}\ldots(z_\ell q)^{k_{\ell-1}}\chi(W_{k_\ell,k_0,\ldots,k_{\ell-1}})(z_1q,\ldots,z_\ell q;q).\end{aligned}$$

Rješenje gornjeg sustava tražimo u obliku

$$\chi(W_{k_0,\ldots,k_\ell})(z_1,\ldots,z_\ell;q) = \sum_{n_1,\ldots,n_\ell\geq 0} A_{k_0,\ldots,k_\ell}^{n_1,\ldots,n_\ell}(q) z_1^{n_1}\ldots z_\ell^{n_\ell},$$

gdje su $A^{n_1,\dots,n_\ell}_{k_0,\dots,k_\ell}(q)$ racionalne funkcije formalne varijable q, odakle slijedi

$$A^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = \sum_{I\in D(K)} (-1)^{|I|-1} A_I^{n_1,\dots,n_\ell}(q) + q^{n_1+\cdots+n_\ell} A^{n_1-k_0,\dots,n_\ell-k_{\ell-1}}_{k_\ell,k_0,\dots,k_{\ell-1}}(q). \quad (1.1)$$

Sljedeća propozicija garantira jedinstvenost rješenja gornjeg sustava rekurzivnih jednadžbi:

Propozicija 10 *Za svaki izbor nenegativnih cijelih brojeva $k_0,\dots,k_\ell$ takvih da je $k_0+\cdots+k_\ell = k$ i za sve izbore nenegativnih cijelih brojeva $n_1,\dots,n_\ell$ takvih da je $n_i \geq k_{i-1}$, $i = 1,\dots,\ell$, za racionalne funkcije formalne varijable q koje zadovoljavaju sustav (1.1) vrijedi*

$$A^{n_1,\dots,n_\ell}_{k_0,\dots,k_\ell}(q) = \frac{q^n}{1-q^n}\Big(\sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}\setminus\{(0,\dots,0)\}} A^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}(q) +$$
$$+ q^n \sum_{I\in D(K)} \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}_I\setminus\{(0,\dots,0)\}} A^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}(q)\Big).$$

Konačno, rješavanje gornjeg sustava vodi do zatvorenih formula formalnih karaktera. Za proizvoljan ℓ i $k = 1$ imamo sljedeću propoziciju:

Propozicija 11 *Rješenje sustava (1.1) za $k = 1$ i ℓ proizvoljan glasi:*

$$A_i^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = \frac{q^{f_i(n_1,\dots,n_\ell)}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_\ell}},$$

gdje je $f_i(n_1,\dots,n_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} n_j^2 + \sum_{1\leq j_1<j_2\leq\ell} n_{j_1}n_{j_2} + \sum_{j=1}^{i} n_j$, $i = 0\dots\ell$.

Iz Propozicije 11 slijedi da za $W_i = W(\Lambda_i)$, $i = 0,\dots,\ell$, formula karaktera glasi

$$\chi(W_i)(z_1,\dots,z_\ell;q) = \sum_{n_1,\dots,n_\ell\geq 0} \frac{q^{f_i(n_1,\dots,n_\ell)}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_\ell}} z_1^{n_1}\cdots z_\ell^{n_\ell}.$$

Dalje, za $\ell = 2$ i proizvoljan nivo k Teorem 12 daje rješenje sustava (1.1):

Teorem 12 *Rješenje sustava (1.1) za k proizvoljan i $\ell = 2$ dano je s*

$$A^{n_1,n_2}_{k_0,k_1,k_2}(q) = \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)}\cdot L^{N_1,N_2}_{k_0,k_1,k_2}(q)}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} \quad (1.2)$$

gdje je $N_1 = (N_{1,1}, \dots, N_{1,k})$, $N_2 = (N_{2,1}, \dots, N_{2,k})$, *a*

$$
\begin{aligned}
U(n_1) &= \{N_1 | \sum_{i=1}^{k} N_{1,i} = n_1, N_{1,i} \geq N_{1,i+1}, i = 1 \dots k, N_{1,k+1} := 0\}, \\
U(n_2) &= \{N_2 | \sum_{i=1}^{k} N_{2,i} = n_2, N_{2,i} \geq N_{2,i-1}, i = 1 \dots k, N_{2,0} := 0\}, \\
Q(N_1, N_2) &= |N_1|^2 + |N_2|^2 + N_1 \cdot N_2, \\
L_{k_0,k_1,k_2}^{N_1,N_2}(q) &= \sum_{p \in P_{k_1+k_2}} q^{p \cdot N_1 + f_{k_2}(p) \cdot N_2} \cdot \Delta_{p,N_1}, \\
P_{k_1+k_2} &= \{(p_1, p_2, \dots, p_k) \in \{0,1\}^k | \sum_{i=1}^{k} p_i = k_1 + k_2\}, \\
\Delta_{p,N_1} &= \prod_{i=1}^{k} (1 - \delta_{p_i - p_{i+1}, -1} \cdot q^{N_{1,i} - N_{1,i+1}}) \quad uz \quad p_{k+1} := 0.
\end{aligned}
$$

Osim toga, $f_{k_2}(p)$ *za* $p \in P_{k_1+k_2}$ *označava uređenu* $k-$*torku dobivenu iz* p *tako da sve osim prvih* k_2 *jedinica učinimo nulama.*

Odavdje slijedi eksplicitan izraz za formule karaktera svih potprostora Feigin-Stojanovskog za $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})\tilde{}$ (uz oznake kao u iskazu Teorema):

$$
\chi(W)(z_1, z_2; q) = \sum_{n_1,n_2} \sum_{\substack{N_1 \in U(n_1) \\ N_2 \in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot L_{k_0,k_1,k_2}^{N_1,N_2}(q)}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i} - N_{1,i+1}} \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i} - N_{2,i-1}}} z_1^{n_1} z_2^{n_2}.
$$

Izložit ćemo ukratko i sadržaj rada prema poglavljima.

U sljedećem poglavlju dajemo definicije polaznih objekata – afine Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})\tilde{}$ i njenih standardnih modula. Dalje, opisujemo Frenkel-Kac-Segalovu konstrukciju osnovnih modula pomoću verteks operatora i uvodimo operatore ispreplitanja.

U trećem poglavlju definiramo osnovne objekte proučavanja ovog rada – potprostore Feigin-Stojanovskog, dajemo kombinatorni opis njegove baze i opisujemo odgovarajuće koeficijente operatora ispreplitanja te operator proste struje.

Egzaktni nizovi tema su sljedećeg poglavlja – ovdje se najprije uvodi notacija, iskazuje se propozicija o egzaktnosti nekih nizova potprostora Feigin-Stojanovskog istog fiksnog nivoa k, potom slijedi niz tehničkih pomoćnih rezultata, a konačno i dokaz na početku iskazane propozicije o egzaktnosti.

U petom poglavlju definiramo formalni karakter potprostora Feigin – Stojanovskog, potom na osnovu rezultata iz prethodnog poglavlja izvodimo sustav rekurzivnih relacija među karakterima i dajemo dokaz jedinstvenosti rješenja tog sustava.

Sljedeće, šesto poglavlje, počinje pregledom postojećih rezultata u nastojanju da se nađe zatvorena forma za karaktere potprostora Feigin-Stojanovskog. Nakon toga dajemo dokaz formula karaktera u slučaju proizvoljnog ranga i nivoa 1. Također, dajemo iskaz teorema iz kojeg slijede formule karaktera za potprostore Feigin-Stojanovskog standardnih modula proizvoljnog nivoa za afinu Liejevu algebru $\widetilde{\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})}$. Koristeći odgovarajuće specijalizacije ovih formula pokazujemo identičnost stanovite klase dobivenih formula karaktera s postojećim rezultatima.

U posljednjem, sedmom poglavlju ovog rada kroz niz tehničkih lema dokazujemo Teorem 12, odnosno pokazujemo da su formule karaktera za $\ell = 2$ i proizvoljan nivo iskazane u prethodnom poglavlju, zaista rješenja sustava rekurzivnih relacija za formule karaktera potprostora Feigin-Stojanovskog.

Na kraju, želio bih zahvaliti svome mentoru prof. dr. sc. Mirku Primcu na svesrdnoj i nesebičnoj pomoći te konstruktivnim sugestijama pri izradi ovog rada. Zahvaljujem također i Ivani Baranović i Goranu Trupčeviću na prijateljskim savjetima i prijedlozima.

Poglavlje 2

Standardni moduli afine Liejeve algebre

2.1 Afina Liejeva algebra i standardni moduli

Za $\ell \in \mathbb{Z}_+$ označimo s $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$ Liejevu algebru tipa A_ℓ te s $\mathfrak{h}$ Cartanovu podalgebru dijagonalnih matrica od $\mathfrak{g}$. Označimo dalje s

$$R = \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) | 1 \leq i \leq j \leq \ell + 1\}$$

sistem korijena te fiksirajmo proste korijene s $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, $i = 1, \ldots, \ell$. Imamo standardnu trokutastu dekompoziciju

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Neka je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Killingova forma na $\mathfrak{h}^*$ normalizirana tako da za maksimalni korijen θ vrijedi $\langle \theta, \theta \rangle = 2$. Koristimo identifikaciju $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^*$ preko $\langle \cdot, \cdot \rangle$: za $\mu \in \mathfrak{h}^*$ označimo s $h_\mu \in \mathfrak{h}$ takav da za svaki $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ vrijedi

$$\lambda(h_\mu) = \langle \lambda, \mu \rangle.$$

Dalje, neka su ω_i, $i = 1, \ldots, \ell$, odgovarajuće fundamentalne težine, uz $\omega_0 := 0$.

S $Q = Q(R)$ i $P = P(R)$ ćemo označavati korijensku, odnosno težinsku rešetku od $\mathfrak{g}$, redom:

$$Q = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i, \quad P = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\omega_i.$$

Neka je $\tilde{\mathfrak{g}}$ pridružena (proširena) afina Liejeva algebra

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

s kanonskim centralnim elementom c, gdje za $x, y \in \mathfrak{g}$ i $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = [x, y] \otimes t^{m+n} + m\langle x, y\rangle \delta_{m+n,0} c.$$

Za operator stupnja d je

$$[d, x \otimes t^n] = nx \otimes t^n.$$

Uvedimo oznaku

$$x(n) = x \otimes t^n$$

za $x \in \mathfrak{g}$ i $n \in \mathbb{Z}$ te označimo s

$$x(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n-1}$$

formalni Laurentov red u formalnoj varijabli z.
Dalje, uz oznake

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^e &= \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \\ \tilde{\mathfrak{n}}_{\pm} &= \mathfrak{g} \otimes t^{\pm}\mathbb{C}[t^{\pm}] \oplus \mathfrak{n}_{\pm} \end{aligned}$$

imamo trokutastu dekompoziciju

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \tilde{\mathfrak{h}}^e \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+.$$

Prosti korijeni su ovdje $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subset (\mathfrak{h}^e)^*$, a odgovarajuće fundamentalne težine $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_\ell$ (vrijedi $\Lambda_i(c) = 1, \Lambda_i(d) = 0, i = 0, \ldots, \ell$).
Općenito, modul V najveće težine ($\Lambda \in (\tilde{\mathfrak{h}}^e)^\star$) za $\tilde{\mathfrak{g}}$ je modul generiran vektorom najveće težine v_Λ takav da je

$$\begin{aligned} &h.v_\Lambda = \Lambda(h) v_\Lambda, \quad h \in \mathfrak{h}^e \\ &x.v_\Lambda = 0, \quad x \in \tilde{\mathfrak{n}}_+. \end{aligned}$$

Neka je $L(\Lambda)$ standardni (tj. integrabilni ireducibilan najveće težine) $\tilde{\mathfrak{g}}-$modul najveće težine

$$\Lambda = k_0\Lambda_0 + k_1\Lambda_1 + \cdots + k_\ell\Lambda_\ell,$$

gdje $k_0, k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{Z}_+$. Označimo s $k = \Lambda(c) = k_0 + k_1 + \cdots + k_\ell$ nivo tog modula, a s v_Λ vektor najveće težine.

2.2 Frenkel-Kac-Segalova konstrukcija

Opisujemo poznatu Frenkel-Kac-Segalovu konstrukciju $\tilde{\mathfrak{g}}-$modula $L(\Lambda_i)$, $i = 0, \ldots, \ell$, na tenzorskom produktu $M(1) \otimes \mathbb{C}[P]$ (vidjeti [FK], [S], [FLM]). Definirajmo algebru $\hat{\mathfrak{h}}$

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$$

i Heisenbergovu podalgebru

$$\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}} = \coprod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathfrak{h} \otimes t^n \oplus \mathbb{C}c.$$

Dalje, neka je s

$$\hat{\mathfrak{h}}_{\pm} = \mathfrak{h} \otimes t^{\pm 1} \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$$

označen pripadni pozitivni, odnosno negativni dio od $\hat{\mathfrak{h}}$.
Označimo s $M(1)$ Fockov prostor

$$M(1) = U(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes_{U(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}c)} \mathbb{C}.$$

Fockov prostor je $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}-$ireducibilni inducirani $\hat{\mathfrak{h}}-$modul takav da $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t]$ djeluje trivijalno na $\mathbb{C}$, a c kao jedinica.
Primijetimo i da je $M(1)$ kao vektorski prostor izomorfan vektorskom prostoru simetrične algebre $S(\hat{\mathfrak{h}}_-)$ u beskonačno mnogo varijabli $h(-n)$, $n > 0$, na kojoj $h(-n)$ djeluju kao operatori množenja, $h(n)$ kao derivacije, a c kao jedinica.
Označimo s $\mathbb{C}[P]$ grupnu algebru težinske rešetke P, čija je baza $\{e^\lambda | \lambda \in P\}$, te s $\mathbb{C}[Q]$ grupnu algebru korijenske rešetke Q. Definirajmo sljedeće tenzorske produkte:

$$V_P = M(1) \otimes \mathbb{C}[P]$$
$$V_Q = M(1) \otimes \mathbb{C}[Q].$$

Na V_P možemo definirati strukturu $\hat{\mathfrak{h}}-$modula: $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ djeluje kao $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}} \otimes 1$, a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \otimes t^0$ kao $1 \otimes \mathfrak{h}$, s $h(0)$ danim za $\lambda \in P$ s

$$h(0).e^\lambda = \langle h, \lambda \rangle e^\lambda.$$

Osim toga, za nezavisne međusobno komutirajuće formalne varijable $z, z_0, z_1, z_2 \ldots$ možemo na $\mathbb{C}[P]$ definirati djelovanje

$$z^\lambda \cdot e^\mu = z^{\langle \lambda, \mu \rangle} e^\mu$$

za $\lambda, \mu \in P$, koje se po linearnosti proširuje na čitav V_P formulom

$$z^{\lambda} = 1 \otimes z^{\lambda}.$$

Pritom je z^{λ} element $(\mathrm{End}(\mathrm{V_P}))\{\mathrm{z}\}$ – prostora formalnih redova u racionalnim potencijama od z s koeficijentima u $\mathrm{End}(\mathrm{V_P})$.
Na P postoji centralno proširenje

$$1 \to \langle e^{\pi i/(\ell+1)^2} \rangle \to \hat{P} \to P \to 1$$

konačnom cikličkom grupom $\langle e^{\pi i/(\ell+1)^2} \rangle$ reda $2(\ell+1)^2$ sa svojstvom da za 2-kociklus

$$\epsilon : P \times P \to \langle e^{\pi i/(\ell+1)^2} \rangle$$

koji odgovara proširenju vrijedi

$$\epsilon(\alpha, \beta)\epsilon(\beta, \alpha)^{-1} = (-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle}$$

za $\alpha, \beta \in Q$. Posebno, definirat ćemo za $\lambda, \mu \in P$ s

$$c(\lambda, \mu) = \epsilon(\lambda, \mu)\epsilon(\mu, \lambda)^{-1}$$

bimultiplikativno alternirajuće komutatorsko preslikavanje gornjeg središnjeg proširenja.
Za svaki $\lambda \in P$ definiramo sada sljedeći red u $(\mathrm{End}(\mathrm{V_P}))\{\mathrm{z}\}$:

$$Y(1 \otimes e^{\lambda}, z) = E^{-}(\lambda, z)E^{+}(\lambda, z) \otimes e^{\lambda} z^{\lambda} \epsilon_{\lambda},$$

uz oznake:

$$E^{\pm}(h, z) = \exp\Big(\sum_{n \geq 1} h(\pm n) \frac{z^{\mp n}}{\mp n} \Big), \quad h \in \mathfrak{h}$$
$$\epsilon_{\lambda} e^{\mu} = \epsilon(\lambda, \mu) e^{\mu}, \quad \lambda, \mu \in P.$$

V_P je graduirani prostor $-$ homogeni vektori su

$$v = \prod_{i=1}^{r} h_i(-n_i) \otimes e^{\lambda}$$

i imamo

$$\deg v = -\frac{1}{2}\langle \lambda, \lambda \rangle - \sum_{i=1}^{r} n_i.$$

Stoga možemo definiciju reda Y proširiti na čitav V_P tako da za homogene elemente v definiramo

$$Y(v,z) = {\circ \atop \circ} \prod_{i=1}^{r} \left[\frac{1}{(n_i-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n_i-1} h_i(z) \right] Y(1 \otimes e^{\lambda}, z) {\circ \atop \circ},$$

gdje ${\circ \atop \circ}\ {\circ \atop \circ}$ označava normalno uređeni produkt, koji smješta desno operatore $h(n)$ s nenegativnim n, a lijevo one za negativne n.

Na ovaj način smo na V_P definirali preslikavanje

$$\begin{aligned} V_P &\to (\mathrm{End(V_P)})\{\mathrm{z}\} \\ v &\to Y(v,z) \end{aligned}$$

kojim V_Q postaje algebra verteks operatora, a V_P generalizirana algebra verteks operatora i V_Q-modul. Preciznije, vrijedi

$$V_P = V_Q \oplus V_Q e^{\Lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_Q e^{\Lambda_\ell},$$

gdje su direktni sumandi ireducibilni V_Q-moduli.

Definiranjem verteks operatora V_P postaje i $\tilde{\mathfrak{g}}-$modul kod kojeg je djelovanje $x_\alpha \otimes t^n$ na V_P ($\alpha \in R$, $n \in \mathbb{Z}$) dano upravo s $x_\alpha(n)$, koeficijentima pripadnog verteks operatora $Y(e^\alpha, z)$, tj.

$$x_\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_\alpha(n) z^{-n-1} = Y(e^\alpha, z),$$

dok je djelovanje $h(n)$ i c otprije definirano, a d djeluje kao operator stupnja. Ovo djelovanje daje strukturu standardnih $\tilde{\mathfrak{g}}-$modula nivoa 1 na V_Q i $V_Q e^{\omega_j}$, $j = 1, \ldots, \ell$, s vektorima najveće težine $v_{\Lambda_0} = 1 \otimes 1$, $v_{\Lambda_j} = 1 \otimes e^{\omega_j}$, $j = 1, \ldots, \ell$, redom, tj.

$$V_Q \cong L(\Lambda_0), \;\; V_Q e^{\omega_j} \cong L(\Lambda_j) \Rightarrow V_P \cong \bigoplus_{j=0}^{\ell} L(\Lambda_j).$$

2.3 Operatori ispreplitanja

Detaljnije ćemo proučiti svojstva verteks operatora definiranih u prethodnom odlomku.

Naime, za redove E^+ i E^- vrijedi "komutacijsko" pravilo

$$E^+(-\lambda, z_2) E^-(-\mu, z_1) = \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)^{\langle \lambda, \mu \rangle} E^-(-\mu, z_1) E^+(-\lambda, z_2),$$

gdje $\lambda, \mu \in P$, a $(1-\frac{z_1}{z_2})^{\langle\lambda,\mu\rangle}$ treba razviti po nenegativnim potencijama od $\frac{z_1}{z_2}$. Iz ovog pravila proizlaze komutacijske relacije za verteks operatore:

$$
\begin{aligned}
&E^+(-\lambda, z_2)E^-(-\mu, z_1) \otimes (e^\lambda z_2^\lambda \epsilon_\lambda)(e^\mu z_1^\mu \epsilon_\mu) = \\
&= C(z_2 - z_1)^{\langle\lambda,\mu\rangle} E^-(-\mu, z_1)E^+(-\lambda, z_2) \otimes e^{\lambda+\mu} z_2^\lambda z_1^\mu \epsilon_\lambda \epsilon_\mu
\end{aligned}
$$

za neku konstantu $C \in \mathbb{C}^\times$.

Također, za $v \in V_P$ među operatorima $Y(v, z)$ vrijedi Jacobijev identitet. Specijalno, za $u = 1 \otimes e^\lambda, v = 1 \otimes e^\mu$, gdje je $\lambda \in Q, \mu \in P$,vrijedi

$$
\begin{aligned}
&z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u, z_1)Y(v, z_2)- \\
&- (-1)^{\langle\lambda,\mu\rangle} c(\lambda, \mu) z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(v, z_2)Y(u, z_1) = \\
&= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(u, z_0)v, z_2), \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

gdje je $\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$ uobičajena delta-funkcija, a binomne izraze koji se pojavljuju treba razviti po nenegativnim potencijama druge varijable.

Primijetimo da u slučaju kad je i $\mu \in Q$ imamo uobičajen Jacobijev identitet, jer vrijedi $(-1)^{\langle\lambda,\mu\rangle} c(\lambda, \mu) = 1$, što dokazuje da je V_Q algebra verteks operatora, dok za $\mu \notin Q$ imamo generalizirani Jacobijev identitet, što čini V_P generaliziranom algebrom verteks operatora.

No, i u slučaju $\mu \notin Q$ želimo ukloniti faktor $(-1)^{\langle\lambda,\mu\rangle} c(\lambda, \mu)$. Stoga ćemo pomoću već definiranog verteks operatora $Y(v, z)$ zadati novi operator, i to tako da za predstavnike netrivijalnih klasa od Q u P, dakle za $\mu \in \Lambda_j + Q$, $j = 1, \ldots, \ell$, stavimo za $v = 1 \otimes e^\mu$

$$
\mathcal{Y}(v, z) := Y(v, z) e^{i\pi h_{\Lambda_j}} c(\cdot, \Lambda_j),
$$

dok u slučaju da je $\mu \in Q$ definiramo

$$
\mathcal{Y}(v, z) := Y(v, z).
$$

Na taj način smo definirali novo linearno preslikavanje

$$
\begin{aligned}
V_P &\to (\mathrm{End(V_P)})\{\mathrm{z}\} \\
v &\to \mathcal{Y}(v, z).
\end{aligned}
$$

Sada (2.1) postaje tzv. generalizirani Jacobijev identitet

$$
z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u, z_1)\mathcal{Y}(v, z_2)-
$$

$$
\begin{aligned}
& - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right)\mathcal{Y}(v, z_2)Y(u, z_1) = \\
& = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right)\mathcal{Y}(Y(u, z_0)v, z_2),
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

što znači da $\mathcal{Y}(v, z)$ definiraju za $\mu \in \Lambda_j + Q$, $j = 0, \ldots, \ell$, operatore ispreplitanja tipa $\begin{bmatrix} n \\ ji \end{bmatrix}$, $n \equiv (i + j) \mod (\ell + 1)$.

Posebno, restrikcije ovih operatora na klase $L(\Lambda_i)$ daju preslikavanja

$$\mathcal{Y}(v, z) : L(\Lambda_i) \to L(\Lambda_n)\{z\}$$

za $n \equiv (i + j) \mod (\ell + 1)$.

Prisjetimo se definicije operatora ispreplitanja. Za module W_1, W_2, W_3 dane algebre verteks-operatora V preslikavanje

$$\mathcal{Y}(\cdot, z) : W_1 \to (\mathrm{Hom}(W_2, W_3))\{z\}$$

naziva se operator ispreplitanja tipa $\binom{W_3}{W_1\ W_2}$ ako vrijedi:

1) za sve $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ red $\mathcal{Y}(w_1, z)w_2$ je ograničen odozdo

2) vrijedi odgovarajući generalizirani Jacobijev identitet

3) za sve $w_1 \in W_1$ vrijedi tzv. svojstvo derivacije.

2.4 Standardni moduli viših nivoa

Tenzoriranjem k modula nivoa jedan dobivamo modul nivoa k koji je potpuno reducibilan, a njegove ireducibilne komponente su upravo standardni moduli nivoa k. Stoga vrijedi:

$$L(\Lambda) \subset L(\Lambda_\ell)^{\otimes k_\ell} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_1)^{\otimes k_1} \otimes L(\Lambda_0)^{\otimes k_0}$$

s vektorom najveće težine

$$v_\Lambda = v_{\Lambda_\ell}^{\otimes k_\ell} \otimes \cdots \otimes v_{\Lambda_1}^{\otimes k_1} \otimes v_{\Lambda_0}^{\otimes k_0}.$$

Elementima tenzorskog produkta također možemo pridružiti verteks operatore: za $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in V_P \otimes \cdots \otimes V_P$ definiramo

$$Y(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, z) := Y(v_1, z) \otimes \cdots \otimes Y(v_k, z).$$

Na taj način $V_Q^{\otimes k} \cong L(\Lambda_0)^{\otimes k}$ postaje algebra verteks operatora, a $V_P^{\otimes k}$ poprima strukturu $V_Q^{\otimes k}-$modula.
Na $V_P^{\otimes k}$, pa tako i na svakom $L(\Lambda_\ell)^{\otimes k_\ell} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_0)^{\otimes k_0}$, definiramo i djelovanje Liejeve algebre za $\alpha \in R$ s

$$\begin{aligned}
x_\alpha(z) &= Y(e^\alpha \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes e^\alpha, z) = \\
&= Y(e^\alpha, z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes Y(e^\alpha, z) = \\
&= x_\alpha(z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes x_\alpha(z),
\end{aligned}$$

što znači da imamo uobičajeno djelovanje Liejeve algebre na tenzorskom produktu modula.

Poglavlje 3

Potprostori Fegin-Stojanovskog

3.1 Definicija

Fiksirajmo minimalnu težinu $\omega = \omega_\ell$ i definirajmo sljedeću bazu za $\mathfrak{h}^*$:

$$\Gamma = \{\alpha \in R | \omega(\alpha) = 1\} = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\ell | \gamma_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} = \alpha_i + \cdots + \alpha_\ell\}.$$

Tako imamo definiranu i $\mathbb{Z}-$gradaciju od $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1\\ \mathfrak{g}_0 &= \mathfrak{h} + \sum_{\omega(\alpha)=0} \mathfrak{g}_\alpha\\ \mathfrak{g}_{\pm 1} &= \sum_{\alpha \in \pm\Gamma} \mathfrak{g}_\alpha.\end{aligned}$$

Pritom će nam biti bitno da je $\mathfrak{g}_1$ komutativna podalgebra, a $\mathfrak{g}_0$ na njoj djeluje adjungiranjem.
Gornjoj $\mathbb{Z}-$gradaciji odgovara $\mathbb{Z}-$gradacija pripadne afine algebre $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} + \tilde{\mathfrak{g}}_0 + \tilde{\mathfrak{g}}_1,$$

uz

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{g}}_0 &= \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d\\ \tilde{\mathfrak{g}}_{\pm 1} &= \mathfrak{g}_{\pm 1} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}].\end{aligned}$$

Također, $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ je komutativna podalgebra i $\tilde{\mathfrak{g}}_0-$modul te vrijedi

$$\tilde{\mathfrak{g}}_1 = \mathrm{span}\{x_\gamma(n) | \gamma \in \Gamma, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Za svaku integralnu dominantnu težinu Λ definiramo potprostor Feigin-Stojanovskog s

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda \subset L(\Lambda),$$

gdje $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$ označava univerzalnu omotačku algebru od $\tilde{\mathfrak{g}}_1$.
Definirajmo sada skup

$$\tilde{\Gamma}_- = \{x_\gamma(-j) | \gamma \in \Gamma, j \geq 1\}.$$

Obojanom particijom nazivamo svako preslikavanje

$$\pi : \tilde{\Gamma}_- \to \mathbb{Z}_+.$$

Za dani element $x_\gamma(-j)$ broj j zovemo stupanj, γ boja, $\pi(x_\gamma(-j))$ frekvencija tog elementa. Svakoj obojanoj particiji π pridružujemo odgovarajući monom

$$x(\pi) = \prod_{x_\gamma(-j) \in \tilde{\Gamma}_-} x_\gamma(-j)^{\pi(x_\gamma(-j))} \in U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) = S(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$$

za kojeg definiramo:

$$\begin{aligned}
\text{duljinu} \quad l(x(\pi)) &= \sum_{x_\gamma(-j) \in \tilde{\Gamma}_-} \pi(x_\gamma(-j)) \\
\text{stupanj} \quad |x(\pi)| &= \sum_{x_\gamma(-j) \in \tilde{\Gamma}_-} \pi(x_\gamma(-j)) \cdot j \\
\text{težinu} \quad w(x(\pi)) &= \sum_{x_\gamma(-j) \in \tilde{\Gamma}_-} \pi(x_\gamma(-j)) \cdot \gamma.
\end{aligned}$$

Vidimo da svaki π možemo identificirati s nizom $(a_i)_{i=0}^\infty$ s konačno mnogo nenul članova takvih da je $a_{\ell(j-1)+r-1} = \pi(x_{\gamma_r}(-j))$, pa pišemo

$$x(\pi) = \ldots x_{\gamma_1}(-2)^{a_\ell} x_{\gamma_\ell}(-1)^{a_{\ell-1}} \cdots x_{\gamma_1}(-1)^{a_0}.$$

Prema Poincaré-Birkhoff-Wittovom teoremu znamo da postoji razapinjući skup za $W(\Lambda)$ koji se sastoji od vektora oblika

$$\{\ldots x_{\gamma_1}(-2)^{a_\ell} x_{\gamma_\ell}(-1)^{a_{\ell-1}} \cdots x_{\gamma_1}(-1)^{a_0} v_\Lambda | a_i \in \mathbb{Z}_+, i \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Ovaj ćemo skup reducirati do skupa tzv. dopustivih vektora, za kojeg potom slijedi da je i baza potprostora Feigin-Stojanovskog.

