SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODJEL

Neven Grbac

Rezidualni spektar hermitske kvaternionske unutarnje forme grupe SO_8

Disertacija

Zagreb, 2007.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODJEL

Neven Grbac

Rezidualni spektar hermitske kvaternionske unutarnje forme grupe SO_8

Disertacija

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Goran Muić

Zagreb, 2007.

Sadržaj

Uvod

Ova disertacija bavi se rezidualnim spektrom hermitske kvaternionske grupe G_2' poluprostog ranga 2 koja je unutarnja forma rascjepive grupe SO_8. Algebarska grupa G_2' definirana nad poljem algebarskih brojeva k nije kvazirascjepiva za razliku od svih grupa čiji su rezidualni spektar ili njegovi dijelovi dosad poznati. Stoga se u ovoj disertaciji javljaju interesantni dijelovi rezidualnog spektra kakvih nema kod kvazirascjepivih grupa. Osim toga, za nerascjepiva mjesta v od k, grupa $G_2'(k_v)$, gdje je k_v upotpunjenje od k na mjestu v, nije kvazirascjepiva pa je izvan dosega Langlands–Shahidijeve metode. Na tim mjestima valjalo je razviti novu tehniku za definiciju normalizacijskih faktora standardnih operatora ispreplitanja i dokazati željena svojstva normaliziranih operatora ispreplitanja. No prije prikaza rezultata dobivenih u disertaciji naveden je kratki povijesni pregled proučavanja adeličkih automorfnih formi za reduktivne grupe i strategija dekomponiranja rezidualnog spektra koristeći Langlandsovu spektralnu teoriju.

Početak razvoja klasične teorije automorfnih formi nalazi se u Heckeovom radu [24] iz prve polovine XX stoljeća. U početku klasična teorija bavila se samo holomorfnim automorfnim formama na gornjoj poluravnini nekih ograničenih simetričnih domena. Tokom 1950-tih godina, Gelfand i Fomin uočili su da se takve automorfne forme mogu promatrati kao glatki vektori određenih reprezentacija realne poluproste grupe G na prostorima kompleksnih funkcija na G invarijantnim za danu diskretnu podgrupu Γ. To je dovelo do definicije klasičnih automorfnih formi na realnim poluprostim grupama obzirom na aritmetičke podgrupe i proučavanja samih reprezentacija. Veza među klasičnim automorfnim formama na ograničenim simetričnim domenama i na realnim poluprostim grupama objašnjena je u specijalnom slučaju modularnih formi u knjizi Gelfanda, Graeva i Piatetskii–Shapiroa [12] te kasnije u Gelbartovoj knjizi [9]. Općeniti prikaz te veze može se naći u [4]. Važna referenca za teoriju klasičnih automorfnih formi na realnim poluprostim grupama je Harish–Chandrina knjiga [23].

Adelički pristup automorfnim formama ima svoj začetak u Tateovoj disertaciji [57] iz 1950. Za modularne forme prelazak s klasične na adeličku teoriju napravljen je u knjizi Jacqueta i Langlandsa [26]. Precizna definicija klasičnih i adeličkih automorfnih formi i automorfnih reprezentacija za povezanu reduktivnu grupu, te veza klasične i adeličke teorije može se naći u članku Borela i Jacqueta [5].

Za reduktivnu grupu G definiranu nad poljem algebarskih brojeva k s prstenom adela $\mathbb{A}$, automorfna forma s centralnim karakterom ω definirana je u definiciji 1.1.1 iz poglavlja 1.1 kao klasa izmjerivih funkcija

$$f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

takvih da vrijedi

(1) $f(\gamma g) = f(g)$ za sve $\gamma \in G(k)$ i skoro sve $g \in G(\mathbb{A})$,

(2) $f(zg) = \omega(z) f(g)$ za sve $z \in Z(\mathbb{A})$ i skoro sve $g \in G(\mathbb{A})$,

(3) $\int_{Z(\mathbb{A})G(k)\backslash G(\mathbb{A})} |f(g)|^2 dg < \infty$,

gdje je Z centar od G te ω unitarni centralni karakter od $Z(\mathbb{A})/Z(k)$. Hilbertov prostor svih automorfnih formi na $G(\mathbb{A})$ s centralnim karakterom ω označen je kratko s L^2. Cilj spektralne teorije automorfnih formi je dekompozicija prostora kvadratno integrabilnih automorfnih formi L^2 obzirom na desnu regularnu reprezentaciju grupe $G(\mathbb{A})$.

Spektralnu dekompoziciju prostora L^2 adeličkih automorfnih formi na reduktivnoj grupi razvio je Langlands u knjizi [37] nastavljajući se na Selbergov rad iz [50]. Standardna referenca za Langlandsovu spektralnu teoriju je i knjiga Mœglin i Waldspurgera [44]. Iako je Langlandsova spektralna teorija izložena u prvom poglavlju, ovdje su ukratko navedeni glavni rezultati jer se na njima bazira cjelokupan račun rezidualnog spektra u ovoj disertaciji. Postoje još dva osnovna pristupa spektralnoj dekompoziciji koja se ne koriste u ovoj disertaciji. Prvi je metoda theta korespodencije i theta liftova koja se može naći u Howeovom članku [25], a drugi Arthur–Selbergova formula traga opisana u Arthurovom članku [1].

Prvi korak u spektralnoj dekompoziciji prostora L^2 je rastav na diskretni i rezidualni spektar

$$L^2 = L^2_d \oplus L^2_c.$$

Diskretni spektar L_d^2 je zatvarač prostora razapetog svim zatvorenim ireducibilnim potprostorima od L^2 koji su invarijantni za desnu regularnu reprezentaciju grupe $G(\mathbb{A})$. Kontinuirani spektar L_c^2 je razapet direktnim integralima ireducibilnih reprezentacija koji je Langlands u citiranoj knjizi [37] u potpunosti opisao integralima Eisensteinovih redova. Stoga ostaje problem dekompozicije diskretnog spektra.

Diskretni spektar reduktivne grupe G dekomponira se na kuspidalni i rezidualni spektar

$$L_d^2 = L_{cusp}^2 \oplus L_{res}^2.$$

Kuspidalni spektar L_{cusp}^2 je zatvoreni prostor invarijantan za desnu regularnu reprezentaciju grupe $G(\mathbb{A})$ koji se sastoji od kuspidalnih formi. Kuspidalne forme na reduktivnoj grupi $G(\mathbb{A})$ su automorfne forme na $G(\mathbb{A})$ čiji je konstantni član duž svake prave paraboličke podgrupe od G jednak nuli. Rezidualni spektar L_{res}^2 je naprosto ortogonalni komplement kuspidalnog spektra unutar diskretnog spektra, odnosno nekuspidalni dio diskretnog spektra. Upravo rezidualni spektar je tema ove disertacije.

Langlandsova spektralna teorija daje i strategiju kako dekomponirati rezidualni spektar. Rezidualni spektar dalje se dekomponira u

$$L_{res}^2 = \oplus_P L_{P,res}^2,$$

gdje je suma po klasama konjugiranosti pravih paraboličkih podgrupa od G. Prostor $L_{P,res}^2$ je razapet automorfnim formama koje se dobiju nakon iteriranog poništavanja polova u zatvaraču pozitivne Weylove komore Eisensteinovih redova određenih kuspidalnim automorfnim reprezentacijama Levijevog faktora paraboličke podgrupe P. Prelaskom na konstantni član Eisensteinovog reda duž paraboličke podgrupe P, problem određivanja polova svodi se na određivanje polova suma standardnih operatora ispreplitanja. Standardne operatore ispreplitanja treba normalizirati skalarnim meromorfnim funkcijama na takav način da su normalizirani operatori ispreplitanja holomorfni i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Time se određivanje polova u zatvaraču pozitivne Weylove komore svodi na određivanje polova normalizacijskih faktora, a automorfne reprezentacije koje pripadaju rezidualnom spektru mogu opisati koristeći paraboličku indukciju kao slike normaliziranih operatora ispreplitanja. U ovoj disertaciji normalizacijski faktori su zapisani kao kvocijenti L–funkcija i ε–faktora čija analitička svojstva su poznata. Svi pojmovi koji u ovom kratkom prikazu Langlandsove spektralne teorije nisu definirani, kao i precizniji opis strategije za dekompoziciju rezidualnog spektra, mogu se naći u prvom poglavlju ove disertacije.

Mnogi autori bavili su se rezidualnim spektrom kvazirascjepivih grupa. Među ostalim Mœglin i Walspurger za GL_n u [43], Mœglin za rascjepive klasične grupe u [40], [41], [42], Kim za Sp_4 u [30], izuzetnu grupu G_2 u [31] i neparnu specijalnu ortogonalnu grupu u [34], Žampera također za izuzetnu grupu G_2 u [63] i neke dijelove rezidualnog spektra klasičnih grupa u [62] te Kon–No za kvazirascjepivu unitarnu grupu ranga dva $U_{2,2}$ u [35]. Njihov pristup baziran je na Langlandsovoj spektralnoj teoriji i koristi za normalizaciju operatora ispreplitanja Langlands–Shahidijevu metodu koju je začeo Langlands, a razvio Shahidi u člancima [51] i [52]. Međutim, kao što je već spomenuto na početku uvoda, grupa G'_2 kojom se bavi ova disertacija nije kvazirascjepiva pa je izvan dosega Langlands–Shahidijeve metode. Nova tehnika razvijena u ovoj disertaciji, te primijenjena i u autorovim člancima [15], [16], [17] i [18], za prijenos normalizacijskih faktora s rascjepivih grupa na njihove unutarnje forme bazira se na prijenosu Plancherelovih mjera napravljenom u članku Muića i Savina [48]. Pokazuje se da su normalizirani operatori ispreplitanja normalizirani na taj način zaista holomorfni i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore.

U nastavku, najprije su uvedene oznake potrebne za opis rezultata ove disertacije. Neka je k polje algebarskih brojeva, $\mathbb{A}$ prsten adela od k te k_v upotpunjenje od k na mjestu v. Neka je D kvaternionska algebra centralna nad k i τ uobičajena involucija koja fiksira centar od D. Tada je D rascjepiva na svim osim konačno mnogo mjesta od k. U ovoj disertaciji pretpostavlja se da je D rascjepiva na svim arhimedskim mjestima.

Grupa G'_2 je algebarska grupa definirana nad k svih izometrija antihermitske forme $(\cdot,\cdot)$ definirane na četverodimenzionalnom desnom vektorskom prostoru nad D na bazi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ s

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,5-j}$$

za $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4$ i proširena s

$$\begin{aligned} (v, v') &= -\tau((v', v)), \\ (vx, v'x') &= \tau(x)(v, v')x' \end{aligned}$$

za sve $v, v' \in V$ i $x, x' \in D$. Tada je G'_2 unutarnja forma rascjepive grupe SO_8 i nije kvazirascjepiva.

Minimalna parabolička podgrupa P_0' od G_2' definirana na k ima Levijev faktor $M_0' \cong GL_1' \times GL_1'$ gdje je GL_1' algebarska grupa nad k invertibilnih elemenata kvaternionske algebre D. Dakle, GL_1' je unutarnja forma rascjepive grupe GL_2.

Osnovni cilj ove disertacije je dekompozicija potprostora $L^2_{P_0',res}$ rezidualnog spektra grupe G_2'. Kao što je objašnjeno u gornjem kratkom pregledu Langlandsove spektralne teorije, $L^2_{P_0',res}$ je potprostor koji se dobiva iteriranim poništavanjem polova u zatvaraču pozitivne Weylove komore Eisensteinovih redova određenih kuspidalnim automorfnim reprezentacijama Levijevog faktora $M_0'(\mathbb{A})$. Dekompozicija je dobivena u teoremima 4.2.1, 4.2.3, 4.2.4, 4.3.1, 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 i 4.4.5. Budući da su računi provedeni za Eisensteinove redove, a nije dekomponiran skalarni produkt pseudo–Eisensteinovih redova, multiplicitet jedan u dekompozicijama iz tih teorema se dobiva samo u slučajevima u kojima je iterirani pol prvog reda u svakom koraku. Međutim, jedini teorem u kojem iterirani pol nije takav je teorem 4.2.4 pa u njemu multipliciteti nisu poznati. U svim ostalim teoremima dekompozicija je multipliciteta jedan. Rezultati pokazuju interesantne dijelove rezidualnog spektra koji se ne javljaju kod kvazirascjepivih grupa kao što je na primjer dio rezidualnog spektra iz teorema 4.4.5. Razlog tomu su različite formule za normalizacijske faktore na rascjepivim i nerascjepivim mjestima.

Osim činjenice da je G_2' grupa poluprostog ranga 2 koja nije kvazirascjepiva pa je račun njenog rezidualnog spektra interesantan sam po sebi, dodatna motivacija za pristup tom problemu jest primjena na dokaz unitarizabilnosti nekih ireducibilnih reprezentacija grupe G_2' nad p–adskim poljem. Čitav unitarni dual grupe G_2' nad p–adskim poljem klasificirala je Hanzer u [21] i [20] lokalnim metodama. Međutim, unitarizabilnost dvaju izoliranih unitarnih reprezentacija slijedi i iz činjenice da se javljaju kao lokalne komponente automorfnih reprezentacija iz rezidualnog spektra od G_2' dobivenih u teoremima 4.2.1 i 4.4.1 ove disertacije za pogodno odabranu kvaternionsku algebru D. Usporedbu lokalne i globalne metode za dokaz unitarizabilnosti dala je Hanzer u [22].

Slijedi kratki pregled sadržaja disertacije po poglavljima. U prvom poglavlju izložena je Langlandsova spektralna teorija. Tu su definirani osnovni pojmovi kao što su automorfne i kuspidalne forme i reprezentacije, inducirane reprezentacije i standardni operatori ispreplitanja te Eisensteinovi redovi.

Drugo poglavlje zamišljeno je kao pregled rezultata potrebnih u nastavku vezanih uz strukturu i reprezentacije grupe G_2' i Levijevih faktora njezinih paraboličkih podgrupa nad lokalnim poljima k_v. Najprije su uvedene sve grupe koje se javljaju u disertaciji zajedno s pogodnim matričnim realizacijama nekih od njih, a zatim je navedena Jacquet–Langlandsova korespodencija, Langlandsova klasifikacija za hermitske kvaternionske grupe, slutnja o standardnom modulu za rascjepive klasične grupe te neki rezultati o reducibilnostima reprezentacija unutarnjih formi opće linearne grupe te rascjepive grupe SO_4.

Treće poglavlje posvećeno je normalizaciji standardnih operatora ispreplitanja. Najprije je lokalno, za svako mjesto v od k i lokalnu komponentu kuspidalne automorfne reprezentacije od $M_0'(\mathbb{A})$, definiran normalizacijski faktor lokalnog standardnog operatora ispreplitanja te je dokazano da su normalizirani operatori ispreplitanja holomorfni i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Na mjestima na kojima je D rascjepiva to se zapravo svodi na primjenu Langlands–Shahidijeve metode, ali na mjestima gdje D nije rascjepiva, grupa $G_2'(k_v)$ nije kvazirascjepiva pa je razvijena nova tehnika prijenosa normalizacije s rascjepive grupe $SO_8(k_v)$. Nadalje, definirani su globalni normalizacijski faktori kao produkti lokalnih po svim mjestima i dokazano je da su globalni normalizirani operatori ispreplitanja holomorfni i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Na kraju poglavlja navedena je korisna lema za dokaz ireducibilnosti slike nekih lokalnih normaliziranih operatora ispreplitanja.

U četvrtom poglavlju najprije su sakupljena svojstva svih L–funkcija koje se javljaju u globalnim normalizacijskim faktorima, a zatim je dekomponiran prostor $L^2_{P_0',res}$ u nizu teorema. Prvi korak dekompozicije je rastav na tri slučaja A, B i C ovisno o tipu kuspidalne automorfne reprezentacije od $M_0'(\mathbb{A})$. Zatim je svaki od tih slučajeva rastavljen ovisno o točki u kojoj se nalazi iterirani pol. U skladu s time dekompozicija prostora $L^2_{P_0',res}$ se proteže kroz osam teorema ovog poglavlja.

* * *

Na kraju ovog uvoda htio bih se zahvaliti svima koji su na bilo koji način pridonijeli ostvarenju ove disertacije. To je prije svega moj mentor, Goran Muić, koji mi je pomogao kroz brojne matematičke razgovore iz područja ove disertacije. Nadalje, htio bih se zahvaliti voditelju našeg projekta, Marku Tadiću, koji je s velikim zanimanjem podupirao moj rad. Razgovori s Henry Kimom pomogli su u rasvjetljavanju mnogih tajni teorije automorfnih formi, a s Ioan Badulescuom u teoriji reprezentacija opće linearne grupe nad algebrama s dijeljenjem. Zahvaljujem se i Marceli Hanzer na korisnim razgovorima o lokalnoj teoriji reprezentacija hermitskih kvaternionskih klasičnih grupa. Također se zahvaljujem Borisu Široli, te mlađim članovima našeg projekta Anđi Kelava i Ivanu Matiću, za pokazani interes na seminarima.

Osim znanstvenih zahvala, htio bih uputiti i zahvalu svojim kolegama sa Zavoda za primijenjenu matematiku FER–a, koji su mi omogućili da imam što više vremena za znanstveni rad. Tu prije svega spadaju Deki, Anči, Pina, Lanči, Mare, Kiki i mali Mario. Posebno se zahvaljujem Deki za sve 'ukradene' pismene ispite i stalnu brigu, Anči koja je nacrtala slike korištene u ovoj disertaciji, Pini za tehničku potporu pri izradi disertacije, te Lanči za uvijek pravodobno podsjećanje na nastavne obaveze.

I na kraju, htio bih se zahvaliti roditeljima, baki, sestri i prijateljima koji su unijeli toliko smijeha u moj život. Te najvažnije, velika pusa Tiki, mojoj vječnoj ljubavi i inspiraciji, zbog svega...

Poglavlje 1

Langlandsova spektralna teorija

Cilj ovog poglavlja je objasniti kako se koristeći Langlandsovu spektralnu teoriju može izračunati rezidualni spektar reduktivne grupe. Pritom su definirani osnovni pojmovi korišteni u disertaciji kao što su inducirane reprezentacije, operatori ispreplitanja i Eisensteinovi redovi.

Rezidualni spektar reduktivne grupe je nekuspidalni dio diskretnog spektra. Dijelove rezidualnog spektra dobiva se kao iterirane reziduume Eisensteinovih redova određenih kuspidalnim automorfnim reprezentacijama Levijevih faktora standardnih pravih paraboličkih podgrupa. Te reziduume računa se koristeći konstantni član Eisensteinovog reda koji je jednak sumi operatora ispreplitanja. Polove operatora ispreplitanja može se odrediti zahvaljujući normalizaciji pomoću L–funkcija o kojoj će više riječi biti u trećem poglavlju.

Sadržaj ovog poglavlja najvećim dijelom prati knjige [37] i [44]. Većina rezultata je dana bez dokaza obzirom da je ovo poglavlje zamišljeno kao pregled rezultata potrebnih u disertaciji.

1.1 Automorfne forme

Neka je k polje algebarskih brojeva. Označimo s k_v upotpunjenje polja k na mjestu v te s $\mathbb{A}$ prsten adela polja k. Neka je G reduktivna grupa definirana nad k, a Z njezin centar. Za proizvoljnu reduktivnu grupu H definiranu nad k s $H(k)$, $H(k_v)$, $H(\mathbb{A})$ označimo k, k_v, $\mathbb{A}$–racionalne točke grupe H. Fiksirajmo unitarni centralni karakter

$$\omega : Z(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}.$$

trivijalan na $Z(k)$. Tada definiramo Hilbertov prostor automorfnih formi grupe G.

Definicija 1.1.1. (Automorfne forme) Prostor automorfnih formi grupe G s centralnim karakterom ω je Hilbertov prostor klasa izmjerivih funkcija

$$f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

takvih da vrijedi

(1) $f(\gamma g) = f(g)$ za sve $\gamma \in G(k)$ i skoro sve $g \in G(\mathbb{A})$,

(2) $f(zg) = \omega(z) f(g)$ za sve $z \in Z(\mathbb{A})$ i skoro sve $g \in G(\mathbb{A})$,

(3) $\int_{Z(\mathbb{A})G(k)\backslash G(\mathbb{A})} |f(g)|^2 dg < \infty$.

Označavamo ga s $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}), \omega)$ ili kraće L^2 kad je jasno o kojoj grupi se radi. Klase izmjerivih funkcija u L^2 zovemo automorfne forme.

Na prostoru L^2 definirana je desna regularna reprezentacija ρ grupe $G(\mathbb{A})$ formulom

$$\rho(g) f(h) = f(hg).$$

Cilj spektralne teorije za reduktivnu grupu G je dekomponirati Hilbertov prostor L^2 obzirom na reprezentaciju ρ.

Osim prostora L^2 definiraju se i prostori glatkih i K–konačnih automorfnih formi, gdje je K fiksirana maksimalna kompaktna podgrupa od $G(\mathbb{A})$. Točnije, neka je K_v fiksirana maksimalna kompaktna podgrupa od $G(k_v)$. Pritom, budući da je na skoro svim nearhimedskim mjestima G kvazi–rascjepiva, na tim mjestima neka je

$$K_v = G(\mathfrak{o}_v),$$

gdje je $\mathfrak{o}_v$ prsten cijelih u k_v. Tada je

$$K = \prod_v K_v$$

maksimalna kompaktna podgrupa od $G(\mathbb{A})$. Glatke i K–konačne automorfne forme zapravo odgovaraju glatkim i K–konačnim vektorima u L^2.

Definicija 1.1.2. (Automorfne reprezentacije) Svaki ireducibilni subkvocijent restrikcije reprezentacije ρ na potprostor glatkih automorfnih formi u L^2 zovemo glatka automorfna reprezentacija grupe $G(\mathbb{A})$.

Osim glatke automorfne reprezentacije, prelaskom na K–konačne vektore dobivamo K–konačne automorfne reprezentacije, a upotpunjenjem dobivamo automorfne reprezentacije. Veza među tim reprezentacijama je detaljno objašnjena u prvom poglavlju rada [14] pa to nećemo ovdje ponavljati. Naglasimo jedino da K–konačnost automorfne forme nije sačuvana pri djelovanju čitave grupe $G(\mathbb{A})$. Problem se javlja na arhimedskim mjestima zbog djelovanja grupe

$$G_\infty = \prod_{v \in S_\infty} G(k_v),$$

gdje je S_∞ skup svih arhimedskih mjesta. Međutim, djelovanje realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}_\infty$ od G_∞ i maksimalne kompaktne podgrupe

$$K_\infty = \prod_{v \in S_\infty} K_v$$

ipak čuvaju K–konačnost. Stoga K–konačna automorfna reprezentacija zapravo nije reprezentacija čitave grupe $G(\mathbb{A})$, nego istovremeno Harish–Chandrin $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$–modul i reprezentacija grupe $G(\mathbb{A}_f)$, gdje je $\mathbb{A}_f$ prsten konačnih adela, pri čemu djelovanja komutiraju.

Automorfna reprezentacija se dekomponira u restringirani tenzorski produkt unitarnih ireducibilnih reprezentacija grupa $G(k_v)$ na Hilbertovim prostorima. Sljedeća tvrdnja je teorem 4 iz [8] koji vrijedi za neprekidne unitarne reprezentacije od $G(\mathbb{A})$ na Hilbertovom prostoru, a ne samo za automorfne reprezentacije od $G(\mathbb{A})$.

Teorem 1.1.3. (Dekompozicija automorfne reprezentacije) *Neka je π automorfna reprezentacija grupe $G(\mathbb{A})$. Tada postoje do na izomorfizam jedinstvene ireducibilne unitarne reprezentacije π_v grupa $G(k_v)$ na Hilbertovim prostorima među kojima su skoro sve nerazgranate, takve da je π izomorfna restringiranom tenzorskom produktu*

$$\pi \cong \otimes_v \pi_v,$$

obzirom na fiksirane K_v–invarijantne vektore na mjestima za koja je π_v nerazgranata.

Teorem 1.1.3 o dekompoziciji automorfne reprezentacije vrijedi i za glatke i K–konačne automorfne reprezentacije. Pritom je dekompozicija na restringirani tenzorski produkt kompatibilna s prelaskom na glatke i K–konačne vektore i sve lokalne komponente π_v su dopustive u smislu da je prostor K–konačnih vektora od π_v dopustiva reprezentacija.

Prvi korak u spektralnoj dekompoziciji prostora L^2 je rastav na diskretni i kontinuirani spektar

$$L^2 = L^2_d \oplus L^2_c.$$

Diskretni spektar L^2_d je zatvarač prostora razapetog svim zatvorenim ireducibilnim ρ–invarijantnim potprostorima od L^2, a kontinuirani spektar L^2_c je razapet direktnim integralima ireducibilnih reprezentacija. Budući da se kontinuirani spektar može jednostavno opisati integralima Eisensteinovih redova ([37]), ova disertacija je usredotočena na diskretni spektar. U diskretnom spektru definiramo kuspidalni spektar.

Definicija 1.1.4. (Kuspidalne forme i reprezentacije) Automorfna forma $f \in L^2$ je kuspidalna ako vrijedi

$$\int_{N(k)\backslash N(\mathbb{A})} f(ng)dn = 0$$

za skoro sve $g \in G(\mathbb{A})$ i za sve unipotentne radikale N pravih paraboličkih podgrupa od G. Prostor svih kuspidalnih formi zovemo kuspidalni spektar i označavamo L^2_{cusp}. Budući da je $N(k)\backslash N(\mathbb{A})$ kompaktan, uvjet kuspidalnosti daje zatvoren potprostor od L^2_d koji je ρ–invarijantan. Zatvorene ireducibilne subkvocijente od L^2_{cusp} zovemo kuspidalne automorfne reprezentacije.

Sljedeći korak u spektralnoj dekompoziciji je rastav diskretnog spektra na kuspidalni i rezidualni spektar

$$L^2_d = L^2_{cusp} \oplus L^2_{res},$$

gdje je rezidualni spektar naprosto nekuspidalni dio diskretnog spektra, odnosno ortogonalni komplement kuspidalnog spektra u diskretnom spektru. Upravo rezidualni spektar proučavamo u ovoj disertaciji.

Rezidualni spektar se dalje dekomponira

$$L^2_{res} = \oplus_P L^2_{P,res}.$$

gdje je suma po svim klasama konjugiranosti pravih paraboličkih podgrupa od G. Prostore $L^2_{P,res}$ ćemo opisati u ostatku ovog poglavlja.

1.2 Inducirane reprezentacije i operatori ispreplitanja

Prije definicije induciranih reprezentacija i operatora ispreplitanja uvedimo još oznaka. Neka je T maksimalni rascjepivi torus u G definiran nad poljem algebarskih brojeva k. Fiksirajmo odabir pozitivnih korijena u sustavu korijena od (G, T). Time smo fiksirali Borelovu podgrupu B od G. Unipotentni radikal Borelove podgrupe označimo s U. Paraboličku podgrupu od G zovemo standardna ako sadrži B kao podgrupu. Neka je P prava standardna parabolička podgrupa od G i neka je $P = MN$ njezina Levijeva dekompozicija, gdje je M Levijev faktor, a N unipotentni radikal.

Neka $X(M)$ označava $\mathbb{Z}$–modul k–racionalnih karaktera Levijevog faktora M. Nadalje,

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_M &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(M), \mathbb{R}),\\ \mathfrak{a}_M^* &= X(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Kompleksifikaciju prostora $\mathfrak{a}_M$ i $\mathfrak{a}_M^*$ označavamo $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$. Prostor $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ je r–dimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Fiksirajmo izomorfizam

$$\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^* \cong \mathbb{C}^r$$

pomoću kojeg identificiramo vektore iz $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ s uređenim r–torkama kompleksnih brojeva

$$\underline{s} = (s_1, \ldots, s_r).$$

Definicija 1.2.1. (Inducirana reprezentacija) Neka je $\pi \cong \otimes_v \pi_v$ kuspidalna automorfna reprezentacija Levijevog faktora $M(\mathbb{A})$ te $\underline{s} \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$. Tada definiramo sljedeću induciranu reprezentaciju

$$I(\underline{s}, \pi) = \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})} \left(\pi \otimes |\underline{s}(\cdot)| \otimes \mathbf{1}_{N(\mathbb{A})}\right),$$

gdje je $\underline{s}(\cdot)$ karakter od $M(\mathbb{A})$ koji odgovara $\underline{s} \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$, a $\mathbf{1}_{N(\mathbb{A})}$ trivijalna reprezentacija unipotentnog radikala. Indukcija je normalizirana tako da je sačuvana unitarnost reprezentacija.

Obzirom da će sve inducirane reprezentacije u ovoj disertaciji biti inducirane sa standardnih paraboličkih podgrupa najčešće ćemo umjesto Ind_P^G koristiti oznaku Ind_M^G gdje je M Levijev faktor. Također, nećemo pisati

$\mathbf{1}_{N(\mathbb{A})}$ jer podrazumijevamo da se reprezentacija Levijevog faktora trivijalno proširuje na unipotentni radikal.

Globalna inducirana reprezentacija je restringirani tenzorski produkt lokalnih induciranih reprezentacija

$$I(\underline{s}, \pi) \cong \otimes_v I(\underline{s}, \pi_v),$$

gdje uz oznake analogne globalnim

$$I(\underline{s}, \pi_v) = \operatorname{Ind}_{P(k_v)}^{G(k_v)} \left(\pi_v \otimes |\underline{s}(\cdot)|_v \otimes \mathbf{1}_{N(k_v)} \right).$$

Na skoro svim mjestima $I(\underline{s}, \pi_v)$ je nerazgranata i tenzorski produkt je restringiran obzirom na do na skalar jedinstvene K_v–invarijantne funkcije na tim mjestima.

Prema propoziciji 2 u [38], svaki ireducibilni subkvocijent globalne inducirane reprezentacije $I(\underline{s}, \pi)$ je izomorfan automorfnoj reprezentaciji. Stoga ćemo uvijek identificirati $I(\underline{s}, \pi)$ s njezinom realizacijom u prostoru automorfnih formi. Nadalje, automorfne forme

$$f_{\underline{s}} \in I(\underline{s}, \pi)$$

uvijek biramo na takav način da je ovisnost o $\underline{s}$ analitička na čitavom $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ i Paley–Wienerova s vrijednostima u prostoru inducirane reprezentacije.

Neka je W Weylova grupa od (G, T). Od ovog mjesta pretpostavljamo da su sve paraboličke podgrupe s kojima radimo samokonjugirane. To znači da je grupa

$$W(M) = N_G(M)/M$$

netrivijalna, gdje je $N_G(M)$ normalizator od M u G, te da ne postoji $w \in W$ takav da je wMw^{-1} Levijev faktor neke druge standardne paraboličke podgrupe od G. Ova pretpostavka je tehničke prirode i pojednostavljuje daljnje izlaganje, a pritom ne smanjuje općenitost jer u narednim poglavljima će sve paraboličke podgrupe zaista biti samokonjugirane. Grupa $W(M)$ djeluje na $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ te reprezentacije od $M(\mathbb{A})$ i $M(k_v)$ konjugiranjem

$$\begin{aligned} w(\underline{s})(m) &= \underline{s}(w^{-1}mw), \\ w(\pi)(m) &= \pi(w^{-1}mw). \end{aligned}$$

Definicija 1.2.2. (Operator ispreplitanja) Za $w \in W(M)$ i $f_{\underline{s}} \in I(\underline{s}, \pi)$ definiramo standardni operator ispreplitanja

$$A(\underline{s}, \pi, w) f_{\underline{s}}(g) = \int_{U(\mathbb{A}) \cap w\overline{N}(\mathbb{A})w^{-1}} f_{\underline{s}}(w^{-1} n g) dn,$$

gdje je $\overline{N}$ unipotentni radikal suprotne paraboličke podgrupe od P, a dn fiksirana Haarova mjera na unipotentnom radikalu.

Sljedeća tvrdnja može se naći u poglavljima II.1.6 i IV.1.8 knjige [44].

Propozicija 1.2.3. *Za $\underline{s}$ dovoljno duboko u pozitivnoj Weylovoj komori integral koji definira standardni operator ispreplitanja konvergira apsolutno i uniformno za g u kompaktnom skupu. Analitički se produljuje do meromorfnog operatora na čitavom $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$. Izvan polova $A(\underline{s}, \pi, w)$ je ispreplitanje induciranih reprezentacija $I(\underline{s}, \pi)$ i $I(w(\underline{s}), w(\pi))$.*

Standardni operator ispreplitanja dekomponira se u restringirani tenzorski produkt lokalnih operatora ispreplitanja. Točnije, ako je

$$f_{\underline{s}} = \otimes_v f_{\underline{s},v},$$

onda

$$A(\underline{s}, \pi, w) f_{\underline{s}} = \otimes_v A(\underline{s}, \pi_v, w) f_{\underline{s},v},$$

gdje su $A(\underline{s}, \pi_v, w)$ lokalni standardni operatori ispreplitanja definirani integralom

$$A(\underline{s}, \pi_v, w) f_{\underline{s},v}(g_v) = \int_{U(k_v) \cap w\overline{N}(k_v)w^{-1}} f_{\underline{s},v}(w^{-1} n_v g_v) dn_v.$$

Tvrdnje propozicije 1.2.3 vrijede i za lokalne operatore. Uočimo da je na skoro svim mjestima $f_{\underline{s},v}$ invarijantna za maksimalnu kompaktnu podgrupu K_v. Na tim mjestima lokalni operator ispreplitanja K_v–invarijantnu funkciju $f_{\underline{s},v}$ preslikava u K_v–invarijantnu funkciju u $I(w(\underline{s}), w(\pi_v))$. Više riječi o tome bit će u poglavlju o normalizaciji operatora ispreplitanja.

1.3 Eisensteinovi redovi i rezidualni spektar

Definicija 1.3.1. (Eisensteinov red) Neka je i dalje $\pi \cong \otimes_v \pi_v$ kuspidalna automorfna reprezentacija Levijevog faktora $M(\mathbb{A})$ te $f_{\underline{s}} \in I(\underline{s}, \pi)$ automorfne forme, pri čemu je ovisnost o $\underline{s} \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ kao u prethodnom poglavlju.

Tada definiramo Eisensteinov red

$$E(\underline{s}, g; f_{\underline{s}}, \pi) = \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} f_{\underline{s}}(\gamma g)$$

za $g \in G(\mathbb{A})$.

Sljedeća tvrdnja se može naći u poglavljima II.1.5 i IV.1.8 knjige [44].

Propozicija 1.3.2. *Za $\underline{s}$ dovoljno duboko u pozitivnoj Weylovoj komori red koji definira Eisensteinov red konvergira apsolutno i uniformno za g u kompaktnom skupu. Analitički se produljuje do meromorfne funkcije na čitavom $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$.*

Koristeći Eisensteinove redove koji odgovaraju kuspidalnim automorfnim reprezentacijama Levijevog faktora $M(\mathbb{A})$ može se opisati odgovarajući dio prostora automorfnih formi. Pritom se, osim prostora $L^2_{P,res}$ spomenutih o poglavlju 1.1, dobiva i dio kontinuiranog spektra. Ova tvrdnja može se naći u poglavlju II.1.12 knjige [44].

Teorem 1.3.3. *Doprinos prostoru automorfnih formi reduktivne grupe G koji odgovara automorfnoj kuspidalnoj reprezentaciji π Levijevog faktora $M(\mathbb{A})$ je razapet funkcijama*

$$g \mapsto \frac{1}{(2\pi i)^{\dim(\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}})}} \int_{Re(\underline{s})=\underline{s}_0} E(\underline{s}, g; f_{\underline{s}}, \pi) d\underline{s}, \tag{1.1}$$

gdje je $\underline{s}_0$ dovoljno duboko u pozitivnoj Weylovoj komori tako da integral koji definira operatore ispreplitanja i suma koja definira Eisensteinov red konvergiraju apsolutno u $\underline{s}_0$. Pritom gornji integral računamo pomakom linije integracije unutar pozitivne Weylove komore u ishodište od $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, gdje dobivamo integral po $Re(\underline{s}) = 0$ koji daje dio kontinuiranog spektra.

Putem prelazimo singularne hiperravnine u kojima Eisensteinov red ima polove. Poništavanjem polova Eisensteinovog reda dobivamo nove integrale analogne integralima (1.1) na $(r-1)$–dimenzionalnoj hiperravnini. Odabirom koordinatnog sustava na hiperravnini s ishodištem u ortogonalnoj projekciji ishodišta od $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ nastavljamo postupak. Osim doprinosa kontinuiranom spektru, ako su automorfne forme dobivene iteriranim poništavanjem polova Eisensteinovog reda r puta kvadratno integrabilne, dobivamo dijelove rezidualnog spektra $L^2_{P,res}$ koji odgovaraju kuspidalnoj automorfnoj reprezentaciji π.

Ovaj teorem zapravo daje recept kako izračunati dekompoziciju prostora $L^2_{P,res}$ kad bi znali naći polove Eisensteinovih redova, izračunati što ostane nakon njihovog iteriranog poništavanja te provjeriti kvadratnu integrabilnost. To će nam omogućiti konstantni članovi Eisensteinovih redova. Međutim, ovom metodom ne dobiva se multiplicitet reprezentacija u rezidualnom spektru, osim ako su polovi u svakoj iteraciji jednostruki kada je multiplicitet jednak jedan. Da bi se dobili multipliciteti trebalo bi dekomponirati skalarni produkt pseudo–Eisensteinovih redova, a to je izvan dosega ove disertacije.

Definicija 1.3.4. (Konstantni član Eisensteinovog reda) Neka je π kuspidalna automorfna reprezentacija Levijevog faktora $M(\mathbb{A})$. Konstantni član Eisensteinovog reda $E(\underline{s}, g; f_{\underline{s}}, \pi)$ duž paraboličke podgrupe P je

$$E_P(\underline{s}, g; f_{\underline{s}}, \pi) = \int_{N(k)\backslash N(\mathbb{A})} E(\underline{s}, ng; f_{\underline{s}}, \pi) dn. \tag{1.2}$$

Budući da je $N(k)\backslash N(\mathbb{A})$ kompaktan, analitička svojstva Eisensteinovog reda i njegovog konstantnog člana se podudaraju. Također, konstantni član automorfne forme u potpunosti ju određuje prema poglavlju I.3.4 iz [44]. Stoga je dovoljno proučiti polove i kvadratnu integrabilnost konstantnog člana. Sljedeća propozicija dovodi u vezu konstantni član Eisensteinovog reda s operatorima ispreplitanja i može se naći u poglavlju II.1.7. knjige [44].

Propozicija 1.3.5. *Neka je P samokonjugirana standardna prava parabolička podgrupa od G i π kuspidalna automorfna reprezentacija njezinog Levijevog faktora $M(\mathbb{A})$. Tada je konstantni član Eisensteinovog reda $E(\underline{s}, g; f_{\underline{s}}, \pi)$ jednak*

$$E_P(\underline{s}, g; f_{\underline{s}}, \pi) = \sum_{w \in W(M)} A(\underline{s}, \pi, w) f_{\underline{s}}(g). \tag{1.3}$$

Da bismo odredili dekompoziciju prostora $L^2_{P,res}$, a time i čitav rezidualni spektar L^2_{res}, računat ćemo upravo polove sume operatora ispreplitanja (1.3) unutar pozitivne Weylove komore. To će nam omogućiti normalizacija operatora ispreplitanja pomoću L–funkcija koju uvodimo u trećem poglavlju.

Iteriranim poništavanjem polova Eisensteinovog reda zaista dobivamo dijelove rezidualnog spektra ako i samo ako su dobivene forme kvadratno integrabilne. Sljedeći kriterij kvadratne integrabilnosti može se naći na stranici 104 knjige [37].

Lema 1.3.6. (Langlandsov kriterij kvadratne integrabilnosti) *Prostor dobiven nakon iteriranog poništavanja pola Eisensteinovog reda* $E(\underline{s}, g; f_{\underline{s}}, \pi)$ *u točki*

$$\underline{s} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$$

sastoji se od kvadratno integrabilnih automorfnih formi ako i samo ako

$$w(z_1, \dots, z_r) = (z'_1, \dots, z'_r)$$

zadovoljava nejednakosti

$$\begin{aligned} Re(z'_1) &< 0, \\ Re(z'_1) + Re(z'_2) &< 0, \\ &\dots \\ Re(z'_1) + \dots + Re(z'_r) &< 0, \end{aligned}$$

za svaki $w \in W(M)$ *takav da odgovarajući operator ispreplitanja u konstantnom članu (1.3) daje netrivijalan doprinos sumi nakon iteriranog poništavanja polova.*

Naglasimo na kraju ovog poglavlja da provedba ovog recepta za računanje rezidualnog spektra nije tako jednostavna kao što izgleda. Javlja se nekoliko problema. Najprije, nije jednostavno dokazati da je nakon normalizacije, normalizirani operator ispreplitanja holomorfan i različit od nule u čitavoj zatvorenoj pozitivnoj Weylovoj komori. Nadalje, osim za grupe malog ranga, teško je vidjeti nakon poništavanja polova da li se pojedini operatori međusobno poništavaju ili ne.

U dekompoziciji rezidualnog spektra u četvrtom poglavlju uvijek pretpostavljamo da su kuspidalne automorfne reprezentacije odabrane tako da su polovi Eisensteinovih redova realni. Takvo svojstvo ima svaka kuspidalna automorfna reprezentacija nakon pogodnog zakretanja imaginarnom potencijom apsolutne vrijednosti reducirane norme ili determinante. Stoga navedena pretpostavka ne smanjuje općenitost, već je samo pogodan odabir koordinatnog sustava.

Poglavlje 2

Hermitske kvaternionske grupe

U ovom poglavlju sakupljene su činjenice o strukturi te rezultati iz teorije reprezentacija hermitskih kvaternionskih grupa i njihovih Levijevih podgrupa nad lokalnim poljima karakteristike nula. Izbor je napravljen isključivo imajući u vidu primjene u sljedećim poglavljima ove disertacije. Stoga, ni u kojem slučaju ne treba smatrati ovo poglavlje cjelovitim pregledom rezultata.

Najprije su definirane sve grupe koje su potrebne u ovoj disertaciji zajedno s njihovom pogodnim matričnim realizacijama. Slijedi podsjetnik na lokalnu i globalnu Jacquet–Langlandsovu korespodenciju, Langlandsovu klasifikaciju za hermitske kvaternionske grupe, slutnju o standardnom modulu te neke rezultate o ireducibilnosti induciranih reprezentacija za opću linearnu grupu. Sam kraj poglavlja posvećen je induciranim reprezentacijama hermitske kvaternionske grupe ranga jedan koja je unutarnja forma rascjepive grupe SO_4.

2.1 Struktura

2.1.1 Definicije

Kao i prije, neka je k algebarsko polje brojeva i $\mathbb{A}$ prsten adela od k. Za mjesto v od k označimo s k_v upotpunjenje od k na mjestu v. Neka je D kvaternionska algebra centralna nad k i τ uobičajena involucija koja fiksira centar od D. Tada je D rascjepiva na skoro svim mjestima od k, odnosno na tim mjestima je upotpunjenje

$$D \otimes_k k_v \cong M(2, k_v),$$

gdje je $M(2,k_v)$ aditivna grupa 2×2 matrica s koeficijentima iz k_v. Na konačno mnogo mjesta v od k na kojima D nije rascjepiva upotpunjenje

$$D\otimes_k k_v \cong D_v,$$

gdje je D_v do na izomorfizam jedinstvena kvaternionska algebra centralna nad k_v. U ovoj disertaciji pretpostavljamo da je D rascjepiva na svim arhimedskim mjestima. Konačan skup nearhimedskih mjesta na kojima D nije rascjepiva označavamo sa S. Broj takvih mjesta je uvijek paran.

