# Kombinatorne baze potprostora Feigin-Stojanovskog standardnih modula za afine Liejeve algebre tipa $A_\ell^{(1)}$ i operatori ispreplitanja

Goran Trupčević

9. svibnja 2008.

# Sadržaj

# Uvod

Neka je $\mathfrak{g}$ prosta Liejeva algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Cartanova podalgebra, $R$ odgovarajući sistem korijena. Tada imamo korijensku dekompoziciju $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$. Fiksiramo korijenske vektore $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Neka je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \tag{1}$$

$\mathbb{Z}$-gradacija od $\mathfrak{g}$, pri čemu je $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Takva gradacija odgovara izboru jedne minimalne težine od $\mathfrak{g}$. Sa $\Gamma \subset R$ označimo skup korijena od $\mathfrak{g}_1$.

Afina Liejeva algebra pridružena $\mathfrak{g}$ je $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, pri čemu je $c$ kanonski centralni element, a elementi $x_\alpha(n) = x_\alpha \otimes t^n$ su fiksirani realni korijenski vektori. Gradacija od $\mathfrak{g}$ inducira analognu $\mathbb{Z}$-gradaciju na $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1,$$

gdje je $\tilde{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ komutativna Liejeva algebra s bazom

$$\{x_\gamma(j) \mid j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma\}. \tag{2}$$

Neka je $L(\Lambda)$ standardni $\tilde{\mathfrak{g}}$-modul nivoa $k = \Lambda(c)$, s fiksiranim vektorom najveće težine $v_\Lambda$. Potprostor Feigin-Stojanovskog definiramo kao $\tilde{\mathfrak{g}}_1$-podmodul od $L(\Lambda)$ generiran sa $v_\Lambda$,

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda \subset L(\Lambda).$$

Ovaj potprostor je sličan glavnom potprostoru, uvedenom u [FS], gdje se umjesto $\mathbb{Z}$-gradacije (1) promatra trokutasta dekompozicija od $\mathfrak{g}$, i iz nje izvedena dekompozicija od $\tilde{\mathfrak{g}}$; u slučaju $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ te dvije definicije su ekvivalentne.

Problem koji promatramo je pronaći monomijalnu bazu prostora $W(\Lambda)$, tj. bazu koja se sastoji od vektora oblika $x(\pi)v_\Lambda$, gdje su $x(\pi)$ monomi u elementima baze (2). Za $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})$ i poseban izbor gradacije (1) takva baza konstruirana je u [P1] za sve $W(\Lambda)$. Za sve klasične proste Liejeve algebre, i sve moguće izbore gradacije (1) problem je riješen u [P2], ali samo za $W(\Lambda_0)$.

Traženje kombinatorne baze modula, i njihovih potprostora, pojavljuje se kao dio programa Lepowskog i Wilsona za proučavanje reprezentacija afinih Liejevih algebri i s njima povezanim kombinatornim identitetima putem verteks-operatora i $Z$-operatora (vidi [LW2,3,4], [LP1,2]). Njihov pristup problemu sastoji se od toga da se najprije pronađu relacije među monomima, zatim se na osnovu njih reducira razapinjući skup, i na kraju se pokaže linearna nezavisnost tako dobivenog razapinjućeg skupa.

Pokazuje se da se razapinjući skup $\{x(\pi)v_\Lambda\}$ od $W(\Lambda)$ može svesti do baze tako da se promatra adjungirano djelovanje od $\mathfrak{g}_0$ na skup relacija

$$\sum_{r_1+\cdots+r_{k+1}=n} x_\gamma(r_1)\cdots x_\gamma(r_{k+1}), \qquad n\in\mathbb{Z},$$

za neki $\gamma\in\Gamma$, tj. tako da se promatra tzv. $\mathfrak{g}_0$-modul relacija na $W(\Lambda)$. Linearna nezavisnost tako reduciranog skupa izvodnica dokazana je u [P1] korištenjem verteks-operatora i Schurovih funkcija. U [P2] je linearna nezavisnost dokazana pomoću formule karaktera za kristalne baze.

U [G] je za glavni potprostor Feigin-Stojanovskog za $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$ linearna nezavisnost monomijalne baze dokazana induktivno, korištenjem operatora ispreplitanja među modulima određenog nivoa $k$. Sličan pristup iskorišten je i u [CLM1] i [CLM2] kako bi se pomoću operatora ispreplitanja dobile Rogers-Selbergove rekurzije za karaktere glavnih potprostora standardnih modula nivoa $k$ za $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Taj je pristup iskorišten u [P3] za novi dokaz linearne nezavisnosti baze prostora Feigin-Stojanovskog dobivene u [P1], uz naznaku da bi se tim putem mogli generalizirati i ostali slučajevi. U ovom radu cilj nam je proširiti taj rezultat na sve moguće izbore $\mathbb{Z}$-gradacije za $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$.

Ilustrirat ćemo naš pristup na primjeru $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, za standardne module nivoa 1. Neka je $R=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_1-\alpha_2\}$ sistem korijena od $\mathfrak{g}$; označimo s $\gamma_1=\alpha_1,\gamma_2=\alpha_1+\alpha_2$, $\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2\}$. Tada imamo $\mathbb{Z}$- gradaciju (1), pri čemu je $\mathfrak{g}_{\pm1}=\sum_{\gamma\in\pm\Gamma}\mathfrak{g}_\gamma$, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_{\alpha_2}\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}_{-\alpha_2}$. Ovakva gradacija odgovara izboru minimalne težine $\omega=\omega_1$; onda je $\Gamma=\{\gamma\in R\,|\,\langle\gamma,\omega\rangle=1\}$.

Prema Poincaré-Birkhoff-Wittovom teoremu, potprostori $W(\Lambda_0)$, $W(\Lambda_1)$, $W(\Lambda_2)$ imaju skup generatora sastavljen od monomijalnih vektora

$$x(\pi)v_{\Lambda_i}=\ldots x_{\gamma_1}(-2)^{a_2}x_{\gamma_2}(-2)^{b_2}x_{\gamma_1}(-1)^{a_1}x_{\gamma_2}(-1)^{b_1}v_{\Lambda_i},$$

$i=0,1,2$. Da reduciramo taj skup do baze, krećemo od relacija

$$\sum_{r+s=n} x_{\gamma_2}(-r)x_{\gamma_2}(-s)=0,$$

za $n \in \mathbb{N}$. Adjungiranim djelovanje od $U(\mathfrak{g}_0)$ dobit ćemo još relacija na $W(\Lambda_i)$:

$$\sum_{r+s=n} x_{\gamma_i}(-r)x_{\gamma_j}(-s) = 0,$$

za $1 \leq i \leq j \leq 2$. Zbog tih relacija možemo iz razapinjućeg skupa isključiti sve monomijalne vektore koji sadrže faktore

$$x_{\gamma_i}(-r)x_{\gamma_j}(-r),\ x_{\gamma_i}(-r-1)x_{\gamma_i}(-r),$$

za $i \leq j$, $r \in \mathbb{N}$. To čini tzv. uvjete razlike na monomijalne vektore. Njih možemo zapisati i u terminima eksponenata $a_r, b_r$: monom $x(\pi)$ će zadovoljavati uvjete razlike ako eksponenti zadovoljavaju niz nejednakosti

$$\begin{aligned} b_{r+1} + a_r + b_r &\leq 1, \\ a_{r+1} + b_{r+1} + a_r &\leq 1, \end{aligned}$$

za $r \in \mathbb{N}$.

Također, iz razapinjućeg skupa ćemo izbaciti i one monome koji poništavaju $v_{\Lambda_i}$; za $\Lambda_0$ time nećemo dobiti dodatne uvjete na monome, za $\Lambda_1$ ćemo izbaciti sve monome koji sadrže $x_{\gamma_1}(-1)$ ili $x_{\gamma_2}(-1)$, a za $\Lambda_2$ sve monome koji sadrže $x_{\gamma_2}(-1)$. Preko eksponenata, te uvjete možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &\leq 0 \qquad \text{za } \Lambda_1, \\ b_1 &\leq 0 \qquad \text{za } \Lambda_2. \end{aligned}$$

To su tzv. početni uvjeti na monome.

Da dokažemo linearnu nezavisnost ovako reduciranog razapinjućeg skupa, koristit ćemo operatore ispreplitanja koji dolaze iz konstrukcije standardnih modula pomoću verteks-operatora. Neka su

$$\begin{aligned} V_P &= M(1) \otimes \mathbb{C}[P], \\ V_Q &= M(1) \otimes \mathbb{C}[Q], \end{aligned}$$

gdje je $M(1)$ ireducibilan modul za Heisenbergovu algebru, a $\mathbb{C}[P]$ i $\mathbb{C}[Q]$ grupne algebre pridružene težinskoj, odn. korijenskoj rešetci. Onda verteks-operatori pridruženi elementima iz $R \subset Q$ definiraju djelovanje od $\tilde{\mathfrak{g}}$ na $V_P$ i vrijedi:

$$\begin{gathered} V_P = V_Q \oplus e^{\omega_1}V_Q \oplus e^{\omega_2}V_Q \\ L(\Lambda_0) \cong V_Q,\ L(\Lambda_1) \cong e^{\omega_1}V_Q,\ L(\Lambda_2) \cong e^{\omega_2}V_Q. \end{gathered}$$

Ako malo modificiramo verteks-operatore pridružene elementima težinske rešetke, $\lambda \in P$, dobit ćemo operatore ispreplitanja među standardnim modulima. Ako je još $\lambda$ oblika $\lambda = n_1(\omega_1 - \omega_2) + n_2\omega_2$, za $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$, onda će pripadni operatori ispreplitanja komutirati sa djelovanjem od $\tilde{\mathfrak{g}}_1$. Osim operatora ispreplitanja, iz ove konstrukcije dobivamo i operator $e(\omega)$, koji je modificiran operator množenja s $e^\omega$ u grupnoj algebri. Operator $e(\omega)$ je injekcija, preslikava jedan potprostor Feigin-Stojanovskog u drugi, i vrijedi

$$x_\gamma(-r)e(\omega) = e(\omega)x_\gamma(-r+1),$$

$r \in \mathbb{N}$.

Koristeći ovakve operatore ispreplitanja i operator $e(\omega)$, dobivamo sljedeću propoziciju koja je ključna pri dokazu linearne nezavisnosti:

**Propozicija 11** *Neka monom $x(\pi)$ zadovoljava uvjete razlike i početne uvjete na modulu $L(\Lambda)$. Neka je $x(\pi) = x(\pi_2)x(\pi_1)$, gdje $x(\pi_1)$ sadrži sve faktore stupnja $-1$, a $x(\pi_2)$ sve ostale. Tada postoji koeficijent operatora ispreplitanja,*

$$w(\mu) : L(\Lambda) \to L(\Lambda')$$

*takav da*

- $x(\pi_1)v_\Lambda \xrightarrow{w(\mu)} Ce(\omega)v_{\Lambda'}, \quad C \in \mathbb{C}^\times,$

- *$x(\pi_2^+)$ zadovoljava PU i UR na $W(\Lambda')$, gdje je $x(\pi_2^+)$ monom dobijen iz $x(\pi_2)$ tako da svim faktorima dignemo stupanj za $1$,*

- *$x(\pi_1)$ je maksimalan za $w(\mu)$, tj. svi monomi $x(\pi')$ takvi da $w(\mu)$ ne poništava $x(\pi')v_\Lambda$, imaju $(-1)$-dio manji ili jednak $x(\pi_1)$ (u leksikografskom uređaju na skupu monoma).*

Dokaz linearne nezavisnosti provodimo indukcijom po stupnju monoma, te po uređaju na skupu monoma, istovremeno za sve standardne module nivoa 1. Pretpostavimo da imamo relaciju

$$\sum c_\pi x(\pi)v_\Lambda = 0. \tag{3}$$

Fiksirajmo monom $x(\pi)$ iz (3) i pretpostavimo da je

$$c_{\pi'} = 0 \quad \text{za} \quad x(\pi') < x(\pi).$$

Pokazat ćemo da je onda i $c_\pi = 0$. Odaberemo operator $w(\mu)$ kao gore, i s njim djelujemo na relaciju (3). Imamo

$$0 = w(\mu)\sum c_{\pi'}x(\pi')v_\Lambda = \sum c_{\pi'}x(\pi_2')w(\mu)x(\pi_1')v_\Lambda.$$

U gornjoj sumi će ostati samo oni monomi $x(\pi')$ koji imaju isti $(-1)$-dio kao i $x(\pi)$. Dobit ćemo

$$0 = \sum_{\pi_1'=\pi_1} c_{\pi'} x(\pi_2') C e(\omega) v_{\Lambda'} = C e(\omega) \sum_{\pi_1'=\pi_1} c_{\pi'} x(\pi_2'^{+}) v_{\Lambda'}.$$

Vektori $x(\pi_2'^{+})v_{\Lambda'}$ mogu biti različiti od 0 samo ako $x(\pi_2'^{+})$ zadovoljava početne uvjete za $L(\Lambda')$. Posebno, prema propoziciji 11, to vrijedi za $x(\pi)$. Budući da je $e(\omega)$ injekcija, slijedi

$$\sum_{\pi_1'=\pi_1} c_{\pi'} x(\pi_2'^{+}) v_{\Lambda'} = 0.$$

Tvrdnja će sada slijediti indukcijom po stupnju monoma.

Za više nivoe možemo ponoviti ovaj postupak. Uvjete razlike dobit ćemo adjungiranim djelovanjem od $U(\mathfrak{g}_0)$ na

$$\sum_{r_1+\cdots+r_{k+1}=n} x_\gamma(r_1)\cdots x_\gamma(r_{k+1}),$$

$n \in \mathbb{N}$. Početne uvjete dobit ćemo slično kao i ranije. Pokazuje se da tako dobivene uvjete razlike i početne uvjete možemo, pomoću ulaganja standardnih modula nivoa $k > 1$ u tenzorski produkt mopdula nivoa 1, izraziti pomoću uvjeta razlike i početnih uvjeta za nivo1. Tada možemo dokazati analogon propozicije 11 i sličnim argumentom pokazati linearnu nezavisnost razapinjućeg skupa.

Za više rangove uvjeti razlike i početni uvjeti postaju kombinatorno složeniji, međutim svejedno možemo provesti ovaj dokaz.

Na kraju ćemo ukratko izložiti sadržaj ovog rada. U sljedećem, pripremnom poglavlju prikazane su osnovni objekti i osnovne tehnike formalnog računa te definirane algebre verteks-operatora i operatori ispreplitanja. Standardni moduli za afine Liejeve algebre i pripadni potprostori Feigin-Stojanovskog, centralni objekti koje promatramo u ovome radu, uvedeni su u 2. poglavlju. U 3. poglavlju je dana konstrukcija standardnih modula preko algebre verteks-operatora pridružene težinskoj rešetci. Preko te konstrukcije dolazimo i do operatora $e(\omega)$ te operatora ispreplitanja među standardnim modulima. U idućem poglavlju ja za module nivoa 1 opisana baza potprostora $W(\Lambda)$. Najprije su pronađeni uvjeti razlike i početni uvjeti, a zatim su proučeni operatori ispreplitanja i pokazana propozicija 11 te je na kraju pomoću nje dokazana linearna nezavisnost. Zatim su u naredna dva poglavlja opisani uvjeti razlike i početni uvjeti za module općeg nivoa $k$. U 7. poglavlju je dokazan teorem 16 kojim su uvjeti razlike i početni uvjeti na višim nivoima iskazani u terminima uvjeta razlike i početnih uvjeta na nivou 1. Ta činjenica je omogućila da u 8. poglavlju pokažemo propoziciju 21 kojom je poopćena propozicija 11 na više nivoe, te da potom damo dokaz linearne nezavisnosti u općem slučaju (teorem 20). U završna dva poglavlja je baza čitavog modula opisana kao svojevrstan projektivni limes baze modula Feigin-Stojanovskog, te je uz pomoć teorema 20 dana prezentacija od $W(\Lambda)$ kao kvocijenta algebre polinoma po određenom idealu.

*Zahvaljujem se prof. dr. sc. Mirku Primcu na prijedlogu teme, pomoći i angažmanu tijekom rješavanja problema. No prije svega, zahvalio bih mu se na ugodnoj i poticajnoj atmosferi koja je vladala za vrijeme brojnih diskusija vođenih tijekom izrade ovog rada.*

*Također se zahvaljujem i drugim dvama sudionicima većine tih diskusija, kolegama Ivani Baranović i Miroslavu Jerkoviću, na pomoći i pozornosti koju su mi pružili.*

*Zahvaljujem se Simpi, koja je zaslužna za dokaz teorema 16.*

*Na kraju, zahvaljujem se Idi, Vinku, Mariju, Domagoju, Zrinki, Mirsadu, Tomislavu, Miji, Asji, Ireni, Marijanu, Zvjezdanu, Andriji, Andreju, Janku, Mirti, Dubravci, Violeti, Marijeti, Gabrijeli, Anđi, Josipu, Ozrenu, Juliju, Maji, Zorani, Nevenu, Borisu, Mireli, Ratku, mami, tati, Petru Maksu, Maši, Miroju, Bibi, Kazimiru, Kristini, Viti i Jagoru i svim ostalim prijateljima na ljubavi, prijateljstvu i podršci.*

# Poglavlje 1

# Verteks-algebre i algebre verteks-operatora

U ovom pripremnom poglavlju izložit ćemo osnovne definicije, operacije i svojstva formalnih redova. Potom ćemo definirati verteks-algebre i algebre verteks-operatora, dati njihova osnovna svojstva, te skicirati pristup verteks-algebrama preko teorije lokalnih polja.

Za potpuniji uvid u tehnike formalnog računa, čitatelj može pogledati [LL], [FLM] i [FHL]. Dokazi pojedinih teorema vezanih uz verteks-algebre i algebre verteks-operatora mogu se naći u [LL], [FLM], [FHL] i [Li].

## 1.1 Formalni račun

Neka su $x$, $y$, $z$, $z_0$, $z_1, \cdots$ međusobno komutirajuće formalne varijable. Sa $\mathbb{Z}_+$ ćemo označavati skup nenegativnih cijeli brojeva. Ako eksplicitno ne bude rečeno drugačije, svi će vektorski prostori biti gledani nad $\mathbb{C}$.

Za vektorski prostor $V$ uvodimo prostore formalnih redova na $V$

$$V\{z\} = \{\sum_{n \in \mathbb{C}} v_n z^n \,|\, v_n \in V\}.$$

Uočimo da indeksi $n$ ne idu samo po cijelim brojevima, već su definirani na čitavom skupu kompleksnih brojeva. Međutim, u tipičnom slučaju, indeksi će se kretati po konačnoj uniji klasa od $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{C}$. U slučaju da je $V = \operatorname{End} W$ umjesto $v_n$ ponekad pišemo $v(n)$.

Imamo sljedeće potprostore od $V\{z\}$:

$$V[[z,z^{-1}]] = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n \mid v_n \in V\},$$
$$V[z] = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} v_n z^n \mid v_n \in V, v_n = 0 \ \text{ za } n \text{ dovoljno velik}\}.$$

Izraz "za $n$ dovoljno velik (malen)" značit će da postoji $N$ takav da tvrdnja vrijedi za sve $n \geq N$ (tj. $n \leq N$).

$$V[z,z^{-1}] = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n \mid v_n \in V, v_n = 0 \ \text{ za sve osim konačno mnogo } n\},$$
$$V[[z]] = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} v_n z^n \mid v_n \in V\},$$
$$V((z)) = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n \mid v_n \in V, v_n = 0 \ \text{ za } n \text{ dovoljno malen}\}.$$

Slično definiramo formalne redove u više (međusobno komutirajućih) varijabli.

Ako je $V$ asocijativna algebra, onda su i $V[z]$, $V[z,z^{-1}]$ i $V[[z]]$ također asocijativne algebre, npr. za $V = \operatorname{End} W$.

Neka je $(x_i)_{i\in I}$ familija operatora u $\operatorname{End} W$. Kažemo da je familija $(x_i)_{i\in I}$ *sumabilna* ako je za sve $v \in V$, $x_i(v) = 0$ za sve osim konačno mnogo $i \in I$. U tom slučaju imamo dobro definiran operator $\sum_{i\in I} x_i \in \operatorname{End} W$. Za familiju formalnih redova operatora $(X_i(z))_{i\in I}$ kažemo da je *sumabilna* ako su koeficijenti uz svaku potenciju od $z$ sumabilni, dobiveni red označavamo sa $\sum_{i\in I} X_i(z)$.

Kažemo da produkt redova operatora $(X_i(z))_{i=1}^r$ postoji ako koeficijenti uz svaku potenciju od $z$ u formalnom produktu

$$X_1(z)\cdots X_r(z) = \sum_{n\in\mathbb{C}} \left( \sum_{n_1+\cdots+n_r=n} x_i(n_i) \right) z^n \tag{1.1}$$

čine sumabilnu familiju. Tada je sa (1.1) dobro definiran element iz $(\operatorname{End} W)\{z\}$. Slično definiramo i limes $\lim_{z_1\to z_2} X(z_1,z_2)$ za $X(z_1,z_2) \in (\operatorname{End} W)\{z_1,z_2\}$.

Pretpostavimo da postoji produkt $X_1(z)\cdots X_r(z)$ te da za fiksan $q$, $1 \leq q \leq r$ postoje produkti $X_1(z)\cdots X_q(z)$ i $X_{q+1}(z)\cdots X_r(z)$. Tada postoji i produkt potonja dva reda, i on je jednak $X_1(z)\cdots X_r(z)$. Pri množenju formalnih redova treba biti oprezan. Pogledajmo sljedeći "primjer":

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n &= \left( \left( \sum_{n\geq 0} z^n \right) (1-z) \right) \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n = \\
&= \left( \sum_{n\geq 0} z^n \right) \left( (1-z) \left( \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n \right) \right) = \left( \sum_{n\geq 0} z^n \right) 0 = 0.
\end{aligned}
$$

U ovom primjeru imamo tri reda čiji produkt ne postoji u smislu definicije (1.1), iako postoje potprodukti $(\sum_{n\geq 0} z^n)(1-z)$ i $(1-z)\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$. Zbog toga dobijamo "identitet" koji očigledno ne vrijedi.

Red koji se pojavljuje u gornjem "identitetu" jedan je od središnjih objekata u formalnom računu. *Formalna $\delta$-funkcija* je formalni red

$$\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]].$$

Ona predstavlja algebarski analogon $\delta$-funkcije; tj. vrijedi

**Propozicija 1** *Neka je $f(z) \in V[z, z^{-1}]$. Onda je*

$$f(z)\delta(z) = f(1)\delta(z).$$

Tvrdnja se može lako provjeriti za monome $f(z) = z^n$ i potom prošiti na $V[z, z^{-1}]$. To svojstvo možemo poopćiti na razne načine; općenito, kada neki izraz množimo sa $\delta$-funkcijom, možemo formalno staviti da je argument u $\delta$-funkciji jednak 1, pod uvjetom da dobiveni algebarski izraz ima smisla. Na primjer, za dvije varijable je

$$f(z_1, z_2)\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = f(z_1, z_1)\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = f(z_2, z_2)\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right), \tag{1.2}$$

za $f(z_1, z_2) \in V[z_1, z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}]$.

Za $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{C}} v_n z^n \in V\{z\}$, definiramo formalnu *derivaciju*:

$$\frac{d}{dz} f(z) = f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{C}} n v_n z^{n-1},$$

i formalni *reziduum* kao koeficijent od $z^{-1}$ u $f(z)$:

$$\mathrm{Res}_z f(z) = v_{-1}$$

Iz formule za derivaciju produkta slijedi

$$\mathrm{Res}_z(f'(z)g(z)) = -\mathrm{Res}_z(f(z)g'(z)).$$

za $f(z) \in \mathbb{C}((z))$, $g(z) \in V((z))$, odnosno uvijek kad su ovi produkti dobro definirani.

Formalne parcijalne derivacije i reziduum također, na očiti način, definiramo i u slučaju više varijabli.

Za $\alpha \in \mathbb{C}$, definiramo formalni red $(z_1 + z_2)^\alpha$ kao

$$(z_1 + z_2)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z_1^{\alpha-k} z_2^k,$$

gdje je $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Primijetimo da su sve potencije od druge nepoznanice, u gornjoj formuli je to $z_2$, nenegativne cijele. Za $\alpha \in \mathbb{Z}$ je gornji red u stvari razvoj racionalne funkcije $(z_1 + z_2)^\alpha$ u području $|z_1| > |z_2| > 0$. Općenito, ne mora vrijediti $(z_1 + z_2)^\alpha = (z_2 + z_1)^\alpha$, jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Lagano se provjerava da je $((z_1+z_2)+z_3)^\alpha = (z_1 + (z_2 + z_3))^\alpha$ za sve $\alpha \in \mathbb{C}$.

Za $n \in \mathbb{Z}$ i $r \in \mathbb{Z}_+$, vrijedi sljedeća relacija među parcijalnim derivacijama binomnog reda

$$\frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^r (z_1 + z_2)^n = \binom{n}{r} (z_1 + z_2)^{n-r} = \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^r (z_1 + z_2)^n.$$

Za $v(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n$, je onda

$$\begin{aligned} v(z + z_0) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n (z + z_0)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} \binom{n}{i} v_n z^{n-i} z_0^i \\ &\in V[[z, z^{-1}, z_0]], \end{aligned}$$

i, posebno, formalni red $v(z + z_0)$ je definiran. On je povezan sa višim derivacijama od $v(z)$ preko formalnog Taylorovog teorema:

**Propozicija 2** *Neka je $v(z) \in V[[z, z^{-1}]]$. Tada vrijedi*

$$e^{z_0 \frac{\partial}{\partial z}} f(z) = f(z + z_0).$$

Obično ćemo umjesto $z$ kao argument $\delta$-funkcije imati racionalnu funkciju, kao npr.

$$\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_0^{-n} (z_1 - z_2)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} (-1)^k \binom{n}{k} z_0^{-n} z_1^{n-k} z_2^k.$$

Imamo sljedeća dva važna svojstva $\delta$-funkcije:

**Propozicija 3**

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)=z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_0+z_2}{z_1}\right),$$

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)-z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right).$$

*Dokaz:* Primijetimo da je

$$\frac{\partial}{\partial z_1}z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_0}\right)=-\frac{\partial}{\partial z_0}z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_0}{z_1}\right),$$

pa u Taylorovoj formuli možemo zamijeniti parcijalne derivacije. Imamo

$$\begin{aligned} z_0^{-1}\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right) &= e^{-z_2\frac{\partial}{\partial z_1}}z_0^{-1}\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\delta\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\\ = e^{z_2\frac{\partial}{\partial z_0}}z_1^{-1}\left(\frac{z_0}{z_1}\right)\delta\left(\frac{z_0}{z_1}\right) &= z_1^{-1}\left(\frac{z_0+z_2}{z_1}\right)\delta\left(\frac{z_0+z_2}{z_1}\right).\end{aligned}$$

Druga jednakost se slično dokazuje; koristeći

$$(z_1-z_2)^{-1}+(z_2-z_1)^{-1}=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right),$$

pokaže se da je lijeva strana jednaka

$$z_2^{-1}e^{-z_0\frac{\partial}{\partial z_1}}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right).$$

Iz prvog identiteta odmah slijedi

**Propozicija 4**

$$\frac{\partial}{\partial z_0}z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)=\frac{\partial}{\partial z_2}z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)=-\frac{\partial}{\partial z_1}z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right).$$

Kao što smo već rekli, fundamentalno svojstvo $\delta$-funkcije može se poopćiti na razne načine. Sljedeća propozicija daje dva poopćenja koja će nam biti interesantna

**Propozicija 5** a) *Neka je* $f(z_1,z_2)\in(EndV)[[z_1,z_2,z_1^{-1},z_2^{-1}]]$, *takav da postoji*

$$\lim_{z_1\to z_2}f(z_1,z_2).$$

*Onda je*

$$f(z_1, z_2)\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = f(z_2, z_2)\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = f(z_1, z_1)\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right),$$

*i svi navedeni izrazi postoje.*
b) *Neka je* $f(z_1, z_2, z_0) \in (End V)[[z_1, z_1^{-1}, z_2, z_2^{-1}, z_0, z_0^{-1}]]$, *takva da postoji limes*

$$\lim_{z_1 \to z_2} f(z_1, z_2, z_0),$$

*te takav da je za sve* $v \in V$

$$f(z_1, z_2, z_0)v \in V[[z_1, z_1^{-1}, z_2, z_2^{-1}]]((z_0)).$$

*Onda je*

$$z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1}\right) f(z_1, z_2, z_0) = z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1}\right) f(z_2 - z_0, z_2, z_0).$$

*Slično smo na desnoj strani mogli napraviti zamjenu* $z_2 = z_1 + z_0$.