3.2 Uređaj na obojanim particijama

Na skupu obojanih particija definiramo parcijalni uređaj na sljedeći način: najprije zadajemo leksikografski uređaj na skupu boja definirajući da je

$$\gamma_i < \gamma_j \quad \text{ako} \quad i > j,$$

što se podudara sa standardnim uređajem na korijenima. Potom na skupu $\tilde{\Gamma}_-$ definiramo

$$x_{\gamma'}(-j') < x_{\gamma''}(-j'') \qquad \text{ako} \quad \begin{cases} j' > j'' & \text{ili} \\ j' = j'' & \text{i} \quad \gamma' < \gamma''. \end{cases}$$

S obzirom na komutativnost na $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$ i gornji uređaj na elementima skupa $\tilde{\Gamma}_-$ svaki monom iz $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$ možemo napisati s lijeva na desno tako počnemo s najmanjim, a završimo s najvećim.
Konačno, za dva monoma

$$x(\pi_1) = x_{\gamma_{1r}(-j_{1r})} \dots x_{\gamma_{12}(-j_{12})} x_{\gamma_{11}(-j_{11})}$$
$$x(\pi_2) = x_{\gamma_{2s}(-j_{2s})} \dots x_{\gamma_{22}(-j_{22})} x_{\gamma_{21}(-j_{21})}$$

zadajemo obratni leksikografski uređaj tako da je

$$x(\pi_1) < x(\pi_2)$$

ako je $x(\pi_1) \neq x(\pi_2)$ i vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:

1) $l(x(\pi_1)) > l(x(\pi_2))$

2) $l(x(\pi_1)) = l(x(\pi_2))$ i $|x(\pi_1)| < |x(\pi_2)|$

3) $l(x(\pi_1)) = l(x(\pi_2))$, $|x(\pi_1)| = |x(\pi_2)|$ i

$$j_{1r} = j_{2r}, \dots, j_{1,i+1} = j_{2,j+1}, \quad j_{1,i} > j_{2,i}$$

za neki $r \geq i \geq 1$

4) $l(x(\pi_1)) = l(x(\pi_2))$, $|x(\pi_1)| = |x(\pi_2)|$, $j_{1i} = j_{2i}, i = 1, \dots, r$ i

$$\gamma_{1r} = \gamma_{2r}, \dots, \gamma_{1,i+1} = \gamma_{2,i+1}, \quad \gamma_{1i} < \gamma_{2i}$$

za neki $r \geq i \geq 1$.

Primijetimo da je najveći element ovog uređaja "prazan" monom, u oznaci $x(\emptyset)$.

3.3 Uvjeti razlike i početni uvjeti

Na svakom standardnom $\mathfrak{g}$−modulu $L(\Lambda)$ nivoa k vrijedi Frenkel-Kac-Segalova formula

$$x_\theta(z)^{k+1} = 0,$$

gdje je θ maksimalni korijen (ovdje jednak γ_1), a

$$x_\theta(z)^{k+1}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_\theta(n) z^{-n-1}.$$

Koeficijenti formalnog Laurentovog reda $x_\theta(z)^{k+1}$ su sume elemenata iz $U(\tilde{\mathfrak{g}})$, pa imamo

$$\sum_{j_1+\dots+j_{k+1}=n} x_\theta(j_1)\cdots x_\theta(j_{k+1}) = 0, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Adjungiranim djelovanjem $U(\tilde{\mathfrak{g}}_0)$ na monome gornjeg izraza dobivamo relacije oblika

$$C_{x(\pi)}x(\pi) + \sum_{x(\pi)<x(\pi')} C_{x(\pi')}x(\pi') = 0$$

među monomima. Monom $x(\pi)$ (koji je najmanji obzirom na uređaj definiran u prethodnom odlomku) zovemo vodeći član gornje relacije. Njega možemo izraziti pomoću preostalih, većih monoma, pa zaključujemo da vodeće članove možemo izuzeti iz skupa monoma koji daju razapinjući skup za $W(\Lambda)$.

Općenito, vodeći članovi su monomi oblika

$$x(\pi) = \dots x_{\gamma_1}(-2)^{a_\ell} x_{\gamma_\ell}(-1)^{a_{\ell-1}} \cdots x_{\gamma_1}(-1)^{a_0}$$

za koje vrijedi

$$a_i + \dots + a_{i+\ell} = k+1, \quad i\in\mathbb{Z}_+.$$

Preostaju monomi za čije frekvencije vrijede tzv. uvjeti razlike

$$a_i + \dots a_{i+\ell} \le k, \quad i\in\mathbb{Z}_+.$$

Slijedi

Propozicija 1 $\{x(\pi)v_\Lambda \,|\, x(\pi)$ *zadovoljavaju uvjete razlike*$\}$ *razapinje* $W(\Lambda)$.

No, cilj nam je još reducirati skup razapinjućih monomijalnih vektora do skupa vektora koji zadovoljavaju i tzv. početne uvjete. Promatrajmo najprije potprostore $W(\Lambda_j)$, $j = 1, \ldots, \ell$. Zanima nas kada vrijedi

$$x_{\gamma_i}(-1)v_{\Lambda_j} \neq 0.$$

Zbog

$$\langle \gamma_i, \omega_j \rangle = \langle \alpha_i + \cdots + \alpha_\ell, \omega_j \rangle = \begin{cases} 0, & i > j \\ 1, & i \leq j \end{cases}$$

i formule za verteks operator koja definira djelovanje $\tilde{\mathfrak{g}}$ na $M(1) \otimes \mathbb{C}[P]$ slijedi da je

$$x_{\gamma_i}(-1)v_{\Lambda_j} \neq 0 \quad \text{ako i samo ako} \quad i > j.$$

Dalje, iz komutacijskog pravila za operatore E^+ i E^- slijedi da će za sve $\alpha, \beta \in R$ takve da je $\langle \alpha, \beta \rangle \geq 1$ na svakom standardnom modulu nivoa 1 vrijediti

$$x_\alpha(z)x_\beta(z) = 0,$$

odakle zbog $\langle \gamma', \gamma'' \rangle \geq 1$ za sve $\gamma', \gamma'' \in \Gamma$ posebno vrijedi i

$$x_{\gamma'}(-1)x_{\gamma''}(-1)v_{\Lambda_j} = 0, \quad j = 0, \ldots, \ell,$$

što znači da na jedan vektor najveće težine može netrivijalno djelovati najviše jedan element stupnja -1.

Ako sada promatramo proizvoljan standardan modul $L(\Lambda)$ nivoa $k > 1$ s vektorom najveće težine

$$v_\Lambda = v_{\Lambda_\ell}^{\otimes k_\ell} \otimes \cdots \otimes v_{\Lambda_1}^{\otimes k_1} \otimes v_{\Lambda_0}^{\otimes k_0},$$

onda zbog prethodnog identiteta vidimo da će za

$$x(\pi) = \ldots x_{\gamma_1}(-2)^{a_\ell} x_{\gamma_\ell}(-1)^{a_{\ell-1}} \cdots x_{\gamma_1}(-1)^{a_0}$$

vrijediti $x(\pi)v_\Lambda \neq 0$ samo ako je $a_0 \leq k_0$ (jer je $x_{\gamma_1}(-1)v_{\Lambda_j} \neq 0$ jedino ako je $j = 0$), potom ako vrijedi $a_0 + a_1 \leq k_0 + k_1$ (jer $x_{\gamma_1}(-1)v_{\Lambda_j} \neq 0$ i $x_{\gamma_2}(-1)v_{\Lambda_j} \neq 0$ vrijedi jedino ako je $j = 0, 1$), itd. Konačno, vrijedi

$$x(\pi)v_\Lambda \neq 0$$

ako i samo ako za frekvencije faktora u $x(\pi)$ vrijede tzv. početni uvjeti

$$\begin{aligned} a_0 &\leq k_0 \\ a_0 + a_1 &\leq k_0 + k_1 \\ &\dots \\ a_0 + a_1 + \cdots + a_{\ell-1} &\leq k_0 + \cdots + k_{\ell-1}. \end{aligned}$$

Jasno je sada da iz skupa monoma čiji monomijalni vektori razapinju $W(\Lambda)$ možemo izbaciti one koji ne zadovoljavaju početne uvjete za taj potprostor, pa dobivamo još jednu redukciju skupa generatora $W(\Lambda)$:

Propozicija 2 *$\{x(\pi)v_\Lambda \,|\, x(\pi)$ zadovoljavaju uvjete razlike i početne uvjete$\}$ razapinje $W(\Lambda)$.*

3.4 Koeficijenti operatora ispreplitanja

Želimo dokazati da je skup generatora prostora $W(\Lambda)$ iz prethodne propozicije i linearno nezavisan, dakle da čini bazu potprosora Feigin-Stojanovskog. U tu svrhu ćemo promatrati operatore ispreplitanja $\mathcal{Y}(1\otimes e^\lambda, z_2)$, $\lambda \in P$, koji komutiraju s verteks operatorima $Y(1\otimes e^\gamma, z_1)$, $\gamma \in \Gamma$ (a time i s djelovanjem $\tilde{\mathfrak{g}}_1$), tj. one operatore ispreplitanja za koje vrijedi

$$[Y(1\otimes e^\gamma, z_1), \mathcal{Y}(1\otimes e^\lambda, z_2)] = 0, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Ta će nam situacija biti posebno zanimljiva jer se u tom slučaju restrikcija operatora $\mathcal{Y}(1\otimes e^\lambda)$

$$\mathcal{Y}(v, z) : L(\Lambda_i) \to L(\Lambda_j)\{z\}$$

može dodatno restringirati do preslikavanja među pripadnim potprostorima Feigin-Stojanovskog

$$\mathcal{Y}(1\otimes e^\lambda, z) : W(\Lambda_i) \to W(\Lambda_j)\{z\}.$$

Uzimanjem Res_{z_0} u generaliziranom Jacobijevom identitetu (2.2) za $u = 1\otimes e^\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, te $v = 1\otimes e^\lambda$, $\lambda \in P$, dobivamo da će operatori ispreplitanja komutirati s verteks operatorima pridruženima $\gamma \in \Gamma$ ako i samo ako je

$$Y(1\otimes e^\gamma, z_1)(1\otimes e^\lambda) \in V_P[[z_1]], \quad \gamma \in \Gamma,$$

gdje $V_P[[z_1]]$ označava prostor formalnih redova s nenegativnim cjelobrojnim potencijama formalne varijable z_1.

S obzirom da je po definiciji

$$\mathcal{Y}(1 \otimes e^{\lambda}, z)(1 \otimes e^{\gamma}) = Ce^{\lambda+\gamma} z^{\langle \lambda, \gamma \rangle} + \cdots \in z^{\langle \lambda, \gamma \rangle} V_P[[z]]$$

uz neki $C \in \mathbb{C}^{\times}$, tj. $z^{\langle \lambda, \gamma \rangle}$ je minimalna potencija od z, vidimo da će operatori ispreplitanja komutirati s djelovanjem $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ onda i samo onda ako je

$$\langle \lambda, \gamma \rangle \geq 0, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Definirajmo

$$\lambda_i := \omega_i - \omega_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

Očito je zadovoljen uvjet

$$\langle \lambda_i, \gamma \rangle \geq 0, \quad \gamma \in \Gamma, i = 1, \ldots, \ell.$$

Za $i = 1, \ldots, \ell$ definirajmo sljedeće koeficijente pripadnih operatora ispreplitanja $\mathcal{Y}(1 \otimes e^{\lambda_i}, z)$:

$$[i] := \text{Res} z^{-1-\langle \lambda_i, \omega_{i-1} \rangle} c_i \mathcal{Y}(1 \otimes e^{\lambda_i}, z)$$

za koje vrijedi

$$L(\Lambda_0) \xrightarrow{[0]} L(\Lambda_1) \xrightarrow{[1]} L(\Lambda_2) \xrightarrow{[3]} \ldots \xrightarrow{[\ell-1]} L(\Lambda_{\ell-1}) \xrightarrow{[\ell]} L(\Lambda_\ell)$$

te analogno za restrikcije na pripadne potprostore Feigin-Stojanovskog. Uz odgovarajući izbor koeficijenata c_i imamo i

$$v_{\Lambda_0} \xrightarrow{[1]} v_{\Lambda_1} \xrightarrow{[2]} v_{\Lambda_2} \xrightarrow{[3]} \ldots \xrightarrow{[\ell-1]} v_{\Lambda_{\ell-1}} \xrightarrow{[\ell]} v_{\Lambda_\ell}.$$

Važna će nam biti i činjenica da svi $[i]$ komutiraju s djelovanjem svih $x_\gamma(n)$, $\gamma \in \Gamma$, $n \in \mathbb{Z}$.

Što se tiče standardnih modula viših nivoa, neka su istim oznakama $[i]$, $i = 1, \ldots, \ell$, označena linearna preslikavanja

$$\begin{aligned} [i] : L(\Lambda_\ell)^{\otimes k_\ell} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_i)^{\otimes k_i} \otimes L(\Lambda_{i-1})^{\otimes k_{i-1}} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_0)^{\otimes k_0} \to \\ \to L(\Lambda_\ell)^{\otimes k_\ell} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_i)^{\otimes k_i+1} \otimes L(\Lambda_{i-1})^{\otimes k_{i-1}-1} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_0)^{\otimes k_0}. \end{aligned}$$

I opet, restrikcije tih preslikavanja su preslikavanja među pripadnim potprostorima Feigin-Stojanovskog. Također, $[i]$ će opet biti preslikavanja među odgovarajućim vektorima najveće težine koje komutiraju sa svim $x_\gamma(n)$, $\gamma \in \Gamma$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.5 Operator proste struje

Definirajmo sljedeću linearnu bijekciju, tzv. operator proste struje:

$$[\omega] : V_P \to V_P$$

$$[\omega] = e^{\omega_\ell}\epsilon(\cdot, \omega_\ell),$$

gdje e^{ω_ℓ} (kao i svaki e^λ, $\lambda \in P$) shvaćamo kao operator lijevog množenja s $1 \otimes e^{\omega_\ell}$. Vrijedi

$$L(\Lambda_0) \xrightarrow{[\omega]} L(\Lambda_\ell) \xrightarrow{[\omega]} L(\Lambda_{\ell-1}) \xrightarrow{[\omega]} \ldots \xrightarrow{[\omega]} L(\Lambda_1) \xrightarrow{[\omega]} L(\Lambda_0).$$

Osim toga, iz formule za verteks operator slijedi

$$[\omega]v_{\Lambda_0} = v_{\Lambda_\ell} \quad [\omega]v_{\Lambda_i} = x_{\gamma_i}(-1)v_{\Lambda_{i-1}}, \quad i = 1, \ldots, \ell,$$

te

$$x_\alpha(z)[\omega] = [\omega]z^{\langle\omega_\ell,\alpha\rangle}x_\alpha(z),$$

što u komponentama glasi

$$x_\alpha(n)[\omega] = [\omega]x_\alpha(n + \langle\omega_\ell, \alpha\rangle), \quad \alpha \in R.$$

Specijalno, za $\gamma \in \Gamma$ imamo

$$x_\gamma(n)[\omega] = [\omega]x_\gamma(n+1).$$

Općenito, za $x(\pi)v_\Lambda$ imamo

$$x(\pi)[\omega] = [\omega]x(\pi^+),$$

gdje je $x(\pi^+)$ monom dobiven iz $x(\pi)$ tako da je svim faktorima u $x(\pi)$ stupanj uvećan za 1.
Na standardnim modulima nivoa k, $k > 1$, promatramo tenzorski produkt $[\omega]^{\otimes k}$. I ovdje će $[\omega]^{\otimes k}$ biti linearna bijekcija.

3.6 Baza potprostora Feigin-Stojanovskog

Teorem 3 *$\{x(\pi)v_\Lambda \,|\, x(\pi)$ zadovoljavaju uvjete razlike i početne uvjete$\}$ je baza prostora $W(\Lambda)$.*

Teorem se dokazuje indukcijom uz korištenje operatora ispreplitanja i operatora proste struje, vidjeti [P3].

Poglavlje 4

Egzaktni nizovi

4.1 Egzaktnost i pomoćni rezultati

Za $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$ promatramo sve pripadne potprostore Feigin-Stojanovskog $W(k_0\Lambda_0+k_1\Lambda_1+\cdots+k_\ell\Lambda_\ell)$ istog fiksnog nivoa $k_0+k_1+\ldots k_\ell = k$. Označimo:

$$\begin{aligned} W_{k_0,k_1,\ldots,k_\ell} &= W(k_0\Lambda_0 + k_1\Lambda_1 + \cdots + k_\ell\Lambda_\ell) \\ v_{k_0,k_1,\ldots,k_\ell} &= v_{k_0\Lambda_0+k_1\Lambda_1+\ldots k_\ell\Lambda_\ell} = v_\ell^{\otimes k_\ell} \otimes \cdots \otimes v_1^{\otimes k_1} \otimes v_0^{\otimes k_0}. \end{aligned}$$

Označimo dalje s $\mathcal{B}_{k_0,k_1,\ldots,k_\ell}$ skup svih monoma $x(\pi)$ takvih da vektori

$$x(\pi)v_{k_0,k_1,\ldots,k_\ell} = \ldots x_{\gamma_\ell}(-1)^{a_{\ell-1}} \ldots x_{\gamma_2}(-1)^{a_1} x_{\gamma_1}(-1)^{a_0} v_{k_0,k_1,\ldots,k_\ell}$$

pripadaju bazi prostora $W_{k_0,k_1,\ldots,k_\ell}$. Pišemo i $(a_0, \ldots, a_{\ell-1}) \in \mathcal{B}_{k_0,k_1,\ldots,k_\ell}$. Fiksirajmo sada proizvoljnu $(\ell + 1)-$torku $K = (k_0, \ldots, k_\ell)$ takvu da je $k_0 + \cdots + k_\ell = k$ i označimo $m = \sharp\{i = 0, \ldots, \ell - 1 | k_i \neq 0\}$ te

$$W = W_{k_0,k_1,\ldots,k_\ell}, \;\; v = v_{k_0,k_1,\ldots,k_\ell}, \;\; \mathcal{B} = \mathcal{B}_{k_0,k_1,\ldots,k_\ell}.$$

Za $t = 0, \ldots, m - 1$ i $0 \leq i_0 < \cdots < i_t \leq \ell - 1$ takve da je $k_{i_j} \neq 0$, $j = 0, \ldots, t$, kažemo da je skup $\{i_0, \ldots, i_t\}$ K-dopustiv. Skup svih K-dopustivih $(t + 1)-$članih skupova označavamo s $D_{t+1}(K)$, a skup svih $K-$dopustivih skupova s $D(K)$. Za $\{i_0, \ldots, i_t\} \in D_{t+1}(K)$ uvedimo oznaku

$$W_{\{i_0,\ldots,i_t\}} = W_{k_0,\ldots,k_{i_0}-1,k_{i_0+1}+1,\ldots,k_{i_t}-1,k_{i_t+1}+1,\ldots,k_\ell},$$

analogno i za pripadni vektor najveće težine

$$v_{\{i_0,\ldots,i_t\}} = v_{k_0\Lambda_0+\cdots+(k_{i_0}-1)\Lambda_{i_0}+(k_{i_0+1}+1)\Lambda_{i_0+1}+\cdots+(k_{i_t}-1)\Lambda_{i_t}+(k_{i_t+1}+1)\Lambda_{i_t+1}+\cdots+k_\ell\Lambda_\ell}$$

te za pripadni skup $\mathcal{B}_{\{i_0,\ldots,i_t\}}$.

Neka je sada dan proizvoljan element

$$w = \sum_{I_{t+1} \in D_{t+1}(K)} w_{I_{t+1}} \in \prod_{I_{t+1} \in D_{t+1}(K)} W_{I_{t+1}},$$

gdje je s $w_{I_{t+1}}$ označen element komponente $W_{I_{t+1}}$:

$$\begin{aligned} w_{I_{t+1}} &= a(w)_{I_{t+1}} v_{I_{t+1}} \\ a(w)_{I_{t+1}} &= \sum_{x(\pi) \in \mathcal{B}_{I_{t+1}}} C_\pi x(\pi), \end{aligned}$$

uz koeficijente C_π iz polja.
Za $t = 0, \ldots, m-1$ definiramo $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)-$homogena preslikavanja

$$\varphi_t : \prod_{I_t \in D_t(K)} W_{I_t} \to \prod_{I_{t+1} \in D_{t+1}(K)} W_{I_{t+1}}$$

dana po komponentama s

$$\varphi_t(v_{I_t}) = \sum_{\substack{\{i\} \in D_1(K) \\ i \notin I_t}} (-1)^{p_{I_t}(i)} v_{I_t \cup \{i\}},$$

gdje je $p_{I_t}(i)$ takav da je $i = j_{p_{I_t}(i)}$ u jednakosti $I_t \cup \{i\} = \{j_0, \ldots, j_t\}$ za neki $\{j_0, \ldots, j_t\} \in D_{t+1}(K)$.
Možemo definirati φ_t i tako da zadamo pojedine komponente slike $-$ za svaki $I_{t+1} = \{i_0, \ldots, i_t\} \in D_{t+1}(K)$ vrijedi

$$\varphi_t(w)_{I_{t+1}} = \sum_{0 \le s \le t} (-1)^s a(w)_{I_{t+1} \setminus \{i_s\}} v_{I_{t+1}}.$$

Napomena 1 *Specijalno, za $t = 0$ je φ_0 definirano na W tako da za*

$$w = a(w)v \in W, \;\; a(w) = \sum_{x(\pi) \in \mathcal{B}} C_\pi x(\pi)$$

i za svaki $I_1 \in D_1(K)$ vrijedi $\varphi_0(w)_{I_1} = a(w)v_{I_1}$.

Propozicija 4 *Sljedeći niz je egzaktan:*

$$\begin{aligned} 0 \to W_{k_\ell, k_0, k_1, \ldots, k_{\ell-1}} \xrightarrow{[\omega]^{\otimes k}} W \xrightarrow{\varphi_0} \prod_{I_1 \in D_1(K)} W_{I_1} \xrightarrow{\varphi_1} \\ \xrightarrow{\varphi_1} \prod_{I_2 \in D_2(K)} W_{I_2} \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \prod_{I_m \in D_m(K)} W_{I_m} \to 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Napomena 2 *Primijetimo da je posljednji netrivijalni sumand gornjeg niza jednočlan, jer je po definiciji* $m = \sharp\{i = 0, \ldots, \ell - 1 | k_i \neq 0\}$.

Napomena 3 *Specijalan slučaj je kratki egzaktni niz*

$$0 \to W_{k,0,0,\ldots,0} \xrightarrow{[\omega]^{\otimes k}} W_{0,0,\ldots 0,k} \to 0$$

koji se zbog $m = 0$ *zaustavlja odmah nakon člana* $W_{0,0,\ldots,0,k}$.

Općenito, nisu svi nizovi iste duljine:

Primjer 1 *Za* $\ell = 2$, $k = 2$ *egzaktni nizovi glase:*

$$\begin{array}{l}
0 \to W_{0,2,0} \to W_{2,0,0} \to W_{1,1,0} \to 0 \\
0 \to W_{0,1,1} \to W_{1,1,0} \to W_{0,2,0} \oplus W_{1,0,2} \to W_{0,1,1} \to 0 \\
0 \to W_{1,1,0} \to W_{1,0,1} \to W_{0,1,1} \to 0 \\
0 \to W_{0,0,2} \to W_{0,2,0} \to W_{0,1,1} \to 0 \\
0 \to W_{1,0,1} \to W_{0,1,1} \to W_{0,0,2} \to 0 \\
0 \to W_{2,0,0} \to W_{0,0,2} \to 0.
\end{array}$$

Prije no što dokažemo propoziciju dokazat ćemo još nekoliko činjenica vezanih uz skupove monoma $\mathcal{B}_A$, $A \in D(K)$.

Lema 5 *Za* $A, B \in D(K)$ *vrijedi*

$$A \subset B \Rightarrow \mathcal{B}_B \subset \mathcal{B}_A. \tag{4.2}$$

Dokaz: Neka je $A = \{i_0, \ldots, i_t\}$ za neki $t = 0, \ldots, m-1$. Početni uvjeti na W_A glase:

$$\begin{aligned}
a_0 &\leq k_0 \\
a_0 + a_1 &\leq k_0 + k_1 \\
&\cdots \\
a_0 + \cdots + a_{i_0} &\leq k_0 + \cdots + k_{i_0} - 1 \\
a_0 + \cdots + a_{i_0+1} &\leq k_0 + \cdots + k_{i_0+1} \\
&\cdots \\
a_0 + \cdots + a_{i_t} &\leq k_0 + \cdots + k_{i_t} - 1 \\
a_0 + \cdots + a_{i_t+1} &\leq k_0 + \cdots + k_{i_t+1} \\
&\cdots \\
a_0 + \cdots + a_{\ell-1} &\leq k_0 + \ldots k_{\ell-1}.
\end{aligned}$$

U skupu $B \supset A$ postoji bar još jedan indeks $j \in B \backslash A$, pa ćemo početne uvjete na W_B dobiti iz onih za W_A tako da "postrožimo" $(j+1)-$vu nejednakost koja sada glasi

$$a_0 + \cdots + a_j \leq k_0 + \cdots + k_j - 1.$$

Naravno, ukoliko je $B \setminus A$ višečlan, imat ćemo odgovorajući broj "strožih" nejednakosti u odnosu na one koje daju početne uvjete na W_A. Odavdje očito slijedi da će za svaki $x(\pi) \in \mathcal{B}_B$ vrijediti i $x(\pi) \in \mathcal{B}_A$, što je i trebalo dokazati.