Reduciranu normu kvaternionske algebre D označavat ćemo s $\det'$. Istu oznaku koristimo i za reduciranu normu proste algebre $D\otimes_k \mathbb{A}$. Ona je produkt lokalnih reduciranih normi $\det'_v$ pri čemu je na mjestima $v\notin S$ reducirana norma $\det'_v$ zapravo determinanta. Apsolutnu vrijednost lokalnih i globalnih reduciranih normi označavamo s ν.

Uvedimo sada grupe koje ćemo koristiti. Neka je GL_n rascjepiva opća linearna grupa definirana nad k koja se sastoji od svih invertibilnih $n\times n$ matrica. Rascjepiva specijalna linearna grupa SL_n definirana nad k je njezina podgrupa koja se sastoji od svih $n\times n$ matrica jedinične determinante. Rascjepiva specijalna ortogonalna grupa SO_{2n} definirana nad k je komponenta povezanosti grupe izometrija bilinearne forme definirane $2n\times 2n$ matricom

$$J_{2n}=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1\\ \vdots & \iddots & \iddots & 0\\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots\\ 1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}.$$

Neka je GL'_n algebarska grupa definirana nad k invertibilnih $n\times n$ matrica s koeficijentima iz D. Tada

$$GL'_n(k_v)\cong\begin{cases} GL_{2n}(k_v), & \text{za } v\notin S,\\ GL_n(D_v), & \text{za } v\in S.\end{cases}$$

Algebarsku podgrupu od GL'_n koja se sastoji od matrica jedinične reducirane norme determinante označavamo s SL'_n. Vrijedi

$$SL'_n(k_v)\cong\begin{cases} SL_{2n}(k_v), & \text{za } v\notin S,\\ SL_n(D_v), & \text{za } v\in S.\end{cases}$$

Na GL'_n također koristimo oznake $\det'$ i $\det'_v$ za reduciranu normu determinante nad adelima i nad lokalnim poljem k_v. Apsolutnu vrijednost reducirane norme determinante označavamo s ν.

Neka je V desni vektorski prostor nad D dimenzije $2n$. Fiksirajmo bazu

$$\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$$

od V. Antihermitska forma $(\cdot, \cdot)$ na V definirana je na bazi

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,2n-j+1} \quad \text{za } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2n$$

i proširuje se formulama

$$\begin{aligned} (v, v') &= -\tau((v', v)), \\ (vx, v'x') &= \tau(x)(v, v')x' \end{aligned}$$

za sve $v, v' \in V$ i $x, x' \in D$. Algebarsku grupu nad k svih izometrija forme $(\cdot, \cdot)$ označavamo s G'_n. To je unutarnja forma rascjepive grupe SO_{4n}. Stoga,

$$G'_n(k_v) \cong \begin{cases} SO_{4n}(k_v), & \text{za } v \notin S, \\ G'_n(D_v), & \text{za } v \in S. \end{cases}$$

2.1.2 Grupa G'_2

Ova disertacija bavi se upravo rezidualnim spektrom grupe G'_2 koja je unutarnja forma rascjepive grupe SO_8. Stoga ćemo sada detaljnije proučiti njezinu strukturu. Neka je T' maksimalni rascjepivi torus nad k u G'_2. Tada je

$$T' \cong GL_1 \times GL_1.$$

Označimo s Φ' skup korijena od G'_2 obzirom na T'. Tada

$$\Phi' = \{\pm e_1 \pm e_2, \pm 2e_1, \pm 2e_2\},$$

gdje je za $i = 1, 2$,

$$e_i(t_1, t_2) = t_i \quad \text{za sve } (t_1, t_2) \in T' \cong GL_1 \times GL_1.$$

Za skup pozitivnih korijena odaberimo

$$\Phi'^{+} = \{e_1 \pm e_2, 2e_1, 2e_2\}.$$

Odgovarajući skup prostih korijena je

$$\Delta' = \{e_1 - e_2, 2e_2\}.$$

Standardne paraboličke podgrupe od G_2' definirane nad k odgovaraju podskupovima skupa prostih korijena Δ'. Minimalnu paraboličku podgrupu koja odgovara praznom skupu prostih korijena označimo s P_0'. U Levijevoj dekompoziciji $P_0' = M_0'N_0'$ Levijev faktor je

$$M_0' \cong GL_1' \times GL_1'.$$

Grupa G_2' ima još dvije maksimalne prave standardne paraboličke podgrupe koje odgovaraju jednočlanim podskupovima od Δ'. Neka $P_1' = M_1'N_1'$ s Levijevim faktorom

$$M_1' \cong GL_2'$$

odgovara prostom korijenu $e_1 - e_2$, a $P_2' = M_2'N_2'$ s Levijevim faktorom

$$M_2' \cong GL_1' \times G_1'$$

odgovara prostom korijenu $2e_2$. Weylovu grupu od (G_2', T') označimo s W. Uočimo da su po definiciji iz poglavlja 1.2 sve tri prave paraboličke podgrupe od G_2' samokonjugirane. Pritom $W(M_0')$ je zapravo čitava Weylova grupa W. Ako označimo s w_1 refleksiju na prostom korijenu $e_1 - e_2$, a s w_2 refleksiju na prostom korijenu $2e_2$, onda je

$$W = W(M_0') = \{1, w_1, w_2, w_1w_2, w_2w_1, w_1w_2w_1, w_2w_1w_2, w_1w_2w_1w_2\}.$$

Nadalje, $W(M_1')$ i $W(M_2')$ sadrže jedinstveni netrivijalni element kojeg u oba slučaja označavamo w_0. Za M_1' to je element koji odgovara elementu $w_2w_1w_2$ Weylove grupe, a za M_2' odgovara elementu $w_1w_2w_1$.

Promotrimo sada još i rascjepivu grupu SO_8 čija unutarnja forma je G_2'. Standardne paraboličke podgrupe od SO_8 čije su unutarnje forme P_0', P_1' i P_2' označavamo redom s P_0, P_1 i P_2. Neka je $P_i = M_iN_i$ Levijeva dekompozicija za $i = 0, 1, 2$. Tada

$$\begin{aligned} M_0 &\cong GL_2 \times GL_2, \\ M_1 &\cong GL_4, \\ M_2 &\cong GL_2 \times SO_4. \end{aligned}$$

Sve tri paraboličke podgrupe su samokonjugirane te $W(M_i) \cong W(M_i')$.

Uočimo da su prostori $\mathfrak{a}^*_{M'_i,\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{a}^*_{M_i,\mathbb{C}}$ izomorfni za $i = 0, 1, 2$. Prostori $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{a}^*_{M_0,\mathbb{C}}$ su dvodimenzionalni i za bazu uzimamo reducirane norme na svakoj od kopija GL'_1 u M'_0, odnosno determinante na svakoj od kopija GL_2 u M_0. Time ujedno fiksiramo izomorfizam. Pozitivnu Weylovu komoru čine svi parovi $\underline{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ takvi da vrijedi

$$Re(s_1) > Re(s_2) > 0.$$

Prostori $\mathfrak{a}^*_{M'_1,\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{a}^*_{M_1,\mathbb{C}}$ su jednodimenzionalni i za bazu uzimamo reduciranu normu determinante na $M'_1 \cong GL'_2$, odnosno determinantu na $M_1 \cong GL_4$, čime fiksiramo izomorfizam. Prostori $\mathfrak{a}^*_{M'_2,\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{a}^*_{M_2,\mathbb{C}}$ su također jednodimenzionalni. Za bazu uzimamo reduciranu normu na GL'_1 u M'_2, odnosno determinantu na GL_2 u M_2. Time je fiksiran izomorfizam. Pozitivne Weylove komore u oba slučaja maksimalnih paraboličkih podgrupa dane su uvjetom $Re(s) > 0$ za $s \in \mathbb{C}$.

Napomenimo još da i u situacijama koje nisu ovdje eksplicitno navedene, uvijek za bazu prostora $\mathfrak{a}^*_{M',\mathbb{C}}$, gdje je M' Levijev faktor neke standardne paraboličke podgrupe rascjepive klasične grupe ili njezine unutarnje forme, biramo determinante, odnosno reducirane norme determinante na svakoj od grupa GL_m ili GL'_m koje se javljaju u M'. Naglasimo da ovakav odabir baze nije uvijek u skladu s bazom $\widetilde{\alpha}$ koja je odabrana u slučaju maksimalne standardne prave paraboličke podgrupe rascjepive klasične grupe u poglavlju 3.1. Na primjer za standardnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom GL_2 u rascjepivoj grupi SO_4 je $\widetilde{\alpha} = \det_v^{1/2}$.

w	$w(\underline{s}) = w(s_1, s_2)$	$w(\pi') \cong w(\pi'_1 \otimes \pi'_2)$
1	(s_1, s_2)	$\pi'_1 \otimes \pi'_2$
w_1	(s_2, s_1)	$\pi'_2 \otimes \pi'_1$
w_2	$(s_1, -s_2)$	$\pi'_1 \otimes \widetilde{\pi}'_2$
w_1w_2	$(-s_2, s_1)$	$\widetilde{\pi}'_2 \otimes \pi'_1$
w_2w_1	$(s_2, -s_1)$	$\pi'_2 \otimes \widetilde{\pi}'_1$
$w_1w_2w_1$	$(-s_1, s_2)$	$\widetilde{\pi}'_1 \otimes \pi'_2$
$w_2w_1w_2$	$(-s_2, -s_1)$	$\widetilde{\pi}'_2 \otimes \widetilde{\pi}'_1$
$w_1w_2w_1w_2$	$(-s_1, -s_2)$	$\widetilde{\pi}'_1 \otimes \widetilde{\pi}'_2$

Tablica 1. Djelovanje $W(M'_0)$ na $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$ i reprezentacije od $M'_0(\mathbb{A})$

Kao što je već navedeno u poglavlju 1.2, elementi $w \in W(M'_0)$ djeluju na $\underline{s} = (s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$ i kuspidalnu automorfnu reprezentaciju $\pi' \cong \pi'_1 \otimes \pi'_2$

grupe $M_0'(\mathbb{A}) \cong GL_1'(\mathbb{A}) \times GL_1'(\mathbb{A})$ konjugiranjem, odnosno

$$\begin{aligned} w(\underline{s})(m) &= \underline{s}(w^{-1}mw), \\ w(\pi)(m) &= \pi(w^{-1}mw), \end{aligned}$$

za $m \in M_0'(\mathbb{A})$. To djelovanje eksplicitno je navedeno u tablici 1 za sve $w \in W(M_0')$. Pritom $\tilde{\cdot}$ označava kontragredijentnu reprezentaciju.

2.1.3 Matrična realizacija grupe G_1'

Na kraju navodimo, nad lokalnim poljem k_v za rascjepiva i nerascjepiva mjesta, pogodnu matričnu realizaciju grupe G_1' koja je unutarnja forma rascjepive grupe SO_4. Može se pokazati da se G_1' kao algebarska grupa nad k može realizirati kao

$$G_1' = \left\{ \begin{bmatrix} ag & bg \\ cg & dg \end{bmatrix} \in GL_2' : \begin{array}{c} g \in GL_1', \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2, \\ (ad-bc)\det'(g) = 1 \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

gdje je $\det'$ odgovarajuća reducirana norma. Stoga G_1' ima sljedeće dvije podgrupe

$$\begin{aligned} SL_1'^{(1)} &= \left\{ \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \in GL_2' : g \in SL_1' \right\}, \\ SL_2^{(2)} &= \left\{ \begin{bmatrix} aI_1' & bI_1' \\ cI_1' & dI_1' \end{bmatrix} \in GL_2' : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2 \right\}, \end{aligned}$$

gdje je I_n' na rascjepivim mjestima jedinična $2n \times 2n$ matrica, a na nerascjepivim mjestima jedinična $n \times n$ matrica. Presjek ovih podgrupa je $\{\pm I_2'\}$, a produkt $SL_1'^{(1)} SL_2^{(2)}$ normalna podgrupa od G_1'. Nad lokalnim poljem k_v kvocijent je konačan i to izomorfan s $k_v^\times/(k_v^\times)^2$.

Neka je $\{\gamma_v\}$ fiksirani skup predstavnika u kvocijentu $k_v^\times/(k_v^\times)^2$. Koristeći γ_v, uvodimo predstavnike γ_v' koji su istovremeno predstavnici klasa u kvocijentima

$$GL_1'(k_v)/SL_1'(k_v)Z'(k_v) \quad \text{i} \quad G_1'(k_v)/SL_1'^{(1)}(k_v)SL_2^{(2)}(k_v),$$

gdje je Z' centar od GL_1'. Na rascjepivim mjestima γ_v' su matrice

$$\begin{bmatrix} \gamma_v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(k_v) \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} \gamma_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_v^{-1} \end{bmatrix} \in SO_4(k_v).$$

Na nerascjepivim mjestima neka je

$$\widehat{\gamma}_v \in D_v^\times \cong GL_1'(k_v)$$

element koji odgovara matrici

$$\begin{bmatrix} \gamma_v & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(k_v)$$

u matričnoj reprezentaciji od D_v kao u poglavlju 2 u [19]. Tada su γ_v' istovremeno

$$\widehat{\gamma}_v \in GL_1'(k_v) \cong D_v^\times \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} \widehat{\gamma}_v & 0 \\ 0 & \gamma_v^{-1}\widehat{\gamma}_v \end{bmatrix} \in G_1'(k_v) \cong G_1'(D_v).$$

Ovakve jednake oznake predstavnika klasa za dva kvocijenta opravdane su činjenicom da konjugiranje elemenata od $SL_1'^{(1)}(k_v)SL_2^{(2)}(k_v)$ s γ_v' kao elementom u $G_1'(k_v)$ je zapravo isto što i odvojeno konjugiranje elemenata svake od podgrupa $SL_1'^{(1)}(k_v)$ i $SL_2^{(2)}(k_v)$ s γ_v' kao elementom u $GL_1'(k_v)$ i $GL_2(k_v)$. Ova činjenica o konjugiranju omogućit će nam u nastavku da proučimo inducirane reprezentacije grupe $G_1'(k_v)$.

2.2 Reprezentacije

2.2.1 Jacquet–Langlandsova korespodencija

U ovom poglavlju najprije ćemo se podsjetiti Jacquet–Langlandsove korespodencije. Lokalno, to je bijekcija između ireducibilnih dopustivih reprezentacija grupe $GL_1'(k_v)$ i ireducibilnih dopustivih kvadratno integrabilnih reprezentacija rascjepive grupe $GL_2(k_v)$, a globalno između kuspidalnih automorfnih reprezentacija grupe $GL_1'(\mathbb{A})$ i određenih automorfnih reprezentacija grupe $GL_2(\mathbb{A})$. Precizniji iskaz Jacquet–Langlandsove korespondencije dan je u sljedeća dva teorema koji se mogu naći u poglavlju 8 u [10].

Teorem 2.2.1. (Lokalna Jacquet–Langlandsova korespodencija) *Neka je v nearhimedsko mjesto od k na kojem D nije rascjepiva. Tada postoji jedinstvena bijekcija*

$$\pi_v' \leftrightarrow \pi_v$$

između klasa izomorfnosti ireducibilnih dopustivih reprezentacija π'_v *grupe* $GL'_1(k_v) \cong D_v^\times$ *i klasa izomorfnosti ireducibilnih dopustivih kvadratno integrabilnih reprezentacija* π_v *grupe* $GL_2(k_v)$ *karakterizirana uvjetom na njihove karaktere*

$$\theta_{\pi'_v}(g') = -\theta_{\pi_v}(g)$$

za sve regularne poluproste elemente g' *i* g *od* $GL'_1(k_v)$ *i* $GL_2(k_v)$ *vezane uvjetom da im se karakteristični polinomi podudaraju.*

Na osnovu ovog teorema, za potrebe ove disertacije definiramo lokalni lift reprezentacija od $GL'_1(k_v)$.

Definicija 2.2.2. (Lokalni lift) Na nerascjepivom mjestu $v \in S$ lokalni lift reprezentacije π'_v grupe $GL'_1(k_v)$ je reprezentacija π_v grupe $GL_2(k_v)$ koja je s π'_v u Jacquet–Langlandsovoj korespodenciji.

Na rascjepivom mjestu $v \notin S$ je $GL'_1(k_v) \cong GL_2(k_v)$, pa je lokalni lift definiran naprosto kao $\pi_v \cong \pi'_v$.

Budući da grupa GL'_1 nema pravih paraboličkih podgrupa definiranih nad k, sve reprezentacije π'_v od $GL'_1(k_v)$ za nerascjepivo mjesto v su superkuspidalne. Ako je π'_v jednodimenzionalna, onda postoji karakter χ_v od $k_v^\times$ takav da je

$$\pi'_v \cong \chi_v \circ \det'_v.$$

U Jacquet–Langlandsovoj korespodenciji ova jednodimenzionalna reprezentacija odgovara Steinbergovoj reprezentaciji od $GL_2(k_v)$ zakrenutoj za χ_v koju označavamo sa St_{χ_v}. To je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)} \left(\chi_v|\cdot|^{1/2} \otimes \chi_v|\cdot|^{-1/2}\right).$$

Po prethodnoj definiciji St_{χ_v} je lokalni lift od $\chi_v \circ \det'_v$. Uočimo da će nas zapravo zanimati jedino unitarne reprezentacije od $GL'_1(k_v)$ jer su takve lokalne komponente kuspidalnih automorfnih reprezentacija. Za unitarnu jednodimenzionalnu reprezentaciju χ_v je unitarni karakter.

Teorem 2.2.3. (Globalna Jacquet–Langlandsova korespodencija) *Neka je* $\pi' \cong \otimes\pi'_v$ *kuspidalna automorfna reprezentacija grupe* $GL'_1(\mathbb{A})$ *koja nije jednodimenzionalna. Formiramo reprezentaciju* $\pi \cong \otimes_v \pi_v$ *grupe* $GL_2(\mathbb{A})$

pri čemu je na svim mjestima π_v lokalni lift od π'_v. Tada je π kuspidalna automorfna reprezentacija i preslikavanje

$$\pi' \mapsto \pi$$

je bijekcija između klasa izomorfnosti kuspidalnih automorfnih reprezentacija grupe $GL'_1(\mathbb{A})$ koje nisu jednodimenzionalne i klasa izomorfnosti kuspidalnih automorfnih reprezentacija grupe $GL_2(\mathbb{A})$ takvih da je lokalna komponenta π_v kvadratno integrabilna na svim mjestima $v \in S$.

Prije definicije globalnog lifta pogledajmo što se događa s jednodimenzionalnim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama od $GL'_1(\mathbb{A})$. Za takvu reprezentaciju π' postoji unitarni karakter χ od $\mathbb{A}^\times/k^\times$ takav da je

$$\pi' \cong \chi \circ \det'.$$

Pritom, ako je $\chi = \prod_v \chi_v$ dekompozicija karaktera χ, onda je

$$\chi \circ \det' \cong \otimes_v(\chi_v \circ \det'_v).$$

Htjeli bismo i u ovom slučaju definirati globalni lift koji će biti reprezentacija u diskretnom spektru od $GL_2(\mathbb{A})$. Međutim, koristeći lokalne liftove na svim mjestima ne dobiva se takva reprezentacija. Umjesto toga globalni lift definiramo na sljedeći način.

Definicija 2.2.4. (Globalni lift) Za kuspidalnu automorfnu reprezentaciju π' grupe $GL'_1(\mathbb{A})$ koja nije jednodimenzionalna globalni lift je kuspidalna automorfna reprezentacija π grupe $GL_2(\mathbb{A})$ iz prethodnog teorema.

Za jednodimenzionalnu kuspidalnu automorfnu reprezentaciju $\chi \circ \det'$ grupe $GL'_1(\mathbb{A})$ globalni lift je rezidualna automorfna reprezentacija

$$\chi \circ \det \cong \otimes_v(\chi_v \circ \det_v)$$

grupe $GL_2(\mathbb{A})$. Naglasimo da u ovom slučaju globalni lift nije kompatibilan s lokalnim liftovima.

Time smo definirali lokalni i globalni lift reprezentacija grupe GL'_1 na rascjepivu grupu GL_2. Za Levijev faktor $M'_0 \cong GL'_1 \times GL'_1$ lokalni i globalni lift na $M_0 \cong GL_2 \times GL_2$ definiran je koristeći lokalni i globalni lift za GL'_1 na svakoj kopiji posebno.

2.2.2 Langlandsova klasifikacija i slutnja o standardnom modulu

Sljedeća tema je Langlandsova klasifikacija za hermitske kvaternionske grupe G'_n. Rezultati su potpuno analogni Langlandsovoj klasifikaciji za rascjepive grupe i mogu se naći u poglavlju 4.1 u [20].

Teorem 2.2.5. (Langlandsova klasifikacija za G'_n) *Neka je $v \in S$ nearhimedsko mjesto od k na kojem D nije rascjepiva. Za svaku paraboličku padgrupu $P' = M'N'$ od G'_n induciranu reprezentaciju*

$$I(\underline{s}, \tau'_v)$$

zovemo standardni modul ako je $\underline{s}$ u pozitivnoj Weylovoj komori, a τ'_v (unitarna) temperirana reprezentacija od $M'(k_v)$. Svaki standardni modul ima jedinstvenu maksimalnu podreprezentaciju koja je jezgra standardnog operatora isprepletanja

$$A(\underline{s}, \tau'_v, w)$$

za najdulji element w Weylove grupe modulo M'. Slika tog operatora je stoga izomorfna jedinstvenom ireducibilnom kvocijentu standardnog modula kojeg zovemo Langlandsov kvocijent.

Za svaku ireducibilnu dopustivu reprezentaciju π'_v grupe G'_n postoji standardni modul čiji je Langlandsov kvocijent izomorfan s π'_v.

Paraboličke podgrupe od G'_n imaju Levijeve faktore oblika

$$GL'_{n_1} \times \ldots \times GL'_{n_k} \times G'_m,$$

gdje je $n_1 + \ldots + n_k + m = n$, $n_i \geqslant 1$ i $m \geqslant 0$. Stoga je temperirana reprezentacija Levijevog faktora tenzorski produkt temperiranih reprezentacija grupa $GL'_{n_i}(k_v)$ i $G'_m(k_v)$. Kao i u rascjepivom slučaju temperirana reprezentacija grupe $GL'_{n_i}(k_v)$ je puna inducirana reprezentacija s kvadratno integrabilne reprezentacije, pa se Langlandsova klasifikacija može iskazati koristeći kvadratno integrabilne reprezentacije grupa $GL'_{n_i}(k_v)$. Tada umjesto uvjeta da je $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ u pozitivnoj Weylovoj komori dovoljan je slabiji uvjet koji dozvoljava nekoliko uzastopnih jednakih realnih dijelova $Re(s_i)$.

Slutnja o standardnom modulu za rascjepive klasične grupe dokazana je u [58] za arhimedski slučaj te u [6] i [46] za nearhimedski slučaj. Ona daje odgovor na pitanje kad je Langlandsov kvocijent standardnog modula generičke temperirane reprezentacije Levijevog faktora također generička reprezentacija. Pritom je standardni modul za rascjepive grupe definiran na isti način kao za G'_n u teoremu 2.2.5. Definicija generičkih reprezentacija može se naći u poglavljima 1.3 i 4.1 u [14].

Teorem 2.2.6. (Slutnja o standardnom modulu) *Neka je ψ_v netrivijalni neprekidni aditivni karakter od k_v. Neka je G rascjepiva klasična grupa definirana nad k i τ_v temperirana ψ_v–generička reprezentacija od $G(k_v)$. Tada je Langlandsov kvocijent standardnog modula $I(\underline{s}, \tau_v)$ također ψ_v–generička reprezentacija ako i samo ako je standardni modul ireducibilan.*

2.2.3 Leme o induciranim reprezentacijama

Navedimo sada nekoliko lema o induciranim reprezentacijama i ispreplitanjima koje ćemo koristiti u sljedećim poglavljima.

Lema 2.2.7. *Neka je $P = MN$ maksimalna prava parabolička podgrupa reduktivne grupe G definirane nad k. Neka je π_v ireducibilna temperirana reprezentacija od $M(k_v)$. Tada su kompozicioni nizovi induciranih reprezentacija*

$$I(s, \pi_v) \quad i \quad I(-s, w_0(\pi_v))$$

jednaki za sve $s \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, gdje je w_0 jedinstveni netrivijalni element Weylove grupe modulo M.

Dokaz. Za s na imaginarnoj osi obje reprezentacije $I(s, \pi_v)$ i $I(-s, w_0(\pi_v))$ su ireducibilne osim u diskretnom podskupu imaginarne osi. Za takve s operator ispreplitanja $A(s, \pi_v, w_0)$ je izomorfizam, pa su karakteri tih induciranih reprezentacija jednaki. Analitičkim produljenjem dobivamo jednakost karaktera za sve $s \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, pa reprezentacije $I(s, \pi_v)$ i $I(-s, w_0(\pi_v))$ imaju jednake kompozicione nizove. $\square$

Lema 2.2.8. *Neka je G reduktivna grupa definirana nad k te σ_v ireducibilna dopustiva reprezentacija od $G(k_v)$. Tada svaki operator ispreplitanja*

$$A : \sigma_v \to \sigma_v$$

djeluje množenjem skalarom. Nadalje, ako je A^2 identiteta onda je taj skalar jednak 1 ili -1.

Dokaz. Neka je V prostor reprezentacije σ_v. Za nearhimedsko mjesto v, zbog dopustivosti reprezentacije σ_v, postoji otvorena kompaktna podgrupa K od $G(k_v)$ takva da je prostor K–invarijanata V^K konačnodimenzionalan i netrivijalan. Operator ispreplitanja A ima svojstvenu vrijednost η_v na V^K. Stoga operator ispreplitanja $A - \eta_v Id_v$ ima netrivijalnu jezgru. Budući da je σ_v ireducibilna, $A - \eta_v Id_v$ je nuloperator pa je $A = \eta_v Id_v$.

Za arhimedsko mjesto v, zbog dopustivosti reprezentacije σ_v, svi K_v–izotipovi su konačnodimenzionalni, gdje je K_v maksimalna kompaktna podgrupa od $G(k_v)$. Operator ispreplitanja A ima svojstvenu vrijednost η_v na netrivijalnom K_v–izotipu pa je ostatak dokaza jednak kao u nearhimedskom slučaju.

Na kraju, iz $A^2 = Id_v$ slijedi $\eta_v^2 = 1$, odnosno $\eta_v \in \{\pm 1\}$. $\square$

Lema 2.2.9. *Neka je v nearhimedsko mjesto na kojem D nije rascjepiva te neka su $\pi'_{1,v}$ i $\pi'_{2,v}$ ireducibilne unitarne reprezentacije od $GL'_1(k_v)$. Tada je inducirana reprezentacija*

$$\mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v)\times GL'_1(k_v)}^{GL'_2(k_v)} \left(\pi'_{1,v} \otimes \pi'_{2,v}\right)$$

ireducibilna.

Neka je v mjesto na kojem je D rascjepiva. Neka su χ_v, $\chi_{1,v}$ i $\chi_{2,v}$ unitarni karakteri od $k_v^\times$, $\pi_{1,v}$ i $\pi_{2,v}$ ireducibilne unitarne reprezentacije grupe $GL_2(k_v)$ te τ_v generička temperirana reprezentacija grupe $GL_2(k_v)$. Tada su inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)} \left(\chi_{1,v}|\cdot|^{\alpha_1} \otimes \chi_{2,v}|\cdot|^{\alpha_2}\right),$$
$$\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)\times GL_2(k_v)}^{GL_4(k_v)} \left(\pi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}\right),$$
$$\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_2(k_v)}^{GL_3(k_v)} \left(\chi_{1,v}|\cdot|^{1/2} \otimes (\chi_{2,v}\circ \det{}_v)\right),$$
$$\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_2(k_v)}^{GL_3(k_v)} \left(\chi_{1,v}|\cdot|^{\beta} \otimes \tau_v\right)$$

ireducibilne, gdje su α_1, α_2 i β realni brojevi za koje vrijedi

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < 1,$$
$$|\beta| \leqslant 1/2.$$

Dokaz. Za nearhimedsko mjesto v na kojem D nije rascjepiva, $\pi'_{1,v}$ i $\pi'_{2,v}$ su superkuspidalne pa ireducibilnost slijedi iz teorema B.2.d u [7]. Općenitije rezultate za GL_n na nerascjepivom mjestu može se naći u [55]. Na arhimedskim mjestima ireducibilnost svih induciranih reprezentacija slijedi iz rezultata u [54], a na rascjepivim nearhimedskim mjestima iz [3]. $\square$

2.2.4 Reprezentacije grupe $G_1'(k_v)$

Na kraju ovog poglavlja ostaje promotriti inducirane reprezentacije grupe $G_1'(k_v)$ na rascjepivim i nerascjepivim mjestima. Pritom koristimo matričnu realizaciju grupe $G_1'(k_v)$ iz poglavlja 2.1.3. i oznake koje su tamo uvedene.

Lema 2.2.10. *Neka je π_v' ireducibilna reprezentacija grupe $G_1'(k_v)$. Tada se restrikcija od π_v' na podgrupu $SL_1'^{(1)}(k_v)SL_2^{(2)}(k_v)$ dekomponira u*

$$\pi_v'\Big|_{SL_1'^{(1)}(k_v)SL_2^{(2)}(k_v)} \quad \cong \quad \bigoplus_{\gamma_v'\in\Gamma_v'} \left(\sigma_{1,v}'^{\gamma_v'} \otimes \sigma_{2,v}^{\gamma_v'}\right),$$

gdje je $\sigma_{1,v}' \otimes \sigma_{2,v}$ proizvoljna ireducibilna podreprezentacija u toj restrikciji, a $\sigma_{i,v}^{\gamma_v'}$ označava reprezentaciju

$$\sigma_{i,v}^{\gamma_v'}(g) = \sigma_{i,v}(\gamma_v'^{-1} g \gamma_v').$$

Skup Γ_v' je podskup skupa svih predstavnika γ_v' koji ima svojstvo da među reprezentacijama

$$\sigma_{1,v}'^{\gamma_v'} \otimes \sigma_{2,v}^{\gamma_v'}$$

za $\gamma_v' \in \Gamma_v'$ nema izomorfnih.

Obratno, za ireducibilnu reprezentaciju

$$\sigma_{1,v}' \otimes \sigma_{2,v}$$

grupe $SL_1'^{(1)}(k_v)SL_2^{(2)}(k_v)$ postoji ireducibilna reprezentacija π_v' grupe $G_1'(k_v)$ takva da vrijedi

$$\sigma_{1,v}' \otimes \sigma_{2,v} \quad \subset \quad \pi_v'\Big|_{SL_1'^{(1)}(k_v)SL_2^{(2)}(k_v)}.$$

Takva reprezentacija π_v' je jedinstvena do na kvadratni karakter od $G_1'(k_v)$ koji je trivijalan na $SL_1'^{(1)}(k_v)SL_2^{(2)}(k_v)$.

Dokaz. Uzevši u obzir činjenice o konjugiranju elementima γ_v' u $G_1'(k_v)$ i $GL_1'(k_v)$ navedene na kraju poglavlja 2.1.3, ova lema se dokazuje na isti način kao leme 2.4, 2.5 i 2.8 u [36]. Slični rezultati za restrikciju s GL_n na SL_n mogu se naći u [56]. $\square$

Lema 2.2.11. *Neka je*

$$\pi'_v = \mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v)}^{G'_1(k_v)} \sigma'_v,$$

gdje je σ'_v ireducibilna unitarna reprezentacija grupe $GL'_1(k_v)$. Tada se, uz oznake iz prethodne leme 2.2.10, restrikcija od π'_v na $SL'^{(1)}_1(k_v)SL^{(2)}_2(k_v)$ dekomponira u

$$\pi'_v\Big|_{SL'^{(1)}_1(k_v)SL^{(2)}_2(k_v)} \cong \left(\bigoplus_{\gamma'_v \in \Gamma'_v} \tau'^{\gamma'_v}_v\right) \otimes \mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)}^{SL^{(2)}_2(k_v)} \omega_{\sigma'_v},$$

gdje je τ'_v podreprezentacija restrikcije od σ'_v s $GL'_1(k_v)$ na $SL'^{(1)}_1(k_v)$, a $\omega_{\sigma'_v}$ centralni karakter od σ'_v. Skup Γ'_v je podskup skupa svih predstavnika γ'_v koji ima svojstvo da među reprezentacijama $\tau_v^{\gamma'_v}$ za $\gamma'_v \in \Gamma'_v$ nema izomorfnih.

Stoga je π'_v ireducibilna ako je $\omega_{\sigma'_v}$ trivijalan, a inače je direktna suma dvaju ireducibilnih podreprezentacija koje nisu međusobno izomorfne.

Dokaz. Primjena Mackeyjeve teorije kao u Korolaru 5.3.4.2 u [60] na naš slučaj podgrupe konačnog indeksa daje

$$\left(\mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v)}^{G'_1(k_v)} \sigma'_v\right)\Big|_{SL'^{(1)}_1(k_v)SL^{(2)}_2(k_v)} \cong \mathrm{Ind}_{SL'^{(1)}_1(k_v)T^{(2)}(k_v)}^{SL'^{(1)}_1(k_v)SL^{(2)}_2(k_v)} \left(\sigma'_v\Big|_{SL'^{(1)}_1(k_v)T^{(2)}(k_v)}\right),$$

gdje je $T^{(2)}$ maksimalan rascjepivi torus u $SL^{(2)}_2$ te

$$SL'^{(1)}_1(k_v)T^{(2)}(k_v) \cong GL'_1(k_v) \cap SL'^{(1)}_1(k_v)SL^{(2)}_2(k_v).$$

U matričnoj realizaciji grupe $G'_1(k_v)$ iz poglavlja 2.1.3 je $SL'^{(1)}_1$ zapravo SL'_1 kao podgrupa Levijevog faktora GL'_1, a $T^{(2)}$ centar tog GL'_1. Stoga, koristeći rezultate za GL'_1 iz [36] analogne prethodnoj lemi 2.2.10, restrikcija na desnoj strani se dekomponira u konačnu direktnu sumu

$$\left(\bigoplus_{\gamma'_v \in \Gamma'_v} \tau'^{\gamma'_v}_v\right) \otimes \omega_{\sigma'_v},$$

gdje je τ'_v ireducibilna podreprezentacija restrikcije od σ'_v na $SL'^{(1)}_1$, a $\omega_{\sigma'_v}$ centralni karakter od σ'_v. Dakle,

$$\pi'_v\Big|_{SL'^{(1)}_1(k_v)SL^{(2)}_2(k_v)} \cong \left(\bigoplus_{\gamma'_v \in \Gamma'_v} \tau'^{\gamma'_v}_v\right) \otimes \mathrm{Ind}_{T^{(2)}(k_v)}^{SL^{(2)}_2(k_v)} \omega_{\sigma'_v}.$$

Na kraju, ako je $\omega_{\sigma'_v}$ trivijalan, onda je inducirana reprezentacija

$$\mathrm{Ind}_{T^{(2)}(k_v)}^{SL_2^{(2)}(k_v)} \omega_{\sigma'_v}$$

ireducibilna i restrikcija od π'_v postaje

$$\bigoplus_{\gamma'_v \in \Gamma'_v} \left(\tau_v'^{\gamma'_v} \otimes \mathrm{Ind}_{T^{(2)}(k_v)}^{SL_2^{(2)}(k_v)} \omega_{\sigma'_v} \right)$$

što je restrikcija ireducibilne reprezentacije od $G'_1(k_v)$. Ako pak $\omega_{\sigma'_v}$ nije trivijalan, onda se inducirana reprezentacija

$$\mathrm{Ind}_{T^{(2)}(k_v)}^{SL_2^{(2)}(k_v)} \omega_{\sigma'_v}$$

dekomponira u direktnu sumu dvaju ireducibilnih reprezentacija od $SL_2^{(2)}(k_v)$ koje su međusobno konjugirane nekim predstavnikom γ'_v. Označimo te direktne sumande τ^+ i τ^-. Tada se restrikcija od π'_v može zapisati kao

$$\left[\bigoplus_{\gamma'_v \in \Gamma'_v} \left(\tau_v'^{\gamma'_v} \otimes (\tau^+)^{\gamma'_v} \right) \right] \bigoplus \left[\bigoplus_{\gamma'_v \in \Gamma'_v} \left(\tau_v'^{\gamma'_v} \otimes (\tau^-)^{\gamma'_v} \right) \right].$$

Pritom je svaka uglata zagrada restrikcija ireducibilne reprezentacije grupe $G'_1(k_v)$. Stoga je u ovom slučaju π'_v direktna suma dvaju ireducibilnih reprezentacija koje nisu međusobno izomorfne. $\square$

Korolar 2.2.12. *Neka je v nearhimedsko mjesto od k gdje D nije rascjepiva i χ_v unitarni kvadratni karakter od $k_v^\times$. Tada je inducirana reprezentacija*

$$\mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v)}^{G'_1(k_v)} (\chi_v \circ \det'_v)$$

ireducibilna i temperirana.

Neka je v mjesto od k gdje je D rascjepiva i σ_v samokontragredijentna reprezentacija komplementarne serije od $GL_2(k_v)$. Tada je inducirana reprezentacija

$$\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)}^{SO_4(k_v)} \sigma_v$$

ireducibilna.

Dokaz. Centralni karakter reprezentacije $\chi_v \circ \det'_v$ je χ_v^2. Budući da je χ_v kvadratni karakter, χ_v^2 je trivijalan pa je prema prethodnoj lemi 2.2.11 prva inducirana reprezentacija iz korolara ireducibilna. Obzirom da je na nerascjepivom mjestu $\chi_v \circ \det'_v$ superkuspidalna reprezentacija od $GL'_1(k_v)$ ta inducirana reprezentacija je temperirana prema teoremu 5.2 u [19].

Samokontragredijentna reprezentacija komplementarne serije od $GL_2(k_v)$ je puna inducirana reprezentacija oblika

$$\sigma_v \cong \mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)} \left(\mu_v|\cdot|^r \otimes \mu_v|\cdot|^{-r}\right),$$

gdje je $0 < r < 1/2$ i μ_v kvadratni karakter od $k_v^\times$. Centralni karakter od σ_v je trivijalan jer je jednak μ_v^2 pa je druga inducirana reprezentacija iz korolara ireducibilna prema prethodnoj lemi 2.2.11. $\square$

Poglavlje 3

Normalizacija operatora ispreplitanja

Opća strategija za dekompoziciju rezidualnog spektra opisana u prvom poglavlju svodi račun na proučavanje polova određenih suma globalnih operatora ispreplitanja u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Ova disertacija bavi se dijelom rezidualnog spektra grupe G_2' koji dolazi od kuspidalnih automorfnih reprezentacija minimalne standardne paraboličke podgrupe. Stoga je cilj ovog poglavlja definirati skalarne meromorfne normalizacijske faktore za operatore ispreplitanja koji se javljaju u tom specijalnom slučaju. Osnovni zahtjev na normalizacijski faktor je da normalizirani operator ispreplitanja bude holomorfan i različit od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Time se proučavanje polova operatora ispreplitanja svodi na proučavanje polova skalarnih normalizacijskih faktora koji su definirani kao kvocijenti L–funkcija i ε–faktora čiji su polovi poznati.

Normalizacijski faktori se najprije definiraju za lokalne operatore ispreplitanja na svim mjestima od k i dokazuje se da su normalizirani lokalni operatori ispreplitanja holomorfni i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Moguća su tri različita slučaja. Prvi slučaj se odnosi na rascjepivo mjesto na kojem je lokalna komponenta kuspidalne automorfne reprezentacije Levijevog faktora generička. U tom slučaju za temperiranu generičku reprezentaciju normalizacija je provedena općenito za proizvoljnu paraboličku podgrupu rascjepive klasične grupe, a za netemperiranu generičku reprezentaciju samo u situaciji potrebnoj u ovoj disertaciji. Drugi slučaj odnosi se na rascjepivo mjesto na kojem lokalna komponenta kuspidalne automorfne reprezentacije Levijevog faktora nije generička. Najprije je dana opća ideja za definiciju normalizacijskih faktora u negeneričkom slučaju koja je zatim provedena u svim situacijama koje se javljaju u ovoj disertaciji. Treći slučaj odnosi se na nerascjepiva mjesta. Normalizacijski faktor je definiran samo u situacijama potrebnim za ovu disertaciju koristeći lokalni lift reprezentacija iz prethodnog poglavlja.

Globalni normalizacijski faktor je zatim definiran kao produkt lokalnih te se pokazuje da zadovoljava osnovni zahtjev holomorfnosti i različitosti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Za operatore ispreplitanja potrebne u računu rezidualnog spektra u sljedećem poglavlju globalni normalizacijski faktori eksplicitno su izračunati. Na samom kraju ovog poglavlja dana je lema o ireducibilnosti slike za neke lokalne normalizirane operatore ispreplitanja. Ona će omogućiti dokaze ireducibilnosti pojedinih dijelova rezidualnog spektra u sljedećem poglavlju.

3.1 Generički rascjepivi slučaj

U ovom poglavlju neka je G rascjepiva klasična grupa definirana nad lokalnim poljem k_v karakteristike nula. Najprije uvedimo oznake vezane uz njezinu strukturu, inducirane reprezentacije i operatore ispreplitanja.

Neka je T maksimalan rascjepivi torus od G i Φ skup korijena. Fiksirajmo Borelovu podgrupu B, a time i skup pozitivnih korijena Φ^+ te skup prostih korijena Δ. Neka je W Weylova grupa od (G, T). Za svaki pravi podskup θ od Δ neka je P_θ odgovarajuća standardna parabolička podgrupa s Levijevom dekompozicijom

$$P_\theta = M_\theta N_\theta,$$

gdje je M_θ Levijev faktor, a N_θ unipotentni radikal.

Neka $X(M_\theta)$ označava $\mathbb{Z}$–modul k_v–racionalnih karaktera od M_θ te

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_\theta &= Hom_{\mathbb{Z}}(X(M_\theta), \mathbb{R}), \\ \mathfrak{a}_\theta^* &= X(M_\theta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kompleksifikaciju od $\mathfrak{a}_\theta$ i $\mathfrak{a}_\theta^*$ označavamo s

$$\mathfrak{a}_{\theta,\mathbb{C}} \quad \text{i} \quad \mathfrak{a}_{\theta,\mathbb{C}}^*.$$

Koristeći prirodnu dualnost $\langle \cdot, \cdot \rangle$ od $\mathfrak{a}_{\theta,\mathbb{C}}^*$ i $\mathfrak{a}_{\theta,\mathbb{C}}$ definiramo Harish–Chandrin homomorfizam

$$H_{P_\theta} : M_\theta \to \mathfrak{a}_\theta$$

formulom
$$\exp\langle \chi, H_{P_\theta}(m)\rangle = |\chi(m)|_v$$
za sve racionalne karaktere $\chi \in X(M_\theta)$. Pritom exp u nearhimedskom slučaju označava eksponencijalnu funkciju s bazom q_v, gdje je q_v broj elemenata rezidualnog polja od k_v.