**Lema 6** *Ako su* $m, n \in \mathbb{Z}_+$ *i* $m > n$, *onda je*

$$(z_1 - z_2)^m \delta^{(n)}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0.$$

*Dokaz:* Dokaz provodimo indukcijom; za $n = 0$ iz osnovnog svojstva $\delta$-funkcije, odnosno iz jednakosti (1.2), slijedi

$$(z_1 - z_2)^m \delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0 \quad \text{za sve } m > 0.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n$. Za $m > n + 1$ je onda prema pretpostavci

$$(z_1 - z_2)^{m-1} \delta^{(n)}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0, \quad (z_1 - z_2)^m \delta^{(n)}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0.$$

Parcijalno deriviramo drugu jednakost po $z_1$. Prva jednakost onda povlači

$$(z_1 - z_2)^m \delta^{(n+1)}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0,$$

čime je tvrdnja dokazana.

## 1.2 Definicija i osnovna svojstva

*Verteks-algebra* je vektorski prostor $V$ snabdjeven s linearnim preslikavanjem

$$\begin{aligned} Y : V &\to (\operatorname{End} V)\{z\} \\ v &\mapsto Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}. \end{aligned}$$

Koeficijent $v_n$ od $Y(v,z)$ koji stoji uz $z^{-n-1}$ je linearni endomorfizam od $V$. Formalni red $Y(v,z)$ zovemo *verteks-operator* pridružen vektoru $v$. Nadalje, postoji istaknuti vektor $\mathbf{1} \in V$, nazivamo ga *vakuum*, te linearni endomorfizam $D \in \operatorname{End} V$ . Također, za vektore $u, v \in V$ zadovoljeni su sljedeći uvjeti:

$$u_n v = 0 \quad \text{za } n \text{ dovoljno velik,}$$

odnosno formalni red $Y(u,z)v$ ima samo konačno mnogo negativnih potencija od $z$, tj.

$$Y(u,z)v \in V((z)); \tag{1.3}$$

vrijedi *svojstvo vakuuma*:

$$Y(\mathbf{1},z) = 1, \tag{1.4}$$

gdje 1 na desnoj strani označava operator identitete;
imamo *svojstvo derivacije*:

$$[D, Y(v,z)] = Y(D(v),z) = \frac{d}{dz}Y(v,z); \tag{1.5}$$

vrijedi *pravilo stvaranja*:

$$Y(v,z)\mathbf{1} \in V[[z]] \quad \text{i} \quad \lim_{z\to 0} Y(v,z)\mathbf{1} = v, \tag{1.6}$$

tj. $Y(v,z)\mathbf{1}$ sadrži samo nenegativne potencije od $z$ i konstantni član je upravo jednak vektoru $v$; i naposljetku, vrijedi *Jacobijev identitet:*

$$\begin{aligned} &z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u,z_1)Y(v,z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(v,z_2)Y(u,z_1) \\ &\quad = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(u,z_0)v,z_2) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Verteks-algebru obično označavamo kao uređenu četvorku

$$(V, Y, \mathbf{1}, D)$$

ili kraće samo sa $V$.

**Napomena 1** Kako vidimo, verteks-algebra nije algebra u pravom smislu. Na verteks-algebru možemo gledati kao na vektorski prostor na kojem imamo definirano beskonačno mnogo množenja $u_n v$. Verteks-operator pridružen vektoru $v$ onda predstavlja funkciju izvodnicu za lijeva množenja sa $v$, a formule iz definicije su funkcije izvodnice za relacije koje vrijede na $V$.

**Napomena 2** Preslikavanje

$$Y : V \to (\operatorname{End} V)\{z\}$$

prirodno se proširuje do preslikavanja

$$\begin{array}{rcl} Y : V\{z_0\} & \to & (\operatorname{End} V)\{z_0, z\} \\ v(z_0) & \mapsto & Y(v(z_0), z). \end{array}$$

Točnije, ako je

$$v(z_0) = \sum_{n \in \mathbb{C}} v_n z_0^n \in V\{z_0\}$$

($v_n \in V$), onda definiramo

$$Y(v(z_0), z) = \sum_{n \in \mathbb{C}} Y(v_n, z) z_0^n.$$

U tom smislu treba promatrati izraz $Y(Y(u, z_0)v, z_2)$ u Jacobijevom identitetu.

**Napomena 3** U definiciji verteks-algebre ne moramo zahtijevati postojanje linearnog endomorfizma $D$ koji zadovoljava svojstvo derivacije. Njega možemo dobiti iz ostalih aksioma tako da definiramo

$$D(v) = v_{-2}\mathbf{1} \quad \text{za } v \in V.$$

Za tako definiran operator $D$ onda vrijedi spomenuto svojstvo.

**Napomena 4** Uz prisustvo ostalih aksioma, pravilo stvaranja možemo zamijeniti *uvjetom injektivnosti*:

$$Y(v, z) = 0 \quad \text{povlači} \quad v = 0.$$

Preko toga možemo strukturu verteks-algebre prenijeti sa prostora $V$ na prostor verteks-operatora $Y(v, z)$, $v \in V$. Vidjet ćemo kasnije kako se definiraju množenja između verteks-operatora. U fizici se to naziva *korespondencija između stanja (vektora) i polja (verteks-operatora).*

Uzimanjem odgovarajućih koeficijenata u Jacobijevom identitu, kao posljedicu, odnosno kao posebne slučajeve, dobivamo *formulu za komutator* i *iterativnu formulu.* Najprije, uzimanjem $\mathrm{Res}_{z_0}$ u Jacobijevom identitetu, na lijevoj strani ćemo dobiti upravo komutator verteks-operatora $Y(u, z_1)$ i $Y(v, z_2)$. Imamo formulu za komutator:

$$[Y(u, z_1), Y(v, z_2)] = \mathrm{Res}_{z_0} z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(u, z_0)v, z_2). \tag{1.8}$$

Primijetimo da na desnoj strani formule za komutator bitnu ulogu ima samo singularni dio od $Y(u, z_0)v$ (koji sadrži samo negativne potencije od $z_0$) jer se po definiciji izraz $z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)$ razvija u nenegativne potencije od $z_0$. Koristeći osnovna svojstva delta funkcije (propozicija 3) i formalnu Taylorovu formulu, formulu za komutator možemo dalje napisati na sljedeće način

$$[Y(u, z_1), Y(v, z_2)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^i z_1^{-1} \delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\right) Y(u_i v, z_2).$$

Uzmemo li pak u Jacobijevom identitetu $\mathrm{Res}_{z_1}$, pri čemu desnu stranu transformiramo koristeći propoziciju 3, dobit ćemo *iterativnu formulu* za verteks-operatore

$$\begin{aligned} Y(Y(u, z_0)v, z_2) \quad = \quad & \mathrm{Res}_{z_1} \left( z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u, z_1) Y(v, z_2) \right. \\ & \left. - z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(v, z_2) Y(u, z_1) \right) \end{aligned}$$

Pomoću propozicije 3 i propozicije 5b), prvi izraz na desnoj strani možemo pojednostaviti. Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned} & Y(Y(u, z_0)v, z_2) - Y(u, z_0 + z_2) Y(v, z_2) \\ & = \ -\mathrm{Res}_{z_1} z_0^{-1} \delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(v, z_2) Y(u, z_1). \end{aligned}$$

Iz formule za komutator i iterativne formule slijede svojstva *komutativnosti* i *asocijativnosti*:
Za sve $u, v \in V$ postoji nenegativan cijeli broj $m$ takav da vrijedi

$$(z_1 - z_2)^m Y(u, z_1) Y(v, z_2) - (z_1 - z_2)^m Y(v, z_2) Y(u, z_1) = 0.$$

Za sve $u, v, w \in V$ postoji nenegativan cijeli broj $l$, koji ovisi samo o $u$ i $w$, takav da vrijedi

$$(z_0 + z_2)^l Y(Y(u, z_0)v, z_2)w = (z_0 + z_2)^l Y(u, z_0 + z_2) Y(v, z_2)w.$$

**Napomena 5** Pokazuje se da su ova dva svojstva ekvivalentna Jacobijevom identitetu. Štoviše, dovoljno je u definiciji verteks-algebre umjesto Jacobijevog identiteta zahtijevati samo svojstvo komutativnosti.

*Algebra verteks-operatora* je verteks-algebra $V$ na kojoj postoji $\mathbb{Z}$-gradacija, tzv. *težinska gradacija*

$$V = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} V_n, \qquad \text{za } v \in V_n \ \text{ je } \ n = \operatorname{wt} v,$$

takva da je

$$\begin{aligned} &\dim V_n < \infty \qquad \text{za } n \in \mathbb{Z}; \\ &V_n = 0 \qquad \text{za } n \text{ dovoljno mali;} \end{aligned}$$

te postoji još jedan istaknuti vektor $\omega \in V_2$, kojeg zovemo *Virasoro vektor* ili *konformni vektor*, takav da je

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}c, \ \ m, n \in \mathbb{Z},$$

gdje je

$$Y(\omega, z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} L(m)z^{-m-2},$$

a $c \in \mathbb{C}$ kompleksan broj kojeg nazivamo *rang* od $V$. drugim riječima, verteks-operator pridružen vektoru $\omega$ daje reprezentaciju Virasorove algebre na $V$. Nadalje, težinska gradacija se podudara sa svojstvenim potprostorima operatora $L(0)$:

$$L(0)v = nv = (\operatorname{wt} v)v \qquad \text{za } v \in V_n, \ n \in \mathbb{Z};$$

operator $L(-1)$ djeluje kao operator derivacije ($D$ u definiciji verteks-algebre)

$$Y(L(-1)v, z) = \frac{d}{dz}Y(v, z) \qquad \text{za } v \in V.$$

Algebru verteks-operatora obično označavamo kao uređenu četvorku

$$(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$$

ili kraće samo sa $V$. $c$

Iz formule za komutator verteks-operatora lako se vidi

$$[L(0), Y(v, z)] = Y(L(0)v, z) + zY(L(-1)v, z).$$

Odatle vidimo da za homogeni vektor $v \in V$, operatori $v_n$ imaju težinu

$$\mathrm{wt}\, v_n = \mathrm{wt}\, v - n - 1.$$

*Modul* za verteks-algebru $V$ je vektorski prostor $W$ snabdjeven s linearnim preslikavanjem

$$\begin{aligned} Y_W : V &\to (\mathrm{End}\, W)\{z\} \\ v &\mapsto \sum_{n \in \mathbb{C}} v_n z^{-n-1}, \quad v_n \in \mathrm{End}\, W \end{aligned}$$

takvima da vrijede aksiomi verteks-algebre, (1.3), (1.5), (1.4) i (1.7) uz odgovarajuće izmjene, pri čemu kod aksioma (1.5) zahtijevamo da vrijedi samo druga jednakost, $Y(D(v), z) = \frac{d}{dz} Y(v, z)$. Modul obično označavamo kao uređeni par $(W, Y_W)$ ili kraće samo $W$.

*Modul* za algebru verteks-operatora $V$ je $\mathbb{C}$-graduirani vektorski prostor

$$W = \coprod_{n \in \mathbb{C}} W_n, \qquad \text{za } w \in W_n \text{ je } n = \mathrm{wt}\, w,$$

koji je modul za $V$ kao verteks-algebru, i vrijedi

$$\begin{aligned} &\dim W_n < \infty \quad \text{za } n \in \mathbb{C}, \\ &W_n = 0 \quad \text{za sve } n \text{ čiji je realni dio dovoljno mali,} \end{aligned}$$

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}(\mathrm{rank}\, V), \; m, n \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} L(0)w = nw = (\mathrm{wt}\, w)w \quad &\text{za } w \in W_n,\ n \in \mathbb{C}, \\ Y_W(L(-1)v, z) = \frac{d}{dz} Y_W(v, z) \quad &\text{za } v \in V, \end{aligned}$$

gdje je $Y_W(\omega, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} L(m) z^{-m-2}$.

Ranije smo već spomenuli da strukturu verteks-algebre možemo prenijeti sa prostora $V$ na pripadni prostor verteks-operatora $Y(v, z)$, $(v \in V)$. U praksi je čest obratan pristup; za vektorski prostor $W$ promatraju se formalni redovi sa koeficijentima u $\mathrm{End}\, W$. Za njih se zatim mogu definirati "$n$-ti" produkti. Pokazuje se da ako takvi redovi zadovoljavaju analogon svojstva komutativnosti, onda oni čine verteks-algebru i za koju je $W$ modul. Uz još neke dodatne pretpostavke, struktura verteks-algebre može se prenijeti natrag neki potprostor od $W$. Taj se pristup naziva teorija lokalnih polja, ovdje ćemo je iznijeti samo u osnovnim crtama.

Polazimo od vektorskog prostora $W$ i promatramo prostor formalnih redova operatora $(\operatorname{End} W)[[z, z^{-1}]]$. Kažemo da je formalni red

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} \in (\operatorname{End} W)[[z, z^{-1}]]$$

*polje* (ili slabi verteks-operator) na $W$ ako je

$$a(z)u \in W((z)) \quad \text{za sve } u \in W,$$

tj. $a_n u = 0$ za $n$ dovoljno velik. Sa $F(W)$ označimo prostor svih polja na $W$.

Za $n \in \mathbb{Z}$ definiramo "$n$-to" množenje na $F(W)$: za $a(z), b(z) \in F(W)$ stavimo

$$a(z)_n b(z) = \operatorname{Res}_{z_1} \left( (z_1 - z)^n a(z_1) b(z) - (-z + z_1)^n b(z) a(z_1) \right).$$

Tada je $a(z)_n b(z)$ ponovno element od $F(W$. Na $F(W)$ imamo još i linearni automorfizam $D = \frac{d}{dz}$, formalnu derivaciju.

**Napomena 6** Posebno, za $n = -1$, za $(-1)$-vi produkt dobivamo ono što se obično zove *normalno uređeni produkt* dva polja:

$$a(z)_{-1} b(z) = {}^\circ_\circ a(z) b(z) {}^\circ_\circ = a(z)^+ b(z) - b(z) a(z)^-,$$

gdje $a(z)^+$ označava regularni dio polja $a(z)$ (sa nenegativnim potencijama od $z$), a $a(z)^-$ singularni dio od $a(z)$ (negativne potencije od $z$). Ako pak dva polja međusobno komutiraju, tj. ako je

$$[a(z_1), b(z_2)] = 0,$$

onda umjesto normalno-uređenog produkta možemo uzeti običan produkt

$$a(z)_{-1} b(z) = a(z) b(z).$$

**Napomena 7** Prema definiciji verteks-algebri, verteks-operatori $Y(v, z)$ su polja na $V$. Jacobijev identitet pokazuje da su njihovi "$n$-ti" produkti upravo jednaki verteks-operatoru pridruženom "$n$-tom" produktu pripadnih vektora; preciznije

$$Y(u_n v, z) = Y(u, z)_n Y(v, z),$$

stoga će verteks-algebra koju čine polja $Y(v, z)$, $(v \in V)$ biti izomorfna originalnoj verteks-algebri $V$.

Za dva polja $a(z_1), b(z_2)$ kažemo da su *međusobno lokalna* (ili da zadovoljavaju slabu komutativnost) ako postoji nenegativan cijeli broj $k$ takav da je

$$(z_1 - z_2)^k \left(a(z_1)b(z_2) - b(z_2)a(z_1)\right) = 0.$$

Tzv. *Dongova lema* kaže da ako su $a(z), b(z), c(z)$ u parovima lokalna polja na $W$, tada su i polja $a(z)_n b(z)$ i $c(z)$ također međusobno lokalna.

Polje $a(z) \in F(W)$ naziva se *verteks-operator* ako je $a(z)$ lokalno sa samim sobom. Potprostor $A \subset F(W)$ naziva se *lokalnim potprostorom* ako su svaka dva polja iz $A$ međusobno lokalna.

**Teorem 7** *Ako je $A \subset F(W)$ lokalni potprostor polja na $W$, onda $A$ generira verteks-algebru $\langle A \rangle$ i $W$ je modul za tu verteks-algebru.*

Uz još neke dodatne uvjete, poput uvjeta injektivnosti za verteks-algebre, strukturu verteks-algebre možemo prenijeti s $\langle A \rangle$ na neki potprostor $V \subset W$.

## 1.3 Tenzorski produkt verteks-algebri i njihovih modula

U točki 3 ćemo vidjeti kako konstrukcija verteks-algebri pridruženih korijenskoj rešetci daje realizaciju standardnog modula $L(\Lambda_0)$ za afinu Liejevu algebru $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})$. On će nositi prirodnu strukturu algebre verteks-operatora. Ostale standardne module nivoa 1 vidjet ćemo opet u toj konstrukciji, ali ovoga puta primijenjenoj na težinsku rešetku, kao module za tu algebru verteks-operatora. Da dobijemo standardne module proizvoljnog nivoa $k$, moramo gledati tenzorski produkt verteks-algebri, odnosno tenzorski produkt njihovih modula.

Neka su $V_1, \ldots, V_r$ verteks-algebre. *Tenzorski produkt verteks-algebri* $V_1, \ldots, V_r$ kao vektorski prostor jednak je tenzorskom produktu pripadnih vektorskih prostora

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_r,$$

linearno preslikavanje $Y$ definirano je sa

$$Y(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r, z) = Y(v_1, z) \otimes \cdots \otimes Y(v_r, z),$$

za $v_i \in V_i$, a za vakuum uzimamo tenzorski produkt pripadnih vakkuma

$$\mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}.$$

Analogna konstrukcija vrijedi i za algebre verteks-operatora; za konformni vektor uzima se vektor

$$\omega = \omega_1 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \omega_r$$

(na taj način dobijamo reprezentaciju Virasorove algebre na tenzorskom produktu).

Najjednostavniji način da se dokaže Jacobijev identitet na tenzorskom produktu je koristeći svojstva komutativnosti i asocijativnosti, a njih se jednostavno može provjeriti za tenzorske produkte verteks-operatora.

Neka su dalje $W_i$ $V_i$-moduli, za $i = 1, \dots, r$. Onda je i tenzorski produkt

$$W = W_1 \otimes \cdots \otimes W_r$$

modul za $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$, uz prirodnu definiciju verteks-operatora

$$Y_W(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r, z) = Y_{W_1}(v_1, z) \otimes \cdots \otimes Y_{W_r}(v_r, z),$$

za $v_i \in V_i$.

U slučaju algebri verteks-operatora, potrebno je još dodatno zahtijevati da su težinski potprostori od $W$ konačno-dimenzionalni. U slučaju da su svi $W_i$ ireducibilni $V_i$-moduli, to će biti ispunjeno.

## 1.4 Operatori ispreplitanja

Operatori ispreplitanja u teoriji verteks-algebri čine analogon koncepta homomorfizma modula u teoriji Liejevih algebri. Ovdje ćemo dati samo osnovnu definiciju. U točki 3 ćemo vidjeti jedan primjer operatora ispreplitanja. Oni će igrati važnu ulogu u dokazu linearne nezavisnosti razapinjućeg skupa za potprostor Feigin-Stojanovskog.

Neka su $W_1, W_2, W_3$ moduli za algebru verteks-operatora $V$. Preslikavanje

$$\mathcal{Y}(\cdot, z) : W_1 \to (\mathrm{Hom}(W_2, W_3))\{z\},$$

naziva se *operator ispreplitanja tipa* $\binom{W_3}{W_1\ W_2}$ ako zadovoljava sva svojstva u definiciji modula koja imaju smisla. Preciznije:
za sve $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, je red

$$\mathcal{Y}(w_1, z)w_2$$

ograničen odozdo;
vrijedi Jacobijev identitet

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u, z_1)\mathcal{Y}(w_1, z_2)w_2 - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) \mathcal{Y}(w_1, z_2)Y(u, z_1)w_2$$
$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) \mathcal{Y}(Y(u, z_0)w_1, z_2)w_2,$$

za $u \in V$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$;
vrijedi svojstvo derivacije: za $w_1 \in W_1$

$$\mathcal{Y}(L(-1)w_1, z) = \frac{d}{dz}\mathcal{Y}(w_1, z).$$

**Napomena 8** Iako su, strogo govoreći prema definiciji, operatori ispreplitanja preslikavanja

$$\mathcal{Y}(\cdot, z) : W_1 \to (\mathrm{Hom}(W_2, W_3))\{z\},$$

mi ćemo zbog jednostavnosti pod operatorima ispreplitanja također podrazumijevati i polja koje takva preslikavanja pridružuju elementima iz $W_1$, tj. polja oblika

$$\mathcal{Y}(w, z) \in (\mathrm{Hom}(W_2, W_3))\{z\},$$

za $w \in W_1$.

# Poglavlje 2

# Potprostor Feigin-Stojanovskog

U ovom poglavlju uvodimo pojmove standardnih modula za afine Liejeve algebre i pripadne potprostore Feigin-Stojanovskog, sredinje objekte koje promatramo u ovom radu. Navest ćemo samo neke osnovne definicije i činjenice iz teorije afinih Liejevih algebri; detaljan prikaz te teorije može se naći u [K]. Za teoriju konačno-dimenzionalnih poluprostih Liejevih algebri, upućujemo čitatelja na [H].

## 2.1 Afine Liejeve algebre

Za $\ell \in \mathbb{N}$, neka je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}l(\ell + 1, \mathbb{C})$$

prosta Liejeva algebra tipa $A_\ell$. Neka je $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Cartanova podalgebra, $R$ odgovarajući sistem korijena. Fiksiramo bazu $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ od $R$. Tada imamo trokutastu dekompoziciju $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$; sa $R_+$, odnosno $R_-$, označimo skup pozitivnih i negativnih korijena, sa $\theta$ označimo maksimalan korijen u $R$. Neka je $\langle x, y \rangle = \operatorname{tr} xy$ normalizirana nesingularna invarijantna simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g}$. Preko forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ identificiramo $\mathfrak{h}$ s njenim dualom $\mathfrak{h}^*$. Neka je $\{\omega_1, \ldots, \omega_\ell\}$ dualna baza od $\Pi$, $\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, \ell$. Radi jednostavnosti notacije u kasnijem tekstu, uvodimo još i težinu $\omega_0 = 0$.

Fiksiramo Chevalleyjevu bazu od $\mathfrak{g}$, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in R} \cup \{\alpha_i\}_{i=1}^{\ell}$. Sa $Q = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i$ označimo korijensku rešetku, sa $P = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\omega_i$ težinsku rešetku.

Afina Liejeva algebra pridružena $\mathfrak{g}$ je

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d;$$

to je Kac-Moodyjeva Liejeva algebra tipa $A_\ell^{(1)}$. Standardno koristimo oznaku

$x(j) = x \otimes t^j$ za $x \in \mathfrak{g}, j \in \mathbb{Z}$. Komutacijske relacije u $\tilde{\mathfrak{g}}$ dane su sa

$$\begin{aligned} [c, \tilde{\mathfrak{g}}] &= 0, \\ [d, x(j)] &= jx(j), \\ [x(i), y(j)] &= [x, y](i+j) + i\langle x, y\rangle \delta_{i+j,0} c. \end{aligned}$$

Elemente $x(j)$ možemo složiti u formalni red $x(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x(-j-1) z^j$. Komutacijske relacije za $\tilde{\mathfrak{g}}$ možemo napisati i u terminima formalnih redova $x(z)$. Posljednja relacija tada izgleda ovako:

$$[x(z_1), y(z_2)] = [x, y](z_2) z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) - \langle x, y\rangle \frac{\partial}{\partial z_1} z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) c. \tag{2.1}$$

Uvedimo podalgebre $\mathfrak{h}^e = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, $\tilde{\mathfrak{n}}_\pm = \mathfrak{g} \otimes t^{\pm 1}\mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \mathfrak{n}_\pm$. Tada imamo trokutastu dekompoziciju $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \mathfrak{h}^e \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+$.

Označimo sa $\hat{\Pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subset (\mathfrak{h}^e)^*$ bazu sistema korijena od $\tilde{\mathfrak{g}}$. Bilinearnu formu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ proširujemo na $\mathfrak{h}^e$, odnosno na dual $(\mathfrak{h}^e)^*$ (uz $\langle c, d\rangle = 1$). Definiramo fundamentalne težine $\Lambda_i \in (\mathfrak{h}^e)^*$ sa $\langle \Lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ i $\Lambda_i(d) = 0$, $i, j = 0, \ldots, \ell$.

Neka je $V$ modul najveće težine za afinu Liejevu algebru $\tilde{\mathfrak{g}}$. Modul $V$ je generiran vektorom najveće težine $v_\Lambda$ za kojeg vrijedi

$$\begin{aligned} h \cdot v_\Lambda &= \Lambda(h) v_\Lambda, \quad \text{za } h \in \mathfrak{h}^e, \\ x \cdot v_\Lambda &= 0, \quad \text{za } x \in \tilde{\mathfrak{n}}_+, \end{aligned}$$

gdje je $\Lambda \in (\mathfrak{h}^e)^*$. $V$ je direktna suma težinskih potprostora $V_\mu = \{v \in V \,|\, h \cdot V = \mu(h) v \text{ za } h \in \mathfrak{h}^e\}$, $\mu \in \mathfrak{h}^e$.