Lema 6 *Za $B_1, B_2 \in D(K)$ vrijedi*

$$\mathcal{B}_{B_1} \cap \mathcal{B}_{B_2} = \mathcal{B}_{B_1 \cup B_2}.$$

Dokaz: Iz prethodne leme slijedi očito

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{B_1 \cup B_2} &\subseteq \mathcal{B}_{B_1} \\ \mathcal{B}_{B_1 \cup B_2} &\subseteq \mathcal{B}_{B_2}, \end{aligned}$$

pa imamo $\mathcal{B}_{B_1 \cup B_2} \subseteq \mathcal{B}_{B_1} \cap \mathcal{B}_{B_2}$.
Ostaje dokazati još obratnu inkluziju. Skup $\mathcal{B}_{B_1} \cap \mathcal{B}_{B_2}$ sastoji se od svih onih monoma koji zadovoljavaju početne uvjete i na W_{B_1} i na W_{B_2}. Ako napišemo te početne uvjete, vidjet ćemo da monom koji ih zadovoljava zapravo zadovoljava početne uvjete na $W_{B_1 \cup B_2}$ (jer uzimamo u obzir uvijek "strožu" nejednakost iz odgovarajućih parova nejednakosti, a to znači da zaključno dobivamo sustav nejednakosti određen skupom indeksa iz unije skupa indeksa B_1 i B_2), tj. pripada skupu $\mathcal{B}_{B_1 \cup B_2}$. Time je tvrdnja dokazana.
Neka je sada $A \in D(K)$ fiksan. Za proizvoljan $B \in D(K)$ takav da je $B \supseteq A$ definiramo

$$\mathcal{B}_A^B = \mathcal{B}_B \setminus \bigcup_{\substack{C \in D(K) \\ C \supset B}} \mathcal{B}_C.$$

Primijetimo da je tako definiran podskup od $\mathcal{B}_B$, koji je ujedno i podskup skupa $\mathcal{B}_A$, jer je $A \subseteq B$. Osim toga, za svaki $C \supset B$ je $\mathcal{B}_C \subset \mathcal{B}_B$, pa je $\mathcal{B}_A^B$ dobro definiran neprazan podskup od $\mathcal{B}_A$.

Lema 7 *Neka je $A, B \in D(K)$, $B \supseteq A$ i $J_B = I_m \setminus B$. Skup $\mathcal{B}_A^B$ se sastoji od svih $x(\pi) = \ldots x_{\gamma_\ell}(-1)^{a_{\ell-1}} \ldots x_{\gamma_2}(-1)^{a_1} x_{\gamma_1}(-1)^{a_0} \in \mathcal{B}_B$ takvih da je*

$$a_0 + \cdots + a_j = k_0 + \cdots + k_j, \quad j \in J_B.$$

Dokaz: Najprije primijetimo da je skup I_m najveći skup u $D(K)$ i da za $B = I_m$ vrijedi $J_B = \emptyset$, pa se trivijalno tvrdi da je

$$\mathcal{B}_A^{I_m} = \mathcal{B}_{I_m},$$

što je očita posljedica definicije skupa $\mathcal{B}_A^{I_m}$.

Promotrimo stoga $A \subseteq B \subsetneqq I_m$. Očito će svaki $C \supset B$, $C \in D(K)$, sadržavati one $x(\pi) = \ldots x_{\gamma_\ell}(-1)^{a_{\ell-1}} \ldots x_{\gamma_2}(-1)^{a_1} x_{\gamma_1}(-1)^{a_0} \in \mathcal{B}_B$ za koje vrijede i dodatne nejednakosti

$$a_0 + \cdots + a_i \leq k_0 + \cdots + k_i - 1, \quad i \in C \setminus B,$$

pa stoga $\mathcal{B}_A^B$ sadrže sve one $x(\pi) \in \mathcal{B}_B$ za koje takve nejednakosti ne vrijede (i to za sve stroge nadskupove od B iz $D(K)$), a to znači da se $\mathcal{B}_A^B$ sastoji od svih onih $x(\pi) \in \mathcal{B}_B$ za koje vrijede jednakosti

$$a_0 + \cdots + a_i = k_0 + \cdots + k_i, \quad i \in C \setminus B, C \supset B, C \in D(K).$$

Kako je I_m najveći skup u $D(K)$, to $J_B = I_m \setminus B$ sadrži sve indekse iz svih skupova $C \in D(K)$, $C \supset B$, pa tvrdnja slijedi.

Lema 8 *Za $A \in D(K)$ skup $\mathcal{B}_A$ je prikaziv kao disjunktna unija*

$$\mathcal{B}_A = \bigcup_{\substack{B \in D(K) \\ B \supseteq A}} \mathcal{B}_A^B.$$

Dokaz: Za svaki $B \in D(K)$, $B \supseteq A$, vrijedi $\mathcal{B}_A^B \subseteq \mathcal{B}_B \subseteq \mathcal{B}_A$. S druge strane, za svaki $x(\pi) = \ldots x_{\gamma_\ell}(-1)^{a_{\ell-1}} \ldots x_{\gamma_2}(-1)^{a_1} x_{\gamma_1}(-1)^{a_0} \in \mathcal{B}_A$ treba pokazati da postoji $B \supseteq A$ takav da $x(\pi) \in \mathcal{B}_A^B$. Definirajmo J kao skup svih indeksa j takvih da je

$$a_0 + \cdots + a_j = k_0 + \cdots + k_j.$$

Iz dokaza prethodne leme jasno slijedi da je $B = I_m \setminus J$. Naravno, u slučaju da je $J = \emptyset$ imamo $B = I_m$. Vrijedi dakle jednakost iz iskaza leme, pa još samo treba pokazati disjunktnost unije.

Pretpostavimo da za neke $B_1, B_2 \in D(K)$, $B_1, B_2 \supseteq A$, postoji $x(\pi) \in \mathcal{B}_A^{B_1} \cap \mathcal{B}_A^{B_2}$. No, tada je $x(\pi) \in \mathcal{B}_{B_1}$ i $x(\pi) \in \mathcal{B}_{B_2}$, pa je $x(\pi) \in \mathcal{B}_{B_1} \cap \mathcal{B}_{B_2} = \mathcal{B}_{B_1 \cup B_2}$, što je zbog $B_1 \cup B_2 \supset B_1, B_2$ u suprotnosti s $x(\pi) \in \mathcal{B}_A^{B_1}$ i $x(\pi) \in \mathcal{B}_A^{B_2}$. Iz ove kontradikcije slijedi tvrdnja.

Prelazimo na dokaz Propozicije.

4.2 Dokaz egzaktnosti

U prethodnom smo poglavlju vidjeli da je $[w]$ bijekcija, pa je specijalno i injekcija. Treba još pokazati da je:

(a) $Im([\omega]^{\otimes k}) = Ker(\varphi_0)$

(b) $Im(\varphi_t) = Ker(\varphi_{t+1})$, $t = 0, \dots, m-2$

Pokazujemo najprije da je $Im([\omega]^{\otimes k}) = Ker(\varphi_0)$. Primijetimo da $\mathcal{B}$ možemo shvatiti kao $\mathcal{B}_\emptyset$ u smislu prethodnih oznaka. Neka je $x(\pi)v \in Ker(\varphi_0)$, $x(\pi) \in \mathcal{B}$, što znači da je

$$\varphi_0(x(\pi)v) = \sum_{I_1 \in D_1(K)} x(\pi)v_{I_1} = 0,$$

pa je

$$x(\pi) \in \mathcal{B}_\emptyset \setminus \bigcup_{I_1 \in D_1(K)} \mathcal{B}_{I_1} = \mathcal{B}_\emptyset \setminus \bigcup_{D(K)} \mathcal{B}_C = \mathcal{B}_\emptyset^\emptyset$$

i stoga $J_\emptyset = I_m$.
Zato za $x(\pi) = \dots x_{\gamma_\ell}(-1)^{a_{\ell-1}} \dots x_{\gamma_2}(-1)^{a_1} x_{\gamma_1}(-1)^{a_0}$ vrijedi

$$a_0 + \cdots + a_j = k_0 + \cdots + k_j, \quad j \in J_\emptyset.$$

Kako je svaki $k_i, i \in \{0, \dots, \ell-1\} \setminus J_\emptyset$, jednak nuli, to ovaj skup jednakosti implicira jednakosti svih parcijalnih suma:

$$a_0 + \cdots + a_i = k_0 + \cdots + k_i, \quad i \in \{0, \dots, \ell-1\},$$

odakle slijedi $a_i = k_i, i \in \{0, \dots, \ell-1\}$, pa je

$$Ker(\varphi_0) = \text{span}\{x(\pi)v \in W | x(\pi) = \dots x_{\gamma_\ell}(-1)^{k_{\ell-1}} \dots x_{\gamma_1}(-1)^{k_0}\}.$$

S druge strane za $x(\pi_1)v_{k_\ell, k_0, \dots, k_{\ell-1}}$, $x(\pi_1) \in \mathcal{B}_{k_\ell, k_0, \dots, k_{\ell-1}}$, računamo

$$\begin{aligned}
&[\omega]^{\otimes k}(x(\pi_1)v_{k_\ell, k_0, \dots, k_{\ell-1}}) = \\
&= x(\pi_1^-) x_{\gamma_\ell}(-1)^{k_{\ell-1}} \dots x_{\gamma_2}(-1)^{k_1} x_{\gamma_1}(-1)^{k_0} [w]^{\otimes k}(v_{k_\ell, k_0, \dots, k_{\ell-1}}) = \\
&= x(\pi_1^-) x_{\gamma_\ell}(-1)^{k_{\ell-1}} \dots x_{\gamma_2}(-1)^{k_1} x_{\gamma_1}(-1)^{k_0} v.
\end{aligned}$$

Ako označimo $x(\pi_1) = \dots x_{\gamma_\ell}(-2)^{b_{\ell-1}} \dots x_{\gamma_2}(-2)^{b_1} x_{\gamma_1}(-2)^{b_0}$, iz početnih uvjeta na $W_{k_\ell, k_0, \dots, k_{\ell-1}}$ slijede uvjeti razlike na W:

$$b_0 \leq k_\ell \Rightarrow k_0 + \cdots + k_{\ell-1} + b_0 \leq k$$

$$b_0 + b_1 \le k_\ell + k_0 \Rightarrow k_1 + \cdots + k_{\ell-1} + b_0 + b_1 \le k$$
$$\ldots$$
$$b_0 + \ldots b_{\ell-1} \le k_\ell + k_0 + \ldots k_{\ell-2} \Rightarrow k_{\ell-1} + b_0 + \ldots b_{\ell-1} \le k,$$

pa imamo

$$Im([\omega]^{\otimes k}) = \mathrm{span}\{x(\pi)v \in W | x(\pi) = \ldots x_{\gamma_\ell}(-1)^{k_{\ell-1}} \ldots x_{\gamma_1}(-1)^{k_0}\}$$

i tvrdnja slijedi.
Prelazimo na dokaz da je $Im(\varphi_t) = Ker(\varphi_{t+1})$, $t = 0, \ldots, m-2$, i to najprije na inkluziju $Im(\varphi_t) \subseteq Ker(\varphi_{t+1})$. Za fiksni $t = 0, \ldots, m-2$ dokazujemo da je

$$\varphi_{t+1}(\varphi_t(w)) = 0$$

za svaki

$$w = \sum_{I_t \in D_t(K)} w_{I_t} \in \prod_{I_t \in D_t(K)} W_{I_t}.$$

Za svaki $I_{t+2} = \{i_0, \ldots, i_{t+1}\} \in D_{t+2}(K)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\varphi_{t+1}(\varphi_t(w))_{I_{t+2}} = \\
&= \sum_{0 \le s_1 \le t+1} (-1)^{s_1} a(\varphi_t(w))_{I_{t+2} \setminus \{i_s\}} v_{I_{t+2}} = \\
&= \sum_{0 \le s_2 < s_1 \le t+1} (-1)^{s_1} (-1)^{s_2} a(w)_{I_{t+2} \setminus \{i_{s_1}, i_{s_2}\}} v_{I_{t+2}} + \\
&+ \sum_{0 \le s_1 < s_2 \le t+1} (-1)^{s_1} (-1)^{s_2 - 1} a(w)_{I_{t+2} \setminus \{i_{s_1}, i_{s_2}\}} v_{I_{t+2}} = \\
&= \sum_{0 \le s_2 < s_1 \le t+1} (-1)^{s_1} (-1)^{s_2} a(w)_{I_{t+2} \setminus \{i_{s_1}, i_{s_2}\}} v_{I_{t+2}} - \\
&- \sum_{0 \le s_1 < s_2 \le t+1} (-1)^{s_1} (-1)^{s_2} a(w)_{I_{t+2} \setminus \{i_{s_1}, i_{s_2}\}} v_{I_{t+2}} = 0
\end{aligned}$$

što povlači $\varphi_{t+1}(\varphi_t(w)) = 0$.
Sada dokazujemo $Ker(\varphi_{t+1}) \subseteq Im(\varphi_t)$. Neka je

$$w = \sum_{I_{t+1} \in D_{t+1}(K)} w_{I_{t+1}} \in \prod_{I_{t+1} \in D_{t+1}(K)} W_{I_{t+1}}$$

takav da je $\varphi_{t+1}(w) = 0$, što znači da za svaki $I_{t+1} \in D_{t+1}(K)$ i za svaki $\{i\} \in D_1(K)$ takav da $i \notin I_{t+1}$ vrijedi

$$\varphi_{t+1}(w)_{I_{t+1} \cup \{i\}} = 0.$$

Fiksirajmo $A = \{i_0, \dots, i_t\} \in D_{t+1}(K)$ te neka je $\{i\} \in D_1(K)$, $i \notin A$, proizvoljan. Znamo da vrijedi $A \cup \{i\} = \{j_0, \dots, j_{t+1}\}$ za neki $\{j_0, \dots, j_{t+1}\} \in D_{t+2}(K)$. Neka je $i = j_{p_A(i)}$ za neki $p_A(i) \in \{j_0, \dots, j_{t+1}\}$.
Sada iz $\varphi_{t+1}(w)_{A \cup \{i\}} = 0$ slijedi

$$\begin{aligned}\varphi_{t+1}(w)_{A\cup\{i\}} &= \sum_{0 \le s \le t+1} (-1)^s a(w)_{(A \cup \{i\}) \setminus \{j_s\}} v_{A \cup \{i\}} = \\ &= (-1)^{p_A(i)} a(w)_A v_{A \cup \{i\}} + \sum_{\substack{0 \le s \le t+1 \\ s \ne p(i)}} (-1)^s a(w)_{(A \cup \{i\} \setminus \{j_s\})} v_{A \cup \{i\}} = 0,\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$a(w)_A v_{A \cup \{i\}} = \sum_{\substack{0 \le s \le t+1 \\ s \ne p_A(i)}} (-1)^{s-1+p_A(i)} a(w)_{(A \cup \{i\}) \setminus \{j_s\}} v_{A \cup \{i\}}. \tag{4.3}$$

Zbog Leme 8 za $a(w)_A$ vrijedi

$$a(w)_A = \sum_{\substack{B \in D(K) \\ B \supseteq A}} a(w)_A^B, \tag{4.4}$$

gdje je $a(w)_A^B$ linearna kombinacija monoma iz $\mathcal{B}_A^B$. Analogan rastav vrijedi i za sumande na desnoj strani izraza (4.3).
Uvrštavanjem ovih rastava u (4.3) dobivamo

$$\sum_{\substack{B \in D(K) \\ B \supseteq A}} a(w)_A^B v_{A \cup \{i\}} = \sum_{\substack{0 \le s \le t+1 \\ s \ne p_A(i)}} (-1)^{s-1+p_A(i)} \sum_{\substack{B \in D(K) \\ B \supseteq A \cup \{i\} \setminus \{j_s\}}} a(w)^B_{(A \cup \{i\}) \setminus \{j_s\}} v_{A \cup \{i\}}. \tag{4.5}$$

U jednakosti (4.5) neće "preživjeti" svi sumandi. Općenito, što se lijeve strane jednakosti (4.5) tiče, želimo vidjeti kada će za $x(\pi) \in \mathcal{B}_A^B$ ($B \in D(K)$ takav da $B \supseteq A$) vrijediti $x(\pi) \in \mathcal{B}_{A \cup \{i\}}$. Postoje dvije mogućnosti:

1. Ako $A \cup \{i\} \subseteq B$, onda zbog Leme 5 sigurno vrijedi.

2. Ako $A \cup \{i\} \nsubseteq B$: neka $x(\pi) \in \mathcal{B}_A^B$ i pretpostavimo da $x(\pi) \in \mathcal{B}_{A \cup \{i\}}$. Tada $x(\pi) \in \mathcal{B}_B \cap \mathcal{B}_{A \cup \{i\}} = \mathcal{B}_{A \cup \{i\} \cup B}$, gdje je $A \cup \{i\} \cup B \supset B$. No, to je u suprotnosti s $x(\pi) \in \mathcal{B}_A^B$. Dakle, u ovom je slučaju nužno $x(\pi) \notin \mathcal{B}_{A \cup \{i\}}$.

Sada (4.5) postaje

$$\sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supseteq A\cup\{i\}}} a(w)_A^B v_{A\cup\{i\}} = \sum_{\substack{0\le s\le t+1\\ s\ne p_A(i)}} (-1)^{s-1+p_A(i)} \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supseteq A\cup\{i\}}} a(w)^B_{(A\cup\{i\})\setminus\{j_s\}} v_{A\cup\{i\}} \tag{4.6}$$

odnosno

$$\sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supseteq A\cup\{i\}}} a(w)_A^B = \sum_{\substack{0\le s\le t+1\\ s\ne p_A(i)}} (-1)^{s-1+p_A(i)} \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supseteq A\cup\{i\}}} a(w)^B_{(A\cup\{i\})\setminus\{j_s\}}. \tag{4.7}$$

Odavdje zbog disjunktnosti rastava (4.4) slijedi da za svaki $B \in D(K)$, $B \supseteq A$, vrijedi

$$a(w)_A^B = \sum_{\substack{0\le s\le t+1\\ s\ne p_A(i)}} (-1)^{s-1+p_A(i)} a(w)^B_{(A\cup\{i\})\setminus\{j_s\}}. \tag{4.8}$$

Želimo sada pokazati da postoji

$$z = \sum_{I_t\in D_t(K)} z_{I_t} \in \prod_{I_t\in D_t(K)} W_{I_t}$$

takav da je $\varphi_t(z) = w$, tj. da za svaki $I_{t+1} \in D_{t+1}(K)$ vrijedi

$$\varphi_t(z)_{I_{t+1}} = a(w)_{I_{t+1}} v_{I_{t+1}}. \tag{4.9}$$

Definirajmo za proizvoljan $I_t \in D_t(K)$

$$a(z)_{I_t} = \sum_{\substack{\{i\}\in D_1(K)\\ i\notin I_t}} \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supseteq I_t\cup\{i\}}} \frac{(-1)^{p_{I_t}(i)}}{|B|} a(w)^B_{I_t\cup\{i\}}, \tag{4.10}$$

gdje je $p_{I_t}(i)$ takav da je $i = j'_{p_{I_t}(i)}$ u jednakosti $I_t \cup \{i\} = \{j'_0, \dots, j'_t\}$ za neki $\{j'_0, \dots, j'_t\} \in D_{t+1}(K)$.
Primijetimo da u (4.10) svaki sumand netrivijalno djeluje na v_{I_t}. Naime, za $x(\pi) \in \mathcal{B}^B_{I_t\cup\{i\}}$ imamo $x(\pi) \in \mathcal{B}_B$, pa zbog $I_t \subseteq I_t \cup \{i\} \subseteq B$ i Leme 5 vrijedi i $x(\pi) \in \mathcal{B}_{I_t}$. Stoga gornja definicija ima smisla.
Dokazujemo sada jednakost (4.9) za fiksirani $A \in D_{t+1}(K)$:

$$\begin{aligned}\varphi_t(z)_A &= \sum_{0\le r\le t} (-1)^r a(z)_{A\setminus\{i_r\}} v_A = \\ &= \sum_{0\le r\le t} (-1)^r \sum_{\substack{\{i\}\in D_1(K)\\ i\notin A\setminus\{i_r\}}} \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supseteq(A\setminus\{i_r\})\cup\{i\}}} \frac{(-1)^{p_{A\setminus\{i_r\}}(i)}}{|B|} a(w)^B_{(A\setminus\{i_r\})\cup\{i\}} v_A.\end{aligned}$$

Slično već provedenoj argumentaciji može se pokazati da će netrivijalni biti oni sumandi za koje je $B \supseteq A$. Kako je $B \supseteq (A \setminus \{i_r\}) \cup \{i\}$, imamo dvije mogućnosti: ako je $i = i_r$, onda je $B \supseteq A$ i nema dodatnih uvjeta. No, ako $i \neq i_r$, onda moramo postaviti uvjet da i $i_r \in B$, pa imamo $B \supseteq A \cup \{i\}$. Stoga možemo $\varphi_t(z)_A$ zapisati ovako:

$$\begin{aligned}
\varphi_t(z)_A = & \sum_{0 \leq r \leq t} (-1)^r \sum_{\substack{B \in D(K) \\ B \supseteq A}} \frac{(-1)^r}{|B|} a(w)^B_A v_A + \\
& + \sum_{0 \leq r \leq t} (-1)^r \sum_{\substack{\{i\} \in D_1(K) \\ i \notin A}} \sum_{\substack{B \in D(K) \\ B \supseteq A \cup \{i\}}} \frac{(-1)^{p_{A \setminus \{i_r\}}(i)}}{|B|} a(w)^B_{(A \setminus \{i_r\}) \cup \{i\}} v_A = \\
& = \sum_{\substack{B \in D(K) \\ B \supseteq A}} \sum_{0 \leq r \leq t} \frac{1}{|B|} a(w)^B_A v_A + \\
& + \sum_{\substack{\{i\} \in D_1(K) \\ i \notin A}} \sum_{\substack{B \in D(K) \\ B \supseteq A \cup \{i\}}} \frac{1}{|B|} \sum_{0 \leq r \leq t} (-1)^{r + p_{A \setminus \{i_r\}}(i)} a(w)^B_{(A \setminus \{i_r\}) \cup \{i\}} v_A
\end{aligned}$$

Pokazujemo sada da za svaki $\{i\} \in D_1(K)$ takav da $i \notin A$ i svaki $B \in D(K)$ takav da $B \supseteq A \cup \{i\}$ vrijedi

$$\sum_{0 \leq r \leq t} (-1)^{r + p_{A \setminus \{i_r\}}(i)} a(w)^B_{(A \setminus \{i_r\}) \cup \{i\}} = \sum_{\substack{0 \leq s \leq t+1 \\ s \neq p_A(i)}} (-1)^{s-1+p_A(i)} a(w)^B_{(A \cup \{i\}) \setminus \{j_s\}}, \quad (4.11)$$

gdje je $\{j_0, \dots, j_{t+1}\} = A \cup \{i\}$ za neki $\{j_0, \dots, j_{t+1}\} \in D_{t+2}(K)$.
Primijetimo da s obje strane gornjeg izraza imamo $t+1$ sumanada, pa je dovoljno pokazati jednakost odgovarajućih parova sumanada lijeve i desne strane. Postoje dva slučaja, ovisno o izboru $0 \leq s \leq t+1$, $s \neq p_A(i)$:

1. Za izabrani $s < p_A(i)$ odgovarajući sumand desne strane bit će jednak sumandu lijeve strane za $r = s$, jer zbog $r < p_A(i)$ imamo $p_{A \setminus \{i_r\}}(i) = p_A(i) - 1$ i $i_r = j_s$, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
& r + p_{A \setminus \{i_r\}}(i) = s + p_{A \setminus \{i_s\}}(i) = s + p_A(i) - 1 = s - 1 + p_A(i) \\
& (A \setminus \{i_r\}) \cup \{i\} = (A \setminus \{i_s\}) \cup \{i\} = (A \cup \{i\}) \setminus \{i_s\} = (A \cup \{i\}) \setminus \{j_s\}.
\end{aligned}$$

2. Za izabrani $s > p_A(i)$ odgovarajući sumand desne strane bit će jednak sumandu lijeve strane za $r = s - 1$, jer zbog $s \geq p_A(i) + 1 \Rightarrow r \geq p_A(i)$ imamo $p_{A \setminus \{i_r\}}(i) = p_A(i)$ i $i_r = i_{s-1} = j_s$, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
& r + p_{A \setminus \{i_r\}}(i) = s + p_{A \setminus \{i_{s-1}\}}(i) = s - 1 + p_A(i) \\
& (A \setminus \{i_r\}) \cup \{i\} = (A \setminus \{i_{s-1}\}) \cup \{i\} = (A \cup \{i\}) \setminus \{j_s\}.
\end{aligned}$$

U oba slučaja odgovarajući sumandi lijeve i desne strane su jednaki, pa (4.11) vrijedi. Sada iz (4.8) slijedi da $\varphi_t(z)_A$ možemo zapisati ovako:

$$\begin{aligned}\varphi_t(z)_A &= \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supseteq A}} \frac{t+1}{|B|} a(w)^B_A v_A + \sum_{\substack{\{i\}\in D_1(K)\\ i\notin A}} \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supseteq A\cup\{i\}}} \frac{1}{|B|} a(w)^B_A v_A = \\ &= a(w)^A_A v_A + \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supset A}} \frac{t+1}{|B|} a(w)^B_A v_A + \sum_{\substack{\{i\}\in D_1(K)\\ i\notin A}} \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supseteq A\cup\{i\}}} \frac{1}{|B|} a(w)^B_A v_A,\end{aligned}$$

s tim da se u posljednjoj sumi očito sumira po svim $B \in D(K)$, $B \supset A$, a svaki takav fiksni B pojavljuje se $|B| - |A|$ puta. Imamo zato

$$\begin{aligned}\varphi_t(z)_A &= a(w)^A_A v_A + \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supset A}} \frac{t+1}{|B|} a(w)^B_A v_A + \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supset A}} \frac{|B|-|A|}{|B|} a(w)^B_A v_A = \\ &= a(w)^A_A v_A + \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supset A}} a(w)^B_A v_A = \sum_{\substack{B\in D(K)\\ B\supseteq A}} a(w)^B_A v_A = a(w)_A v_A,\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. Odavdje konačno slijedi $Im(\varphi_t) = Ker(\varphi_{t+1})$, $t = 0, \ldots, m-2$.

Poglavlje 5

Rekurzije formalnih karaktera

5.1 Formalni karakter i sustavi rekurzija

Neka je $\Lambda = k_0\Lambda_0 + \cdots + k_\ell\Lambda_\ell$ takav da je $k_0 + \ldots k_\ell = k$, k fiksan. Formalni karakter $\chi(W(\Lambda))$ definiramo formulom

$$\chi(W(\Lambda))(z_1, \ldots, z_\ell; q) = \sum \dim W(\Lambda)^{m,n_1,\ldots,n_\ell} q^m z_1^{n_1} \cdots z_\ell^{n_\ell},$$

gdje $W(\Lambda)^{m,n_1,\ldots,n_\ell}$ označava graduirani potprostor $W(\Lambda)$ monomijalnih vektora stupnja m koji sadrže n_i članova oblika $x_{\gamma_i}(-j_i)$, $j_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, \ell$.
Iz egzaktnosti niza (4.1) slijedi da za svaki fiksni izbor

$$\begin{aligned} n_i &\geq k_{i-1}, i = 1, \ldots, \ell \\ m &\geq n_1 + \cdots + n_\ell + k_0 + \cdots + k_{\ell-1} \\ x(\pi)v_{k_\ell,k_0,\ldots,k_{\ell-1}} &\in W_{k_\ell,k_0,\ldots,k_{\ell-1}}^{m-(n_1+\cdots+n_\ell)-(k_0+\cdots+k_{\ell-1}),n_1-k_0,\ldots,n_\ell-k_{\ell-1}} \end{aligned}$$

vrijedi

$$x(\pi)v_{k_\ell,k_0,\ldots,k_{\ell-1}} \xrightarrow{[\omega]^{\otimes k}} x(\pi^-)x_{\gamma_\ell}(-1)^{k_{\ell-1}} \cdots x_{\gamma_2}(-1)^{k_1} x_{\gamma_1}(-1)^{k_0} v, \qquad (5.1)$$

gdje je monom s desne strane stupnja m, a sastoji se od n_i članova oblika $x_{\gamma_i}(-j_i)$, $j_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, \ell$.
Ako sada na monomijalni vektor s desne strane gornjeg izraza djelujemo redom s φ_0, potom na novodobiveni monomijalni vektor s φ_1, itd., te na kraju s φ_{m-1}, dobivat ćemo monomijalne vektore s pripadnim monomima jednakima onom s desne izraza (5.1). Drugim riječima, neće se promijeniti niti stupanj, niti broj članova oblika $x_{\gamma_i}(-j_i)$, $j_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, \ell$, koje sadrže ti monomi.