Kao u poglavlju 1.2, za ireducibilnu dopustivu reprezentaciju π_v Levijevog faktora $M_\theta(k_v)$ i $\underline{s} \in \mathfrak{a}^*_{\theta,\mathbb{C}}$ definiramo induciranu reprezentaciju
$$I(\underline{s}, \pi_v) = \mathrm{Ind}_{M_\theta(k_v)}^{G(k_v)} \left(\pi_v \otimes \exp\langle \underline{s}, H_{P_\theta}(\cdot)\rangle\right),$$
te za svaki $w \in W$ takav da je $w(\theta) \subset \Delta$ standarne operatore ispreplitanja integralom
$$A(\underline{s}, \pi_v, w) f_{\underline{s},v}(g) = \int_{U(k_v)\cap w\overline{N}_\theta(k_v)w^{-1}} f_{\underline{s},v}(w^{-1}ng)dn, \tag{3.1}$$
gdje je $f_{\underline{s},v}$ u prostoru inducirane reprezentacije $I(\underline{s}, \pi_v)$, $\overline{N}_\theta$ unipotentni radikal suprotne paraboličke podgrupe od P_θ i U unipotentni radikal Borelove podgrupe. Pritom, fiksirana Haarova mjera dn na $N_\theta(k_v)$ je odabrana kao u poglavlju 2 u [47]. Ovisnost $f_{\underline{s},v}$ o $\underline{s}$ se dobiva koristeći kompaktnu sliku kao u poglavlju II.1 u [44]. Za operator ispreplitanja vrijedi propozicija 1.2.3 pa se analitičkim produljenjem integrala iz definicije dobiva meromorfni operator ispreplitanja koji izvan polova ispreplića reprezentacije $I(\underline{s}, \pi_v)$ i $I(w(\underline{s}), w(\pi_v))$.

Neka je r_θ adjungirana reprezentacija Langlandsove dualne L–grupe od M_θ na Liejevoj algebri L–grupe od N_θ. Tada se r_θ potpuno reducira i neka je
$$r_\theta = r_1 \oplus \ldots \oplus r_\ell,$$
njezina dekompozicija u sumu ireducibilnih reprezentacija.

Prvi korak u definiciji normalizacijskih faktora je slučaj maksimalne prave paraboličke podgrupe. Neka je
$$P = P_{\Delta\setminus\{\alpha\}} = MN$$
Levijeva dekompozicija maksimalne prave standardne paraboličke podgrupe od G, gdje je α prosti korijen. Tada je, osim za $G = GL_n$, odgovarajući prostor $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ jednodimenzionalan. U svakom slučaju neka je
$$\widetilde{\alpha} = \langle \rho_P, \alpha^\vee\rangle^{-1}\rho_P,$$

gdje je ρ_P polovina sume pozitivnih korijena od G koji nisu korijeni od M. Za $s \in \mathbb{C}$ pišemo kraće

$$s\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha} \otimes s$$

U slučaju maksimalne prave standardne paraboličke podgrupe od GL_n s Levijevim faktorom izomorfnim $GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ prostor $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ je dvodimenzionalan. Ipak, tenzoriranje s pogodnom potencijom apsolutne vrijednosti determinante svodi proučavanje operatora ispreplitanja na jednodimenzionalan potprostor

$$s\widetilde{\alpha} = \langle \underline{s}, \alpha^\vee \rangle \widetilde{\alpha}$$

od $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Uočimo da u slučaju maksimalne paraboličke podgrupe postoji najviše jedan netrivijalni element $w \in W$ takav da je $w(\Delta \setminus \{\alpha\}) \subset \Delta$. Tada je

$$w(s\widetilde{\alpha}) = -s\widetilde{\alpha}.$$

Neka je ψ_v netrivijalni neprekidni aditivni karakter od k_v. Za ψ_v–generičku reprezentaciju π_v Levijevog faktora $M(k_v)$ maksimalne paraboličke podgrupe normalizacijski faktor definiramo formulom

$$r(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{L(is, \pi_v, r_i)}{L(1 + is, \pi_v, r_i)\varepsilon(is, \pi_v, r_i, \psi_v)} \tag{3.2}$$

za $s \in \mathbb{C}$. Pritom su L–funkcije i ε–faktori na desnoj strani definirani u poglavlju 7 u [52]. Normalizirani operator ispreplitanja $N(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)$ se tada definira kao

$$N(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w) = r(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)^{-1} A(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w). \tag{3.3}$$

U sljedećoj propoziciji dokazuje se da je za ireducibilnu ψ_v–generičku temperiranu reprezentaciju π_v normalizirani operator ispreplitanja holomorfan i različit od nule u otvorenom skupu malo većem od zatvarača pozitivne Weylove komore.

Propozicija 3.1.1. *Neka je $P = MN$ maksimalna prava standardna parabolička podgrupa od G pridružena podskupu $\Delta \setminus \{\alpha\}$ skupa prostih korijena te w jedinstveni netrivijalni element Weylove grupe W takav da je $w(\Delta \setminus \{\alpha\}) \subset \Delta$. Neka je π_v ireducibilna ψ_v–generička temperirana reprezentacija od $M(k_v)$. Tada je normalizirani operator ispreplitanja*

$$N(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)$$

holomorfan i različit od nule za

$$Re(s) > -1/\ell$$

gdje je ℓ duljina adjungirane reprezentacije $r_{\Delta\setminus\{\alpha\}}$.

Dokaz. Iz definicije normalizacijskog faktora (3.2) i normaliziranog operatora ispreplitanja (3.3) slijedi da treba dokazati da je

$$N(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{L(1+is, \pi_v, r_i)\varepsilon(is, \pi_v, r_i, \psi_v)}{L(is, \pi_v, r_i)} A(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w) \tag{3.4}$$

holomorfan i različit od nule za $Re(s) > -1/\ell$. Međutim, za ψ_v–generičku temperiranu reprezentaciju lokalna L–funkcija $L(s, \pi_v, r_i)$ je holomorfna za $Re(s) > 0$ prema poglavlju 3 u [2] u arhimedskom te poglavlju 4 u [6] u nearhimedskom slučaju. Stoga je L–funkcija u brojniku $L(1+is, \pi_v, r_i)$ holomorfna za $Re(s) > -1/\ell$. Budući da lokalne L–funkcije nemaju nultočki, a ε–faktori ni nultočki ni polova, izraz (3.4) je holomorfan i različit od nule za $Re(s) > -1/\ell$ ako i samo ako je

$$\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{L(is, \pi_v, r_i)} A(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w) \tag{3.5}$$

holomorfan i različit od nule za $Re(s) > -1/\ell$.

Za $Re(s) > 0$ i temperiranu reprezentaciju π_v operator ispreplitanja $A(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)$ je dugi operator ipreplitanja Langlandsove klasifikacije pa je holomorfan i različit od nule. Lokalne L–funkcije $L(is, \pi_v, r_i)$ su holomorfne za $Re(s) > 0$ i nemaju nultočki. Stoga je izraz (3.5) holomorfan i različit od nule za $Re(s) > 0$.

Po definiciji Plancherelove mjere

$$A(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1})A(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w) = \mu(s\widetilde{\alpha}, \pi_v)^{-1},$$

a prema formulama (3.6) i (7.4) u [52] Plancherelova mjera od π_v se može zapisati pomoću L–funkcija i ε–faktora kao

$$\begin{aligned} \mu(s\widetilde{\alpha}, \pi_v) &= \prod_{i=1}^{\ell} \frac{\varepsilon(is, \pi_v, r_i, \psi_v)L(1-is, w(\pi_v), r_i)}{L(is, \pi_v, r_i)} \cdot \\ &\cdot \prod_{i=1}^{\ell} \frac{\varepsilon(-is, w(\pi_v), r_i, \psi_v)L(1+is, \pi_v, r_i)}{L(-is, w(\pi_v), r_i)} = \\ &= r(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)^{-1} r(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Stoga za normalizirane operatore ispreplitanja vrijedi

$$N(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1})N(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w) = 1.$$

Prema poglavlju 3 u [2] u arhimedskom i poglavlju 2.4 u [51] u nearhimedskom slučaju hermitski dual normaliziranog operatora ispreplitanja za $Re(s) = 0$ je jednak

$$N(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)^* = N(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1}).$$

U nearhimedskom slučaju, budući da je π_v dopustiva, prostor K–invarijanata za svaki otvorenu kompaktnu podgrupu K od $G(k_v)$ je konačnodimenzionalan i za dovoljno male K netrivijalan. Tada je restrikcija od $N(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)$ na svaki takav konačnodimenzionalan potprostor unitaran operator. Posebno, ograničen je i operatorska norma mu je najviše jedan. Uzimajući sve manju i manju otvorenu kompaktnu podgrupu K dobivamo holomorfnost normaliziranog operatora ispreplitanja za $Re(s) = 0$. U arhimedskom slučaju, budući da je π_v dopustiva, svaki K_v–izotip za maksimalnu kompaktnu podgrupu K_v je konačnodimenzionalan pa holomorfnost za $Re(s) = 0$ slijedi iz unitarnosti na svakom K_v–izotipu. U oba slučaja različitost od nule je posljedica holomorfnosti po lemi 1.7 u [33].

Na kraju, neka je $-1/\ell < Re(s) < 0$. Tada je $Re(-s) > 0$ odnosno $-s\widetilde{\alpha}$ je u pozitivnoj Weylovoj komori. Podsjetimo se definicije Shahidijevih lokalnih koeficijenata (formula (1.2) u [52]). Za ψ_v–generičku reprezentaciju π_v inducirana reprezentacija $I(s\widetilde{\alpha}, \pi_v)$ je ψ_v–generička i ima kanonski Whittakerov funkcional kojeg označavamo s $\lambda(s\widetilde{\alpha}, \pi_v)$. Na isti način inducirana reprezentacija $I(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v))$ ima svoj kanonski Whittakerov funkcional kojeg označavamo $\lambda(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v))$. Tada je kompozicija

$$\lambda(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v))A(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)$$

također Whittakerov funkcional za $I(s\widetilde{\alpha}, \pi_v)$. Zbog jedinstvenosti Whittakerovog funkcionala do na skalar, postoji meromorfna funkcija $C(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)$ od s koju zovemo lokalni koeficijent i definiramo uvjetom

$$\lambda(s\widetilde{\alpha}, \pi_v) = C(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)\lambda(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v))A(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w). \tag{3.6}$$

Teorem 3.5 u [52] daje formulu za lokalni koeficijent u slučaju maksimalne paraboličke podgrupe pomoću L–funkcija i ε–faktora

$$C(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{L(1 - is, \widetilde{\pi}_v, r_i)\varepsilon(is, \pi_v, r_i, \psi_v)}{L(is, \pi_v, r_i)}. \tag{3.7}$$

Formula (3.6) za reprezentaciju $I(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v))$ postaje

$$\lambda(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v)) = C(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1})\lambda(s\widetilde{\alpha}, \pi_v)A(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1}) \qquad (3.8)$$

a po formuli (3.7) lokalni koeficijent je jednak

$$C(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1}) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{L(1+is, w(\widetilde{\pi}_v), r_i)\varepsilon(-is, w(\pi_v), r_i, \psi_v)}{L(-is, w(\pi_v), r_i)}. \qquad (3.9)$$

Lokalne L–funkcije u formuli (3.9) su holomorfne za $-1/\ell < Re(s) < 0$ jer je $Re(1+is) > 0$ i $Re(-is) > 0$. Stoga je lokalni koeficijent $C(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1})$ holomorfan i različit od nule.

Za $-1/\ell < Re(s) < 0$ operator ispreplitanja $A(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1})$ je dugi operator ispreplitanja Langlandsove klasifikacije pa je holomorfan i slika mu je izomorfna Langlandsovom kvocijentu standardnog modula $I(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v))$. Budući da je Whittakerov funkcional $\lambda(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v))$ na lijevoj strani jednakosti (3.8) različit od nule, Whittakerov funkcional

$$\lambda(s\widetilde{\alpha}, \pi_v)A(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1})$$

je također netrivijalan Whittakerov funkcional. Time smo pokazali da je Langlandsov kvocijent standardnog modula $I(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v))$ isto ψ_v–generička reprezentacija. Ali prema slutnji o standardnom modulu iz teorema 2.2.6, ako je Langlandsov kvocijent ψ_v–generički, onda je standardni modul ireducibilan. Dakle, $I(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v))$ je ireducibilna. Tada, po lemi 2.2.7, $I(s\widetilde{\alpha}, \pi_v)$ je također ireducibilna.

Sada, budući da je $I(s\widetilde{\alpha}, \pi_v)$ ireduciblna i $\lambda(s\widetilde{\alpha}, \pi_v)$ holomorfan i različit od nule za $-1/\ell < Re(s) < 0$, iz jednakosti (3.6) zaključujemo da je red mogućeg pola od $A(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)$ jednak redu nultočke od $C(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)$. Ali brojnik u (3.7) je holomorfan za $Re(s) < 0$ i različit od nule. Stoga je red nultočke lokalnog koeficijenta jednak redu nultočke izraza

$$\prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{L(is, \pi_v, r_i)}$$

čime je i za $-1/\ell < Re(s) < 0$ dokazana holomorfnost i različitost od nule izraza (3.5). $\square$

Sljedeći korak u definiciji normalizacijskog faktora je slučaj proizvoljne standardne prave paraboličke podgrupe

$$P_\theta = M_\theta N_\theta$$

i ψ_v–generičke reprezentacije π_v Levijevog faktora $M(k_v)$. Normalizacija se bazira na dekompoziciji iz poglavlja 2.1 u [51] operatora ispreplitanja $A(\underline{s}, \pi_v, w)$ na kompoziciju operatora ispreplitanja za maksimalne prave paraboličke podgrupe.

Propozicija 3.1.2. *Za $\theta \subset \Delta$ i $w \in W$ takav da je $w(\theta) \subset \Delta$ postoje prosti korijeni*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

sa sljedećim svojstvom: ako definiramo niz

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1} = w(\theta)$$

podskupova skupa prostih korijena Δ i niz

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

elemenata Weylove grupe W induktivno s

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta, \\ w_i &= \textit{jedinstveni netrivijalni element Weylove grupe} \\ &\ \textit{od } M_{\theta_i \cup \{\alpha_i\}} \textit{ takav da je } w_i(\theta_i) \subset \theta_i \cup \{\alpha_i\}, \\ \theta_{i+1} &= w_i(\theta_i), \end{aligned}$$

onda vrijedi

(1) *$w = w_n w_{n-1} \ldots w_1$ i n je duljina od w,*

(2) $A(\underline{s}, \pi_v, w) = A(\underline{s}_n, \pi_{v,n}, w_n) \ldots A(\underline{s}_2, \pi_{v,2}, w_2) A(\underline{s}, \pi_v, w_1)$
gdje je $\underline{s}_i = w_{i-1}(\underline{s}_{i-1})$, $\pi_{v,i} = w_{i-1}(\pi_{v,i-1})$ za $i \geqslant 2$, te $\underline{s}_1 = \underline{s}$, $\pi_{v,1} = \pi_v$.

Dokaz. Osim u poglavlju 2.1 u [51], dokaz se može naći u poglavljima I.1.8. i IV.4.1. u [44]. $\square$

Uočimo da je svaki $A(\underline{s}_i, \pi_{v,i}, w_i)$ operator ispreplitanja za slučaj maksimalne paraboličke podgrupe s Levijevim faktorom

$$M_{\theta_i} \subset M_{\theta_i \cup \{\alpha_i\}}.$$

Odgovarajući $s \in \mathbb{C}$ je jednak $\langle \underline{s}_i, \alpha_i^\vee \rangle$. Nadalje, neka je $\Phi^+_{\theta,w}$ podskup skupa pozitivnih korijena modulo komponenta povezanosti jedinice u centru od M_θ definiran kao

$$\Phi^+_{\theta,w} = \{\alpha \in \Phi^+ : w\alpha < 0\}.$$

Tada se $\Phi^+_{\theta,w}$ sastoji od točno n elemenata

$$\Phi^+_{\theta,w} = \{\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = w_1^{-1}\alpha_2, \ldots, \beta_n = (w_{n-1} \ldots w_1)^{-1}\alpha_n\}$$

i pritom

$$\langle \underline{s}_i, \alpha_i^\vee \rangle = \langle \underline{s}, \beta_i^\vee \rangle.$$

Stoga normalizacijski faktor operatora ispreplitanja $A(\underline{s}, \pi_v, w)$ definiramo u skladu s dekompozicijom iz propozicije 3.1.2 formulom

$$r(\underline{s}, \pi_v, w) = \prod_{i=1}^{n} r(\langle \underline{s}_i, \alpha_i^\vee \rangle \widetilde{\alpha}_i, \pi_{v,i}, w_i), \tag{3.10}$$

a normalizirani operator ispreplitanja kao

$$N(\underline{s}, \pi_v, w) = r(\underline{s}, \pi_v, w)^{-1} A(\underline{s}, \pi_v, w). \tag{3.11}$$

Po poglavlju 3 u [2] u arhimedskom i teoremu 7.9 u [52] u nearhimedskom slučaju, za normalizirane operatore ispreplitanja vrijedi dekompozicija

$$N(\underline{s}, \pi_v, w) = N(w'(\underline{s}), w'(\pi_v), w'')N(\underline{s}, \pi_v, w'), \tag{3.12}$$

gdje je $w = w''w'$ rastav elementa w Weylove grupe koji ne mora biti reduciran. U sljedećoj propoziciji dokazujemo da je za ψ_v–generičku temperiranu reprezentaciju π_v Levijevog faktora $M_\theta(k_v)$ proizvoljne paraboličke podgrupe normalizirani operator ispreplitanja (3.11) holomorfan i različit od nule u otvorenom skupu malo većem od zatvarača pozitivne Weylove komore.

Propozicija 3.1.3. *Neka je $P_\theta = M_\theta N_\theta$ prava standardna parabolička podgrupa od G i w element Weylove grupe W takav da je $w(\theta) \subset \Delta$. Neka je*

π_v ireducibilna ψ_v–generička temperirana reprezentacija od $M_\theta(k_v)$. Tada je normalizirani operator ispreplitanja

$$N(\underline{s}, \pi_v, w)$$

holomorfan i različit od nule za $\underline{s} \in \mathfrak{a}^*_{\theta,\mathbb{C}}$ takve da je

$$\langle Re(\underline{s}), \alpha^\vee \rangle > -1/\ell_\alpha$$

za sve $\alpha \in \Phi^+_{w,\theta}$, gdje je ℓ_α duljina odgovarajuće adjungirane reprezentacije r_α u dekompoziciji iz propozicije 3.1.2.

Dokaz. Normalizirani operator ispreplitanja $N(\underline{s}, \pi_v, w)$ se dekomponira u skladu s rastavom $w = w_n \dots w_1$ iz propozicije 3.1.2 u kompoziciju

$$N(\underline{s}, \pi_v, w) = N(\underline{s}_n, \pi_{v,n}, w_n) \dots N(\underline{s}_2, \pi_{v,2}, w_2) N(\underline{s}, \pi_v, w_1).$$

Da bi dokazali holomorfnost dovoljno je dokazati holomorfnost svakog faktora. Faktori su normalizirani operatori ispreplitanja u slučaju maksimalnih paraboličkih podgrupa za

$$\langle \underline{s}_i, \alpha_i^\vee \rangle \widetilde{\alpha}_i = \langle \underline{s}, \beta_i^\vee \rangle \widetilde{\alpha}_i$$

gdje je $\widetilde{\alpha}_i$ odgovarajući element od $\mathfrak{a}^*_{\theta_i,\mathbb{C}}$. Budući da je $\Phi^+_{\theta,w} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, holomorfnost za $\underline{s} \in \mathfrak{a}^*_{\theta,\mathbb{C}}$ takve da je

$$\langle Re(\underline{s}), \alpha^\vee \rangle > -1/\ell_\alpha$$

za sve $\alpha \in \Phi^+_{w,\theta}$ slijedi iz propozicije 3.1.1. Različitost od nule je posljedica holomorfnosti po lemi 1.7 u [33]. $\square$

Na kraju ostaje promotriti slučaj unitarne ψ_v–generičke reprezentacije koja nije temperirana. To ćemo napraviti za reprezentacije $\pi_v \cong \pi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}$ Levijevog faktora $M_0(k_v) \cong GL_2(k_v) \times GL_2(k_v)$ u rascjepivoj grupi $SO_8(k_v)$ jer će nam samo ta situacija biti potrebna za račun u sljedećem poglavlju. Podsjetimo da smo na kraju poglavlja 2.1.2 fiksirali baze prostora $\mathfrak{a}^*_{\theta,\mathbb{C}}$ za rascjepivu klasičnu grupu i to uzevši za bazu determinantu na svakoj od grupa GL_m u M_θ. Stoga $\underline{s} = (s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M_0,\mathbb{C}}$ odgovara karakteru

$$(g_1, g_2) \mapsto \nu^{s_1}(g_1)\nu^{s_2}(g_2).$$

Propozicija 3.1.4. *Neka je $P_0 = M_0 N_0$ standardna parabolička podgrupa rascjepive grupe SO_8 s Levijevim faktorom M_0 izomorfnim $GL_2 \times GL_2$. Neka je $\pi_v \cong \pi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}$ generička unitarna reprezentacija od $M_0(k_v)$ koja nije temperirana. Tada je, za svaki $w \in W(M_0)$, normalizirani operator ispreplitanja*

$$N(\underline{s}, \pi_v, w)$$

holomorfan i različit od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore, odnosno za $\underline{s} = (s_1, s_2)$ takve da je

$$Re(s_1) \geqslant Re(s_2) \geqslant 0.$$

Dokaz. Unitarna generička reprezentacija $\pi_{i,v}$ od $GL_2(k_v)$ koja nije temperirana je reprezentacija komplementarne serije, odnosno puna inducirana reprezentacija oblika

$$\pi_{i,v} \cong \mathrm{Ind}_{GL_1(k_v) \times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)} (\mu_{i,v} |\cdot|^{r_i} \otimes \mu_{i,v} |\cdot|^{-r_i}),$$

gdje je $\mu_{i,v}$ unitarni karakter od $GL_1(k_v)$ i $0 < r_i < 1/2$. Budući da su operatori ispreplitanja kompatibilni s induciranjem u koracima problem holomorfnosti i različitosti od nule svodi se na temperirani slučaj.

Točnije, postoji temperirana reprezentacija τ_v jednog od Levijevih faktora $GL_1(k_v) \times GL_1(k_v) \times GL_2(k_v)$, $GL_2(k_v) \times GL_1(k_v) \times GL_1(k_v)$, $GL_1(k_v) \times GL_1(k_v) \times GL_1(k_v) \times GL_1(k_v)$, te element $\underline{s}'$ odgovarajućeg prostora $\mathfrak{a}^*_{\theta', \mathbb{C}}$ takvi da je

$$I(\underline{s}, \pi_v) \cong I(\underline{s}', \tau_v).$$

Stoga je $N(\underline{s}, \pi_v, w)$ holomorfan i različit od nule ako i samo ako je $N(\underline{s}', \tau_v, w)$ holomorfan i različit od nule. Ako je $\underline{s} = (s_1, s_2)$, onda je u tri moguća slučaja

$$\underline{s}' = \begin{cases} (s_1 + r_1, s_1 - r_1, s_2), \\ (s_1, s_2 + r_2, s_2 - r_2), \\ (s_1 + r_1, s_1 - r_1, s_2 + r_2, s_2 - r_2), \end{cases}$$

gdje je $0 < r_i < 1/2$. Budući da su sve adjungirane reprezentacije r_α u tri slučaja ireducibilne, prema propoziciji 3.1.3, dovoljno je provjeriti da ako vrijedi $Re(s_1) \geqslant Re(s_2) \geqslant 0$, onda je

$$\langle Re(\underline{s}'), \beta^\vee \rangle > -1$$

za sve $\beta \in \Phi^+_{\theta,w}$. Provjerom slučaj po slučaj koristeći ocjenu $0 < r_i < 1/2$ vidimo da su sve te nejednakosti ispunjene. $\square$

Time smo definirali normalizacijske faktore i dokazali holomorfnost i različitost od nule normaliziranih operatora ispreplitanja u zatvaraču pozitivne Weylove komore za sve generičke unitarne reprezentacije Levijevog faktora $M_0(k_v) \cong GL_2(k_v) \times GL_2(k_v)$ rascjepive grupe $SO_8(k_v)$. Uočimo da ako je π' kuspidalna automorfna reprezentacija od $M_0'(\mathbb{A})$ čiji je globalni lift kuspidalna automorfna reprezentacija π od $M_0(\mathbb{A})$, onda je na svim rascjepivim mjestima $v \notin S$ reprezentacija $\pi_v \cong \pi_v'$ generička. To je posljedica činjenice iz [53] i [49] koja kaže da su sve lokalne komponente kuspidalne automorfne reprezentacije od $GL_n(\mathbb{A})$ generičke. U ovoj disertaciji slučaj u kojem je globalni lift kuspidalne automorfne reprezentacije od $M_0'(\mathbb{A})$ također kuspidalna automorfna reprezentacija zovemo slučaj A. U sljedećem korolaru navodimo normalizacijske faktore na rascjepivom mjestu u slučaju A za dvije maksimalne paraboličke podgrupe koje se mogu javiti u dekompoziciji operatora ispreplitanja $A(\underline{s}, \pi_v, w)$ gdje je $\underline{s} = (s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M_0,\mathbb{C}}$ i $w \in W(M_0)$.

Korolar 3.1.5. (Lokalni normalizacijski faktori za slučaj A) *Neka je $\pi_v \cong \pi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}$ unitarna generička ireducibilna reprezentacija Levijevog faktora $M_0(k_v) \cong GL_2(k_v) \times GL_2(k_v)$ grupe $SO_8(k_v)$. Neka je $(s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M_0',\mathbb{C}}$ te neka su $w_1, w_2 \in W(M_0')$ refleksije definirane u poglavlju 2.1.2 o strukturi grupe G_2'.*

Tada je normalizacijski faktor operatora ispreplitanja

$$A((s_1, s_2), \pi_v, w_1) = A((s_1 - s_2)\widetilde{\alpha}, \pi_v, w_1)$$

za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom $GL_2 \times GL_2$ grupe GL_4 jednak

$$r((s_1, s_2), \pi_v, w_1) = \frac{L(s_1 - s_2, \pi_{1,v} \times \widetilde{\pi}_{2,v})}{L(1 + s_1 - s_2, \pi_{1,v} \times \widetilde{\pi}_{2,v})\varepsilon(s_1 - s_2, \pi_{1,v} \times \widetilde{\pi}_{2,v}, \psi_v)},$$

gdje su na desnoj strani Rankin–Selbergove L–funkcije i ε–faktor koji odgovaraju ireducibilnoj adjungiranoj reprezentaciji r izomorfnoj tenzorskom produktu dvaju standardnih reprezentacija grupe $GL_2(\mathbb{C})$.

Normalizacijski faktor operatora ispreplitanja

$$A((s_1, s_2), \pi_v, w_2) = A(2s_2\widetilde{\alpha}, \pi_{2,v}, w_2)$$

za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom GL_2 grupe SO_4 jednak je

$$r((s_1, s_2), \pi_v, w_2) = \frac{L(2s_2, \omega_{\pi_{2,v}})}{L(1 + 2s_2, \omega_{\pi_{2,v}})\varepsilon(2s_2, \omega_{\pi_{2,v}}, \psi_v)},$$

gdje su na desnoj strani Heckeove L–funkcije i ε–faktor centralnog karaktera $\omega_{\pi_{2,v}}$ reprezentacije $\pi_{2,v}$ koji odgovaraju ireducibilnoj adjungiranoj reprezentaciji r izomorfnoj vanjskom kvadratu standardne reprezentacije grupe $GL_2(\mathbb{C})$.

Dokaz. Direktno iz formule za normalizacijski faktor (3.2). Uočimo samo da se u normalizacijskom faktoru za slučaj $GL_2 \subset SO_4$ javlja $2s_2$ zbog veze $\widetilde{\alpha} = \det_v^{1/2}$. $\square$

3.2 Negenerički rascjepivi slučaj

3.2.1 Opća ideja dokaza

Slučaj rascjepivog mjesta v na kojem unitarna reprezentacija π_v nije generička započinjemo općom idejom kako definirati normalizacijski faktor i dokazati holomorfnost i različitost od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Ova ideja zapravo prati dokaz leme I.8 u [43] i ovdje je navedena za proizvoljnu rascjepivu klasičnu grupu.

Neka je G rascjepiva klasična grupa definirana nad lokalnim poljem k_v karakteristike nula kao u poglavlju 3.1. Koristit ćemo sve oznake koje su tamo uvedene. Neka je $P = MN$ standardna prava parabolička podgrupa od G definirana nad k_v određena podskupom θ skupa prostih korijena Δ. Neka je π_v ireducibilna unitarna reprezentacija od $M(k_v)$ koja nije generička. Pretpostavimo da postoji standardna parabolička podgrupa od M s Levijevim faktorom L određena podskupom $\theta' \subset \theta \subset \Delta$, ireducibilna temperirana generička reprezentacija τ_v od $L(k_v)$ te $\underline{s}' \in \mathfrak{a}^*_{\theta',\mathbb{C}}$ takvi da je π_v izomorfna jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji inducirane reprezentacije

$$I_L^M(\underline{s}', \tau_v) = \mathrm{Ind}_{L(k_v)}^{M(k_v)}(\tau_v \otimes \exp\langle \underline{s}', H_L^M(\cdot)\rangle),$$

gdje je H_L^M Harish–Chandrin homomorfizam. Tada je za svaki element w Weylove grupe takav da je $w(\theta) \subset \Delta$, sljedeći dijagram komutativan,

$$\begin{array}{ccc} I(\underline{s}, \pi_v) & \hookrightarrow & I(\underline{s} + \underline{s}', \tau_v) \\ {\scriptstyle A(\underline{s}, \pi_v, w)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle A(\underline{s} + \underline{s}', \tau_v)} \\ I(w(\underline{s}), w(\pi_v)) & \hookrightarrow & I(w(\underline{s} + \underline{s}'), w(\tau_v)), \end{array}$$

gdje je $\underline{s}$ prirodno uložen u $\mathfrak{a}^*_{\theta',\mathbb{C}}$.

Drugim riječima, $A(\underline{s}, \pi_v, w)$ je restricija od $A(\underline{s} + \underline{s}', \tau_v, w)$ na $I(\underline{s}, \pi_v)$. Stoga normalizacijski faktor za $A(\underline{s}, \pi_v, w)$ definiramo kao

$$r(\underline{s}, \pi_v, w) = r(\underline{s} + \underline{s}', \tau_v, w), \tag{3.13}$$

gdje je normalizacijski faktor na desnoj strani definiran u poglavlju 3.1. Tada je normalizirani operator

$$N(\underline{s}, \pi_v, w) = N(\underline{s} + \underline{s}', \pi_v, w)\Big|_{I(\underline{s},\pi_v)} \tag{3.14}$$

restrikcija normaliziranog operatora $N(\underline{s} + \underline{s}', \pi_v, w)$ na $I(\underline{s}, \pi_v)$.

U dokazu da je $N(\underline{s}, \pi_v, w)$ holomorfan i različit od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore slijedimo dokaz leme I.8 u [43]. Budući da je π_v jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $I_L^M(\underline{s}', \tau_v)$, postoji element w' Weylove grupe takav da je π_v slika $M(k_v)$–normaliziranog operator ispreplitanja

$$N(w'^{-1}(\underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v), w').$$

Uočimo da je $w'(\underline{s}) = \underline{s}$. Tada je $N(\underline{s}, \pi_v, w)$ dio sljedećeg komutativnog dijagrama

$$\begin{tikzcd}
I(\underline{s}, \pi_v) \arrow[d, "N(\underline{s},\pi_v,w)"'] & I(\underline{s} + w'^{-1}(\underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v)) \arrow[l, "N(\underline{s}+w'^{-1}(\underline{s}'),w'^{-1}(\tau_v),w')"'] \arrow[d, "N(\underline{s}+w'^{-1}(\underline{s}'),w'^{-1}(\tau_v),ww')"] \\
I(w(\underline{s}), w(\pi_v)) \arrow[r, hook] & I(w(\underline{s} + \underline{s}'), w(\tau_v)).
\end{tikzcd}$$

Sada, ako $\underline{s} + w'^{-1}(\underline{s}') \in \mathfrak{a}^*_{\theta',\mathbb{C}}$ zadovoljava nejednakosti iz propozicije 3.1.3 za ww', onda je desna vertikalna strelica holomorfna i različita od nule. Budući da je gornja horizontalna strelica surjektivna, komutativnost dijagrama pokazuje da je normalizirani operator $N(\underline{s}, \pi_v, w)$ holomorfan i različit od nule za takve $\underline{s}$.

Ako $\underline{s} + w'^{-1}(\underline{s}') \in \mathfrak{a}^*_{\theta',\mathbb{C}}$ ne zadovoljava nejednakosti iz propozicije 3.1.3 za ww', onda postoji element w'' Weylove grupe takav da $w''^{-1}(\underline{s} + w'^{-1}(\underline{s}'))$ zadovoljava te nejednakosti za $ww'w''$. Pritom odabir w'' ovisi o $\underline{s}$. Tada je $N(\underline{s}, \pi_v, w)$ dio sljedećeg komutativnog dijagrama

$$\begin{array}{ccc}
I(s,\pi_v) & \xleftarrow{N\left(w''^{-1}(\underline{s}+w'^{-1}(\underline{s}')),w''^{-1}w'^{-1}(\tau_v),w'w''\right)} & I\left(w''^{-1}(\underline{s}+w'^{-1}(\underline{s}')),w''^{-1}w'^{-1}(\tau_v)\right) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle N(\underline{s},\pi_v,w)} & & {\scriptstyle N\left(w''^{-1}(\underline{s}+w'^{-1}(\underline{s}')),w''^{-1}w'^{-1}(\tau_v),ww'w''\right)}\Big\downarrow \\
I(w(\underline{s}),w(\pi_v)) & \hookrightarrow & I(w(\underline{s}+\underline{s}'),w(\tau_v)).
\end{array}$$

Desna vertikalna strelica je holomorfna i različita od nule zbog odabira elementa w''. Stoga bi iz komutativnost dijagrama slijedila holomorfnost i različitost od nule normaliziranog operatora $N(\underline{s},\pi_v,w)$ za takve $\underline{s}$ kad bismo uspjeli dokazati da je gornja horizontalna strelica surjektivna. Upravo to ćemo napraviti u situacijama potrebnim za račun rezidualnog spektra u sljedećem poglavlju.

3.2.2 Dokazi

Prije samih dokaza proučimo koje sve negeneričke reprezentacije mogu biti lokalne komponente na rascjepivom mjestu kuspidalne automorfne reprezentacije $\pi'\cong\pi_1'\otimes\pi_2'$ Levijevog faktora $M_0'(\mathbb{A})\cong GL_1'(\mathbb{A})\times GL_1'(\mathbb{A})$. Kao što smo već primijetili na kraju poglavlja 3.1, ta situacija se javlja jedino ako globalni lift $\pi\cong\pi_1\otimes\pi_2$ nije kuspidalna automorfna reprezentacija od $M_0(\mathbb{A})\cong GL_2(\mathbb{A})\times GL_2(\mathbb{A})$. Po definiciji globalnog lifta za GL_1' to znači da je barem jedna od reprezentacija π_1' i π_2' jednodimenzionalna. Slučaj u kojem je točno jedna od reprezentacija π_1' i π_2' jednodimenzionalna zovemo slučaj B, a slučaj u kojem su obje jednodimenzionalne zovemo slučaj C. U nastavku rješavamo odvojeno ta dva slučaja.

Najprije promotrimo slučaj B. Neka je $\pi_1'\cong\chi_1\circ\det'$ jednodimenzionalna kuspidalna automorfna reprezentacija, gdje je χ_1 unitarni karakter od $\mathbb{A}^\times/k^\times$, a π_2' kuspidalna automorfna reprezentacija od $GL_1'(\mathbb{A})$ koja nije jednodimenzionalna. Slučaj u kojem π_1' nije jednodimenzionalna, a π_2' jest, tretira se na potpuno jednak način. Lokalne komponente od π_1' na rascjepivim mjestima $v\notin S$ su

$$\pi_{1,v}'\cong\pi_{1,v}\cong\chi_{1,v}\circ\det_v,$$

gdje je $\chi_{1,v}$ unitarni karakter od $k_v^\times$. Lokalne komponente od π_2' na rascjepivim mjestima $v\notin S$ su generičke unitarne reprezentacije

$$\pi_{2,v}'\cong\pi_{2,v}$$

od $GL_2(k_v)$ jer su to lokalne komponente globalnog lifta od π'_2 koji je kuspidalna automorfna reprezentacija od $GL_2(\mathbb{A})$. Stoga, ako nije temperirana, $\pi_{2,v}$ je reprezentacija komplementarne serije

$$\pi_{2,v} \cong \mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)} \left(\mu_v|\cdot|^r \otimes \mu_v|\cdot|^{-r}\right),$$

gdje je $0 < r < 1/2$, a μ_v je unitarni karakter od $GL_1(k_v)$. Tada je

$$\pi_v \cong (\chi_{1,v} \circ \det_v) \otimes \pi_{2,v}$$

jedinstvena ireducibilna podreprezentacija inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)\times GL_2(k_v)}^{M_0(k_v)} \left(\chi_{1,v}|\cdot|^{-1/2} \otimes \chi_{1,v}|\cdot|^{1/2} \otimes \pi_{2,v}\right),$$

koja je izomorfna induciranoj reprezentaciji

$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{M_0(k_v)} \left(\chi_{1,v}|\cdot|^{-1/2} \otimes \chi_{1,v}|\cdot|^{1/2} \otimes \mu_v|\cdot|^r \otimes \mu_v|\cdot|^{-r}\right)$$

ako je $\pi_{2,v}$ reprezentacija komplementarne serije, gdje je T maksimalni rascjepivi torus izomorfan $GL_1 \times GL_1 \times GL_1 \times GL_1$. Točnije, u oznakama opće ideje iz poglavlja 3.2.1, ako je $\pi_{2,v}$ temperirana, onda $L = GL_1 \times GL_1 \times GL_2$, $M = M_0$,

$$\tau_v \cong \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \pi_{2,v},$$
$$\underline{s}' = (-1/2, 1/2, 0),$$

a ako je $\pi_{2,v}$ reprezentacija komplementarne serije $L = T$, $M = M_0$,

$$\tau_v \cong \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \mu_v \otimes \mu_v,$$

$$\underline{s}' = (-1/2, 1/2, r, -r).$$

Stoga, prema općoj ideji za normalizaciju iz poglavlja 3.2.1, za $\underline{s} = (s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$ i $w \in W(M'_0)$ normalizacijski faktor se definira kao

$$r(\underline{s}, \pi_v, w) = r((s_1 - 1/2, s_1 + 1/2, s_2), \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}, w) \tag{3.15}$$

ako je $\pi_{2,v}$ temperirana, odnosno

$$r(\underline{s}, \pi_v, w) = r((s_1 - 1/2, s_1 + 1/2, s_2 + r, s_2 - r), \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \mu_v \otimes \mu_v, w) \tag{3.16}$$

ako je $\pi_{2,v}$ reprezentacija komplementarne serije. Budući da je reprezentacija komplementarne serije puna inducirana reprezentacija, normalizacijski faktor u tom slučaju je također jednak (3.15), što daje jedinstvenu formulu na svim rascjepivim mjestima neovisno o tome da li je $\pi_{2,v}$ temperirana ili reprezentacija komplementarne serije. Takva jedinstvena formula je pogodna za računanje rezidualnog spektra u sljedećem poglavlju. Međutim, sada pri dokazu da je normalizirani operator ispreplitanja holomorfan i različit od nule pogodnije je normalizacijske faktore pisati koristeći temperirane reprezentacije jer je to u skladu s općom idejom dokaza iz poglavlja 3.2.1.

Normalizirani operator ispreplitanja $N(\underline{s}, \pi_v, w)$ je tada restrikcija

$$N(\underline{s}, \pi_v, w) = N((s_1 - 1/2, s_1 + 1/2, s_2), \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}, w)\Big|_{I(\underline{s},\pi_v)}, \quad (3.17)$$

ako je $\pi_{2,v}$ temperirana, odnosno

$$N(\underline{s}, \pi_v, w) = N((s_1-1/2, s_1+1/2, s_2+r, s_2-r), \chi_{1,v}\otimes\chi_{1,v}\otimes\mu_v\otimes\mu_v, w)\Big|_{I(\underline{s},\pi_v)}, \quad (3.18)$$

ako je $\pi_{2,v}$ reprezentacija komplementarne serije. Kao i za normalizacijski faktor, normalizirani operator se može pisati jedinstvenom formulom (3.17).

Propozicija 3.2.1. *Za svaki $w \in W(M_0')$, normalizirani operator ispreplitanja*

$$N((s_1, s_2), (\chi_{1,v} \circ \det_v) \otimes \pi_{2,v}, w)$$

je holomorfan i različit od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore, odnosno za

$$Re(s_1) \geqslant Re(s_2) \geqslant 0.$$

Dokaz. Iz diskusije koja prethodi ovoj propoziciji, u oznakama opće ideje iz poglavlja 3.2.1,

$$\tau_v = \begin{cases} \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}, & \text{ako je } \pi_{2,v} \text{ temperirana,} \\ \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \mu_v \otimes \mu_v, & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\underline{s}' = \begin{cases} (-1/2, 1/2, 0), & \text{ako je } \pi_{2,v} \text{ temperirana,} \\ (-1/2, 1/2, r, -r), & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je w' iz opće ideje element Weylove grupe koji odgovara permutaciji

$$w' = (1, 2)(3)(4).$$

Pritom, $(i_1, \ldots, i_l)$ označava ciklus koji šalje

$$i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_l \to i_1,$$

a element Weylove grupe koji odgovara permutaciji p djeluje na $\mathfrak{a}^*_{L,\mathbb{C}}$ kao

$$(s_1, \dots, s_k) \to (s_{p^{-1}(1)}, \dots, s_{p^{-1}(k)})$$

te analogno na reprezentacijama. Dakle,

$$\underline{s}+w'^{-1}(\underline{s}') = \begin{cases} (s_1 + 1/2, s_1 - 1/2, s_2), & \text{ako je } \pi_{2,v} \text{ temperirana,} \\ (s_1 + 1/2, s_1 - 1/2, s_2 + r, s_2 - r), & \text{inače.} \end{cases}$$

U oba slučaja, za svaki $w \in W(M_0')$, nejednakosti iz propozicije 3.1.3 su zadovoljene za $Re(s_1) \geqslant Re(s_2) \geqslant 0$ obzirom da je $0 < r < 1/2$. Stoga je, prema općoj ideji dokaza iz poglavlja 3.2.1, normalizirani operator ispreplitanja $N(\underline{s}, \pi_v, w)$ holomorfan i različit od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore. □

Sljedeći korolar daje normalizacijske faktore u slučaju B za maksimalne paraboličke podgrupe koje se javljaju u dekompoziciji operatora ispreplitanja za $w \in W(M_0')$.

Korolar 3.2.2. (Lokalni normalizacijski faktori za slučaj B) *Neka je $\chi_v \circ \det_v$ jednodimenzionalna unitarna reprezentacija grupe $GL_2(k_v)$, gdje je χ_v unitarni karakter od $k_v^\times$, te neka je π_v unitarna generička ireducibilna reprezentacija grupe $GL_2(k_v)$. Nadalje, neka je $(s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M_0',\mathbb{C}}$ te neka su $w_1, w_2 \in W(M_0')$ refleksije definirane u poglavlju 2.1.2 o strukturi grupe G_2'.*

Tada su normalizacijski faktori operatora ispreplitanja

$$A\left((s_1, s_2), (\chi_v \circ \det_v) \otimes \pi_v, w_1\right) \quad i \quad A\left((s_1, s_2), \pi_v \otimes (\chi_v \circ \det_v), w_1\right)$$

za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom $GL_2 \times GL_2$ grupe GL_4 jednaki

$$r((s_1, s_2), (\chi_v \circ \det_v) \otimes \pi_v, w_1) = r_{B,v}(s_1 - s_2, \chi_v \widetilde{\pi}_v),$$

$$r((s_1, s_2), \pi_v \otimes (\chi_v \circ \det_v), w_1) = r_{B,v}(s_1 - s_2, \chi_v^{-1} \pi_v),$$

gdje je za kompleksan broj $s \in \mathbb{C}$ i unitarnu ireducibilnu reprezentaciju σ_v od $GL_2(k_v)$

$$r_{B,v}(s, \sigma_v) = \frac{L(s - 1/2, \sigma_v)}{L(s + 3/2, \sigma_v)\varepsilon(s + 1/2, \sigma_v, \psi_v)\varepsilon(s - 1/2, \sigma_v, \psi_v)},$$

a na desnoj strani su glavne L–funkcije i ε–faktori za $GL_2(k_v)$.