**Napomena 9** U slučaju kada je $V$ modul najveće težine za $\tilde{\mathfrak{g}}$, komutacijska relacija (2.1) i lema 6 pokazuju da $x(z), (x \in \mathfrak{g})$ čini familiju lokalnih polja na $V$. Stoga prema teoriji lokalnih polja, oni generiraju verteks-algebru.

Standardni $\tilde{\mathfrak{g}}$-modul (tj. integrabilni modul najveće težine za $\tilde{\mathfrak{g}}$) možemo definirati kao ireducibilan modul najveće težine s najvećom težinom

$$\Lambda = k_0 \Lambda_0 + k_1 \Lambda_1 + \cdots + k_\ell \Lambda_\ell,$$

gdje su $k_i \in \mathbb{Z}_+$, za $i = 1, \ldots, \ell$. Označavat ćemo ga sa $L(\Lambda)$. Centralni element $c$ djeluje na $L(\Lambda)$ skalarom

$$k = \Lambda(c) = k_0 + k_1 + \cdots + k_\ell$$

kojeg zovemo nivo modula $L(\Lambda)$.

## 2.2 Definicija potprostora Feigin-Stojanovskog

Kažemo da je vektor $v \in \mathfrak{h}$ *kominimalan* ako je

$$\{\alpha(v) \,|\, \alpha \in R\} = \{-1, 0, 1\}.$$

Za težinu $\omega \in P$ kažemo da je *minimalna* ako je

$$\{\langle \omega, \alpha \rangle \,|\, \alpha \in R\} = \{-1, 0, 1\}.$$

Odmah vidimo da je dominantna težina $\omega \in P^+$ minimalna ako i samo ako je

$$\langle \omega, \theta \rangle = 1.$$

Vidimo da postoji konačno mnogo minimalnih vektora, točnije vektor $v \in \mathfrak{h}$ bit će minimalan ako i samo ako je dualan nekoj minimalnoj fundamentalnoj težini $\omega$,

$$v = \omega^\vee$$

(uz odgovarajući izbor skupa pozitivnih korijena).

Fiksiramo kominimalan vektor $v \in \mathfrak{h}$. Za $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}l(\ell+1, \mathbb{C})$ su sve fundamentalne težine minimalne. Možemo stoga pretpostaviti da je minimalan vektor $v$ dualan nekoj fundamentalnoj težini

$$\omega = \omega_m,$$

za neki $m \in \{1, \dots, \ell\}$, tj.

$$v = \omega^\vee = \omega_m^\vee.$$

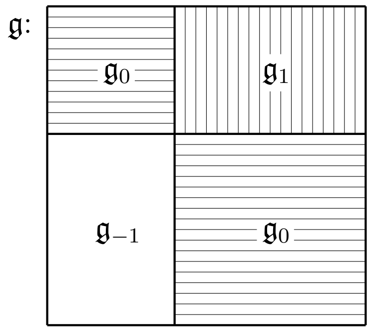
Označimo sa $\Gamma$ skup svih korijena koji na vektoru $\omega^\vee$ poprimaju vrijednost 1,

$$\Gamma = \{\, \alpha \in R \mid \alpha(\omega^\vee) = 1\}.$$

Kominimalan vektor $\omega^\vee$ definira $\mathbb{Z}$-gradaciju od $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 \\ \mathfrak{g}_0 &= \mathfrak{h} + \sum_{\alpha(\omega^\vee)=0} \mathfrak{g}_\alpha \\ \mathfrak{g}_{\pm 1} &= \sum_{\alpha \in \pm\Gamma} \mathfrak{g}_\alpha. \end{aligned}$$

Podalgebre $\mathfrak{g}_1$ i $\mathfrak{g}_{-1}$ su komutativne, i na njima $\mathfrak{g}_0$ djeluje adjungiranjem. Algebra $\mathfrak{g}_0$ je reduktivna; njen poluprosti dio $\mathfrak{l}_0 = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ je tipa $A_{m-1} \times A_{\ell-m}$, sa bazom sistema korijena $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}\} \cup \{\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_\ell\}$, a centar je $\mathbb{C}\omega^\vee$.



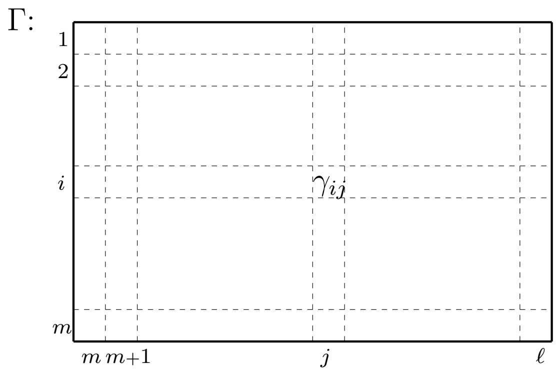

Bazu podalgebre $\mathfrak{g}_1$ možemo identificirati sa skupom korijena $\Gamma$; $\Gamma$ nazivamo *skup boja*. Za $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{C})$ je skup boja jednak

$$\Gamma = \{\gamma_{ij} \,|\, i = 1, \ldots, m; j = m, \ldots, \ell\}$$

gdje su

$$\gamma_{ij} = \alpha_i + \cdots + \alpha_m + \cdots + \alpha_j.$$

Maksimalni korijen $\theta$ jednak je $\gamma_{1\ell}$.




Također, imamo induciranu $\mathbb{Z}$-gradaciju afine Liejeve algebre $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{g}}_0 &= \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \\ \tilde{\mathfrak{g}}_{\pm 1} &= \mathfrak{g}_{\pm 1} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \\ \tilde{\mathfrak{g}} &= \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} + \tilde{\mathfrak{g}}_0 + \tilde{\mathfrak{g}}_1. \end{aligned}$$

Posebno, $\tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$ i $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ su komutativne podalgebre, i $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ je $\tilde{\mathfrak{g}}_0$-modul.

*Potprostor Feigin-Stojanovskog* definiramo kao $\tilde{\mathfrak{g}}_1$-podmodul od $L(\Lambda)$ generiran vektorom najveće težine $v_\Lambda$,

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda \subset L(\Lambda).$$

Cilj nam je pronaći kombinatornu bazu prostora $W(\Lambda)$. Ako uvedemo oznake $\tilde{\mathfrak{g}}_1^+ = \tilde{\mathfrak{g}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{n}}_+$, $\tilde{\mathfrak{g}}_1^- = \tilde{\mathfrak{g}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{n}}_-$, onda imamo

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1^-) \cdot v_\Lambda.$$

Prema Poincare-Birkhoff-Wittovom teoremu, razapinjući skup od $W(\Lambda)$ možemo napisati na sljedeći način

$$\{x_{\gamma_1}(-n_1)x_{\gamma_2}(-n_2)\cdots x_{\gamma_r}(-n_r)v_\Lambda \,|\, r \in \mathbb{Z}_+, \gamma_i \in \Gamma, n_i \in \mathbb{N}\}. \tag{2.2}$$

Da bi reducirali gornji skup do baze najprije ćemo pronaći relacije među monomima gornjeg oblika. Zatim ćemo u svakoj relaciji identificirati najmanji monom obzirom na određeni parcijalni uređaj, tzv. *vodeći član relacije*, kojeg onda možemo eliminirati iz razapinjućeg skupa. Monome koji neće u sebi sadržavati vodeće članove opisatćemo preko tzv. *uvjeta razlike* i *početnih uvjeta*. Oni će biti dani u terminima eksponenata faktora određenog stupnja i boje. Na kraju ćemo induktivno, koristeći koeficijente određenih operatora ispreplitanja među modulima $L(\Lambda)$, pokazati da je na ovaj način reducirani razapinjući skup linearno nezavisan.

Elemente gornjeg razapinjućeg skupa možemo identificirati s monomima iz $S(\tilde{\mathfrak{g}}_1) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$. Zato ćemo u daljnjem tekstu često elemente $\{x_\gamma(-j) \mid \gamma \in \Gamma, j \in \mathbb{Z}\}$ iz $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ nazivati varijablama (odn. elementima ili faktorima u monomu).

Također, monome iz $S(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$ možemo identificirati sa obojenim particijama; particiji $\pi : \{x_\gamma(-j) \mid \gamma \in \Gamma, j \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z}_+$ odgovara monom

$$x(\pi) = x_{\gamma_1}(-j_1)^{\pi(x_{\gamma_1}(-j_1))} \cdots x_{\gamma_t}(-j_t)^{\pi(x_{\gamma_t}(-j_t))}.$$

Iz ove identifikacije ćemo preuzeti oznaku $x(\pi)$ za monome iz $S(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$, iako ta identifikacija neće igrati bitnu ulogu u daljnjem tekstu.

## 2.3 Uređaj na monomima

Kako smo već rekli, uvjeti na osnovu kojih ćemo isključivati monome iz razapinjućeg skup od $W(\Lambda)$ biti će povezani s uređajem na skupu monoma. Ovdje ćemo definirati taj uređaj.

Najprije uvodimo leksikografski uređaj $<$ na skupu boja, koji će proširivati standardni uređaj $\prec$ na skupu korijena. Na skupu boja, taj se uređaj svodi na:

$$\gamma_{i'j'} \prec \gamma_{ij} \quad \text{ako} \quad i' \geq i \quad \text{i} \quad j' \leq j.$$

Leksikografski uređaj definiramo na način da uspoređujemo najprije retke, a potom stupce:

$$\gamma_{i'j'} < \gamma_{ij} \quad \text{ako} \quad \begin{cases} i' > i \\ i' = i, \ j' < j \end{cases}$$

Ovo je linearni uređaj na bojama koji proširuje uređaj $\prec$. Kasnije će nam trebati još jedan parcijalni uređaj na bojama, označimo ga sa $\lll$:

$$\gamma_{i'j'} \lll \gamma_{ij} \quad \text{ako} \quad i' > i \quad \text{i} \quad j' < j.$$

Na skupu varijabli $\{x_\gamma(-n) \,|\, \gamma \in \Gamma,\, n \in \mathbb{Z}\} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_1$ uvodimo uređaj tako da najprije uspoređujemo stupnjeve, a zatim boje:

$$x_\alpha(-i) < x_\beta(-j) \quad \text{ako} \quad \begin{cases} -i < -j, \\ i = j \quad \text{i} \quad \alpha < \beta. \end{cases}$$

Za monome iz $S(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$ ćemo u čitavom tekstu pretpostavljati da su varijable u njima sortirane uzlazno slijeva na desno; to možemo jer je $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ komutativna algebra. Neka su dana dva monoma $x(\pi)$ i $x(\pi')$

$$\begin{aligned} x(\pi) &= x_{\gamma_r}(-n_r)x_{\gamma_{r-1}}(-n_{r-1})\cdots x_{\gamma_2}(-n_2)x_{\gamma_1}(-n_1), \\ x(\pi') &= x_{\gamma'_s}(-n'_s)x_{\gamma'_{s-1}}(-n'_{s-1})\cdots x_{\gamma'_2}(-n'_2)x_{\gamma'_1}(-n'_1). \end{aligned}$$

Uređaj na monomima je definiran kao leksikografski uređaj, pri čemu redom uspoređujemo varijable čitajući zdesna na lijevo (od najveće prema najmanjoj); oznaka je $x(\pi) < x(\pi')$. Dakle, $x(\pi) < x(\pi')$ ako postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da su $x_{\gamma_i}(-n_i) = x_{\gamma'_i}(-n'_i)$, za sve $i < i_0$, te je ili $i_0 = r + 1$ ili je $x_{\gamma_{i_0}}(-n_{i_0}) < x_{\gamma'_{i_0}}(-n'_{i_0})$.

Ovako definirani uređaj na monomima je kompatibilan sa množenjem:

**Propozicija 8** *Neka je*

$$x(\pi_1) \le x(\mu_1) \quad i \quad x(\pi_2) \le x(\mu_2).$$

*Onda je i*

$$x(\pi_1)x(\pi_2) \le x(\mu_1)x(\mu_2),$$

*i ako je jedna od gornjih nejednakosti stroga, onda i dolje imamo strogu nejednakost.*

**Dokaz:** Monomi $x(\pi) = x(\pi_1)x(\pi_2)$ i $x(\mu) = x(\mu_1)x(\mu_2)$ napisani u sortiranom poretku, dobiveni su "spajanjem" dva monoma.[1] Neka su $x_{\alpha_1}(-j_1)$

[1] Monome možemo shvaćati kao sortirane nizove varijabli. U računarstvu se tzv. spajanjem (engleski "mergeing") dva sortirana niza dobija novi sortirani niz sastavljen od svih elemenata početnih nizova. U ovoj analogiji između sortiranih nizova i monoma, tako dobijeni niz upravo odgovara produktu dva monoma.

i $x_{\alpha_2}(-j_2)$ najveće varijable u $x(\pi_1)$ i $x(\pi_2)$, $x_{\beta_1}(-i_1)$ i $x_{\beta_2}(-i_2)$ najveće varijable u $x(\mu_1)$ i $x(\mu_2)$. Znamo da je $x_{\alpha_1}(-j_1) \leq x_{\beta_1}(-i_1)$ i $x_{\alpha_2}(-j_2) \leq x_{\beta_2}(-i_2)$. Najveći element u $x(\pi)$ biti će veći od $x_{\alpha_1}(-j_1)$ i $x_{\alpha_2}(-j_2)$; možemo pretpostaviti da je to $x_{\alpha_1}(-j_1)$. Slično, najveći element u $x(\mu)$ biti će veći od $x_{\beta_1}(-i_1)$ i $x_{\beta_2}(-i_2)$. Onda imamo dvije mogućnosti:

(i) najveći element od $x(\mu)$ je strogo veći od najvećeg elementa od $x(\pi)$. U tom slučaju smo gotovi, imamo da je $x(\pi) < x(\mu)$.

(ii) najveći element od $x(\mu)$ jednak je najvećem elementu od $x(\pi)$. Onda je $x_{\alpha_1}(-j_1) = x_{\beta_1}(-i_1)$ pa za najveći element u $x(\mu)$ možemo uzeti upravo $x_{\beta_1}(-i_1)$. Dalje nastavljamo indukcijom: neka su $x(\pi_1')$ i $x(\mu_1')$ monomi dobiveni iz $x(\pi_1)$, odn. $x(\mu_1)$, izostavljanjem $x_{\alpha_1}(-j_1) = x_{\beta_1}(-i_1)$; vrijedi $x(\pi_1') \leq x(\mu_1')$. Gornji postupak primjenjujemo sada na $x(\pi_1')$ i $x(\pi_2)$, odn. $x(\mu_1')$ i $x(\mu_2)$. Nakon konačno koraka, ili će se desiti slučaj (i) , ili ćemo iscrpiti monome $x(\pi_1)$ i $x(\pi_2)$, što će u oba slučaja značiti da je $x(\pi) \leq x(\mu)$. Jednakost će vrijediti samo ako su obje nejednakosti bile jednakosti.

Uvodimo još i *ukupni stupanj* te *oblik* monoma. Ukupni stupanj monoma jednak je zbroju stupnjeva svih varijabli u tom monomu. Za

$$x(\pi) = x_{\gamma_r}(-n_r)x_{\gamma_{r-1}}(-n_{r-1}) \cdots x_{\gamma_2}(-n_2)x_{\gamma_1}(-n_1)$$

ukupni stupanj biti će $-n_1 - n_2 - \cdots - n_r$. Oblik monoma $x(\pi)$ dobit ćemo tako da zanemarimo boje i promatramo samo stupnjeve faktora u monomu. Preciznije, ako monomu $x(\pi)$ odgovara particija $\pi : \{x_\gamma(-n) \mid \gamma \in \Gamma, n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z}_+$, onda će pridruženi oblik biti

$$\begin{aligned} &s_\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+, \\ &s_\pi(j) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi(x_\gamma(-j)). \end{aligned}$$

Na oblicima također možemo definirati uređaj; stavit ćemo da je $s_\pi < s_{\pi'}$ ako postoji $j_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $s_\pi(j) = s_{\pi'}(j)$ za $j < j_0$ te vrijedi ili $s_\pi(j_0) \leq s_{\pi'}(j_0)$ i $s_\pi(j) = 0$ za $j > j_0$, ili je $s_\pi(j_0) > s_{\pi'}(j_0)$ i postoji $j' > j_0$ t.d. je $s_\pi(j') \neq 0$.

Radi bolje čitljivosti formula koje će se pojavljivati u tekstu, uvodimo sljedeću notaciju: za $\gamma_{rs} \in \Gamma$ stavit ćemo

$$x_{rs}(-j) = x_{\gamma_{rs}}(-j).$$

# Poglavlje 3

# Konstrukcija standardnih modula pomoću verteks-operatora

U ovom poglavlju prikazat ćemo konstrukciju standardnih modula preko algebre verteks-operatora pridružene težinskoj rešetci od $\mathfrak{g}$. Detalji ove konstrukcije mogu se naći u npr. [FLM], [DL] ili [LL].

## 3.1 Nivo $k = 1$

Sa $P$, odn. $Q$, označili smo težinsku, odn. korijensku rešetku od $\mathfrak{g}$. Tada postoji centralno proširenje od $P$,

$$1 \longrightarrow \langle e^{\pi i/(\ell+1)^2} \rangle \longrightarrow \hat{P} \longrightarrow P \longrightarrow 1$$

s konačnom cikličkom grupom $\langle e^{\pi i/(\ell+1)^2} \rangle$ reda $2(\ell+1)^2$. Restrikcijom dobijamo centralno proširenje $\hat{Q}$ od $Q$. Centralno proširenje možemo izabrati tako da odgovarajući kociklus

$$\epsilon : P \times P \to \langle e^{\pi i/(\ell+1)^2} \rangle$$

ima svojstvo

$$\epsilon(\alpha, \beta)/\epsilon(\beta, \alpha) = (-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle} \quad \text{za } \alpha, \beta \in Q.$$

Neka je

$$c(\lambda, \mu) = \epsilon(\lambda, \mu)/\epsilon(\mu, \lambda) \quad \text{za } \lambda, \mu \in P$$

pripadno bimultiplikativno, alternirajuće komutatorsko preslikavanje.

Promatrajmo podalgebru

$$\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathfrak{h}\otimes t^n \oplus \mathbb{C}c,$$

koja je Heisenbergova podalgebra. Uvedimo još i podalgebre

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{h}} &= \mathfrak{h}\otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c, \\ \hat{\mathfrak{h}}_{\pm} &= \mathfrak{h}\otimes t^{\pm 1}\mathbb{C}[t^{\pm 1}]. \end{aligned}$$

Sa $\mathbb{C}[P]$ i $\mathbb{C}[Q]$ označimo grupne algebre pridružene težinskoj i korijenskoj rešetci; bazu čine elementi oblika $\{e^\lambda \mid \lambda\in P\}$, odnosno $\{e^\alpha \mid \alpha \in Q\}$.

Promatrajmo inducirani $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$-modul

$$M(1) = U(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes_{\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}c} \mathbb{C},$$

gdje $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]$ djeluje trivijalno na $\mathbb{C}$, a $c$ djeluje kao 1. Modul $M(1)$ je ireducibilan za Heisenbergovu podalgebru $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$; kao vektorski prostor, $M(1)$ je prirodno izomorfan simetričnoj algebri $S(\hat{\mathfrak{h}}_-)$. Proširit ćemo ga sa spomenutim grupnim algebrama

$$\begin{aligned} V_P &= M(1)\otimes\mathbb{C}[P], \\ V_Q &= M(1)\otimes\mathbb{C}[Q]; \end{aligned}$$

imamo prirodnu inkluziju $V_Q \subset V_P$. Radi jednostavnosti, često ćemo umjesto elemenata oblika $1\otimes e^\lambda$ pisati samo $e^\lambda$.

Na $V_P$ definiramo strukturu $\hat{\mathfrak{h}}$-modula: stavit ćemo da $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ djeluje kao $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}\otimes 1$, a $\mathfrak{h}\otimes t^0$ kao $1\otimes\mathfrak{h}$. Pritom su operatori $h(0), h\in\mathfrak{h}$ na $\mathbb{C}[P]$ definirani na sljedeći način

$$h(0)\cdot e^\lambda = \langle h,\lambda\rangle e^\lambda$$

za $\lambda\in P$.[1] Na $M(1)$ imamo i djelovanje od $\mathbb{C}[P]$ sa

$$e^\lambda = 1\otimes e^\lambda, \quad \lambda\in P,$$

gdje potonji operator predstavlja množenje u grupnoj algebri. Iz konteksta će biti jasno kada oznaka $e^\lambda$ predstavlja operator množenja, a kada element iz $V_P$. Uvodimo još i operatore $\epsilon_\lambda$ sa

$$\epsilon_\lambda\cdot e^\mu = \epsilon(\lambda,\mu)e^\mu,$$

za $\lambda,\mu\in P$.

[1] Ovdje koristimo činjenicu da smo identificirali $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^*$. Ta će identifikacija biti korištena i u nastavku.

Za elemente iz $V_P$ definiramo stupanj: za $v = h_1(-n_1)\cdots h_r(-n_r)\otimes e^\lambda$ stavimo

$$\deg(v) = -n_1 - n_2 - \cdots - n_r - \frac{1}{2}\langle\lambda,\lambda\rangle.$$

Time $V_P$ postaje graduirani prostor, i gradacija je omeđena odozgo.

Uvedimo još i operatore

$$z^h \cdot e^\lambda = e^\lambda z^{\langle h,\lambda\rangle},$$

za $h \in \mathfrak{h}, \lambda \in P$. To su zapravo formalni redovi čiji su koeficijenti endomorfizmi od $V_P$; $z^h \in (\operatorname{End} V_P)\{z\}$.

Prostor $V_Q$ ima prirodnu strukturu algebre verteks-operatora (VOA); $V_P$ je modul za tu algebru. Prije no što uvedemo strukturu VOA na $V_Q$, definirajmo operatore

$$E^\pm(h,z) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} h(\pm m)\frac{z^{\mp m}}{\pm m}\right),$$

za $h \in \mathfrak{h}$. Verteks-operatore (ili polja) ćemo definirati za sve elemente iz $V_P$, a ne samo za one iz $V_Q$. Najprije ćemo ih definirati za elemente iz rešetke, tj. za elemente oblika $1 \otimes e^\lambda = e^\lambda$:

$$Y(e^\lambda, z) = E^-(-\lambda, z)E^+(-\lambda, z) \otimes e^\lambda z^\lambda \epsilon_\lambda. \tag{3.1}$$

Općenito, za homogeni vektor $v \in V_P$ oblika

$$v = h_1(-n_1)\cdots h_r(-n_r)\otimes e^\lambda,$$

za $n_1, \ldots, n_r \geq 1$, definiramo

$$Y(v,z) = {\circ\atop\circ}\left(\frac{\partial_z^{n_1-1}}{(n_1-1)!}h_1(z)\right)\cdots\left(\frac{\partial_z^{n_r-1}}{(n_r-1)!}h_r(z)\right)Y(e^\lambda,z){\circ\atop\circ},$$

gdje oznaka ${\circ\atop\circ}\cdot{\circ\atop\circ}$ označava tzv. normalno uređeni produkt, što znači da taj izraz po potrebi treba preurediti tako da operatori $h(m), h \in \mathfrak{h}, m < 0$ budu smješteni lijevo od operatora $h(m), h \in \mathfrak{h}, m \geq 0$. Time smo dobili dobro definirano linearno preslikavanje

$$\begin{aligned} Y : V_P &\rightarrow (\operatorname{End} V_P)\{z\} \\ v &\mapsto Y(v,z). \end{aligned}$$

Pomoću verteks operatora možemo $V_P$ promatrati kao $\tilde{\mathfrak{g}}$-modul. Za $\alpha \in R, j \in \mathbb{Z}$ stavit ćemo da $x_\alpha(j)$ djeluje kao koeficijent verteks-operatora $Y(e^\alpha, z)$ koji stoji uz $z^{-m-1}$:

$$x_\alpha(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_\alpha(m)z^{-m-1} = Y(e^\alpha, z),$$

djelovanje od $h(m)$ i $c$ već je definirano, a $d$ djeluje kao operator stupnja. Time $V_Q$ i $V_Q e^{\omega_j}, j = 1, \dots, \ell$ postaju standardni $\tilde{\mathfrak{g}}$-moduli nivoa 1 s vektorima najveće težine $v_0 = 1$ i $v_j = e^{\omega_j}, j = 1, \dots, \ell$. Drugim riječima, imamo konkretnu realizaciju standardnih modula nivoa 1

$$L(\Lambda_0) \cong V_Q, \quad L(\Lambda_j) \cong V_Q e^{\omega_j}, j = 1, \dots, \ell$$

i vrijedi

$$V_P \cong L(\Lambda_0) \oplus L(\Lambda_1) \oplus \dots L(\Lambda_\ell).$$

Komutacijske relacije među verteks-operatorima $Y(e^\lambda, z)$ slijede iz sljedeće komutacijske relacije koju imamo među operatorima $E^+$ i $E^-$,

$$E^+(-\lambda, z_2) E^-(-\mu, z_1) = \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)^{\langle \lambda, \mu \rangle} E^-(-\mu, z_1) E^+(-\lambda, z_2),$$

za $\lambda, \mu \in P$. Pritom binomni izraz $(1 - \frac{z_1}{z_2})^{\langle \lambda, \mu \rangle}$ treba biti razvijen u nenegativnim potencijama od $\frac{z_1}{z_2}$.

Verteks-operatori $Y(v, z), v \in V_P$ zadovoljavaju (generalizirani) Jacobijev identitet. Nama će biti važna varijanta tog identiteta u slučaju kada su vektori $u, v$ oblika $u = u^* \otimes e^\lambda, v = v^* \otimes e^\mu$, za $\lambda \in Q, \mu \in P,\ u^*, v^* \in M(1)$, ili još specijalnije, kada je $u = 1 \otimes e^\lambda, v = 1 \otimes e^\mu$, za $\lambda \in Q, \mu \in P$. Tada imamo

$$z_0^{-1} \delta\left(\tfrac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u, z_1) Y(v, z_2) - (-1)^{\langle \lambda, \mu \rangle} c(\lambda, \mu) z_0^{-1} \delta\left(\tfrac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(v, z_2) Y(u, z_1) =$$
$$= z_2^{-1} \delta\left(\tfrac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(u, z_0) v, z_2),$$

gdje je $\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n$ delta funkcija, a binomni izrazi koji će se pojavljivati u složenim $\delta$-funkcijama trebaju biti razvijeni u nenegativnim potencijama druge varijable. Za $\mu \in Q$ imamo $(-1)^{\langle \lambda, \mu \rangle} c(\lambda, \mu) = 1$ pa u gornjoj relaciji dobijamo uobičajeni Jacobijev identitet.