Sada iz egzaktnosti niza (4.1) slijedi da za dimenzije odgovarajućih težinskih potprostora vrijedi jednakost

$$\begin{aligned}&\dim W^{m-(n_1+\cdots+n_\ell)-(k_0+\cdots+k_{\ell-1}),n_1-k_0,\ldots,n_\ell-k_{\ell-1}}_{k_\ell,k_0,\ldots,k_{\ell-1}} - \dim W^{m,n_1,\ldots,n_\ell} +\\ &+ \sum_{I_1\in D_1(K)} \dim W^{m,n_1,\ldots,n_\ell}_{I_1} + \cdots + (-1)^{m-1}\sum_{I_m\in D_m(K)} \dim W^{m,n_1,\ldots,n_\ell}_{I_m} = 0,\end{aligned}$$

što kao direktnu posljedicu ima sljedeću vezu među formulama karaktera potprostora Feigin-Stojanovskog istog fiksnog nivoa k:

$$\begin{aligned}\chi(W)(z_1,\ldots,z_\ell;q) = &\sum_{I_1\in D_1(K)} \chi(W_{I_1})(z_1,\ldots,z_\ell;q) - \sum_{I_1\in D_2(K)} \chi(W_{I_1})(z_1,\ldots,z_\ell;q) +\\ &+ \cdots + (-1)^{m-1}\sum_{I_m\in D_m(K)} \chi(W_{I_m})(z_1,\ldots,z_\ell;q) +\\ &+ (z_1q)^{k_0}\ldots(z_\ell q)^{k_{\ell-1}}\chi(W_{k_\ell,k_0,\ldots,k_{\ell-1}})(z_1q,\ldots,z_\ell q;q), \quad (5.2)\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\chi(W)(z_1,\ldots,z_\ell;q) = &\sum_{I\in D(K)} (-1)^{|I|-1}\chi(W_I)(z_1,\ldots,z_\ell;q) +\\ &+ (z_1q)^{k_0}\ldots(z_\ell q)^{k_{\ell-1}}\chi(W_{k_\ell,k_0,\ldots,k_{\ell-1}})(z_1q,\ldots,z_\ell q;q). \quad (5.3)\end{aligned}$$

Gornja jednakost vrijedi za sve izbore nenegativnih $k_0,\ldots,k_\ell$ takvih da je $k_0+\cdots+k_\ell = k$, pa (5.3) predstavlja sustav rekurzivnih jednadžbi.

Primjer 2 *Za $\ell = 2$, $k = 2$ rekurzivne relacije za formule karaktera potprostora Feigin-Stojanovskog glase:*

$$\begin{aligned}\chi(W_{2,0,0})(z_1,z_2;q) &= \chi(W_{1,1,0})(z_1,z_2;q) + (z_1q)^2\chi(W_{0,2,0})(z_1q,z_2q;q)\\ \chi(W_{1,1,0})(z_1,z_2;q) &= \chi(W_{0,2,0})(z_1,z_2;q) + \chi(W_{1,0,1})(z_1,z_2;q) -\\ &- \chi(W_{0,1,1})(z_1,z_2;q) + (z_1q)(z_2q)\chi(W_{0,1,1})(z_1q,z_2q;q)\\ \chi(W_{1,0,1})(z_1,z_2;q) &= \chi(W_{0,1,1})(z_1,z_2;q) + z_1q\chi(W_{1,1,0})(z_1q,z_2q;q)\\ \chi(W_{0,2,0})(z_1,z_2;q) &= \chi(W_{0,1,1})(z_1,z_2;q) + (z_2q)^2\chi(W_{0,0,2})(z_1q,z_2q;q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi(W_{0,1,1})(z_1,z_2;q) &= \chi(W_{0,0,2})(z_1,z_2;q) + z_2q\chi(W_{1,0,1})(z_1q,z_2q;q)\\ \chi(W_{0,0,2})(z_1,z_2;q) &= \chi(W_{2,0,0})(z_1q,z_2q;q)\end{aligned}$$

Rješenje sustava (5.2) tražimo u obliku

$$\chi(W_{k_0,\ldots,k_\ell})(z_1,\ldots,z_\ell;q) = \sum_{n_1,\ldots,n_\ell\geq 0} A^{n_1,\ldots,n_\ell}_{k_0,\ldots,k_\ell}(q) z_1^{n_1}\ldots z_\ell^{n_\ell}, \quad (5.4)$$

gdje su $A^{n_1,\dots,n_\ell}_{k_0,\dots,k_\ell}(q)$ racionalne funkcije formalne varijable q. Uvrštavanje (5.4) u (5.3) daje sustav (uz analogne oznake kao i prije, npr. $A(q) = A_{k_0,\dots,k_\ell}(q)$)

$$A^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = \sum_{I \in D(K)} (-1)^{|I|-1} A_I^{n_1,\dots,n_\ell}(q) + q^n A^{n_1-k_0,\dots,n_\ell-k_{\ell-1}}_{k_\ell,k_0,\dots,k_{\ell-1}}(q), \qquad (5.5)$$

uz oznaku $n = n_1 + \cdots + n_\ell$.

U sljedećem poglavlju rješavamo (5.5) za $(k,\ell) \in \{(1,\ell),(k,2)\}$, a sada dokazujemo da taj sustav općenito ima jedinstveno rješenje.

5.2 Jedinstvenost rješenja

Promatramo sve potprostore Feigin-Stojanovskog istog fiksnog nivoa k, kao i u prethodnom odlomku.

Propozicija 9 *Za svaki izbor nenegativnih cijelih brojeva $k_0,\dots,k_\ell$ takvih da je $k_0 + \cdots + k_\ell = k$ i za sve izbore nenegativnih cijelih brojeva $n_1,\dots,n_\ell$ takvih da je $n_i \geq k_{i-1}$, $i = 1,\dots,\ell$, za racionalne funkcije formalne varijable q koje zadovoljavaju sustav* (5.5) *vrijedi*

$$A^{n_1,\dots,n_\ell}_{k_0,\dots,k_\ell}(q) = q^n \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}} A^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}(q), \qquad (5.6)$$

uz oznake $a = a_1 + \cdots + a_\ell$, $n = n_1 + \cdots + n_\ell$.

Dokaz: Jednakost iz iskaza propozicije identificiramo s donjom grupom indeksa funkcije na lijevoj strani jednakosti, tj. s uređenom $(\ell+1)-$torkom $(k_0,\dots,k_\ell)$ koja čini donji indeks te racionalne funkcije. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po tim uređenim $(\ell+1)-$torkama, poštujući pritom uobičajeni leksikografski uređaj koji među njima vrijedi.

Najprije provjeravamo da tvrdnja vrijedi za najmanju takvu $(\ell+1)-$torku, tj. za $(0,\dots,0,k)$. Drugim riječima, treba vidjeti da vrijedi

$$A^{n_1,\dots,n_\ell}_{0,\dots,0,k}(q) = q^n \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}_{0,\dots,0,k}} A^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}(q).$$

Međutim, vidimo da je skup uređenih $\ell-$torki $(a_1,\dots,a_\ell) \in \mathcal{B}_{0,\dots,0,k}$ jednočlan – sastoji se samo od $(0,\dots,0)$, pa tvrdnja koju treba dokazati glasi

$$A^{n_1,\dots,n_\ell}_{0,\dots,0,k}(q) = q^n A^{n_1,\dots,n_\ell}_{k,0,\dots,0}(q).$$

No, to je upravo odgovarajuća rekurzivna relacija iz sustava (5.5), pa tvrdnja trivijalno slijedi.

Fiksirajmo sada jednu uređenu $(\ell+1)-$torku $K=(k_0,\ldots,k_\ell)$. Jednadžba sustava (5.5) koja odgovara K glasi

$$A^{n_1,\ldots,n_\ell}(q)=\sum_{I\in D(K)}(-1)^{|I|-1}A_I^{n_1,\ldots,n_\ell}(q)+q^n A^{n_1-k_0,\ldots,n_\ell-k_{\ell-1}}_{k_\ell,k_0,\ldots,k_{\ell-1}}(q).$$

Funkcije s desne strane ove jednadžbe, osim zadnjeg sumanda, su $A_I^{n_1,\ldots,n_\ell}(q)$, $I\in D(K)$. One su očito indeksirane manjim $(\ell+1)-$torkama od zadane, pa prema pretpostavci indukcije za svaku od njih vrijedi tvrdnja.

Dobivamo

$$\begin{aligned}&A^{n_1,\ldots,n_\ell}(q)=\\&=q^n\sum_{I\in D(K)}\sum_{(a_1,\ldots,a_\ell)\in\mathcal{B}_I}(-1)^{|I|-1}A^{n_1-a_1,\ldots,n_\ell-a_\ell}_{k-a,a_1,\ldots,a_\ell}(q)+q^nA^{n_1-k_0,\ldots,n_\ell-k_{\ell-1}}_{k_\ell,k_0,\ldots,k_{\ell-1}}(q).\end{aligned}\tag{5.7}$$

U sumi na desnoj strani gornje jednakosti pojavljuju se sigurno funkcije indeksirane samo onim uređenim $(\ell+1)-$torkama $(a_1,\ldots,a_\ell)$ koje pripadaju i $\mathcal{B}=\mathcal{B}_\emptyset$ (to je zbog $\emptyset\subseteq I$ posljedica Leme 5). Štoviše, lako se vidi da se unutar znaka sume na desnoj strani (5.7) pojavljuju funkcije indeksirane svim $(a_1,\ldots,a_\ell)\in\mathcal{B}$, osim $(a_1,\ldots,a_\ell)=(k_0,\ldots,k_{\ell-1})$. No, funkcija koja njoj pripada jest upravo zadnji sumand na desnoj strani gornje jednakosti.

Treba još vidjeti da se svaka $(a_1,\ldots,a_\ell)\in\mathcal{B}$ na desnoj strani pojavljuje samo jednom. Neka je $(a_1,\ldots,a_\ell)$ jedna od njih i neka pripada nekom $\mathcal{B}_\emptyset^I$ (vidjeti Lemu 8). Tada zbog Leme 5 vrijedi $(a_1,\ldots,a_\ell)\in B_J$ za sve $J\in D(K)$ takve da je $J\subseteq I$. To znači da faktor s kojim se pripadna funkcija $A^{n_1-a_1,\ldots,n_\ell-a_\ell}_{k-a,a_1,\ldots,a_\ell}(q)$ pojavljuje na desnoj strani jednakosti (5.7) glasi

$$\sum_{a=1}^{|I|}(-1)^{a-1}\binom{|I|}{a}.$$

Naravno, želimo pokazati da je taj faktor jednak jedan. Računamo stoga

$$\begin{aligned}1-\sum_{a=1}^{|I|}(-1)^{a-1}\binom{|I|}{a}&=(-1)^0\binom{|I|}{0}+\sum_{a=1}^{|I|}(-1)^a\binom{|I|}{a}\\&=\sum_{a=0}^{|I|}(-1)^a\binom{|I|}{a}=\sum_{a=0}^{|I|}(-1)^a1^{|I|-a}\binom{|I|}{a}=0,\end{aligned}$$

odakle slijedi da se sve funkcije indeksirane svim $(\ell+1)-$torkama iz $\mathcal{B}$ pojavljuju s desne strane jednakosti (5.7), što završava dokaz.

Propozicija 10 *Za svaki izbor nenegativnih cijelih brojeva $k_0, \dots, k_\ell$ takvih da je $k_0 + \dots + k_\ell = k$ i za sve izbore nenegativnih cijelih brojeva $n_1, \dots, n_\ell$ takvih da je $n_i \geq k_{i-1}$, $i = 1, \dots, \ell$, za racionalne funkcije formalne varijable q koje zadovoljavaju sustav* (5.5) *vrijedi*

$$A_{k_0,\dots,k_\ell}^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = \frac{q^n}{1-q^n}\Big(\sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q) + \\ + q^n \sum_{I\in D(K)} \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}_I\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q)\Big). \tag{5.8}$$

Dokaz: Napišimo (5.6) za $A_{k,0,\dots,0}^{n_1,\dots,n_\ell}(q)$. Imamo:

$$A_{k,0,\dots,0}^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = q^n \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}_{k,0,\dots,0}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q) = \\ = q^n \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}_{k,0,\dots,0}\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q) + q^n A_{k,0,\dots,0}^{n_1,\dots,n_\ell}(q),$$

pa slijedi da je

$$A_{k,0,\dots,0}^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = \frac{q^n}{1-q^n} \cdot \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}_{k,0,\dots,0}\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q). \tag{5.9}$$

Sada fiksirajmo izbor nenegativnih cijelih brojeva $k_0, \dots, k_\ell$ takvih da je $k_0 + \dots + k_\ell = k$. Iz (5.6) korištenjem (5.9) slijedi

$$A_{k_0,\dots,k_\ell}^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = q^n \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q) = \\ = q^n \Big(A_{k,0,\dots,0}^{n_1,\dots,n_\ell}(q) + \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q)\Big) = \\ = q^n \Big(\frac{q^n}{1-q^n} \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}_{k,0,\dots,0}\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q) + \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q)\Big) = \\ = \frac{q^n}{1-q^n}\Big(q^n \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}_{k,0,\dots,0}\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q) + (1-q^n) \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q)\Big) = \\ = \frac{q^n}{1-q^n}\Big(\sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q) + q^n \sum_{I\in D(K)} \sum_{(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathcal{B}_I\setminus\{(0,\dots,0)\}} A_{k-a,a_1,\dots,a_\ell}^{n_1-a_1,\dots,n_\ell-a_\ell}(q)\Big),$$

što je i trebalo pokazati.

Kao posljedicu prethodne propozicije imamo činjenicu da se svaka funkcija $A^{n_1,\ldots,n_\ell}_{k_0,\ldots,k_\ell}(q)$ može prikazati kao linearna kombinacija (s koeficijentima u racionalnim funkcijama formalne varijable q) racionalnih funkcija indeksiranih gornjim indeksima koji su (uz leksikografski uređaj na uređenim ℓ-torkama) strogo manji od $(n_1,\ldots,n_\ell)$. Zajedno s početnim uvjetima ova činjenica induktivno garantira jedinstvenost rješenja sustava rekurzivnih jednadžbi (5.5).

Poglavlje 6

Formule karaktera

6.1 Postojeći rezultati

Ovdje želimo ukratko opisati dosadašnje uspjehe u nastojanju da se napiše zatvorena forma formalnih karaktera potprostora Feigin-Stojanovskog.

U radu [CLM2] dobivene su rekurzivne relacije među formalnim karakterima potprostorima Feigin-Stojanovskog istog nivoa za $\widetilde{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}$. Rekurzivne relacije dobivene su korištenjem odgovarajućih operatora ispreplitanja i operatora proste struje, ali ne i korištenjem kombinatorne baze. Dobivene rekurzivne relacije glase (uz oznake kao ovdje):

$$\begin{aligned}\chi(W_{k_0,k_1})(z;q) &= \chi(W_{k_0-1,k_1+1})(z;q) + z^{k_0}q^{k_0}\chi(W_{k_1,k_0})(zq;q), \quad k_0 = 1\dots k \\ \chi(W_{0,k})(z;q) &= \chi(W_{k,0})(zq;q), \end{aligned} \tag{6.1}$$

što je upravo sustav (5.3) kada je $\ell = 1$, k proizvoljan. Ovaj sustav poznat je iz rada G. Andrewsa na tzv. Gordonovim identitetima i može se pronaći npr. u [A1]. Rješenje gornjeg sustava su zatvoreni izrazi za formalne karaktere odgovarajućih potprostora Feigin-Stojanovskog:

$$\chi(W_{k_0,k_1})(z;q) = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^k N_i = n \\ N_i \geq N_{i+1} \\ N_{k+1}:=0 \\ i=1\dots k}} \frac{q^{N_1^2+\dots+N_k^2+N_{k_0+1}+\dots N_k}}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_i-N_{i+1}}} z^n. \tag{6.2}$$

Napomenimo da će tehnika slična Andrewsovoj biti primijenjena i pri rješavanju sustava (5.3) za $\ell = 2$, k proizvoljan.

Što se tiče napretka prema algebrama tipa A_ℓ viših rangova ($\ell \geq 2$), općenito nije učinjeno puno. U [FJMMT] rješava se problem za $\ell = 2$, i to za module općeg nivoa, ali samo za specijalne slučajeve $L_{k_0,k_1,0}$. Kako bi dobili formulu karaktera za potprostore Feigin-Stojanovskog $W(\Lambda)$ takvih modula, autori pripadni dualni prostor $W(\Lambda)^\star$ ulažu u prostor simetričnih polinoma i definiraju na njemu tzv. Gordonovu filtraciju. Iz eksplicitnog računa komponenti pripadnog graduiranog prostora (uz korištenje verteks operatora) slijede formule karaktera $W(\Lambda)$:

$$\chi(W_{k_0,k_1,0})(q;z) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+l_2=n \\ l_1,l_2\geq 0}} \sum_{\substack{\sum_j jm_{i,j}=l_i \\ i=1,2}} \frac{q^{{}^t mAm-(\mathrm{diag}A)\cdot m+2c_{b_0}^{(3)}\cdot m}}{(q^2)_{m_{1,1}}\cdots(q^2)_{m_{1,k}}(q^2)_{m_{2,1}}\cdots(q^2)_{m_{2,k}}} q^{l_2} z^n, \tag{6.3}$$

gdje je

$$\begin{aligned}
A^{(2)} &= (A_{ab}^{(2)})_{1\leq a,b\leq k}, \quad A_{ab}^{(2)} = 2\min(a,b) \\
B^{(3)} &= (B_{ab}^{(3)})_{1\leq a,b\leq k}, \quad B_{ab}^{(3)} = \max(0,a+b-k) \\
A &= \left(\begin{array}{c|c} A^{(2)} & B^{(3)} \\ \hline B^{(3)} & A^{(2)} \end{array}\right) \\
c_{b_0}^{(3)} &= (\underbrace{0,\ldots,0,1,2,\ldots,k-b_0}_{k},\underbrace{0,\ldots,0}_{k}) \\
m &= {}^t(m_{1,1},\ldots,m_{1,k},m_{2,1},\ldots,m_{2,k}).
\end{aligned}$$

Primjer 3 *Za $k=2$ matrica A glasi*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

dok za vektor $c_{b_0}^{(3)}$ imamo tri mogućnosti:

$$\Lambda = 2\Lambda_0 \Rightarrow b_0 = 2 \Rightarrow c_2^{(3)} = (0,0,0,0)$$
$$\Lambda = \Lambda_0+\Lambda_1 \Rightarrow b_0 = 1 \Rightarrow c_1^{(3)} = (0,1,0,0)$$
$$\Lambda = 2\Lambda_1 \Rightarrow b_0 = 0 \Rightarrow c_0^{(3)} = (1,2,0,0),$$

te u skladu s tim i tri različite mogućnosti za linearne članove u eksponentu brojnika (6.3)*:*

$$-2m_{1,1}-4m_{1,2}-m_{2,1}-2m_{2,2} za 2\Lambda_0 \tag{6.4}$$
$$-2m_{1,1}-2m_{1,2}-m_{2,1}-2m_{2,2} za \Lambda_0+\Lambda_1 \tag{6.5}$$
$$-m_{2,1}-2m_{2,2}, za 2\Lambda_1, \tag{6.6}$$

a kvadratni član u sva tri slučaja glasi:

$$\begin{aligned} &2m_{1,1}^2+4m_{1,1}m_{1,2}+4m_{1,2}^2+2m_{1,2}m_{2,1}+2m_{2,1}^2+ \\ &2m_{1,1}m_{2,2}+4m_{1,2}m_{2,2}+4m_{2,1}m_{2,2}+4m_{2,2}^2. \end{aligned} \tag{6.7}$$

6.2 Formule karaktera za $(1, \ell)$

Neka je $k = 1$, a $\ell \geq 2$ proizvoljan. Želimo vidjeti kako sustav rekurzivnih jednadžbi (5.5) izgleda u ovom slučaju:

$$
\begin{aligned}
A_0^{n_1,\dots,n_\ell}(q) &= A_1^{n_1,\dots,n_\ell}(q) + q^{n_1+\cdots+n_\ell} A_1^{n_1-1,n_2,\dots,n_\ell}(q) \\
A_1^{n_1,\dots,n_\ell}(q) &= A_2^{n_1,\dots,n_\ell}(q) + q^{n_1+\cdots+n_\ell} A_2^{n_1,n_2-1,\dots,n_\ell}(q) \\
&\dots \\
A_{\ell-1}^{n_1,\dots,n_\ell}(q) &= A_\ell^{n_1,\dots,n_\ell}(q) + q^{n_1+\cdots+n_\ell} A_\ell^{n_1,n_2,\dots,n_\ell-1}(q) \\
A_\ell^{n_1,\dots,n_\ell}(q) &= \qquad\qquad\quad q^{n_1+\cdots+n_\ell} A_0^{n_1,n_2,\dots,n_\ell}(q),
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

gdje su $n_1, \dots, n_\ell$ pozitivni cijeli brojevi.

Definirajmo za formalni koeficijent q, $|q| < 1$, sljedeći faktor:

$$
\begin{aligned}
(q)_0 &= 1 \\
(q)_n &= (q)_{n-1} \cdot (1 - q^n), \quad q \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Propozicija 11 *Rješenje sustava* (6.8) *dano je s*

$$
A_i^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = \frac{q^{f_i(n_1,\dots,n_\ell)}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_\ell}}, \tag{6.9}
$$

gdje je $f_i(n_1, \dots, n_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} n_j^2 + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq \ell} n_{j_1} n_{j_2} + \sum_{j=1}^{i} n_j$, $i = 0 \dots \ell$.

Dokaz: Treba pokazati da (6.9) zadovoljava sustav (6.8). Za fiksni $i = 1 \dots \ell$ pokazujemo da gore definirane funkcije zadovoljavaju odgovarajuću jednadžbu

$$
A_{i-1}^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = A_i^{n_1,\dots,n_\ell}(q) + q^{n_1+\cdots+n_\ell} A_i^{n_1,\dots,n_{i-1},\dots,n_\ell}(q).
$$

Krećemo od $q^{n_1+\cdots+n_\ell} A_i^{n_1,\dots,n_{i-1},\dots,n_\ell}(q)$ i pokazujemo da je zadovoljena gornja jednadžba:

$$
\begin{aligned}
& q^{n_1+\cdots+n_\ell} A_i^{n_1,\dots,n_{i-1},\dots,n_\ell}(q) = \\
&= q^{n_1+\cdots+n_\ell} \cdot \frac{q^{f_i(n_1,\dots,n_i-1,\dots,n_\ell)}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_i-1}\cdots(q)_{n_\ell}} \cdot \frac{1-q^{n_i}}{1-q^{n_i}} = \\
&= q^{n_1+\cdots+n_\ell} \cdot \frac{q^{\sum_{j \neq i} n_j^2 + (n_i-1)^2 + \sum_{j_1<j_2} n_{j_1} n_{j_2} - (n_1+\cdots+n_{i-1}+n_{i+1}+\cdots+n_\ell) + \sum_j n_j - 1}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_\ell}} = \\
&= \frac{q^{f_i(n_1,\dots,n_\ell)} \cdot q^{-2n_i+1+n_i-1} \cdot (1-q^{n_i})}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_\ell}} = \\
&= \frac{q^{f_i(n_1,\dots,n_\ell)-n_i}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_\ell}} - \frac{q^{f_i(n_1,\dots,n_\ell)}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_\ell}} = A_{i-1}^{n_1,\dots,n_\ell}(q) - A_i^{n_1,\dots,n_\ell}(q).
\end{aligned}
$$

Preostaje još pokazati da funkcije (6.9) zadovoljavaju posljednju, specijalnu rekurziju sustava (6.8):

$$A_\ell^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = q^{n_1+\cdots+n_\ell} A_0^{n_1,n_2,\dots,n_\ell}(q).$$

No, tu je dokaz trivijalan:

$$q^{n_1+\cdots+n_\ell} A_0^{n_1,\dots,n_\ell}(q) = \frac{q^{f_0(n_1,\dots,n_\ell)+n_1+\cdots+n_\ell}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_\ell}} = \frac{q^{f_\ell(n_1,\dots,n_\ell)}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_\ell}} = A_\ell^{n_1,\dots,n_\ell}(q).$$

Iz Propozicije slijedi da za $W_i = W(\Lambda_i)$, $i = 0,\dots,\ell$, formula karaktera glasi

$$\chi(W_i)(z_1,\dots,z_\ell;q) = \sum_{n_1,\dots,n_\ell\geq 0} \frac{q^{f_i(n_1,\dots,n_\ell)}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_\ell}} z_1^{n_1}\cdots z_\ell^{n_\ell}.$$

Na primjer, za $\ell = 2$ imamo slijedeće formule:

$$\begin{aligned}
\chi(W_0)(z_1,z_2;q) &= \sum_{n_1,n_2\geq 0} \frac{q^{n_1^2+n_2^2+n_1n_2}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}} z_1^{n_1} z_2^{n_2}\\
\chi(W_1)(z_1,z_2;q) &= \sum_{n_1,n_2\geq 0} \frac{q^{n_1^2+n_2^2+n_1n_2+n_1}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}} z_1^{n_1} z_2^{n_2}\\
\chi(W_2)(z_1,z_2;q) &= \sum_{n_1,n_2\geq 0} \frac{q^{n_1^2+n_2^2+n_1n_2+n_1+n_2}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

6.3 Formule karaktera za $(k, 2)$

Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}$, $\ell = 2$. Promatramo pripadni sustav rekurzivnih jednadžbi (5.5) u funkcijama varijable q:

$$A_{k_0,k_1,k_2}^{n_1,n_2}(q) = \sum_{I\in D(K)} (-1)^{|I|-1} A_I^{n_1,\dots,n_\ell}(q) + q^{n_1+n_2} A_{k_2,k_0,k_1}^{n_1-k_0,n_2-k_1}(q), \qquad (6.11)$$

gdje su k_0, k_1, k_2 svi izbori nenegativnih cijelih brojeva takvih da je $k_0 + k_1 + k_2 = k$, a n_1, n_2 cijeli brojevi za koje je $n_1 \geq k_0$, $n_2 \geq k_1$.

Gornji sustav možemo zapisati i ovako:

$$\begin{aligned}
A_{k_0,k_1,k_2}^{n_1,n_2}(q) &= (1-\delta_{k_0,0}) A_{k_0-1,k_1+1,k_2}^{n_1,n_2}(q) + (1-\delta_{k_1,0}) A_{k_0,k_1-1,k_2+1}^{n_1,n_2}(q) -\\
&- (1-\delta_{k_0,0})(1-\delta_{k_1,0}) A_{k_0-1,k_1,k_2+1}^{n_1,n_2}(q) + q^{n_1+n_2} A_{k_2,k_0,k_1}^{n_1-k_0,n_2-k_1}(q), \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

gdje je s δ označen Kroneckerov simbol.