Normalizacijski faktori operatora ispreplitanja

$$A((s_1,s_2),(\chi_v\circ\det_v)\otimes\pi_v,w_2)\quad i\quad A((s_1,s_2),\pi_v\otimes(\chi_v\circ\det_v),w_2)$$

za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom GL_2 grupe SO_4 jednaki su

$$r((s_1,s_2),(\chi_v\circ\det_v)\otimes\pi_v,w_2)=\frac{L(2s_2,\omega_{\pi_v})}{L(1+2s_2,\omega_{\pi_v})\varepsilon(2s_2,\omega_{\pi_v},\psi_v)},$$

$$r((s_1,s_2),\pi_v\otimes(\chi_v\circ\det_v),w_2)=\frac{L(2s_2,\chi_v^2)}{L(1+2s_2,\chi_v^2)\varepsilon(2s_2,\chi_v^2,\psi_v)},$$

gdje su na desnoj strani Heckeove L–funkcije i ε–faktor centralnih karaktera ω_{π_v} i χ_v^2 reprezentacija π_v i $\chi_v\circ\det_v$.

Dokaz. Normalizacijski faktor u slučaju B definiran je formulom (3.15) preko normalizacijskog faktora za generičku temperiranu reprezentaciju koji je dan formulom (3.10) u skladu s dekompozicijom operatora ispreplitanja iz propozicije 3.1.2 u kompoziciju operatora ispreplitanja za maksimalne paraboličke podgrupe. Za maksimalnu paraboličku podgrupu normalizacijski faktori su dani formulom (3.2). Koristeći navedene formule i dekompoziciju operatora ispreplitanja dobivaju se normalizacijski faktori ovog korolara. □

Promotrimo sada slučaj C. Za $i=1,2$, neka su $\pi_i'\cong\chi_i\circ\det'$ jednodimenzionalne kuspidalne automorfne reprezentacije grupe $GL_1'(\mathbb{A})$, gdje su χ_i unitarni karakteri od $\mathbb{A}^\times/k^\times$. Lokalne komponente na rascjepivim mjestima $v\notin S$ su

$$\pi_{i,v}'\cong\pi_{i,v}\cong\chi_{i,v}\circ\det_v,$$

gdje su $\chi_{i,v}$ unitarni karakteri od $k_v^\times$. Dakle, u ovom slučaju

$$\pi_v\cong(\chi_{1,v}\circ\det_v)\otimes(\chi_{2,v}\circ\det_v)$$

je reprezentacija Levijevog faktora $M_0(k_v)\cong GL_2(k_v)\times GL_2(k_v)$ od $SO_8(k_v)$ koja nije generička. Neka je $T\cong GL_1\times GL_1\times GL_1\times GL_1$ maksimalan rascjepivi torus od SO_8 definiran nad k_v. Tada je π_v jedinstvena ireducibilna podreprezentacija inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{M_0(k_v)}\left(\chi_{1,v}|\cdot|^{-1/2}\otimes\chi_{1,v}|\cdot|^{1/2}\otimes\chi_{2,v}|\cdot|^{-1/2}\otimes\chi_{2,v}|\cdot|^{1/2}\right).$$

U oznakama opće ideje za normalizaciju iz poglavlja 3.2.1, $L = T$, $M = M_0$,

$$\tau_v = \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \chi_{2,v} \otimes \chi_{2,v},$$

$$\underline{s}' = (-1/2, 1/2, -1/2, 1/2).$$

Stoga, za $\underline{s} = (s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$ i element $w \in W(M'_0)$, normalizacijski faktor definiramo kao

$$r(\underline{s}, \pi_v, w) = r((s_1 - 1/2, s_1 + 1/2, s_2 - 1/2, s_2 + 1/2), \tau_v, w), \tag{3.19}$$

a normalizirani operator ispreplitanja $N(\underline{s}, \pi_v, w)$ kao restrikciju

$$N(\underline{s}, \pi_v, w) = N((s_1 - 1/2, s_1 + 1/2, s_2 - 1/2, s_2 + 1/2), \tau_v, w)\Big|_{I(\underline{s},\pi_v)}. \tag{3.20}$$

Propozicija 3.2.3. *Za svaki $w \in W(M'_0)$, normalizirani operator ispreplitanja*

$$N((s_1, s_2), (\chi_{1,v} \circ \det_v) \otimes (\chi_{2,v} \circ \det_v), w)$$

je holomorfan i različit od nule u zatvaraču Weylove komore bez ishodišta, odnosno za

$$Re(s_1) \geqslant Re(s_2) \geqslant 0 \quad i \quad (Re(s_1), Re(s_2)) \neq (0, 0).$$

Dokaz. Iz diskusije koja prethodi ovoj propoziciji, u oznakama opće ideje dokaza iz poglavlja 3.2.1,

$$\tau_v = \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \chi_{2,v} \otimes \chi_{2,v},$$

$$\underline{s}' = (-1/2, 1/2, -1/2, 1/2).$$

Tada element Weylove grupe w' iz opće ideje odgovara permutaciji

$$w' = (1, 2)(3, 4).$$

Pritom, permutacije shvaćamo kao elemente Weylove grupe kao u dokazu prethodne propozicije. Stoga,

$$\underline{s} + w'^{-1}(\underline{s}') = (s_1 + 1/2, s_1 - 1/2, s_2 + 1/2, s_2 - 1/2).$$

Ako je $Re(s_1) > Re(s_2) \geqslant 0$ nejednakosti iz propozicije 3.1.3 su zadovoljene za svaki element $w \in W(M'_0)$ pa je prema općoj ideji dokaza normalizirani operator $N((s_1,s_2),(\chi_{1,v}\circ\det_v)\otimes(\chi_{2,v}\circ\det_v),w)$ holomorfan i različit od nule.

Preostaje mogućnost $Re(s_1)=Re(s_2)>0$. Nejednakosti iz propozicije 3.1.3 nisu zadovoljene jer je razlika

$$(Re(s_1)-1/2)-(Re(s_2)+1/2)=-1,$$

a trebala bi biti strogo veća od -1. Stoga, neka je w'' iz opće ideje dokaza element Weylove grupe koji odgovara permutaciji

$$w''=(1)(2,3)(4).$$

Tada je

$$w''^{-1}\left(\underline{s}+w'^{-1}(\underline{s}')\right)=(s_1+1/2,s_2+1/2,s_1-1/2,s_2-1/2),$$

što zadovoljava nejednakosti propozicije 3.1.3 za svaki $w\in W(M_0')$, te

$$w''^{-1}w'^{-1}(\tau_v)\cong\chi_{1,v}\otimes\chi_{2,v}\otimes\chi_{1,v}\otimes\chi_{2,v}.$$

Sada, prema općoj ideji dokaza iz poglavlja 3.2.1, dovoljno je provjeriti da je slika operatora

$$N((s_1+1/2,s_2+1/2,s_1-1/2,s_2-1/2),\chi_{1,v}\otimes\chi_{2,v}\otimes\chi_{1,v}\otimes\chi_{2,v},w'w'')$$

upravo $I(\underline{s},\pi_v)$. To je posljedica sljedeće dekompozicije

$$\begin{gathered}
\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_{1,v}|\cdot|^{s_1+1/2}\otimes\chi_{2,v}|\cdot|^{s_2+1/2}\otimes\chi_{1,v}|\cdot|^{s_1-1/2}\otimes\chi_{2,v}|\cdot|^{s_2-1/2}\right)\to\\
\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_{2,v}|\cdot|^{s_2+1/2}\otimes\chi_{1,v}|\cdot|^{s_1+1/2}\otimes\chi_{1,v}|\cdot|^{s_1-1/2}\otimes\chi_{2,v}|\cdot|^{s_2-1/2}\right)\to\\
\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_2(k_v)\times GL_1(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_{2,v}|\cdot|^{s_2+1/2}\otimes(\chi_{1,v}\circ\det_v)\nu^{s_1}\otimes\chi_{2,v}|\cdot|^{s_2-1/2}\right)\to\\
\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)\times GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left((\chi_{1,v}\circ\det_v)\nu^{s_1}\otimes\chi_{2,v}|\cdot|^{s_2+1/2}\otimes\chi_{2,v}|\cdot|^{s_2-1/2}\right)\to\\
\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)\times GL_2(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left((\chi_{1,v}\circ\det_v)\nu^{s_1}\otimes(\chi_{2,v}\circ\det_v)\nu^{s_2}\right),
\end{gathered}$$

gdje su prvi i treći operator izomorfizmi jer djeluju na ireducibilnoj induciranoj reprezentaciji po lemi 2.2.9, a drugi i četvrti surjektivni jer su to dugi operatori ispreplitanja Langlandsove klasifikacije za $GL_2(k_v)$. $\square$

U sljedećem korolaru navodimo normalizacijske faktore u slučaju C za maksimalne paraboličke podgrupe koje se javljaju u dekompoziciji operatora ispreplitanja za $w \in W(M_0')$.

Korolar 3.2.4. (Lokalni normalizacijski faktori za slučaj C) *Neka je $\pi_v \cong (\chi_{1,v} \circ \det_v) \otimes (\chi_{2,v} \circ \det_v)$ jednodimenzionalna reprezentacija Levijevog faktora $M_0(k_v) \cong GL_2(k_v) \times GL_2(k_v)$ grupe $SO_8(k_v)$, gdje su $\chi_{1,v}$ i $\chi_{2,v}$ unitarni karakteri od $k_v^\times$. Neka je $(s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M_0',\mathbb{C}}$ te neka su $w_1, w_2 \in W(M_0')$ refleksije definirane u poglavlju 2.1.2 o strukturi grupe G_2'.*

Tada je normalizacijski faktor operatora ispreplitanja

$$A((s_1, s_2), (\chi_{1,v} \circ \det_v) \otimes (\chi_{2,v} \circ \det_v), w_1)$$

za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom $GL_2 \times GL_2$ grupe GL_4 jednak

$$r((s_1, s_2), (\chi_{1,v} \circ \det_v) \otimes (\chi_{2,v} \circ \det_v), w_1) = r_{C,v}(s_1 - s_2, \chi_{1,v}\chi_{2,v}^{-1}),$$

gdje je za kompleksan broj $s \in \mathbb{C}$ i unitarni karakter χ_v od $k_v^\times$

$$r_{C,v}(s, \chi_v) =$$

$$= \frac{L(s, \chi_v)L(s-1, \chi_v)}{L(s+2, \chi_v)L(s+1, \chi_v)\varepsilon(s+1, \chi_v, \psi_v)\varepsilon(s, \chi_v, \psi_v)^2\varepsilon(s-1, \chi_v, \psi_v)},$$

a na desnoj strani su Heckeove L–funkcije i ε–faktori karaktera χ_v.

Normalizacijski faktor operatora ispreplitanja

$$A((s_1, s_2), (\chi_{1,v} \circ \det_v) \otimes (\chi_{2,v} \circ \det_v), w_2)$$

za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom GL_2 grupe SO_4 jednak je

$$r((s_1, s_2), (\chi_{1,v} \circ \det_v) \otimes (\chi_{2,v} \circ \det_v), w_2) = \frac{L(2s_2, \chi_{2,v}^2)}{L(1+2s_2, \chi_{2,v}^2)\varepsilon(2s_2, \chi_{2,v}^2, \psi_v)},$$

gdje su na desnoj strani Heckeove L–funkcije i ε–faktor centralnog karaktera $\chi_{2,v}^2$ reprezentacije $\chi_{2,v} \circ \det_v$.

Dokaz. Kao u slučaju B koristimo najprije formulu (3.19) za normalizacijski faktor u slučaju C, zatim formulu (3.10) u skladu s dekompozicijom operatora ispreplitanja iz propozicije 3.1.2, te na kraju formulu (3.2). □

3.3 Nerascjepivi slučaj

Preostalo je definirati normalizacijske faktore i dokazati holomorfnost i različitost od nule normaliziranih operatora ispreplitanja u zatvaraču pozitivne Weylove komore za ireducibilne unitarne reprezentacije π'_v Levijevog faktora $M'_0(k_v) \cong GL'_1(k_v) \times GL'_1(k_v)$ u grupi $G'_2(k_v)$ na mjestima $v \in S$ od k na kojima D nije rascjepiva. Budući da u ovoj disertaciji pretpostavljamo da je kvaternionska algebra D rascjepiva na svim arhimedskim mjestima od k, u ovom poglavlju v je nearhimedsko. Nadalje, reprezentacija π'_v je superkuspidalna jer $M'_0(k_v)$ nema pravih paraboličkih podgrupa definiranih nad k.

Da bismo dokazali potrebni rezultat za minimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom

$$M'_0 \subset G'_2,$$

moramo proučiti i dvije maksimalne standardne prave paraboličke podgrupe grupa G'_1 i GL'_2 s Levijevim faktorima

$$GL'_1 \subset G'_1 \quad \text{i} \quad GL'_1 \times GL'_1 \subset GL'_2.$$

U početku sva tri slučaja proučavamo istovremeno pa uvodimo jedinstvenu notaciju. Neka je G' jedna od grupa G'_2, G'_1, GL'_2 te $P' = M'N'$ standardna parabolička podgrupa grupe G' s Levijevim faktorom M', redom jednim od Levijevih faktora M'_0, GL'_1, $GL'_1 \times GL'_1$. Odgovarajuće rascjepive forme ovih grupa označavamo s G i $P = MN$.

Također, koristit ćemo oznake vezane uz inducirane reprezentacije i operatore ispreplitanja uvedene u poglavlju 1.2 za proizvoljnu reduktivnu grupu. Tako za Levijev faktor M' neka $X(M')$ označava $\mathbb{Z}$–modul k_v–racionalnih karaktera od M'. Kao u poglavlju 1.2 uvodimo vektorske prostore $\mathfrak{a}_{M',\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{a}^*_{M',\mathbb{C}}$. Na kraju poglavlja 2.1.2 fiksirali smo baze prostora $\mathfrak{a}^*_{M',\mathbb{C}}$ i odgovarajućeg prostora $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ za rascjepivu grupu uzevši za bazu reduciranu normu na svakoj od kopija $GL'_1(k_v) \cong D_v^\times$ u $M'(k_v)$, odnosno determinantu na svakoj od kopija $GL_2(k_v)$ u $M(k_v)$. Apsolutnu vrijednost i reducirane norme i determinante označili smo s ν. Podsjetimo da ovako odabrana baza nije uvijek u skladu s odabirom elementa $\widetilde{\alpha}$ za element baze u slučaju maksimalne standardne paraboličke podgrupe rascjepive grupe. Da ne bi došlo do zabune uvijek kad identificiramo $s \in \mathbb{C}$ s elementom $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ koristeći bazu $\widetilde{\alpha}$ pišemo $s\widetilde{\alpha}$. Nadalje, u slučaju $GL'_1 \times GL'_1 \subset GL'_2$, iako je $\mathfrak{a}^*_{M',\mathbb{C}}$ dvodimenzionalan, kao u rascjepivom slučaju dovoljno je promatrati jednodimenzionalan potprostor oblika $(s/2, -s/2)$ gdje je $s \in \mathbb{C}$.

Za $\underline{s} \in \mathfrak{a}^*_{M',\mathbb{C}}$ i ireducibilnu dopustivu reprezentaciju π'_v od $M'(k_v)$ definiramo kao u poglavlju 1.2 induciranu reprezentaciju

$$I(\underline{s}, \pi'_v) = \mathrm{Ind}_{M'(k_v)}^{G'(k_v)} \left(\pi'_v \otimes |\underline{s}(\cdot)|_v\right),$$

te za $w \in W(M')$ operator ispreplitanja

$$A(\underline{s}, \pi'_v, w) f_{\underline{s},v}(g) = \int_{U'(k_v) \cap w\overline{N}'(k_v)w^{-1}} f_{\underline{s},v}(w^{-1}n'g)dn', \tag{3.21}$$

gdje je $f_{\underline{s},v}$ u prostoru inducirane reprezentacije $I(\underline{s}, \pi'_v)$, $\overline{N}'$ unipotentni radikal suprotne paraboličke podgrupe od P' i U' unipotentni radikal Borelove podgrupe od G'. Haarova mjera dn' je odabrana kompatibilno s Haarovom mjerom na rascjepivoj formi kao što je objašnjeno u poglavlju 2 u [48] da bi vrijedila lema 3.3.1. Ovisnost $f_{\underline{s},v}$ o $\underline{s}$ je dobivena koristeći kompaktnu sliku kao u poglavlju II.1 u [44]. Dekompozicija operatora ispreplitanja iz propozicije 3.1.2 vrijedi i u nerascjepivom slučaju jer vrijedi za svaku reduktivnu grupu.

Za $M' = GL'_1 \times GL'_1$ i $G' = G'_1$ ili GL'_2, ako je $\pi'_v \cong \pi'_{1,v} \otimes \pi'_{2,v}$ reprezentacija od $M'(k_v)$ i $\underline{s} = (s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M',\mathbb{C}}$, onda

$$I(\underline{s}, \pi'_v) = \mathrm{Ind}_{M'(k_v)}^{G'(k_v)} (\pi'_{1,v}\nu^{s_1} \otimes \pi'_{2,v}\nu^{s_2}).$$

Ako je $G' = GL'_2$, tenzoriranje pogodnom potencijom apsolutne vrijednosti reducirane norme pokazuje da je

$$I((s_1, s_2), \pi'_v) \cong I\left(\left(\frac{s_1 - s_2}{2}, -\frac{s_1 - s_2}{2}\right), \pi'_v\right).$$

Uočimo da je za lokalni lift π_v od π'_v, definiran u poglavlju 2.2.1, reprezentacija inducirana na $GL_4(k_v)$

$$I((s_1, s_2), \pi_v) \cong I\left(\left(\frac{s_1 - s_2}{2}, -\frac{s_1 - s_2}{2}\right), \pi_v\right) = I((s_1 - s_2)\widetilde{\alpha}, \pi_v).$$

Za $M' = GL'_1$, ako je $s \in \mathfrak{a}^*_{M',\mathbb{C}}$, onda

$$I(s, \pi'_v) = \mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v)}^{G'_1(k_v)} (\pi'_v \nu^s).$$

Uočimo da za lokalni lift π_v od π'_v je reprezentacija inducirana na $SO_4(k_v)$

$$I(s, \pi_v) = \mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)}^{SO_4(k_v)} (\pi_v \nu^s) = I(2s\widetilde{\alpha}, \pi_v).$$

Normalizacija operatora ispreplitanja u nerascjepivom slučaju definira se koristeći lokalni lift reprezentacija definiran pomoću Jacquet–Langlandsove korespodencije u poglavlju 2.2.1. Svaka ireducibilna reprezentacija π'_v od $M'(k_v)$ je superkuspidalna jer $M'(k_v)$ nema pravih paraboličkih podgrupa. Neka je π_v lokalni lift od π'_v na $M(k_v)$. Po definiciji lokalnog lifta, π_v je uvijek kvadratno integrabilna reprezentacija. Važno je naglasiti da u ovom poglavlju o normalizaciji operatora ispreplitanja na nerascjepivom mjestu π_v predstavlja lokalni lift reprezentacije π'_v i nema nikakve veze s globalnim liftom koji može, ali i ne mora biti kompatibilan s lokalnim. Tada, normalizacijski faktor za operator ispreplitanja $A(\underline{s}, \pi'_v, w)$ definiramo kao

$$r(\underline{s}, \pi'_v, w) = r(\underline{s}, \pi_v, w), \tag{3.22}$$

a normalizirani operator ispreplitanja

$$N(\underline{s}, \pi'_v, w) = r(\underline{s}, \pi'_v, w)^{-1} A(\underline{s}, \pi'_v, w). \tag{3.23}$$

Kao u generičkom rascjepivom slučaju, dokaz holomorfnosti i različitosti od nule započinje s maksimalnim paraboličkim podgrupama i zatim koristi dekompoziciju iz propozicije 3.1.2. Prije svega dokažimo da se Plancherelove mjere čuvaju pri lokalnom liftu.

Lema 3.3.1. *Neka je $M' \subset G'$ jedan od slučajeva maksimalne paraboličke podgrupe, odnosno $GL'_1 \subset G'_1$ ili $GL'_1 \times GL'_1 \subset GL'_2$. Neka je π'_v ireducibilna unitarna reprezentacija od $M'(k_v)$ i π_v njezin lokalni lift na $M(k_v)$. Tada su Plancherelove mjere od π'_v i π_v jednake,*

$$\mu(s, \pi'_v) = \mu(s, \pi_v),$$

za svaki $s \in \mathbb{C}$. Pritom s identificiramo s $(s/2, -s/2)$ za $GL'_1 \times GL'_1 \subset GL'_2$ i $GL_2 \times GL_2 \subset GL_4$. Haarove mjere na unipotentnim radikalima $N'(k_v)$ i $N(k_v)$ korištene pri definiciji operatora ispreplitanja odabrane su kompatibilno kao u poglavlju 2 u [48].

Dokaz. Jednakost Plancherelovih mjera u Siegelovim slučajevima $GL'_n \subset G'_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ je dokazana u propoziciji 2.1 u [48]. Slučaj $GL'_1 \times GL'_1 \subset GL'_2$ se dokazuje na isti način. □

Korolar 3.3.2. *Uz pretpostavke prethodne leme,*

$$\mu(s, \pi'_v) = r(s, \pi_v, w)^{-1} r(-s, w(\pi_v), w^{-1})^{-1}$$

i hermitski dual normaliziranog operatora ispreplitanja za $Re(s) = 0$ je

$$N(s, \pi'_v, w)^* = N(-s, w(\pi'_v), w^{-1}),$$

gdje je w jedinstveni netrivijalni element Weylove grupe za odgovarajuću maksimalnu paraboličku podgrupu.

Dokaz. Reprezentacija π_v je kvadratno integrabilna pa stoga i generička. Adjungirana reprezentacija r je ireducibilna. Po formulama (3.6) i (7.4) u [52] Plancherelova mjera od π_v je jednaka

$$\begin{aligned}\mu(s\widetilde{\alpha}, \pi_v) &= \frac{\varepsilon(s, \pi_v, r, \psi_v) L(1-s, w(\pi_v), r)}{L(s, \pi_v, r)} \frac{\varepsilon(-s, w(\pi_v), r, \psi_v) L(1+s, \pi_v, r)}{L(-s, w(\pi_v), r)} \\ &= r(s\widetilde{\alpha}, \pi_v, w)^{-1} r(-s\widetilde{\alpha}, w(\pi_v), w^{-1})^{-1}.\end{aligned}$$

Po prethodnoj lemi

$$\mu(s, \pi'_v) = \mu(s, \pi_v) = r(s, \pi_v, w)^{-1} r(-s, w(\pi_v), w^{-1})^{-1},$$

čime je ispunjena jednakost (4.1) u [2] za normalizacijske faktore. Dakle, normalizirani operator ispreplitanja zadovoljava teorem 2.1 u [2]. Posebno vrijedi formula za njegov hermitski dual navedena u korolaru. □

Propozicija 3.3.3. *Neka je $M' \subset G'$ jedan od slučajeva maksimalne paraboličke podgrupe, odnosno $GL'_1 \subset G'_1$ ili $GL'_1 \times GL'_1 \subset GL'_2$, te w jedinstveni netrivijalni element Weylove grupe za odgovarajuću maksimalnu paraboličku podgrupu. Neka je π'_v ireducibilna unitarna reprezentacija od $M'(k_v)$. Tada je normalizirani operator ispreplitanja*

$$N(s, \pi'_v, w)$$

holomorfan i različit od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore, odnosno za

$$Re(s) \geqslant 0.$$

Dokaz. Za $Re(s) > 0$, obzirom da je π'_v superkuspidalna, operator ispreplitanja $A(s, \pi'_v, w)$ je dugi operator Langlandsove klasifikacije pa je holomorfan i različit od nule. Lokalne L–funkcije koje se javljaju u $r(s, \pi_v, w)$ su također holomorfne za $Re(s) > 0$ i različite od nule kao u dokazu propozicije 3.1.1 jer je lokalni lift π_v kvadratno integrabilan. Dakle, normalizirani operator ispreplitanja $N(s, \pi'_v, w)$ je holomorfan i različit od nule za $Re(s) > 0$.

Za $Re(s) = 0$, po definiciji Plancherelove mjere,

$$\mu(s, \pi'_v)^{-1} = A(-s, w(\pi'_v), w^{-1})A(s, \pi'_v, w),$$

a po lemi 3.3.1 i korolaru 3.3.2 također je

$$\mu(s, \pi'_v)^{-1} = r(s, \pi_v, w)r(-s, w(\pi_v), w^{-1}).$$

Stoga,

$$N(-s, w(\pi'_v), w^{-1})N(s, \pi'_v, w) = 1.$$

Nadalje, po korolaru 3.3.2,

$$N(s, \pi'_v, w)^* = N(-s, w(\pi'_v), w^{-1}).$$

Sada, ostatak dokaza je potpuno jednak kao u generičkom rascjepivom slučaju koristeći dopustivost i lemu 1.7 iz [33]. □

Propozicija 3.3.4. *Neka je $\pi'_v \cong \pi'_{1,v} \otimes \pi'_{2,v}$ ireducibilna unitarna reprezentacija Levijevog faktora $M'_0(k_v) \cong GL'_1(k_v) \times GL'_1(k_v)$ minimalne standardne paraboličke podgrupe od $G'_2(k_v)$ te $\underline{s} = (s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$. Tada je, za svaki $w \in W(M'_0)$, normalizirani operator ispreplitanja*

$$N(\underline{s}, \pi'_v, w)$$

holomorfan i različit od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore, odnosno za

$$Re(s_1) \geqslant Re(s_2) \geqslant 0.$$

Dokaz. Za holomorfnost dovoljno je dokazati holomorfnost svakog od faktora u dekomoziciji operatora ispreplitanja iz propozicije 3.1.2. Svaki faktor je operator ispreplitanja za neki slučaj maksimalne paraboličke podgrupe. Budući da je π'_v superkuspidalna, prema propoziciji 3.3.3 ti faktori su holomorfni za $\underline{s} = (s_1, s_2)$ takve da je $Re(s_1) \geqslant Re(s_2) \geqslant 0$. Kao u generičkom rascjepivom slučaju različitost od nule slijedi iz holomorfnosti po lemi 1.7 iz [33]. □

Na kraju, u sljedećem korolaru navodimo normalizacijske faktore na nerascjepivim mjestima za slučajeve dvaju maksimalnih paraboličkih podgrupa koje se javljaju u rastavu svih potrebnih operatora ispreplitanja u nastavku.

Korolar 3.3.5. (Lokalni normalizacijski faktori za nerascjepivi slučaj) *Neka je $\pi'_v \cong \pi'_{1,v} \otimes \pi'_{2,v}$ unitarna ireducibilna reprezentacija Levijevog faktora $M'_0(k_v) \cong GL'_1(k_v) \times GL'_1(k_v)$ grupe $G'_2(k_v)$, te neka je $\pi_v \cong \pi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}$ njen lokalni lift na $M_0(k_v) \cong GL_2(k_v) \times GL_2(k_v)$. Neka je $(s_1, s_2) \in \mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$ te neka su $w_1, w_2 \in W(M'_0)$ refleksije definirane u poglavlju 2.1.2 o strukturi grupe G'_2.*

Tada je normalizacijski faktor operatora ispreplitanja

$$A((s_1, s_2), \pi'_v, w_1)$$

za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom $GL'_1 \times GL'_1$ grupe GL'_2 jednak

$$r((s_1, s_2), \pi'_v, w_1) = \frac{L(s_1 - s_2, \pi_{1,v} \times \widetilde{\pi}_{2,v})}{L(1 + s_1 - s_2, \pi_{1,v} \times \widetilde{\pi}_{2,v})\varepsilon(s_1 - s_2, \pi_{1,v} \times \widetilde{\pi}_{2,v}, \psi_v)},$$

gdje su na desnoj strani Rankin–Selbergove L–funkcije i ε–faktor koji odgovaraju ireducibilnoj adjungiranoj reprezentaciji r izomorfnoj tenzorskom produktu dvaju standardnih reprezentacija grupe $GL_2(\mathbb{C})$.

Normalizacijski faktor operatora ispreplitanja

$$A((s_1, s_2), \pi'_v, w_2) = A(s_2, \pi'_{2,v}, w_2)$$

za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom GL'_1 grupe G'_1 jednak je

$$r((s_1, s_2), \pi'_v, w_2) = \frac{L(2s_2, \omega_{\pi_{2,v}})}{L(1 + 2s_2, \omega_{\pi_{2,v}})\varepsilon(2s_2, \omega_{\pi_{2,v}}, \psi_v)},$$

gdje su na desnoj strani Heckeove L–funkcije i ε–faktor centralnog karaktera $\omega_{\pi_{2,v}}$ reprezentacije $\pi_{2,v}$ koji odgovaraju ireducibilnoj adjungiranoj reprezentaciji r izomorfnoj vanjskom kvadratu standardne reprezentacije grupe $GL_2(\mathbb{C})$.

Dokaz. Formula (3.22) daje normalizacijski faktor u nerascjepivom slučaju pomoću normalizacijskog faktora za lokalni lift. Lokalni lift je generička kvadratno integrabilna reprezentacija pa primjenom (3.2) dobivamo formule iz korolara. Uočimo da se u normalizacijskom faktoru $r((s_1, s_2), \pi'_v, w_2)$ javlja $2s_2$ jer se dobije

$$r((s_1, s_2), \pi_v, w_2) = r(s_2, \pi_{2,v}, w_2) = r(2s_2\widetilde{\alpha}, \pi_{2,v}, w_2)$$

zbog veze $\widetilde{\alpha} = \det_v^{1/2}$. Nadalje, naglasimo još jednom da je π_v lokalni lift reprezentacije π'_v na nerascjepivom mjestu v pa u slučajevima kad lokalni i globalni lift nisu kompatibilni π_v nije lokalna komponenta globalnog lifta. $\square$

3.4 Globalna normalizacija

3.4.1 Definicija

Nakon što smo definirali normalizacijske faktore na svim lokalnim mjestima, sada definiramo globalni normalizacijski faktor za kuspidalnu automorfnu reprezentaciju $\pi' \cong \otimes_v \pi'_v$ Levijevog faktora $M'_0(\mathbb{A})$ te dokazujemo da je i globalni normalizirani operator ispreplitanja holomorfan i različit od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore (osim u ishodištu za slučaj C). Za sve $w \in W(M'_0)$ globalni normalizacijski faktor operatora ispreplitanja $A(\underline{s}, \pi', w)$ definiramo kao analitičko produljenje s područja apsolutne konvergencije produkta po svim mjestima od k lokalnih normalizacijskih faktora

$$r(\underline{s}, \pi', w) = \prod_v r(\underline{s}, \pi'_v, w), \tag{3.24}$$

a onda globalni normalizirani operator ispreplitanja kao

$$N(\underline{s}, \pi', w) = r(\underline{s}, \pi', w)^{-1} A(\underline{s}, \pi', w). \tag{3.25}$$

Teorem 3.4.1. *Neka je $\pi' = \otimes_v \pi'_v$ kuspidalna automortna reprezentacija grupe $M'_0(\mathbb{A})$. Tada je, za svaki $w \in W(M'_0)$, globalni normalizacijski faktor*

$$r(\underline{s}, \pi', w)$$

meromorfna funkcija od $\underline{s}$ te je globalni normalizirani operator ispreplitanja

$$N(\underline{s}, \pi', w)$$

holomorfan i različit od nule za $\underline{s}$ u zatvaraču pozitivne Weylove komore, odnosno za

$$Re(s_1) \geqslant Re(s_2) \geqslant 0,$$

osim u ishodištu u slučaju C.

Dokaz. Lokalni normalizacijski faktori $r(\underline{s}, \pi'_v, w)$ definirani su koristeći lokalne L–funkcije i ε–faktore. Po formulama iz korolara 3.1.5, 3.2.2 i 3.2.4 slijedi da na svim rascjepivim mjestima $v \notin S$ lokalne L–funkcije i ε–faktori dolaze od iste globalne kuspidalne automorfne reprezentacije. Točnije, L–funkcije i ε–faktori za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom $GL'_1 \times GL'_1 \subset GL'_2$ su Rankin–Selbergovi u slučaju A, glavni za GL_2 u slučaju

B i Heckeovi u slučaju C, a za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom $GL'_1 \subset G'_1$ L–funkcije i ε–faktori su Heckeovi od centralnog karaktera u sva tri slučaja. Stoga, produkt po svim rascjepivim mjestima $v \notin S$ lokalnih normalizacijskih faktora konvergira apsolutno za $\underline{s}$ dovoljno duboko u pozitivnoj Weylovoj komori. Analitičko produljenje je dano pomoću parcijalnih L–funkcija i parcijalnih ε–faktora za kuspidalne automorfne reprezentacije, a to su meromorfne funkcije. Budući da su lokalni normalizacijski faktori na preostalih konačno mnogo nerascjepivih mjesta $v \in S$ meromorfni tvrdnja o $r(s, \pi', w)$ je dokazana.

Globalni normalizirani operator ispreplitanja se dekomponira u tenzorski produkt lokalnih. Na skoro svim mjestima reprezentacija π'_v je nerazgranata reprezentacija rascjepive grupe $M_0(k_v)$. To znači da postoji do na skalar jedinstvena funkcija $f_{\underline{s},v}$ u prostoru inducirane reprezentacije $I(\underline{s}, \pi'_v)$ koja je invarijantna za djelovanje maksimalne kompaktne podgrupe K_v od $SO_8(k_v)$. Neka je $\widetilde{f}_{\underline{s},v}$ invarijantna za djelovanje K_v u prostoru inducirane reprezentacije $I(w(\underline{s}), w(\pi'_v))$. Tada, za $f_{\underline{s},v}$ i $\widetilde{f}_{\underline{s},v}$ normalizirane uvjetom $f_{\underline{s},v}(I) = \widetilde{f}_{\underline{s},v}(I) = 1$, po formuli Gindikin–Karpelevicha iz propozicije 5.2 u [11] i samoj definiciji lokalnih L–funkcija i ε–faktora na nerazgranatim mjestima vrijedi

$$A(\underline{s}, \pi'_v, w) f_{\underline{s},v} = r(\underline{s}, \pi'_v, w) \widetilde{f}_{\underline{s},v}.$$

Stoga za lokalni normalizirani operator na tim mjestima vrijedi

$$N(\underline{s}, \pi'_v, w) f_{\underline{s},v} = \widetilde{f}_{\underline{s},v}.$$

Na preostalih konačno mnogo mjesta, po propozicijama 3.1.1, 3.1.3, 3.1.4, 3.2.1, 3.2.3 i 3.3.4, lokalni normalizirani operatori ispreplitanja su holomorfni i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore, osim u ishodištu u slučaju C. Dakle, i globalni normalizirani operator ispreplitanja $N(\underline{s}, \pi', w)$ je holomorfan i različit od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore, osim u ishodištu u slučaju C. □

U nastavku eksplicitno navodimo globalne normalizacijske faktore za sve $w \in W(M'_0)$ u svakom od slučajeva A, B i C. Pritom, da bismo globalne normalizacijske faktore mogli napisati u što pogodnijem obliku, koristimo neka svojstva lokalnih L–funkcija koja su navedena tek u poglavlju 4.1.

3.4.2 Slučaj A

Slučaj A odnosi se na kuspidalne automorfne reprezentacije $\pi' \cong \pi'_1 \otimes \pi'_2$ Levijevog faktora $M'_0(\mathbb{A}) \cong GL'_1(\mathbb{A}) \times GL'_1(\mathbb{A})$ za koje niti jedna od reprezentacija

π_1' i π_2' nije jednodimenzionalna. Po definiciji globalnog lifta iz poglavlja 2.2.1, to znači da je globalni lift $\pi \cong \pi_1 \otimes \pi_2$ od π' kuspidalna automorfna reprezentacija Levijevog faktora $M_0(\mathbb{A}) \cong GL_2(\mathbb{A}) \times GL_2(\mathbb{A})$. U ovom slučaju lokalni i globalni lift su kompatibilni pa je na nerascjepivim mjestima $v \in S$ lokalni lift lokalne komponente π_v' naprosto lokalna komponenta π_v od π. To nam omogućuje da globalne normalizacijske faktore napišemo pomoću globalnih L–funkcija i ε–faktora vezanih s kuspidalnom automorfnom reprezentacijom π.

w	$r(\underline{s}, \pi', w)$
1	1
w_1	$\frac{L(s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)}{L(1+s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)}$
w_2	$\frac{L(2s_2,\omega_{\pi_2})}{L(1+2s_2,\omega_{\pi_2})\varepsilon(2s_2,\omega_{\pi_2})}$
w_1w_2	$\frac{L(2s_2,\omega_{\pi_2})}{L(1+2s_2,\omega_{\pi_2})\varepsilon(2s_2,\omega_{\pi_2})} \frac{L(s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)}{L(1+s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)}$
w_2w_1	$\frac{L(s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)}{L(1+s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)} \frac{L(2s_1,\omega_{\pi_1})}{L(1+2s_1,\omega_{\pi_1})\varepsilon(2s_1,\omega_{\pi_1})}$
$w_1w_2w_1$	$\frac{L(s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)}{L(1+s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)}$ $\frac{L(2s_1,\omega_{\pi_1})}{L(1+2s_1,\omega_{\pi_1})\varepsilon(2s_1,\omega_{\pi_1})} \frac{L(s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)}{L(1+s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)}$
$w_2w_1w_2$	$\frac{L(2s_2,\omega_{\pi_2})}{L(1+2s_2,\omega_{\pi_2})\varepsilon(2s_2,\omega_{\pi_2})}$ $\frac{L(s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)}{L(1+s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)} \frac{L(2s_1,\omega_{\pi_1})}{L(1+2s_1,\omega_{\pi_1})\varepsilon(2s_1,\omega_{\pi_1})}$
$w_1w_2w_1w_2$	$\frac{L(2s_2,\omega_{\pi_2})}{L(1+2s_2,\omega_{\pi_2})\varepsilon(2s_2,\omega_{\pi_2})} \frac{L(s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)}{L(1+s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2,\pi_1\times\pi_2)}$ $\frac{L(2s_1,\omega_{\pi_1})}{L(1+2s_1,\omega_{\pi_1})\varepsilon(2s_1,\omega_{\pi_1})} \frac{L(s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)}{L(1+s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)}$

Tablica A. Normalizacijski faktori od $A(\underline{s}, \pi', w)$ za $w \in W(M_0')$ u slučaju A

Iz korolara 3.1.5 i 3.3.5 dobivamo globalne normalizacijske faktore za maksimalne paraboličke podgrupe iz tih korolara. Točnije, za operator ispreplitanja $A((s_1, s_2), \pi', w_1)$ je

$$r((s_1, s_2), \pi', w_1) = \frac{L(s_1 - s_2, \pi_1 \times \widetilde{\pi}_2)}{L(1 + s_1 - s_2, \pi_1 \times \widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1 - s_2, \pi_1 \times \widetilde{\pi}_2)}, \tag{3.26}$$

gdje su na desnoj strani Rankin–Selbergove L–funkcije i ε–faktori, a za operator ispreplitanja $A((s_1, s_2), \pi', w_2)$ je

$$r((s_1, s_2), \pi', w_2) = \frac{L(2s_2, \omega_{\pi_2})}{L(1 + 2s_2, \omega_{\pi_2})\varepsilon(2s_2, \omega_{\pi_2})}, \tag{3.27}$$

gdje su na desnoj strani Heckeove L–funkcije i ε–faktori od centralnog karaktera. Za proizvoljni $w \in W(M_0')$ globalni normalizacijski faktor dobivamo kao produkt normalizacijskih faktora gornjeg oblika koristeći dekompoziciju operatora ispreplitanja iz propozicije 3.1.2. U tablici A navedeni su ti globalni normalizacijski faktori u slučaju A.

3.4.3 Slučaj B

Slučaj B odnosi se na kuspidalne automorfne reprezentacije $\pi' \cong \pi_1' \otimes \pi_2'$ Levijevog faktora $M_0'(\mathbb{A}) \cong GL_1'(\mathbb{A}) \times GL_1'(\mathbb{A})$ za koje je jedna od reprezentacija π_1' i π_2' jednodimenzionalna, a druga nije. Globalne normalizacijske faktore navodimo samo ako je reprezentacija $\pi_1' \cong \chi_1 \circ \det'$, gdje je χ_1 unitarni karakter od $\mathbb{A}^\times/k^\times$, jednodimenzionalna, a reprezentacija π_2' nije. Druga mogućnost je potpuno analogna.

Po definiciji globalnog lifta iz poglavlja 2.2.1, u ovom slučaju globalni lift $\pi \cong \pi_1 \otimes \pi_2$ od π' nije kuspidalna automorfna reprezentacija Levijevog faktora $M_0(\mathbb{A}) \cong GL_2(\mathbb{A}) \times GL_2(\mathbb{A})$. Točnije, $\pi_1 \cong \chi_1 \circ \det$ nije kuspidalna automorfna reprezentacija od $GL_2(\mathbb{A})$, a π_2 jest. U ovom slučaju lokalni i globalni lift nisu kompatibilni. Po definiciji lokalnog lifta na nerascjepivim mjestima $v \in S$, lokalni lift lokalne komponente $\pi_{1,v}'$ od π_1' nije lokalna komponenta $\pi_{1,v} \cong \chi_{1,v} \circ \det_v$ globalnog lifta π_1, nego Steinbergova reprezentacija $St_{\chi_{1,v}}$. Stoga, da bismo globalne normalizacijske faktore napisali u što pogodnijem obliku najprije ćemo preciznije izraziti lokalne normalizacijske faktore na nerascjepivim mjestima za maksimalne paraboličke slučajeve iz korolara 3.3.5.

Da ne bi došlo do zabune, naglasimo da u tom korolaru i čitavom poglavlju 3.3 oznaka π_v predstavlja lokalni lift unitarne ireducibilne reprezentacije π_v'

Levijevog faktora $M'(k_v)$ na nerascjepivom mjestu $v \in S$ što nije u skladu s oznakom u ovom poglavlju o slučaju B gdje π_v označava lokalnu komponentu globalnog lifta. U ovom poglavlju nemamo posebnu oznaku za lokalni lift na nerascjepivim mjestima već ćemo naprosto pisati $St_{\chi_{1,v}} \otimes \pi_{2,v}$.

U formuli za normalizacijski faktor iz korolara 3.3.5 za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom $GL'_1(k_v) \times GL'_1(k_v)$ u $GL'_2(k_v)$ javljaju se Rankin–Selbergove L–funkcije i ε–faktori oblika

$$L(s, St_{\chi_{1,v}} \times \pi_{2,v}),$$

$$\varepsilon(s, St_{\chi_{1,v}} \times \pi_{2,v}, \psi_v).$$

Dovoljno je njih pogodnije zapisati jer, po lemama 4.1.3 i 4.1.2, promjena poretka reprezentacija ne mijenja ni L–funkciju ni ε–faktor, a eventualni kontragredijenti se jednostavno mogu ukomponirati u račun koji slijedi.