**Napomena 10** Za $u, v \in V_Q$, Jacobijev identitet za pripadne verteks-operatore slijedi iz teorije lokalnih polja, o čemu smo pisali u 1. poglavlju. Općenito, za $u, v \in V_P$, bit će potrebno poopćenje te teorije (vidi [GL]).

Da bi se riješili faktora $(-1)^{\langle \lambda, \mu \rangle} c(\lambda, \mu)$, umjesto verteks-operatora $Y(v, z)$ promatrat ćemo operatore ispreplitanja $\mathcal{Y}(v, z)$. Za $\mu \in P$, $v = v^* \otimes e^\mu$ definiramo $\mathcal{Y}(v, z) = Y(v, z) e^{i\pi\mu} c(\cdot, \mu)$, čime dobijamo preslikavanje $v \mapsto \mathcal{Y}(v, z)$ koje također ide sa $V_P$ u $(\operatorname{End} V_P)\{z\}$. Prethodna varijanta Jacobijevog identiteta sada postaje

$$z_0^{-1} \delta\left(\tfrac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u, z_1) \mathcal{Y}(v, z_2) \ - z_0^{-1} \delta\left(\tfrac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) \mathcal{Y}(v, z_2) Y(u, z_1) =$$
$$= z_2^{-1} \delta\left(\tfrac{z_1 - z_0}{z_2}\right) \mathcal{Y}(Y(u, z_0) v, z_2).$$

Za $\mu \in Q$, operatori $\mathcal{Y}(v,z)$ su jednaki verteks-operatorima $Y(v,z)$. Primijetimo nadalje da su restrikcije operatora $\mathcal{Y}(v,z)$ u stvari preslikavanja

$$\mathcal{Y}(v,z) : L(\Lambda_i) \to L(\Lambda_j)\{z\}, \tag{3.2}$$

za $\mu + \omega_i \equiv \omega_j \mod Q$.

**Napomena 11** Da bi $V_Q$ zaista bio algebra verteks-operatora, moramo u njemu naći i konformni vektor $\omega$. To nije teško učiniti, no budući da ga nećemo koristiti, taj dio ćemo izostaviti.

Promatrajmo sada specijalan slučaj, kada je $v = e^{\mu}$. Zanima nas kada operatori ispreplitanja $\mathcal{Y}(e^{\mu}, z_2)$ iz (3.2) komutiraju sa verteks-operatorima $Y(e^{\gamma}, z_1), \gamma \in \Gamma$,

$$[Y(e^{\gamma}, z_1), \mathcal{Y}(e^{\mu}, z_2)] = 0, \quad \gamma \in \Gamma,$$

tj. kada oni daju operatore između odgovarajućih potprostora Feigin-Stojanovskog:

$$\mathcal{Y}(1 \otimes e^{\mu}, z) : W(\Lambda_i) \to W(\Lambda_j)\{z\}.$$

Formula (1.8) za komutator dva verteks-operatora, govori nam da je to onda i samo onda kada je

$$Y(e^{\gamma}, z_0)e^{\mu} \in V_P[[z_0]]$$

za sve $\gamma \in \Gamma$, tj. onda i samo onda kada su svi koeficijenti uz negativne potencije od $z$ u $Y(e^{\gamma}, z_0)e^{\mu}$ jednaki nuli. S druge strane, iz definicije verteks-operatora, odnosno operatora ispreplitanja, vidimo da je

$$\mathcal{Y}(e^{\lambda}, z_0)e^{\nu} = Ce^{\lambda+\nu} z_0^{\langle \lambda, \nu \rangle} + \ldots \quad \in \quad z_0^{\langle \lambda, \nu \rangle} V_P[[z_0]], \tag{3.3}$$

gdje je $C \in \mathbb{C}^{\times}$. Dakle, operatori ispreplitanja $\mathcal{Y}(e^{\lambda}, z_0)$ će komutirati sa djelovanjem od $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ onda i samo onda kada je

$$\langle \gamma, \mu \rangle \geq 0, \quad \text{za sve } \gamma \in \Gamma.$$

Kasnije ćemo točno odrediti za koje $\mu \in P$ to vrijedi. Ti će nam operatori (ili njihovi tenzorski produkti) omogućiti da istovremeno dokažemo linearnu nezavisnost generirajućih skupova na svim standardnim modulima određenog nivoa $k$.

## 3.2 Viši nivoi

Standardne module $L(\Lambda)$ nivoa $k > 1$, zbog potpune reducibilnosti tenzorskog produkta standardnih modula, možemo promatrati kao da su uloženi u tenzorski produkt modula nivoa 1

$$L(\Lambda) \subset L(\Lambda_0)^{\otimes k_0} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_\ell)^{\otimes k_\ell}$$

za $\Lambda = k_0\Lambda_0 + k_1\Lambda_1 + \cdots + k_\ell\Lambda_\ell$, $k = k_0 + k_1 + \cdots + k_\ell$. Vektor najveće težine je tada

$$v_\Lambda = v_0^{\otimes k_0} \otimes \cdots \otimes v_\ell^{\otimes k_\ell}.$$

Verteks-operatore pridružene elementima iz tenzorskog produkta

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_k \in V_P \otimes \cdots \otimes V_P$$

definiramo kao tenzorske produkte odgovarajućih verteks-operatora na tenzorskim faktorima:

$$Y(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k, z) = Y(u_1, z) \otimes \cdots \otimes Y(u_k, z).$$

Uz tako definirane verteks-operatore, $V_Q^{\otimes k} = L(\Lambda_0)^{\otimes k}$ postaje algebra verteks-operatora, a $V_P^{\otimes k}$, odnosno tenzorski produkti standardnih modula $L(\Lambda_0)^{\otimes k_0} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_\ell)^{\otimes k_\ell}$, postaju moduli za tu algebru.

Na $V_P^{\otimes k}$, odnosno $L(\Lambda_0)^{\otimes k_0} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_\ell)^{\otimes k_\ell}$, definiramo djelovanje Liejeve algebre preko verteks-operatora: za $\alpha \in R$ stavimo

$$\begin{aligned} x_\alpha(z) &= Y(e^\alpha \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes e^\alpha, z) \\ &= Y(e^\alpha, z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes Y(e^\alpha, z) \\ &= x_\alpha(z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes x_\alpha(z). \end{aligned}$$

Gornja definicija djelovanja Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ preko verteks-operatora ekvivalentna je definiciji djelovanja Liejeve algebre na tenzorskom produktu modula.

**Napomena 12** Za $k > 1$, standardni modul

$$L(k\Lambda_0) = U(\tilde{\mathfrak{g}}) \cdot 1$$

neće biti jednak cijelom $V_Q^{\otimes k}$. On će naslijediti strukturu verteks-algebre, no konformni vektor od $V_Q^{\otimes k}$ neće biti sadržan u $L(k\Lambda_0)$. Međutim, koristeći tzv. Sugawarinu konstrukciju, unutar $L(k\Lambda_0)$ se može naći drugi konformni vektor, pridružen Casimirovom operatoru od $\mathfrak{g}$; uz njega $L(k\Lambda_0)$ postaje algebra verteks-operatora. Ostali standardni moduli nivoa $k$ bit će moduli za tu algebru verteks-operatora. U slučaju $k = 1$, ta se dva konformna vektora podudaraju. Ovu činjenicu navodimo radi potpunosti, iako ona neće imati utjecaja na daljnja razmatranja u tekstu.

Za $\alpha \in R$ stavimo da su $e^\alpha = e^\alpha \otimes \cdots \otimes e^\alpha$ i $\epsilon_\alpha = \epsilon_\alpha \otimes \cdots \otimes \epsilon_\alpha$ tenzorski produkti odgovarajućih operatora. Budući da je $x_\alpha(z)^{k+1} = 0$, možemo promatrati $\exp x_\alpha(z)$. Vrijedi generalizacija Frenkel-Kacove formule za verteks-operatore:

$$\exp z x_\alpha(z) = E^-(-\alpha, z) \exp(-z x_{-\alpha}(z)) E^+(-\alpha, z) e^\alpha \epsilon_\alpha z^{\alpha+k}$$

(vidi npr. [P1]). Ako raspišemo gornju formulu po $\mathfrak{h}$-težinskim komponentama, dobit ćemo niz relacija:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \tfrac{1}{(k+1)!} x_\alpha(z)^{k+1} &= 0 \\ \frac{1}{k!} x_\alpha(z)^k &= E^-(-\alpha, z) E^+(-\alpha, z) e^\alpha \epsilon_\alpha z^\alpha \qquad (3.4) \\ \tfrac{1}{(k-1)!} x_\alpha(z)^{k-1} &= -E^-(-\alpha, z) x_{-\alpha}(z) E^+(-\alpha, z) e^\alpha \epsilon_\alpha z^{\alpha+2} \\ &\vdots \\ x_\alpha(z) &= \tfrac{1}{(k-1)!} E^-(-\alpha, z) (-x_{-\alpha})^{k-1}(z) E^+(-\alpha, z) e^\alpha \epsilon_\alpha z^{\alpha+2k-2} \qquad (3.5) \\ &\vdots \end{aligned}$$

## 3.3 Operator $e(\omega)$

Za $\lambda \in P$, sa $e^\lambda$ smo označili operator lijevog množenje sa $1 \otimes e^\lambda$ na $V_P = M(1) \otimes \mathbb{C}[P]$. Ako pomnožimo te operatore sa $\epsilon(\cdot, \lambda)$, izbjeći ćemo pojavljivanje skalara u komutacijskim relacijama sa $x_\alpha(n), \alpha \in R$. Imamo

$$e(\lambda) = e^\lambda \epsilon(\cdot, \lambda), \qquad e(\lambda) : V_P \to V_P,$$

i jasno je da je $e(\lambda)$ linearna bijekcija. Restrikcije od $e(\lambda)$ na pojedine standardne module $L(\Lambda_i)$ bit će bijekcije s jednog modula $L(\Lambda_i)$ na drugi $L(\Lambda_{i'})$. Direktno iz definicije verteks-operatora $Y(e^\alpha, z), \alpha \in R$ dobijamo komutacijsku formulu

$$Y(e^\alpha, z) e(\lambda) = e(\lambda) z^{\langle \lambda, \alpha \rangle} Y(e^\alpha, z),$$

ili, ako raspišemo po komponentama,

$$x_\alpha(n) e(\lambda) = e(\lambda) x_\alpha(n + \langle \lambda, \alpha \rangle) \quad \text{za } \alpha \in R, n \in \mathbb{Z}. \qquad (3.6)$$

Za više nivoe $k > 1$, na tenzorskom produktu standardnih modula promatramo operator $e(\lambda)$ definiran kao tenzorski produkt odgovarajućih operatora,

$$e(\lambda) = e(\lambda) \otimes \cdots \otimes e(\lambda) : \otimes_{s=1}^{k} L(\Lambda_{i_s}) \to \otimes_{s=1}^{k} L(\Lambda_{i'_s}).$$

Operator $e(\lambda)$ je opet linearna bijekcija, i također imamo komutacijsku formulu (3.6).

Za $\lambda = \omega = \omega_m$ i $\gamma \in \Gamma$, formula (3.6) postaje

$$x_\gamma(n)e(\omega) = e(\omega)x_\gamma(n+1).$$

Općenitije, za monom $x(\pi) \in S(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$, sa $x(\pi^+)$ označimo monom dobijen iz $x(\pi)$ tako da svim faktorima dignemo stupanj za 1. Iz gornje relacije dobijamo

$$x(\pi)e(\omega) = e(\omega)x(\pi^+).$$

Ova relacija omogućit će nam da induktivno dokažemo linearnu nezavisnost generirajućeg skupa; linearna nezavisnost skupa monoma određenog stupnja slijedit će iz linearne nezavisnosti nekih monoma nižeg stupnja (na nekom drugom modulu).

# Poglavlje 4

# Nivo k=1

Koristeći realizaciju standardnih modula $L(\Lambda_i)$ preko verteks-operatora, želimo pronaći relacije među elementima razapinjućeg skupa (2.2). Elemente baze ćemo onda kombinatorno opisati pomoću početnih uvjeta i uvjeta razlike. Zatim ćemo pronaći odgovarajuće operatore ispreplitanja među potprostorima Feigin-Stojanovskog. Koristeći odgovarajuće koeficijente operatora ispreplitanja, induktivno ćemo dokazati linearnu nezavisnost elemenata baze.

Promatramo standardne module

$$L(\Lambda_i) = e^{\omega_i} V_Q,\ i = 0, \ldots, \ell.$$

Vektori najveće težine su $v_i = e^{\omega_i}$, $i = 0, \ldots, \ell$. Djelovanje Liejeve algebre $\tilde{\mathfrak{g}}$ dano je preko verteks-operatora pridruženih odgovarajućim elementima korijenske rešetke,

$$x_\alpha(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_\alpha(j) z^{-j-1} = Y(e^\alpha, z),$$

za $\alpha \in R$.

## 4.1 Početni uvjeti i uvjeti razlike

Da dobijemo početne uvjete na standardnom modulu $L(\Lambda_i)$, moramo odrediti najmanji $j$ takav da $x_\gamma(-j)$ ne poništava vektor najveće težine $v_i$.

Iz formule (3.3) vidimo da je najmanji koeficijent od $\mathcal{Y}(e^\lambda, z)$ koji netrivijalno djeluje na $e^\nu$, onaj uz potenciju $z^{\langle \lambda, \nu \rangle}$. Pripadni operator će djelovati kao množenje u grupnoj algebri; slati će $e^\nu$ u $Ce^{\nu+\lambda}$, za neki $C \in \mathbb{C}^\times$. Posebno, za $\lambda = \gamma \in \Gamma$ i $\nu = \omega_i$, $i = 0, \ldots, \ell$, formula (3.3) daje nam

$$\left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_\gamma(-j) z^{j-1} \right) v_i \in z^{\langle \gamma, \omega_i \rangle} (e^{\omega_i} V_Q)[[z]],$$

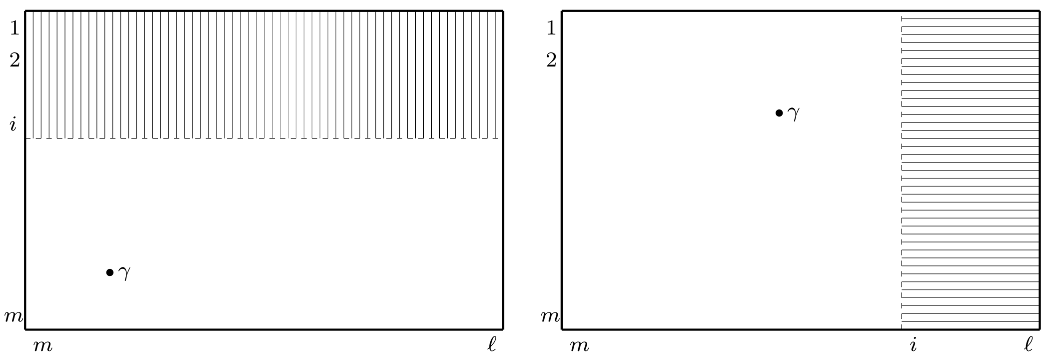
pa slijedi da je $x_\gamma(j) v_i = 0$ za $j < \langle \gamma, \omega_i \rangle + 1$. Budući da je

$$\langle \gamma_{rs}, \omega_i \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ako je } r \leq i \leq s, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

vidimo da će najmanji $j$ takav da je $x_\gamma(-j) v_i \neq 0$, biti 1 ili 2. Točnije,

$$x_{\gamma_{rs}}(-1) v_i = \begin{cases} 0, & \text{ako je } r \leq i \leq s, \\ C e^{\gamma_{rs} + \omega_i},\ C \in \mathbb{C}^\times, & \text{inače.} \end{cases}$$

Drugim riječima, $x_\gamma(-1) v_i \neq 0$ za one $\gamma \in \Gamma$ koji se nalaze ispod $i$-tog retka (za $i \leq m$), odnosno lijevo od $i$-tog stupca (za $i \geq m$). Kazat ćemo stoga da monomi $x(\pi)$ zadovoljavaju *početne uvjete* na $L(\Lambda_i)$, ako nijedan faktor stupnja $-1$ ne poništava $v_i$, tj. ako se njihove boje nalaze ispod $i$-tog retka, odnosno lijevo od $i$-tog stupca. Kraće ćemo to reći da $x(\pi)$ zadovoljava PU na $W(\Lambda_i)$




Da dobijemo relacije među monomima, promatrat ćemo vektore

$$x_\gamma(-1) x_{\gamma'}(-1) 1.$$

Zanima nas kada su takvi vektori jednaki nuli, odnosno, ako nisu jednaki nuli, postoje li kakve relacije među njima. Iz formule (3.3), slično kao u prethodnom odlomku, imamo

$$x_\gamma(-1) x_{\gamma'}(-1) 1 = x_\gamma(-1) e^{\gamma'}.$$

Budući da je

$$\langle\gamma,\gamma'\rangle = \begin{cases} 2, & \gamma=\gamma', \\ 1, & \text{ako su } \gamma \text{ i } \gamma' \text{ u istom retku ili stupcu,} \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

slijedi da je

$$x_\gamma(-1)x_{\gamma'}(-1)1 = \begin{cases} 0, & \text{ako su } \gamma \text{ i } \gamma' \text{ u istom} \\ & \text{retku i/ili stupcu,} \\ Ce^{\gamma+\gamma'},\ C\in\mathbb{C}^\times, & \text{inače.} \end{cases}$$

Fiksirajmo sada dva retka $r_1 < r_2$ i dva stupca $s_2 < s_1$. Primijetimo da je onda

$$\gamma_{r_1s_1}+\gamma_{r_2s_2} = \gamma_{r_1s_2}+\gamma_{r_2s_1},$$

odakle dobivamo sljedeću relaciju

$$x_{r_2s_2}(-1)x_{r_1s_1}(-1)1 = C\cdot x_{r_2s_1}(-1)x_{r_1s_2}(-1)1,$$

za neki $C\in\mathbb{C}$.

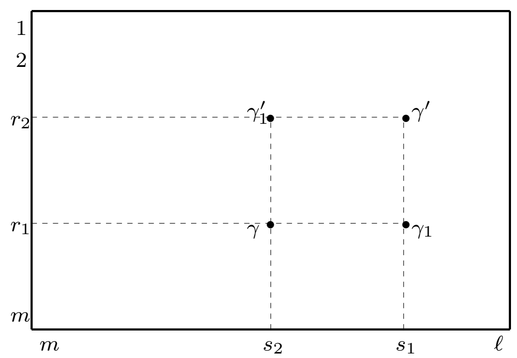
Dobili smo dva tipa relacija:

$$x_\gamma(-1)x_{\gamma'}(-1)1 = 0$$

ako se $\gamma$ i $\gamma'$ nalaze u istome retku ili stupcu, te

$$x_\gamma(-1)x_{\gamma'}(-1)1 = C\cdot x_{\gamma_1}(-1)x_{\gamma_1'}(-1)1$$

ako $\gamma$ i $\gamma'$, te $\gamma_1$ i $\gamma_1'$ čine suprotne vrhove nekog pravokutnika u $\Gamma$.




Prema napomenama 6 i 7 iz 1. poglavlja je $Y(x_\gamma(-1)x_{\gamma'}(-1)1) = x_\gamma(z)x_{\gamma'}(z)$. Stoga za pripadne verteks-operatore vrijede slične relacije:

$$x_\gamma(z)x_{\gamma'}(z) = 0, \tag{4.1}$$
$$x_\gamma(z)x_{\gamma'}(z) = C\cdot x_{\gamma_1}(z)x_{\gamma_1'}(z). \tag{4.2}$$

Za $n \in \mathbb{N}$ promatramo koeficijente uz $z^{n-2}$ u relacijama (4.1) i (4.2). Ti koeficijenti su beskonačne sume monoma iz $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$. Iz prve relacije imamo

$$\begin{aligned} 0 &= x_\gamma(z)x_{\gamma'}(z) \\ &= \sum_n \left( \sum_{i+j=n} x_\gamma(-i)x_{\gamma'}(-j) \right) z^{n-2} \\ &= \sum_n \left( \sum_j x_\gamma(-n+j)x_{\gamma'}(-j) \right) z^{n-2}. \end{aligned}$$

U svakoj takvoj sumi tražimo minimalan monom u odnosu na uređaj $<$, uveden u točki 2.3, vodeći član relacije. Njega možemo izraziti preko ostalih monoma u sumi, pa ćemo stoga iz razapinjućeg skupa za $W(\Lambda)$ moći izostaviti sve monome koje u sebi sadrže neki vodeći član.[1] Svi monomi u gornjoj sumi su duljine 2, i ukupnog stupnja $-n$. Stoga će minimalan među njima biti tzv. minimalnog oblika, tj. faktori u njemu će ili biti istog stupnja (za $n$ paran), ili će im se stupnjevi razlikovati za jedan (za $n$ neparan). Za $n$ paran, imamo samo jedan monom minimalnog oblika,

$$x_\gamma(-j)x_{\gamma'}(-j),$$

koji onda mora biti vodeći član u gornjoj sumi. Za $n$ neparan imamo dva monoma minimalnog oblika,

$$x_{\gamma'}(-j-1)x_\gamma(-j),\ x_\gamma(-j-1)x_{\gamma'}(-j).$$

Prema definiciji uređaja, dalje uspoređujemo boje, i to prvo boje faktora stupnja $-j$, a potom boju faktora $-j-1$. Ako uzmemo da je $\gamma < \gamma'$, onda će vodeći član u ovom slučaju biti

$$x_{\gamma'}(-j-1)x_\gamma(-j). \tag{4.3}$$

Analogno postupamo sa relacijom (4.2); imamo

$$\begin{aligned} 0 &= x_\gamma(z)x_{\gamma'}(z) - C \cdot x_{\gamma_1}(z)x_{\gamma_1'}(z) \\ &= \sum_n \left( \sum_{i+j=n} x_\gamma(-i)x_{\gamma'}(-j) - Cx_{\gamma_1}(-i)x_{\gamma_1'}(-j) \right) z^{n-2}. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da pritom vrijedi $\gamma < \gamma_1 < \gamma_1' < \gamma'$ (tj. boje su smještene kao na slici gore). Najprije tražimo monome minimalnog oblika. Za paran $n$ dobivamo dva takva monoma

$$x_\gamma(-j)x_{\gamma'}(-j),\ x_{\gamma_1}(-j)x_{\gamma_1'}(-j),$$

[1]Vidi propoziciju 14.

a za $n$ neparan imamo četiri monoma minimalnog oblika

$$x_{\gamma'}(-j-1)x_{\gamma}(-j),\ x_{\gamma}(-j-1)x_{\gamma'}(-j),$$
$$x_{\gamma_1'}(-j-1)x_{\gamma_1}(-j),\ x_{\gamma_1}(-j-1)x_{\gamma_1'}(-j).$$

Zatim uspoređujemo boje u tim monomima; za vodeće članove dobijamo

$$x_{\gamma_1}(-j)x_{\gamma_1'}(-j) \tag{4.4}$$

za $n$ paran, odnosno

$$x_{\gamma'}(-j-1)x_{\gamma}(-j) \tag{4.5}$$

za $n$ neparan.

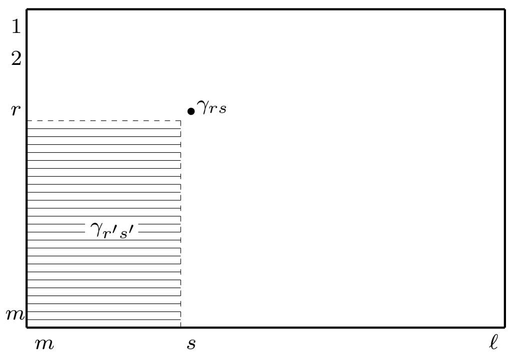
Za monom $x(\pi)$ kazat ćemo da zadovoljava *uvjete razlike*, ili krae UR, ako ne sadrži niti jedan od vodećih članova (4.3), (4.3), (4.3). Kasnije ćemo dokazati ovakvu propoziciju

**Propozicija 9** *Skup*

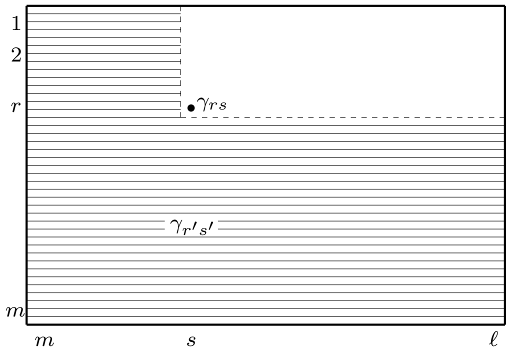
$$\{x(\pi)v_\Lambda \,|\, x(\pi) \text{ zadovoljava PU i UR}\} \tag{4.6}$$

*razapinje* $W(\Lambda)$.

Pogledajmo kako izgledaju monomi $x(\pi)$ koji zadovoljavaju uvjete razlike i početne uvjete na standardnom modulu $L(\Lambda_i)$ nivoa 1. Pretpostavimo da u monomu $x(\pi)$ imamo element $x_{rs}(-j)$. Tada iza tog elementa u $x(\pi)$ sa istim stupnjem $-j$ mogu doći elementi $x_{r's'}(-j)$ čija se boja $\gamma_{r's'}$ nalazi u osjenčanom području

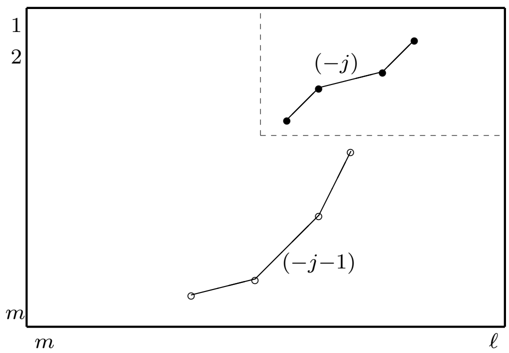



tj. za $r' > r$ i $s' < s$. Drugim riječima, $\gamma_{r's'} \lll \gamma_{rs}$. Sa stupnjem $-j-1$ mogu doći elementi $x_{r's'}(-j-1)$ čija je boja $\gamma_{r's'}$ u osjenčanom području:

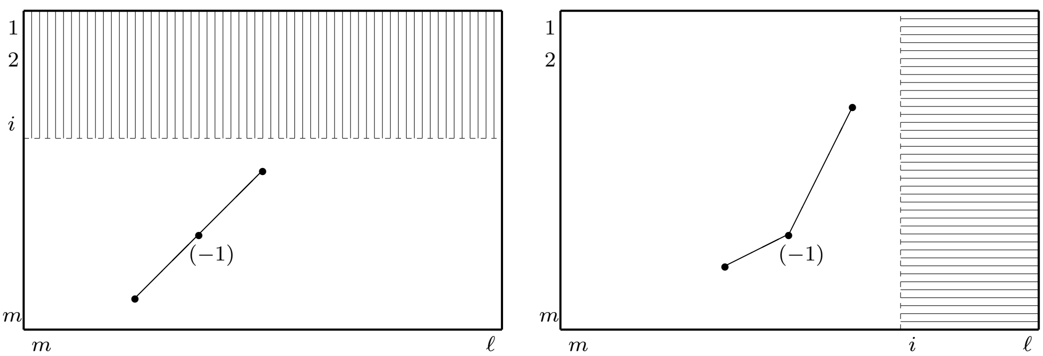



tj. za $r' > r$ ili $s' < s$. Taj uvjet možemo napisati i kao $\gamma_{rs} \not< \gamma_{r's'}$.