Primjer 4 *Za $k = 2$ sustav (6.12) glasi:*

$$\begin{aligned}
A^{n_1,n_2}_{2,0,0}(q) &= A^{n_1,n_2}_{1,1,0}(q) + q^{n_1+n_2} A^{n_1-2,n_2}_{0,2,0}(q)\\
A^{n_1,n_2}_{0,1,0}(q) &= A^{n_1,n_2}_{0,2,0}(q) + A^{n_1,n_2}_{1,0,1}(q) - A^{n_1,n_2}_{0,1,1}(q) + q^{n_1+n_2} A^{n_1-1,n_2-1}_{0,1,1}(q)\\
A^{n_1,n_2}_{1,0,1}(q) &= A^{n_1,n_2}_{0,1,1}(q) + q^{n_1+n_2} A^{n_1-1,n_2}_{1,1,0}(q)\\
A^{n_1,n_2}_{0,2,0}(q) &= A^{n_1,n_2}_{0,1,1}(q) + q^{n_1+n_2} A^{n_1,n_2-2}_{0,0,2}(q)\\
A^{n_1,n_2}_{0,1,1}(q) &= A^{n_1,n_2}_{0,0,2}(q) + q^{n_1+n_2} A^{n_1,n_2-1}_{1,0,1}(q)\\
A^{n_1,n_2}_{0,0,2}(q) &= q^{n_1+n_2} A^{n_1,n_2}_{2,0,0}(q).
\end{aligned}$$

Teorem 12 *Rješenje sustava (6.12) dano je za svaki izbor nenegativnih cijelih brojeva k_0, k_1, k_2 takvih da je $k_0 + k_1 + k_2 = k$ s*

$$A^{n_1,n_2}_{k_0,k_1,k_2}(q) = \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot L^{N_1,N_2}_{k_0,k_1,k_2}(q)}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} \tag{6.13}$$

gdje je $N_1 = (N_{1,1}, \ldots, N_{1,k})$, $N_2 = (N_{2,1}, \ldots, N_{2,k})$, a

$$U(n_1) = \{N_1 | \sum_{i=1}^{k} N_{1,i} = n_1, N_{1,i} \geq N_{1,i+1}, i = 1 \ldots k, N_{1,k+1} := 0\},$$

$$U(n_2) = \{N_2 | \sum_{i=1}^{k} N_{2,i} = n_2, N_{2,i} \geq N_{2,i-1}, i = 1 \ldots k, N_{2,0} := 0\},$$

$$\begin{aligned}
Q(N_1, N_2) &= |N_1|^2 + |N_2|^2 + N_1 \cdot N_2,\\
L^{N_1,N_2}_{k_0,k_1,k_2}(q) &= \sum_{p\in P_{k_1+k_2}} q^{p\cdot N_1 + f_{k_2}(p)\cdot N_2} \cdot \Delta_{p,N_1},
\end{aligned}$$

$$P_{k_1+k_2} = \{(p_1, p_2, \ldots, p_k) \in \{0,1\}^k | \sum_{i=1}^{k} p_i = k_1 + k_2\},$$

$$\Delta_{p,N_1} = \prod_{i=1}^{k} (1 - \delta_{p_i - p_{i+1}, -1} \cdot q^{N_{1,i}-N_{1,i+1}}) \quad uz \quad p_{k+1} := 0.$$

Osim toga, $f_{k_2}(p)$ za $p \in P_{k_1+k_2}$ označava uređenu $k-$torku dobivenu iz p tako da sve osim prvih k_2 jedinica učinimo nulama.

Teorem dokazujemo u zasebnom poglavlju provjerom da je (6.13) rješenje najsloženije rekurzije sustava (6.12), tj. rekurzije kod koje za funkciju $A^{n_1,n_2}_{k_0,k_1,k_2}(q)$ s lijeve strane (6.12) vrijedi $k_0 \neq 0$ i $k_1 \neq 0$. U tom slučaju rekurzija glasi

$$\begin{aligned}
A^{n_1,n_2}_{k_0,k_1,k_2}(q) &= A^{n_1,n_2}_{k_0-1,k_1+1,k_2}(q) + A^{n_1,n_2}_{k_0,k_1-1,k_2+1}(q) -\\
&\quad - A^{n_1,n_2}_{k_0-1,k_1,k_2+1}(q) + q^{n_1+n_2} A^{n_1-k_0,n_2-k_1}_{k_2,k_0,k_1}(q).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Slučajeve u kojima za $A^{n_1,n_2}_{k_0,k_1,k_2}(q)$ vrijedi $k_0 = 0$ i/ili $k_1 = 0$ nećemo posebno komentirati, jer su oni specijalni slučajevi dokaza Teorema.

Konačno, iz Teorema slijedi eksplicitan izraz za formule karaktera svih potprostora Feigin-Stojanovskog za $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ – za $W = W(k_0\Lambda_0 + k_1\Lambda_1 + k_2\Lambda_2)$, uz $k_0 + k_1 + k_2 = k$, formula karaktera glasi (uz oznake kao u iskazu Teorema):

$$\chi(W)(z_1, z_2; q) = \sum_{n_1,n_2} \sum_{\substack{N_1 \in U(n_1)\\ N_2 \in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot L^{N_1,N_2}_{k_0,k_1,k_2}(q)}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} z_1^{n_1} z_2^{n_2}. \tag{6.15}$$

Pokažimo i na primjeru kako izgledaju formule karaktera za potprostore Feigin-Stojanovskog standardnih modula malih nivoa.

Primjer 5 *Za $k = 1$ je $N_1 = N_{1,1}$, $N_2 = N_{2,1}$, pa je $U(n_1) = \{n_1\}$, $U(n_2) = \{n_2\}$ i stoga pod drugom sumom u* (6.15) *imamo samo jedan sumand za kojeg je*

$$Q(N_1, N_2) = Q(n_1, n_2) = n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2$$
$$(q)_{N_{1,1}}(q)_{N_{2,1}} = (q)_{n_1}(q)_{n_2}.$$

"Linearni" član očito ovisi o izboru potprostora:

$$L^{n_1,n_2}_{1,0,0}(q) = q^0 = 1$$
$$L^{n_1,n_2}_{0,1,0}(q) = q^{n_1}$$
$$L^{n_1,n_2}_{0,0,1}(q) = q^{n_1+n_2}.$$

Odavdje slijedi da se formule karaktera za W_0, W_1 i W_2 dobivene iz Teorema podudaraju s (6.10) *dobivenima u prethodnom odlomku.*

Primjer 6 *Za $k = 2$ imamo sljedeće formule:*

$$A^{n_1,n_2}_{2,0,0}(q) = \sum_{\substack{N_{1,1}+N_{1,2}=n_1\\ N_{1,1}\geq N_{1,2}\geq 0\\ N_{2,1}+N_{2,2}=n_2\\ N_{2,2}\geq N_{2,1}\geq 0}} \frac{q^{Q(N_{1,1},N_{1,2},N_{2,1},N_{2,2})}}{(q)_{N_{1,1}-N_{1,2}}(q)_{N_{1,2}}(q)_{N_{2,2}-N_{2,1}}(q)_{N_{2,2}}}$$

$$A^{n_1,n_2}_{1,1,0}(q) = \sum_{\substack{N_{1,1}+N_{1,2}=n_1\\ N_{1,1}\geq N_{1,2}\geq 0\\ N_{2,1}+N_{2,2}=n_2\\ N_{2,2}\geq N_{2,1}\geq 0}} \frac{q^{Q(N_{1,1},N_{1,2},N_{2,1},N_{2,2})+N_{1,2}}}{(q)_{N_{1,1}-N_{1,2}}(q)_{N_{1,2}}(q)_{N_{2,2}-N_{2,1}}(q)_{N_{2,2}}}$$

$$A^{n_1,n_2}_{1,0,1}(q) = \sum_{\substack{N_{1,1}+N_{1,2}=n_1\\ N_{1,1}\geq N_{1,2}\geq 0\\ N_{2,1}+N_{2,2}=n_2\\ N_{2,2}\geq N_{2,1}\geq 0}} \frac{q^{Q(N_{1,1},N_{1,2},N_{2,1},N_{2,2})}(q^{N_{1,1}+N_{2,1}} + q^{N_{1,2}+N_{2,2}}(1-q^{N_{1,1}-N_{1,2}}))}{(q)_{N_{1,1}-N_{1,2}}(q)_{N_{1,2}}(q)_{N_{2,2}-N_{2,1}}(q)_{N_{2,2}}}$$

$$A^{n_1,n_2}_{0,2,0}(q) = \sum_{\substack{N_{1,1}+N_{1,2}=n_1\\ N_{1,1}\geq N_{1,2}\geq 0\\ N_{2,1}+N_{2,2}=n_2\\ N_{2,2}\geq N_{2,1}\geq 0}} \frac{q^{Q(N_{1,1},N_{1,2},N_{2,1},N_{2,2})+N_{1,1}+N_{1,2}}}{(q)_{N_{1,1}-N_{1,2}}(q)_{N_{1,2}}(q)_{N_{2,2}-N_{2,1}}(q)_{N_{2,2}}}$$

$$A^{n_1,n_2}_{0,1,1}(q) = \sum_{\substack{N_{1,1}+N_{1,2}=n_1\\ N_{1,1}\geq N_{1,2}\geq 0\\ N_{2,1}+N_{2,2}=n_2\\ N_{2,2}\geq N_{2,1}\geq 0}} \frac{q^{Q(N_{1,1},N_{1,2},N_{2,1},N_{2,2})+N_{1,1}+N_{1,2}+N_{2,1}}}{(q)_{N_{1,1}-N_{1,2}}(q)_{N_{1,2}}(q)_{N_{2,2}-N_{2,1}}(q)_{N_{2,2}}}$$

$$A^{n_1,n_2}_{0,0,2}(q) = \sum_{\substack{N_{1,1}+N_{1,2}=n_1\\ N_{1,1}\geq N_{1,2}\geq 0\\ N_{2,1}+N_{2,2}=n_2\\ N_{2,2}\geq N_{2,1}\geq 0}} \frac{q^{Q(N_{1,1},N_{1,2},N_{2,1},N_{2,2})+N_{1,1}+N_{1,2}+N_{2,1}+N_{2,2}}}{(q)_{N_{1,1}-N_{1,2}}(q)_{N_{1,2}}(q)_{N_{2,2}-N_{2,1}}(q)_{N_{2,2}}},$$

gdje je

$$Q(N_{1,1}, N_{1,2}, N_{2,1}, N_{2,2}) = N^2_{1,1} + N^2_{1,2} + N^2_{2,1} + N^2_{2,2} + N_{1,1}N_{2,1} + N_{1,2}N_{2,2}.$$

Napomena 4 *Općenito, nije teško vidjeti da će se "linearni" član $L^{N_1,N_2}_{k_0,k_1,k_2}(q)$ u specijalnim slučajevima (na općenitom nivou!) moći reducirati do jednostavnije forme:*

$$\begin{aligned} L^{n_1,n_2}_{k_0,k_1,0}(q) &= q^{N_{1,k_0+1}+\cdots+N_{1,k}} \\ L^{n_1,n_2}_{0,k_1,k_2}(q) &= q^{N_{1,1}+\cdots+N_{1,k}+N_{2,1}+\cdots+N_{2,k_2}}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

6.4 Neke specijalizacije formula karaktera

U ovom odlomku pokazujemo na primjeru za $k = 2$ da formule (6.15), nakon odgovarajuće specijalizacije, daju (6.3). Naravno, riječ je formulama karaktera za $W(k_0, k_1, 0)$, jer je samo za njih formula (6.3) i dana. Konkretno, specijalizacija glasi:

$$\begin{aligned} q &\to q^2 \\ z_1 &\to q^{-2}z \\ z_2 &\to q^{-1}z. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Najprije pokazujemo da se sumacije u obje formule odvijaju po istim uvjetima, i to tako da uvedemo sljedeće zamjene:

$$\begin{aligned} m_{1,1} &:= N_{1,1} - N_{1,2}, m_{1,2} := N_{1,2} \\ m_{2,1} &:= N_{2,2} - N_{2,1}, m_{2,2} := N_{2,1}. \end{aligned}$$

U terminima $m := {}^t(m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}, m_{2,2})$ sumacija se odvija po sljedećem uvjetu:

$$\begin{aligned} N_{1,1} + N_{1,2} = n_1, \quad N_{1,1} \geq N_{1,2} \geq 0 \Rightarrow m_{1,1} + 2m_{1,2} = n_1, \quad m_{1,1}, m_{1,2} \geq 0 \\ N_{2,1} + N_{2,2} = n_2, \quad N_{2,2} \geq N_{2,1} \geq 0 \Rightarrow m_{2,1} + 2m_{2,2} = n_2, \quad m_{2,1}, m_{2,2} \geq 0, \end{aligned}$$

što je točno uvjet sumacije u formuli (6.3). Također, očito je odavdje da nazivnik sumanada u (6.15) prilikom (6.17) prelazi u nazivnik sumanada u (6.3). Osim toga, imamo i sljedeću promjenu faktora $z_1^{n_1} z_2^{n_2}$:

$$z_1^{n_1} z_2^{n_2} \xrightarrow{(6.17)} q^{-2n_1 - n_2} z^n, \tag{6.18}$$

uz oznaku $n_1 + n_2 = n$.

Što se kvadratnog člana tiče, potrebno je vidjeti kako izgleda faktor $q^{Q(N_{1,1}, N_{1,2}, N_{2,1}, N_{2,2})}$ nakon primjene specijalizacije (6.17):

$$\begin{aligned} &q^{Q(N_{1,1}, N_{1,2}, N_{2,1}, N_{2,2})} \xrightarrow{(6.17)} \\ &q^{2((m_{1,1}+m_{1,2})^2 + m_{1,2}^2 + m_{2,2}^2 + (m_{2,1}+m_{2,2})^2 + (m_{1,1}+m_{1,2})m_{2,2} + m_{1,2}(m_{2,1}+m_{2,2}))} = \\ &= q^{2m_{1,1}^2 + 4m_{1,1}m_{1,2} + 4m_{1,2}^2 + 2m_{1,2}m_{2,1} + 2m_{2,1}^2 + 2m_{1,1}m_{2,2} + 4m_{1,2}m_{2,2} + 4m_{2,1}m_{2,2} + 4m_{2,2}^2}, \end{aligned}$$

dakle točno (6.7).

Za linearni član (6.16) moramo uračunati doprinos iz (6.18), dakle faktor $q^{-2n_1 - n_2}$:

$$\begin{aligned} \Lambda = 2\Lambda_0 : &\quad q^{-2n_1 - n_2} \xrightarrow{(6.17)} q^{-2m_{1,1} - 4m_{1,2} - m_{2,1} - 2m_{2,2}} \\ \Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 : &\quad q^{N_{1,2} - 2n_1 - n_2} \xrightarrow{(6.17)} q^{-2m_{1,1} - 2m_{1,2} - m_{2,1} - 2m_{2,2}} \\ \Lambda = 2\Lambda_1 : &\quad q^{N_{1,1} + N_{1,2} - 2n_1 - n_2} \xrightarrow{(6.17)} q^{-m_{2,1} - 2m_{2,2}}, \end{aligned}$$

tj. dobivamo upravo (6.4) – (6.6).

Slijedi da ukupno dobivamo upravo (6.3).

Poglavlje 7

Dokaz Teorema 12

U ovom poglavlju dokazujemo Teorem 12, i to u koracima, kroz nekoliko tehničkih lema. Napomenimo da je ovdje korištena tehnika donekle slična onoj kojom je G. Andrews pokazao da je (6.2) rješenje sustava (6.1).

7.1 Grupiranje sumanada

U prvoj lemi grupiramo na odgovarajući način sve sumande jednadžbe (6.14) osim posljednjeg kako bismo dobili prikladnu polaznu poziciju za primjenu transformacije prve grupe indeksa sumacije (što će biti tema sljedećeg odlomka).

Lema 13

$$A_{n_1,n_2}^{k_0,k_1,k_2}(q) - A_{n_1,n_2}^{k_0-1,k_1+1,k_2}(q) - A_{n_1,n_2}^{k_0,k_1-1,k_2+1}(q) + A_{n_1,n_2}^{k_0-1,k_1,k_2+1}(q) =$$

$$= \sum_{\substack{N_1 \in U(n_1) \\ N_2 \in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum_{p \in P_{k_1+k_2}} q^{p \cdot N_1 + f_{k_2}(p) \cdot N_2} \cdot \Delta^\star_{p,N_1} \cdot (1 - q^{N_{2,p(k_2+1)}})}{\prod_{\ell=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{\ell=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}, \qquad (7.1)$$

gdje $p(k_2+1)$ *za* $p \in P_{k_1+k_2}$ *označava koordinatu* $(k_2+1)-$*ve jedinice u* p, *a*

$$\Delta^\star_{p,N_1} = \prod_{i=1}^{k} (1 - \delta_{p_i - p_{i+1},-1} \cdot q^{N_{1,i}-N_{1,i+1}}) \quad uz \quad p_{k+1} := 1.$$

Napomena 5 *Gornja lema tvrdi da će lijeva strana* (7.1) *imati sumande kao i* $A^{n_1,n_2}_{k_0,k_1,k_2}(q)$, *osim što će svaki sumand imati i dodatni faktor* $1 - q^{N_{2,p(k_2+1)}}$ *te eventualno faktor* $1 - q^{N_{1,k}}$.

Dokaz: Najprije računamo

$$A^{k_0,k_1,k_2}_{n_1,n_2}(q) - A^{k_0,k_1-1,k_2+1}_{n_1,n_2}(q) =$$
$$= \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)}(L^{N_1,N_2}_{k_0,k_1,k_2}(q) - L^{N_1,N_2}_{k_0,k_1-1,k_2+1}(q))}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}$$
$$= \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum_{p\in P_{k_1+k_2}} q^{p\cdot N_1} \cdot (q^{f_{k_2}(p)\cdot N_2} - q^{f_{k_2+1}(p)\cdot N_2}) \cdot \Delta_{p,N_1}}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}$$
$$= \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum_{p\in P_{k_1+k_2}} q^{p\cdot N_1+f_{k_2}(p)\cdot N_2} \cdot \Delta_{p,N_1} \cdot (1 - q^{N_{2,p(k_2+1)}})}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}. \quad (7.2)$$

Analogno vrijedi

$$A^{k_0-1,k_1+1,k_2}_{n_1,n_2}(q) - A^{k_0-1,k_1,k_2+1}_{n_1,n_2}(q) =$$
$$= \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum_{p\in P_{k_1+k_2+1}} q^{p\cdot N_1+f_{k_2}(p)\cdot N_2} \cdot \Delta_{p,N_1} \cdot (1 - q^{N_{2,p(k_2+1)}})}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}, \quad (7.3)$$

Zanima nas u kojem će slučaju za $p^1 \in P_{k_1+k_2}$ i $p^2 \in P_{k_1+k_2+1}$ vrijediti

$$1 - q^{N_{2,p^1(k_2+1)}} = 1 - q^{N_{2,p^2(k_2+1)}}. \quad (7.4)$$

Za $p^1 \in P(k_1+k_2)$ najmanja vrijednost koju $p^1(k_2+1)$ može postići jest k_2+1, a najveća k_0+k_2+1 (jer nakon $(k_2+1)-$ve jedinice mora ostati još najmanje k_1-1 koordinatno mjesto za ostale jedinice). Za $p^2 \in P_{k_1+k_2+1}$ imamo istu najmanju vrijednost za $p^2(k_2+1)$, dok je najveća moguća vrijednost k_0+k_2. Stoga za $p^1 \in P_{k_1+k_2}$ takav da je $p^1(k_2+1) = k_0+k_2+1$ jednakost (7.4) ne vrijedi ni za koji $p^2 \in P_{k_1+k_2+1}$.

Računamo sada razliku jednakosti (7.2) i (7.3) tako da grupiramo sumande desne strane jednakosti (7.2) određene s $p^1 \in P_{k_1+k_2}$ takvima da je $p^1(k_2+1) \leq k_0+k_2$ sa sumandima desne strane jednakosti (7.3) određenima s $p^2 \in P_{k_1+k_2+1}$ takvima da je $p^2_i = p^1_i$ za sve $i = 1,\ldots,k$ osim za neki $j \in \{p(k_1+k_2)+1,\ldots,k\}$. Uvedimo za takve p^2 oznaku $p^2 \sim p^1$. Primijetimo da je u tom slučaju $p^1_j = 0$, a $p^2_j = 1$. Također, uočimo da se svim $p^2 \in P_{k_1+k_2+1}$ takvima da je $p^2 \sim p^1$ za neki $p^1 \in P_{k_1+k_2}$ iscrpljuje skup $P_{k_1+k_2+1}$.

Za pojedini $p^1 \in P_{k_1+k_2}$ takav da je $p^1(k_2+1) \leq k_0+k_2$ gore opisanim grupiranjem dobivamo sumand čiji "linearni" faktor glasi

$$q^{p^1\cdot N_1+f_{k_2}(p^1)\cdot N_2} \cdot \Delta_{p^1,N_1} \cdot (1 - q^{N_{2,p^1(k_2+1)}})-$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{\substack{p^2 \in P_{k_1+k_2+1} \\ p^2 \sim p^1}} q^{p^2 \cdot N_1 + f_{k_2}(p^2) \cdot N_2} \cdot \Delta_{p^2,N_1} \cdot \big(1 - q^{N_{2,p^2(k_2+1)}}\big) = \\
&= q^{p^1 \cdot N_1 + f_{k_2}(p^1) \cdot N_2} \cdot \Delta_{p^1,N_1} \cdot \big(1 - q^{N_{2,p^1(k_2+1)}}\big) - \\
&- \sum_{\substack{p^2 \in P_{k_1+k_2+1} \\ p^2 \sim p^1}} q^{p^2 \cdot N_1 + f_{k_2}(p^1) \cdot N_2} \cdot \Delta_{p^2,N_1} \cdot \big(1 - q^{N_{2,p^1(k_2+1)}}\big) = \\
&= q^{f_{k_2}(p^1) \cdot N_2} \big(1 - q^{N_{2,p^1(k_2+1)}}\big) \Big(q^{p^1 \cdot N_1} \cdot \Delta_{p^1,N_1} - \sum_{\substack{p^2 \in P_{k_1+k_2+1} \\ p^2 \sim p^1}} q^{p^2 \cdot N_1} \cdot \Delta_{p^2,N_1}\Big) = \\
&= q^{f_{k_2}(p^1) \cdot N_2} \big(1 - q^{N_{2,p^1(k_2+1)}}\big) \cdot q^{p^1 \cdot N_1} \cdot \Delta_{p^1,N_1} \cdot \Big(q^{N_{1,p^1(k_1+k_2)+1}} + \\
&+ q^{N_{1,p^1(k_1+k_2)+2}} \big(1 - q^{N_{1,p^1(k_1+k_2)+1} - N_{1,p^1(k_1+k_2)+2}}\big) + \\
&+ \cdots + q^{N_{1,k-1}} \big(1 - q^{N_{1,k-2} - N_{1,k-1}}\big) + q^{N_{1,k}} \big(1 - q^{N_{1,k-1} - N_{1,k}}\big) \Big) = \\
&= q^{p^1 \cdot N_1 + f_{k_2}(p^1) \cdot N_2} \cdot \Delta_{p^1,N_1} \cdot \big(1 - q^{N_{1,k}}\big) \cdot \big(1 - q^{N_{2,p^1(k_2+1)}}\big) = \\
&= q^{p^1 \cdot N_1 + f_{k_2}(p^1) \cdot N_2} \cdot \Delta^{\star}_{p^1,N_1} \cdot \big(1 - q^{N_{2,p^1(k_2+1)}}\big). \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

Jednakost (7.5) vrijedi za sve $p^1 \in P_{k_1+k_2}$ takve da je $p^1(k_2+1) \leq k_0 + k_2$. Za $p^1 \in P_{k_1+k_2}$ kod kojih je $p^1(k_2+1) = k_0+k_2+1$ mora biti $p^1(k_1+k_2) = k$ i stoga u odgovarajućem sumandu na desnoj strani jednakosti (7.2) nema dodatnog faktora $(1 - q^{N_{1,k}})$ u $\Delta^{\star}_{p^1,N_1}$. Zato za sve takve p^1 vrijedi $\Delta_{p^1,N_1} = \Delta^{\star}_{p^1,N_1}$. Konačno imamo

$$
\begin{aligned}
&A^{k_0,k_1,k_2}_{n_1,n_2}(q) - A^{k_0-1,k_1+1,k_2}_{n_1,n_2}(q) - A^{k_0,k_1-1,k_2+1}_{n_1,n_2}(q) + A^{k_0-1,k_1,k_2+1}_{n_1,n_2}(q) = \\
&= \sum_{\substack{N_1 \in U(n_1) \\ N_2 \in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum_{p \in P_{k_1+k_2}} q^{p \cdot N_1 + f_{k_2}(p) \cdot N_2} \cdot \Delta_{p,N_1} \cdot \big(1 - q^{N_{2,p(k_2+1)}}\big)}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i} - N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i} - N_{2,i-1}}} - \\
&- \sum_{\substack{N_1 \in U(n_1) \\ N_2 \in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum_{p \in P_{k_1+k_2+1}} q^{p \cdot N_1 + f_{k_2}(p) \cdot N_2} \cdot \Delta_{p,N_1} \cdot \big(1 - q^{N_{2,p(k_2+1)}}\big)}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i} - N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i} - N_{2,i-1}}} = \\
&= \sum_{\substack{N_1 \in U(n_1) \\ N_2 \in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum\limits_{p \in P_{k_1+k_2}, p(k_2+1) = k_0+k_2+1} q^{p \cdot N_1 + f_{k_2}(p) \cdot N_2} \cdot \Delta_{p,N_1} \cdot \big(1 - q^{N_{2,p(k_2+1)}}\big)}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i} - N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i} - N_{2,i-1}}} + \\
&+ \sum_{\substack{N_1 \in U(n_1) \\ N_2 \in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum\limits_{p \in P_{k_1+k_2}, p(k_2+1) \leq k_0+k_2} q^{p \cdot N_1 + f_{k_2}(p) \cdot N_2} \cdot \Delta_{p,N_1} \cdot \big(1 - q^{N_{2,p(k_2+1)}}\big)}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i} - N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i} - N_{2,i-1}}} -
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)}\cdot\sum_{p\in P_{k_1+k_2+1}} q^{p\cdot N_1+f_{k_2}(p)\cdot N_2}\cdot\Delta_{p,N_1}\cdot\left(1-q^{N_{2,p(k_2+1)}}\right)}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} =$$

$$= \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)}\cdot \sum\limits_{p\in P_{k_1+k_2},p(k_2+1)=k_0+k_2+1} q^{p\cdot N_1+f_{k_2}(p)\cdot N_2}\cdot\Delta^\star_{p,N_1}\cdot\left(1-q^{N_{2,p(k_2+1)}}\right)}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} +$$

$$+ \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)}\cdot \sum\limits_{p\in P_{k_1+k_2},p(k_2+1)\le k_0+k_2} q^{p\cdot N_1+f_{k_2}(p)\cdot N_2}\cdot\Delta^\star_{p,N_1}\cdot\left(1-q^{N_{2,p(k_2+1)}}\right)}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} =$$

$$= \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)}\cdot\sum_{p\in P_{k_1+k_2}} q^{p\cdot N_1+f_{k_2}(p)\cdot N_2}\cdot\Delta^\star_{p,N_1}\cdot\left(1-q^{N_{2,p(k_2+1)}}\right)}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}},$$

što je i trebalo dokazati.

7.2 Transformacije prve grupe indeksa

U ovom odlomku primjenjujemo Andrewsovu tehniku pomaka u indeksima sumacije, i to na indeksima $N_{1,1},\ldots,N_{1,k}$.

Lema 14

$$\sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)}\cdot\sum_{p\in P_{k_1+k_2}} q^{p\cdot N_1+f_{k_2}(p)\cdot N_2}\cdot\Delta^\star_{p,N_1}\cdot\left(1-q^{N_{2,p(k_2+1)}}\right)}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} =$$

$$= \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\N_2\in U(n_2)}} \left(\frac{F(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{p\in P_{k_0}} q^{p\cdot N_1+p\cdot N_2+f_{k_2}(1-p)\cdot N_2+\sum_{t=k_0+1}^k p_t}\cdot\Delta^\circ_{p,N_1}\cdot\left(1-q^{N_{2,(1-p)(k_2+1)}}\right)\right), \qquad (7.6)$$

gdje je $F(N_1,N_2)=q^{-n_1-n_2+\sum_{t=k_0+1}^k(2N_{1,t}+N_{2,t})}\cdot\left(1-q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}\right)$, *a* Δ°_{p,N_1} *se razlikuje od* Δ_{p,N_1} *u tome što umjesto uobičajenog faktora za* $i=k_0$ *ima faktor* $\left(1-\delta_{p_{k_0}-p_{k_0+1},-1}q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}-1}\right)$.