Sve reprezentacije grupe $GL'_1(k_v)$ na nerascjepivom mjestu su superkuspidalne jer $GL'_1(k_v)$ nema pravih paraboličkih podgrupa. Reprezentacija $\pi_{2,v}$ je lokalni lift unitarne reprezentacije $\pi'_{2,v}$ grupe $GL'_1(k_v)$, pa je ili superkuspidalna ili kvadratno integrabilna.

Pretpostavimo najprije da je $\pi_{2,v}$ superkuspidalna. Tada, po lemi 4.1.3,

$$L(s, St_{\chi_{1,v}} \times \pi_{2,v}) = L(s + 1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v}),$$

$$\varepsilon(s, \chi_{1,v} \times \pi_{2,v}, \psi_v) =$$

$$= \varepsilon(s+1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v}, \psi_v)\varepsilon(s-1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v}, \psi_v)\frac{L(1/2 - s, \chi_{1,v}^{-1}\widetilde{\pi}_{2,v})}{L(s - 1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v})}.$$

Nadalje, po lemi 4.1.2, glavne L–funkcije za superkuspidalnu reprezentaciju od $GL_2(k_v)$ na nearhimedskom mjestu v su identički jednake 1. Stoga možemo lokalne L–funkcije i ε–faktore zapisati u obliku

$$L(s, St_{\chi_{1,v}} \times \pi_{2,v}) = L(s + 1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v})L(s - 1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v}),$$

$$\varepsilon(s, \chi_{1,v} \times \pi_{2,v}, \psi_v) = \varepsilon(s + 1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v}, \psi_v)\varepsilon(s - 1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v}, \psi_v).$$

Pretpostavimo sada da je $\pi_{2,v}$ kvadratno integrabilna. Dakle, $\pi_{2,v} \cong St_{\chi_{2,v}}$ za neki unitarni karakter $\chi_{2,v}$ od $k_v^\times$. Ponovo, po lemama 4.1.3 i 4.1.2,

$$\begin{aligned} L(s, St_{\chi_{1,v}} \times \pi_{2,v}) &= L(s + 1, \chi_{1,v}\chi_{2,v})L(s, \chi_{1,v}\chi_{2,v}) \\ &= L(s + 1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v})L(s - 1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(s, St_{\chi_{1,v}} \times \pi_{2,v}, \psi_v) = &\\ &= \varepsilon(s+1, \chi_{1,v}\chi_{2,v}, \psi_v)\varepsilon(s, \chi_{1,v}\chi_{2,v}, \psi_v)^2\varepsilon(s-1, \chi_{1,v}\chi_{2,v}, \psi_v)\cdot\\ &\quad\cdot\frac{L(-s, \chi_{1,v}^{-1}\chi_{2,v}^{-1})}{L(s, \chi_{1,v}\chi_{2,v})}\frac{L(1-s, \chi_{1,v}^{-1}\chi_{2,v}^{-1})}{L(s-1, \chi_{1,v}\chi_{2,v})} =\\ &= \varepsilon(s+1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v}, \psi_v)\varepsilon(s-1/2, \chi_{1,v}\pi_{2,v}, \psi_v).\end{aligned}$$

Uvrštavanjem tih formula za L–funkcije i ε–faktore u lokalne normalizacijske faktore iz korolara 3.3.5 dobivamo potpuno jednake formule kao na rascjepivim mjestima u korolaru 3.2.2. To nam omogućuje da globalne normalizacijske faktore operatora ispreplitanja

$$A((s_1, s_2), (\chi_1 \circ \det') \otimes \pi_2', w_1) \quad \text{i} \quad A((s_1, s_2), \pi_2' \otimes (\chi_1 \circ \det'), w_1)$$

za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom $GL_1' \times GL_1'$ u GL_2' napišemo koristeći globalne glavne L–funkcije i ε–faktore kuspidalne automorfne reprezentacije grupe $GL_2(\mathbb{A})$ kao

$$\begin{aligned} r((s_1, s_2), (\chi_1 \circ \det') \otimes \pi_2', w_1) &= r_B(s_1 - s_2, \chi_1\widetilde{\pi}_2),\\ r((s_1, s_2), \pi_2' \otimes (\chi_1 \circ \det'), w_1) &= r_B(s_1 - s_2, \chi_1^{-1}\pi_2), \end{aligned} \tag{3.28}$$

gdje je za kompleksan broj $s \in \mathbb{C}$ i kuspidalnu automorfnu reprezentaciju σ od $GL_2(\mathbb{A})$

$$r_B(s, \sigma) = \frac{L(s-1/2, \sigma)}{L(s+3/2, \sigma)\varepsilon(s+1/2, \sigma)\varepsilon(s-1/2, \sigma)}.$$

Za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom GL_1' u G_1', u formulama za lokalne normalizacijske faktore na nerascjepivim mjestima iz korolara 3.3.5 javljaju se Heckeove L–funkcije i ε–faktori od centralnih karaktera. Međutim, centralni karakter Steinbergove reprezentacije St_{χ_v} jednak je χ_v^2 pa su u ovom slučaju lokalni normalizacijski faktori na nerascjepivim mjestima u skladu s normalizacijskim faktorima na rascjepivim mjestima. Stoga, globalne normalizacijske faktore operatora ispreplitanja

$$A((s_1, s_2), (\chi_1 \circ \det') \otimes \pi_2', w_2) \quad \text{i} \quad A((s_1, s_2), \pi_2' \otimes (\chi_1 \circ \det'), w_2)$$

možemo zapisati koristeći globalne Heckeove L–funkcije i ε–faktore kao

$$\begin{aligned} r((s_1, s_2), (\chi_1 \circ \det') \otimes \pi_2', w_2) &= \frac{L(2s_2, \omega_{\pi_2})}{L(1+2s_2, \omega_{\pi_2})\varepsilon(2s_2, \omega_{\pi_2})},\\ r((s_1, s_2), \pi_2 \otimes (\chi_1 \circ \det'), w_2) &= \frac{L(2s_2, \chi_1^2)}{L(1+2s_2, \chi_1^2)\varepsilon(2s_2, \chi_1^2)}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Za svaki $w \in W(M_0')$, globalne normalizacijske faktore dobivamo kao produkte normalizacijskih faktora gornjeg oblika koristeći dekompoziciju operatora ispreplitanja iz propozicije 3.1.2. Globalni normalizacijski faktori za slučaj B navedeni su u tablici B.

w	$r(\underline{s},\pi',w)$
1	1
w_1	$\frac{L(s_1-s_2-1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)}{L(s_1-s_2+3/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2-1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2+1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)}$
w_2	$\frac{L(2s_2,\omega_{\pi_2})}{L(1+2s_2,\omega_{\pi_2})\varepsilon(2s_2,\omega_{\pi_2})}$
w_1w_2	$\frac{L(2s_2,\omega_{\pi_2})}{L(1+2s_2,\omega_{\pi_2})\varepsilon(2s_2,\omega_{\pi_2})}\frac{L(s_1+s_2-1/2,\chi_1\pi_2)}{L(s_1+s_2+3/2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2-1/2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2+1/2,\chi_1\pi_2)}$
w_2w_1	$\frac{L(s_1-s_2-1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)}{L(s_1-s_2+3/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2-1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2+1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)}\frac{L(2s_1,\chi_1^2)}{L(1+2s_1,\chi_1^2)\varepsilon(2s_1,\chi_1^2)}$
$w_1w_2w_1$	$\frac{L(s_1-s_2-1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)}{L(s_1-s_2+3/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2-1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2+1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)}$ $\frac{L(2s_1,\chi_1^2)}{L(1+2s_1,\chi_1^2)\varepsilon(2s_1,\chi_1^2)}\frac{L(s_1+s_2-1/2,\chi_1\pi_2)}{L(s_1+s_2+3/2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2-1/2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2+1/2,\chi_1\pi_2)}$
$w_2w_1w_2$	$\frac{L(2s_2,\omega_{\pi_2})}{L(1+2s_2,\omega_{\pi_2})\varepsilon(2s_2,\omega_{\pi_2})}$ $\frac{L(s_1+s_2-1/2,\chi_1\pi_2)}{L(s_1+s_2+3/2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2-1/2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2+1/2,\chi_1\pi_2)}\frac{L(2s_1,\chi_1^2)}{L(1+2s_1,\chi_1^2)\varepsilon(2s_1,\chi_1^2)}$
$w_1w_2w_1w_2$	$\frac{L(2s_2,\omega_{\pi_2})}{L(1+2s_2,\omega_{\pi_2})\varepsilon(2s_2,\omega_{\pi_2})}\frac{L(s_1+s_2-1/2,\chi_1\pi_2)}{L(s_1+s_2+3/2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2-1/2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(s_1+s_2+1/2,\chi_1\pi_2)}$ $\frac{L(2s_1,\chi_1^2)}{L(1+2s_1,\chi_1^2)\varepsilon(2s_1,\chi_1^2)}\frac{L(s_1-s_2-1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)}{L(s_1-s_2+3/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2-1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(s_1-s_2+1/2,\chi_1\widetilde{\pi}_2)}$

Tablica B. Normalizacijski faktori od $A(\underline{s},\pi',w)$ za $w \in W(M_0')$ u slučaju B

3.4.4 Slučaj C

Slučaj C odnosi se na kuspidalne automorfne reprezentacije $\pi' \cong \pi_1' \otimes \pi_2'$ Levijevog faktora $M_0'(\mathbb{A}) \cong GL_1'(\mathbb{A}) \times GL_1'(\mathbb{A})$ za koje su obje reprezentacije π_1' i π_2' jednodimenzionalne. Dakle, $\pi_i' \cong \chi_i \circ \det'$ za $i = 1, 2$, gdje su χ_i unitarni karakteri od $\mathbb{A}^\times / k^\times$.

Po definiciji globalnog lifta iz poglavlja 2.2.1, u ovom slučaju reprezentacija $\pi \cong \pi_1 \otimes \pi_2$ Levijevog faktora $M_0(\mathbb{A}) \cong GL_2(\mathbb{A}) \times GL_2(\mathbb{A})$, gdje su $\pi_i \cong \chi_i \circ \det$ za $i = 1, 2$, je globalni lift od π'. To nije kuspidalna automorfna reprezentacija Levijevog faktora. Stoga, kao i u prethodnom slučaju B, lokalni i globalni lift nisu kompatibilni. Po definiciji lokalnog lifta na nerascjepivim mjestima $v \in S$, lokalni lift lokalne komponente $\pi_{i,v}'$ od π_i' nije lokalna komponenta $\pi_{i,v} \cong \chi_{i,v} \circ \det_v$ globalnog lifta π_i, nego Steinbergova reprezentacija $St_{\chi_{i,v}}$. Stoga, da bismo globalne normalizacijske faktore napisali u što pogodnijem obliku najprije ćemo preciznije izraziti lokalne normalizacijske faktore na nerascjepivim mjestima za maksimalne paraboličke slučajeve iz korolara 3.3.5.

Da ne bi došlo do zabune, ponovimo još jednom da u tom korolaru i čitavom poglavlju 3.3 oznaka π_v predstavlja lokalni lift unitarne ireducibilne reprezentacije π_v' Levijevog faktora $M'(k_v)$ na nerascjepivom mjestu $v \in S$ što nije u skladu s oznakom u ovom poglavlju o slučaju C gdje π_v označava lokalnu komponentu globalnog lifta. U ovom poglavlju nemamo posebnu oznaku za lokalni lift na nerascjepivim mjestima već ćemo naprosto pisati $St_{\chi_{1,v}} \otimes St_{\chi_{2,v}}$.

U formuli za normalizacijski faktor iz korolara 3.3.5 za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom $GL_1'(k_v) \times GL_1'(k_v)$ u $GL_2'(k_v)$ javljaju se Rankin–Selbergove L–funkcije i ε–faktori oblika

$$L(s, St_{\chi_{1,v}} \times St_{\chi_{2,v}}),$$

$$\varepsilon(s, St_{\chi_{1,v}} \times St_{\chi_{2,v}}, \psi_v).$$

Po lemi 4.1.3, te L–funkcije i ε–faktori mogu se zapisati koristeći Heckeove kao

$$L(s, St_{\chi_{1,v}} \times St_{\chi_{2,v}}) = L(s+1, \chi_{1,v}\chi_{2,v}) L(s, \chi_{1,v}\chi_{2,v}),$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon(s, St_{\chi_{1,v}} \times St_{\chi_{2,v}}, \psi_v) = \\ &= \varepsilon(s+1, \chi_{1,v}\chi_{2,v}, \psi_v) \varepsilon(s, \chi_{1,v}\chi_{2,v}, \psi_v)^2 \varepsilon(s-1, \chi_{1,v}\chi_{2,v}, \psi_v) \cdot \\ &\cdot \frac{L(1-s, \chi_{1,v}^{-1}\chi_{2,v}^{-1}) L(-s, \chi_{1,v}^{-1}\chi_{2,v}^{-1})}{L(s-1, \chi_{1,v}\chi_{2,v}) L(s, \chi_{1,v}\chi_{2,v})}. \end{aligned}$$

Globalni normalizacijski faktor je produkt po svim mjestima lokalnih normalizacijskih faktora koji nisu dani jednakom formulom za rascjepiva i nerascjepiva mjesta. Stoga se u globalnom normalizacijskom faktoru osim globalnih L–funkcija dobivaju i konačni produkti po svim nerascjepivim mjestima $v \in S$ lokalnih L–funkcija. Točnije, iz korolara 3.2.4 i gornjih formula za L–funkcije i ε–faktore uvrštenih u formulu za lokalni normalizacijski faktor iz korolara 3.3.5, dobiva se da je za operator ispreplitanja

$$A((s_1, s_2), (\chi_1 \circ \det') \otimes (\chi_2 \circ \det'), w_1),$$

globalni normalizacijski faktor jednak

$$r((s_1, s_2), (\chi_1 \circ \det') \otimes (\chi_2 \circ \det'), w_1) = r_C(s_1 - s_2, \chi_1 \chi_2^{-1}), \tag{3.30}$$

gdje je za kompleksan broj $s \in \mathbb{C}$ i unitarni karakter χ od $\mathbb{A}^\times / k^\times$

$$\begin{aligned} r_C(s, \chi) = & \\ = & \prod_{v \notin S} \frac{L(s, \chi_v) L(s-1, \chi_v)}{L(s+2, \chi_v) L(s+1, \chi_v) \varepsilon(s+1, \chi_v, \psi_v) \varepsilon(s, \chi_v, \psi_v)^2 \varepsilon(s-1, \chi_v, \psi_v)} \cdot \\ & \cdot \prod_{v \in S} \frac{L(s+1, \chi_v) L(s, \chi_v)}{L(s+2, \chi_v) L(s+1, \chi_v) \varepsilon(s+1, \chi_v, \psi_v) \varepsilon(s, \chi_v, \psi_v)^2 \varepsilon(s-1, \chi_v, \psi_v)} \cdot \\ & \cdot \prod_{v \in S} \frac{L(s, \chi_v) L(s-1, \chi_v)}{L(-s, \chi_v^{-1}) L(1-s, \chi_v^{-1})} = \\ = & \frac{L(s, \chi) L(s-1, \chi)}{L(s+2, \chi) L(s+1, \chi) \varepsilon(s+1, \chi) \varepsilon(s, \chi)^2 \varepsilon(s-1, \chi)} \cdot \\ & \cdot \prod_{v \in S} \frac{L(s+1, \chi_v) L(s, \chi_v)}{L(1-s, \chi_v^{-1}) L(-s, \chi_v^{-1})}, \end{aligned}$$

a na desnoj strani su globalne i lokalne Heckeove L–funkcije i ε–faktori.

Za maksimalnu paraboličku podgrupu s Levijevim faktorom GL_1' u G_1', u formuli iz korolara 3.3.5 za lokalne normalizacijske faktore na nerascjepivim mjestima javljaju se L–funkcije i ε–faktori od centralnog karaktera. Kao i u slučaju B, centralni karakter Steinbergove reprezentacije $St_{\chi_{i,v}}$ jednak je $\chi_{i,v}^2$ pa su lokalni normalizacijski na nerascjepivim mjestima dani jednakom formulom kao na rascjepivim mjestima. Stoga se globalni normalizacijski faktor operatora ispreplitanja

$$A((s_1, s_2), (\chi_1 \circ \det') \otimes (\chi_2 \circ \det'), w_2)$$

može zapisati koristeći globalne Heckeove L–funkcije i ε–faktore kao

$$r((s_1, s_2), (\chi_1 \circ \det') \otimes (\chi_2 \circ \det'), w_2) = \frac{L(2s_2, \chi_2^2)}{L(1 + 2s_2, \chi_2^2)\varepsilon(2s_2, \chi_2^2)}. \qquad (3.31)$$

Tada se, za svaki $w \in W(M_0')$, globalni normalizacijski faktori dobivaju koristeći gornje formule i dekompoziciju operatora ispreplitanja iz propozicije 3.1.2. Globalni normalizacijski faktori u slučaju C navedeni su u tablici C.

w	$r(\underline{s}, \pi', w)$
1	1
w_1	$r_C(s_1 - s_2, \chi_1\chi_2^{-1})$
w_2	$\frac{L(2s_2,\chi_2^2)}{L(1+2s_2,\chi_2^2)\varepsilon(2s_2,\chi_2^2)}$
w_1w_2	$\frac{L(2s_2,\chi_2^2)}{L(1+2s_2,\chi_2^2)\varepsilon(2s_2,\chi_2^2)} r_C(s_1 + s_2, \chi_1\chi_2)$
w_2w_1	$r_C(s_1 - s_2, \chi_1\chi_2^{-1}) \frac{L(2s_1,\chi_1^2)}{L(1+2s_1,\chi_1^2)\varepsilon(2s_1,\chi_1^2)}$
$w_1w_2w_1$	$r_C(s_1 - s_2, \chi_1\chi_2^{-1}) \frac{L(2s_1,\chi_1^2)}{L(1+2s_1,\chi_1^2)\varepsilon(2s_1,\chi_1^2)} r_C(s_1 + s_2, \chi_1\chi_2)$
$w_2w_1w_2$	$\frac{L(2s_2,\chi_2^2)}{L(1+2s_2,\chi_2^2)\varepsilon(2s_2,\chi_2^2)} r_C(s_1 + s_2, \chi_1\chi_2) \frac{L(2s_1,\chi_1^2)}{L(1+2s_1,\chi_1^2)\varepsilon(2s_1,\chi_1^2)}$
$w_1w_2w_1w_2$	$\frac{L(2s_2,\chi_2^2)}{L(1+2s_2,\chi_2^2)\varepsilon(2s_2,\chi_2^2)} r_C(s_1 + s_2, \chi_1\chi_2)$ $\frac{L(2s_1,\chi_1^2)}{L(1+2s_1,\chi_1^2)\varepsilon(2s_1,\chi_1^2)} r_C(s_1 - s_2, \chi_1\chi_2^{-1})$

Tablica C. Normalizacijski faktori od $A(\underline{s}, \pi', w)$ za $w \in W(M_0')$ u slučaju C

3.5 Lema o ireducibilnosti slike

Na samom kraju ovog poglavlja o normalizaciji operatora ispreplitanja navodimo lemu koja je korisna pri dokazivanju ireducibilnosti dijelova rezidualnog spektra dobivenih računom polova Eisensteinovih redova u sljedećem poglavlju. Ti dijelovi rezidualnog spektra izomorfni su slici određenog normaliziranog operatora ispreplitanja čiju ireducibilnost garantira ova lema. Lema je generalizacija opservacije na stranici 135 u [30].

Lema 3.5.1. *Neka je G reduktivna grupa definirana nad k i π_v ireducibilna reprezentacija od $M(k_v)$, gdje je M Levijev faktor standardne prave paraboličke podgrupe P. Pretpostavimo da je π_v jedinstvena ireducibilna podreprezentacija inducirane reprezentacije*

$$I_L^M(\underline{s}', \tau_v),$$

gdje je $L \subseteq M$ Levijev faktor standardne paraboličke podgrupe, τ_v temperirana reprezentacija od $L(k_v)$ te $\underline{s}' \in \mathfrak{a}^*_{L,\mathbb{C}}$. Ako postoje elementi Weylove grupe w' i w'' takvi da vrijedi

1. *$Re\,(w'^{-1}(\underline{s} + \underline{s}'))$ je u pozitivnoj Weylovoj komori od $\mathfrak{a}^*_{w'^{-1}(L),\mathbb{C}}$,*
2. *$w''ww'$ je dugi element Weylove grupe od $(G, w'^{-1}(L))$,*
3. *$N(w(\underline{s}+\underline{s}'), w(\tau_v), w'')$ je injektivan na podreprezentaciji $I(w(\underline{s}), w(\pi_v))$,*
4. *slika od $N(w'^{-1}(\underline{s} + \underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v), w')$ je $I(\underline{s}, \pi_v)$,*

onda je slika normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N(\underline{s}, \pi_v, w)$$

ireducibilna.

Dokaz. Po dekompoziciji normaliziranog operatora ispreplitanja iz (3.12) vrijedi

$$N(w'^{-1}(\underline{s} + \underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v), w''ww') =$$

$$= N(w(\underline{s}+\underline{s}'), w(\tau_v), w'')N(\underline{s}+\underline{s}', \tau_v, w)N(w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v), w').$$

Budući da je slika operatora $N(w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v), w')$ izomorfna $I(\underline{s}, \pi_v)$, a $N(w(\underline{s}+\underline{s}'), w(\tau_v), w'')$ je injektivan, slika od

$$N(\underline{s}, \pi_v, w) = N(\underline{s}+\underline{s}', \tau_v, w)\Big|_{I(\underline{s},\pi_v)}$$

je izomorfna slici od $N(w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v), w''ww')$. Međutim, to je normalizirani dugi operator ispreplitanja Langlandsove klasifikacije jer je $w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}')$ u pozitivnoj Weylovoj komori i $w'^{-1}(\tau_v)$ temperirana. Stoga je njegova slika ireducibilna. □

Korolar 3.5.2. *U posebnom slučaju prethodne leme, za $G = G_2'$ i Levijev faktor $w'^{-1}(L) = M_0'$ na nerascjepivom mjestu $v \in S$, zahtjev da je $w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}') = (s_1, s_2)$ u pozitivnoj Weylovoj komori može se zamijeniti slabijim uvjetom*

$$s_1 \geqslant s_2 > 0.$$

U rascjepivom slučaju $G = SO_8$ i $w'^{-1}(L) = GL_{n_1} \times \ldots \times GL_{n_k}$, gdje je $n_1 + \ldots + n_k = 4$, ako je τ_v kvadratno integrabilna, onda se zahtjev da je $w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}') = (s_1, \ldots, s_k)$ u pozitivnoj Weylovoj komori može zamijeniti slabijim uvjetom

$$\begin{aligned} s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_k > 0, &\quad \textit{ako je } n_k > 1, \\ s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_{k-1} \geqslant |s_k| > 0, &\quad \textit{ako je } n_k = 1 \textit{ i } s_k \neq 0, \\ s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_{k-1} > |s_k| = 0, &\quad \textit{ako je } n_k = 1 \textit{ i } s_k = 0. \end{aligned}$$

Dokaz. U specijalnim slučajevima ovog korolara slabiji zahtjev na $w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}')$ je upravo zahtjev Langlandsove klasifikacije ako se uzme u obzir činjenica da je za $GL_n'(k_v)$ i $GL_n(k_v)$ temperirana reprezentacija puna inducirana reprezentacija s kvadratno integrabilne reprezentacije Levijeve podgrupe. □

Poglavlje 4

Dekompozicija rezidualnog spektra

U ovom završnom poglavlju ove disertacije izračunata je dekompozicija dijela rezidualnog spektra hermitske kvaternionske grupe G'_2 koji dolazi od minimalne paraboličke podgrupe s Levijevim faktorom $M'_0 \cong GL'_1 \times GL'_1$. Primijenjena je Langlandsova spektralna teorija iz prvog poglavlja koja račun svodi na određivanje polova sume standardnih operatora ispreplitanja i njihovog iteriranog poništavanja u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Pritom su korištene normalizacije operatora ispreplitanja iz trećeg poglavlja. Budući da su globalni normalizirani operatori ispreplitanja koji se javljaju u računu holomorfni i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore, proučavanje polova svodi se na analitička svojstva globalnih normalizacijskih faktora koji su dani u terminima L–funkcija i ε–faktora.

Stoga ovo poglavlje započinje pregledom analitičkih svojstava lokalnih i globalnih L–funkcija koje se javljaju u globalnim normalizacijskim faktorima. U ostatku poglavlja redom se dekomponiraju dijelovi rezidualnog spektra za svaki od slučajeva A, B i C. U svakom od tih slučajeva odvojeno se računa doprinos svakog mogućeg pola.

U čitavom poglavlju pretpostavlja se da su kuspidalne automorfne reprezentacije odabrane tako da su polovi Eisensteinovih redova, a time i globalnih L–funkcija realni. Kao što je već napomenuto u poglavlju 1.3 o Eisensteinovim redovima svaka kuspidalna automorfna reprezentacija nakon zakretanja pogodnom imaginarnom potencijom apsolutne vrijednosti reducirane norme ima to svojstvo. Stoga pretpostavka da su polovi realni ne smanjuje općenitost računa već predstavlja samo pogodan izbor koordinata za prikaz rezultata.

4.1 Svojstva L–funkcija

U sljedećim lemama sakupljena su analitička svojstva lokalnih i globalnih Heckeovih, glavnih za GL_2 te Rankin–Selbergovih za $GL_2 \times GL_2$ L–funkcija. Svi ε–faktori su cijele funkcije od s koje nemaju nultočki pa se oni ne spominju u lemama. Kao što je napomenuto u uvodu ovog poglavlja, u svim tvrdnjama pretpostavljamo da su kuspidalne automorfne reprezentacije odabrane tako da su polovi L–funkcija realni.

Lema 4.1.1. (Heckeove L–funkcije) *Neka je $\mu = \otimes_v \mu_v$ unitarni karakter od $\mathbb{A}^\times/k^\times$. Tada, ako je $\mu = \mathbf{1}$ trivijalan karakter, onda globalna Heckeova L–funkcija $L(s,\mu)$ ima polove prvog reda u $s=0$ i $s=1$, a ako μ nije trivijalan, onda je $L(s,\mu)$ cijela funkcija. U oba slučaja $L(s,\mu)$ nema nultočki za $Re(s) \geqslant 1$. Vrijedi globalna funkcionalna jednadžba*

$$L(s,\mu) = \varepsilon(s,\mu) L(1-s,\mu^{-1}).$$

Neka je v nearhimedsko mjesto od k. Ako je $\mu_v = \mathbf{1}_v$ trivijalan karakter od $k_v^\times$, onda realan pol lokalna Heckeova L–funkcija $L(s,\mu_v)$ ima u $s=0$ i to prvog reda, a ako μ_v nije trivijalan, onda je $L(s,\mu_v)$ cijela funkcija. U oba slučaja $L(s,\mu_v)$ nema nultočki.

Dokaz. Sve tvrdnje ove leme mogu se naći u [57]. Točnije, lokalne tvrdnje slijede direktno iz definicije lokalnih L–funkcija u poglavlju 2.4, a globalne su teorem 4.4.1. Uočimo da je globalna Heckeova L–funkcija $L(s,\mathbf{1})$ za trivijalni karakter $\mathbf{1}$ od $\mathbb{A}^\times/k^\times$ zapravo potpuna ζ–funkcija polja algebarskih brojeva k. $\square$

Lema 4.1.2. (Glavne L–funkcije za GL_2) *Neka je $\sigma \cong \otimes_v \sigma_v$ kuspidalna automorfna reprezentacija grupe $GL_2(\mathbb{A})$. Tada je globalna glavna L–funkcija $L(s,\sigma)$ cijela i nema nultočki za $Re(s) \geqslant 1$. Vrijedi funkcionalna jednadžba*

$$L(s,\sigma) = \varepsilon(s,\sigma) L(1-s,\widetilde{\sigma}).$$

Neka je v nearhimedsko mjesto od k. Tada, ako je σ_v superkuspidalna, onda je

$$L(s,\sigma_v) = 1,$$

a ako je σ_v kvadratno integrabilna, pa stoga izomorfna St_{μ_v} za neki unitarni karakter μ_v od $k_v^\times$, onda je

$$L(s,\sigma_v) = L(s+1/2,\mu_v).$$

Dokaz. Sve tvrdnje ove leme o lokalnim i globalnim glavnim L–funkcijama za GL_2 mogu se naći u [26]. Točnije, tvrdnje o lokalnim L–funkcijama su u dokazu teorema 2.18 za superkuspidalnu reprezentaciju, odnosno u propoziciji 3.6 za kvadratno integrabilnu reprezentaciju. Tvrdnje o globalnim L–funkcijama su u teoremu 11.1. Analogni lokalni rezultati za GL_n mogu se naći u [28], a globalni u [13]. □

Lema 4.1.3. (Rankin–Selbergove L–funkcije parova za $GL_2 \times GL_2$) *Neka su $\sigma_1 \cong \otimes_v \sigma_{1,v}$ i $\sigma_2 \cong \otimes_v \sigma_{2,v}$ kuspidalne automorfne reprezentacije grupe $GL_2(\mathbb{A})$. Po definiciji, promjena poretka reprezentacija ne utječe na lokalne i globalne Rankin–Selbergove L–funkcije i ε–faktore.*

Ako je $\sigma_1 \cong \widetilde{\sigma}_2$, onda globalna Rankin–Selbergova L–funkcija $L(s,\sigma_1\times\sigma_2)$ ima polove prvog reda u $s=0$ i $s=1$, a inače je cijela funkcija. U oba slučaja $L(s,\sigma_1\times\sigma_2)$ nema nultočki za $Re(s)\geqslant 1$. Vrijedi funkcionalna jednadžba

$$L(s,\sigma_1\times\sigma_2) = \varepsilon(s,\sigma_1\times\sigma_2)L(1-s,\widetilde{\sigma}_1\times\widetilde{\sigma}_2).$$

Neka je v nearhimedsko mjesto od k. Tada, ako je $\sigma_{1,v}$ kvadratno integrabilna, pa stoga izomorfna $St_{\mu_{1,v}}$ za neki unitarni karakter $\mu_{1,v}$ od $k_v^\times$, a $\sigma_{2,v}$ superkuspidalna, onda je

$$L(s,\sigma_{1,v}\times\sigma_{2,v}) = L(s+1/2,\mu_{1,v}\sigma_{2,v}).$$

Za $i=1,2$, ako su $\sigma_{i,v}$ kvadratno integrabilne, pa stoga izomorfne $St_{\mu_{i,v}}$ za neke unitarne karaktere $\mu_{i,v}$ od $k_v^\times$, onda je

$$L(s,\sigma_{1,v}\times\sigma_{2,v}) = L(s+1,\mu_{1,v}\mu_{2,v})L(s,\mu_{1,v}\mu_{2,v}).$$

Dokaz. Sve tvrdnje ove leme o Rankin–Selbergovim L–funkcijama parova za $GL_2\times GL_2$ mogu se naći u [27]. Točnije, lokalne tvrdnje na nearhimedskim mjestima su teorem 15.1, a globalne tvrdnje teorem 19.14. Analogni općenitiji rezultati o Rankin–Selbergovim L–funkcijama parova za $GL_n\times GL_m$ mogu se naći u [29]. □

Na kraju navodimo lemu koja se koristi na više mjesta pri računanju reziduuma normalizacijskih faktora u nastavku.

Lema 4.1.4. *Neka je $L(s)$ meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$ koja ima samo polove prvog reda, nema nultočku u $s = 0$ i zadovoljava funkcionalnu jednadžbu*

$$L(s) = \varepsilon(s)L(1 - s),$$

gdje je $\varepsilon(s)$ cijela funkcija koja nema nultočki takva da je

$$\varepsilon(0)\varepsilon(1) = 1.$$

Tada je

$$\frac{L(s)}{L(1+s)\varepsilon(s)}\Big|_{s=0} = \begin{cases} -1, & \textit{ako je } s = 0 \textit{ pol prvog reda funkcije } L(s), \\ \ \ 1, & \textit{ako u } s = 0 \textit{ funkcija } L(s) \textit{ nema pol.} \end{cases}$$

Posebno, uvjete ove leme zadovoljavaju sve globalne L–funkcije i ε–faktori koji se javljaju u računima.

Dokaz. Po funkcionalnoj jednadžbi

$$L(1 + s)\varepsilon(s) = L(-s)\varepsilon(1 + s)\varepsilon(s).$$

Budući da je $\varepsilon(0)\varepsilon(1) = 1$, traženi kvocijent je jednak

$$\frac{L(s)}{L(1+s)\varepsilon(s)}\Big|_{s=0} = \frac{L(s)}{L(-s)}\Big|_{s=0}.$$

Sada, ako $L(s)$ nema pol u $s = 0$, onda se $L(0) \neq 0$ u brojniku i nazivniku pokrate i dobivamo 1. Ako $L(s)$ ima pol prvog reda u $s = 0$, neka je

$$L(s) = \frac{a_{-1}}{s} + \sum_{n \geqslant 0} a_n s^n$$

Laurentov razvoj od $L(s)$ oko $s = 0$. Tada je kvocijent jednak

$$\frac{L(s)}{L(-s)}\Big|_{s=0} = \frac{\frac{a_{-1}}{s} + \sum_{n\geqslant 0} a_n s^n}{\frac{-a_{-1}}{s} + \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n s^n}\Big|_{s=0} = -1.$$

□

4.2 Prostor L^2_A

Prema teoremu 1.3.3, prostor $L^2_{P'_0,res}$ je dio rezidualnog spektra koji se dobiva iteriranim poništavanjem polova u zatvaraču pozitivne Weylove komore Eisensteinovih redova određenih kuspidalnom automorfnom reprezentacijom Levijevog faktora $M'_0(\mathbb{A}) \cong GL'_1(\mathbb{A}) \times GL'_1(\mathbb{A})$ standardne paraboličke podrupe $P'_0(\mathbb{A})$ od $G'_2(\mathbb{A})$. Prema propoziciji 1.3.5, polovi Eisensteinovog reda podudaraju se s polovima sume operatora ispreplitanja (1.3). Budući da prema rezultatima trećeg poglavlja globalni normalizacijski faktori operatora ispreplitanja ovise o tome u koji od slučajeva A, B i C spada kuspidalna automorfna reprezentacija od $M'_0(\mathbb{A})$, prvi korak u dekompoziciji prostora $L^2_{P'_0,res}$ je rastav na prostore koji odgovaraju svakom od ta tri slučaja

$$L^2_{P'_0,res} \cong L^2_A \oplus L^2_B \oplus L^2_C. \tag{4.1}$$

U ovom poglavlju računamo dekompoziciju prostora L^2_A koji se dobiva preko polova Eisensteinovih redova za kuspidalne automorfne reprezentacije Levijevog faktora $M'_0(\mathbb{A})$ koje spadaju u slučaj A.

Dakle, neka je $\pi' \cong \pi'_1 \otimes \pi'_2$ kuspidalna automorfna reprezentacija od $M'_0(\mathbb{A})$ koja spada u slučaj A. To znači da kuspidalne automorfne reprezentacije π'_1 i π'_2 od $GL'_1(\mathbb{A})$ nisu jednodimenzionalne. Tada su globalni normalizacijski faktori operatora ispreplitanja dani u tablici A u poglavlju 3.4.2 koristeći globalne Rankin–Selbergove L–funkcije i ε–faktore parova za globalne liftove π_1 i π_2 reprezentacija π'_1 i π'_2, te globalne Heckeove L–funkcije i ε–faktore njihovih centralnih karaktera. Po definiciji globalnog lifta iz poglavlja 2.2.1, π_1 i π_2 su kuspidalne automorfne reprezentacije od $GL_2(\mathbb{A})$. Globalni normalizirani operatori ispreplitanja su holomorfni i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore po teoremu 3.4.1. Stoga, prema analitičkim svojstvima globalnih Rankin–Selbergovih L–funkcija iz leme 4.1.3 i globalnih Heckeovih L–funkcija iz leme 4.1.1, mogući polovi normalizacijskih faktora operatora ispreplitanja iz tablice A, a time i Eisensteinovih redova, nalaze se u singularnim ravninama

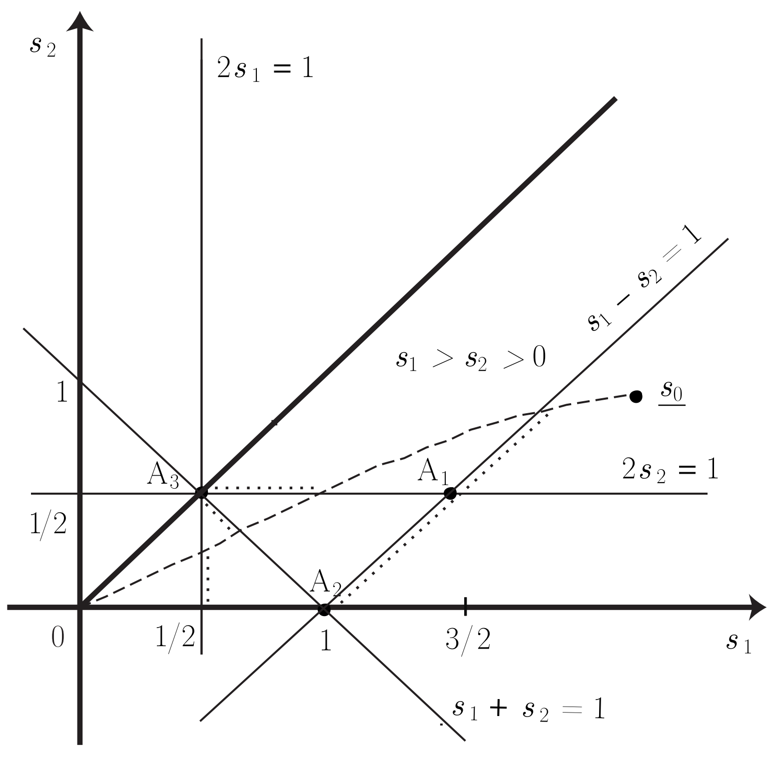
$$\begin{aligned} s_1 - s_2 &= 1, \\ s_1 + s_2 &= 1, \\ 2s_1 &= 1, \\ 2s_2 &= 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pritom smo pretpostavili da je kuspidalna automorfna reprezentacija π' odabrana tako da su polovi Eisensteinovih redova realni. Stoga na slici A, singularne ravnine i postupak pomaka linije integracije iz teorema 1.3.3 u ishodište možemo prikazati koristeći samo realni dio prostora $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$.

Pri pomaku linije integracije u integralu (1.1) iz teorema 1.3.3 od $\underline{s}_0$ u ishodište prostora $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$ kao na slici A, prelazimo singularne ravnine. Na tim ravninama biramo koordinatne sustave s ishodištem u ortogonalnoj projekciji ishodišta od $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$. Zatim, pomakom linije integracije iz točke presjeka sa singularnom ravninom u ishodište te ravnine kao na slici A prelazimo preko točaka presjeka s drugim singularnim ravninama. Takve točke su mogući iterirani polovi operatora ispreplitanja. U slučaju A dobiju se tri takve točke

$$A_1(3/2, 1/2), \quad A_2(1, 0), \quad A_3(1/2, 1/2).$$

Točke A_1 i A_2 leže na singularnoj ravnini $s_1 - s_2 = 1$, a točka A_3 leži na $2s_2 = 1$.



Slika A. Singularne ravnine u slučaju A

Koordinatni sustav na singularnoj ravnini $s_1 - s_2 = 1$ čije je ishodište ortogonalna projekcija ishodišta od $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$ zadan je s

$$\begin{aligned} s_1 &= z + 1/2, \\ s_2 &= z - 1/2, \end{aligned} \tag{4.3}$$

gdje je z nova koordinata. Tada, za točku A_1 je $z = 1$, a za točku A_2 je $z = 1/2$.

Za singularnu ravninu $2s_2 = 1$ koordinatni sustav zadan je s

$$\begin{aligned} s_1 &= z, \\ s_2 &= 1/2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

gdje je z nova koordinata. Za točku A_3 je $z = 1/2$.

Obzirom na tri moguća pola Eisensteinovog reda dio rezidualnog spektra L^2_A se dalje dekomponira u

$$L^2_A \cong L^2_{A_1} \oplus L^2_{A_2} \oplus L^2_{A_3}, \tag{4.5}$$

gdje su $L^2_{A_1}$, $L^2_{A_2}$ i $L^2_{A_3}$ razapeti izrazima koji se dobiju nakon iteriranog poništavanja polova Eisensteinovih redova redom u točkama A_1, A_2 i A_3. U nastavku dajemo odvojeno dekompoziciju svakog od tih prostora.

4.2.1 Prostor $L^2_{A_1}$

U sljedećem teoremu dana je dekompozicija potprostora $L^2_{A_1}$ rezidualnog spektra grupe G'_2 koji se dobije iteriranim poništavanjem polova u točki A_1.

Teorem 4.2.1. (Dekompozicija prostora $L^2_{A_1}$) *Potprostor $L^2_{A_1}$ rezidualnog spektra grupe G'_2 dekomponira se u*

$$L^2_{A_1} = \oplus_{\pi'} \mathcal{A}_1(\pi'),$$

gdje je suma po svim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong \pi'_1 \otimes \pi'_2$ od $M'_0(\mathbb{A})$ takvim da π'_1 i π'_2 nisu jednodimenzionalne i vrijedi

(1) $\pi'_1 \cong \pi'_2$,

(2) *centralni karakter $\omega_{\pi'_1} = \omega_{\pi'_2}$ je trivijalan.*

Prostor $\mathcal{A}_1(\pi')$ je ireducibilan prostor automorfnih formi razapet iteriranim reziduumom u $\underline{s} = (3/2, 1/2)$ Eisensteinovog reda određenog s π', a prelaskom na konstantni član Eisensteinovog reda izomorfan je slici normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N((3/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$

Dokaz. Najprije podsjetimo da u čitavom ovom poglavlju 4.2 reprezentacije π_1' i π_2' nisu jednodimenzionalne. Doprinos iteriranog pola u točki A_1 sumi operatora ispreplitanja (1.3) iz propozicije 1.3.5 dobiva se poništavanjem najprije pola duž singularne ravnine $s_1 - s_2 = 1$, a zatim, koristeći novu koordinatu z definiranu na toj ravnini s (4.3), poništavanjem pola u $z = 1$. Koristeći analitička svojstva Rankin–Selbergovih L–funkcija iz leme 4.1.3, pol duž ravnine $s_1 - s_2 = 1$ globalnih normalizacijskih faktora iz tablice A javlja se ako i samo ako je $\pi_1 \cong \pi_2$. Tada pol prvog reda imaju normalizacijski faktori operatora ispreplitanja koji odgovaraju elementima Weylove grupe w_1, w_2w_1, $w_1w_2w_1$ i $w_1w_2w_1w_2$. Do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1}L(s,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)}{L(2,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)\varepsilon(1,\pi_1\times\widetilde{\pi}_2)}$$

koja je različita od nule, njihovi reziduumi duž $s_1 - s_2 = 1$, zapisani u novoj varijabli z, dani su u tablici A-I.

w	$Res_{s_1-s_2=1}r(\underline{s},\pi',w)$
w_1	1
w_2w_1	$\frac{L(1+2z,\omega_{\pi_1})}{L(2+2z,\omega_{\pi_1})\varepsilon(1+2z,\omega_{\pi_1})}$
$w_1w_2w_1$	$\frac{L(1+2z,\omega_{\pi_1})}{L(2+2z,\omega_{\pi_1})\varepsilon(1+2z,\omega_{\pi_1})}\frac{L(2z,\pi_1\times\pi_2)}{L(1+2z,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(2z,\pi_1\times\pi_2)}$
$w_1w_2w_1w_2$	$\frac{L(-1+2z,\omega_{\pi_2})}{L(2z,\omega_{\pi_2})\varepsilon(-1+2z,\omega_{\pi_2})}\frac{L(2z,\pi_1\times\pi_2)}{L(1+2z,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(2z,\pi_1\times\pi_2)}\frac{L(1+2z,\omega_{\pi_1})}{L(2+2z,\omega_{\pi_1})\varepsilon(1+2z,\omega_{\pi_1})}$

Tablica A-I. Reziduumi normalizacijskih faktora duž $s_1 - s_2 = 1$ u slučaju A

Po svojstvima L–funkcija iz lema 4.1.1 i 4.1.3, pol u točki A_1, odnosno u $z = 1$, izraza u tablici A-I javlja se ako i samo je centralni karakter ω_{π_2}

trivijalan. Tada pol prvog reda ima jedino izraz koji odgovara elementu Weylove grupe $w_1w_2w_1w_2$ i reziduum je do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1}L(s,\mathbf{1})}{L(2,\mathbf{1})\varepsilon(1,\mathbf{1})}\frac{L(2,\pi_1\times\pi_2)}{L(3,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(2,\pi_1\times\pi_2)}\frac{L(3,\mathbf{1})}{L(4,\mathbf{1})\varepsilon(3,\mathbf{1})}$$

različitu od nule, gdje je $\mathbf{1}$ trivijalni karakter od $\mathbb{A}^\times/k^\times$, jednak normaliziranom operatoru ispreplitanja

$$N((3/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$

Kriterij kvadratne integrabilnosti iteriranog reziduuma iz leme 1.3.6 je ispunjen jer je

$$w_1w_2w_1w_2(3/2,1/2)=(-3/2,-1/2).$$

Budući da su π_1' i π_2' izomorfne ako i samo su π_1 i π_2 izomorfne, a globalni lift čuva centralni karakter, doprinos $\mathcal{A}_1(\pi')$ potprostoru $L^2_{A_1}$ daju samo kuspidalne automorfne reprezentacije π' od $M_0'(\mathbb{A})$ koje zadovoljavaju uvjete iz teorema i taj doprinos je izomorfan slici normaliziranog operatora ispreplitanja $N((3/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2)$.