Iz ovog razmatranja vidimo da će boje elemenata istog stupnja $-j$ u monomu $x(\pi)$ činiti padajući niz kao na slici ispod; pripadni indeksi redaka strogo će rasti, a stupaca strogo padati. Niz boja elemenata stupnja $-j-1$ također će činiti takav padajući niz, koji će se čitav nalaziti ispod ili lijevo od najmanje boje elemenata stupnja $-j$.




Početni uvjeti nam kažu da je niz boja elemenata stupnja $-1$ smješten ispod $i$-tog retka (za $0 \leq i \leq m$), odnosno lijevo od $i$-tog stupca (za $m \leq i \leq \ell$).



## 4.2 Operatori ispreplitanja

U idućoj točki dokazat ćemo linearnu nezavisnost razapinjućeg skupa (4.6). Središnju ulogu u dokazu imat će propozicija 11 koja otprilike kaže da za svaki monom koji zadovoljava početne uvjete i uvjete razlike, postoji koeficijent operatora ispreplitanja $w : W(\Lambda) \to W(\Lambda')$ za kojeg je taj monom maksimalan u nekom smislu.

Kako smo već vidjeli u 3. poglavlju, verteks-operatori pridruženi elementima težinske rešetke $\lambda \in P$ daju operatore ispreplitanja među standardnim modulima

$$\mathcal{Y}(e^{\lambda}, z) : L(\Lambda_r) \to L(\Lambda_s)\{z\},$$

za $\lambda + \omega_r \equiv \omega_s \mod Q$. Označimo s $w(\lambda)$ koeficijent operatora ispreplitanja $\mathcal{Y}(e^{\lambda}, z)$ uz potenciju $z^{\langle \lambda, \omega_r \rangle}$. Koeficijenti uz sve niže potencije od $z$ poništavat će vektor najveće težine $v_r$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} w(\lambda) : L(\Lambda_r) &\to L(\Lambda_s), \\ 1 \otimes e^{\omega_r} &\mapsto C(1 \otimes e^{\omega_r + \lambda}),\ C \in \mathbb{C}^{\times}. \end{aligned}$$

Vidjeli smo da će ti operatori ispreplitanja komutirati sa djelovanjem od $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ ako i samo ako je

$$\langle \lambda, \gamma \rangle \geq 0, \tag{4.7}$$

za sve $\gamma \in \Gamma$. U ovom odjeljku ćemo odrediti sve takve operatore ispreplitanja.

Ako napišemo $\lambda$ u bazi

$$\lambda = a_1 \omega_1 + \cdots + a_\ell \omega_\ell,$$

$a_1, \ldots, a_\ell \in \mathbb{Z}$, tada uvjet (4.7) možemo napisati kao sustav nejednadžbi

$$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_m + \cdots + a_j \geq 0, \tag{4.8}$$

za $i = 1, \ldots, m$, $j = m, \ldots, \ell$.

Promatrajmo "minimalne" težine za koje vrijedi sustav (4.8):

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \omega_1, && \lambda'_m = \omega_m - \omega_{m+1}, \\ &\lambda_2 = \omega_2 - \omega_1, && \lambda'_{m+1} = \omega_{m+1} - \omega_{m+2}, \\ &\lambda_3 = \omega_3 - \omega_2, && \vdots \\ &\vdots && \lambda'_{\ell-1} = \omega_{\ell-1} - \omega_\ell, \\ &\lambda_m = \omega_m - \omega_{m-1}, && \lambda'_\ell = \omega_\ell. \end{aligned}$$

Kad izračunamo skalarne produkte između gornjih težina i elemenata iz $\Gamma$, dobit ćemo

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_i, \gamma \rangle &= \begin{cases} 1, & \text{ako je } \gamma \text{ u } i\text{-tom retku,} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \\
\langle \lambda'_j, \gamma \rangle &= \begin{cases} 1, & \text{ako je } \gamma \text{ u } j\text{-tom stupcu,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dakle, $\lambda_i, \lambda'_j$ zadovoljavaju sustav (4.8). Pokazat ćemo

**Lema 10** *Svaki $\lambda \in P$ koji zadovoljava sustav* (4.8) *(odnosno* (4.7)*), možemo napisati kao*

$$\lambda = a_1\lambda_1 + \cdots + a_m\lambda_m + b_m\lambda'_m + \cdots + b_\ell\lambda'_\ell,$$

*gdje su $a_i, b_j \in \mathbb{Z}_+$.*

Na primjer, imamo

$$\begin{aligned}
\omega_3 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\
\omega_i &= \lambda_i + \lambda_{i-1} + \cdots + \lambda_1, \quad \text{za } i \leq m, \\
\omega_j &= \lambda'_j + \lambda'_{j+1} + \cdots + \lambda'_\ell, \quad \text{za } j \geq m, \\
\omega_m &= \lambda_m + \lambda_{m-1} + \cdots + \lambda_1 = \lambda'_m + \lambda'_{m+1} + \cdots + \lambda'_\ell. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

**Dokaz:** Dokaz ćemo provesti u 2 koraka:

(1) Pokazat ćemo da $\lambda$ koji zadovoljava sustav (4.8) možemo napisati kao zbroj

$$\lambda = \lambda' + \lambda'',$$

gdje su

$$\begin{aligned}
\lambda' &= a_1\omega_1 + \cdots + a_m\omega_m, \\
\lambda'' &= b_m\omega_m + \cdots + b_\ell\omega_\ell,
\end{aligned}$$

takvi da oba zadovoljavaju (4.8).
Neka je

$$\lambda = c_1\omega_1 + \cdots + c_m\omega_m + \cdots + c_\ell\omega_\ell.$$

Stavimo

$$\begin{aligned}
a &= \min\{c_i + \cdots + c_{m-1} \,|\, i = 1, \ldots, m-1\}, \\
b &= \min\{c_{m+1} + \cdots + c_j \,|\, j = m+1, \ldots, \ell\};
\end{aligned}$$

te pretpostavimo da se minimumi dostižu za $i_0, j_0$. Definirajmo $a_i = c_i$ za $i < m$, $b_j = c_j$ za $j > m$. Koeficijente $a_m, b_m$ biramo u ovisnosti o slučaju

(i) $a \geq 0, b \geq 0$.
Tada je $c_m = \langle \lambda, \gamma_{mm} \rangle \geq 0$ pa možemo uzeti proizvoljne $a_m, b_m \geq 0$ takve da je $a_m + b_m = c_m$.

(ii) $a < 0, b \geq 0$.
Budući da je $\langle \lambda, \gamma_{i_0 m} \rangle \geq 0$, vrijedi $c_m \geq |a|$. Uzmemo onda $a_m = |a|, b_m = c_m - |a|$.

(iii) $a \geq 0, b < 0$.
Slično kao gore, zbog $\langle \lambda, \gamma_{m j_0} \rangle \geq 0$, je $c_m \geq |b|$ pa možemo uzeti $b_m = |b|, a_m = c_m - |b|$.

(iv) $a < 0, b < 0$.
Zbog $\langle \lambda, \gamma_{i_0 j_0} \rangle \geq 0$ je $c_m \geq |a| + |b|$. Zato možemo uzeti npr. $a_m = |a|, b_m = c_m - |a| \geq |b|$.

Ovako definirani $a_i, b_j$ zadovoljavaju (4.8).

(2) Za

$$\lambda = a_1\omega_1 + \cdots + a_m\omega_m \tag{4.10}$$

ćemo pokazati da se može napisati kao nenegativna linearna kombinacija $\lambda_i$-ova. Analogno će $\lambda = b_m\omega_m + \cdots + b_\ell\omega_\ell$ biti nenegativna linearna kombinacija $\lambda'_j$.
Za $\lambda$ kao gore, definiramo visinu od $\lambda$

$$h(\lambda) = \langle \lambda, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + m\alpha_m \rangle.$$

Odmah vidimo da je $h(\lambda) = \langle \lambda, \gamma_{1m} + \gamma_{2m} + \cdots + \gamma_{mm} \rangle$ pa je $h(\lambda) \geq 0$. Dokaz provodimo indukcijom po $h(\lambda)$. Pretpostavimo da imamo $\lambda$ visine $h(\lambda) = n$. Neka je $i_0$ najveći indeks u (4.10) za koji je $a_{i_0} \neq 0$. Onda je $a_{i_0} > 0$ jer je $a_{i_0} = \langle \lambda, \gamma_{i_0 m} \rangle \geq 0$. Sada stavimo

$$\lambda' = \lambda - (\omega_{i_0} - \omega_{i_0 - 1}).$$

Vrijedi: $h(\lambda') = n - 1$ i $\lambda'$ zadovoljava (4.7) (treba samo provjeriti za $\gamma_{i_0 m}$, a to je u redu jer je bilo $a_{i_0} > 0$). Tvrdnja sada slijedi indukcijom.

Sa $w(\lambda)$ označimo operatore s početka odlomka; imamo sljedeće dijagrame: [2]

$$\begin{tikzcd}
 & L(\Lambda_0) \arrow[dl, "w(\lambda_1)"'] \arrow[dr, "w(\lambda'_\ell)"] & \\
L(\Lambda_1) \arrow[d, "w(\lambda_2)"'] & & L(\Lambda_\ell) \arrow[d, "w(\lambda'_{\ell-1})"] \\
L(\Lambda_2) \arrow[d, dotted] & & L(\Lambda_{\ell-1}) \arrow[d, dotted] \\
L(\Lambda_{m-1}) \arrow[dr, "w(\lambda_m)"'] & & L(\Lambda_{m+1}) \arrow[dl, "w(\lambda'_m)"] \\
 & L(\Lambda_m) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & v_0 \arrow[dl, mapsto, "w(\lambda_1)"'] \arrow[dr, mapsto, "w(\lambda'_\ell)"] & \\
v_1 \arrow[d, mapsto, "w(\lambda_2)"'] & & v_\ell \arrow[d, mapsto, "w(\lambda'_{\ell-1})"] \\
v_2 \arrow[d, mapsto, dotted] & & v_{\ell-1} \arrow[d, mapsto, dotted] \\
v_{m-1} \arrow[dr, mapsto, "w(\lambda_m)"'] & & v_{m+1} \arrow[dl, mapsto, "w(\lambda'_m)"] \\
 & v_m &
\end{tikzcd}$$

## 4.3 Dokaz linearne nezavisnosti

Napišimo monom $x(\pi)$ kao produkt $x(\pi) = x(\pi_2)x(\pi_1)$, gdje $x(\pi_1)$ sadrži sve elemente stupnja $-1$, a $x(\pi_2)$ elemente nižih stupnjeva. U dokazu linearne nezavisnosti, središnju će ulogu igrati sljedeća propozicija:

**Propozicija 11** *Neka monom $x(\pi)$ zadovoljava uvjete razlike i početne uvjete na modulu $L(\Lambda)$. Tada postoji koeficijent operatora ispreplitanja,*

$$w(\mu) : L(\Lambda) \to L(\Lambda')$$

*takav da*

- $x(\pi_1)v_\Lambda \xrightarrow{w(\mu)} Ce(\omega)v_{\Lambda'}, \quad C \in \mathbb{C}^\times,$
- *$x(\pi_2^+)$ zadovoljava PU i UR na $L(\Lambda')$,*
- *$x(\pi_1)$ je maksimalan za $w(\mu)$, tj. svi monomi $x(\pi')$ takvi da $w(\mu)$ ne poništava $x(\pi')v_\Lambda$, imaju $(-1)$-dio manji ili jednak $x(\pi_1)$.*

Sljedeća lema dobija se jednostavnim računom iz Cartanove matrice

**Lema 12** *Neka je $\gamma_{ij} \in \Gamma$. Onda je*

$$\gamma_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j. \tag{4.11}$$

[2]U drugom dijagramu imamo jednakosti do na množenje ne-nul skalarom.

**Dokaz propozicije:** Za početak, uzmimo $\Lambda = \Lambda_0$, $v_0 = 1 = e^0$. Neka je

$$x(\pi_1) = x_{i_t j_t}(-1) \cdots x_{i_2 j_2}(-1) x_{i_1 j_1}(-1),$$

gdje pripadne boje čine padajući niz kao ranije, tj. $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq m$, $\ell \geq j_1 > j_2 > \cdots > j_t \geq m$. Elementi stupnja $-2$ nalaze se ili ispod retka $i_t$, ili lijevo od stupca $j_t$. Pretpostavimo da se nalaze ispod retka $i_t$. Budući da za boje od $x(\pi_1)$ vrijedi $\langle \gamma_{ij}, \gamma_{i'j'} \rangle = 0$, imamo

$$x(\pi_1) v_0 = x_{i_t j_t}(-1) \cdots x_{i_1 j_1}(-1) 1 = C_1 \cdot e^{\gamma_{i_1 j_1} + \cdots + \gamma_{i_t j_t}},$$

za neki $C_1 \in \mathbb{C}^\times$. Zbog leme 12, to je dalje jednako

$$x(\pi_1) v_0 = C_1 \cdot e^{\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_t} + \lambda'_{j_t} + \cdots + \lambda'_{j_1}}.$$

Stavimo

$$\mu = \sum_{\substack{i < i_t \\ i \notin \{i_1, \ldots, i_t\}}} \lambda_i + \sum_{\substack{j > j_t \\ j \notin \{j_1, \ldots, j_t\}}} \lambda'_j + \sum_{j=m}^{j_t - 1} \lambda'_j.$$

U $\mu$ smo uključili sve $\lambda_i, i < i_t$, i sve $\lambda'_j, j \geq m$, u čijim se retcima/stupcima ne nalaze nijedna boja od $x(\pi_1)$. Označimo sa $w(\mu)$ koeficijent operatora ispreplitanja $\mathcal{Y}(e^\mu, z)$ koji se nalazi uz $z^{\langle \mu, \omega_0 \rangle} = z^0$. Sjetimo se da je $w(\mu) e^\gamma \neq 0$ ako i samo ako je $\langle \mu, \gamma \rangle = 0$. Stoga monom za monom $x(\pi'_1)$ sastavljen od elemenata stupnja $-1$, $x(\pi'_1) v_0$ neće biti poništen sa $w(\mu)$ ako i samo ako pripadne boje leže u retcima $\{i_1, \ldots, i_t\} \cup \{i_t + 1, \ldots, m\}$ i stupcima $\{j_1, \ldots, j_t\}$. Jasno je da je $x(\pi_1)$ maksimalan takav, tj. ako $x(\pi'_1)$ nije poništen s $w(\mu)$, onda je $x(\pi'_1) \leq x(\pi_1)$.

Primijetimo da je

$$\mu + \lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_t} + \lambda'_{j_t} + \cdots + \lambda'_{j_1} = \sum_{i=1}^{i_t} \lambda_i + \sum_{j=m}^{\ell} \lambda'_j = \omega_{i_t} + \omega.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} w(\mu) x(\pi_1) v_0 &= C_2 e^{\omega_{i_t} + \omega} \\ &= C e(\omega) v_{i_t}, \end{aligned}$$

gdje su $C_2, C \in \mathbb{C}^\times$. Pošto se elementi stupnja $-2$ nalaze ispod retka $i_t$, $x(\pi_2^+)$ zadovoljava početne uvjete i uvjete razlike na modulu $L(\Lambda_{i_t})$. Dakle, operator $w(\mu) : L(\Lambda_0) \to L(\Lambda_{i_t})$ zadovoljava tvrdnju propozicije.

Da su elementi stupnja $-2$ u $x(\pi)$ bili smješteni lijevo od retka $j_t$, onda bi umjesto $\lambda'_j$ za $m \leq j < j_t$, u $\mu$ uključili $\lambda_i$-ove za $i_t < i \leq m$. Tako bi dobili operator $w(\mu) : L(\Lambda_0) \to L(\Lambda_{j_t})$.

Na kraju, općenito, neka je $\Lambda = \Lambda_p$, za $p = 1, \dots, \ell$. Boje od $x(\pi_1)$ se tada nalaze ispod $p$-tog retka, odnosno lijevo od $p$-tog stupca. Onda $\mu$ biramo slično kao i ranije, jedino što ne uzimamo $\lambda_i$-ove za $i \leq p$ (ako je $p \leq m$), odnosno ne uzimamo $\lambda'_j$ za $j \geq p$ (ako je $p \geq m$). Npr. ako je $p \leq m$, a boje elemenata stupnja $-2$ u $x(\pi)$ se nalaze ispod retka $i_t$, stavili bi

$$\mu = \sum_{\substack{p<i<i_t \\ i \notin \{i_1,\dots,i_t\}}} \lambda_i + \sum_{\substack{j>j_t \\ j \notin \{j_1,\dots,j_t\}}} \lambda'_j + \sum_{j=m}^{j_t-1} \lambda'_j.$$

Za $w(\mu)$ uzimamo koeficijent operatora ispreplitanja $\mathcal{Y}(e^\mu, z)$ koji stoji uz $z^{\langle \mu, \omega_p \rangle}$. Pošto je $\omega_p$ upravo jednak sumi $\lambda_i$-ova (odn. $\lambda'_j$-ova) koje više ne uzimamo u $\mu$, imamo

$$\mu + \gamma_{i_1 j_1} + \cdots + \gamma_{i_t j_t} + \omega_p = \begin{cases} \omega + \omega_{i_t} \\ \text{ili} \\ \omega + \omega_{j_t}, \end{cases}$$

u ovisnosti o izboru $\mu$, odnosno o položaju boja elemenata stupnja $-2$. Također vrijedi

$$w(\mu) x(\pi_1) v_p = \begin{cases} C e(\omega) v_{i_t} \\ \text{ili} \\ C e(\omega) v_{j_t}. \end{cases}$$

Time je završen dokaz propozicije.

Sada ćemo pomoću propozicije 11 dokazati linearnu nezavisnost skupa

$$\{x(\pi) v_\Lambda \,|\, x(\pi) \text{ zadovoljava PU i UR}\}.$$

Dokaz provodimo indukcijom po stupnju monoma, te po uređaju na skupu monoma, istovremeno za sve standardne module nivoa 1. Pretpostavimo da imamo relaciju

$$\sum c_\pi x(\pi) v_\Lambda, \tag{4.12}$$

pri čemu su svi monomi stupnja većeg od $-n-1$. Fiksirajmo monom $x(\pi)$ iz (4.12) i pretpostavimo da je

$$c_{\pi'} = 0 \quad \text{za} \quad x(\pi') < x(\pi).$$

Pokazat ćemo da je onda i $c_\pi = 0$.

Prema propoziciji 11, postoji operator $w(\mu)$ takav da

- $x(\pi_1) v_\Lambda \xrightarrow{w(\mu)} C e(\omega) v_{\Lambda'}, \quad C \in \mathbb{C}^\times,$

- $x(\pi_2^+)$ zadovoljava PU i UR na $v_{\Lambda'}$,
- $w(\mu) \cdot x(\pi')v_\Lambda = 0 \quad \text{za} \quad x(\pi_1') > x(\pi_1)$.

Djelujemo sa operatorom $w(\mu)$ na relaciju (4.12), imamo

$$\begin{aligned} 0 &= w(\mu) \sum c_{\pi'} x(\pi') v_\Lambda \\ &= w(\mu) \sum_{\pi_1' > \pi_1} c_{\pi'} x(\pi') v_\Lambda + w(\mu) \sum_{\pi_1' < \pi_1} c_{\pi'} x(\pi') v_\Lambda + w(\mu) \sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi') v_\Lambda \end{aligned}$$

Prva suma propadne kad na nju djelujemo s $w(\mu)$, druga suma je jednaka 0 po pretpostavci indukcije. Ostaje

$$\begin{aligned} 0 &= w(\mu) \sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi') v_\Lambda \\ &= \sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi_2') C e(\omega) v_{\Lambda'} \\ &= C e(\omega) \sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi_2'^{+}) v_{\Lambda'} \end{aligned}$$

Budući da je $e(\omega)$ injekcija, slijedi

$$\sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi_2'^{+}) v_{\Lambda'} = 0.$$

U gornjoj relaciji se mogu pojaviti i vektori $x(\pi_2'^{+})v_{\Lambda'}$ takvi da $x(\pi_2'^{+})$ ne zadovoljava početne uvjete na $W(\Lambda')$, no ti vektori će biti jednaki 0 zbog definicije početnih uvjeta za module nivoa 1. Preživjet će samo oni vektori koji zadovoljavaju početne uvjete i uvjete razlike; među njima je i $x(\pi_2^+)v_{\Lambda'}$. Nadalje, svi monomi koje smo dobili su stupnja većeg od $-n$; po pretpostavci indukcije oni moraju biti linearno nezavisni. Posebno je i $c_\pi = 0$.

Time smo dokazali

**Teorem 13** *Neka je $L(\Lambda)$ standardni modul nivoa 1. Tada skup*

$$\{x(\pi)v_\Lambda \,|\, x(\pi) \text{ zadovoljava UR i PU}\}$$

*čini bazu prostora Feigin-Stojanovskog $W(\Lambda)$.*

# Poglavlje 5

# Uvjeti razlike

## 5.1 Relacije

Da dobijemo relacije među monomima koji razapinju $W(\Lambda)$, krećemo od posljedice Frenkel-Kac-Segalove formule za modul $L(\Lambda)$:

$$x_\theta(z)^{k+1} = 0.$$

Prema napomenama 6 i 7 gornji produkt odgovara verteks-operatoru pridruženom vektoru $x_\theta(-1)^{k+1}1$. Zbog korespondencije između polja i vektora (vidi napomenu 4) je ta relacija ekvivalentna sa

$$x_\theta(-1)^{k+1}1 = 0.$$

Ako na tu relaciju djelujemo sa $y \in \mathfrak{l}_0$, dobit ćemo

$$\begin{aligned} 0 &= y \cdot x_\theta(-1)^{k+1}1 = [y, x_\theta(-1)^{k+1}] \cdot 1 + x_\theta(-1)^{k+1} y \cdot 1 \qquad (5.1) \\ &= [y, x_\theta(-1)^{k+1}] \cdot 1 \qquad (5.2) \end{aligned}$$

Komutator $[y, x_\theta(-1)^{k+1}]$ je ponovno element iz $S(\mathfrak{g}_1(-1)) \subset S(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$ pa će nam gornja jednakost dati novu relaciju među poljima $x_\gamma(z)$, $\gamma \in \Gamma$. Stoga promatramo podreprezentaciju $V$ od $\mathfrak{l}_0$ unutar $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$ generiranu singularnim vektorom $x_\theta(-1)^{k+1}$,

$$V = U(\mathfrak{l}_0) \cdot (x_\theta(-1))^{k+1} \subset U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \qquad (5.3)$$

Djelovanje od $\mathfrak{l}_0$ na $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$ definirano je adjungiranim djelovanjem od $\mathfrak{l}_0$ na $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ (odn. na $\mathfrak{g}_1$). Vektor $(x_\theta(-1))^{k+1}$ je vektor najveće težine $(k+1)\theta$ za $\mathfrak{l}_0$.

Adjungirano djelovanje od $\mathfrak{l}_0$ na $\mathfrak{g}_1$ možemo opisati pomoću djelovanja od $\mathfrak{l}_0$ na skupu boja $\Gamma$, koji je ujedno i skup korijena od $\mathfrak{g}_1$. Algebra $\mathfrak{l}_0$ je direktna suma dviju prostih podalgebri,

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_0' \oplus \mathfrak{l}_0'',$$

gdje je prva tipa podalgebra tipa $A_{m-1}$, a druga $A_{\ell-m}$

Adjungirano djelovanje od $\mathfrak{l}_0'$ dano je sa

$$\begin{aligned} [x_{-\alpha_i}, x_{\gamma_{pq}}] &= \delta_{ip} x_{\gamma_{p+1,q}}, \\ [x_{\alpha_i}, x\gamma_{pq}] &= \delta_{i,p-1} x_{\gamma_{p-1,q}}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

za $i = 1, \ldots, m-1$, gdje su $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ odgovarajući Chevalleyovi generatori. Adjungirano djelovanje druge podalgebre $\mathfrak{l}_0''$ dano je sa

$$\begin{aligned} [x_{-\alpha_i}, x_{\gamma_{pq}}] &= \delta_{iq} x_{\gamma_{p,q-1}}, \\ [x_{\alpha_i}, x_{\gamma_{pq}}] &= \delta_{i,q+1} x_{\gamma_{p,q+1}}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

za $i = m+1, \ldots, \ell$. Možemo reći da prva podalgebra $\mathfrak{l}_0'$ djeluje tako da mijenja samo indeks redaka boja, a druga podalgebra $\mathfrak{l}_0''$ tako da mijenja samo indeks stupaca boja.

Želimo proučiti $\mathfrak{l}_0$-modul $V$ iz relacije (5.3). Adjungirano djelovanje od $\mathfrak{l}_0$ ne mijenja stupanj elemenata iz $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) = S(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$. Stoga je $V$ zapravo smješten unutar simetrične algebre $S(\mathfrak{g}_1(-1))$. Budući da je

$$S(\mathfrak{g}_1(-1)) \cong S(\mathfrak{g}_1) = U(\mathfrak{g}_1)$$

kao $\mathfrak{l}_0$-modul i asocijativna algebra, možemo na $V$ gledati kao da je realiziran unutar simetrične algebre $S(\mathfrak{g}_1)$, odnosno polinomijalne algebre u varijablama

$$x_{ij}, \qquad \begin{aligned} i &= 1, \ldots, m \\ j &= m, \ldots, \ell. \end{aligned}$$

Na njoj $\mathfrak{l}_0$ djeluje derivacijama tako da $\mathfrak{l}_0'$ djeluje tako da mijenja prvi, a $\mathfrak{l}_0''$ drugi indeks varijabli. Vektor najveće težine u $V$ je onda $x_{1\ell}^{k+1}$ (jer je $\theta = \gamma_{1\ell}$, pripadna težina $(k+1)\theta$.