Dokaz: Za fiksne $N_1 \in U(n_1)$ i $N_2 \in U(n_2)$ svaki sumand u brojniku lijeve strane izraza (7.6) određen je izborom $p \in P_{k_1+k_2}$. Fiksirajmo neki $p \in P_{k_1+k_2}$ i promotrimo što se događa s pripadnim sumandom u brojniku lijeve strane izraza (7.6) prilikom sljedeće transformacije indeksa sumacije:

$$\begin{aligned} &N_{1,s} \to N_{1,s} - p_s, s = 1, \ldots, k_0 \\ &N_{1,t} \to N_{1,t} - p_t + 1, t = k_0 + 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Primijetimo da se nakon ove promjene sumacija provodi po

$$\sum_{s=1}^{k_0}(N_{1,s} - p_s) + \sum_{t=k_0+1}^{k}(N_{1,t} - p_t + 1) = \sum_{i=1}^{k} N_{1,i} - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} p_i}_{=k_1+k_2} - \underbrace{\sum_{t=k_0+1}^{k} 1}_{=k_1+k_2} = \sum_{i=1}^{k} N_{1,i},$$

što znači da i dalje vrijedi uvjet sumacije koji je prvotno vrijedio. Međutim, očito je da se narušio uvjet monotonosti koji je prije vrijedio: $N_{1,i} \geq N_{1,i+1}$, $i = 1 \ldots k$.

Želimo vidjeti što se pri transformaciji indeksa sumacije zbiva s kvadratnim članom $Q(N_1, N_2)$, što s linearnim članom, a što s faktorima iz $\Delta^{\star}_{p,N_1}$ (koje ćemo promatrati s odgovarajućim faktorom u nazivniku).

Najprije računamo promjenu kvadratnog člana $Q(N_1, N_2)$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k}(N_{1,i}^2 + N_{2,i}^2 + N_{1,i}N_{2,i}) \xrightarrow{(7.7)} \sum_{s=1}^{k_0}(N_{1,s} - p_s)^2 + \sum_{t=k_0+1}^{k}(N_{1,t} - p_t + 1)^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{k} N_{2,i}^2 + \sum_{s=1}^{k_0}(N_{1,s} - p_s)N_{2,s} + \sum_{t=k_0+1}^{k}(N_{1,t} - p_t + 1)N_{2,t} = \\ &= \sum_{i=1}^{k}(N_{1,i}^2 + N_{2,i}^2 + N_{1,i} \cdot N_{2,i}) - \sum_{s=1}^{k_0} 2p_s N_{1,s} + \sum_{t=k_0+1}^{k} 2(1 - p_t)N_{1,t} - \\ &- \sum_{s=1}^{k_0} p_s N_{2,s} + \sum_{t=k_0+1}^{k}(1 - p_t)N_{2,t} + \sum_{s=1}^{k_0} \underbrace{p_s^2}_{=p_s} + \sum_{t=k_0+1}^{k} \underbrace{(1 - p_t)^2}_{=1-p_t}. \end{aligned}$$

Vidimo da se sam kvadratni član nije promijenio prilikom transformacije (7.7), ali se pojavljuju doprinosi linearnom i slobodnom članu.

Sada računamo promjenu linearnog člana:

$$p \cdot N_1 + f_{k_2}(p) \cdot N_2 \xrightarrow{(7.7)} \sum_{s=1}^{k_0} p_s(N_{1,s} - p_s) + \sum_{t=k_0+1}^{k} p_t(N_{1,t} - p_t + 1) +$$

$$+ f_{k_2}(p) \cdot N_2 = \sum_{i=1}^{k} p_i N_{1,i} + f_{k_2}(p) \cdot N_2 - \sum_{s=1}^{k_0} \underbrace{p_s^2}_{=p_s} + \sum_{t=k_0+1}^{k} \underbrace{(p_t - p_t^2)}_{=0} =$$

$$= p \cdot N_1 + f_{k_2}(p) \cdot N_2 - \sum_{s=1}^{k_0} p_s.$$

Želimo dobivene podatke opet organizirati prema kvadratnom članu, linearnom te slobodnom članu. Kao što smo već istaknuli, kvadratni član ostaje isti kao prije promjene indeksa sumacije. U novonastalom linearnom članu ćemo zasebno promatrati sumande indeksa $N_{1,1}, \ldots, N_{1,k}$, a zasebno sumande indeksa $N_{2,1}, \ldots, N_{2,k}$.
Sumand prve grupe indeksa sada glasi:

$$- \sum_{s=1}^{k_0} 2p_s N_{1,s} + \sum_{t=k_0+1}^{k} 2(1 - p_t) N_{1,t} + p \cdot N_1 =$$
$$= - \sum_{s=1}^{k_0} p_s N_{1,s} + \sum_{t=k_0+1}^{k} (2 - p_t) N_{1,t} = -n_1 + 2 \sum_{t=k_0+1}^{k} N_{1,t} + (1 - p) \cdot N_1,$$

a sumand druge grupe indeksa

$$- \sum_{s=1}^{k_0} p_s N_{2,s} + \sum_{t=k_0+1}^{k} (1 - p_t) N_{2,t} + f_{k_2}(p) \cdot N_2 =$$
$$= \sum_{s=1}^{k_0} (1 - p_s) N_{2,s} + \sum_{t=k_0+1}^{k} (1 - p_t) N_{2,t} - \sum_{s=1}^{k_0} N_{2,s} + f_{k_2}(p) \cdot N_2 =$$
$$= - \sum_{s=1}^{k_0} N_{2,s} + (1 - p) \cdot N_2 + f_{k_2}(p) \cdot N_2 =$$
$$= -n_2 + \sum_{t=k_0+1}^{k} N_{2,t} + (1 - p) \cdot N_2 + f_{k_2}(p) \cdot N_2.$$

Slobodni član glasi

$$\sum_{s=1}^{k_0} p_s + \sum_{t=k_0+1}^{k} (1 - p_t) - \sum_{s=1}^{k_0} p_s = \sum_{t=k_0+1}^{k} (1 - p_t).$$

Sumarno, imamo

$$q^{Q(N_1,N_2)+p \cdot N_1 + f_{k_2}(p) \cdot N_2} \xrightarrow{(7.7)} q^{-n_1 - n_2 + \sum_{t=k_0+1}^{k} (2N_{1,t} + N_{2,t})}.$$

$$\cdot\, q^{Q(N_1,N_2)+(1-p)\cdot N_1+(1-p)\cdot N_2+f_{k_2}(p)\cdot N_2+\sum_{t=k_0+1}^{k}(1-p_t)}. \tag{7.8}$$

Prilikom transformacije (7.7) mijenjaju se i faktori iz $\Delta^{\star}_{p,N_1}$. Pojedini faktor $(1-\delta_{p_i-p_{i+1},-1}\cdot q^{N_{1,i}-N_{1,i+1}})$ promatrat ćemo s odgovarajućim faktorom u nazivniku fiksiranog sumanda lijeve strane izraza (7.6).

Razlikujemo sljedeće slučajeve za faktor $(1-\delta_{p_i-p_{i+1},-1}\cdot q^{N_{1,i}-N_{1,i+1}})$:

1) $i \in \{1,\ldots,k_0-1\}$

2) $i = k_0$

3) $i \in \{k_0+1,\ldots,k\}$.

Ukoliko je $i \in \{1,\ldots,k_0-1\}$ imamo nekoliko mogućnosti:

a) $p_s = 0, p_{s+1} = 1 \Rightarrow N_{1,s} \to N_{1,s}, N_{1,s+1} \to N_{1,s+1}-1$, pa imamo:

$$\frac{1-q^{N_{1,s}-N_{1,s+1}}}{(q)_{N_{1,s}-N_{1,s+1}}} \xrightarrow{(7.7)} \frac{1-q^{N_{1,s}-N_{1,s+1}+1}}{(q)_{N_{1,s}-N_{1,s+1}+1}} = \begin{cases} 0, N_{1,s} = N_{1,s+1}-1 \\ \frac{1}{(q)_{N_{1,s}-N_{1,s+1}}}, N_{1,s} \geq N_{1,s+1} \end{cases}.$$

Uvjet sumacije (što se tiče veze indeksa $N_{1,s}$ i $N_{1,s+1}$) je prije transformacije (7.7) glasio $N_{1,s} \geq N_{1,s+1}$, a nakon (7.7) $N_{1,s} \geq N_{1,s+1}-1$. No, kako se u slučaju $N_{1,s} = N_{1,s+1}-1$ dobiva da je gornji faktor jednak nuli, možemo smatrati da vrijedi zapravo $N_{1,s} \geq N_{1,s+1}$, što znači da smo na ovaj način "popravili" transformacijom (7.7) nastali uvjet sumacije tako da opet vrijedi prvotni uvjet. Pritom brojnik faktora kojeg smo promatrali postaje trivijalan.

b) $p_s = 1, p_{s+1} = 1 \Rightarrow N_{1,s} \to N_{1,s}-1, N_{1,s+1} \to N_{1,s+1}-1$:

$$\frac{1}{(q)_{N_{1,s}-N_{1,s+1}}} \xrightarrow{(7.7)} \frac{1}{(q)_{N_{1,s}-N_{1,s+1}}},$$

i ništa se nije promijenilo, uključivši i uvjet sumacije koji je ostao isti (jer i $N_{1,s}$ i $N_{1,s+1}$ imaju pomak za jedan).

c) $p_s = 0, p_{s+1} = 0 \Rightarrow N_{1,s} \to N_{1,s}, N_{1,s+1} \to N_{1,s+1}$: isto kao b)

d) $p_s = 1, p_{s+1} = 0 \Rightarrow N_{1,s} \to N_{1,s}-1, N_{1,s+1} \to N_{1,s+1}$:

$$\frac{1}{(q)_{N_{1,s}-N_{1,s+1}}} \xrightarrow{(7.7)} \frac{1}{(q)_{N_{1,s}-N_{1,s+1}-1}} = \frac{1-q^{N_{1,s}-N_{1,s+1}}}{(q)_{N_{1,s}-N_{1,s+1}}},$$

i to uz promijenjeni uvjet sumacije $N_{1,s} \geq N_{1,s+1}+1$. No, za $N_{1,s} = N_{1,s+1}$ gornji izraz je ionako jednak nuli, pa se opet radi o sumaciji po uvjetu $N_{1,s} \geq N_{1,s+1}$. U ovom slučaju pojavljuje se odgovarajući faktor u brojniku.

Za $i = k_0$ također postoje četiri mogućnosti:

a) $p_{k_0} = 0, p_{k_0+1} = 1 \Rightarrow N_{1,k_0} \to N_{1,k_0}, N_{1,k_0+1} \to N_{1,k_0+1}$,
pa očito nema promjene niti odgovarajućeg faktora, niti uvjeta sumacije $N_{1,k_0} \geq N_{1,k_0+1}$.

b) $p_{k_0} = 1, p_{k_0+1} = 1 \Rightarrow N_{1,k_0} \to N_{1,k_0} - 1, N_{1,k_0+1} \to N_{1,k_0+1}$:

$$\frac{1}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}} \xrightarrow{(7.7)} \frac{1}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}-1}} = \frac{1-q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}},$$

slično kao u d)–dijelu za $i \in \{1, \ldots, k_0 - 1\}$. Opet, uvjet sumacije glasi $N_{1,k_0} - 1 \geq N_{1,k_0+1}$, no za $N_{1,k_0} = N_{1,k_0+1}$ gornji faktor je ionako jednak nuli, pa možemo sumirati po prvotnom uvjetu $N_{1,k_0} \geq N_{1,k_0+1}$.

c) $p_{k_0} = 0, p_{k_0+1} = 0 \Rightarrow N_{1,k_0} \to N_{1,k_0}, N_{1,k_0+1} \to N_{1,k_0+1} + 1$:

$$\frac{1}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}} \xrightarrow{(7.7)} \frac{1}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}-1}} = \frac{1-q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}},$$

gdje uvjet sumacije glasi $N_{1,k_0} \geq N_{1,k_0+1} + 1$. Uz istu argumentaciju kao pod b) zaključujemo da uvjet glasi $N_{1,k_0} \geq N_{1,k_0+1}$, jer je za $N_{1,k_0} = N_{1,k_0+1}$ dobiveni izraz jednak nuli.

d) $p_{k_0} = 1, p_{k_0+1} = 0 \Rightarrow N_{1,k_0} \to N_{1,k_0} - 1, N_{1,k_0+1} \to N_{1,k_0+1} + 1$:

$$\frac{1}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}} \xrightarrow{(7.7)}$$
$$\xrightarrow{(7.7)} \frac{1}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}-2}} = \frac{(1-q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}})(1-q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}-1})}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}},$$

uz sumaciju po uvjetu $N_{1,k_0} - 1 \geq N_{1,k_0+1} + 1$. No, za $N_{1,k_0} = N_{1,k_0+1}$ i $N_{1,k_0} = N_{1,k_0+1} + 1$ posljednji izraz je jednak nuli, pa imamo zapravo sumaciju po $N_{1,k_0} \geq N_{1,k_0+1}$.

Konačno, za $i \in \{k_0 + 1, \ldots, k\}$ postupamo analogno kao kod faktora prve grupe, osim što je potrebno zasebno komentirati situaciju faktora kojeg se dobiva za $i = k$, tj. faktora $(1 - q^{N_{1,k}})$. S obzirom da je $p_{k+1} := 1$ imamo samo dvije mogućnosti:

a) $p_k = 0 \Rightarrow N_{1,k} \to N_{1,k} + 1$:

$$\frac{1-q^{N_{1,k}}}{(q)_{N_{1,k}}} \xrightarrow{(7.7)} \frac{1-q^{N_{1,k}+1}}{(q)_{N_{1,k}+1}} = \begin{cases} 0, N_{1,k} = -1 \\ \frac{1}{(q)_{N_{1,k}}}, N_{1,k} \geq 0 \end{cases},$$

pa imamo zapravo uvjet sumacije $N_{1,k} \geq 0$, što je bio i početni uvjet, a pritom faktor $(1 - q^{N_{1,k}})$ koji je prije promjene indeksa sumacije postojao sad je trivijalan.

b) $p_k = 1 \Rightarrow N_{1,k} \to N_{1,k}$, pa nema promjene niti odgovarajućeg faktora, niti uvjeta sumacije.

Sada možemo sumirati provedenu analizu promjene faktora $(1 - \delta_{p_i - p_{i+1}, -1} \cdot q^{N_{1,i} - N_{1,i+1}})$ iz $\Delta^{\star}_{p,N_1}$ prilikom transformacije (7.7):

1) Svi netrivijalni faktori, osim onog za $i = k_0$, postaju trivijalni.

2) Pojavljuju se novi faktori $(1-q^{N_{1,i}-N_{1,i+1}-\delta_{i,k_0}})$, ako i samo ako je $p_i = 1$, $p_{i+1} = 0$, $i = 1 \dots k$, uz $p_{k+1} := 0$.

3) Osim faktora pod 2) pojavljuje se i faktor $(1 - q^{N_{1,k_0} - N_{1,k_0+1}}), \forall p$.

4) Gore opisane promjene faktora "popravljaju" uvjet sumacije

$$N_{1,1} \geq N_{1,2} \geq \cdots \geq N_{1,k} \geq 0.$$

Gore opisano može se sažeti u

$$\frac{\Delta^{\star}_{p,N_1}}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} \xrightarrow{(7.7)}$$
$$\xrightarrow{(7.7)} (1 - q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}) \cdot \frac{\Delta^{\circ}_{1-p,N_1}}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}, \qquad (7.9)$$

uz oznaku Δ°_{1-p,N_1} kao u iskazu Leme.
Osim toga, vidimo da se za svaki $p \in P_{k_1+k_2}$ u (7.8) i (7.9) pojavljujuje novi faktor koji ne ovisi o p, i to je upravo faktor koji je u iskazu Leme označen s $F(N_1, N_2)$.
Na kraju, uzevši u obzir (7.8) i (7.9) te činjenicu da (7.7) ne narušava uvjet sumacije $N_1 \in U(n_1)$, dobivamo:

$$\sum_{\substack{N_1 \in U(n_1)\\ N_2 \in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum_{p \in P_{k_1+k_2}} q^{p \cdot N_1 + f_{k_2}(p) \cdot N_2} \cdot \Delta^{\star}_{p,N_1} \cdot (1 - q^{N_{2,p(k_2+1)}})}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} =$$
$$= \sum_{\substack{N_1 \in U(n_1)\\ N_2 \in U(n_2)}} \left(\frac{F(N_1, N_2) \cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} \cdot \right.$$

$$\cdot \sum_{p\in P_{k_1+k_2}} q^{(1-p)\cdot N_1+(1-p)\cdot N_2+f_{k_2}(p)\cdot N_2+\sum_{t=k_0+1}^{k}(1-p_t)}\cdot \Delta^{\circ}_{1-p,N_1}\cdot (1-q^{N_{2,p(k_2+1)}})\Bigg) =$$

$$= \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \Bigg(\frac{F(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot \prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\cdot$$

$$\cdot \sum_{p\in P_{k_0}} q^{p\cdot N_1+p\cdot N_2+f_{k_2}(1-p)\cdot N_2+\sum_{t=k_0+1}^{k}p_t}\cdot \Delta^{\circ}_{p,N_1}\cdot (1-q^{N_{2,(1-p)(k_2+1)}})\Bigg),$$

što je i trebalo dokazati.

7.3 Pregrupiranje faktora

Ovdje pripremamo dobiveni međurezultat za primjenu nove transformacije indeksa (što će biti napravljeno u idućem odlomku).

Lema 15

$$\sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \Bigg(\frac{F(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot \prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\cdot$$

$$\cdot \sum_{p\in P_{k_0}} q^{p\cdot N_1+p\cdot N_2+f_{k_2}(1-p)\cdot N_2+\sum_{t=k_0+1}^{k}p_t}\cdot \Delta^{\circ}_{p,N_1}\cdot (1-q^{N_{2,(1-p)(k_2+1)}})\Bigg) =$$

$$= \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \Bigg(\frac{F(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot \prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\cdot$$

$$\cdot \sum_{p\in P_{k_0+k_2}} q^{g_{k_0}(p)\cdot N_1+p\cdot N_2+\sum_{t=k_0+1}^{k}p_t-\delta_{p(k_2+1)-1>k_0}\sum_{r=k_0+1}^{p(k_2+1)-1}p_r}\cdot \Delta^{\star}_{p,N_2}\Bigg), \quad (7.10)$$

gdje $g_{k_0}(p)$ označava uređenu $k-$torku dobivenu iz p tako da sve osim zadnjih k_0 jedinica učinimo nulama, a $\Delta^{\star}_{p,N_2}=\prod_{i=1}^{k}(1-\delta_{p_i-p_{i-1},-1}\cdot q^{N_{2,i}-N_{2,i-1}})$, uz $p_0:=0$.

Dokaz: Za fiksne $N_1\in U(n_1)$, $N_2\in U(n_2)$ te neki $\overline{p}\in P_{k_0}$ promatramo skup svih $p\in P_{k_0}$ kod kojih za $a=(1-\overline{p})(k_2+1)$ vrijedi $p_v=\overline{p}_v$, $v=a,\ldots,k$. U tom skupu uočimo $k-$torku najmanju po leksikografskom uređaju i označimo je s $\tilde{p}$. Za svaki p iz tako konstruiranog skupa pišemo $p\sim\tilde{p}$. Ova konstrukcija omogućuje da P_{k_0} razložimo na disjunktnu uniju u kojoj svaka klasa sadrži

$k-$torke s istom koordinatom $(k_2+1)-$ve nule. Računamo za neki minimalni $\tilde{p}$ sumu svih pripadnih "linearnih" članova sumanada lijeve strane (7.10):

$$\sum_{\substack{p\in P_{k_0}\\ p\sim\tilde{p}}} q^{p\cdot N_1+p\cdot N_2+f_{k_2}(1-p)\cdot N_2+\sum_{t=k_0+1}^{k}p_t}\cdot\Delta^{\circ}_{p,N_1}\cdot(1-q^{N_{2,a}})=$$

$$=\underbrace{q^{\sum_{v=a}^{k}p_v(N_{1,v}+N_{2,v})}\cdot\Delta^{\circ,(a,k)}_{p,N_1}\cdot q^{\sum_{u=1}^{a-1}N_{2,u}}\cdot(1-q^{N_{2,a}})}_{\text{jednak za sve }\ p\sim\tilde{p}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\substack{p\in P_{k_0}\\ p\sim\tilde{p}}} q^{\sum_{u=1}^{a-1}p_uN_{1,u}+\sum_{t=k_0+1}^{k}p_t}\cdot\Delta^{\circ,(1,a-1)}_{p,N_1},$$

uz oznaku $\Delta^{\circ,(a,b)}_{p,N_1}=\prod_{i=a}^{b}(1-\delta_{p_i-p_{i+1},-1}\cdot q^{N_{1,i}-N_{1,i+1}-\delta_{i,k_0}}), p_{k+1}=0$. Promatramo sada sumu

$$\sum_{\substack{p\in P_{k_0}\\ p\sim\tilde{p}}} q^{\sum_{u=1}^{a-1}p_uN_{1,u}+\sum_{t=k_0+1}^{k}p_t}\cdot\Delta^{\circ,(1,a-1)}_{p,N_1}, \tag{7.11}$$

koja je očito parametrizirana uređenim $k-$torkama s k_2 nula i $a-1-k_2$ jedinica u prvih $a-1$ koordinata. Već smo rekli da je najmanji od svih $p\sim\tilde{p}$ upravo $\tilde{p}$ koji glasi:

$$\tilde{p}=(\underbrace{0,\ldots,0}_{k_2},\underbrace{1,\ldots,1}_{a-1-k_2},0,\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{isti za sve }p\sim\tilde{p}}).$$

Uz pretpostavku da postoji $p'\sim\tilde{p}$ takav da je $p'\neq\tilde{p}$, fiksiramo ga i promatramo kada će se linearni član

$$q^{\sum_{u=1}^{a-1}p'_uN_{1,u}+\sum_{t=k_0+1}^{k}p'_t}$$

pripadnog sumanda iz (7.11) pojaviti prilikom množenja unutar nekih drugih sumanada izraza (7.11). U tu svrhu označimo s $b(p)$ broj $(1,0)-$segmenta unutar prvih $a-1$ koordinata $k-$torke p. Očito je $b(\tilde{p})=0$, dok je za sve ostale (pa tako i za naš fiksni p') taj broj bar jedan. Nije teško vidjeti da će se linearni član fiksiranog sumanda pojaviti prilikom množenja faktora unutar sumanada svih onih $k-$torki $p''\sim\tilde{p}$ koje se od p' razlikuju samo po tome što je neki broj (jedan ili više) $(1,0)-$segmenata zamijenjen $(0,1)-$segmentima. Naime, za svaki takav p'' pojavljivanje $(0,1)-$segmenta znači i postojanje pripadnog faktora u $\Delta^{\circ,(1,a-1)}_{p'',N_1}$. No, tada se množenjem linearnog člana p'' s takvim faktorom proizvodi (ali s negativnim predznakom!) linearni član nekog p koji se od p'' razlikuje samo u promatranom $(0,1)-$segmentu. Dakle, ako za svaki p'' izvršimo množenja svim faktorima iz pripadnog $\Delta^{\circ,(1,a-1)}_{p'',N_1}$ koji su dani pozicijama $(0,1)-$segmenata u p'', pojavit će se upravo linearni član fiksnog p', i to s predznakom određenim brojem $(0,1)-$segmenata u p'' po kojima se p'' razlikuje od p'. Ipak, treba obratiti pažnju na to je li slobodni dio $\sum_{t=k_0+1}^{k} p''$ jednak $\sum_{t=k_0+1}^{k} p'$ za sve gore opisane p''. No, s obzirom na to da se p'' i p' razlikuju u tome što se na mjestu nekog (nekih) $(1,0)-$segmenata u p' nalazi (nalaze) $(0,1)-$segmenti u p'', očito neće biti problema, osim eventualno u jednom slučaju: kada u p'' postoji $(0,1)-$segment i u p' $(1,0)-$segment na koordinatama k_0 i k_0+1, redom. Tada će biti $\sum_{t=k_0+1}^{k} p'' = \sum_{t=k_0+1}^{k} p' + 1$. Ali, faktor u $\Delta^{\circ,(1,a-1)}_{p'',N_1}$ koji odgovara tom $(0,1)-$segmentu je $(1-q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}-1})$, što pokazuje da će jedinična razlika između slobodnih koeficijenata linearnih članova p' i p'' prilikom množenja linearnog člana p'' ovim faktorom nestati.

Kako je broj mogućih izbora za p'' s istim $b(p'')$ jednak $\binom{b(p')}{b(p'')}$, a $b(p'')$ može poprimiti vrijednosti od 1 do $b(p')$, to ukupni faktor s kojim će se linearni član koji pripada p' pojaviti glasi

$$1+(-1)^1\cdot\binom{b(p')}{1}+(-1)^2\cdot\binom{b(p')}{2}+\cdots+(-1)^{b(p')}\binom{b(p')}{b(p')}=0,$$

što znači da linearni član p' nakon svih obavljenih množenja u (7.11) iščezava. Gornje razmatranje vrijedi za sve $p'\sim\tilde{p}$, $p'\neq\tilde{p}$. Stoga će nakon sređivanja sume (7.11) preostati jedino linearni član koji pripada $\tilde{p}$. Imamo, dakle:

$$\sum_{\substack{p\in P_{k_0}\\ p\sim\tilde{p}}} q^{\sum_{u=1}^{a-1} p_u N_{1,u}+\sum_{t=k_0+1}^{k} p_t}\cdot\Delta^{\circ,(1,a-1)}_{p,N_1} = q^{\sum_{u=1}^{a-1}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{t=k_0+1}^{k}\tilde{p}_t}. \tag{7.12}$$

Sada za lijevu stranu iskaza Leme vrijedi

$$\sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}}\Bigg(\frac{F(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{p\in P_{k_0}} q^{p\cdot N_1+p\cdot N_2+f_{k_2}(1-p)\cdot N_2+\sum_{t=k_0+1}^{k} p_t}\cdot\Delta^{\circ}_{p,N_1}\cdot\left(1-q^{N_{2,(1-p)(k_2+1)}}\right)\Bigg)=$$

$$=\sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}}\Bigg(\frac{F(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\tilde{p}\in P_{k_0}} q^{\sum_{u=1}^{a-1}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{v=a}^{k}\tilde{p}_v(N_{1,v}+N_{2,v})+\sum_{t=k_0+1}^{k}\tilde{p}_t}\Delta^{\circ,(a,k)}_{\tilde{p},N_1}q^{\sum_{u=1}^{a-1}N_{2,u}}\left(1-q^{N_{2,a}}\right)\Bigg)=$$

$$= \sum_{\substack{N_1 \in U(n_1) \\ N_2 \in U(n_2)}} \left(\frac{F(N_1, N_2) \cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\tilde{p} \in P_{k_0}} q^{\tilde{p} \cdot N_1 + \sum_{t=k_0+1}^{k} \tilde{p}_t} \cdot \Delta^{\circ,(a,k)}_{\tilde{p},N_1} \cdot q^{\sum_{v=a}^{k} \tilde{p}_v N_{2,v}} \cdot q^{\sum_{u=1}^{a-1} N_{2,u}} (1 - q^{N_{2,a}}) \right) \tag{7.13}$$

Za fiksni $\tilde{p}' \in P_{k_0}$ sada želimo vidjeti koliko se puta (i s kojim predznacima) linearni član $q^{\tilde{p} \cdot N_1 + \sum_{t=k_0+1}^{k} \tilde{p}_t}$ pojavljuje iz linearnih članova nekih drugih $\tilde{p}''$ množenjem odgovarajućim faktorima iz $\Delta^{\circ,(a,k)}_{\tilde{p}'',N_1}$. Postupamo slično kao u dokazu tvrdnje (7.12): linearni član koji pripada $\tilde{p}'$ možemo dobiti iz linearnih članova onih $\tilde{p}''$ koji se od $\tilde{p}'$ razlikuju u tome što je neki broj $(1,0)-$segmenata iz $\tilde{p}'$ zamijenjen $(0,1)-$segmentima. Međutim, ovdje imamo dvije bitno različite mogućnosti za zamjene $(1,0)-$segmenata:

1) Ako se $\tilde{p}''$ dobiva iz $\tilde{p}'$ zamjenom $(1,0)$-segmenata koji ne uključuju prvi $(1,0)-$segment u $\tilde{p}'$ ($\tilde{p}'_{a-1} = 1$, $\tilde{p}'_a = 0$), onda za $\tilde{p}''$ za vrijedi $(1-\tilde{p}'')(k_2+1) = a$, što je jednako poziciji $(k_2+1)-$ve jedinice u $1-\tilde{p}'$. Ako označimo s $b(\tilde{p}')$ broj $(1,0)-$segmenata u $\tilde{p}'$, onda ćemo iz linearnih članova ovdje opisanih $\tilde{p}''$ nakon množenja odgovarajućim faktorom iz $\Delta^{\circ,(a,k)}_{\tilde{p}'',N_1}$ dobiti linearni član za $\tilde{p}'$, ali uz odgovarajući doprinos faktora iz N_2. Stoga za linearni član određen s $\tilde{p}'$ konačno imamo sljedeći doprinos:

$$q^{\tilde{p}' \cdot N_1 + \sum_{t=k_0+1}^{k} \tilde{p}'_t} \cdot$$

$$\cdot q^{\sum_{u=1}^{a-1} N_{2,u}} \cdot (1 - q^{N_{2,a}}) \cdot \left(q^{\sum_{v=a}^{k} \tilde{p}'_v N_{2,v}} + \sum_{m=1}^{b(\tilde{p}')} (-1)^m q^{\sum_{v=a}^{k} \tilde{p}''_v N_{2,v}}\right) =$$

$$= q^{\tilde{p}' \cdot N_1 + \sum_{t=k_0+1}^{k} \tilde{p}'_t} \cdot q^{\sum_{u=1}^{a-1} N_{2,u}} \cdot (1 - q^{N_{2,a}}) \cdot q^{\sum_{v=a}^{k} \tilde{p}'_v N_{2,v}} \cdot \Delta^{(a+1,k)}_{\tilde{p}',N_2},$$

uz oznaku $\Delta^{(a+1,k)}_{\tilde{p}',N_2} = \prod_{v=a+1}^{k} (1 - \delta_{\tilde{p}'_v - \tilde{p}'_{v-1},-1} \cdot q^{N_{2,v}-N_{2,v-1}})$. Ovdje činjenicu da je

$$q^{\sum_{v=a}^{k} \tilde{p}'_v N_{2,v}} + \sum_{m=1}^{b(\tilde{p}')} (-1)^m q^{\sum_{v=a}^{k} \tilde{p}''_v N_{2,v}} = q^{\sum_{v=a}^{k} \tilde{p}'_v N_{2,v}} \cdot \Delta^{(a+1,k)}_{\tilde{p}',N_2}$$

nije teško vidjeti korištenjem već opisane argumentacije.