Preostaje dokazati da je slika tog operatora ireducibilna. Koristeći lemu 3.5.1 dokazujemo ireducibilnost slike lokalnih normaliziranih operatora ispreplitanja $N((3/2,1/2),\pi_v',w_1w_2w_1w_2)$ na svim mjestima v od k. Neka je $w=w_1w_2w_1w_2$ i $\underline{s}=(3/2,1/2)$. Na svim onim mjestima na kojima je reprezentacija π_v' temperirana slika je ireducibilna po Langlandsovoj klasifikaciji iz poglavlja 2.2.2 jer je $\underline{s}$ u pozitivnoj Weylovoj komori i w dugi element Weylove grupe za (G_2',M_0'). Uočimo da je na nerascjepivim mjestima $v\in S$ svaka reprezentacija π_v' superkuspidalna pa je za takva mjesta ireducibilnost slike dokazana.

Za rascjepiva mjesta na kojima reprezentacija $\pi_v\cong\pi_{1,v}\otimes\pi_{2,v}$ nije temperirana barem jedna od reprezentacija $\pi_{i,v}$ za $i=1,2$ je reprezentacija komplementarne serije, odnosno puna inducirana reprezentacija

$$\pi_{i,v}\cong\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)}(\mu_{i,v}|\cdot|^{r_i}\otimes\mu_{i,v}|\cdot|^{-r_i}),$$

gdje je $0<r_i<1/2$ i $\mu_{i,v}$ unitarni karakter od $k_v^\times$. Tada je π_v puna inducirana reprezentacija s temperirane reprezentacije Levijevog faktora manje paraboličke podgrupe. U oznakama iz leme 3.5.1, Levijev faktor L je jedan od Levijevih faktora $GL_1\times GL_1\times GL_2$, $GL_2\times GL_1\times GL_1$, $GL_1\times GL_1\times GL_1\times GL_1$

te

$$\underline{s} + \underline{s}' = \begin{cases} (3/2 + r_1, 3/2 - r_1, 1/2), \\ (3/2, 1/2 + r_2, 1/2 - r_2), \\ (3/2 + r_1, 3/2 - r_1, 1/2 + r_2, 1/2 - r_2), \end{cases}$$

gdje je $0 < r_i < 1/2$. Neka je, u oznakama leme 3.5.1, $w' = 1$ i w'' element Weylove grupe koji odgovara permutaciji

$$w'' = \begin{cases} (1, 2)(3), \\ (1)(2, 3), \\ (1, 2)(3, 4), \end{cases}$$

kao u dokazu propozicije 3.2.1. Tada je $w''ww'$ dugi element Weylove grupe za (SO_8, L), a $\underline{s}+\underline{s}'$ je u pozitivnoj Weylovoj komori. Normalizirani operator

$$N(w(\underline{s}), w(\pi_v), w'') = N(w(\underline{s} + \underline{s}'), w(\tau_v), w'')$$

je izomorfizam jer je to operator za $GL_1 \times GL_1 \subset GL_2$ ili kompozicija dva takva operatora koji djeluju na ireducibilnoj induciranoj reprezentaciji po lemi 2.2.9. Stoga su ispunjeni uvjeti leme 3.5.1 pa je slika normaliziranog operatora ispreplitanja $N((3/2, 1/2), \pi_v, w)$ ireducibilna. □

4.2.2 Prostor $L^2_{A_2}$

Prije dekompozicije prostora $L^2_{A_2}$ uvedimo oznake vezane za induciranu reprezentaciju

$$\mathrm{Ind}_{GL_1'(k_v)}^{G_1'(k_v)} \sigma_v'$$

grupe $G_1'(k_v)$ i normalizirani operator ispreplitanja

$$N(0, \sigma_v', w_2),$$

gdje je σ_v' samokontragredijentna ireducibilna unitarna reprezentacija od $GL_1'(k_v)$. Pritom koristimo lemu 2.2.11 o reducibilnostima te inducirane reprezentacije da bi izračunali djelovanje normaliziranog operatora u sljedećoj lemi.

Lema 4.2.2. *Ako je centralni karakter $\omega_{\sigma_v'}$ trivijalan, onda normalizirani operator ispreplitanja*

$$N(0, \sigma_v', w_2)$$

djeluje na ireducibilnoj reprezentaciji $\pi'_v = \mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v)}^{G'_1(k_v)} \sigma'_v$ *kao* Id_v *ili* $-Id_v$. *Ako je pak* $\omega_{\sigma'_v}$ *netrivijalan, onda taj normalizirani operator ispreplitanja djeluje na svakoj od dvije ireducibilne komponente od* $\pi'_v = \mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v)}^{G'_1(k_v)} \sigma'_v$ *različitim skalarom iz skupa* $\{1, -1\}$.

U oba slučaja, za skalar η_v, *ireducibilnu komponentu od* π'_v *na kojoj operator* $N(0, \sigma'_v, w_2)$ *djeluje kao* $\eta_v Id_v$ *označavamo sa* $\sigma'^{\eta_v}_v$. *Ako je* v *rascjepivo mjesto i* σ'_v *nerazgranata, onda* π'_v *sadrži nerazgranatu komponentu i na njoj* $N(0, \sigma'_v, w_2)$ *djeluje kao identiteta.*

Dokaz. Normalizirani operator $N(0, \sigma'_v, w_2)$ isprepliće π'_v sa samim sobom i kvadrat mu je identiteta. Prema lemi 2.2.11, ako je centralni karakter $\omega_{\sigma'_v}$ trivijalan, onda je inducirana reprezentacija π'_v ireducibilna pa operator $N(0, \sigma'_v, w_2)$ djeluje kao Id_v ili $-Id_v$ po lemi 2.2.8. Prema lemi 2.2.11, ako centralni karakter $\omega_{\sigma'_v}$ nije trivijalan, onda se π'_v reducira u direktnu sumu dvije ireducibilne podreprezentacije koje nisu međusobno izomorfne. Tada $N(0, \sigma'_v, w_2)$ nije skalar na čitavom prostoru reprezentacije π'_v i isprepliće svaku komponentu posebno. Dakle, taj operator djeluje na svakoj komponenti kao različiti skalar iz skupa $\{1, -1\}$. Za nerazgranatu reprezentaciju normalizirani operator ispreplitanja je identiteta po samoj definiciji normalizacije. □

Promotrimo sada induciranu reprezentaciju

$$\mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v) \times GL'_1(k_v)}^{G'_2(k_v)} (\pi'_{1,v} \nu \otimes \pi'_{2,v}).$$

Pritom, ν označava kao i u prethodnim poglavljima apsolutnu vrijednost reducirane norme na nerascjepivim mjestima, odnosno determinante na rascjepivim mjestima. Indukcijom u koracima ta inducirana reprezentacija je izomorfna

$$\mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v) \times G'_1(k_v)}^{G'_2(k_v)} \left(\pi'_{1,v} \nu \otimes \mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v)}^{G'_1(k_v)} \pi'_{2,v} \right).$$

Prema prethodnoj lemi 4.2.2, koristeći uvedene oznake, dalje je izomorfna

$$\mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v) \times G'_1(k_v)}^{G'_2(k_v)} \left(\pi'_{1,v} \nu \otimes \pi'^{\eta_v}_{2,v} \right),$$

ako je centralni karakter $\omega_{\pi'_{2,v}}$ trivijalan, gdje je $\eta_v \in \{\pm 1\}$, odnosno

$$\bigoplus_{\eta_v \in \{1,-1\}} \mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v) \times G'_1(k_v)}^{G'_2(k_v)} \left(\pi'_{1,v} \nu \otimes \pi'^{\eta_v}_{2,v} \right),$$

ako je centralni karakter $\omega_{\pi'_{2,v}}$ netrivijalan. Sliku djelovanja normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N((1,0),\pi'_{1,v}\otimes\pi'_{2,v},w_1w_2w_1)$$

na svakoj od ireducibilnih komponenti označavamo s $\Pi_v'^{\eta_v}$. Uočimo da ako je centralni karakter $\omega_{\pi'_2}$ globalne reprezentacije π'_2 trivijalan, onda su skalari $\eta_v \in \{\pm 1\}$ jedinstveno određeni za svako mjesto v. Ako je $\omega_{\pi'_2}$ netrivijalan, onda je $\eta_v \in \{\pm 1\}$ jedinstveno određen samo na onim mjestima v na kojima je $\omega_{\pi'_{2,v}}$ trivijalan, dok na mjestima v na kojima je $\omega_{\pi'_{2,v}}$ netrivijalan postoje dva moguća izbora vrijednosti skalara η_v. Na skoro svim mjestima, točnije, na rascjepivim mjestima na kojima su reprezentacije nerazgranate je $\eta_v = 1$.

Teorem 4.2.3. (Dekompozicija prostora $L^2_{A_2}$) *Potprostor $L^2_{A_2}$ rezidualnog spektra grupe G'_2 dekomponira se u*

$$L^2_{A_2} = \left(\oplus_{\pi'}\mathcal{A}_2^{(1)}(\pi')\right) \oplus \left(\oplus_{\pi'}\mathcal{A}_2^{(2)}(\pi')\right).$$

Pritom je prva suma po svim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong \pi'_1 \otimes \pi'_2$ od $M'_0(\mathbb{A})$ takvim da π'_1 i π'_2 nisu jednodimenzionalne i vrijedi

(1-1) $\pi'_1 \cong \pi'_2$,

(1-2) *π'_1 i π'_2 su samokontragredijentne,*

(1-3) *centralni karakter $\omega_{\pi'_1} = \omega_{\pi'_2}$ je trivijalan,*

(1-4) $\prod_v \eta_v = -1$,

a druga po svim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong \pi'_1 \otimes \pi'_2$ od $M'_0(\mathbb{A})$ takvim da π'_1 i π'_2 nisu jednodimenzionalne i vrijedi

(2-1) $\pi'_1 \cong \pi'_2$,

(2-2) *π'_1 i π'_2 su samokontragredijentne,*

(2-3) *centralni karakter $\omega_{\pi'_1} = \omega_{\pi'_2}$ je netrivijalan.*

Oba prostora $\mathcal{A}_2^{(1)}(\pi')$ i $\mathcal{A}_2^{(2)}(\pi')$ su prostori automorfnih formi razapeti iteriranim reziduumom u $\underline{s} = (1,0)$ Eisensteinovog reda određenog s π'. Prostor

$\mathcal{A}_2^{(1)}(\pi')$ je ireducibilan i prelaskom na konstantni član Eisensteinovog reda izomorfan slici normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N((1,0),\pi',w_1w_2w_1).$$

Prostor $\mathcal{A}_2^{(2)}(\pi')$ je prelaskom na konstantni član izomorfan sumi ireducibilnih reprezentacija oblika

$$\otimes_v \Pi_v'^{\eta_v},$$

gdje je η_v jedan od dva moguća skalara na mjestima gdje je $\omega_{\pi'_{1,v}} = \omega_{\pi'_{2,v}}$ netrivijalan, na skoro svim mjestima je $\eta_v = 1$ i produkt po svim mjestima

$$\prod_v \eta_v = 1.$$

Dokaz. Reprezentacije π_1' i π_2' nisu jednodimenzionalne jer se u čitavom poglavlju bavimo slučajem A. Iterirano poništavanje pola sume operatora ispreplitanja (1.3) iz propozicije 1.3.5 u točki A_2, kao što je prikazano na slici A, radimo najprije duž $s_1 - s_2 = 1$, a zatim, u novoj varijabli z definiranoj s (4.3), u $z = 1/2$. Pol duž ravnine $s_1 - s_2 = 1$ već smo proučili u dokazu teorema 4.2.1 o dekompoziciji prostora $L^2_{A_1}$. Pol se javlja ako i samo ako $\pi_1 \cong \pi_2$. Reziduumi u novoj varijabli z su dani u tablici A-I do na konstantu različitu od nule.

Pol u točki A_2 je zapravo pol izraza iz tablice A-I u $z = 1/2$. Prema analitičkim svojstvima Rankin–Selbergovih i Heckeovih L–funkcija iz lema 4.1.3 i 4.1.1, izrazi u tablici A-I mogu imati pol u $z = 1/2$ ako i samo ako vrijedi $\pi_1 \cong \widetilde{\pi}_2$. Tada pol prvog reda imaju izrazi koji odgovaraju elementima Weylove grupe $w_1w_2w_1$ i $w_1w_2w_1w_2$. Uočimo da su $\pi_1 \cong \pi_2$ samokontragredijentne pa su njihovi centralni karakteri kvadratni.

Do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1}L(s,\pi_1\times\pi_2)}{L(2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(1,\pi_1\times\pi_2)}\frac{L(2,\omega_{\pi_1})}{L(3,\omega_{\pi_1})\varepsilon(2,\omega_{\pi_1})}$$

različitu od nule, reziduum izraza koji odgovara elementu $w_1w_2w_1$ jednak je normaliziranom operatoru ispreplitanja

$$N((1,0),\pi',w_1w_2w_1).$$

Za reziduum izraza koji odgovara elementu $w_1w_2w_1w_2$ razlikujemo dva slučaja ovisno o ω_{π_2}.

Najprije pretpostavimo da je kvadratni centralni karakter ω_{π_2} trivijalan. Tada, po lemi 4.1.1, Heckeova L–funkcija $L(s,\omega_{\pi_2})$ ima pol prvog reda u $s=0$ i $s=1$, pa je po lemi 4.1.4 reziduum izraza koji odgovara $w_1w_2w_1w_2$, do na istu konstantu kao gore, jednak

$$-N((1,0),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$

Stoga je za trivijalni centralni karakter ω_{π_2}, do na konstantu različitu od nule, iterirani reziduum u točki A_2 sume operatora ispreplitanja (1.3) jednak

$$N((1,0),\pi',w_1w_2w_1)-N((1,0),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$

Po (3.12) lokalni normalizirani operatori ispreplitanja dekomponiraju se u skladu s rastavom elemenata Weylove grupe pa djelovanje dobivenog reziduuma na $\otimes_v f_v$ možemo zapisati kao

$$\otimes_v N((1,0),\pi'_v,w_1w_2w_1)\left[\otimes_v f_v-\otimes_v N((1,0),\pi'_v,w_2)f_v\right].$$

Pritom, operator ispreplitanja $N((1,0),\pi'_v,w_2)$ je zapravo operator ispreplitanja za $G'_1(k_v)$ koji djeluje na induciranoj reprezentaciji $\mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v)}^{G'_1(k_v)}\pi'_{2,v}$ i koji smo razmotrili u prethodnoj lemi 4.2.2. Iz te leme, budući da je centralni karakter $\omega_{\pi_{2,v}}=\omega_{\pi'_{2,v}}$ trivijalan, taj operator ispreplitanja djeluje kao $\eta_v Id_v$, gdje je skalar $\eta_v\in\{\pm1\}$ jedinstveno određen na svim mjestima. Dakle, reziduum je netrivijalan ako je

$$\prod_v\eta_v=-1$$

i tada je jednak slici normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N((1,0),\pi',w_1w_2w_1).$$

Kvadratnu integrabilnost dobivenog iteriranog reziduuma i ireducibilnost slike tog operatora dokazujemo na samom kraju dokaza. Budući da su π'_1 i π'_2 izomorfne ako i samo ako su π_1 i π_2 izomorfne, a globalni lift čuva samokontragredijentnost i centralni karakter, doprinos $\mathcal{A}_2^{(1)}(\pi')$ potprostoru $L^2_{A_2}$ daju samo kuspidalne automorfne reprezentacije π' od $M'_0(\mathbb{A})$ koje zadovoljavaju uvjete (1-1) do (1-4) iz teorema.

Pretpostavimo sada da je kvadratni centralni karakter ω_{π_2} netrivijalan. Tada, po lemi 4.1.1, Heckeova L–funkcija $L(s,\omega_{\pi_2})$ je cijela pa prema lemi

4.1.4 reziduum izraza iz tablice A-I koji odgovara elementu $w_1w_2w_1w_2$, jednak je do na istu gornju konstantu, normaliziranom operatoru isprepletanja

$$N((1,0),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$

Stoga je, u ovom slučaju, iterirani reziduum u točki A_2 konstantnog člana Eisensteinovog reda, do na konstantu različitu od nule, jednak

$$N((1,0),\pi_1'\otimes\pi_2',w_1w_2w_1)+N((1,0),\pi_1'\otimes\pi_2',w_1w_2w_1w_2).$$

Kao u prethodnom slučaju, djelovanje na $\otimes_v f_v$ možemo zapisati kao

$$\otimes_v N((1,0),\pi_{1,v}'\otimes\pi_{2,v}',w_1w_2w_1)\left[\otimes_v f_v+\otimes_v N((1,0),\pi_{1,v}'\otimes\pi_{2,v}',w_2)f_v\right].$$

Po lemi 4.2.2, u oznakama uvedenim prije iskaza teorema, operator isprepletanja $N((1,0),\pi_v',w_2)$ djeluje na f_v kao $\eta_v Id_v$ ako je $f_v\in\pi_{2,v}'^{\eta_v}$. Budući da je na skoro svim mjestima f_v invarijantna za maksimalnu kompaktnu podgrupu od $G_1'(k_v)$, skalar $\eta_v=1$ na tim mjestima. Nadalje, ako za produkt po svim mjestima ne vrijedi

$$\prod_v \eta_v=1,$$

onda se iterirani reziduum poništava. Ponovo, zbog svojstava globalnog lifta, doprinos $\mathcal{A}_2^{(2)}(\pi')$ potprostoru $L^2_{A_2}$ daju samo kuspidalne automorfne reprezentacije π' od $M_0'(\mathbb{A})$ koje zadovoljavaju uvjete (2-1) do (2-3), a zbog posljednje dvije tvrdnje taj doprinos se dekomponira u direktnu sumu iz teorema.

U oba slučaja kvadratna integrabilnost dobivenih prostora automorfnih formi slijedi po kriteriju iz leme 1.3.6 jer je

$$w_1w_2w_1w_2(1,0)=w_1w_2w_1(1,0)=(-1,0).$$

Preostaje dokazati da su $\mathcal{A}_2^{(1)}(\pi')$ i direktni sumandi $\otimes_v\Pi_v'^{\eta_v}$ u $\mathcal{A}_2^{(2)}(\pi')$ ireducibilni. Uočimo da je potprostor $\mathcal{A}_2^{(1)}(\pi')$ također oblika $\otimes_v\Pi_v'^{\eta_v}$ pa je dovoljno dokazati ireducibilnost od $\Pi_v'^{\eta_v}$ na svim mjestima v od k. Ali $\Pi_v'^{\eta_v}$ je slika djelovanja normaliziranog operatora isprepletanja

$$N((1,0),\pi_v',w_1w_2w_1)$$

na induciranoj reprezentaciji

$$\mathrm{Ind}_{GL_1'(k_v)\times G_1'(k_v)}^{G_2'(k_v)}\left(\pi_{1,v}'\nu\otimes\pi_{2,v}'^{\eta_v}\right).$$

Ako su $\pi'_{1,v}$ i $\pi'_{2,v}$ temperirane, onda je $\pi'^{\eta_v}_{2,v}$ također temperirana i slika je ireducibilna po Langlandsovoj klasifikaciji jer je $w_1w_2w_1$ dugi element Weylove grupe za $(G'_2, GL'_1 \times G'_1)$, a 1 je u pozitivnoj Weylovoj komori. Uočimo da smo time dokazali ireducibilnost na svim nerascjepivim mjestima $v \in S$ jer je za njih π'_v superkuspidalna.

Neka je v rascjepivo mjesto i neka $\pi_v \cong \pi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}$ nije temperirana. Tada, barem jedna od reprezentacija $\pi_{i,v}$, za $i = 1, 2$, grupe $GL_2(k_v)$ nije temperirana, a to znači da je reprezentacija komplementarne serije

$$\pi_{i,v} \cong \mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)} \left(\mu_{i,v}|\cdot|^{r_i} \otimes \mu_{i,v}|\cdot|^{-r_i}\right),$$

gdje je $0 < r_i < 1/2$ i $\mu_{i,v}$ unitarni karakter. Budući da su $\pi_{i,v}$ samokontragredijentne, $\mu_{i,v}$ su kvadratni karakteri. Ako je $\pi_{2,v}$ reprezentacija komplementarne serije, onda je inducirana reprezentacija $\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)}^{SO_4(k_v)}\pi_{2,v}$ ireducibilna po korolaru 2.2.12. Dakle, $\pi_{2,v}^{\eta_v}$ je puna inducirana reprezentacija s temperirane reprezentacije Levijevog faktora $GL_1(k_v) \times GL_1(k_v)$ u $SO_4(k_v)$. Drugim riječima, $\pi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}^{\eta_v}$ je u svakom slučaju puna inducirana reprezentacija s temperirane reprezentacije Levijevog faktora manje paraboličke podgrupe.

U oznakama iz leme 3.5.1, neka je $w = w_1w_2w_1$ jedinstveni netrivijalni element Weylove grupe za $GL_2 \times SO_4 \subset SO_8$ te $\underline{s} = 1$. Levijev faktor L je jedan od Levijevih faktora $GL_1 \times GL_1 \times SO_4$, $GL_2 \times GL_1 \times GL_1$, $GL_1 \times GL_1 \times GL_1 \times GL_1$, a

$$\underline{s} + \underline{s}' = \begin{cases} (1 + r_1, 1 - r_1), \\ (1, r_2, -r_2), \\ (1 + r_1, 1 - r_1, r_2, -r_2), \end{cases}$$

gdje je $0 < r_i < 1/2$. I dalje u oznakama leme 3.5.1, neka je $w' = 1$ i

$$w'' = \begin{cases} (1, 2), \\ (3, 4)w_2, \\ (1, 2)(3, 4)w_2, \end{cases}$$

pri čemu permutacije shvaćamo kao elemente Weylove grupe kao u dokazu propozicije 3.2.1. Tada je $w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}')$ u pozitivnoj Weylovoj komori u prvom slučaju, a u preostala dva slučaja zadovoljava nejednakosti iz korolara 3.5.2. Element $w''ww'$ je dugi element Weylove grupe za (SO_8, L), a normalizirani operator ispreplitanja

$$N(w(\underline{s} + \underline{s}'), w(\tau_v), w'') = N(w(\underline{s}), w(\pi'_v), w'')$$

je izomorfizam. Dakle, prema lemi 3.5.1, $\Pi_v'^{\eta_v}$ je ireducibilna. Uočimo jedino da u drugom slučaju ako $\pi_{1,v}$ nije kvadratno integrabilna zapravo ne možemo direktno primijeniti korolar 3.5.2. Međutim, tada je $\pi_{1,v}$ puna inducirana reprezentacija s kvadratno integrabilne reprezentacije od $GL_1(k_v) \times GL_1(k_v)$ pa zamjenom u drugom slučaju $\underline{s} + \underline{s}'$ s $(1, 1, r_2, -r_2)$ te w'' s $(1, 2)(3, 4)w_2$ ipak možemo primijeniti korolar 3.5.2. □

4.2.3 Prostor $L^2_{A_3}$

Prije same dekompozicije prostora $L^2_{A_3}$ uvodimo oznake vezane uz djelovanje normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N(0, \pi'_{1,v} \otimes \pi'_{2,v}, w_1)$$

na induciranu reprezentaciju

$$\mathrm{Ind}_{GL_1'(k_v) \times GL_1'(k_v)}^{GL_2'(k_v)} \left(\pi'_{1,v} \otimes \pi'_{2,v}\right),$$

gdje su $\pi'_{i,v}$ za $i = 1, 2$ ireducibilne unitarne reprezentacije s trivijalnim centralnim karakterima. Prema lemi 2.2.9, ta inducirana reprezentacija je ireducibilna pa po lemi 2.2.8 normalizirani operator djeluje kao skalar kojeg označavamo η_v. Budući da mu je kvadrat identiteta, $\eta_v \in \{\pm 1\}$. Na skoro svim mjestima, odnosno na svim rascjepivim mjestima na kojima su reprezentacije nerazgranate je $\eta_v = 1$ po samoj definiciji normalizacije.

Teorem 4.2.4. (Dekompozicija prostora $L^2_{A_3}$) *Potprostor $L^2_{A_3}$ rezidualnog spektra grupe G_2' dekomponira se u*

$$L^2_{A_3} = \left(\oplus_{\pi'} \mathcal{A}_3^{(1)}(\pi')\right) \oplus \left(\oplus_{\pi'} \mathcal{A}_3^{(2)}(\pi')\right).$$

Pritom je prva suma po svim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong \pi_1' \otimes \pi_2'$ od $M_0'(\mathbb{A})$ takvim da π_1' i π_2' nisu jednodimenzionalne i vrijedi

(1-1) *centralni karakteri $\omega_{\pi_1'} = \omega_{\pi_2'}$ su trivijalni,*

(1-2) $\pi_1' \ncong \pi_2'$,

(1-3) $\prod_v \eta_v = 1$,

a druga po svim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong \pi_1' \otimes \pi_2'$ od $M_0'(\mathbb{A})$ takvim da π_1' i π_2' nisu jednodimenzionalne i vrijedi

(2-1) *centralni karakteri* $\omega_{\pi'_1} = \omega_{\pi'_2}$ *su trivijalni,*

(2-2) $\pi'_1 \cong \pi'_2$,

(2-3) $\prod_v \eta_v = -1$.

Prostor $\mathcal{A}_3^{(1)}(\pi')$ *je ireducibilan prostor automorfnih formi razapet iteriranim reziduumom u* $\underline{s} = (1/2, 1/2)$ *Eisensteinovog reda određenog s* π'*. Prostor* $\mathcal{A}_3^{(2)}(\pi')$ *je ireducibilan prostor automorfnih formi razapet iteriranim reziduumom u* $\underline{s} = (1/2, 1/2)$ *Eisensteinovog reda određenog s* π' *pomnoženog sa* $(s_1 - 1/2)$*. Oba prostora su prelaskom na konstantni član izomorfna slici normaliziranog operatora ispreplitanja*

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_2 w_1 w_2).$$

Dokaz. Kao i u čitavom ovom poglavlju 4.2, bavimo se doprinosom rezidualnom spektru kuspidalnih automorfnih reprezentacija od $M'_0(\mathbb{A})$ koje spadaju u slučaj A pa π'_1 i π'_2 nisu jednodimenzionalne. Kao što je prikazano na slici A, iterirani pol u točki A_3 sume operatora ispreplitanja (1.3) najprije poništavamo duž singularne ravnine $2s_2 = 1$, a zatim, u novoj varijabli z definiranoj s (4.4), poništavamo ga u $z = 1/2$. Iz tablice A, koristeći svojstva Rankin–Selbergovih i Heckeovih L–funkcija iz lema 4.1.3 i 4.1.1, pol duž singularne ravnine $2s_2 = 1$ se javlja ako i samo ako je ω_{π_2} trivijalan. Tada pol prvog reda imaju normalizacijski faktori operatora ispreplitanja za elemente Weylove grupe w_2, $w_1 w_2$, $w_2 w_1 w_2$ i $w_1 w_2 w_1 w_2$. Reziduumi zapisani u novoj varijabli z, do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1} L(s, \omega_{\pi_2})}{L(2, \omega_{\pi_2}) \varepsilon(1, \omega_{\pi_2})}$$

različitu od nule, dani su u tablici A-II.

Sljedeći korak je poništavanje polova izraza iz tablice A-II u $z = 1/2$. Budući da je ω_{π_2} trivijalan, π_2 je samokontragredijentna reprezentacija. Stoga su uvjeti $\pi_1 \cong \pi_2$ i $\pi_1 \cong \widetilde{\pi}_2$ ekvivalentni i impliciraju da je ω_{π_1} trivijalan. Po analitičkim svojstvima L–funkcija iz lema 4.1.3 i 4.1.1, da bi postojao pol u $z = 1/2$ izraza u tablici A-II centralni karakter ω_{π_1} mora biti trivijalan. Uz pretpostavku da su $\omega_{\pi_1} = \omega_{\pi_2}$ trivijalni promatramo dva slučaja ovisno o tome da li su π_1 i π_2 izomorfne ili nisu.

w	$Res_{2s_2=1} r(\underline{s}, \pi', w)$
w_2	1
w_1w_2	$\frac{L(z+1/2,\pi_1\times\pi_2)}{L(z+3/2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(z+1/2,\pi_1\times\pi_2)}$
$w_2w_1w_2$	$\frac{L(z+1/2,\pi_1\times\pi_2)}{L(z+3/2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(z+1/2,\pi_1\times\pi_2)} \frac{L(2z,\omega_{\pi_1})}{L(1+2z,\omega_{\pi_1})\varepsilon(2z,\omega_{\pi_1})}$
$w_1w_2w_1w_2$	$\frac{L(z+1/2,\pi_1\times\pi_2)}{L(z+3/2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(z+1/2,\pi_1\times\pi_2)}$ $\frac{L(z-1/2,\pi_1\times\pi_2)}{L(z+1/2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(z-1/2,\pi_1\times\pi_2)} \frac{L(2z,\omega_{\pi_1})}{L(1+2z,\omega_{\pi_1})\varepsilon(2z,\omega_{\pi_1})}$

Tablica A-II. Reziduumi normalizacijskih faktora duž $2s_2 = 1$ u slučaju A

Najprije, pretpostavimo da $\pi_1 \not\cong \pi_2$. Tada se pol u $z = 1/2$ i to prvog reda javlja za izraze iz tablice A-II koji odgovaraju elementima Weylove grupe $w_2w_1w_2$ i $w_1w_2w_1w_2$. Koristeći samokontragredijentnost od π_1 i π_2, po lemi 4.1.4, reziduumi su, do na konstantu

$$\frac{L(1,\pi_1\times\pi_2)}{L(2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(1,\pi_1\times\pi_2)} \frac{Res_{s=1}L(s,\omega_{\pi_1})}{L(2,\omega_{\pi_1})\varepsilon(1,\omega_{\pi_1})}$$

različitu od nule, jednaki redom

$$N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2),$$

$$N((1/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$

Uzevši u obzir da je $w_1w_2w_1w_2 = w_2w_1w_2w_1$ te koristeći dekompoziciju lokalnih normaliziranih operatora ispreplitanja iz (3.12), kao u dokazu prethodnog teorema 4.2.3, dobiveni iterirani reziduum djeluje na $\otimes_v f_v$ kao

$$\otimes_v N((1/2,1/2),\pi'_v,w_2w_1w_2)\left[\otimes_v f_v + \otimes_v N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1)f_v\right].$$

Pritom je normalizirani operator $N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1)$ zapravo operator koji smo promotrili prije iskaza ovog teorema pa djeluje kao $\eta_v Id_v$ na svim mjestima. Stoga se reziduum ne poništava ako je

$$\prod_v \eta_v = 1$$

i jednak je, do na konstantu različitu od nule, slici normaliziranog operatora ispreplitanja
$$N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2).$$
Ireducibilnost slike tog operatora dokazujemo na samom kraju dokaza. Uvjet kvadratne integrabilnosti iz leme 1.3.6 je ispunjen jer je
$$w_2w_1w_2w_1(1/2,1/2)=w_2w_1w_2(1/2,1/2)=(-1/2,-1/2).$$
Budući da je globalni lift injektivan i čuva samokontragredijentnost i centralne karaktere, doprinos $\mathcal{A}_3^{(1)}(\pi')$ rezidualnom spektru u ovom slučaju daju upravo kuspidalne automorfne reprezentacije π' od $M_0'(\mathbb{A})$ koje zadovoljavaju uvjete (1-1) do (1-3) iz teorema.

Pretpostavimo sada da je $\pi_1\cong\pi_2$. Tada, po svojstvima L–funkcija iz lema 4.1.1 i 4.1.3, u tablici A-II izraz koji odgovara elementu w_1w_2 ima pol prvog reda, a izrazi koji odgovaraju elementima $w_2w_1w_2$ i $w_1w_2w_1w_2$ imaju pol drugog reda u $z=1/2$. Stoga, da bi u ovom slučaju izračunali doprinos iteriranog pola rezidualnom spektru moramo poništiti pol u $z=1/2$, odnosno izračunati reziduum konstantnog člana Eisensteinovog reda pomnoženog s $(z-1/2)$. Međutim, moguće je da je taj reziduum jednak nuli, a to znači da se polovi drugog reda izraza koji odgovaraju elementima $w_2w_1w_2$ i $w_1w_2w_1w_2$ poništavaju. Tada, iako pojedini izrazi iz tablice A-II imaju polove drugog reda, njihova suma ima samo pol prvog reda i treba izračunati njegov reziduum u $z=1/2$.

Prema svojstvima L–funkcija iz lema 4.1.1 i 4.1.3 te lemi 4.1.4, reziduumi u $z=1/2$ izraza iz tablice A-II pomnoženih s $(z-1/2)$, do na konstantu
$$\frac{Res_{s=1}L(s,\pi_1\times\pi_2)}{L(2,\pi_1\times\pi_2)\varepsilon(1,\pi_1\times\pi_2)}\frac{Res_{s=1}L(s,\mathbf{1})}{L(2,\mathbf{1})\varepsilon(1,\mathbf{1})}$$
različitu od nule, gdje je $\mathbf{1}$ trivijalni karakter od $\mathbb{A}^\times/k^\times$, jednaki su
$$N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2),$$
$$-N((1/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$
Stoga je iterirani reziduum u točki A_3 konstantnog člana Eisensteinovog reda iz (1.3) pomnoženog s $(z-1/2)$ jednak
$$N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2)-N((1/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$

Ponovo, koristeći dekompoziciju lokalnih normaliziranih operatora ispreplitanja iz (3.12), djelovanje na $\otimes_v f_v$ možemo zapisati kao

$$\otimes_v N((1/2,1/2),\pi'_v,w_2w_1w_2)\left[\otimes_v f_v - \otimes_v N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1)f_v\right].$$

Ali lokalni normalizirani operator $N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1)$ smo proučili prije iskaza teorema i skalar kojim djeluje označili s η_v. Stoga se ovaj iterirani reziduum ne poništava ako vrijedi

$$\prod_v \eta_v = -1$$

i tada je, do na konstantu različitu od nule, jednak slici normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2).$$

Ireducibilnost te slike dokazujemo na samom kraju dokaza. Kriterij kvadratne integrabilnosti iz leme 1.3.6 je ispunjen kao i u prethodnom slučaju. Budući da je globalni lift injektivan i čuva samokontragredijentnost i centralne karaktere, iteriranim poništavanjem pola u točki A_3 dobili smo da doprinos $\mathcal{A}_3^{(2)}(\pi')$ rezidualnom spektru u ovom slučaju daju upravo kuspidalne automorfne reprezentacije π' od $M'_0(\mathbb{A})$ koje zadovoljavaju uvjete (2-1) do (2-3) iz teorema. Međutim, ostaje promotriti slučaj u kojem se pol drugog reda poništava. Pokazat će se da u tom slučaju nema doprinosa rezidualnom spektru.

Neka je stoga

$$\prod_v \eta_v = 1$$

što znači da se pol drugog reda u $z = 1/2$ poništava. Ostaje pol prvog reda u $z = 1/2$ izraza iz tablice A-II koji odgovaraju elementima Weylove grupe w_1w_2, $w_2w_1w_2$ i $w_1w_2w_1w_2$. Za doprinos rezidualnom spektru u ovom slučaju treba izračunati sumu reziduuma u $z = 1/2$ tih izraza. Ali da bi dobiveni doprinos bio kvadratno integrabilan mora biti ispunjen kriterij iz leme 1.3.6. Međutim,

$$w_1w_2(1/2,1/2) = (-1/2,1/2)$$

pa kriterij nije ispunjen za element w_1w_2. Stoga, jedina mogućnost da iterirani reziduum zaista doprinosi rezidualnom spektru je da postoji subkvocijent inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{GL'_1(\mathbb{A})\times GL'_1(\mathbb{A})}^{G'_2(\mathbb{A})}\left(\pi'_1\nu^{1/2}\otimes\pi'_2\nu^{1/2}\right)$$

na kojem se reziduum u $z = 1/2$ izraza koji odgovara elementu $w_1 w_2$ poništava. Neka je stoga f automorfna forma koja pripada takvom subkvocijentu, odnosno vrijedi

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_1 w_2) f = 0. \tag{4.6}$$

Za takvu automorfnu formu f treba izračunati reziduum u $z = 1/2$ sume izraza iz tablice A-II koji odgovaraju elementima $w_2 w_1 w_2$ i $w_1 w_2 w_1 w_2$. Izraz koji odgovara elementu $w_2 w_1 w_2$ jednak je

$$\frac{L(z+1/2, \pi_1 \times \pi_2)}{L(z+3/2, \pi_1 \times \pi_2)\varepsilon(z+1/2, \pi_1 \times \pi_2)} \frac{L(2z, \omega_{\pi_1})}{L(1+2z, \omega_{\pi_1})\varepsilon(2z, \omega_{\pi_1})} \cdot$$
$$\cdot N((z, 1/2), \pi', w_2 w_1 w_2). \tag{4.7}$$

Budući da su $\pi_1 \cong \pi_2$ samokontragredijentne, a prema globalnoj funkcionalnoj jednadžbi iz leme 4.1.3

$$L(z-1/2, \pi_1 \times \pi_2) = \varepsilon(z-1/2, \pi_1 \times \pi_2) L(3/2 - z, \pi_1 \times \pi_2),$$

izraz koji odgovara elementu $w_1 w_2 w_1 w_2$ jednak je

$$\frac{L(3/2-z, \pi_1 \times \pi_2)}{L(z+3/2, \pi_1 \times \pi_2)\varepsilon(z+1/2, \pi_1 \times \pi_2)} \frac{L(2z, \omega_{\pi_1})}{L(1+2z, \omega_{\pi_1})\varepsilon(2z, \omega_{\pi_1})} \cdot$$
$$\cdot N((z, 1/2), \pi', w_1 w_2 w_1 w_2). \tag{4.8}$$

Neka je a_{-1} reziduum u $z = 1/2$ razlomka

$$\frac{L(z+1/2, \pi_1 \times \pi_2)}{L(z+3/2, \pi_1 \times \pi_2)\varepsilon(z+1/2, \pi_1 \times \pi_2)}.$$

Tada je reziduum u $z = 1/2$ razlomka

$$\frac{L(3/2-z, \pi_1 \times \pi_2)}{L(z+3/2, \pi_1 \times \pi_2)\varepsilon(z+1/2, \pi_1 \times \pi_2)}$$

jednak $-a_{-1}$. Neka je b_{-1} reziduum u $z = 1/2$ razlomka

$$\frac{L(2z, \omega_{\pi_1})}{L(1+2z, \omega_{\pi_1})\varepsilon(2z, \omega_{\pi_1})}.$$

Neka su f_z automorfne forme iz

$$\mathrm{Ind}_{GL_1'(\mathbb{A}) \times GL_1'(\mathbb{A})}^{G_2'(\mathbb{A})} \left(\pi_1' \nu^z \otimes \pi_2' \nu^{1/2}\right)$$

izabrane tako da je ovisnost o $z \in \mathbb{C}$ kao u poglavlju 1.2 te u $z = 1/2$ vrijedi $f_{1/2} = f$. Taylorov razvoj od f_z oko $z = 1/2$ je

$$f_z = f_{1/2} + (z - 1/2)Df_z + \dots \tag{4.9}$$

gdje je Df_z derivacija od f_z kao funkcije od z u $z = 1/2$. Normalizirani operatori ispreplitanja kao funkcije od z također imaju sljedeće Taylorove razvoje oko $z = 1/2$

$$\begin{aligned} N((z,1/2),\pi',w_2w_1w_2) &= N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2) + \\ &+ (z-1/2)DN((z,1/2),\pi',w_2w_1w_2) + \dots \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} N((-1/2,-z),\pi',w_1) &= N((-1/2,-1/2),\pi',w_1) + \\ &+ (z-1/2)DN((-1/2,-z),\pi',w_1) + \dots \end{aligned}$$

gdje $DN(\cdot)$ označava derivacije u $z = 1/2$ odgovarajućih normaliziranih operatora ispreplitanja. Prije iskaza teorema vidjeli smo da lokalni normalizirani operator ispreplitanja $N((-1/2,-1/2),\pi'_v,w_1)$ djeluje kao $\eta_v Id_v$. Budući da sada pretpostavljamo da je $\prod_v \eta_v = 1$, globalni normalizirani operator

$$N((-1/2,-1/2),\pi',w_1) = Id.$$

Nadalje, koristeći dekompoziciju

$$N((z,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2) = N((-1/2,-z),\pi',w_1)N((z,1/2),\pi',w_2w_1w_2)$$

iz (3.12) te prethodna dva Taylorova razvoja, dobivamo Taylorov razvoj

$$\begin{aligned} N((z,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2) &= N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2) + \\ &+(z-1/2)\big[DN((-1/2,-z),\pi',w_1)N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2) + \\ &+DN((z,1/2),\pi',w_2w_1w_2)\big] + \dots \end{aligned} \tag{4.11}$$

Konstantni članovi Taylorovih razvoja (4.10) i (4.11) oko $z = 1/2$ za oba operatora ispreplitanja poništavaju se primijenjeni na $f_{1/2}$ po pretpostavci (4.6) na $f_{1/2}$. Naime, po (3.12),

$$\begin{aligned} &N((1/2,1/2),\pi'_v,w_2w_1w_2)f_{1/2} = \\ &= N((-1/2,1/2),w_1w_2(\pi'_v),w_2)N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1w_2)f_{1/2} = 0. \end{aligned}$$

Stoga, iz razvoja (4.9) i (4.10), reziduum u $z = 1/2$ izraza (4.7) jednak je sumi sljedeća dva člana

$$\begin{cases} a_{-1}b_{-1}DN((z,1/2),\pi',w_2w_1w_2)f_{1/2}, \\ a_{-1}b_{-1}N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2)Df_z, \end{cases}$$

a iz razvoja (4.9) i (4.11), reziduum u $z = 1/2$ izraza (4.8) jednak je sumi sljedeća tri člana

$$\begin{cases} -a_{-1}b_{-1}DN((-1/2,-z),\pi',w_1)N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2)f_{1/2}, \\ -a_{-1}b_{-1}DN((z,1/2),\pi',w_2w_1w_2)f_{1/2}, \\ -a_{-1}b_{-1}N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2)Df_z. \end{cases}$$

Nakon što zbrojimo ta dva reziduuma, svi članovi se ponište osim

$$-a_{-1}b_{-1}D_{z=1/2}N((-1/2,-z),\pi',w_1)N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2)f_{1/2}$$

koji je jednak nuli po pretpostavci (4.6) na $f_{1/2}$. Dakle, ako vrijedi $\pi_1 \cong \pi_2$ i $\prod_v \eta_v = 1$ zaista nema doprinosa rezidualnom spektru.