Znamo da je (vidi lemu 12)

$$\theta = \gamma_{1\ell} = \omega_1 + \omega_\ell.$$

Prvi sumand, $\omega_1$, je u stvari težina za $\mathfrak{l}_0'$, a drugi, $\omega_\ell$, za $\mathfrak{l}_0''$. Neka je $V_1$ reprezentacija najveće težine $(k+1)\omega_1$ za $\mathfrak{l}_0'$, a $V_2$ reprezentacija najveće težine $(k+1)\omega_\ell$ za $\mathfrak{l}_0''$. Onda je

$$V \cong V_1 \otimes V_2.$$

Modul $V_1$ realiziramo kao prostor homogenih polinoma stupnja $k+1$ u $m$ varijabli

$$V_1 = S^{k+1}(x_1, \ldots, x_m) \subset S(x_1, \ldots, x_m).$$

Ako identificiramo $\mathfrak{l}_0'$ sa $m \times m$ matricama traga 0, onda je djelovanje od $\mathfrak{l}_0'$ dano s

$$E_{ij} \mapsto x_i \frac{\partial}{\partial x_j},$$

gdje $E_{ij}$ predstavlja matricu koja ima 1 na mjestu $ij$, a ostalo su 0. Tada elementi baze $x_{-\alpha_i}$, $x_{\alpha_i}$ djeluju kao derivacije $x_{i+1}\frac{\partial}{\partial x_i}$, $x_i\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}$. To je djelovanje slično kao u (5.4). Vektor najveće težine bit će monom $x_1^{k+1}$. Direktnim računanjem, ili iz formule karaktera, vidi se da monomi

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{k+1}}, \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{k+1} \leq m$$

čine bazu od $V_1$ sačinjenu od težinskih vektora.

Slično, $V_2$ možemo realizirati kao homogene polinome stupnja $k+1$ u $\ell - m + 1$ varijabli

$$V_2 = S^{k+1}(x_m, \ldots, x_\ell) \subset S(x_m, \ldots, x_\ell).$$

Generatori $x_{-\alpha_i}$, $x_{\alpha_i}$ djeluju kao derivacije $x_{i-1}\frac{\partial}{\partial x_i}$, $x_i\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}$. Ovo djelovanje slično je onom u (5.5). Vektor najveće težine je $x_\ell^{k+1}$, a bazu čine monomi

$$x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{k+1}}, \quad \ell \geq j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_{k+1} \geq m.$$

Bazu od $V_1 \otimes V_2$ činit će onda tenzorski produkti

$$\begin{gathered} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{k+1}} \otimes x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{k+1}}, \\ 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{k+1} \leq m, \\ \ell \geq j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_{k+1} \geq m. \end{gathered}$$

Hoćemo vidjeti kako će izgledati odgovarajuća baza od $V \subset S(\mathfrak{g}_1)$. Pokazat ćemo da gornjem vektoru odgovara linearna kombinacija svih mogućih monoma stupnja $k+1$ takvih da je (multi)skup 1. indeksa jednak $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}\}$, a (multi)skup 2. indeksa jednak $\{j_1, j_2, \ldots, j_{k+1}\}$

$$\sum_{\substack{\{p_1,\ldots,p_{k+1}\}=\{i_1,\ldots,i_{k+1}\} \\ \{q_1,\ldots,q_{k+1}\}=\{j_1,\ldots,j_{k+1}\}}} C_{pq} x_{p_1q_1}x_{p_2q_2}\cdots x_{p_{k+1}q_{k+1}}. \tag{5.6}$$

Koeficijenti $C_{pq}$ su pozitivni cijeli brojevi.

Najprije ćemo na vektore najveće težine $x_{1\ell}^{k+1} \in V$, odn. $x_1^{k+1} \otimes x_\ell^{k+1} \in V_1 \otimes V_2$, djelovati odgovarajućim $x_{-\alpha_i}$-ovima, $i \in \{m+1, \ldots, \ell\}$, tako da u $V_1 \otimes V_2$ dobijemo

$$x_1^{k+1} \otimes x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{k+1}}.$$

Odgovarajući vektor u $V$ bit će jednak

$$x_{1j_1}x_{1j_2}\cdots x_{1j_{k+1}}.^1$$

Kada na te vektore djelujemo sa $x_{-\alpha_{i_{k+1}-1}}x_{-\alpha_{i_{k+1}-2}}\cdots x_{-\alpha_1}$, dobit ćemo s jedne strane

$$x_1^k x_{i_{k+1}} \otimes x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{k+1}} \in V_1 \otimes V_2,$$

a sa druge

$$\sum_{r=1}^{k+1} x_{1j_1}\cdots x_{i_{k+1}j_r}\cdots x_{1j_{k+1}} \in V.$$

U drugom vektoru je po jedno pojavljivanje indeksa 1 na prvome mjestu prešlo u indeks $i_{k+1}$. Monomi

$$x_{1j_1}\cdots x_{1j_{r-1}}x_{1j_{r+1}}\cdots x_{1j_{k+1}}$$

odgovaraju vektorima

$$x_1^k \otimes x_{j_1}\cdots x_{j_{r-1}}x_{j_{r+1}}\cdots x_{j_{k+1}}$$

iz odgovarujućeg modula $V_1' \otimes V_2'$ kojeg bi promatrali kada bi gledali nivo $k-1$. Dalje bi na gornje monome i vektore djelovali sa $x_{-\alpha_{i_k-1}}x_{-\alpha_{i_k-2}}\cdots x_{-\alpha_1}$ koji bi po jedno pojavljivanje indeksa 1 prevodili u $i_k$. Tvrdnja sada slijedi indukcijom po $k$, jer je $x_{-\alpha_s}\cdot x_{i_{k+1}j} = 0$ za $s < i_{k+1}$.

Budući da je $\mathfrak{g}_1$ komutativna, prema napomenama 6 i 7, imamo ovakvu korespondenciju polja i vektora

$$\begin{aligned} x_{p_1q_1}x_{p_2q_2}\cdots x_{p_{k+1}q_{k+1}} &\leftrightsquigarrow x_{p_1q_1}(-1)x_{p_2q_2}(-1)\cdots x_{p_{k+1}q_{k+1}}(-1)1 \\ &\leftrightsquigarrow x_{p_1q_1}(z)x_{p_2q_2}(z)\cdots x_{p_{k+1}q_{k+1}}(z). \end{aligned}$$

Ako to primijenimo na (5.6), dobit ćemo sljedeće relacije na $W(\Lambda)$:

$$\sum_{\substack{\{p_1,\dots,p_{k+1}\}=\{i_1,\dots,i_{k+1}\}\\ \{q_1,\dots,q_{k+1}\}=\{j_1,\dots,j_{k+1}\}}} C_{pq}x_{p_1q_1}(z)x_{p_2q_2}(z)\cdots x_{p_{k+1}q_{k+1}}(z) = 0$$

pri čemu su pripadni koeficijenti $C_{pq}$ prirodni brojevi.

[1] Točnije, gornjem vektoru odgovara neki multipl tog monoma, $N\cdot x_{1j_1}x_{1j_2}\cdots x_{1j_{k+1}}$, gdje je $N\in\mathbb{N}$ odgovarajući multinomni koeficijent. No, budući da tražimo bazu, ti skalarni faktori nam nisu bitni.

## 5.2 Vodeći članovi

Fiksirajmo jedan izbor

$$\begin{aligned} 1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_{k+1} \le m, \\ \ell \ge j_1 \ge j_2 \ge \cdots \ge j_{k+1} \ge m \end{aligned}$$

i promatrajmo odgovarajuću relaciju među poljima. U njoj gledamo koeficijente uz $z^{n-k-1}$ za svaki $n \ge k+1$. Oni su beskonačne sume monoma od $k+1$ faktora

$$\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_{k+1}=n \\ p,q}} C_{pq} x_{p_1 q_1}(-n_1) x_{p_2 q_2}(-n_2) \cdots x_{p_{k+1} q_{k+1}}(-n_{k+1}) = 0.$$

U svakoj takvoj sumi identificiramo najmanji monom obzirom na leksikografski uređaj, tzv. vodeći član relacije. Njega onda možemo izraziti pomoću većih pa ga možemo izostaviti iz razapinjućeg skupa.

Svi monomi koji se pojavljuju u gornjoj relaciji su iste duljine i istog ukupnog stupnja. Zato je dovoljno gledati one koji su "minimalnog oblika", tj. one kod kojih se stupnjevi među faktorima razlikuju najviše za 1. Ostali monomi će sigurno biti veći od njih. Možemo ih podijeliti u $k+1$ osnovnih tipova, ovisno o ostatku pri dijeljenju $n$ sa $k+1$.

Pogledajmo najprije slučaj kad je $n = r(k+1)$. Monomi minimalnog oblika za taj slučaj, imat će svih $k+1$ faktora istog stupnja. Tražimo zato najmanji mogući izbor

$$x_{p_1 q_1}(-r) x_{p_2 q_2}(-r) \cdots x_{p_{k+1} q_{k+1}}(-r), \qquad \begin{aligned} \{p_1, \ldots, p_{k+1}\} = \{i_1, \ldots, i_{k+1}\}, \\ \{q_1, \ldots, q_{k+1}\} = \{j_1, \ldots, j_{k+1}\} \end{aligned}$$

u leksikografskom uređaju. Budući da su svi faktori istog stupnja, problem se svodi na nalaženje najmanje moguće konfiguracije

$$x_{p_1 q_1} x_{p_2 q_2} \cdots x_{p_{k+1} q_{k+1}}, \qquad \begin{aligned} \{p_1, \ldots, p_{k+1}\} = \{i_1, \ldots, i_{k+1}\}, \\ \{q_1, \ldots, q_{k+1}\} = \{j_1, \ldots, j_{k+1}\} \end{aligned}$$

u leksikografskom uređaju. To znači da ćemo monom birati tako da imamo najmanji mogući zadnji (najveći) element $x_{p_{k+1} q_{k+1}}$, zatim najmanji mogući predzadnji (idući najveći) element u monomu, i tako dalje.

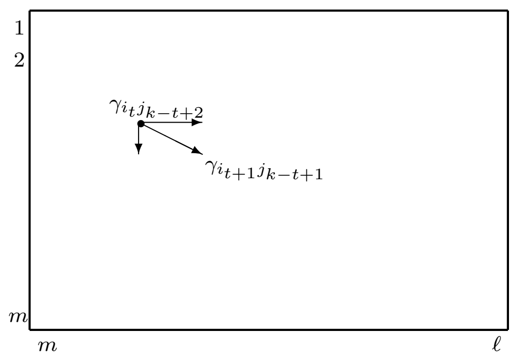
No, taj je uređaj izveden iz uređaja na bojama $\gamma \in \Gamma$ gdje najprije uspoređujemo retke, a potom stupce; uzimamo da je

$$\begin{aligned} 1 > 2 > \cdots > m, \\ \ell > \ell - 1 > \cdots > m. \end{aligned}$$

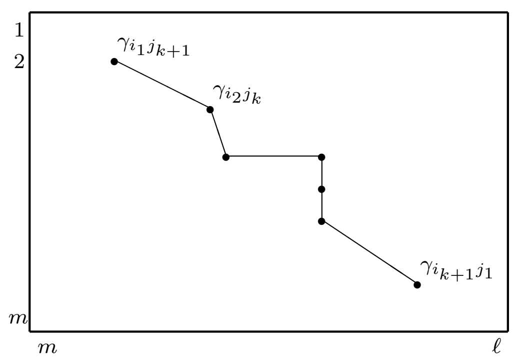
Vidimo stoga da se najveći element nalazi u $i_1$-om retku. Najmanji mogući među takvima je $x_{i_1 j_{k+1}}$. Idući najveći je iz $i_2$-og retka, najmanji mogući među takvima je $x_{i_2 j_k}$.[2] Nastavljamo dalje induktivno. Dobili smo monom

$$x_{i_{k+1} j_1} \cdots x_{i_2 j_k} x_{i_1 j_{k+1}} \rightsquigarrow x_{i_{k+1} j_1}(-r) \cdots x_{i_2 j_k}(-r) x_{i_1 j_{k+1}}(-r).$$

Pogledajmo kako su smještene odgovarajuće boje u tom monomu. Vidimo da je svaki $\gamma_{i_{t+1} j_{k-t+1}}$ smješten ili desno, ili ispod, ili dijagonalno dolje i desno od prethodnog $\gamma_{i_t j_{k-t+2}}$:




Prema tome, odgovarajuće boje u vodećem članu bit će smještene na putu poput ovog na slici (pritom dozvoljavamo da se boje ponavljaju, tj. da su dvije uzastopne boje jednake)




Na kraju, želimo zapisati vodeće članove u terminima eksponenata $\pi(x_{ij}(-r))$. Označimo sa $a_{ij} = \pi(x_{ij}(-r))$ eksponent od $x_{ij}(-r)$ u monomu

[2] Ako je $i_1 = i_2$, onda će drugi element biti veći ili jednak prvom. Međutim, to neće predstavljati problem jer će nam ovakav izbor prvih elemenata davati (do na poredak) najmanji mogući izbor elemenata iz $i_1$-og retka, tj. najvećih elemenata u našem monomu.

$x(\pi)$. Tada vodeći članovi odgovaraju rješenjima jednadžbi

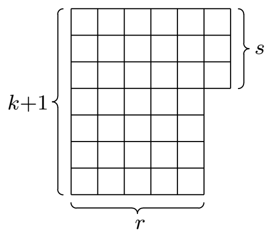
$$\begin{aligned} &a_{i_1 j_t} + a_{i_2 j_{t-1}} + \cdots + a_{i_t j_1} = k+1, \\ &1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_t \le m, \\ &\ell \ge j_1 \ge j_2 \ge \cdots \ge j_t \ge m, \\ &(i_\nu, j_\nu) \ne (i_{\nu+1}, j_{\nu+1}). \end{aligned}$$

gdje su boje $\gamma_{i_\nu j_\nu}$ postavljene po putu kakav smo gore imali. Zadnji redak ne dozvoljava više da se boje ponavljaju, jer se odgovarajući eksponenti zapravo broje ponavljanje svake boje.

Uvjet razlike kaže da monom $x(\pi)$ iz razapinjućeg skupa ne sadrži vodeće članove. U terminima eksponenata to možemo zapisat tako da u gornjim relacijama zamijenimo znak "=" s "<", odnosno

$$\begin{aligned} &a_{i_1 j_t} + a_{i_2 j_{t-1}} + \cdots + a_{i_t j_1} \le k, \\ &1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_t \le m, \\ &\ell \ge j_1 \ge j_2 \ge \cdots \ge j_t \ge m, \\ &(i_\nu, j_\nu) \ne (i_{\nu+1}, j_{\nu+1}). \end{aligned}$$

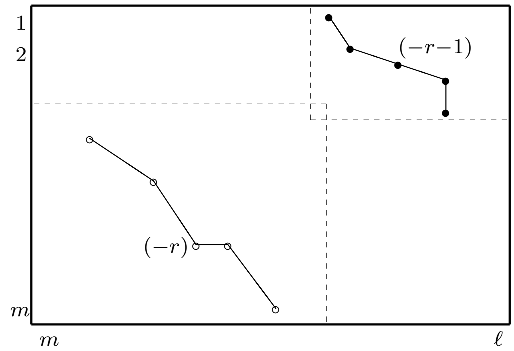
Neka je sada $n = r(k+1) + s$. "Minimalni oblik" za ovaj slučaj je:




U vodećem članu ćemo imati $s$ faktora stupnja $-r-1$ te $k-s+1$ faktora stupnja $-r$. Pošto su elementi stupnja $-r$ veći od onih stupnja $-r-1$, vodeći član ćemo naći tako da uzmemo prvo najmanji mogući $(-r)$-dio monoma, a zatim najmanji mogući $(-r-1)$-dio. Stoga $(-r)$-dio smještamo na najmanjih (u uređaju na $\Gamma$) $k-s+1$ redaka i stupaca, na ostale smještamo $(-r-1)$-dio:

$$\begin{aligned} (-r)\text{-dio} &\rightsquigarrow (i_{s+1} i_{s+2} \cdots i_{k+1}),\ (j_{s+1} j_{s+2} \cdots j_{k+1}), \\ (-r-1)\text{-dio} &\rightsquigarrow (i_1 i_2 \cdots i_s),\ (j_1 j_2 \cdots j_s). \end{aligned}$$

Dalje nastavljamo kao u ranijem slučaju; vidimo da se elementi istog stupnja nalaze na putu kakav smo malo prije spomenuli, i retci od $(-r)$-elemenata su veći ili jednaki od redaka od $(-r-1)$-elemenata (u standardnom uređaju na $\mathbb{N}$), stupci od $(-r)$-elemenata su manji ili jednaki od stupaca od $(-r-1)$-elemenata:




Pomoću eksponenata, uvjete razlike u ovom slučaju možemo napisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} & b_{i_1 j_s} + \cdots + b_{i_s j_1} + a_{i_{s+1} j_t} + \cdots + a_{i_t j_{s+1}} \leq k, \\ & 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_s \leq i_{s+1} \leq \cdots \leq i_t \leq m, \\ & \ell \geq j_1 \geq \cdots \geq j_s \geq j_{s+1} \geq \cdots \geq j_t \geq m \\ & (i_\nu, j_\nu) \neq (i_{\nu+1}, j_{\nu+1}), \text{ za } \nu = 1, \ldots, s-1, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad s+1, \ldots, t \end{aligned}$$

gdje $a$-ovi predstavljaju eksponente odgovarajućih $(-r)$-faktora, a $b$-ovi eksponente $(-r-1)$-faktora.

Na kraju, primijetimo da ovako napisani uvjeti razlike obuhvaćaju i prethodni slučaj. To je zato što se područja u kojima se nalaze $(-r)$ i $(-r-1)$-dio preklapaju u gornjem desnom odnosno donjem lijevom polju pa možemo uzeti da se $(-r)$-dio nalazi u čitavom $\Gamma$, a $(-r-1)$-dio samo u gornjem desnom polju (na mjestu $1\ell$). Stoga ćemo u daljnjem tekstu pod uvjetima razlike podrazumijevati ove nejednakosti.

**Propozicija 14** *Skup*

$$\{x(\pi)v_\Lambda \,|\, x(\pi) \text{ zadovoljava UR}\}$$

*razapinje* $W(\Lambda)$.

**Dokaz** Ako $x(\pi)$ ne zadovoljava uvjete razlike, onda on sadrži vodeći član $x(\pi')$ kojeg možemo zamijeniti s većima $x(\pi_i') > x(\pi')$, istog ukupnog stupnja. Dodamo li im ostale faktore od $x(\pi)$, dobit ćemo monome $x(\pi_i)$. Zbog propozicije 8, vrijedi $x(\pi) < x(\pi_i)$, svi su istog ukupnog stupnja kao i $x(\pi)$, i

$$x(\pi)v_\Lambda = \alpha_1 x(\pi_1)v_\Lambda + \cdots + \alpha_r x(\pi_r)v_\Lambda.$$

Dakle, ako $x(\pi)$ ne zadovoljava uvjete razlike onda $x(\pi)v_\Lambda$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju većih monoma istog ukupnog stupnja. Međutim, takvih ima najviše konačno mnogo, pa ćemo nakon konačno koraka imati samo monome koji zadovoljavaju uvjete razlike.

# Poglavlje 6

# Početni uvjeti

Definirat ćemo u ovom odlomku tzv. početne uvjete na monomima iz $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$. Oni se odnose na $(-1)$-dio monoma. Monome koji neće zadovoljavati početne uvjete također ćemo moći izostaviti iz razapinjućeg skupa.

Jasno je da iz razapinjućeg skupa za $W(\Lambda)$ moramo izostaviti one monome čiji $(-1)$-dio poništava $v_\Lambda$. Također, može se desiti da postoje neke relacije između takvih $(-1)$-dijelova. Vidjet ćemo uskoro da se te relacije zapravo svode na relacije dobivene iz uvjeta razlike na modulima nižeg nivoa.

**Primjer** Neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}l(4, \mathbb{C})$, $\omega = \omega_2$. Skup boja je tada

$$\Gamma = \{\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{22}, \gamma_{23}\}.$$

Promatramo standardni modul $L(\Lambda)$ nivoa 2 za $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_2$, realiziran u tenzorskom produktu modula nivoa 1. Vektor najveće težine je $v_\Lambda = v_0 \otimes v_2$. Promatrajmo monome

$$\begin{aligned} x(\pi) &= x_{22}(-1)x_{13}(-1), \\ x(\pi') &= x_{23}(-1)x_{12}(-1). \end{aligned}$$

I jedan i drugi zadovoljavaju uvjete razlike na $W(\Lambda)$. Medjutim, pošto svaki $x_\gamma(-1), \gamma \in \Gamma$ poništava $v_2$, onda je

$$\begin{aligned} x(\pi)v_\Lambda &= (x_{22}(-1)x_{13}(-1)v_0) \otimes v_2, \\ x(\pi')v_\Lambda &= (x_{23}(-1)x_{12}(-1)v_0) \otimes v_2. \end{aligned}$$

S druge strane, iz relacija na osnovnom modulu $L(\Lambda_0)$ znamo da su vektori $x_{22}(-1)x_{13}(-1)v_0$ i $x_{23}(-1)x_{12}(-1)v_0$ međusobno proporcionalni. Stoga su i $x(\pi)v_\Lambda$ i $x(\pi')v_\Lambda$ također međusobno proporcionalni, pa ćemo jednog od njih morati isključiti iz razapinjućeg skupa. Ovo je tipičan primjer relacije koja nam daje početne uvjete; početni uvjeti će se svoditi na uvjete razlike na nekom modulu nižeg nivoa.

Početni uvjeti bi izgledom trebali podsjećati na uvjete razlike. Oni ustvari glume uvjete razlike u kojima elementi stupnja $-1$ igraju ulogu elemenata stupnja $-j-1$. Pokazat ćemo da početni uvjeti izgledaju ovako:

$$a_{i_1 j_t} + a_{i_2 j_{t-1}} + \cdots + a_{i_t j_1} \leq k_0 + k_1 + \cdots + k_{i_t - 1} + k_{j_t + 1} + \cdots + k_\ell,$$
$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_t \leq m,$$
$$\ell \geq j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_t \geq m,$$
$$(i_\nu, j_\nu) \neq (i_{\nu+1}, j_{\nu+1}),$$

gdje je $a_{ij}$ eksponent od $x_{ij}(-1)$. Na desnoj strani nejednakosti imamo sumu multipliciteta svih modula nivoa 1 na kojima živi barem jedan od faktora $x_{ij}(-1)$ iz monoma koji odgovara lijevoj strani.

**Propozicija 15** *Skup*

$$\{x(\pi)v_\Lambda \,|\, x(\pi) \text{ zadovoljava PU i UR}\}$$

*razapinje* $W(\Lambda)$.

Prisjetimo se da je kod dokaza da monomi $\{x(\pi)v_\Lambda \,|\, x(\pi) \text{ zadovoljava UR}\}$ razapinju $W(\Lambda)$ ključna bila činjenica da ako $x(\pi)$ ne zadovoljava uvjete razlike, onda on sadrži vodeći član $x(\pi')$ kojeg možemo zamijeniti s većima $x(\pi_i')$, istog ukupnog stupnja. Zbog toga smo i $x(\pi)$ mogli zamijeniti s monomima $x(\pi_i)$:

$$x(\pi)v_\Lambda = \alpha_1 x(\pi_1)v_\Lambda + \cdots + \alpha_r x(\pi_r)v_\Lambda$$

i pritom su $x(\pi_i) > x(\pi)$, istog ukupnog stupnja. Pokazat ćemo analognu tvrdnju za početne uvjete.

**Dokaz:** Ako $x(\pi)$ ne zadovoljava početne uvjete, tada $x(\pi)$ sadrži član $x(\pi')$ koji se sastoji od $(-1)$-ica čije su boje smještene na dijagonalnom putu, tako da $x(\pi')$ na zadovoljava početne uvjete. Vidjet ćemo da onda $x(\pi')$ možemo zamijeniti s $x(\pi_1'), \ldots, x(\pi_r')$, gdje su $x(\pi_i')$ istog ukupnog stupnja i $x(\pi) < x(\pi_i')$. Zajedno s ostatkom od $x(\pi)$, oni će nam dati monome $x(\pi_i)$ istog ukupnog stupnja, takve da je $x(\pi) < x(\pi_i)$ i

$$x(\pi)v_\Lambda = \alpha_1 x(\pi_1)v_\Lambda + \cdots + \alpha_r x(\pi_r)v_\Lambda.$$

Neka je

$$x(\pi') = x_{i_t j_1}(-1) \cdots x_{i_1 j_t}(-1)$$

kao gore. Možemo uzeti $x(\pi')$ takav da je

$$t = k_0 + k_1 + \cdots + k_{i_t - 1} + k_{j_t + 1} + \cdots + k_\ell + 1, \tag{6.1}$$

tj. možemo izabrati $x(\pi')$ minimalne duljine. Imamo 2 mogućnosti:

(i) $t = k + 1$.
U ovom slučaju je početni uvjet za $x(\pi')$ ekvivalentan uvjetu razlike, pa tvrdnja slijedi iz analogne tvrdnje za uvjete razlike.

(ii) $t \leq k$.
Tada u tenzorskom produktu $v_\Lambda = v_0^{\otimes k_0} \otimes v_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes v_\ell^{\otimes k_\ell}$ postoji barem jedan $v_i$ na kojem se poništavaju svi faktori od $x(\pi')$. Grupiramo $\Lambda_i$-ove iz $\Lambda$

$$\Lambda' = \sum_{i=0}^{i_t - 1} k_i \Lambda_i + \sum_{i=j_t+1}^{\ell} k_i \Lambda_i;$$

suma ide po istim indeksima kao i u (6.1), tj. po svim $i$ takvima da na odgovarajućem modulu (nivoa 1) $L(\Lambda_i)$, barem jedan od faktora u $x(\pi')$ djeluje netrivijalno. Stavimo

$$\Lambda'' = \sum_{i=i_t}^{j_t} k_i \Lambda_i = \Lambda - \Lambda'.$$

Sa $v_{\Lambda'}$ i $v_{\Lambda''}$ označimo odgovarajuće vektore najveće težine u standardnim modulima $L(\Lambda')$ i $L(\Lambda'')$. Onda je

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda' + \Lambda'', \\ v_\Lambda &= v_{\Lambda'} \otimes v_{\Lambda''}, \end{aligned}$$

i vrijedi

$$x(\pi') v_\Lambda = (x(\pi') v_{\Lambda'}) \otimes v_{\Lambda''}.$$

Primijetimo da je $L(\Lambda')$ modul nivoa $k' < k$, i

$$t = k' + 1.$$

Uvjeti razlike za nivo $k'$ nam daju onda monome $x(\pi'_1), \ldots, x(\pi'_r)$ istog ukupnog stupnja takve da je

$$x(\pi') v_{\Lambda'} = \alpha_1 x(\pi'_1) v_{\Lambda'} + \cdots + \alpha_r x(\pi'_r) v_{\Lambda'}$$

i $x(\pi') < x(\pi'_i)$. Iz relacija koje su dale uvjete razlike vidimo da se u $x(\pi'_i)$ kao faktori pojavljuju $(-1)$-ice čije se boje nalaze u istim retcima i stupcima kao i one od faktora u $x(\pi')$. Sve one također daju 0 kada djeluju na $v_{\Lambda''}$. Stoga je

$$x(\pi') v_\Lambda = \alpha_1 x(\pi'_1) v_\Lambda + \cdots + \alpha_r x(\pi'_r) v_\Lambda.$$

Odavdje sada slijedi tvrdnja.