2) Ako zamijenjeni $(1,0)-$segmenti uključuju i prvi $(1,0)-$segment, onda se dobiva $\tilde{p}''$ takav da je pozicija $(k_2+1)-$ve jedinice u $(1-\tilde{p}'')$ za jedan manja nego kod $1 - \tilde{p}'$. Ova se mogućnost očito može dogoditi za sve izbore $\tilde{p}'$, osim kod onih $\tilde{p}'$ kojima je pozicija $(k_2+1)-$ve jedinice u

$1-\tilde{p}'$ već minimalna, a to je kad je $a = k_2+1$. Ovdje postupamo slično kao pod 1), uz napomenu da postoji bijektivna korespondencija između $\tilde{p}''$ opisanih ovdje i onih iz 1), dana time što je kod $\tilde{p}''$ iz ovog slučaja izvršeno jednako zamjena $(1,0)-$segmenata $(0,1)-$segmentima kao i pod 1), te uvijek i još jedna zamjena (ona kod prvog $(1,0)-$segmenta u $\tilde{p}'$). U tom smislu doprinos linearnom članu za $\tilde{p}'$ (zajedno s faktorima iz N_2) je analogan onom pod 1), osim što ima negativan predznak i dodatni faktor $q^{N_{2,a}}$ pa glasi:

$$q^{\tilde{p}'\cdot N_1+\sum_{t=k_0+1}^{k}\tilde{p}'_t}\cdot q^{N_{2,a}}\cdot q^{\sum_{u=1}^{a-2}N_{2,u}}\cdot(1-q^{N_{2,a-1}})\cdot q^{\sum_{v=a}^{k}\tilde{p}'_vN_{2,v}}\cdot\Delta_{\tilde{p}',N_2}^{(a+1,k)}.$$

Sada želimo sumirati oba doprinosa linearnom članu koji pripada $\tilde{p}'$, s tim da kod $\tilde{p}'$ kod kojih je $a = k_2+1$ nemamo doprinos iz druge mogućnosti. Dakle, za $\tilde{p}'$ za koje je $a > k_2+1$ imamo

$$\begin{aligned}
&q^{\tilde{p}'\cdot N_1+\sum_{t=k_0+1}^{k}\tilde{p}'_t}\cdot q^{\sum_{u=1}^{a-1}N_{2,u}}\cdot(1-q^{N_{2,a}})\cdot q^{\sum_{v=a}^{k}\tilde{p}'_vN_{2,v}}\cdot\Delta_{\tilde{p}',N_2}^{(a+1,k)}-\\
&-q^{\tilde{p}'\cdot N_1+\sum_{t=k_0+1}^{k}\tilde{p}'_t}\cdot q^{N_{2,a}}\cdot q^{\sum_{u=1}^{a-2}N_{2,u}}\cdot(1-q^{N_{2,a-1}})\cdot q^{\sum_{v=a}^{k}\tilde{p}'_vN_{2,v}}\cdot\Delta_{\tilde{p}',N_2}^{(a+1,k)}=\\
&=q^{\tilde{p}'\cdot N_1+\sum_{t=k_0+1}^{k}\tilde{p}'_t}\cdot q^{\sum_{v=a}^{k}\tilde{p}'_vN_{2,v}}\cdot\Delta_{\tilde{p}',N_2}^{(a+1,k)}\cdot\\
&\cdot q^{\sum_{u=1}^{a-2}N_{2,u}}\cdot(q^{N_{2,a-1}}-q^{N_{2,a-1}+N_{2,a}}-q^{N_{2,a}}+q^{N_{2,a-1}+N_{2,a}})=\\
&=q^{\tilde{p}'\cdot N_1+\sum_{t=k_0+1}^{k}\tilde{p}'_t}\cdot q^{\sum_{v=a}^{k}\tilde{p}'_vN_{2,v}}\cdot\Delta_{\tilde{p}',N_2}^{(a+1,k)}\cdot q^{\sum_{u=1}^{a-2}N_{2,u}}\cdot(q^{N_{2,a-1}}-q^{N_{2,a}})=\\
&=q^{\tilde{p}'\cdot N_1+\sum_{t=k_0+1}^{k}\tilde{p}'_t}\cdot q^{\sum_{v=a}^{k}\tilde{p}'_vN_{2,v}}\cdot\Delta_{\tilde{p}',N_2}^{(a+1,k)}\cdot q^{\sum_{u=1}^{a-1}N_{2,u}}\cdot(1-q^{N_{2,a}-N_{2,a-1}})=\\
&=q^{\tilde{p}'\cdot N_1+\sum_{u=1}^{a-1}N_{2,u}+\sum_{v=a}^{k}\tilde{p}'_vN_{2,v}+\sum_{t=k_0+1}^{k}\tilde{p}'_t}\cdot\Delta_{\tilde{p}',N_2},
\end{aligned}\tag{7.14}$$

gdje je $\Delta_{\tilde{p}',N_2} = \prod_{i=1}^{k}(1-\delta_{\tilde{p}'_i-\tilde{p}'_{i-1},-1}\cdot q^{N_{2,i}-N_{2,i-1}})$, $\tilde{p}'_0 := 0$. Primijetimo da se na desnoj strani (7.14) pojavljuje k_0 sumanada iz N_1-grupe indeksa te $a-1+(k_0-(a-1-k_2)) = k_0+k_2$ sumanada iz N_2-grupe indeksa, pa možemo reći da je desna strana (7.14) indeksirana onim $p \in P_{k_0+k_2}$ koji na prvih bar k_2+1 (zbog $a-1 > k_2$) koordinata imaju jedinice. Kako je ovdje veza između nekog $\tilde{p}'$ i odgovarajućeg $p \in P_{k_0+k_2}$ jednoznačna i dana s

$$\tilde{p}' = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k_2},\underbrace{1,\ldots,1}_{a-1-k_2},0,\ldots) \longleftrightarrow p = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k_2},\underbrace{1,\ldots,1}_{a-1-k_2},0,\ldots),$$

faktor $q^{\tilde{p}'\cdot N_1}$ možemo shvatiti kao $q^{g_{k_0}(p)\cdot N_1}$, uz oznaku $g_{k_0}(p)$ kao u iskazu Leme. Pripadni faktor N_2-grupe indeksa postaje $q^{p\cdot N_2}$, dok "slobodni" član zapisan preko p sada glasi $\sum_{t=k_0+1}^{k}p_t - \delta_{k_2>k_0}\sum_{r=k_0+1}^{k_2}p_r$. Faktor $\Delta_{\tilde{p}',N_2}$ se dobro ponaša, jer se kod p ne pojavljuju novi $(1,0)-$segmenti (gledano slijeva na desno) u odnosu na $\tilde{p}'$, tako da je $\Delta_{\tilde{p}',N_2} = \Delta^\star_{p,N_2}$. Konačno, prinos svakog $\tilde{p}'$ za kojeg je $a > k_2 + 1$ (zajedno sa svim pripadnim faktorima) glasi:

$$\sum_{p \in P^1_{k_0+k_2}} q^{g_{k_0}(p)\cdot N_1 + p\cdot N_2 + \sum_{t=k_0+1}^{k} p_t - \delta_{k_2>k_0} \sum_{r=k_0+1}^{k_2} p_r} \cdot \Delta^\star_{p,N_2} \tag{7.15}$$

uz oznaku $P^1_{k_0+k_2}$ za skup svih $p \in P_{k_0+k_2}$ koji na prvih bar k_2+1 koordinata imaju jedinice.

Za $\tilde{p}'$ za koje je $a = k_2 + 1$ imamo doprinos samo iz 1) i on glasi

$$q^{\tilde{p}'\cdot N_1 + \sum_{t=k_0+1}^{k} \tilde{p}'_t} \cdot q^{\sum_{u=1}^{a-1} N_{2,u}} \cdot (1 - q^{N_{2,a}}) \cdot q^{\sum_{v=a}^{k} \tilde{p}'_v N_{2,v}} \cdot \Delta^{(a+1,k)}_{\tilde{p}',N_2}.$$

Koristeći poznatu argumentaciju, faktor $q^{\sum_{u=1}^{a-1} N_{2,u}} \cdot (1 - q^{N_{2,a}})$ možemo raspisati na sljedeći način:

$$q^{\sum_{u=1}^{a-1} N_{2,u}} \cdot (1 - q^{N_{2,a}}) = \sum_{p \in P^{(1,w)}_{k_2}} q^{\sum_{z=1}^{w} p_z N_{2,z}} \cdot \Delta^{(1,w)}_{p,N_2},$$

gdje je $w := \min\{i | \tilde{p}'_i = 1\}$, a $P^{(1,w)}_{k_2}$ oznaka za sve uređene $k-$torke koje u prvih w koordinata imaju k_2 jedinice te nule na preostalim mjestima. Vrijedi: $k_2 + 1 \le w \le k_1 + k_2 + 1$. Nakon što ovaj faktor promotrimo zajedno s $q^{\sum_{v=a}^{k} \tilde{p}'_v N_{2,v}} \cdot \Delta^{(a+1,k)}_{\tilde{p}',N_2}$ vidimo da u ovom slučaju uspostavljamo korespondenciju između $\tilde{p}'$ i svih $p \in P_{k_0+k_2}$ koji na prvih najviše k_2 koordinata imaju jedinice, u oznaci $P^2_{k_0+k_2}$, i da će pritom vrijediti

$$\sum_{p \in P^{(1,w)}_{k_2}} q^{\sum_{z=1}^{w} p_z N_{2,z}} \cdot \Delta^{(1,w)}_{p,N_2} \cdot q^{\sum_{v=a}^{k} \tilde{p}'_v N_{2,v}} \cdot \Delta^{(a+1,k)}_{\tilde{p}',N_2} = \sum_{p \in P^2_{k_0+k_2}} q^{p\cdot N_2} \cdot \Delta^\star_{p,N_2}.$$

Odmah se vidi da w predstavlja poziciju $(k_2+1)-$ve jedinice u odgovarajućim $p \in P^2_{k_0+k_2}$, u oznaci $p(k_2+1)$. Slično kao i prije, i faktor $q^{\tilde{p}'\cdot N_1 + \sum_{t=k_0+1}^{k} \tilde{p}'_t}$ može se zapisati u formi $p \in P^2_{k_0+k_2}$. Konačno, prinos svakog $\tilde{p}'$ za kojeg je $a = k_2 + 1$, zajedno sa svim pripadnim faktorima, glasi:

$$\sum_{p \in P^2_{k_0+k_2}} q^{g_{k_0}(p)\cdot N_1 + p\cdot N_2 + \sum_{t=k_0+1}^{k} p_t - \delta_{p(k_2+1)-1>k_0} \sum_{r=k_0+1}^{p(k_2+1)-1} p_r} \cdot \Delta^\star_{p,N_2}. \tag{7.16}$$

Kako je $P^1_{k_0+k_2} \cup P^2_{k_0+k_2} = P_{k_0+k_2}$, iz (7.15) i (7.16) sumiranjem po svim minimalnim $\tilde{p} \in P_{k_0}$ slijedi tvrdnja Leme.

7.4 Transformacije druge grupe indeksa

Postupamo slično kao prilikom prve transformacije indeksa sumacije, ali sada radimo pomak u sumaciji mijenjajući indekse $N_{2,1},\dots,N_{2,k}$.

Lema 16

$$\sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\N_2\in U(n_2)}}\left(\frac{F(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{p\in P_{k_0+k_2}} q^{g_{k_0}(p)\cdot N_1+p\cdot N_2+\sum_{t=k_0+1}^k p_t-\delta_{p(k_2+1)-1>k_0}\sum_{r=k_0+1}^{p(k_2+1)-1}p_r}\cdot\Delta^\star_{p,N_2}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\N_2\in U(n_2)}}\left(\frac{G(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^k (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^k (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\sum_{p\in P_{k_1}}\Big(q^{pN_1+g_{k_0}(1-p)N_1+pN_2}\cdot\right.$$

$$\left.q^{-k_0-k_1+k_2+\sum_{b=k_0+k_2+1}^k(1-p_b)-\delta_{(1-p)(k_2+1)-1>k_0}\sum_{r=k_0+1}^{(1-p)(k_2+1)-1}(1-p_r)}\Delta^\circ_{p,N_2}\Big)\right),\quad (7.17)$$

gdje je

$$G(N_1,N_2)=q^{-\sum_{a_1=1}^{k_0}N_{1,a_1}+\sum_{a_2=k_0+1}^{k_0+k_2}(N_{1,a_2}+N_{2,a_2})-\sum_{b=k_0+k_2+1}^k N_{2,b}+k_0+k_1}\cdot$$
$$\cdot(1-q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}})\cdot(1-q^{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}}),$$

a Δ°_{p,N_2} *se razlikuje od* Δ_{p,N_2} *u tome što umjesto uobičajenog faktora za* $i=k_0+k_2+1$ *ima faktor* $(1-\delta_{p_{k_0+k_2+1}-p_{k_0+k_2},-1}q^{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}-1})$.

Dokaz: Postupamo slično kao prilikom dokaza jednakosti (7.1), samo sada za fiksni $p\in P_{k_0+k_2}$ na pripadnom sumandu lijeve strane (7.17) radimo sljedeću transformaciju indeksa sumacije:

$$\begin{aligned}&N_{2,a}\to N_{2,a}-p_a+1, a=1,\dots,k_0+k_2\\&N_{2,b}\to N_{2,b}-p_b, b=k_0+k_2+1,\dots,k.\end{aligned}\quad (7.18)$$

Primijetimo da se nakon ove promjene sumacija provodi po

$$\sum_{a=1}^{k_0+k_2}(N_{2,a}-p_a+1)+\sum_{b=k_0+k_2+1}^k(N_{2,b}-p_b)=\sum_{i=1}^k N_{2,i}-\underbrace{\sum_{i=1}^k p_i}_{=k_0+k_2}-\underbrace{\sum_{a=1}^{k_0+k_2}1}_{=k_0+k_2}=\sum_{i=1}^k N_{2,i},$$

što znači da i dalje vrijedi uvjet sumacije koji je prvotno vrijedio, ali se očito narušio uvjet monotonosti $N_{2,i} \geq N_{2,i-1}$, $i = 1 \dots k$.

Želimo vidjeti što se pri transformaciji indeksa sumacije zbiva s kvadratnim članom $Q(N_1, N_2)$, što s linearnim i slobodnim članom, a što s faktorima iz Δ_{p,N_2} (koje ćemo promatrati s odgovarajućim faktorom u nazivniku).

Promjena kvadratnog člana:

$$\sum_{i=1}^{k} (N_{1,i}^2 + N_{2,i}^2 + N_{1,i} \cdot N_{2,i}) \xrightarrow{(7.18)} \sum_{i=1}^{k} N_{1,i}^2 + \sum_{a=1}^{k_0+k_2} (N_{2,a} - p_a + 1)^2 +$$

$$+ \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} (N_{2,b} - p_b)^2 + \sum_{a=1}^{k_0+k_2} N_{1,a}(N_{2,a} - p_a + 1) + \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} N_{1,b}(N_{2,b} - p_b) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (N_{1,i}^2 + N_{2,i}^2 + N_{1,i} \cdot N_{2,i}) + \sum_{a=1}^{k_0+k_2} (1 - p_a) N_{1,a} - \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} p_b N_{1,b} +$$

$$+ \sum_{a=1}^{k_0+k_2} 2(1 - p_a) N_{2,a} - \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} 2 p_b N_{2,b} + \sum_{a=1}^{k_0+k_2} \underbrace{(1 - p_a)^2}_{=1-p_a} + \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} \underbrace{p_b^2}_{=p_b}.$$

Promjena linearnog člana (uzimamo u obzir i izraz $F(N_1, N_2)$):

$$- n_1 - n_2 + \sum_{t=k_0+1}^{k} (2N_{1,t} + N_{2,t}) + g_{k_0}(p) \cdot N_1 + p \cdot N_2 \xrightarrow{(7.18)}$$

$$= -n_1 - n_2 + \sum_{t=k_0+1}^{k} (2N_{1,t} + N_{2,t}) + g_{k_0}(p) \cdot N_1 + p \cdot N_2 - \sum_{a=1}^{k_0+k_2} (1 - p_a) +$$

$$+ \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} p_b + \underbrace{\sum_{t_1=k_0+1}^{k_0+k_2} (1 - p_{t_1}) - \sum_{t_2=k_0+k_2+1}^{k} p_{t_2}}_{=k_2 - \sum_{t=k_0+1}^{k} p_t} + \sum_{a=1}^{k_0+k_2} \underbrace{p_a(1 - p_a)}_{=0} - \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} \underbrace{p_b^2}_{=p_b} =$$

$$= -n_1 - n_2 + \sum_{t=k_0+1}^{k} (2N_{1,t} + N_{2,t}) + g_{k_0}(p) N_1 + p N_2 - \sum_{a=1}^{k_0+k_2} (1 - p_a) + k_2 - \sum_{t=k_0+1}^{k} p_t$$

Sada organiziramo dobivene podatke prema kvadratnom, linearnom te slobodnom članu. Kvadratni član očito ostaje nepromijenjen, dok ćemo kod linearnog člana promatrati sumande indeksa N_1−grupe indeksa odvojeno od sumanada indeksa N_2−grupe indeksa.

Za N_1-grupu indeksa imamo sumand

$$\sum_{a=1}^{k_0+k_2}(1-p_a)N_{1,a}-\sum_{b=k_0+k_2+1}^{k}p_bN_{1,b}-n_1+\sum_{t=k_0+1}^{k}2N_{1,t}+g_{k_0}(p)\cdot N_1=$$
$$=\cdots=-\sum_{a_1=1}^{k_0}N_{1,a_1}+\sum_{a_2=k_0+1}^{k_0+k_2}N_{1,a_2}+(1-p)\cdot N_1+g_{k_0}(p)\cdot N_1,$$

za N_2-grupu

$$\sum_{a=1}^{k_0+k_2}2(1-p_a)N_{2,a}-\sum_{b=k_0+k_2+1}^{k}2p_bN_{2,b}-n_2+\sum_{t=k_0+1}^{k}N_{2,t}+p\cdot N_2=$$
$$=\cdots=\sum_{a_2=k_0+1}^{k_0+k_2}N_{2,a_2}-\sum_{b=k_0+k_2+1}^{k}N_{2,b}+(1-p)\cdot N_2,$$

a za slobodni član

$$\sum_{a=1}^{k_0+k_2}(1-p_a)+\sum_{b=k_0+k_2+1}^{k}p_b-\sum_{a=1}^{k_0+k_2}(1-p_a)+k_2-\sum_{t=k_0+1}^{k}p_t+\sum_{t=k_0+1}^{k}p_t-$$
$$-\delta_{p(k_2+1)-1>k_0}\sum_{r=k_0+1}^{p(k_2+1)-1}p_r=\cdots=k_2+\sum_{b=k_0+k_2+1}^{k}p_b-\delta_{p(k_2+1)-1>k_0}\sum_{r=k_0+1}^{p(k_2+1)-1}p_r,$$

što zajedno daje

$$\begin{aligned}
&F(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}\cdot\\
&\cdot q^{g_{k_0}(p)\cdot N_1+p\cdot N_2+\sum_{t=k_0+1}^{k}p_t-\delta_{p(k_2+1)-1>k_0}\sum_{r=k_0+1}^{p(k_2+1)-1}p_r}\xrightarrow{(7.18)}\\
&q^{-\sum_{a_1=1}^{k_0}N_{1,a_1}+\sum_{a_2=k_0+1}^{k_0+k_2}(N_{1,a_2}+N_{2,a_2})-\sum_{b=k_0+k_2+1}^{k}N_{2,b}+k_0+k_1}\cdot\\
&\cdot\left(1-q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}\right)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}\cdot\\
&\cdot q^{(1-p)\cdot N_1+g_{k_0}(p)\cdot N_1+(1-p)\cdot N_2-k_0-k_1+k_2+\sum_{b=k_0+k_2+1}^{k}p_b-\delta_{p(k_2+1)-1>k_0}\sum_{r=k_0+1}^{p(k_2+1)-1}p_r}
\end{aligned}\tag{7.19}$$

Što se promjene faktora $\Delta^\star_{p,N_2}$ prilikom transformacije (7.18) tiče, pojedini faktor promatramo zajedno s odgovarajućim faktorom iz nazivnika fiksiranog sumanda lijeve strane izraza (7.17). Potpuno analogno kao u računu promjene $\Delta^\star_{p,N_1}$, i ovdje nakon razmatranja tri slučaja dolazimo do sljedećih zaključaka:

1) Svi netrivijalni faktori, osim onog za $i=k_0+k_2+1$, postaju trivijalni.

2) Pojavljuju se novi faktori oblika $(1-q^{N_{2,i}-N_{2,i-1}-\delta_{i,k_0+k_2+1}})$, ako i samo ako je $p_i=1$, $p_{i-1}=0$, $i=1\dots k$, uz $p_0:=0$.

3) Osim faktora pod 2) pojavljuje se i faktor $(1-q^{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}}), \forall p$.

4) Gore opisane promjene "popravljaju" uvjet sumacije

$$N_{2,k}\geq N_{2,k-1}\geq\cdots\geq N_{2,0}\geq 0.$$

Odavdje slijedi

$$\frac{\Delta^{\star}_{p,N_2}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\xrightarrow{(7.18)}$$
$$\xrightarrow{(7.18)}(1-q^{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}})\cdot\frac{\Delta^{\circ}_{1-p,N_2}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}},\tag{7.20}$$

uz oznaku Δ°_{1-p,N_2} kao u iskazu Leme.
Konačno, iz (7.19) i (7.20) te činjenice da (7.18) ne narušava uvjet sumacije $N_2\in U(n_2)$ slijedi tvrdnja Leme.

7.5 Transformacije obje grupe indeksa

Konačno, kako bismo pokazali jednakost lijeve strane (7.1) i posljednjeg sumanda (6.14), "pomičemo" indeks sumacije, ovoga puta po obje grupe indeksa sumacije.

Lema 17

$$\sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\N_2\in U(n_2)}}\Bigg(\frac{G(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\sum_{p\in P_{k_1}}\Big(q^{pN_1+g_{k_0}(1-p)N_1+pN_2}\cdot$$
$$\cdot q^{-k_0-k_1+k_2+\sum_{b=k_0+k_2+1}^{k}(1-p_b)-\delta_{(1-p)(k_2+1)-1>k_0}\sum_{r=k_0+1}^{(1-p)(k_2+1)-1}(1-p_r)}\cdot\Delta^{\circ}_{p,N_2}\Big)\Bigg)=$$
$$=q^{n_1+n_2}\sum_{\substack{N_1\in U(n_1-k_0)\\N_2\in U(n_2-k_1)}}\frac{q^{Q(N_1,N_2)}\cdot\sum_{p\in P_{k_1}}q^{p\cdot N_1+g_{k_0}(1-p)\cdot N_1+p\cdot N_2}\cdot\Delta_{p,N_2}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}\tag{7.21}$$

Dokaz: Kod svih sumanada lijeve strane (7.21) radimo sljedeći promjenu obje grupe indeksa sumacije:

$$\begin{aligned} &N_{1,i_1} \to N_{1,i_1}+1, i_1=1,\dots,k_0 \\ &N_{2,j_2} \to N_{2,j_2}+1, j_2=k_0+k_2+1,\dots,k. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Sada se sumacija na lijevoj strani jednakosti (7.21) odvija po uvjetu

$$\sum_{i=1}^{k} N_{1,i}+k_0=n_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} N_{1,i}=n_1-k_0 \tag{7.23}$$

$$\sum_{i=1}^{k} N_{2,i}+k_1=n_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} N_{2,i}=n_2-k_1. \tag{7.24}$$

Pritom se uvjet monotonosti među indeksima nije narušio, osim u dva slučaja: uvjet koji veže indekse N_{1,k_0} i N_{1,k_0+1} postaje

$$N_{1,k_0}+1 \geq N_{1,k_0+1} \Leftrightarrow N_{1,k_0} \geq N_{1,k_0+1} \text{ ili } N_{1,k_0}=N_{1,k_0+1}-1,$$

dok se onaj koji veže indekse N_{2,k_0+k_2} i N_{2,k_0+k_2+1} mijenja u

$$\begin{aligned} N_{2,k_0+k_2+1}+1 \geq N_{2,k_0+k_2} \Leftrightarrow & N_{2,k_0+k_2+1} \geq N_{2,k_0+k_2} \\ & \text{ili } N_{2,k_0+k_2+1}=N_{2,k_0+k_2}-1, \end{aligned}$$

dakle na dva koordinatna mjesta (jedno za N_1-grupu i jedno za N_2-grupu) narušen je uvjet monotonosti.

Želimo vidjeti koju promjenu (7.22) donosi kvadratnom članu, linearnom i slobodnom člana, a što mijenja kod faktora iz Δ°_{p,N_2}.