Preostaje dokazati ireducibilnost prostora automorfnih formi $\mathcal{A}_3^{(1)}(\pi')$ i $\mathcal{A}_3^{(2)}(\pi')$, odnosno ireducibilnost slike od

$$N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2).$$

Koristeći lemu 3.5.1 dokazujemo ireducibilnost slike lokalnih operatora ispreplitanja

$$N((1/2,1/2),\pi'_v,w_2w_1w_2)$$

na svakom mjestu v. Budući da $N(w_2w_1w_2(1/2,1/2),w_2w_1w_2(\pi'_v),w_1)$ djeluje kao skalar η_v, ta slika je izomorfna slici operatora

$$N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1w_2w_1w_2).$$

U oznakama iz leme 3.5.1, neka je $w = w_1w_2w_1w_2$ i $\underline{s} = (1/2,1/2)$. Ako su $\pi'_{1,v}$ i $\pi'_{2,v}$ obje kvadratno integrabilne, onda je po Langlandsovoj klasifikaciji slika ireducibilna jer je w dugi element Weylove grupe za (G'_2, M'_0), a $\underline{s}$ zadovoljava uvjete Langlandsove klasifikacije. Uočimo da smo time dokazali ireducibilnost na svim nerazgranatim mjestima $v \in S$ jer je na njima svaka reprezentacija π'_v od $M'_0(k_v)$ superkuspidalna.

Neka je sada v rascjepivo mjesto i $\pi_v \cong \pi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}$ reprezentacija od $M_0(k_v)$ pri čemu barem jedna od reprezentacija $\pi_{i,v}$, za $i = 1, 2$, grupe $GL_2(k_v)$ nije kvadratno integrabilna, a to znači da je oblika

$$\pi_{i,v} \cong \mathrm{Ind}_{GL_1(k_v) \times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)} \left(\mu_{i,v} |\cdot|^{r_i} \otimes \mu'_{i,v} |\cdot|^{-r_i} \right),$$

gdje su $\mu_{i,v}$ i $\mu'_{i,v}$ unitarni karakteri od $k_v^\times$, vrijedi $0 \leqslant r_i < 1/2$ te $\mu_{i,v} = \mu'_{i,v}$ za $r_i \neq 0$. Tada je π_v puna inducirana reprezentacija s kvadratno integrabilne reprezentacije τ_v Levijevog faktora manje paraboličke podgrupe. U oznakama iz leme 3.5.1, Levijev faktor L je jedan od Levijevih faktora $GL_1 \times GL_1 \times GL_2$, $GL_2 \times GL_1 \times GL_1$, $GL_1 \times GL_1 \times GL_1 \times GL_1$, a

$$\underline{s} + \underline{s}' = \begin{cases} (1/2 + r_1, 1/2 - r_1, 1/2), \\ (1/2, 1/2 + r_2, 1/2 - r_2), \\ (1/2 + r_1, 1/2 - r_1, 1/2 + r_2, 1/2 - r_2), \end{cases}$$

gdje je $0 \leqslant r_i < 1/2$. Pretpostavimo da je $r_1 \geqslant r_2$ jer se druga mogućnost dokazuje na isti način. I dalje u oznakama iz leme 3.5.1, neka je

$$w' = \begin{cases} (1)(2,3), \\ (1,2)(3), \\ (1)(2,3,4), \end{cases}$$

pri čemu su permutacije elementi Weylove grupe kao u dokazu propozicije 3.2.1. Tada $w'^{-1}(\underline{s} + \underline{s}')$ zadovoljava nejednakost iz korolara 2.2.12 i

$$N(w'^{-1}(\underline{s} + \underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v), w')$$

je izomorfizam na $I(\underline{s} + \underline{s}', \tau_v) \cong I(\underline{s}, \pi_v)$ jer po lemi 2.2.9 djeluje na ireducibilnoj induciranoj reprezentaciji. Neka je, u oznakama iz leme 3.5.1,

$$w'' = \begin{cases} (1,3,2), \\ (1,2,3), \\ (1,4,2)(3). \end{cases}$$

Tada je $w''ww'$ dugi element Weylove grupe za $(SO_8, w'^{-1}(L))$ i

$$N(w(\underline{s}), w(\pi_v), w'') = N(w(\underline{s} + \underline{s}'), w(\tau_v), w'')$$

je izomorfizam jer se dekomponira u kompoziciju $GL_1 \times GL_1 \subset GL_2$ i $GL_1 \times GL_2 \subset GL_3$ operatora koji, po lemi 2.2.9, djeluju na ireducibilnim induciranim reprezentacijama. Stoga, po lemi 3.5.1 i njenom korolaru 3.5.2, slika od $N((1/2, 1/2), \pi'_v, w)$ je ireducibilna. $\square$

Napomenimo na kraju da je prostor $L^2_{A_3}$ jedini za kojeg je pitanje multipliciteta u dekompoziciji ostalo otvoreno. Naime, za drugi dio dekompozicije prostora $L^2_{A_3}$ iz teorema 4.2.4, iterirani pol Eisensteinovog reda nije u svakom koraku prvog reda, pa ne možemo zaključiti multiplicitet jedan. Da bi izračunali multiplicitete treba dekomponirati skalarni produkt pseudo–Eisensteinovih redova, a to nije dio ove disertacije.

4.3 Prostor L^2_B

U poglavlju 4.2 o dekompoziciji prostora L^2_A objasnili smo da se potprostor $L^2_{P'_0,res}$ rezidualnog spektra dekomponira na doprinose kuspidalnih automorfnih reprezentacija Levijevog faktora $M'_0(\mathbb{A})$ u $G'_2(\mathbb{A})$ koje pripadaju svakom od slučajeva A, B i C. U ovom poglavlju dekomponiramo prostor L^2_B koji sadrži doprinose kuspidalnih automorfnih reprezentacija Levijevog faktora koje spadaju u slučaj B.

Neka je $\pi' \cong \pi'_1 \otimes \pi'_2$ kuspidalna automorfna reprezentacija Levijevog faktora $M'_0(\mathbb{A}) \cong GL'_1(\mathbb{A}) \times GL'_1(\mathbb{A})$ u $G'_2(\mathbb{A})$ koja spada u slučaj B. To znači da je jedna od reprezentacija π'_1 i π'_2 jednodimenzionalna, a druga nije. U svim računima u ovom poglavlju pretpostavljamo da je $\pi'_1 \cong \chi_1 \circ \det'$ jednodimenzionalna, a π'_2 nije, gdje je χ_1 unitarni karakter od $\mathbb{A}^\times/k^\times$. Za drugu mogućnost računi su potpuno jednaki pa njezin doprinos rezidualnom spektru navodimo samo u iskazu teorema o dekompoziciji prostora L^2_B.

Globalni normalizacijski faktori operatora ispreplitanja za slučaj B dani su u tablici B u poglavlju 3.4.3 koristeći globalne glavne L–funkcije i ε–faktore za GL_2 i globalne Heckeove L–funkcije i ε–faktore od centralnih karaktera. Po teoremu 3.4.1, globalni normalizirani operatori ispreplitanja su holomorfni i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Stoga, prema analitičkim svojstvima L–funkcija iz lema 4.1.1 i 4.1.2, polovi normalizacijskih faktora iz tablice B, a time i Eisensteinovih redova u ovom slučaju, nalaze se u singularnim ravninama

$$\begin{aligned} 2s_1 &= 1, \\ 2s_2 &= 1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Pritom, kao i u prethodnom poglavlju, pretpostavljamo da su kuspidalne automorfne reprezentacije odabrane tako da su polovi Eisensteinovih redova realni pa singularne ravnine i pomak linije integracije iz teorema 1.3.3 možemo prikazati na slici B gdje je prikazan samo realni dio prostora $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$.

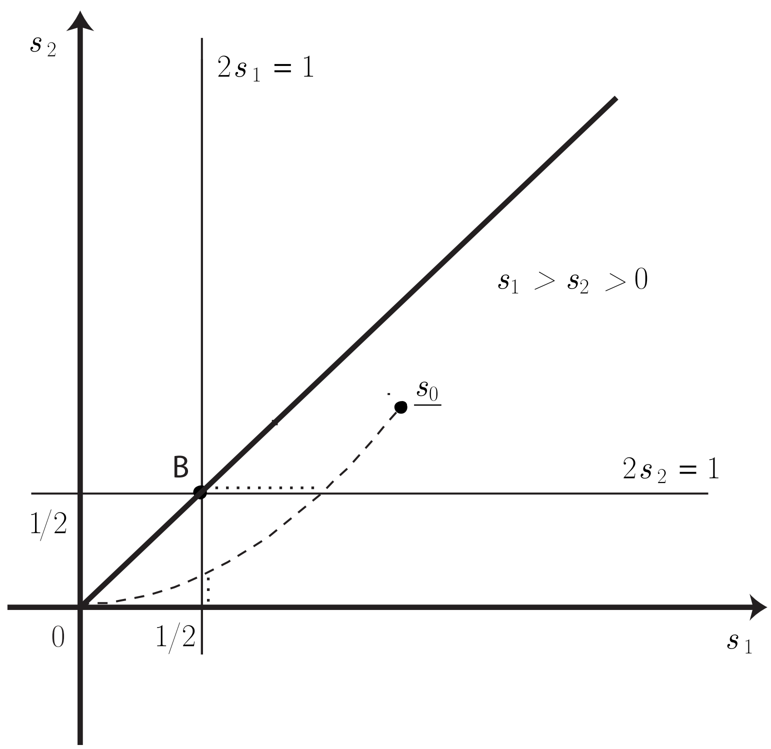
Na slici B, pri pomaku linije integracije u integralu (1.1) iz teorema 1.3.3 od $\underline{s}_0$ u ishodište prostora $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$ prelazimo singularne ravnine. Na tim ravninama biramo koordinatne sustave s ishodištem u ortogonalnoj projekciji ishodišta od $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$. Zatim, pomakom linije integracije iz točke presjeka sa singularnom ravninom u ishodište te ravnine kao na slici B prelazimo preko točaka presjeka s drugim singularnim ravninama. Jedina takva točka na slici B je

$$B(1/2, 1/2)$$

pa je to jedini mogući iterirani pol operatora isprepltanja. Točka B leži na singularnoj ravnini $2s_2 = 1$. Koordinatni sustav na toj singularnoj ravnini zadan je s

$$\begin{aligned} s_1 &= z, \\ s_2 &= 1/2, \end{aligned} \tag{4.13}$$

gdje je z nova koordinata. Za točku B je $z = 1/2$.



Slika B. Singularne ravnine u slučaju B

Prije dekompozicije prostora L_B^2 uvodimo oznake vezane uz djelovanje lokalnog normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N(0, (\chi_{1,v} \circ \det'_v) \otimes \pi'_{2,v}, w_1)$$

koji djeluje na induciranoj reprezentaciji

$$\mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v) \times GL'_1(k_v)}^{GL'_2(k_v)} \left((\chi_{1,v} \circ \det'_v) \otimes \pi'_{2,v} \right).$$

Prema lemi 2.2.9, ta inducirana reprezentacija je ireducibilna, pa po lemi 2.2.8 normalizirani operator ispreplitanja djeluje kao skalar kojeg označavamo η_v. Tada je $\eta_v \in \{\pm 1\}$ i na skoro svim mjestima, odnosno na rascjepivim mjestima na kojima su reprezentacije nerazgranate je $\eta_v = 1$. Za potrebe iskaza teorema o dekompoziciji istu oznaku η_v koristimo i za skalar kojim

$$N(0, \pi'_{1,v} \otimes (\chi_{2,v} \circ \det'_v), w_1)$$

djeluje na induciranu reprezentaciju

$$\mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v) \times GL'_1(k_v)}^{GL'_2(k_v)} \left(\pi'_{1,v} \otimes (\chi_{2,v} \circ \det'_v) \right).$$

Teorem 4.3.1. (Dekompozicija prostora L_B^2) *Potprostor L_B^2 rezidualnog spektra od G'_2 dekomponira se u*

$$L_B^2 = \left(\oplus_{\pi'} \mathcal{B}^{(1)}(\pi') \right) \oplus \left(\oplus_{\pi'} \mathcal{B}^{(2)}(\pi') \right).$$

Pritom je prva suma po svim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong (\chi_1 \circ \det') \otimes \pi'_2$ od $M'_0(\mathbb{A})$ takvim da π'_2 nije jednodimenzionalna i vrijedi

(1-1) *χ_1 je kvadratni karakter,*

(1-2) *centralni karakter $\omega_{\pi'_2}$ je trivijalan,*

(1-3) *$L(1/2, \chi_1 \pi_2) \neq 0$, gdje je π_2 globalni lift od π'_2,*

(1-4) *$\prod_v \eta_v = 1$,*

a druga suma je po svim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong \pi'_1 \otimes (\chi_2 \circ \det')$ od $M'_0(\mathbb{A})$ takvim da π'_1 nije jednodimenzionalna i vrijedi

(2-1) *χ_2 je kvadratni karakter,*

(2-2) *centralni karakter* $\omega_{\pi_1'}$ *je trivijalan,*

(2-3) $L(1/2, \chi_2\pi_1) \neq 0$*, gdje je* π_1 *globalni lift od* π_1'*,*

(2-4) $\prod_v \eta_v = 1$.

Oba prostora $\mathcal{B}^{(1)}(\pi')$ *i* $\mathcal{B}^{(2)}(\pi')$ *su ireducibilni prostori automorfnih formi razapeti iteriranim reziduumom u* $\underline{s} = (1/2, 1/2)$ *Eisensteinovog reda određenog s* π'*, a prelaskom na konstantni član Eisensteinovog reda izomorfni su slici normaliziranog operatora ispreplitanja*

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_2w_1w_2).$$

Dokaz. Teorem dokazujemo samo za kuspidalne automorfne reprezentacije oblika $\pi' \cong (\chi_1 \circ \det') \otimes \pi_2'$ čime dobivamo prostore automorfnih formi $\mathcal{B}^{(1)}(\pi')$. Za drugu mogućnost tvrdnja teorema i dokaz su potpuno analogni i daju prostore $\mathcal{B}^{(2)}(\pi')$. Uočimo odmah da π_2' nije jednodimenzionalna jer se u ovom poglavlju 4.3 bavimo samo slučajem B.

Iterirani pol Eisensteinovog reda, odnosno sume operatora ispreplitanja (1.3) iz propozicije 1.3.5 u točki B, kao što je prikazano na slici B, najprije poništavamo duž singularne ravnine $2s_2 = 1$, a zatim, u novoj varijabli z zadanoj s (4.13), u $z = 1/2$. Po svojstvima L–funkcija iz lema 4.1.1 i 4.1.2, pol duž $2s_2 = 1$ globalnih normalizacijskih faktora iz tablice B u poglavlju 3.4.3 javlja se ako i samo ako je centralni karakter ω_{π_2} trivijalan. Tada pol i to prvog reda imaju normalizacijski faktori operatora ispreplitanja za elemente Weylove grupe w_2, w_1w_2, $w_2w_1w_2$ i $w_1w_2w_1w_2$. Njihovi reziduumi duž $2s_2 = 1$ u novoj varijabli z dani su u tablici B-I do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1}L(s, \mathbf{1})}{L(2, \mathbf{1})\varepsilon(1, \mathbf{1})}$$

različitu od nule, gdje je $\mathbf{1}$ trivijalni karakter od $\mathbb{A}^\times/k^\times$. Uočimo da je π_2 samokontragredijentna jer je centralni karakter ω_{π_2} trivijalan.

Sada treba odrediti polove u $z = 1/2$ izraza u tablici B-I. Opet, po svojstvima L–funkcija iz lema 4.1.1 i 4.1.2, pol u $z = 1/2$ se javlja ako i samo ako je χ_1 kvadratni karakter. Tada pol i to prvog reda imaju izrazi koji odgovaraju elementima $w_2w_1w_2$ i $w_1w_2w_1w_2$. Do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1}L(s, \mathbf{1})}{L(2, \mathbf{1})\varepsilon(1, \mathbf{1})} \frac{L(1/2, \chi_1\pi_2)}{L(5/2, \chi_1\pi_2)\varepsilon(1/2, \chi_1\pi_2)\varepsilon(3/2, \chi_1\pi_2)},$$

w	$Res_{2s_2=1} r(\underline{s}, \pi', w)$
w_2	1
w_1w_2	$\frac{L(z,\chi_1\pi_2)}{L(z+2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(z,\chi_1\pi_2)\varepsilon(z+1,\chi_1\pi_2)}$
$w_2w_1w_2$	$\frac{L(z,\chi_1\pi_2)}{L(z+2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(z,\chi_1\pi_2)\varepsilon(z+1,\chi_1\pi_2)} \frac{L(2z,\chi_1^2)}{L(1+2z,\chi_1^2)\varepsilon(2z,\chi_1^2)}$
$w_1w_2w_1w_2$	$\frac{L(z,\chi_1\pi_2)}{L(z+2,\chi_1\pi_2)\varepsilon(z,\chi_1\pi_2)\varepsilon(z+1,\chi_1\pi_2)}$ $\frac{L(2z,\chi_1^2)}{L(1+2z,\chi_1^2)\varepsilon(2z,\chi_1^2)} \frac{L(z-1,\chi_1\pi_2)}{L(z+1,\chi_1\pi_2)\varepsilon(z-1,\chi_1\pi_2)\varepsilon(z,\chi_1\pi_2)}$

Tablica B-I. Reziduumi normalizacijskih faktora duž $2s_2 = 1$ u slučaju B

reziduumi su jednaki

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_2w_1w_2),$$

$$\frac{L(-1/2, \chi_1\pi_2)}{L(3/2, \chi_1\pi_2)\varepsilon(-1/2, \chi_1\pi_2)\varepsilon(1/2, \chi_1\pi_2)} N((1/2, 1/2), \pi', w_1w_2w_1w_2).$$

Uočimo da je gornja konstanta različita od nule ako i samo ako je globalna L–funkcija

$$L(1/2, \chi_1\pi_2) \neq 0.$$

Stoga, od ovog mjesta pretpostavljamo da je taj uvjet na globalnu L–funkciju ispunjen jer inače nema netrivijalnog doprinosa rezidualnom spektru. Po globalnoj funkcionalnoj jednadžbi iz leme 4.1.2

$$L(-1/2, \chi_1\pi_2) = \varepsilon(-1/2, \chi_1\pi_2)L(3/2, \chi_1\pi_2)$$

te $\varepsilon(1/2, \chi_1\pi_2) = 1$ jer je $\chi_1\pi_2$ samokontragredijentna pa se $L(1/2, \chi_1\pi_2) \neq 0$ pokrati. Tada je reziduum izraza koji odgovara elementu $w_1w_2w_1w_2$ jednak

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_1w_2w_1w_2).$$

Dakle, iterirani reziduum u točki B je jednak

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_2w_1w_2) + N((1/2, 1/2), \pi', w_1w_2w_1w_2)$$

pa njegovo djelovanje na $\otimes_v f_v$, koristeći dekompoziciju iz (3.12) i činjenicu da je $w_1w_2w_1w_2 = w_2w_1w_2w_1$, možemo zapisati kao

$$\otimes_v N((1/2,1/2),\pi'_v,w_2w_1w_2)\left[\otimes_v f_v + \otimes_v N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1)f_v\right].$$

Prije iskaza teorema pokazali smo da lokalni normalizirani operator ispreplitanja $N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1)$ djeluje kao skalar η_v. Stoga se iterirani reziduum u točki B poništava osim ako je

$$\prod_v \eta_v = 1$$

te je tada jednak slici normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2).$$

Kvadratna integrabilnost slijedi po kriteriju iz leme 1.3.6 jer je

$$w_2w_1w_2w_1(1/2,1/2) = w_2w_1w_2(1/2,1/2) = (-1/2,-1/2).$$

Budući da globalni lift čuva centralne karaktere, doprinos $\mathcal{B}^{(1)}(\pi')$ potprostoru L^2_B rezidualnog spektra daju upravo kuspidalne automorfne reprezentacije π' od $M'_0(\mathbb{A})$ koje zadovoljavaju uvjete teorema i taj doprinos je izomorfan slici normaliziranog operatora ispreplitanja $N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2)$.

Preostaje dokazati ireducibilnost slike tog operatora. Koristeći lemu 3.5.1 dokazujemo da je slika lokalnog operatora ispreplitanja

$$N((1/2,1/2),\pi'_v,w_2w_1w_2)$$

ireducibilna na svakom mjestu v. Budući da normalizirani operator ispreplitanja $N(w_2w_1w_2(1/2,1/2),w_2w_1w_2(\pi'_v),w_1)$ djeluje skalarom η_v, ta slika je izomorfna slici operatora

$$N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1w_2w_1w_2).$$

U oznakama iz leme 3.5.1, neka je $w = w_1w_2w_1w_2$ i $\underline{s} = (1/2,1/2)$. Na nerascjepivim mjestima $v \in S$ slika je ireducibilna po Langlandsovoj klasifikaciji jer je π'_v superkuspidalna reprezentacija od $M'_0(k_v)$, w dugi element Weylove grupe i $\underline{s}$ zadovoljava uvjete Langlandsove klasifikacije.

Neka je $v \notin S$ rascjepivo mjesto. Tada je $\chi_{1,v} \circ \det_v$ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)}\left(\chi_{1,v}|\cdot|^{-1/2}\otimes\chi_{1,v}|\cdot|^{1/2}\right),$$

a $\pi_{2,v}$ je ili temperirana ili reprezentacija komplementarne serije

$$\pi_{2,v} \cong \mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)} \left(\mu_{2,v}|\cdot|^r \otimes \mu_{2,v}|\cdot|^{-r}\right),$$

gdje je $0 < r < 1/2$ i $\mu_{2,v}$ unitarni karakter od $k_v^\times$. Dakle, π_v je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija inducirane reprezentacije s temperirane reprezentacije τ_v Levijevog faktora manje paraboličke podgrupe. U oznakama iz leme 3.5.1, Levijev faktor L je jedan od Levijevih faktora $GL_1 \times GL_1 \times GL_2$, $GL_1 \times GL_1 \times GL_1 \times GL_1$, a

$$\underline{s} + \underline{s}' = \begin{cases} (0,1,1/2), \\ (0,1,1/2+r,1/2-r). \end{cases}$$

Nadalje, neka je

$$w' = \begin{cases} (1,2,3), \\ (1,2,3,4), \end{cases}$$

gdje permutacije shvaćamo kao elemente Weylove grupe kao u dokazu propozicije 3.2.1. Tada je $w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}')$ u pozitivnoj Weylovoj komori, a normalizirani operator

$$N(w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v), w')$$

je surjektivan sa slikom $I(\underline{s},\pi_v)$ jer se može dekomponirati u

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_2(k_v)\times GL_1(k_v)}^{SO_8(k_v)} \left(\chi_{1,v}|\cdot| \otimes \pi_{2,v}\nu^{1/2} \otimes \chi_{1,v}\right) \to \\
&\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)\times GL_2(k_v)}^{SO_8(k_v)} \left(\chi_{1,v}|\cdot| \otimes \chi_{1,v} \otimes \pi_{2,v}\nu^{1/2}\right) \to \\
&\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)\times GL_2(k_v)}^{SO_8(k_v)} \left((\chi_{1,v}\circ \det_v)\nu^{1/2} \otimes \pi_{2,v}\nu^{1/2}\right) = I(\underline{s},\pi_v),
\end{aligned}$$

gdje je prvi operator izomorfizam jer, po lemi 2.2.9, djeluje na ireducibilnoj induciranoj reprezentaciji, a drugi je surjektivan jer je dugi operator Langlandsove klasifikacije za $GL_2(k_v)$. I dalje u oznakama leme 3.5.1 neka je

$$w'' = \begin{cases} (1)(2,3), \\ (1)(2,4)(3). \end{cases}$$

Tada je $w''ww'$ dugi element Weylove grupe za $(SO_8, w'^{-1}(L))$, a normalizirani operator

$$N(w(\underline{s}+\underline{s}'), w(\tau_v), w'')$$

je izomorfizam jer je ili operator za $GL_1 \times GL_2 \subset GL_3$ ili kompozicija operatora za $GL_1 \times GL_1 \subset GL_2$ koji po lemi 2.2.9 djeluju na ireducibilnim induciranim reprezentacijama. Dakle, prema lemi 3.5.1, slika operatora $N((1/2,1/2),\pi_v,w)$ je ireducibilna. □

4.4 Prostor L^2_C

U ovom poglavlju dekomponiramo potprostor L^2_C dijela rezidualnog spektra $L^2_{P'_0,res}$ koji dobivamo iteriranim poništavanjem polova u pozitivnoj Weylovoj komori Eisensteinovih redova određenih kuspidalnim automorfnim reprezentacijama Levijevog faktora $M'_0(\mathbb{A})$ koje spadaju u slučaj C. Dakle, u ovom poglavlju neka je $\pi' \cong (\chi_1 \circ \det') \otimes (\chi_2 \circ \det')$ kuspidalna automorfna reprezentacija Levijevog faktora $M'_0(\mathbb{A}) \cong GL'_1(\mathbb{A}) \times GL'_1(\mathbb{A})$ u $G'_2(\mathbb{A})$, gdje su χ_1 i χ_2 unitarni karakteri od $\mathbb{A}^\times/k^\times$.

Globalni normalizacijski faktori u ovom slučaju dani su u tablici C u poglavlju 3.4.4 koristeći globalne i lokalne Heckeove L–funkcije i ε–faktore. Po teoremu 3.4.1, globalni normalizirani operatori ispreplitanja holomorfni su i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore, osim u ishodištu. Međutim, u ishodištu ionako ne možemo imati doprinos rezidualnom spektru, pa je ipak dovoljno proučiti polove normalizacijskih faktora. Prema svojstvima Heckeovih L–funkcija iz leme 4.1.1, singularne ravnine za normalizacijske faktore operatora ispreplitanja iz tablice C su

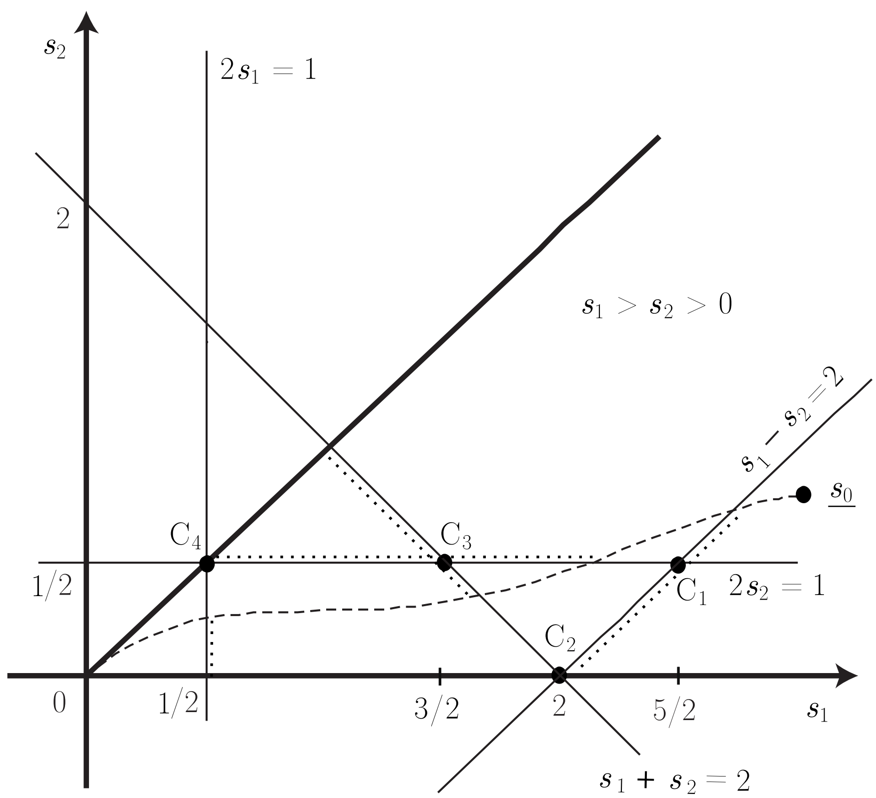
$$\begin{aligned} s_1 - s_2 &= 2, \\ s_1 + s_2 &= 2, \\ 2s_1 &= 1, \\ 2s_2 &= 1. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Napomenimo da, iako globalni dio izraza oblika $r_C(s,\chi)$ iz tablice C ima pol drugog reda u $s = 1$ za trivijalan χ, taj se pol pokrati s polom prvog reda lokalne L–funkcije iz nazivnika lokalnog dijela istog izraza koja se javlja $|S| \geqslant 2$ puta. Podsjetimo da je konačan skup S mjesta od k na kojima kvaternionska algebra D nije rascjepiva neprazan i sadrži paran broj mjesta. Stoga među singularnim ravninama nema ravnina $s_1 \pm s_2 = 1$. Kao u svim računima rezidualnog spektra, pretpostavljamo da su kuspidalne automorfne reprezentacije odabrane tako da su polovi Eisensteinovih redova realni pa se singularne ravnine i pomak linije integracije u ishodište može prikazati na slici C koja predstavlja samo realni dio prostora $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$.

Pri pomaku linije integracije u integralu (1.1) iz teorema 1.3.3 od $\underline{s}_0$ u ishodište prostora $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$, kao na slici C, prelazimo singularne ravnine. Na njima biramo koordinatne sustave s ishodištem u ortogonalnoj projekciji ishodišta od $\mathfrak{a}^*_{M'_0,\mathbb{C}}$. Zatim, pomakom linije integracije iz točke presjeka sa singularnom ravninom u ishodište te ravnine kao na slici C prelazimo preko točaka presjeka s drugim singularnim ravninama. Takve točke presjeka mogući su iterirani polovi operatora ispreplitanja. Na slici C su četiri takve točke

$$C_1(5/2, 1/2), \quad C_2(2, 0), \quad C_3(3/2, 1/2), \quad C_4(1/2, 1/2).$$

Točke C_1 i C_2 leže na singularnoj ravnini $s_1 - s_2 = 2$, a točke C_3 i C_4 leže na $2s_2 = 1$.



Slika C. Singularne ravnine u slučaju C

Koordinatni sustav na singularnoj ravnini $s_1 - s_2 = 2$ čije je ishodište ortogonalna projekcija ishodišta od $\mathfrak{a}^*_{M_0',\mathbb{C}}$ zadan je s

$$\begin{aligned} s_1 &= z + 1, \\ s_2 &= z - 1, \end{aligned} \tag{4.15}$$

gdje je z nova koordinata. Tada, za točku C_1 je $z = 3/2$, a za točku C_2 je $z = 1$.

Na singularnoj ravnini $2s_2 = 1$ koordinatni sustav zadan je s

$$\begin{aligned} s_1 &= z, \\ s_2 &= 1/2, \end{aligned} \tag{4.16}$$

gdje je z nova koordinata. Za točku C_3 je $z = 3/2$, a za točku C_4 je $z = 1/2$.

U skladu s četiri moguća iterirana pola Eisensteinovog reda dio rezidualnog spektra L^2_C se dekomponira u

$$L^2_C \cong L^2_{C_1} \oplus L^2_{C_2} \oplus L^2_{C_3} \oplus L^2_{C_4}, \tag{4.17}$$

gdje su $L^2_{C_1}$, $L^2_{C_2}$, $L^2_{C_3}$ i $L^2_{C_4}$ razapeti izrazima koji se dobiju nakon iteriranog poništavanja polova Eisensteinovih redova redom u točkama C_1, C_2, C_3 i C_4. U nastavku dajemo odvojeno dekompoziciju svakog od tih prostora.

4.4.1 Prostor $L^2_{C_1}$

U sljedećem teoremu dekomponiramo potprostor $L^2_{C_1}$ koji se dobiva kao iterirani reziduum Eisensteinovog reda određenog s π' u točki C_1.

Teorem 4.4.1. (Dekompozicija prostora $L^2_{C_1}$) *Potprostor $L^2_{C_1}$ rezidualnog spektra grupe G_2' dekomponira se u*

$$L^2_{C_1} = \oplus_{\pi'} \mathcal{C}_1(\pi'),$$

gdje je suma po svim jednodimenzionalnim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong (\chi_1 \circ \det') \otimes (\chi_2 \circ \det')$ od $M_0'(\mathbb{A})$ takvim da vrijedi

(1) $\chi_1 = \chi_2$,

(2) χ_i *je kvadratni karakter za* $i = 1, 2$.

Prostor $\mathcal{C}_1(\pi')$ je ireducibilan prostor automorfnih formi razapet iteriranim reziduumom u $\underline{s} = (5/2, 1/2)$ Eisensteinovog reda određenog s π', a prelaskom na konstantni član Eisensteinovog reda izomorfan je slici normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N((5/2, 1/2), \pi', w_1 w_2 w_1 w_2).$$

Dokaz. Doprinos iteriranog pola u točki C_1 rezidualnom spektru dobivamo najprije poništavajući pol izraza u tablici C iz poglavlja 3.4.4 duž singularne ravnine $s_1 - s_2 = 2$, a zatim, u novoj varijabli z zadanoj na toj ravnini s (4.15), pol u $z = 3/2$. Po svojstvima Heckeovih L–funkcija iz leme 4.1.1, pol duž singularne ravnine $s_1 - s_2 = 2$ se javlja ako i samo ako je $\chi_1 = \chi_2$. Tada pol i to prvog reda imaju normalizacijski faktori operatora ispreplitanja za elemente Weylove grupe w_1, w_2w_1, $w_1w_2w_1$ i $w_1w_2w_1w_2$. U ostatku dokaza neka je $\chi = \chi_1 = \chi_2$. U tablici C-I dani su, u novoj varijabli z, reziduumi duž $s_1 - s_2 = 2$ normalizacijskih faktora, do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1}L(s,\mathbf{1})L(2,\mathbf{1})}{L(3,\mathbf{1})L(4,\mathbf{1})\varepsilon(1,\mathbf{1})\varepsilon(2,\mathbf{1})^2\varepsilon(3,\mathbf{1})}\prod_{v\in S}\frac{L(2,\mathbf{1}_v)L(3,\mathbf{1}_v)}{L(-2,\mathbf{1}_v)L(-1,\mathbf{1}_v)}$$

različitu od nule, gdje je $\mathbf{1}$ trivijalni karakter od $\mathbb{A}^\times/k^\times$, a $\mathbf{1}_v$ trivijalni karakter od $k_v^\times$. U tablici C-I je

$$r_C(2z,\chi^2) = \frac{L(2z-1,\chi^2)L(2z,\chi^2)}{L(2z+1,\chi^2)L(2z+2,\chi^2)\varepsilon(2z-1,\chi^2)\varepsilon(2z,\chi^2)^2\varepsilon(2z+1,\chi^2)}\cdot$$

$$\cdot\prod_{v\in S}\frac{L(2z,\chi_v^2)L(2z+1,\chi_v^2)}{L(-2z,\chi_v^{-2})L(1-2z,\chi_v^{-2})},$$

kao u poglavlju 3.4.4.

w	$Res_{s_1-s_2=2}r(\underline{s},\pi',w)$
w_1	1
w_2w_1	$\frac{L(2z+2,\chi^2)}{L(2z+3,\chi^2)\varepsilon(2z+2,\chi^2)}$
$w_1w_2w_1$	$\frac{L(2z+2,\chi^2)}{L(2z+3,\chi^2)\varepsilon(2z+2,\chi^2)}r_C(2z,\chi^2)$
$w_1w_2w_1w_2$	$\frac{L(2z-2,\chi^2)}{L(2z-1,\chi^2)\varepsilon(2z-2,\chi^2)}\frac{L(2z+2,\chi^2)}{L(2z+3,\chi^2)\varepsilon(2z+2,\chi^2)}r_C(2z,\chi^2)$

Tablica C-I. Reziduumi normalizacijskih faktora duž $s_1 - s_2 = 2$ u slučaju C

Za pol u točki C_1 treba proučiti polove izraza u tablici C-I u $z = 3/2$. Pol u $z = 3/2$ je moguć jedino ako je χ kvadratni karakter. Tada su sve L–funkcije iz tablice lokalne i globalne Heckeove L–funkcije od trivijalnog karaktera pa po lemi 4.1.1, jedino izraz koji odgovara elementu Weylove grupe $w_1w_2w_1w_2$ ima pol u $z = 3/2$ i to prvog reda. Stoga je iterirani reziduum u točki C_1, do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1}L(s,\mathbf{1})}{L(2,\mathbf{1})\varepsilon(1,\mathbf{1})}\frac{L(5,\mathbf{1})}{L(6,\mathbf{1})\varepsilon(5,\mathbf{1})}r_C(3,\mathbf{1})$$

različitu od nule, jednak

$$N((5/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$

Kriterij kvadratne integrabilnosti iz leme 1.3.6 je ispunjen jer je

$$w_1w_2w_1w_2(5/2,1/2)=(-5/2,-1/2).$$

Dakle, kuspidalna automorfna reprezentacija π' od $M_0'(\mathbb{A})$ daje doprinos $\mathcal{C}_1(\pi')$ potprostoru $L^2_{C_1}$ rezidualnog spektra upravo ako zadovoljava uvjete iz teorema i tada je taj doprinos izomorfan slici normaliziranog operatora ispreplitanja $N((5/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2)$.

Preostaje dokazati ireducibilnost te slike. Koristeći lemu 3.5.1 dokazujemo ireducibilnost slike lokalnih normaliziranih operatora ispreplitanja

$$N((5/2,1/2),\pi'_v,w_1w_2w_1w_2)$$

na svim mjestima v. U oznakama iz leme 3.5.1, neka je $w = w_1w_2w_1w_2$ i $\underline{s} = (5/2,1/2)$. Na nerascjepivom mjestu $v \in S$ slika je ireducibilna po Langlandsovoj klasifikaciji jer je π'_v superkuspidalna, $\underline{s}$ u pozitivnoj Weylovoj komori i w dugi element Weylove grupe.

Na rascjepivom mjestu $v \notin S$ reprezentacija $\chi_{i,v} \circ \det_v$, za $i = 1,2$, je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)}\left(\chi_{i,v}|\cdot|^{-1/2}\otimes\chi_{i,v}|\cdot|^{1/2}\right).$$

Dakle, π_v je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija inducirane reprezentacije s temperirane reprezentacije Levijevog faktora $GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)$ te, u oznakama iz leme 3.5.1,

$$\underline{s}+\underline{s}'=(2,3,0,1).$$

Neka je

$$w'=(1,2)(3,4),$$

pri čemu permutacije shvaćamo kao elemente Weylove grupe kao u dokazu propozicije 3.2.1. Tada je $w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}')$ u pozitivnoj Weylovoj komori i normalizirani operator ispreplitanja

$$N(w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v), w')$$

je surjektivan sa slikom $I(\underline{s}, \pi_v)$ jer je kompozicija dva duga operatora Langlandsove klasifikacije za $GL_2(k_v)$. Budući da je ww' dugi element Weylove grupe, neka je $w'' = 1$. Tada je slika operatora $N((5/2, 1/2), \pi_v, w)$ ireducibilna po lemi 3.5.1. □

4.4.2 Prostor $L^2_{C_2}$

Prije dekompozicije potprostora $L^2_{C_2}$ uvedimo oznake vezane uz induciranu reprezentaciju

$$\mathrm{Ind}_{GL'_1(k_v)}^{G'_1(k_v)}\left(\chi_v \circ \det'_v\right),$$

gdje je χ_v kvadratni karakter, te normalizirani operator ispreplitanja

$$N(0, \chi_v \circ \det'_v, w_2).$$

Prema korolaru 2.2.12 ta inducirana reprezentacija je ireducibilna pa normalizirani operator djeluje skalarom $\eta_v \in \{\pm 1\}$ po lemi 2.2.8. Na skoro svim mjestima, odnosno na rascjepivim mjestima na kojima je χ_v nerazgranat, je $\eta_v = 1$.

Teorem 4.4.2. (Dekompozicija prostora $L^2_{C_2}$) *Potprostor $L^2_{C_2}$ rezidualnog spektra grupe G'_2 dekomponira se u*

$$L^2_{C_2} = \oplus_{\pi'} \mathcal{C}_2(\pi'),$$

gdje je suma po svim jednodimenzionalnim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong (\chi_1 \circ \det') \otimes (\chi_2 \circ \det')$ od $M'_0(\mathbb{A})$ takvim da vrijedi

(1) $\chi_1 = \chi_2$,

(2) χ_i *je kvadratni karakter za i=1,2,*

(3) $\prod_v \eta_v = -1$.

Prostor $\mathcal{C}_2(\pi')$ je ireducibilan prostor automorfnih formi razapet iteriranim reziduumom u $\underline{s} = (2,0)$ Eisensteinovog reda određenog s π', a prelaskom na konstantni član Eisensteinovog reda izomorfan je slici normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N((2,0), \pi', w_1 w_2 w_1).$$

Dokaz. Da bi dobili doprinos rezidualnom spektru, iterirani pol u točki C_2 najprije poništavamo duž singularne ravnine $s_1 - s_2 = 2$, a zatim, u novoj varijabli z zadanoj s (4.15), u $z = 1$. Polove globalnih normalizacijskih faktora u tablici C iz poglavlja 3.4.4 duž ravnine $s_1 - s_2 = 2$ već smo proučili pri dekompoziciji prostora $L^2_{C_1}$ u prethodnom teoremu 4.4.1. Javljaju se ako vrijedi $\chi_1 = \chi_2$, a njihovi reziduumi, do na konstantu različitu od nule, dani su u tablici C-I zapisani u novoj varijabli z. Pritom je $\chi = \chi_1 = \chi_2$.