# Poglavlje 7

# Početni uvjeti i uvjeti razlike II

Kao što smo već ranije rekli, standardni modul nivoa $k$ možemo promatrati kao da je uložen u tenzorski produkt modula nivoa 1, vektor najveće težine je tada tenzorski produkt odgovarajućih vektora najveće težine iz nivoa 1. Želimo naći vezu između uvjeta razlike i početnih uvjeta na $L(\Lambda)$, i početnih uvjeta i uvjeta razlike na modulima nivoa 1 koji se pojavljuju u tenzorskom produktu.

Ako pogledamo kako izgledaju uvjeti razlike na $W(\Lambda)$ nivoa $k$, možemo uočiti da oni upravo kažu da $x(\pi)$ može imati najviše $k$ elemenata koji ne zadovoljavaju uvjete razlike na nivou 1 (vidi propoziciju 18). Stoga bi mogli očekivati da $x(\pi)$ možemo rastaviti na faktore tako da svaki od njih zadovoljava početne uvjete i uvjete razlike na odgovarajućim modulima nivoa 1. Dokazat ćemo

**Teorem 16** *Neka je $L(\Lambda)$ standardni modul nivoa $k$ s vektorom najveće težine $v_\Lambda = v_{r_1} \otimes \cdots \otimes v_{r_k}$, gdje su $v_{r_i}$ vektori najveće težine u odgovarajućem modulu $L(\Lambda_{r_i})$ nivoa 1. Ako monom $x(\pi) \in U(\tilde{\mathfrak{g}}_1^-)$ zadovoljava početne uvjete i uvjete razlike na $W(\Lambda)$, onda postoji faktorizacija*

$$x(\pi) = x(\pi^{(1)}) \cdots x(\pi^{(k)})$$

*takva da svaki $x(\pi^{(i)})$ zaodovoljava početne uvjete i uvjete razlike na $W(\Lambda_{r_i})$.*

Obratne implikacija u propoziciji 18 povlačit će obrat teorema. Stoga ćemo imati

**Korolar 17** *Uz oznake kao gore, monom $x(\pi) \in U(\tilde{\mathfrak{g}}_1^-)$ zadovoljava početne uvjete i uvjete razlike na $W(\Lambda)$ ako i samo ako postoji faktorizacija*

$$x(\pi) = x(\pi^{(1)}) \cdots x(\pi^{(k)})$$

*takva da svaki $x(\pi^{(i)})$ zaodovoljava početne uvjete i uvjete razlike na $W(\Lambda_{r_i})$.*

## 7.1 Uvjete razlike možemo napisati na drugi način

Pokazat ćemo teorem 16 najprije za $\Lambda = k\Lambda_0$, a potom to generalizirati za općeniti $\Lambda$. Na $\Lambda = k\Lambda_0$ su početni uvjeti zapravo sadržani u uvjetima razlike, pa stoga gledamo samo uvjete razlike na monomima.

Definiramo još jedan uređaj na varijablama:
$x_\alpha(-i) \sqsubset x_\beta(-j)$ ako monom $x_\alpha(-i)x_\beta(-j)$ zadovoljava uvjete razlike na nivou 1, tj. $x_\alpha(-i)$ može doći iza $x_\beta(-j)$ prema uvjetima razlike za nivo 1. Preciznije

$$x_\alpha(-i) \sqsubset x_\beta(-j) \quad \text{ako} \quad \begin{cases} -i \leq -j-2, \\ -i = -j-1 \text{ i } \beta \not\prec \alpha, \\ -i = -j \text{ i } \alpha \prec\!\!\prec \beta. \end{cases}$$

Na monome $x(\pi)$ sada gledamo kao na (multi)skupove.

**Propozicija 18** *Monom $x(\pi)$ zadovoljava uvjete razlike za nivo $k$ ako i samo ako proizvoljan podskup od $x(\pi)$ u kojem nikoja dva elementa nisu usporediva, ima najviše $k$ elemenata.*

**Dokaz:** S jedne strane, jasno je da su svi elementi čije boje leže na putu kakve imamo kod uvjeta razlike, međusobno neusporedivi. Obratno, pretpostavimo da imamo skup u kojem nikoja dva elementa nisu usporediva. Iz definicije uređaja (odn. iz uvjeta razlike na nivou 1) vidimo da im se stupnjevi mogu razlikovati najviše za 1. Neka su to $-j$, $-j-1$. Nadalje, elementi istog stupnja su međusobno neusporedivi pa stoga njihove boje moraju biti raspoređene po putu kakav gledamo kod uvjeta razlike. Na kraju, nikoja dva elementa različitog stupnja nisu međusobno usporediva pa putevi elemenata stupnja $-j$ i $-j-1$ moraju međusobno biti posloženi kao kod uvjeta razlike.

Primijetimo: ako je $x_{\gamma_1}(-j_1) \sqsubset x_{\gamma_2}(-j_2) \sqsubset \cdots \sqsubset x_{\gamma_r}(-j_r)$ linearno uređen skup (lanac) obzirom na $\sqsubset$, onda monom

$$x_{\gamma_1}(-j_1)x_{\gamma_2}(-j_2)\cdots x_{\gamma_r}(-j_r)$$

zadovoljava uvjete razlike na nivou 1. Teorem 16 bit će dokazan ako pokažemo da postoji particija od $x(\pi)$ u $k$ linearno uređena podskupa.

## 7.2 Dokaz teorema 16

Neka je $S$ konačan skup, $|S| = n$. Pretpostavimo da na $S$ imamo definiran strogi[1] parcijalan uređaj $\sqsubset$. Kazat ćemo da je podskup $X \subset S$ *totalno*

[1] $x \sqsubset y \Rightarrow x \neq y$.

*neuređen* ako nikoja dva elementa iz $X$ nisu međusobno usporediva, tj. ako je restrikcija $\sqsubset|_{X\times X} = \emptyset$.

Teorem 16 slijedi iz sljedeće tvrdnje

**Lema 19** *Neka je $(S, \sqsubset)$ kao gore. Pretpostavimo da svaki totalno neuređeni podskup ima najviše $k$ elemenata. Tada postoji particija od $S$ u najviše $k$ podskupova koji su linearno uređeni.*

**Dokaz:** Neka je $l$ maksimalan broj elemenata u totalno neuređenom podskupu od $S$, $l \leq k$. Pokazat ćemo da $S$ možemo podijeliti u $l$ linearno uređenih podskupova.
Dokaz provodimo indukcijom po $l$ i po kardinalitetu od $S$, $n = |S|$. Imamo 2 slučaja:

(i) postoje $a_1, \ldots, a_l \in S$ od kojih nikoja dva nisu usporediva, pri čemu nisu svi $a_1, \ldots, a_l$ maksimalni, ili nisu svi minimalni elementi u $S$. Svaki element iz $S$ je onda usporediv sa nekim od $a_1, \ldots, a_l$, zbog maksimalnosti od $l$. Stoga možemo definirati particiju od $S$:

$$G = \{x \in S,\ x \sqsupset a_i \text{ za neki } i\},$$

$$D = \{x \in S,\ x \sqsubset a_i \text{ za neki } i\}.$$

Tada je

$$S = G \cup D \cup \{a_1, \ldots, a_l\},$$

pri čemu je gornja unija disjunktna, i skupovi $G$ i $D$ nisu prazni prema pretpostavci. Stavimo

$$G' = G \cup \{a_1, \ldots, a_l\},$$

$$D' = D \cup \{a_1, \ldots, a_l\}.$$

Skupovi $G'$ i $D'$ imaju manje od $n$ elemenata, pa po pretpostavci indukcije $G'$ i $D'$ možemo razdijeliti u lin. uređene podskupove. Skup $\{a_1, \ldots, a_l\}$ čini skup minimalnih elemenata u $G'$, te ujedno i skup maksimalnih elemenata u $D'$. Prema tome, linearno uređeni podskupovi od $G'$ završavaju s $a_1, \ldots, a_l$, a linearno uređeni podskupovi od $D'$ počinju s $a_1, \ldots, a_l$, pa ih možemo "slijepiti". Na taj način dobivamo particiju skupa $S$ u $l$ linearno uređenih podskupova.

(ii) jedini $a_1, \ldots, a_l$ koji su međusobno neusporedivi su ili svi minimalni elementi ili svi maksimalni elementi (može i oboje). Sada ne možemo napraviti particiju kao gore, tj. jedan od skupova $G, D$ bit će prazan. Imamo 2 slučaja

(a) Pretpostavimo da jedini $l$-člani totalno neuređeni podskup od $S$ čine maksimalni elementi od $S$ (analogno dokaz ide za minimalne elemente). Označimo ih sa $a_1, \ldots, a_l$.
Odaberimo bilo koji lanac u $S$ koji počinje sa $a_1$,

$$a_1 = x_1 \sqsupset x_2 \sqsupset \cdots \sqsupset x_r,$$

i izbacimo ga iz $S$. Skup $S \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$ ima totalno neuređene podskupove s najviše $l-1$ elemenata, pa ga prema pretpostavci indukcije možemo podijeliti u $l-1$ linearno uređenih skupova. Zajedno sa $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, to nam daje particiju od $S$ u $l$ linearno uređenih podskupova.

(b) Pretpostavimo da su $a_1, \ldots, a_l$ maksimalni, $b_1, \ldots, b_l$ minimalni elementi u $S$.
Odaberimo bilo koji lanac koji počinje sa $a_1$ i završava sa nekim od $b$-ova,

$$a_1 = x_1 \sqsupset x_2 \sqsupset \cdots \sqsupset x_r = b_t,$$

i izbacimo ga iz $S$. Onda, kao i gore, skup $S \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$ ima totalno neuređene podskupove s najviše $l-1$ elemenata pa po prtepostavci indukcije imamo particiju od $S$ u $l$ linearno uređenih podskupova.

## 7.3 Početni uvjeti. $\Lambda = k_0\Lambda_0 + \cdots + k_\ell\Lambda_\ell$

Sada ćemo pokazati teorem 16 u općem slučaju za $\Lambda = k_0\Lambda_0 + \cdots + k_\ell\Lambda_\ell$.

Prisjetimo sa najprije početnih uvjeta na nivou 1; za modul $L(\Lambda_j)$ početni uvjet kaže da su dozvoljene $(-1)$-ice samo ispod $j$-tog retka (za $j \leq m$), odnosno lijevo od $j$-tog stupca (za $j \geq m$). Primijetimo da te početne uvjete možemo shvatiti kao uvjete razlike ako monomima dodamo "imaginarne" $(0)$-elemente: za $j \leq m$ stavimo $(0)$-element na početak $j$-tog retka, odnosno za $j \geq m$ stavimo $(0)$-element na dno $j$-tog stupca.

Ovu konstrukciju možemo napraviti za svaki nivo. Za $j = 1, \ldots, \ell$, monomu $x(\pi)$ dodat ćemo $k_j$ $(0)$-elemenata odgovarajuće boje. Sa $x(\pi')$ označimo tako dobijen monom,

$$x(\pi') = x(\pi) \cdot x_{1m}^{k_1}(0) x_{2m}^{k_2}(0) \cdot x_{mm}^{k_m}(0) x_{m,m+1}^{k_{m+1}}(0) \cdots x_{m\ell}^{k_\ell}(0).$$

Boje $(0)$-elemenata u monomu $x(\pi')$ leže na dijagonalnom putu. Pogledajmo sada za $x(\pi')$ uvjete razlike između elemenata stupnja $-1$ i $0$. Pretpostavimo da se boje elemenata stupnja $-1$ nalaze na dijagonalnom putu u pravokutniku iznad $(i+1)$-og retka i desno od $(j-1)$-og stupca, kao na slikama na stranama 57 i 59. Neka su $a_{i_1 j_t}, \ldots, a_{i_t j_1}$ eksponenti odgovarajućih elemenata. Za uvjete razlike promatramo elemente stupnja 0 čije se boje nalaze ispod $i-1$-og retka i lijevo od $j+1$-og stupca - to su elementi $x_{im}(0), x_{i+1,m}(0), \ldots, x_{mm}(0), x_{m,m+1}(0), \ldots, x_{mj}(0)$, sa odgovarajućim eksponentima $k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j$. Prema uvjetima razlike je onda

$$a_{i_1 j_t} + \cdots + a_{i_t j_1} + k_i + \cdots + k_j \leq k.$$

Odatle je

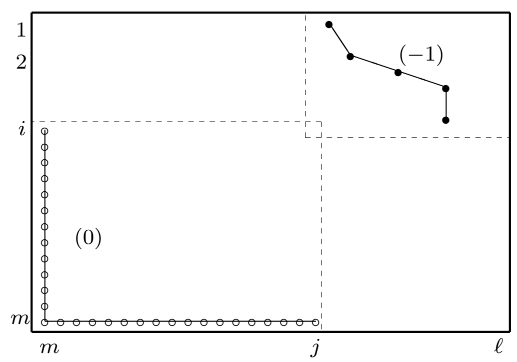
$$a_{i_1 j_t} + \cdots + a_{i_t j_1} \leq k - k_i - \cdots - k_j,$$

odnosno

$$a_{i_1 j_t} + \cdots + a_{i_t j_1} \leq k_0 + k_1 + \cdots + k_{i-1} + k_{j+1} + \cdots + k_\ell.$$

Ako uzmemo pravokutnik takav da je $i = i_t$ i $j = j_t$, dobit ćemo početne uvjete za $W(\Lambda)$. Dakle,

$$x(\pi) \text{ zadovoljava UR i PU na } W(\Lambda) \iff x(\pi') \text{ zadovoljava UR.}$$




Za $x(\pi')$ znamo da postoji particija u linearno uređene podskupove. Elementi stupnja 0 koje smo dodali su svi međusobno neusporedivi, pa će svi oni biti u različitim lancima, i to na njihovom kraju. Ako iz tih lanaca maknemo (0)-elemente, dobit ćemo particiju od $x(\pi)$ u linearno uređene podskupove, i pritom lanci u kojima su bili (0)-elementi koji odgovaraju modulu $\Lambda_j, j = 0, \ldots, \ell$, zadovoljavaju početne uvjete na tom modulu. Time je dokazan teorem 16 u općem slučaju.

# Poglavlje 8

# Dokaz linearne nezavisnosti

## 8.1 Operatori ispreplitanja i uređaj na monomima

Neka je $L(\Lambda)$ standardni modul nivoa $k$, $v_\Lambda = v_{r_1} \otimes \cdots \otimes v_{r_k}$ vektor najveće težine. Želimo dokazati

**Teorem 20** *Vektori*

$$\{x(\pi)v_\Lambda \,|\, x(\pi) \text{ zadovoljava UR i PU}\}$$

*su linearno nezavisni, pa čine bazu prostora Feigin-Stojanovskog $W(\Lambda)$.*

Dokaz teorema provest ćemo indukcijom po uređaju na monomima; uz pretpostavku da su u relaciji

$$\sum c_\pi x(\pi) v_\Lambda = 0$$

koeficijenti uz sve monome $x(\pi') < x(\pi)$ jednaki 0, pokazat ćemo da je onda i koeficijent uz $x(\pi)$ također jednak 0. Da bi proveli indukciju, trebaju nam odgovarajući koeficijenti operatora ispreplitanja.

Operatori koje ćemo koristiti bit će tenzorski produkti koeficijenata operatora ispreplitanja iz nivoa 1. Fiksirajmo $x(\pi)$; neka je

$$x(\pi) = x(\pi_2)x(\pi_1),$$

gdje je $x(\pi_1)$ $(-1)$-dio, a $x(\pi_2)$ ostatak. Teorem 16 kaže da onda postoji faktorizacija

$$x(\pi) = x(\pi^{(1)}) \cdots x(\pi^{(k)}),$$

takva da $x(\pi^{(i)})$ zadovoljavaju početne uvjete i uvjete razlike na $W(\Lambda_{r_i})$. Gornja faktorizacija inducira odgovarajuće faktorizacije od $x(\pi_1)$ i $x(\pi_2)$:

$$\begin{aligned} x(\pi_1) &= x(\pi_1^{(1)}) \cdots x(\pi_1^{(k)}), \\ x(\pi_2) &= x(\pi_2^{(1)}) \cdots x(\pi_2^{(k)}). \end{aligned}$$

Prema propoziciji 11 postoje koeficijenti operatora ispreplitanja $w(\mu_i)$, $i = 1, \ldots, k$ takvi da

$$x(\pi_1^{(i)})v_{r_i} \xrightarrow{w(\mu_i)} C^{(i)} e(\omega) v_{r'_i}, \; C^{(i)} \in \mathbb{C}^\times.$$

Označimo sa $w$ operator

$$w = w(\mu_1) \otimes \cdots \otimes w(\mu_k),$$

te neka je

$$v_{\Lambda'} = v_{r'_1} \otimes \cdots \otimes v_{r'_k}$$

vektor najveće težine $\Lambda'$. Onda

$$x(\pi_1^{(1)})v_{r_1} \otimes \cdots \otimes x(\pi_1^{(k)})v_{r_k} \xrightarrow{w} C e(\omega) v_{\Lambda'}, \; C \in \mathbb{C}^\times.$$

Prema propoziciji 11, $x(\pi_2^{(i)+})$ zadovoljavaju početne uvjete i uvjete razlike na $W(\Lambda_{r'_i}$. Korolar 17 onda povlači da i $x(\pi_2^+)$ zadovoljava početne uvjete i uvjete razlike na $W\Lambda'$. Također, prema propoziciji 11, imamo da je $x(\pi_1^{(i)})$ maksimalan za $w(\mu_i)$.

Ovo razmatranje nas upućuje na to da bi na nivou $k$ mogli imati analogon propoziciji 11. Da bi to dobili, treba provjeriti dvije stvari:

1. $x(\pi_1^{(1)})v_{r_1} \otimes \cdots \otimes x(\pi_1^{(k)})v_{r_k}$ je samo jedan od sumanada koje dobijemo djelovanjem $x(\pi_1)$ na tenzorski produkt $v_\Lambda = v_{r_1} \otimes \cdots \otimes v_{r_k}$. Pitanje je što se dešava s ostalim sumandima od $x(\pi_1)v_\Lambda$ kada na njih djelujemo s operatorom $w$?

2. Moramo vidjeti da li ovakav izbor operatora $w$ poštuje uređaj na skupu monoma, tj. da li $w$ poništava sve $x(\nu)v_\Lambda$ koji imaju $(-1)$-dio $x(\nu_1)$ veći od $x(\pi_1)$?

Odgovor na drugo pitanje slijedi direktno iz propozicije 8 koja kaže da je uređaj na monomima kompatibilan s množenjem. Naime, ako $w$ ne poništava $x(\nu)v_\Lambda$, onda postoji faktorizacija

$$x(\nu) = x(\nu^{(1)}) \cdots x(\nu^{(k)}),$$

takva da $x(\nu^{(i)})v_{r_i}$ nisu poništeni sa $w(\mu_i)$. Također, imamo induciranu faktorizaciju od $(-1)$ dijela $x(\mu_1)$. Prema propoziciji 11 je onda

$$x(\nu_1^{(i)}) \leq x(\pi_1^{(i)}), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Pošto je uređaj na monomima kompatibilan sa množenjem, slijedi

$$x(\nu_1) \leq x(\pi_1).$$

Ovo nam ujedno daje odgovor i na prvo pitanje. Drugi sumandi od $x(\pi)v_\Lambda$ dolaze od ostalih faktorizacija od $x(\pi)$. Neka je

$$x(\pi) = x(\nu^{(1)}) \cdots x(\nu^{(k)}),$$

neka druga faktorizacija od $x(\pi)$, s induciranim faktorizacijama od $x(\pi_1), x(\pi_2)$. Pretpostavimo da $w$ ne poništava $x(\nu_1^{(1)})v_{r_1} \otimes \cdots \otimes x(\nu_1^{(k)})v_{r_k}$. Tada je

$$x(\nu_1^{(i)}) \leq x(\pi_1^{(i)}), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Ako bi negdje imali strogu nejednakost, onda bi prema propoziciji 8 imali

$$x(\pi) < x(\pi),$$

što je kontradikcija. Dakle, moraju svi faktori biti jednaki,

$$x(\nu_1^{(i)}) = x(\pi_1^{(i)}), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Zaključujemo stoga da će pri djelovanju od $w$ na $x(\pi_1)v_\Lambda$ preživjeti samo sumandi koji su jednaki $x(\pi_1^{(1)})v_{r_1} \otimes \cdots \otimes x(\pi_1^{(k)})v_{r_k}$, i vrijedi

$$w \cdot x(\pi_1)v_\Lambda = C \cdot (w(\mu_1)x(\pi_1^{(1)})v_{r_1} \otimes \cdots \otimes w(\mu_k)x(\pi_1^{(k)})v_{r_k}) = C'e(\omega)v_{\Lambda'},$$

gdje su $C, C' \in \mathbb{C}^\times$.

Dobili smo analogon propoziciji 11:

**Propozicija 21** *Neka monom $x(\pi)$ zadovoljava uvjete razlike i početne uvjete na $W(\Lambda)$. Tada postoji operator $w = w(\mu_1) \otimes \cdots \otimes w(\mu_k)$, koeficijent operatora ispreplitanja,*

$$w : L(\Lambda) \to L(\Lambda')$$

*takav da*

- $x(\pi_1)v_\Lambda \xrightarrow{w} Ce(\omega)v_{\Lambda'}, \quad C \in \mathbb{C}^\times,$
- *$x(\pi_2^+)$ zadovoljava PU i UR na $W(\Lambda')$,*
- *$x(\pi_1)$ je maksimalan za $w$, tj. $w$ poništava sve monome $x(\pi')$ koji imaju $(-1)$-dio veći od $x(\pi)$, $x(\pi_1') > x(\pi)$.*

## 8.2 Dokaz linearne nezavisnosti

Prije samog dokaza linearne nezavisnosti, uvest ćemo još malo notacije i izmijeniti dio dosadašnje. Za monom $x(\pi)$, sa $x(\pi_j)$ ćemo označiti $(-j)$-ti dio monoma,

$$x(\pi) = x(\pi_n)x(\pi_{n-1})\cdots x(\pi_1).$$

Ako $x(\pi)$ nema elemente stupnja $-j$, onda stavljamo $x(\pi_j) = 1$. Sa $x(\pi^{+r})$ ćemo označiti monom dobijen iz $x(\pi)$ tako da svim elementima stupnja $-j < -r$ dignemo stupanj za $r$, a ostale izostavimo;

$$x(\pi^{+r}) = x(\pi_n^{+r})x(\pi_{n-1}^{+r})\cdots x(\pi_{r+1}^{+r}).$$

Za $r = 1$ pišemo kraće $x(\pi^+)$ (ranije je $x(\pi^+)$ značio da svim elementima u $x(\pi)$ dignemo stupanj za 1!).

Leksikografski uređaj koji imamo na monomima u skladu je s leksikografskim uređajem na "homogenim" elementima: za

$$\begin{aligned} x(\pi) &= x(\pi_n)x(\pi_{n-1})\cdots x(\pi_1), \\ x(\pi') &= x(\pi'_n)x(\pi'_{n-1})\cdots x(\pi'_1) \end{aligned}$$

je $x(\pi') < x(\pi)$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned} x(\pi'_1) &= x(\pi_1) \\ &\vdots \\ x(\pi'_r) &= x(\pi_r) \\ x(\pi'_{r+1}) &< x(\pi_{r+1}) \end{aligned}$$

za neki $r$.

Dokaz linearne nezavisnosti provodimo indukcijom. Neka je

$$\sum c_\pi x(\pi)v_\Lambda = 0. \tag{8.1}$$

Pretpostavimo da monomi u relaciji (8.1) imaju elemente stupnja najmanje $-n$. Fiksirajmo $x(\pi)$ iz (8.1) i pretpostavimo da je

$$c_{\pi'} = 0 \quad \text{za} \quad x(\pi') < x(\pi).$$

Hoćemo vidjeti da je onda i $c_\pi = 0$.

Prema propoziciji 21, postoji operator $w_1$ takav da

- $x(\pi_1)v_\Lambda \xrightarrow{w_1} C_1 e(\omega)v_{\Lambda'}, \quad C_1 \in \mathbb{C}^\times,$

- $x(\pi^+)$ zadovoljava PU i UR na $v_{\Lambda'}$,
- $w_1 \cdot x(\pi')v_\Lambda = 0 \quad$ za $\quad x(\pi_1') > x(\pi_1)$.

Djelujemo sa operatorom $w_1$ na relaciju (8.1), imamo

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 \sum c_{\pi'} x(\pi')v_\Lambda \\ &= w_1 \sum_{\pi_1' > \pi_1} c_{\pi'} x(\pi')v_\Lambda + w_1 \sum_{\pi_1' < \pi_1} c_{\pi'} x(\pi')v_\Lambda + w_1 \sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi')v_\Lambda \end{aligned}$$

Prva suma propadne kad na nju djelujemo s $w_1$, druga suma je jednaka 0 po pretpostavci indukcije. Ostaje

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 \sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi')v_\Lambda \\ &= \sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi_n') \cdots x(\pi_2') C_1 e(\omega) v_{\Lambda'} \\ &= C_1 e(\omega) \sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi'^+) v_{\Lambda'} \end{aligned}$$

Budući da je $e(\omega)$ injekcija, slijedi

$$\sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi'^+) v_{\Lambda'} = 0.\text{[1]} \tag{8.2}$$

Sada za $x(\pi^+)$ postoji operator $w_2$ takav da

- $x(\pi_2^+)v_{\Lambda'} \xrightarrow{w_2} C_2 e(\omega) v_{\Lambda''}, \quad C_2 \in \mathbb{C}^\times$,
- $x(\pi^{+2})$ zadovoljava PU i UR na $v_{\Lambda''}$,
- $w_2 \cdot x(\pi'^+)v_{\Lambda'} = 0 \quad$ za $\quad x(\pi_2') > x(\pi_2)$.