Promjena kvadratnog člana:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k}(N_{1,i}^2+N_{2,i}^2+N_{1,i}\cdot N_{2,i}) \xrightarrow{(7.18)} \\ &\sum_{i_1=1}^{k_0}(N_{1,i_1}+1)^2+\sum_{i_2=k_0+1}^{k} N_{1,i_2}^2+\sum_{j_1=1}^{k_0+k_2} N_{2,j_1}+\sum_{j_2=k_0+k_2+1}^{k}(N_{2,j_2}+1)^2+ \\ &+\sum_{i_1=1}^{k_0}(N_{1,i_1}+1)N_{2,i_1}+\sum_{a=k_0+1}^{k_0+k_2} N_{1,a}\cdot N_{2,a}+\sum_{j_2=k_0+k_2+1}^{k} N_{1,j_2}(N_{2,j_2}+1)= \\ &=\sum_{\ell=1}^{k}(N_{1,\ell}^2+N_{2,\ell}^2+N_{1,\ell}\cdot N_{2,\ell})+\sum_{i_1=1}^{k_0}2N_{1,i_1}+\sum_{j=k_0+k_2+1}^{k}N_{1,j_2}+\sum_{i_1=1}^{k_0}N_{2,i_1}+ \\ &+\sum_{j_2=k_0+k_2+1}^{k}2N_{2,j_2}+k_0+k_1. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Promjena linearnog i slobodnog člana faktora $G(N_1, N_2)$:

$$-\sum_{a_1=1}^{k_0} N_{1,a_1} + \sum_{a_2=k_0+1}^{k_0+k_2} (N_{1,a_2} + N_{2,a_2}) - \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} N_{2,b} + k_0 + k_1 \xrightarrow{(7.22)}$$
$$-\sum_{a_1=1}^{k_0} (N_{1,a_1} + 1) + \sum_{a_2=k_0+1}^{k_0+k_2} (N_{1,a_2} + N_{2,a_2}) - \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} (N_{2,b} + 1) + k_0 + k_1 =$$
$$= -\sum_{a_1=1}^{k_0} N_{1,a_1} + \sum_{a_2=k_0+1}^{k_0+k_2} (N_{1,a_2} + N_{2,a_2}) - \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} N_{2,b} + k_0 + k_1 - k_0 - k_1 =$$
$$= -\sum_{a_1=1}^{k_0} N_{1,a_1} + \sum_{a_2=k_0+1}^{k_0+k_2} (N_{1,a_2} + N_{2,a_2}) - \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} N_{2,b}. \tag{7.26}$$

Spajanjem linearnih članova dobivenih u (7.25) i (7.26) dobivamo:

$$\sum_{i_1=1}^{k_0} 2N_{1,i_1} + \sum_{j=k_0+k_2+1}^{k} N_{1,j_2} + \sum_{i_1=1}^{k_0} N_{2,i_1} + \sum_{j_2=k_0+k_2+1}^{k} 2N_{2,j_2} + k_0 + k_1 -$$
$$-\sum_{a_1=1}^{k_0} N_{1,a_1} + \sum_{a_2=k_0+1}^{k_0+k_2} (N_{1,a_2} + N_{2,a_2}) - \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} N_{2,b} =$$
$$= \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} N_{1,\ell} + k_0}_{\overset{(7.23)}{=} n_1} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} N_{2,\ell} + k_1}_{\overset{(7.24)}{=} n_2} = n_1 + n_2. \tag{7.27}$$

Kod promjene preostalog dijela linearnog i slobodnog člana imamo dvije mogućnosti. Ako je $k_0 < (1-p)(k_2+1) - 1$, imamo

$$pN_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 + pN_2 - k_0 - k_1 + k_2 + \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} (1-p_b) - \sum_{r=k_0+1}^{(1-p)(k_2+1)-1} (1-p_r)$$
$$\xrightarrow{(7.22)} \sum_{i_1=1}^{k_0} p_{i_1}(N_{1,i_1} + 1) + \sum_{i_2=k_0+1}^{k} p_{i_2} N_{1,i_2} + \sum_{j_1=1}^{k_0} p_{j_1} N_{2,j_1} + \sum_{j_2=k_0+k_2+1}^{k} p_{j_2}(N_{2,j_2} + 1) +$$
$$+ \sum_{j=(1-p)(k_2+1)}^{k} p_j N_{1,j} - k_0 - k_1 + k_2 + \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} (1-p_b) - \sum_{r=k_0+1}^{(1-p)(k_2+1)-1} (1-p_r) =$$
$$= pN_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 + pN_2 +$$
$$+ \sum_{i_1=1}^{k_0} p_{i_1} + \sum_{j_2=k_0+k_2+1}^{k} p_{j_2} - k_0 - k_1 + k_2 + \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} (1-p_b) - \sum_{r=k_0+1}^{(1-p)(k_2+1)-1} (1-p_r) =$$

$$=pN_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 + pN_2 + \sum_{i_1=1}^{k_0} p_{i_1} + \sum_{j_2=k_0+k_2+1}^{k} p_{j_2} - k_0 - k_1 + k_2 + k_1 -$$

$$-\sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} p_b - ((1-p)(k_2+1) - k_0) + \sum_{r=k_0+1}^{(1-p)(k_2+1)-1} p_r =$$

$$= pN_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 + pN_2 + \underbrace{\sum_{i_1=1}^{k_0} p_{i_1} + \sum_{r=k_0+1}^{(1-p)(k_2+1)-1} p_r}_{=(1-p)(k_2+1)-k_2} + k_2 - (1-p)(k_2+1) =$$

$$= pN_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 + pN_2.$$

U slučaju da je $k_0 \geq (1-p)(k_2+1) - 1$ dobivamo

$$pN_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 + pN_2 - k_0 - k_1 + k_2 + \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} (1-p_b) \xrightarrow{(7.22)}$$

$$\sum_{i_1=1}^{k_0} p_{i_1}(N_{1,i_1}+1) + \sum_{i_2=k_0+1}^{k} p_{i_2} N_{1,i_2} + \sum_{j_1=1}^{k_0+k_2} p_{j_1} N_{2,j_1} + \sum_{j_2=k_0+k_2+1}^{k} p_{j_2}(N_{2,j_2}+1) +$$

$$+ \sum_{t_1=(1-p)(k_2+1)}^{k_0} (1-p_{t_1})(N_{1,t_1}+1) + \sum_{t_2=k_0+1}^{k} (1-p_{t_2}) N_{1,t_2} - k_0 - k_1 + k_2 +$$

$$+ \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} (1-p_b) = pN_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 + pN_2 + \sum_{i_1=1}^{k_0} p_{i_1} + \sum_{j_2=k_0+k_2+1}^{k} p_{j_2} +$$

$$+ \sum_{t_1=(1-p)(k_2+1)}^{k_0} (1-p_{t_1}) - k_0 - k_1 + k_2 + k_1 - \sum_{b=k_0+k_2+1}^{k} p_b = pN_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 +$$

$$+ pN_2 + \underbrace{\sum_{i_1=1}^{k_0} p_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{k_0} (1-p_{i_1})}_{=k_0} - \underbrace{\sum_{a=1}^{(1-p)(k_2+1)-1} (1-p_a)}_{=k_2} - k_0 + k_2 =$$

$$= pN_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 + pN_2,$$

što je jednako dobivenom u prethodnom slučaju. Dakle, konačno kod promjene preostalog dijela linearnog i slobodnog člana dobivamo član

$$p \cdot N_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 + p \cdot N_2. \tag{7.28}$$

Ostaje još vidjeti kako (7.22) utječe na faktor

$$(1 - q^{N_{1,k_0} - N_{1,k_0+1}}) \cdot (1 - q^{N_{2,k_0+k_2+1} - N_{2,k_0+k_2}}),$$

a kako na pojedine faktore iz Δ°_{p,N_2}.
Gornji faktor, zajedno s odgovarajućim faktorima iz nazivnika, prilikom (7.22) daje:

$$\frac{(1-q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}})\cdot(1-q^{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}})}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}\cdot(q)_{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}}} \xrightarrow{(7.22)}$$
$$\xrightarrow{(7.22)} \frac{(1-q^{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}+1})\cdot(1-q^{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}+1})}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}+1}\cdot(q)_{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}+1}} =$$
$$=\begin{cases} 0, & N_{1,k_0}=N_{1,k_0+1}-1 \\ 0, & N_{2,k_0+k_2+1}=N_{2,k_0+k_2}-1 \\ \frac{1}{(q)_{N_{1,k_0}-N_{1,k_0+1}}\cdot(q)_{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}}}, & N_{1,k_0}\geq N_{1,k_0+1}, N_{2,k_0+k_2+1}\geq N_{2,k_0+k_2} \end{cases}$$

što znači da smo "popravili" prije opisano narušenje poznatih uvjeta monotonosti.
Dalje, očito je da će transformacija (7.22), od svih faktora iz Δ°_{p,N_2}, promijeniti samo sljedeći faktor (ako postoji):

$$1-q^{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}-1} \xrightarrow{(7.22)} 1-q^{N_{2,k_0+k_2+1}-N_{2,k_0+k_2}}.$$

Imamo dakle

$$\Delta^{\circ}_{p,N_2} \xrightarrow{(7.22)} \Delta_{p,N_2}. \tag{7.29}$$

Sada iz (7.23), (7.24), (7.27), (7.28) i (7.29) slijedi tvrdnja Leme.

7.6 Posljednje pregrupiranje faktora

U posljednjoj lemi obavljamo posljednje pregrupiranje faktora kako bismo dobili formulu za posljednji član u (6.14) onako kako je dana u iskazu Teorema 12.

Lema 18

$$q^{n_1+n_2}\sum_{\substack{N_1\in U(n_1-k_0)\\ N_2\in U(n_2-k_1)}}\frac{q^{Q(N_1,N_2)}\cdot\sum_{p\in P_{k_1}}q^{p\cdot N_1+g_{k_0}(1-p)\cdot N_1+p\cdot N_2}\cdot\Delta_{p,N_2}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}=$$
$$=q^{n_1+n_2}A^{n_1-k_0,n_2-k_1}_{k_2,k_0,k_1}(q) \tag{7.30}$$

Dokaz: Dovoljno je dokazati da za svaki N_1 i N_2 vrijedi

$$\sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)}\cdot \sum_{p\in P_{k_1}} q^{p\cdot N_1+g_{k_0}(1-p)\cdot N_1+p\cdot N_2}\cdot \Delta_{p,N_2}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot \prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} =$$

$$=\sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)}\cdot \sum_{p\in P_{k_0+k_1}} q^{p\cdot N_1+f_{k_1}(p)\cdot N_2}\cdot \Delta_{p,N_1}}{\prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}}\cdot \prod_{i=1}^{k}(q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}}. \tag{7.31}$$

Označimo s $\tilde{p}\in P_{k_1}$ minimalni (po leksikografskom uređaju) među svim $p\in P_{k_1}$ kojima imaju isti $b=(1-\tilde{p})(k_2)$ i sve im se koordinatne vrijednosti do te (naravno, uključivši i tu) poklapaju. Klase indeksiramo minimalnim elementom $\tilde{p}$ i za p iz klase nekog $\tilde{p}$ pišemo $p\sim\tilde{p}$. Napomenimo da će ovakve klase biti jednočlane samo kad je b maksimalan, dakle jednak k_1+k_2 (jer treba ostati "mjesta" za još k_0 nula). Za sve klase koje imaju bar dva elementa računamo

$$\sum_{\substack{p\in P_{k_1}\\ p\sim\tilde{p}}} q^{p\cdot N_1+g_{k_0}(1-p)\cdot N_1+p\cdot N_2}\cdot \Delta_{p,N_2} =$$

$$= \sum_{\substack{p\in P_{k_1}\\ p\sim\tilde{p}}} q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{v=b+1}^{k} N_{1,v}+\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}+\sum_{v=b+1}^{k} p_v N_{2,v}}\cdot \Delta^{(1,b)}_{\tilde{p},N_2}\cdot \Delta^{(b+1,k)}_{p,N_2} =$$

$$= q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{v=b+1}^{k} N_{1,v}+\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}}\cdot \Delta^{(1,b)}_{\tilde{p},N_2}\Big(\sum_{\substack{p\in P_{k_1}\\ p\sim\tilde{p}}} q^{\sum_{v=b+1}^{k} p_v N_{2,v}}\cdot \Delta^{(b+1,k)}_{p,N_2}\Big) =$$

$$= q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{v=b+1}^{k} N_{1,v}+\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}}\cdot \Delta^{(1,b)}_{\tilde{p},N_2}\cdot q^{\sum_{c=b+1}^{k_1+k_2} N_{2,c}} =$$

$$= q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{v=b+1}^{k} N_{1,v}+\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}+\sum_{c=b+1}^{k_1+k_2} N_{2,c}}\cdot \Delta^{(1,b)}_{\tilde{p},N_2},$$

koristeći slično zaključivanje kao i prije. Dakle, ukupno možemo pisati da je

$$\sum_{p\in P_{k_1}} q^{p\cdot N_1+g_{k_0}(1-p)\cdot N_1+p\cdot N_2}\cdot \Delta_{p,N_2} =$$

$$= \sum_{\tilde{p}\in P_{k_1}} q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{v=b+1}^{k} N_{1,v}+\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}+\delta_{k_1+k_2>b}\sum_{c=b+1}^{k_1+k_2} N_{2,c}}\cdot \Delta^{(1,b)}_{\tilde{p},N_2}.$$

Za fiksni $\tilde{p}\in P_{k_1}$ se pripadni N_2-sumand linearnog člana

$$q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}+\delta_{k_1+k_2>b}\sum_{c=b+1}^{k_1+k_2} N_{2,c}}$$

može dobiti iz analognih članova nekih drugih $\tilde{p}'\in P_{k_1}$ nakon množenja odgovarajućim faktorima iz $\Delta^{(1,b)}_{\tilde{p}',N_2}$ (koristimo već poznatu argumentaciju o zamjeni $(1,0)-$segmenata $(0,1)-$segmentima), pa nije teško vidjeti da je

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\in P_{k_1}} q^{p\cdot N_1+g_{k_0}(1-p)\cdot N_1+p\cdot N_2}\cdot\Delta_{p,N_2}=\\
&=\sum_{\tilde{p}\in P_{k_1}} q^{\sum_{v=b+1}^{k} N_{1,v}+\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}+\delta_{k_1+k_2>b}\sum_{c=b+1}^{k_1+k_2} N_{2,c}}\cdot\\
&\quad\cdot\left(q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}}+\sum_{\tilde{p}'}(-1)^{b(\tilde{p}')}q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}'_u N_{1,u}}\right)=\\
&=\sum_{\tilde{p}\in P_{k_1}} q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{v=b+1}^{k} N_{1,v}+\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}+\delta_{k_1+k_2>b}\sum_{c=b+1}^{k_1+k_2} N_{2,c}}\cdot\Delta_{\tilde{p},N_1}^{(1,b)},
\end{aligned}$$

uz oznake i argumentaciju analogne onima u dokazu (7.12). Vidimo da na desnoj strani gornje jednakosti linearni član ima $b-k_2+k-b=k_0+k_1$ sumanada N_1-grupe indeksa i $b-k_2+(k_1+k_2-b)=k_1$ sumanada N_2-grupe indeksa, pa je možemo indeksirati skupom $P_{k_0+k_1}$. Također, kako je b najviše jednak k_1+k_2, N_2-sumand svakog linearnog člana desne strane gornje jednakosti je u korespondenciji s nekim (jednim ili više njih, jer $f_{k_1}(p)$ može biti isti za više $p\in P_{k_0+k_1}$) $p\in P_{k_0+k_1}$, u oznaci $p\approx\tilde{p}$. Vrijedi i obrat: naime, za svaki $p\in P_{k_0+k_1}$ prvih k_1 jedinica se mora nalaziti unutar prvih k_1+k_2 koordinata, jer u preostalih k_0 koordinata očito može biti najviše k_0 jedinica. Stoga za svaki $\tilde{p}\in P_{k_1}$ i za sve $p\approx\tilde{p}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}+\delta_{k_1+k_2>b}\sum_{c=b+1}^{k_1+k_2} N_{2,c}} &= q^{f_{k_1}(p)\cdot N_2}\\
q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}}\Delta_{\tilde{p},N_1}^{(1,b)} &= q^{\sum_{u=1}^{b}p_u N_{1,u}}\Delta_{p,N_1}^{(1,b)},
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
&q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{v=b+1}^{k} N_{1,v}+\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}+\delta_{k_1+k_2>b}\sum_{c=b+1}^{k_1+k_2} N_{2,c}}\cdot\Delta_{\tilde{p},N_1}^{(1,b)}=\\
&=q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}+\delta_{k_1+k_2>b}\sum_{c=b+1}^{k_1+k_2} N_{2,c}}\Delta_{\tilde{p},N_1}^{(1,b)}\cdot q^{\sum_{v=b+1}^{k} N_{1,v}}=\\
&=q^{\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{1,u}+\sum_{u=1}^{b}\tilde{p}_u N_{2,u}+\delta_{k_1+k_2>b}\sum_{c=b+1}^{k_1+k_2} N_{2,c}}\Delta_{\tilde{p},N_1}^{(1,b)}\sum_{p\approx\tilde{p}} q^{\sum_{v=b+1}^{k} pN_{1,v}}\Delta_{p,N_1}^{(b+1,k)}=\\
&=\sum_{p\approx\tilde{p}} q^{\sum_{u=1}^{b}p_u N_{1,u}+\sum_{v=b+1}^{k} pN_{1,v}+f_{k_1}(p)\cdot N_2}\Delta_{p,N_1}^{(1,b)}\Delta_{p,N_1}^{(b+1,k)}=\sum_{p\approx\tilde{p}} q^{pN_1+f_{k_1}(p)N_2}\Delta_{p,N_1},
\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\sum_{p\in P_{k_1}} q^{p\cdot N_1+g_{k_0}(1-p)\cdot N_1+p\cdot N_2}\cdot\Delta_{p,N_2}=\sum_{p\in P_{k_0+k_1}} q^{p\cdot N_1+f_{k_1}(p)\cdot N_2}\cdot\Delta_{p,N_1},$$

čime je dokazana tvrdnja (7.31), a time i Lema.

7.7 Dokaz Teorema 12

Konačno, prelazimo na dokaz Teorema 12.

Dokaz: Korištenjem prethodnih lema dokazujemo da (6.13) zadovoljava sustav (6.12), uz oznake kao u lemama:

$$
\begin{aligned}
&A_{n_1,n_2}^{k_0,k_1,k_2}(q) - A_{n_1,n_2}^{k_0-1,k_1+1,k_2}(q) - A_{n_1,n_2}^{k_0,k_1-1,k_2+1}(q) + A_{n_1,n_2}^{k_0-1,k_1,k_2+1}(q) = \\
&\overset{(7.1)}{=} \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum_{p\in P_{k_1+k_2}} q^{p\cdot N_1 + f_{k_2}(p)\cdot N_2} \cdot \Delta^{\star}_{p,N_1} \cdot (1-q^{N_{2,p(k_2+1)}})}{\prod_{\ell=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{\ell=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} = \\
&\overset{(7.6)}{=} \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \left(\frac{F(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} \cdot \right. \\
&\left. \cdot \sum_{p\in P_{k_0}} q^{p\cdot N_1 + p\cdot N_2 + f_{k_2}(1-p)\cdot N_2 + \sum_{t=k_0+1}^{k} p_t} \cdot \Delta^{\circ}_{p,N_1} \cdot (1-q^{N_{2,(1-p)(k_2+1)}}) \right) = \\
&\overset{(7.10)}{=} \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \left(\frac{F(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} \cdot \right. \\
&\left. \cdot \sum_{p\in P_{k_0+k_2}} q^{g_{k_0}(p)\cdot N_1 + p\cdot N_2 + \sum_{t=k_0+1}^{k} p_t - \delta_{p(k_2+1)-1>k_0} \sum_{r=k_0+1}^{p(k_2+1)-1} p_r} \cdot \Delta^{\star}_{p,N_2} \right) = \\
&\overset{(7.17)}{=} \sum_{\substack{N_1\in U(n_1)\\ N_2\in U(n_2)}} \left(\frac{G(N_1,N_2)\cdot q^{Q(N_1,N_2)}}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} \sum_{p\in P_{k_1}} \left(q^{pN_1 + g_{k_0}(1-p)N_1 + pN_2} \cdot \right.\right. \\
&\left.\left. \cdot\, q^{-k_0-k_1+k_2+\sum_{b=k_0+k_2+1}^{k}(1-p_b) - \delta_{(1-p)(k_2+1)-1>k_0} \sum_{r=k_0+1}^{(1-p)(k_2+1)-1}(1-p_r)} \cdot \Delta^{\circ}_{p,N_2} \right) \right) = \\
&\overset{(7.21)}{=} q^{n_1+n_2} \sum_{\substack{N_1\in U(n_1-k_0)\\ N_2\in U(n_2-k_1)}} \frac{q^{Q(N_1,N_2)} \cdot \sum_{p\in P_{k_1}} q^{p\cdot N_1 + g_{k_0}(1-p)\cdot N_1 + p\cdot N_2} \Delta_{p,N_2}}{\prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{1,i}-N_{1,i+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} (q)_{N_{2,i}-N_{2,i-1}}} = \\
&\overset{(7.30)}{=} q^{n_1+n_2} A_{k_2,k_0,k_1}^{n_1-k_0,n_2-k_1}(q).
\end{aligned}
$$

Bibliografija

[A1] G. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley, 1976.

[A2] G. Andrews, *An analytic proof of the Rogers-Ramanujan-Gordon identities*, Amer. J. Math. **88** (1966), 844–846.

[C] S. Capparelli, *A construction of the level 3 modules for the affine Lie algebra $A_2^{(2)}$ and a new combinatorial identity of the Rogers-Ramanujan type*, Trans. Amer. Math. Soc **348** (1996), 481–501.

[CLM1] S. Capparelli, J. Lepowsky and A. Milas, *The Rogers-Ramanujan recursion and intertwining operators*, Comm. Contemporary Math. **5** (2003), 947–966.

[CLM2] S. Capparelli, J. Lepowsky and A. Milas, *The Rogers-Selberg recursions, the Gordon-Andrews identities and intertwining operators*, math.QA/0310080.

[DL] C. Dong and J. Lepowsky, *Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators*, Progress in Math. **Vol. 112**, Birkhaüser, Boston, 1993.

[DLM] C. Dong, H. Li and G. Mason, *Simple currents and extensions of vertex operator algebras*, Comm. Math. Physics **180** (1996), 671–707.

[FJLMM] B. Feigin, M. Jimbo, S. Loktev, T. Miwa and E. Mukhin, *Bosonic formulas for (k,ℓ)-admissible partitions*, math.QA/0107054; *Addendum to 'Bosonic formulas for (k,ℓ)-admissible partitions'*, math.QA/0112104.

[FJMMT] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin and Y. Takeyama, *Fermionic formulas for $(k,3)$-admissible configurations*, Publ. RIMS **40** (2004), 125–162.

[FHL] I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, *On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules*, Memoirs Amer. Math. Soc. **104**, 1993.

[FK] I. Frenkel, V. Kac, *Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models*, Invent. Math. **62** (1980), 23–66.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math. **Vol. 134**, Academic Press, Boston, 1988.

[FS] B. Feigin and A. Stoyanovsky, *Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold*, hep-th/9308079, RIMS 942.

[G] G. Georgiev, *Combinatorial constructions of modules for infinite-dimensional Lie algebras, I. Principal subspace*, J. Pure Appl. Algebra **112** (1996), 247–286.

[GL] Y. Gao, H.-S. Li, *Generalized vertex algebras generated by parafermion-like vertex operators*, J. Algebra **240** (2001), No. 2, 771–807.

[K] V.G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[KKMMNN] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 7, Suppl. 1A, Proceedings of the RIMS Research Project 1991, "Infinite Analysis", World Scientific, Singapore, 1992, 449–484.

[Li] H.-S. Li, *Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules*, J. Pure Appl. Alg. **109** (1996), 143–195. hep-th/9406185.

[LL] J. Lepowsky, H.-S. Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*, Progress in Math. **Vol. 227**, Birkhäuser, Boston, 2004.

[LP1] J. Lepowsky, M. Primc, *Standard modules for type one affine Lie algebras*, Number Theory, New York, 1982, Springer-Verlag Lecture Notes in Math. **1052** (1984), 194–251

[LP2] J. Lepowsky, M. Primc, *Structure of the standard modules for the affine Lie Algebra* $A_1^{(1)}$, Contemporary Math. **46** (1985), 1–84.

[LW1] J. Lepowsky and R. L. Wilson, *Construction of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$*, Commun. Math. Phys. **62** (1978), 43–53.

[LW2] J. Lepowsky and R. L. Wilson, *A Lie theoretic interpretation and proof of the Rogers-Ramanujan identities*, Adv. Math. **45** (1982), 21–72.

[LW3] J. Lepowsky and R. L. Wilson, *The structure of standard modules, I: Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities*, Invent. Math. **77** (1984), 199–290.

[LW4] J. Lepowsky and R. L. Wilson, *The structure of standard modules, II: The case $A_1^{(1)}$, principal gradation*, Invent. Math. **79** (1985), 417–442.

[MP1] A. Meurman and M. Primc, *Annihilating ideals of standard modules of $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}$ and combinatorial identities*, Advances in Math. **64** (1987), 177–240.

[MP2] A. Meurman and M. Primc, *Annihilating fields of standard modules of $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\tilde{}$ and combinatorial identities*, Memoirs Amer. Math. Soc. **652**, 1999.

[MP3] A. Meurman and M. Primc, *A basis for basic $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})\tilde{}-$ module*, Commun. Contemp. Math. **Vol. 3**, No. 4 (2001), 593–614.

[P1] M. Primc, *Vertex operator construction of standard modules for $A_n^{(1)}$*, Pacific J. Math **162** (1994), 143–187.

[P2] M. Primc, *Basic Representations for classical affine Lie algebras*, J. Algebra **228** (2000), 1–50.

[P3] M. Primc, *(k,r)-admissible configurations and intertwining operators*, trenutno neobjavljeno

[S] G. Segal, *Unitary representations of some infinite-dimensional groups,* Commun. Math. Phys. **80** (1981), 301–342.

Sažetak

Za afinu Liejevu algebru $\tilde{\mathfrak{g}}$ tipa $A_\ell^{(1)}$ promatramo $\mathbb{Z}-$gradaciju

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1$$

induciranu izabranom $\mathbb{Z}-$gradacijom pripadne proste konačnodimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Potprostor Feigin-Stojanovskog $W(\Lambda)$ definiramo kao $\tilde{\mathfrak{g}}_1-$podmodul standardnog $\tilde{\mathfrak{g}}-$modula $L(\Lambda)$ dan s

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda \subset L(\Lambda),$$

gdje je s v_Λ označen vektor najveće težine modula $L(\Lambda)$.

Koristeći poznati kombinatorni opis baza potprostora $W(\Lambda)$ te operatore ispreplitanja među standardnim modulima, nalazimo egzaktne nizove potprostora Feigin-Stojanovskog istog nivoa, odakle kao posljedicu dobivamo sustave rekurzivnih relacija za formalne karaktere tih potprostora.

Specijalno, za afinu Liejevu algebru $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})\tilde{}$ rješavanjem gore spomenutog sustava dobivamo formule karaktera svih potprostora $W(\Lambda)$ za proizvoljan nivo, dok za afinu Liejevu algebru $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{C})\tilde{}$ općeg ranga dobivamo formule karaktera potprostora $W(\Lambda)$ za nivo jedan.

Summary

For an affine Lie algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ of type $A_\ell^{(1)}$ we observe the $\mathbb{Z}-$gradation

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1$$

induced by the chosen $\mathbb{Z}-$gradation of the underlying simple finite dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}$. Define a Feigin-Stoyanovsky's subspace $W(\Lambda)$ as a $\tilde{\mathfrak{g}}_1-$submodule of a standard $\tilde{\mathfrak{g}}-$module $L(\Lambda)$ given by

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda \subset L(\Lambda),$$

where v_Λ denotes a fixed highest weight vector of $L(\Lambda)$.

By using the known description of combinatorial bases for all $W(\Lambda)$, as well as certain intertwining operators between standard modules, we obtain the exact sequences of Feigin-Stoyanovsky's subspaces at fixed level. This directly leads to systems of recursive relations for formal characters of those subspaces.

Particularly, by solving the above mentioned system for afine Lie algebra $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})\tilde{}$ we obtain character formulas for all $W(\Lambda)$ at general level, while for afine Lie algebra $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})\tilde{}$ of general rank we get character formulas for all $W(\Lambda)$ at level one.

Životopis

Rođen sam 6. studenog 1976. godine u Zagrebu. Osnovnu školu sam završio u Velikoj Gorici, a srednju školu u Zagrebu. Studij matematike upisujem 1995. godine na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirao sam 2001. godine na smjeru Teorijska matematika. Diplomski rad pod mentorstvom "Adov teorem za Liejeve algebre" izradio sam pod vodstvom prof. dr. Mirka Primca. Od 2001. pohađam sveučilišni poslijediplomski doktorski studij na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Od iste sam godine zaposlen na Fakultetu kemijskog inženjerstva i tehnologije u Zagrebu u statusu znanstvenog novaka na projektu "Beskonačna analiza". Član sam Seminara za algebru. Na Fakultetu kemijskog inženjerstva i tehnologije vodim vježbe iz kolegija Matematika I, Matematika II te Osnove statistike okoliša i numeričke metode.