Djelujemo sa operatorom $w_2$ na relaciju (8.2); imamo

$$\begin{aligned} 0 &= w_2 \sum_{\pi_1' = \pi_1} c_{\pi'} x(\pi')v_{\Lambda'} \\ &= w_2 \sum_{\substack{\pi_1' = \pi_1 \\ \pi_2' > \pi_2}} c_{\pi'} x(\pi')v_{\Lambda'} + w_2 \sum_{\substack{\pi_1' = \pi_1 \\ \pi_2' < \pi_2}} c_{\pi'} x(\pi')v_{\Lambda'} + w_2 \sum_{\substack{\pi_1' = \pi_1 \\ \pi_2' = \pi_2}} c_{\pi'} x(\pi')v_{\Lambda'} \end{aligned}$$

[1] Monomi u gornjoj relaciji ne moraju biti linearno nezavisni. Naime, moguće je da neki od monoma $x(\pi'^+)$ ne zadovoljavaju PU na $v_{\Lambda'}$, iako je $x(\pi'^+)v_{\Lambda'} \neq 0$ . Zato sada ne možemo primijeniti indukciju po ukupnom stupnju monoma kao što smo mogli kod nivoa $k = 1$.

Opet prve dvije sume propadaju zbog djelovanja od $w_2$, odnosno pretpostavci indukcije. Ostaje

$$\begin{aligned}
0 &= w_2 \sum_{\substack{\pi_1'=\pi_1\\ \pi_2'=\pi_2}} c_{\pi'} x(\pi') v_{\Lambda'} \\
&= \sum_{\substack{\pi_1'=\pi_1\\ \pi_2'=\pi_2}} c_{\pi'} x(\pi_n') \cdots x(\pi_2') C_2 e(\omega) v_{\Lambda''} \\
&= C_2 e(\omega) \sum_{\substack{\pi_1'=\pi_1\\ \pi_2'=\pi_2}} c_{\pi'} x(\pi'^{+2}) v_{\Lambda''}
\end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$\sum_{\substack{\pi_1'=\pi_1\\ \pi_2'=\pi_2}} c_{\pi'} x(\pi'^{+2}) v_{\Lambda''} = 0.$$

Nastavljamo dalje induktivno; nakon $n$ koraka, dobijamo

$$0 = \sum_{\substack{\pi_1'=\pi_1\\ \pi_2'=\pi_2\\ \vdots\\ \pi_n'=\pi_n}} c_{\pi'} x(\pi'^{+n}) v_{\Lambda^{(n)}} = c_\pi x(\pi^{+n}) v_{\Lambda^{(n)}} = c_\pi v_{\Lambda^{(n)}}$$

odakle zaključujemo da je $c_\pi = 0$.

# Poglavlje 9

# Baza standardnog modula

U [P1] i [P2] je pokazano kako se baza čitavog standardnog modula može dobiti kao "projektivni limes" baze za potprostor Feigin-Stojanovskog. U [P1] to je napravljeno za $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$, za izbor minimalne težinu $\omega = \omega_1$, za sve standardne module, a u [P2] za sve klasične proste Liejeve algebre, za sve moguće izbore minimalnih težina $\omega$, ali samo na osnovnom modulu $L(\Lambda_0)$. Ovdje ćemo ukratko izložiti taj pristup. Sljedećih par teorema prenosimo iz tih radova.

**Lema 22** $L(\Lambda) = \langle e^\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma \rangle U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) v_\Lambda$.

*Dokaz:* Primijetimo najprije da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ generirana sa $\mathfrak{g}_1 \cup \mathfrak{g}_{-1}$, te da je $Q$ generirano sa $\Gamma$ i, posebno, $\operatorname{span}\Gamma = \mathfrak{h}$. Slično, $[\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$ je generirano sa $\tilde{\mathfrak{g}}_1 \cup \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$ pa stoga vrijedi

$$L(\Lambda) = \operatorname{span}\{x_1 \cdots x_s v_\Lambda \,|\, s \geq 0, x_i \in \tilde{\mathfrak{g}}_1 \cup \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}\}.$$

Pomoću formule za verteks-operatore (3.1), odnosno (3.5), elemente $x_i \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$ možemo zamijeniti produktima elemenata iz $\{e^\gamma \,|\, \gamma \in (-\Gamma)\} \cup \hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}} \cup \tilde{\mathfrak{g}}_1$. Budući da svi operatori $e^\gamma$ i sve elementi iz Heisenbergove podalgebre $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ normaliziraju $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ (vidi (3.6)), imamo

$$L(\Lambda) = \langle e^\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma \rangle U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) U(\hat{\mathfrak{h}}_-) v_\Lambda.$$

Budući da je $U(\hat{\mathfrak{h}}_-)$ generiran sa koeficijentima od $E^-(-\alpha, z)$, za $\alpha \in \Gamma$, svaki element iz $U(\hat{\mathfrak{h}}_-) v_\Lambda$ pomoću formule za verteks-operatore (3.1), odnosno (3.4) za više nivoe, možemo zamijeniti sa elementima iz $\langle e^\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma \rangle U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) v_\Lambda$.

Uvedimo

$$e = \prod_{\gamma \in \Gamma} e^\gamma.$$

Zbog leme (2) i (4.9) je to jednako

$$e = e^{m\sum_{i=1}^{m}\lambda_i+(\ell-m+1)\sum_{j=m}^{\ell}\lambda'_j} = e^{(\ell+1)\omega}.$$

**Propozicija 23** *Neka je $L(\Lambda)_\mu$ težinski potprostor od $L(\Lambda)$. Onda postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da za svaki fiksirani $n \leq n_0$, skup vektora*

$$e^n x_{\gamma_1}(j_1)\cdots x_{\gamma_s}(j_s)v_\Lambda \in L(\Lambda)_\mu,$$

*gdje je $s \geq 0$, $\gamma_1,\ldots,\gamma_s \in \Gamma$, $j_1,\ldots,j_s \in \mathbb{Z}$, razapinje $L(\Lambda)_\mu$. Posebno,*

$$L(\Lambda) = \langle e\rangle U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)v_\Lambda.$$

*Dokaz:* Budući da su težinski potprostori $L(\Lambda)_\mu$ konačno-dimenzionalni, prema prethodnoj lemi možemo odabrati konačan razapinjući skup vektora oblika

$$\left(\prod_{\gamma\in\Gamma} e^\gamma\right)^n \prod_{\gamma\in\Gamma} e^{p_\gamma\gamma} x_{\gamma_1}(j_1)\cdots x_{\gamma_r}(j_r)v_\Lambda,$$

$r \geq 0$, $x_{\gamma_i}(j_i) \in \tilde{\mathfrak{g}}_1$, pri čemu je $n$ isti za sve vektore. Očito je da možemo naći $n_0$ takav da su za svaki $n \leq n_0$ svi $p_\gamma \geq 0$ za sve vektore. Budući da $e^\gamma$ normaliziraju $\tilde{\mathfrak{g}}_1$, imamo razapinjući skup vektora oblika

$$e^n x_{\gamma_1}(j'_1)\cdots x_{\gamma_r}(j'_r)\prod_{\gamma\in\Gamma} e^{p_\gamma\gamma}v_\Lambda.$$

Sada u konačno mnogo koraka možemo zamijeniti svaki $e^\gamma v_\Lambda$ s elementima iz $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)v_\Lambda$ pomoću formule za verteks-operatore (3.1), odnosno formule (3.4) za više nivoe.

**Teorem 24** *Neka je $L(\Lambda)_\mu$ težinski potprostor od $L(\Lambda)$. Onda postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da za svaki fiksirani $n \leq n_0$, skup vektora*

$$e^n x(\pi), \quad x(\pi) \text{ zadovoljava PU i UR},$$

*čini bazu od $L(\Lambda)_\mu$. Nadalje, za dva izbora $n_1, n_2 \leq n_0$ odogovarajuće dvije baze su povezane dijagonalnom matricom.*

*Dokaz:* Iz prethodne propozicije i teorema 20 slijedi da gornji skup zaista čini bazu od $L(\Lambda)_\mu$. Preostaje dokazati drugi dio teorema.

Da bi to vidjeli promatramo tzv. "*periodički rep*" $x(\mu) \in U(\tilde{\mathfrak{g}}_1^-)$. Hoćemo naći $f \in \mathbb{N}$ i monom $x(\mu)$ takve da vrijedi

- $e(\omega)^f v_\Lambda = Cx(\mu)v_\Lambda$, za neki $C \in \mathbb{N}$

- $f$ dijeli $\ell + 1$,
- $x(\mu)$ zadovoljava početne uvjete i uvjete razlike,
- za sve monome $x(\pi)$ koji zadovoljavaju početne uvjete i uvjete razlike, monom $x(\pi^{-f})x(\mu)$ također zadovoljava početne uvjete i uvjete razlike.

U tom slučaju bi imali

$$e(\omega)^f x(\pi)v_\Lambda = x(\pi^{-f})e(\omega)^f v_\Lambda = Cx(\pi^{-f})x(\mu)v_\Lambda,$$

pa, pošto su $e^\omega x(\pi)v_\Lambda$ i $e(\omega)x(\pi)v_\Lambda$ međusobno proporcionalni, onda slijedi drugi dio tvrdnje teorema.

Najprije promatramo module nivoa 1, za fundamentalne težine $\Lambda = \Lambda_i$. Konstruirat ćemo monom $x(\mu) \in U(\tilde{\mathfrak{g}}_1^-)$ tako da on bude najveći monom koji zadovoljava početne uvjete i uvjete razlike na $W(\Lambda_i)$ te da svi faktori u njemu imaju stupanj vei ili jednak $-f$; točnu vrijednost od $f$ ćemo odrediti malo kasnije. Stupnjevi elemenata u $x(\mu)$ bit će redom, zdesna na lijevo, $-1, -2, \ldots, -f$. Naravno, moguće je da će se neki stupnjevi ponavljati, odnosno, da se neki neće ni pojavljivati (sukladno početnim uvjetima i uvjetima razlike). Boje elemenata iz $x(\mu)$ će kretati od najveće dopuštene prema početnim uvjetima (za elemente stupnja $-1$, odnosno $-2$ ako je $\Lambda = \Lambda_m$), i zatim će se pomicati za jedno mjesto prema dolje i jedno mjesto ulijevo, sve dok ne dođemo do doljnjeg ili do lijevog ruba od $\Gamma$. Idući faktor imat će stupanj manji za 1 ili eventualno 2, ako smo završili baš u doljnjem lijevom kutu od $\Gamma$, a boja će biti maksimalna moguća tako da budu zadovoljeni uvjeti razlike. Točnije, ako smo završili na dnu $q$-tog stupca, iduća boja bit će $\gamma_{1,q-1}$. Ako smo završili na početku $p$-tog retka, iduća boja će biti $\gamma_{p+1,\ell}$. A ako smo završili u doljnjem lijevom kutu, iduća će boja biti $\gamma_{1\ell}$.

Dakle, za boje elemenata iz $x(\mu)$, pripadni indeksi redaka ciklički će se pomicati po skupu

$$(1, 2, \ldots, m),$$

a indeksi stupaca po skupu

$$(\ell, \ell - 1, \ldots, m).$$

Stat ćemo onda kada smo napravili "puni krug" po oba skupa indeksa. To će se dogoditi nakon $r$ koraka, gdje je $r$ najmanji zajednički višekratnik od $m$ i $\ell - m + 1$. Nakon posljednjeg koraka, završit ćemo na boji

$$\begin{array}{ll} \gamma_{mi} & \text{ako je } i > m \\ \gamma_{im} & \text{ako je } 0 < i < m \\ \gamma_{mm} & \text{ako je } i = 0 \text{ ili } i = m \end{array}$$

To su točno boje koje daju početne uvjete za $\Lambda_i$ (vidi razmatranje u prvom dijelu točke 7.3).

Sa $x(\mu_j)$ označimo $(-j)$-dio monoma $x(\mu)$. Neka je $\gamma_j$ boja najmanjeg faktora tog dijela. Ako je $\gamma_j \neq \gamma_{mm}$, onda sa $i_j$ označimo onaj indeks te boje koji je različit od $m$; inače stavimo $i_j = m$. Za $j = f$ imamo $i_j = i$. Iz dokaza propozicije 11 slijedi da je

$$x(\mu_1)v_i = C_1 e(\omega) v_{i_1}$$

(pripadni operator ispreplitanja je $id$). Indukcijom vidimo da je

$$x(\mu)v_i = x(\mu_f)\cdots x(\mu_1)v_i = Ce(\omega)^f v_i.$$

Budući da je zadnja boja u $x(\mu)$ ona koja daje početne uvjete na $L(\Lambda_i)$, zaključujemo da, ako $x(\pi)$ zadovoljava početne uvjete i uvjete razlike na $W(\Lambda_i)$, onda i $x(\pi^{+f})x(\mu)$ također zadovoljava te uvjete. Preostaje nam još da odredimo koliki treba biti $f$. Svaki puta kada dođemo do jednog od rubova, stupanj elemenata će se smanjiti za 1, odnosno, dobit ćemo po jedan $e(\omega)$. Dakle, $f$ nam broji koliko smo puta u tim istodobnim cikličkim prijelazima po skupovima $(1, 2, \ldots, m)$ i $(\ell, \ell-1, \ldots, m)$, prošli preko $m$, odnosno, koliko smo puta prošli čitav ciklus (za oba skupa). Stoga je

$$f = \frac{r}{m} + \frac{r}{\ell - m + 1} = r\frac{\ell+1}{m(\ell-m+1)} = \frac{\ell+1}{r'},$$

gdje je $r' = \frac{m(\ell-m+1)}{r} \in \mathbb{N}$. Posebno, vidimo da $f$ dijeli $\ell+1$.

Za više nivoe, $k > 1$, sjetimo se da se početni uvjeti i uvjeti razlike svode na početne uvjete i uvjete razlike na nivou 1, na odgovarajućim tenzorskim faktorima (vidi korolar 17). Onda za svaki vektor najveće težine $v_i$ u tenzorskom produktu

$$v_\Lambda = v_{r_1} \otimes \cdots \otimes v_{r_k}$$

uzmemo pripadni periodički rep $x(\mu^{(i)})$, i stavimo

$$x(\mu) = x(\mu^{(1)})\cdots x(\mu^{(k)}).$$

Dalje, kao u dokazu propozicije 21, imamo da je $x(\mu)$ maksimalan monom u kojem su svi elementi stupnja najviše $-f$ i

$$\begin{aligned} x(\mu)v_\Lambda &= C \cdot x(\mu^{(1)})v_{r_1} \otimes \cdots \otimes x(\mu^{(k)})v_{r_k} \\ &= C \cdot e(\omega)^f v_{r_1} \otimes \cdots \otimes e(\omega)^f v_{r_k} \\ &= Ce(\omega)^f v_\Lambda, \end{aligned}$$

za neki $C \in \mathbb{N}$.

# Poglavlje 10

# Prezentacija potprostora Feigin-Stojanovskog

Prema definiciji je
$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda.$$
Budući da je algebra $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ komutativna, odnosno $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cong S(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$, imamo
$$W(\Lambda) = \mathbb{C}[x_\gamma(-j) \,|\, j \in \mathbb{N}] \cdot v_\Lambda.$$

Za $1 \leq i < m$ i $m < j \leq \ell$ neka je $\mathfrak{g}_{ij} \subset \mathfrak{g}_0$ podalgebra generirana elementima baze $x_{\pm\alpha_r}$, gdje je $1 \leq r \leq i-1$ ili $j+1 \leq r \leq \ell$.

Promatrajmo polinomijalnu algebru $\mathbb{C}[x_\gamma(-j) \,|\, j \in \mathbb{N}]$, koja je ujedno i $\mathfrak{g}_0$-modul. Neka je $J$ ideal u toj polinomijalnoj algebri generiran skupovima
$$U(\mathfrak{g}_0) \cdot \left( \sum_{\substack{j_1,\dots,j_{k+1} \leq -1 \\ j_1+\cdots+j_{k+1}=n}} x_\theta(j_1)\cdots x_\theta(j_{k+1}) \right), \quad \text{za sve } n \in \mathbb{Z}_{<0}.$$
i
$$U(\mathfrak{g}_{ij}) \cdot \left( x_\theta(-1)^{k_0+\cdots+k_{i-1}+k_{j+1}+\cdots+k_\ell} \right), \quad \text{za sve } \begin{array}{l} i = 1,\dots,m-1; \\ j = m+1,\dots,\ell. \end{array}$$
Pokazat ćemo da je $W(\Lambda)$ kao vektorski prostor izomorfan kvocijentu polinomijalne algebre $\mathbb{C}[x_\gamma(-j) \,|\, j \in \mathbb{N}]$ po idealu $J$.

**Teorem 25** *$W(\Lambda) \cong \mathbb{C}[x_\gamma(-j) \,|\, j \in \mathbb{N}]/J$.*

*Dokaz:* Promatrajmo preslikavanje
$$\varphi_0 : \mathbb{C}[x_\gamma(-j) \,|\, j \in \mathbb{N}] \to U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda = W(\Lambda),$$

definirano sa

$$\varphi_0 : x(\pi) \mapsto x(\pi) \cdot v_\Lambda.$$

Znamo da ideal $J$ leži u jezgri tog preslikavanja pa ga stoga možemo faktorizirati do preslikavanja sa kvocijenta,

$$\varphi : \mathbb{C}[x_\gamma(-j) \,|\, j \in \mathbb{N}]/J \to W(\Lambda).$$

Preslikavanje $\varphi$ je surjekcija, jer je i $\varphi_0$ bila surjekcija . Hoćemo pokazati još i da je injekcija. Promatrajmo skup

$$\{x(\pi) \,|\, \pi \text{ zadovoljava PU i UR na } L(\Lambda)\} \subset \mathbb{C}[x_\gamma(-j) \,|\, j \in \mathbb{N}]/J.$$

Kao i u dokazu propozicije 14 vidimo da taj skup razapinje $\mathbb{C}[x_\gamma(-j) \,|\, j \in \mathbb{N}]/J$. Preslikavanje $\varphi$ bijektivno preslikava taj skup u

$$\{x(\pi)v_\Lambda \,|\, \pi \text{ zadovoljava PU i UR na } L(\Lambda)\} \subset W(\Lambda),$$

koji čini bazu od $W(\Lambda)$. Zaključujemo da je gornji skup također linearno nezavisan, te da $\varphi$ preslikava bazu od $\mathbb{C}[x_\gamma(-j) \,|\, j \in \mathbb{N}]/J$ u bazu od $W(\Lambda)$. Stoga $\varphi$ mora biti bijekcija.

U [FJMMT] je korištena ovakva prezentacija od $W(\Lambda)$ kako bi se dobile fermionske formule za karakter od $W(\Lambda)$. Pomoću prezentacije je dualni prostor od $W(\Lambda)$ uložen u prostor simetričnih polinoma, da bi se potom koristeći verteks-operatore izračunale dimenzije odgovarajućih graduiranih komponenti.

Prezentacija potprostora Feigin-Stojanovskog korištena je i u [CLM2], gdje je pomoć u nje pokazana egzaktnost nizova među prostorima $W(\Lambda)$ (za različite $\Lambda$). Iz tih egezaktnih nizova dobivene su rekurzivne relacije za karaktere tih prostora, čijim rješavanjem se potom dobijaju formule za kakraktere od $W(\Lambda)$.

# Bibliografija


[CLM1] S. Capparelli, J. Lepowsky and A. Milas, *The Rogers-Ramanujan recursion and intertwining operators*, Comm. Contemporary Math. **5** (2003), 947–966.

[CLM2] S. Capparelli, J. Lepowsky and A. Milas, *The Rogers-Selberg recursions, the Gordon-Andrews identities and intertwining operators*, math.QA/0310080.

[DL] C. Dong and J. Lepowsky, Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators, Progress in Math. **Vol. 112**, Birkhaüser, Boston, 1993.

[DLM] C. Dong, H. Li and G. Mason, *Simple currents and extensions of vertex operator algebras*, Comm. Math. Physics **180** (1996), 671–707.

[FJLMM] B. Feigin, M. Jimbo, S. Loktev, T. Miwa and E. Mukhin, *Bosonic formulas for $(k, l)$-admissible partitions*, math.QA/0107054; *Addendum to 'Bosonic formulas for $(k, l)$-admissible partitions'*, math.QA/0112104.

[FJMMT] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin and Y. Takeyama, *Fermionic formulas for $(k, 3)$-admissible configurations*, Publ. RIMS **40** (2004), 125–162.

[FS] B. Feigin and A. Stoyanovsky, *Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold*, hep-th/9308079, RIMS 942.

[FHL] I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, preprint, 1989; Memoirs Amer. Math. Soc. **104**, 1993.

[FK] I. Frenkel, V. Kac, Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models, *Invent. Math.* **62** (1980), 23-66.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math. **Vol. 134**, Academic Press, Boston, 1988.

[G] G. Georgiev, *Combinatorial constructions of modules for infinite-dimensional Lie algebras, I. Principal subspace*, J. Pure Appl. Algebra **112** (1996), 247–286.

[GL] Y. Gao, H.-S. Li, Generalized vertex algebras generated by parafermion-like vertex operators, *J. Algebra* **240** (2001), no.2, 771–807.

[K] V.G. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, 3rd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[KKMMNN] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 7, Suppl. 1A, Proceedings of the RIMS Research Project 1991, "Infinite Analysis", World Scientific, Singapore, 1992, 449–484.

[Li] H.-S. Li, Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules, *J. Pure Appl. Alg.* **109** (1996), 143-195; hep-th/9406185.

[LL] J. Lepowsky, H.-S. Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*, Progress in Math. **Vol. 227**, Birkhäuser, Boston, 2004

[LP1] J. Lepowsky and M. Primc, Standard modules for type one affine Lie algebras, in: Number Theory, New York, 1982, *Lecture Notes in Math.* **1052**, Springer-Verlag, 1984, 194-251.

[LP2] J. Lepowsky and M. Primc, Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, *Contemporary Math.* **46**, 1985.

[LW1] J. Lepowsky and R. L. Wilson, Construction of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, *Commun. Math. Phys.* **62** (1978), 43-53.

[LW2] J. Lepowsky and R. L. Wilson, A Lie theoretic interpretation and proof of the Rogers-Ramanujan identities, *Adv. Math.* **45** (1982), 21-72.

[LW3] J. Lepowsky and R. L. Wilson, The structure of standard modules, I: Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities, *Invent. Math.* **77** (1984), 199-290.

[LW4] J. Lepowsky and R. L. Wilson, The structure of standard modules, II: The case $A_1^{(1)}$, principal gradation, *Invent. Math.* **79** (1985), 417-442.

[MP] A, Meurman and M. Primc, *Annihilating Fields of Standard Modules of* $sl(2,\mathbb{C})$ *and Combinatorial Identities*, Memoirs Amer. Math. Soc. **652**, 1999.

[P1] M. Primc, *Vertex operator construction of standard modules for* $A_n^{(1)}$, Pacific J. Math **162** (1994), 143-187.

[P2] M. Primc, *Basic Representations sor classical affine Lie algebras*, J. Algebra **228** (2000), 1-50.

[P3] M. Primc, $(k,r)$*-admissible configurations and intertwining operators*, math.QA/0512491

[S] G. Segal, Unitary representations of some infinite-dimensional groups, *Commun. Math. Phys.* **80** (1981), 301-342.

# Sažetak


Neka je $\tilde{\mathfrak{g}}$ afina Liejeva algebra tipa $A_\ell^{(1)}$. Odaberemo li $\mathbb{Z}$-gradaciju pripadne konačno-dimenzionalne proste Liejeve algebre $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, tada također imamo i induciranu $\mathbb{Z}$-gradaciju afine Liejeve algebre

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1.$$

Neka je $L(\Lambda)$ standardni modul, tj. integrabilni modul najveće težine za $\tilde{\mathfrak{g}}$. Standardne module nivoa 1 možemo realizirati pomoću verteks-operatora pridruženih korijenskoj rešetci od $\mathfrak{g}$. Verteks-operatori pridruženi elementima težinske rešetke davat će nam operatore ispreplitanja između standardnih modula.

Potprostor Feigin-Stojanovskog definiran je kao $\tilde{\mathfrak{g}}_1$-podmodul od $L(\Lambda)$ generiran vektorom najveće težine $v_\Lambda$,

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda \subset L(\Lambda).$$

U ovom radu nalazimo kombinatornu bazu prostora $W(\Lambda)$ danu u terminima tzv. uvjeta razlike i početnih uvjeta. Linearnu nezavisnost tog skupa dokazujemo induktivno koristeći koeficijente određenih operatora ispreplitanja.

U izlaganju ove teorije slijedimo radove niza autora, spomenimo samo neke: S. Capparelli, B. Feigin, G. Georgiev, J. Lepowsky, A. Milas, M. Primc i A. Stojanovski.

# Summary

Let $\tilde{\mathfrak{g}}$ be affine Lie algebra of type $A_\ell^{(1)}$. Suppose we're given $\mathbb{Z}$-gradation of associated simple finite-dimensional Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$; then we also have the induced $\mathbb{Z}$-gradation of affine Lie algebra

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1.$$

Let $L(\Lambda)$ be a standard module, ie. integrable highest-weight module for $\tilde{\mathfrak{g}}$. Standard modules of level 1 can be realized via vertex-operators associated to root lattice of $\mathfrak{g}$. Vertex-operators associated to the elements of weight lattice will then give intertwining-operators between standard modules.

Feigin-Stoyanovsky type subspace $W(\Lambda)$ is $\tilde{\mathfrak{g}}_1$-submodule of $L(\Lambda)$ generated by the highest-weight vector $v_\Lambda$,

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda \subset L(\Lambda).$$

In this paper we find combinatorial base of $W(\Lambda)$, given in terms of certain difference and initial conditions. Linear independence of the generating set is proved inductively by using coefficients of certain intertwining operators.

In the exposition we follow the works of several authors, the most important of whom are: S. Capparelli, B. Feigin, G. Georgiev, J. Lepowsky, A. Milas, M. Primc and A. Stoyanovsky.

# Životopis

Rođen sam 10. ožujka 1975. godine u Zagrebu. Osnovnu školu sam završio u Velikoj Gorici, a srednju školu u Zagrebu. Studij matematike upisao sam 1993. godine na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirao sam 1998. godine na smjeru Teorijska matematika. Diplomski rad pod naslovom "Sistemi korijena i Serreov teorem" izradio sam pod vodstvom prof. dr. Mirka Primca. Od 1999. godine sam zaposlen na Matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu u statusu znanstvenog novaka na projektu "Beskonačna analiza". Magistarski rad s naslovom "Generalizirane algebre verteks-operatora" pod mentorstvom prof. dr. Mirka Primca obranio sam 2003. godine.

Član sam Seminara za algebru. Na PMF–Matematičkom odjelu do sada sam vodio vježbe iz sljedećih kolegija: Matematika (prof. geologije-geografije), Linearna algebra I i II (prof. fizike), Matematika (inž. biologije), Matematika III i IV (prof. fizike-informatike, prof. fizike-kemije), Matematika I i II (prof. i inž. kemije), Algebra, Teorija analitičkih funkcija.