Sada treba proučiti polove u $z = 1$ izraza iz tablice C-I. Pol se javlja jedino ako je χ kvadratni karakter. Tada, po svojstvima L–funkcija iz leme 4.1.1, pol i to prvog reda imaju izrazi koji odgovaraju elementima Weylove grupe $w_1 w_2 w_1$ i $w_1 w_2 w_1 w_2$. Njihovi reziduumi su, do na konstantu

$$\frac{L(4,\mathbf{1})}{L(5,\mathbf{1})\varepsilon(4,\mathbf{1})} \frac{Res_{s=1} L(s,\mathbf{1}) L(2,\mathbf{1})}{L(3,\mathbf{1}) L(4,\mathbf{1}) \varepsilon(1,\mathbf{1}) \varepsilon(2,\mathbf{1})^2 \varepsilon(3,\mathbf{1})} \prod_{v \in S} \frac{L(2,\mathbf{1}_v) L(3,\mathbf{1}_v)}{L(-2,\mathbf{1}_v) L(-1,\mathbf{1}_v)}$$

različitu od nule, jednaki

$$N((2,0), \pi', w_1 w_2 w_1),$$

$$-N((2,0), \pi', w_1 w_2 w_1 w_2),$$

pri čemu je predznak minus u drugom reziduumu posljedica leme 4.1.4. Dakle, iterirani reziduum u točki C_2 je, do na konstantu različitu od nule, jednak

$$N((2,0), \pi', w_1 w_2 w_1) - N((2,0), \pi', w_1 w_2 w_1 w_2).$$

Kao nekoliko puta do sada, koristeći dekompoziciju (3.12), njegovo djelovanje na $\otimes_v f_v$ može se zapisati kao

$$\otimes_v N((2,0), \pi'_v, w_1 w_2 w_1) \left[\otimes_v f_v - \otimes_v N((2,0), \pi'_v, w_2) f_v \right].$$

Ali lokalni operator ispreplitanja $N((2,0), \pi'_v, w_2)$ je zapravo operator

$$N(0, \chi_v \circ \det'_v, w_2)$$

koji prema tvrdnjama prije iskaza ovog teorema djeluje skalarom η_v. Stoga se reziduum poništava osim ako je

$$\prod_v \eta_v = -1$$

i tada je, do na konstantu različitu od nule, jednak normaliziranom operatoru ispreplitanja

$$N((2,0), \pi', w_1w_2w_1).$$

Kvadratna integrabilnost slijedi po kriteriju iz leme 1.3.6 jer je

$$w_1w_2w_1w_2(2,0) = w_1w_2w_1(2,0) = (-2,0).$$

Dakle, doprinos $\mathcal{C}_2(\pi')$ potprostoru $L^2_{C_2}$ rezidualnog spektra daju upravo kuspidalne automorfne reprezentacije π' od $M_0'(\mathbb{A})$ koje zadovoljavaju uvjete ovog teorema i tada je taj doprinos izomorfan slici normaliziranog operatora $N((2,0), \pi', w_1w_2w_1)$.

Preostaje dokazati da je ta slika ireducibilna. Koristeći lemu 3.5.1 dokazujemo da je slika lokalnih normaliziranih operatora

$$N((2,0), \pi_v', w_1w_2w_1)$$

ireducibilna na svim mjestima v. Na nerascjepivom mjestu $v \in S$ reprezentacija $\chi_v \circ \det_v'$ je superkuspidalna, a po korolaru 2.2.12, inducirana reprezentacija

$$\mathrm{Ind}_{GL_1'(k_v)}^{G_1'(k_v)} (\chi_v \circ \det_v')$$

je ireducibilna i temperirana. Element Weylove grupe $w_1w_2w_1$ je dugi element Weylove grupe za $GL_1' \times G_1' \subset G_2'$, a 2 je u pozitivnoj Weylovoj komori. Stoga je $N((2,0), \pi_v', w_1w_2w_1)$ dugi operator Langlandsove klasifikacije za $G_2'(k_v)$ pa je njegova slika ireducibilna.

Na rascjepivim mjestima $v \notin S$ reprezentacija π_v je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{GL_2(k_v)\times GL_2(k_v)} \left(\chi_v|\cdot|^{-1/2} \otimes \chi_v|\cdot|^{1/2} \otimes \chi_v|\cdot|^{-1/2} \otimes \chi_v|\cdot|^{1/2}\right),$$

gdje je $T = GL_1 \times GL_1 \times GL_1 \times GL_1$. Budući da, prema tvrdnjama prije iskaza ovog teorema, operator $N((2,0), \pi_v, w_2)$ djeluje kao skalar η_v, slika operatora $N((2,0), \pi_v, w_1w_2w_1)$ izomorfna je slici operatora

$$N((2,0), \pi_v', w_1w_2w_1w_2).$$

U oznakama iz leme 3.5.1, neka je $w = w_1 w_2 w_1 w_2$ i $\underline{s} = (2, 0)$. Nadalje, Levijev faktor je $L = T$, reprezentacija $\tau_v = \chi_v \otimes \chi_v \otimes \chi_v \otimes \chi_v$ je superkuspidalna, a

$$\underline{s} + \underline{s}' = (3/2, 5/2, -1/2, 1/2).$$

I dalje u oznakama iz leme 3.5.1, neka je

$$w' = (1, 2)(3, 4),$$

gdje permutaciju shvaćamo kao element Weylove grupe kao u dokazu propozicije 3.2.1, te $w'' = 1$. Tada $w'^{-1}(\underline{s} + \underline{s}')$ zadovoljava nejednakost iz korolara 3.5.2, $w''ww'$ je dugi element Weylove grupe za (SO_8, T) i slika operatora

$$N(w'^{-1}(\underline{s} + \underline{s}'), \tau_v, w')$$

je $I((2, 0), \pi_v)$ jer je taj operator kompozicija dvaju dugih operatora Langlandsove klasifikacije za $GL_2(k_v)$. Stoga je, po lemi 3.5.1 i njezinom korolaru 3.5.2, slika normaliziranog operatora ispreplitanja $N((2, 0), \pi_v, w)$ ireducibilna. □

4.4.3 Prostor $L^2_{C_3}$

U ovom poglavlju dokazujemo da je doprinos $L^2_{C_3}$ iteriranih reziduuma Eisensteinovih redova u točki C_3 rezidualnom spektru trivijalan. Točnije, u sljedećem teoremu je dokazano da iz uvjeta kvadratne integrabilnosti iz leme 1.3.6 slijedi poništavanje tog reziduuma.

Teorem 4.4.3. (Dekompozicija prostora $L^2_{C_3}$) *Potprostor $L^2_{C_3}$ rezidualnog spektra grupe G'_2 je trivijalan, odnosno u točki C_3 nema doprinosa rezidualnom spektru.*

Dokaz. Neka je $\pi' \cong (\chi_1 \circ \det') \otimes (\chi_2 \circ \det')$ jednodimenzionalna kuspidalna automorfna reprezentacija grupe $M'_0(\mathbb{A})$. Za doprinos iteriranog pola Eisensteinovog reda određenog s π' u točki C_3, najprije poništavamo polove globalnih normalizacijskih faktora u tablici C iz poglavlja 3.4.4 duž singularne ravnine $2s_2 = 1$, a zatim, u novoj varijabli z zadanoj s (4.16), pol u $z = 3/2$. Po svojstvima Heckeovih L–funkcija iz leme 4.1.1, pol duž $2s_2 = 1$ se javlja ako i samo ako je χ_2 kvadratni karakter. Tada pol i to prvog reda imaju globalni normalizacijski faktori operatora ispreplitanja za elemente Weylove grupe w_2, w_1w_2, $w_2w_1w_2$ i $w_1w_2w_1w_2$. Zapisani u novoj varijabli z, njihovi reziduumi duž $2s_2 = 1$ su, do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1}L(s,\mathbf{1})}{L(2,\mathbf{1})\varepsilon(1,\mathbf{1})}$$

različitu od nule, dani u tablici C-II. Pritom je za kompleksan broj $s \in \mathbb{C}$ i unitarni karakter χ od $\mathbb{A}^\times/k^\times$ korištena oznaka

$$r_C(s,\chi) = \frac{L(s,\chi)L(s-1,\chi)}{L(s+2,\chi)L(s+1,\chi)\varepsilon(s+1,\chi)\varepsilon(s,\chi)^2\varepsilon(s-1,\chi)}\cdot$$
$$\cdot\prod_{v\in S}\frac{L(s+1,\chi_v)L(s,\chi_v)}{L(1-s,\chi_v^{-1})L(-s,\chi_v^{-1})}$$

kao u poglavlju 3.4.4.

w	$Res_{2s_2=1}r(\underline{s},\pi',w)$
w_2	1
w_1w_2	$r_C(z+1/2,\chi_1\chi_2)$
$w_2w_1w_2$	$r_C(z+1/2,\chi_1\chi_2)\frac{L(2z,\chi_1^2)}{L(2z+1,\chi_1^2)\varepsilon(2z,\chi_1^2)}$
$w_1w_2w_1w_2$	$r_C(z+1/2,\chi_1\chi_2)\frac{L(2z,\chi_1^2)}{L(2z+1,\chi_1^2)\varepsilon(2z,\chi_1^2)}r_C(z-1/2,\chi_1\chi_2)$

Tablica C-II. Reziduumi normalizacijskih faktora duž $2s_2 = 1$ u slučaju C

Sljedeći korak je poništavanje polova u $z = 3/2$ izraza u tablici C-II. Pol se javlja jedino ako je $\chi_1\chi_2$ trivijalan, a to znači da je $\chi_1 = \chi_2$ kvadratni karakter. Tada izrazi koji odgovaraju elementima w_1w_2 i $w_2w_1w_2$ imaju pol prvog reda u $z = 3/2$, a izraz koji odgovara elementu $w_1w_2w_1w_2$ ima pol u $z = 3/2$ i to prvog reda jedino ako $|S| = 2$. Inače, ako je $|S| \geqslant 4$, onda se pol tog izraza pokrati s polovima lokalnih L–funkcija iz nazivnika.

Budući da je $w_1w_2(3/2,1/2) = (-1/2,3/2)$, kriterij kvadratne integrabilnosti iz leme 1.3.6 nije ispunjen za w_1w_2. Stoga, da bi doprinos iteriranog reziduuma bio kvadratno integrabilan doprinos izraza koji odgovara elementu

w_1w_2 mora biti trivijalan. Drugim riječima, mora postojati subkvocijent inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{GL_1'(\mathbb{A})\times GL_1'(\mathbb{A})}^{G_2'(\mathbb{A})}\left((\chi_1\circ\det')\nu^{3/2}\otimes(\chi_2\circ\det')\nu^{1/2}\right)$$

na kojem je normalizirani operator ispreplitanja $N((3/2,1/2),\pi',w_1w_2)$ trivijalan, odnosno za automorfnu formu f iz tog subkvocijenta vrijedi

$$N((3/2,1/2),\pi',w_1w_2)f=0.$$

Ali, za takvu automorfnu formu f, poništavaju se i reziduumi u $z=3/2$ preostala dva izraza iz tablice C-II koji mogu imati pol prvog reda. Naime, do na konstantu, oni su jednaki

$$\begin{aligned}&N((3/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2)f=\\&\qquad=N((-1/2,3/2),\pi',w_2)N((3/2,1/2),\pi',w_1w_2)f=0,\\&N((3/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2)f=\\&\qquad=N((-1/2,3/2),\pi',w_1w_2)N((3/2,1/2),\pi',w_1w_2)f=0.\end{aligned}$$

Dakle $L^2_{C_3}$ je trivijalan. □

4.4.4 Prostor $L^2_{C_4}$

Prije dekompozicije potprostora $L^2_{C_4}$ rezidualnog spektra uvodimo oznake vezane uz djelovanje lokalnog normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N(0,(\chi_{1,v}\circ\det_v')\otimes(\chi_{2,v}\circ\det_v'),w_1)$$

na induciranoj reprezentaciji

$$\mathrm{Ind}_{GL_1'(k_v)\times GL_1'(k_v)}^{GL_2'(k_v)}\left((\chi_{1,v}\circ\det_v')\otimes(\chi_{2,v}\circ\det_v')\right).$$

Prema lemi 2.2.9, ta inducirana reprezentacija je ireducibilna pa po lemi 2.2.8 normalizirani operator djeluje skalarom $\eta_v\in\{\pm1\}$. Na skoro svim mjestima, odnosno na rascjepivim mjestima na kojima su karakteri $\chi_{i,v}$, za $i=1,2$, nerazgranati je $\eta_v=1$. Za opis ireducibilnih komponenti u dekompoziciji prostora $L^2_{C_4}$ potrebna nam je i sljedeća lema.

Lema 4.4.4. *Neka je $\pi'_v \cong (\chi_{1,v} \circ \det'_v) \otimes (\chi_{2,v} \circ \det'_v)$ reprezentacija Levijevog faktora $M'_0(\mathbb{A})$, gdje su $\chi_{1,v}$ i $\chi_{2,v}$ unitarni kvadratni karakteri od $k_v^\times$. Tada je slika normaliziranog operatora ispreplitanja*

$$N((1/2,1/2),\pi'_v,w_2w_1w_2)$$

ireducibilna na svim nerascjepivim mjestima i onim rascjepivim mjestima gdje je $\chi_{1,v} = \chi_{2,v}$, a izomorfna direktnoj sumi dvije ireducibilne reprezentacije na onim rascjepivim mjestima gdje $\chi_{1,v} \neq \chi_{2,v}$.

Dokaz. U dokazu koristimo lemu 3.5.1. Budući da je normalizirani operator ispreplitanja koji smo promotrili prije iskaza ove leme izomorfizam, slike operatora $N((1/2,1/2),\pi'_v,w_2w_1w_2)$ i $N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1w_2w_1w_2)$ su izomorfne. Neka je, u oznakama iz leme 3.5.1, $\underline{s} = (1/2,1/2)$ i $w = w_1w_2w_1w_2$. Za nerascjepivo mjesto slika je ireducibilna prema Langlandsovoj klasifikaciji obzirom da je π'_v superkuspidalna i w dugi element Weylove grupe.

Neka je v rascjepivo mjesto. Kao u dokazu teorema 4.4.2, π_v je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija reprezentacije inducirane s torusa, odnosno, u oznakama leme 3.5.1, Levijev faktor $L = T$,

$$\underline{s} + \underline{s}' = (0,1,0,1),$$

$$\tau_v = \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \chi_{2,v} \otimes \chi_{2,v}.$$

Za w' iz leme 3.5.1 uzmimo element Weylove grupe koji, kao u dokazu propozicije 3.2.1, odgovara permutaciji

$$w' = (1,4,3)(2).$$

Tada je

$$w'^{-1}(\underline{s} + \underline{s}') = (1,1,0,0),$$

$$w'^{-1}(\tau_v) = \chi_{2,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \chi_{1,v} \otimes \chi_{2,v}.$$

Rastav $w' = (1)(2)(3,4) \circ (1,3,2)(4) \circ (1)(2,3)(4)$ pokazuje da je normalizirani operator ispreplitanja $N(w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}'), w'^{-1}(\tau_v), w')$ surjektivan na $I(\underline{s},\pi_v)$ jer se dekomponira u kompoziciju

$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{SO_8(k_v)} (\chi_{2,v}|\cdot| \otimes \chi_{1,v}|\cdot| \otimes \chi_{1,v} \otimes \chi_{2,v}) \to$$

$$\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_2(k_v)\times GL_1(k_v)}^{SO_8(k_v)} \left(\chi_{2,v}|\cdot| \otimes (\chi_{1,v} \circ \det_v)\nu^{1/2} \otimes \chi_{2,v}\right) \to$$

$$\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)\times GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left((\chi_{1,v}\circ\det_v)\nu^{1/2}\otimes\chi_{2,v}|\cdot|\otimes\chi_{2,v}\right)\to$$
$$\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)\times GL_2(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left((\chi_{1,v}\circ\det_v)\nu^{1/2}\otimes(\chi_{2,v}\circ\det_v)\nu^{1/2}\right),$$

gdje su prva i treća strelica surjektivne, a druga je izomorfizam.

Za w'' iz leme 3.5.1 uzmimo element Weylove grupe $w''=(1,2,3)(4)$. Tada je $w''ww'$ dugi element Weylove grupe. Tvrdimo da je restrikcija normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N(w(\underline{s}+\underline{s}'),w(\tau_v),w'')$$

koji djeluje na induciranoj reprezentaciji

$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_{1,v}^{-1}|\cdot|\otimes\chi_{1,v}\otimes\chi_{2,v}|\cdot|^{-1}\otimes\chi_{2,v}\right)$$

na podreprezentaciju

$$\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)\times GL_2(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left((\chi_{1,v}\circ\det_v)\nu^{-1/2}\otimes(\chi_{2,v}\circ\det_v)\nu^{-1/2}\right)$$

injektivna. Drugim riječima, presjek njegove jezgre s tom podreprezentacijom je trivijalan. Ako $\chi_{1,v}\neq\chi_{2,v}$ operator je izomorfizam kao produkt dvaju $GL_2(k_v)$ normaliziranih operatora ispreplitanja koji djeluju na ireducibilnim induciranim reprezentacijama. Ako je $\chi_{1,v}=\chi_{2,v}=\chi_v$, onda rastav $w''=(1,2)(3)(4)\circ(1)(2,3)(4)$, daje dekompoziciju promatranog opereratora u

$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_v|\cdot|^{-1}\otimes\chi_v\otimes\chi_v|\cdot|^{-1}\otimes\chi_v\right)\to$$
$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_v|\cdot|^{-1}\otimes\chi_v|\cdot|^{-1}\otimes\chi_v\otimes\chi_v\right)\to$$
$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_v|\cdot|^{-1}\otimes\chi_v|\cdot|^{-1}\otimes\chi_v\otimes\chi_v\right),$$

gdje je druga strelica izomorfizam koji mijenja mjesta prvih dvaju karaktera. Stoga je jezgra operatora $N(w(\underline{s}+\underline{s}'),w(\tau_v),w'')$ izomorfna

$$\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_2(k_v)\times GL_1(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_v|\cdot|^{-1}\otimes St_{\chi_v}\nu^{-1/2}\otimes\chi_v\right),$$

gdje St_{χ_v} i na arhimedskim mjestima označava jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju od $\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{GL_2(k_v)}\left(\chi_v|\cdot|^{1/2}\otimes\chi_v|\cdot|^{-1/2}\right)$. Prema Langlandsovoj klasifikaciji, jezgra sadrži jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, točnije Langlandsov kvocijent. Kad bi jezgra imala netrivijalan presjek s

$$\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)\times GL_2(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left((\chi_{1,v}\circ\det_v)\nu^{-1/2}\otimes(\chi_{2,v}\circ\det_v)\nu^{-1/2}\right),$$

onda bi presjek sadržavao taj Langlandsov kvocijent kao podreprezentaciju. Međutim, takva podreprezentacija je izomorfna kvocijentu inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{GL_2(k_v)\times GL_2(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left((\chi_{1,v}\circ\det_v)\nu^{1/2}\otimes(\chi_{2,v}\circ\det_v)\nu^{1/2}\right),$$

a zbog surjektivnosti normaliziranog operatora ispreplitanja koji odgovara w', ona je kvocijent i inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_v|\cdot|\otimes\chi_v|\cdot|\otimes\chi_v\otimes\chi_v\right).$$

Koristeći indukciju u koracima, najprije induciramo zadnja dva karaktera na $SO_4(k_v)$. Ta inducirana reprezentacija je ireducibilna, po lemi 2.2.11 jer je χ_v kvadratni karakter, i temperirana, te je označimo sa σ_v. Tada,

$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_v|\cdot|\otimes\chi_v|\cdot|\otimes\chi_v\otimes\chi_v\right)\cong$$

$$\cong\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)\times SO_4(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_v|\cdot|\otimes\chi_v|\cdot|\otimes\sigma_v\right),$$

te prema Langlandsovoj klasifikaciji, ima jedinstveni ireducibilni Langlandsov kvocijent koji nije izomorfan Langlandsovom kvocijentu u jezgri. Time smo dokazali našu tvrdnju o injektivnost i za $\chi_{1,v}=\chi_{2,v}$.

Nadalje, kao u dokazu leme 3.5.1, dokazana surjektivnost i injektivnost pokazuju da je slika operatora $N(w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}'),w'^{-1}(\tau_v),w''ww')$ izomorfna slici operatora $N(\underline{s},\pi'_v,w)$. Međutim, iako je $w''ww'$ dugi element Weylove grupe, $w'^{-1}(\underline{s}+\underline{s}')$ ne zadovoljava nejednakosti iz korolara 3.5.2 pa ne možemo direktno primijeniti Langlandsovu klasifikaciju. Ipak, sliku možemo opisati. Indukcija u koracima daje

$$\mathrm{Ind}_{T(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_{2,v}|\cdot|\otimes\chi_{1,v}|\cdot|\otimes\chi_{1,v}\otimes\chi_{2,v}\right)\cong$$

$$\cong\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)\times SO_4(k_v)}^{SO_8(k_v)}\left(\chi_{2,v}|\cdot|\otimes\chi_{1,v}|\cdot|\otimes\mathrm{Ind}_{GL_1(k_v)\times GL_1(k_v)}^{SO_4(k_v)}(\chi_{1,v}\otimes\chi_{2,v})\right).$$

Po lemi 2.2.11, reprezentacija inducirana na $SO_4(k_v)$ je ireducibilna i temperirana ako je $\chi_{1,v}=\chi_{2,v}$, a rastavlja se u direktnu sumu dvije ireducibilne temperirane reprezentacije ako $\chi_{1,v}\neq\chi_{2,v}$. U svakom slučaju, rastav dugog elementa Weylove grupe u produkt dugog elementa za $GL_1\times GL_1\times SO_4\subset SO_8$ i dugog elementa za $GL_1\times GL_1\subset SO_4$ dozvoljava primjenu Langlandsove klasifikacije za svaku temperiranu komponentu inducirane reprezentacije čime je lema dokazana. $\square$

Teorem 4.4.5. (Dekompozicija prostora $L^2_{C_4}$) *Potprostor $L^2_{C_4}$ rezidualnog spektra grupe G'_2 dekomponira se u*

$$L^2_{C_4} = \left(\oplus_{\pi'} \mathcal{C}_4^{(1)}(\pi')\right) \oplus \left(\oplus_{\pi'} \mathcal{C}_4^{(2)}(\pi')\right).$$

Pritom je prva suma po svim jednodimenzionalnim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong (\chi_1 \circ \det') \otimes (\chi_2 \circ \det')$ od $M'_0(\mathbb{A})$ takvim da vrijedi

(1-1) $\chi_1 \neq \chi_2$,

(1-2) χ_i *su kvadratni karakteri za* $i = 1, 2$,

(1-3) $\chi_{1,v} \neq \chi_{2,v}$ *za sva nerascjepiva mjesta* $v \in S$,

(1-4) $\prod_v \eta_v = 1$,

a druga je po svim jednodimenzionalnim kuspidalnim automorfnim reprezentacijama $\pi' \cong (\chi_1 \circ \det') \otimes (\chi_2 \circ \det')$ od $M'_0(\mathbb{A})$ takvim da

(2-1) $\chi_1 = \chi_2$,

(2-2) χ_i *je kvadratni karakter za* $i = 1, 2$,

(2-3) *broj nerascjepivih mjesta je* $|S| = 2$,

(2-4) $\prod_v \eta_v = -1$.

Oba prostora $\mathcal{C}_4^{(1)}(\pi')$ i $\mathcal{C}_4^{(2)}(\pi')$ su prostori automorfnih formi razapeti iteriranim reziduumom u $\underline{s} = (1/2, 1/2)$ Eisensteinovog reda određenog s π', a prelaskom na konstantni član Eisensteinovog reda izomorfni su slici normaliziranog operatora ispreplitanja

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_2 w_1 w_2).$$

Prostor $\mathcal{C}_4^{(2)}(\pi')$ je ireducibilan, a prostor $\mathcal{C}_4^{(1)}(\pi')$ je izomorfan sumi ireducibilnih reprezentacija oblika $\otimes_v \Pi'_v$, gdje je Π'_v jedna od najviše dvije ireducibilne komponente slike operatora iz prethodne leme 4.4.4 i pritom je na skoro svim mjestima Π'_v nerazgranata.

Dokaz. Doprinos rezidualnom spektru iteriranog pola Eisensteinovog reda u točki C_4 dobivamo poništavajući najprije pol globalnih normalizacijski faktora u tablici C iz poglavlja 3.4.4 duž singularne ravnine $2s_2 = 1$, a zatim, u novoj varijabli z zadanoj s (4.16), pol u $z = 1/2$. Pol duž $2s_2 = 1$ koristili smo već u dokazu prethodnog teorema 4.4.3. Javlja se samo ako je χ_2 kvadratni karakter i njegovi reziduumi duž $2s_2 = 1$ dani su, u novoj varijabli z, u tablici C-II do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1} L(s, \mathbf{1})}{L(2, \mathbf{1})\varepsilon(1, \mathbf{1})}$$

različitu od nule, gdje je $\mathbf{1}$ trivijalni karakter od $\mathbb{A}^\times/k^\times$. U sljedećem koraku treba proučiti polove u $z = 1/2$ izraza iz tablice C-II. Razlikujemo dva slučaja ovisno o tome da li su χ_1 i χ_2 jednaki ili nisu.

Najprije pretpostavimo da je $\chi_1 \neq \chi_2$, odnosno $\chi_1\chi_2$ nije trivijalan. Tada, po svojstvima L–funkcija iz leme 4.1.1, samo izrazi koji odgovaraju elementima Weylove grupe $w_2w_1w_2$ i $w_1w_2w_1w_2$ mogu imati polove u $z = 1/2$ i to samo ako je χ_1 kvadratni karakter. Tada je reziduum izraza koji odgovara elementu $w_2w_1w_2$, do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1} L(s, \mathbf{1})}{L(2, \mathbf{1})\varepsilon(1, \mathbf{1})} r_C(1, \chi_1\chi_2),$$

jednak

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_2w_1w_2).$$

Koristeći globalnu funkcionalnu jednadžbu iz leme 4.1.1 dobiva se

$$L(-1, \chi_1\chi_2) = \varepsilon(-1, \chi_1\chi_2) L(2, \chi_1\chi_2),$$

$$L(0, \chi_1\chi_2) = \varepsilon(0, \chi_1\chi_2) L(1, \chi_1\chi_2),$$

$$\varepsilon(0, \chi_1\chi_2)\varepsilon(1, \chi_1\chi_2) = 1$$

pa je reziduum izraza koji odgovara elementu $w_1w_2w_1w_2$, do na istu gornju konstantu, jednak

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_1w_2w_1w_2).$$

Međutim, gornja konstanta nije uvijek različita od nule. Naime, u lokalnom dijelu izraza $r_C(1, \chi_1\chi_2)$ javlja se produkt

$$\prod_{v \in S} \frac{1}{L(0, \chi_{1,v}\chi_{2,v})}.$$

Stoga, ako lokalna L–funkcija $L(s, \chi_{1,v}\chi_{2,v})$ ima pol u $s = 0$ za samo jedno mjesto $v \in S$, onda se oba reziduuma poništavaju. Po svojstvima L–funkcija iz leme 4.1.1, te lokalne L–funkcije nemaju pol u $s = 0$ ako i samo ako je $\chi_{1,v}\chi_{2,v}$ netrivijalan, odnosno

$$\chi_{1,v} \neq \chi_{2,v}$$

za sva mjesta $v \in S$. Tada je gornja konstanta različita od nule pa je iterirani reziduum u točki C_4, do na konstantu različitu od nule, jednak

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_2 w_1 w_2) + N((1/2, 1/2), \pi', w_1 w_2 w_1 w_2).$$

Njegovo djelovanje na $\otimes_v f_v$, koristeći dekompoziciju (3.12) i činjenicu da je $w_1 w_2 w_1 w_2 = w_2 w_1 w_2 w_1$, može se zapisati kao

$$\otimes_v N((1/2, 1/2), \pi'_v, w_2 w_1 w_2) \left[\otimes_v f_v + \otimes_v N((1/2, 1/2), \pi'_v, w_1) f_v\right].$$

Po tvrdnjama prije iskaza teorema operator $N((1/2, 1/2), \pi'_v, w_1)$ djeluje skalarom η_v. Stoga se iterirani reziduum poništava osim ako je

$$\prod_v \eta_v = 1$$

i tada je jednak slici operatora

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_2 w_1 w_2).$$

Uvjet kvadratne integrabilnosti iz kriterija u lemi 1.3.6 je ispunjen jer je

$$w_1 w_2 w_1 w_2 (1/2, 1/2) = w_2 w_1 w_2 (1/2, 1/2) = (-1/2, -1/2).$$

Dakle, u ovom slučaju doprinos $\mathcal{C}_4^{(1)}(\pi')$ potprostoru $L^2_{C_4}$ rezidualnog spektra daju upravo jednodimenzionalne kuspidalne automorfne reprezentacije π' koje zadovoljavaju uvjete (1-1) do (1-4) iz teorema i taj doprinos je izomorfan slici normaliziranog operatora ispreplitanja $N((1/2, 1/2), \pi', w_2 w_1 w_2)$ opisanoj u prethodnoj lemi 4.4.4.

Sada pretpostavimo da je $\chi_1 = \chi_2$, odnosno $\chi_1\chi_2$ je trivijalan. Tada je i χ_1 kvadratni karakter. Sve L–funkcije u izrazima iz tablice C-II su lokalne ili globalne Heckeove L–funkcije od trivijalnog karaktera. Podsjetimo da je broj mjesta od k na kojima kvaternionska algebra D nije rascjepiva paran i

$|S| \geqslant 2$. Prije poništavanja pola u $z = 1/2$ izraza iz tablice C-II, promotrimo izraz

$$r_C(s, \mathbf{1})$$

koji se javlja u toj tablici za $s = 0$ i $s = 1$, gdje je $\mathbf{1}$ trivijalni karakter od $\mathbb{A}^\times/k^\times$. Prema globalnoj funkcionalnoj jednadžbi iz leme 4.1.1 je

$$L(-1, \mathbf{1}) = \varepsilon(-1, \mathbf{1})L(2, \mathbf{1}),$$

$$\varepsilon(0, \mathbf{1})\varepsilon(1, \mathbf{1}) = 1,$$

a po lemi 4.1.4 je

$$\left(\frac{L(s, \mathbf{1})}{L(s+1, \mathbf{1})\varepsilon(s, \mathbf{1})}\right)\Big|_{s=0} = -1$$

te

$$\prod_{v \in S} \frac{L(s, \mathbf{1}_v)}{L(-s, \mathbf{1}_v)}\Big|_{s=0} = (-1)^{|S|} = 1.$$

Uvrštavanjem svih tih formula dobivamo da je

$$r_C(0, \mathbf{1}) = -1.$$

Prema analitičkim svojstvima Heckeovih L–funkcija iz leme 4.1.1, za $s = 1$ u brojniku izraza $r_C(s, \mathbf{1})$ je pol drugog reda, a u nazivniku pol reda $|S|$. Stoga, ako je $|S| \geqslant 4$, onda $r_C(s, \mathbf{1})$ ima nultočku reda $|S| - 2$ u $s = 1$, a ako je $|S| = 2$ onda je $r_C(1, \mathbf{1})$ konstanta različita od nule.

Koristeći dobivene činjenice o $r_C(s, \mathbf{1})$ i analitička svojstva Heckeovih L–funkcija iz leme 4.1.1 zaključujemo da za $|S| \geqslant 4$ niti jedan od izraza iz tablice C-II nema pol u $z = 1/2$. Neka je stoga

$$|S| = 2.$$

Tada pol u $z = 1/2$ i to prvog reda imaju izrazi koji odgovaraju elementima Weylove grupe $w_2w_1w_2$ i $w_1w_2w_1w_2$. Njihovi reziduumi su, do na konstantu

$$\frac{Res_{s=1} L(s, \mathbf{1})}{L(2, \mathbf{1})\varepsilon(1, \mathbf{1})} r_C(1, \mathbf{1})$$

različitu od nule, jednaki

$$N((1/2, 1/2), \pi', w_2w_1w_2),$$

$$-N((1/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$

Dakle, do na konstantu različitu od nule, iterirani reziduum u točki C_4 u ovom slučaju jednak je

$$N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2)-N((1/2,1/2),\pi',w_1w_2w_1w_2).$$

Njegovo djelovanje na $\otimes_v f_v$ može se, koristeći dekompoziciju (3.12), zapisati kao

$$\otimes_v N((1/2,1/2),\pi'_v,w_2w_1w_2)\left[\otimes_v f_v-\otimes_v N((1/2,1/2),\pi'_v,w_1)f_v\right].$$

Stoga, reziduum se poništava osim ako

$$\prod_v \eta_v=-1$$

i tada je jednak, do na konstantu različitu od nule, normaliziranom operatoru ispreplitanja

$$N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2).$$

Kriterij kvadratne integrabilnosti iz leme 1.3.6 ispunjen je kao u prethodnom slučaju. Dakle, doprinos $\mathcal{C}_4^{(2)}(\pi')$ ovog slučaja potprostoru $L^2_{C_4}$ rezidualnog spektra daju upravo one jednodimenzionalne kuspidalne automorfne reprezentacije π' od $M'_0(\mathbb{A})$ koje zadovoljavaju uvjete (2-1) do (2-4) iz teorema i taj doprinos je ireducibilan jer je izomorfan slici normaliziranog operatora ispreplitanja $N((1/2,1/2),\pi',w_2w_1w_2)$ opisanoj u prethodnoj lemi 4.4.4. $\square$

Bibliografija

[1] J. Arthur, Eisenstein Series and the Trace Formula, *Proc. Sympos. Pure Math.* **33**, part 1 (1979), 253–274

[2] J. Arthur, Intertwining Operators and Residues I. Weighted Characters, *J. Funct. Anal.* **84** (1989), 19–84

[3] I.N. Bernstein, A.V. Zelevinsky, Induced Representations of Reductive $\mathfrak{p}$–adic Groups I, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **10** (1977), 441–472

[4] A. Borel, Introduction to Automorphic Forms, *Proc. Sympos. Pure Math.* **9** (1966), 199–210

[5] A. Borel, H. Jacquet, Automorphic Forms and Automorphic Representations, *Proc. Sympos. Pure Math.* **33**, part 1 (1979), 189–202

[6] W. Casselman, F. Shahidi, On Irreducibility of Standard Modules for Generic Representations, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **31** (1998), 561–589

[7] P. Deligne, D. Kazhdan, M.F. Vignéras, Représentations des algèbres centrales simples p–adiques, *Représentations des Groupes Réductifs sur un Corps Local* (1984), Herman, 33–117

[8] D. Flath, Decomposition of Representations into Tensor Products, *Proc. Sympos. Pure Math.* **33**, part 1 (1979), 179–183

[9] S. Gelbart, *Automorphic Forms on Adele Groups*, Ann. of Math. Studies **83**, Princeton Univ. Press, 1975

[10] S. Gelbart, H. Jacquet, Forms of $GL(2)$ from the Analytic Point of View, *Proc. Sympos. Pure Math.* **33**, part 1 (1979), 213–251

[11] S. Gelbart, I.I. Piatetski–Shapiro, S. Rallis, *Explicit Constructions of Automorphic L–functions*, Lecture Notes in Math. **1254**, Springer–Verlag, 1987

[12] I.M. Gelfand, M.I. Graev, I.I. Piatetski–Shapiro, *Representation Theory and Automorphic Functions*, Saunders, 1969

[13] R. Godement, H. Jacquet, *Zeta Functions of Simple Algebras*, Lecture Notes in Math. **260**, Springer–Verlag, 1972

[14] N. Grbac, *Teoremi konverzije i funktorijalnost*, Magistarski rad, Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu, 2003

[15] N. Grbac, On the Residual Spectrum of Hermitian Quaternionic Inner Form of SO_8, poslano

[16] N. Grbac, On a Relation between Residual Spectra of Split Classical Groups and their Inner Forms, *Canad. J. Math.*, prihvaćeno za objavljivanje

[17] N. Grbac, The Residual Spectrum of an Inner Form of Sp_8 Supported in the Minimal Parabolic Subgroup, poslano

[18] N. Grbac, Correspondence between the Residual Spectra of Rank Two Split Classical Groups and their Inner Forms, *Functional Analysis IX* (Dubrovnik, 2005), Various Publ. Ser. **48** (2007), Univ. Aarhus, 44–57

[19] M. Hanzer, R Groups for Quaternionic Hermitian Groups, *Glasnik mat.* **38(58)** (2003), 1–18

[20] M. Hanzer, *Inducirane reprezentacije hermitskih kvaternionskih grupa*, Disertacija, Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu, 2005

[21] M. Hanzer, Unitary Dual of the Hermitian Quaternionic Group of the Split Rank 2, *Pacific J. Math.* **226** (2006), 353–388

[22] M. Hanzer, The Comparison of the Local and the Global Method for Proving Unitarizability, *Functional Analysis IX* (Dubrovnik, 2005), Various Publ. Ser. **48** (2007), Univ. Aarhus, 58–69

[23] Harish–Chandra, *Automorphic Forms on Semi–simple Lie Groups*, Lecture Notes in Math. **68**, Springer–Verlag, 1968

[24] E. Hecke, *Mathematische Werke*, Vandenhoek and Ruprecht, 1959

[25] R. Howe, θ–Series and Invariant Theory, *Proc. Sympos. Pure Math.* **33**, part 1 (1979), 275–285

[26] H. Jacquet, R.P. Langlands, *Automorphic Forms on* GL_2, Lecture Notes in Math. **114**, Springer–Verlag, 1970

[27] H. Jacquet, *Automorphic Forms on* $GL(2)$*, Part II*, Lecture Notes in Math. **278**, Springer–Verlag, 1972

[28] H. Jacquet, Principal L–Functions of the Linear Group, *Proc. Sympos. Pure Math.* **33**, part 2 (1979), 63–86

[29] H. Jacquet, I.I. Piatetski–Shapiro, J.A. Shalika, Rankin–Selberg Convolutions, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 367–464

[30] H.H. Kim, The Residual Spectrum of Sp_4, *Compositio Math.* **99** (1995), 129–151

[31] H.H. Kim, The Residual Spectrum of G_2, *Canad. J. Math.* **48** (1996), 1245–1272

[32] H.H. Kim, Langlands–Shahidi Method and Poles of Automorphic L–functions: Application to Exterior Square L–Functions, *Canad. J. Math.* **51** (1999), 835–849

[33] H.H. Kim, Langlands–Shahidi Method and Poles of Automorphic L–functions II, *Israel J. Math.* **117** (2000), 261–284

[34] H.H. Kim, Residual Spectrum of Odd Orthogonal Groups, *Internat. Math. Res. Notices* **17** (2001), 873–906

[35] T. Kon–No, The Residual Spectrum of $U(2,2)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), 1285–1358

[36] J.–P. Labesse, R.P. Langlands, L–Indistinguishability for $SL(2)$, *Canad. J. Math.* **31** (1979), 726–785

[37] R.P. Langlands, *On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math. **544**, Springer–Verlag, 1976

[38] R.P. Langlands, On the Notion of an Automorphic Representation. A Supplement to the Preceding Paper, *Proc. Sympos. Pure Math.* **33**, part 1 (1979), 203–207

[39] E. Lapid, G. Muić, M. Tadić, On the Generic Unitary Dual of Quasisplit Classical Groups, *Internat. Math. Res. Notices* **26** (2004), 1335–1354

[40] C. Mœglin, Orbites unipotentes et spectre discret non ramifie, *Compositio Math.* **77** (1991), 1–54

[41] C. Mœglin, Représentations unipotentes et formes automorphes de carré intégrable, *Forum Math.* **6** (1994), 651–744

[42] C. Mœglin, Conjectures sur le spectre residuel, *J. Math. Soc. Japan* **53** (2001), 395–427

[43] C. Mœglin, J.–L. Waldspurger, Le spectre résiduel de $GL(n)$, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **22** (1989), 605–674

[44] C. Mœglin, J.–L. Waldspurger, *Spectral Decomposition and Eisenstein Series*, Cambridge Tracts in Math. **113**, Cambridge University Press, 1995

[45] G. Muić, Some Results on Square Integrable Representations; Irreducibility of Standard Representations, *Internat. Math. Res. Notices* **14** (1998), 705–726

[46] G. Muić, A Proof of Casselman–Shahidi's Conjecture for Quasi–split Classical Groups, *Canad. Math. Bull.* **44** (2001), 298–312

[47] G. Muić, On Certain Classes of Unitary Representations for Split Classical Groups, *Canad. J. Math.* **59** (2007), 148–185

[48] G. Muić, G. Savin, Complementary Series for Hermitian Quaternionic Groups, *Canad. Math. Bull.* **43** (2000), 90–99

[49] I. Piatetski–Shapiro, Multiplicity One Theorems, *Proc. Sympos. Pure Math.* **33**, part 1 (1979), 209–212

[50] A. SELBERG, Harmonic Analysis and Discontinuous Groups in Weakly Symmetric Riemannian Spaces, with Applications to Dirichlet Series, *J. Indian Math. Soc.* **20** (1956), 47–87

[51] F. SHAHIDI, On Certain L–Functions, *Amer. J. Math.* **103** (1981), 297–355

[52] F. SHAHIDI, A proof of Langlands' Conjecture on Plancherel Measures; Complementary series of $\mathfrak{p}$–adic Groups, *Ann. of Math.* **132** (1990), 273–330

[53] J.A. SHALIKA, The Multiplicity One Theorem for $GL(n)$, *Ann. of Math.* **100** (1974), 171–193

[54] B. SPEH, The Unitary Dual of $Gl(3,\mathbb{R})$ and $Gl(4,\mathbb{R})$, *Math. Annalen* **258** (1981), 113–133

[55] M. TADIĆ, Induced Representations of $GL(n, A)$ for p–adic Division Algebras A, *J. Reine Angew. Math.* **405** (1990), 48–77

[56] M. TADIĆ, Notes on Representations of Non–archimedean $SL(n)$, *Pacific J. Math.* **152**, 375–396

[57] J. TATE, Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta–Functions, Harvard Dissertation, 1950, *Algebraic Number Theory* (1967), Academic Press, 305–347

[58] D. VOGAN, Gelfand–Kirillov Dimension for Harish–Chandra Modules, *Invent. Math.* **48** (1978), 75–98

[59] N.R. WALLACH, *Real Reductive Groups I*, Pure and Applied Math. **132**, Academic Press, 1988

[60] G. WARNER, *Harmonic Analysis on Semi–Simple Lie Groups I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **188**, Springer–Verlag, 1972

[61] A.V. ZELEVINSKY, Induced Representations of Reductive $\mathfrak{p}$–adic Groups II. On Irreducible Representations of $GL(n)$, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **13** (1980), 165–210

[62] S. Žampera, *Klasifikacija rezidualnog spektra grupe tipa G_2 i konstrukcija dijelova rezidualnog spektra klasičnih grupa*, Disertacija, Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu, 1997

[63] S. Žampera, The Residual Spectrum of the Group of Type G_2, *J. Math. Pures Appl.* **76** (1997), 805–835

Sažetak

Ova disertacija se bavi rezidualnim spektrom hermitske kvaternionske grupe G_2' koja je unutarnja forma rascjepive grupe SO_8. Pristup je baziran na Langlandsovoj spektralnoj teoriji. Dekomponira se dio rezidualnog spektra koji se dobiva iteriranim poništavanjem polova Eisensteinovih redova pridruženih kuspidalnim automorfnim reprezentacijama Levijevog faktora minimalne paraboličke podgrupe od G_2'. Rezultati pokazuju interesantne dijelove rezidualnog spektra koji se ne javljaju kod kvazirascjepivih grupa.

Pri određivanju polova Eisensteinovog reda treba normalizirati lokalne standardne operatore ispreplitanja meromorfnim skalarnim funkcijama tako da su normalizirani operatori ispreplitanja holomorfni i različiti od nule u zatvaraču pozitivne Weylove komore. Za kvazirascjepive grupe normalizacijski faktori se mogu zapisati kao kvocijenti L–funkcija i ε–faktora koristeći Langlands–Shahidijevu metodu. Za grupu G_2' koja nije kvazirascjepiva normalizacijski faktori definirani su u ovoj disertaciji prijenosom normalizacijskih faktora s njene rascjepive forme.

Summary

Neven Grbac, *The Residual Spectrum of a Hermitian Quaternionic Inner Form of the Group* SO_8, Dissertation, Department of Mathematics, University of Zagreb, 2007.

This thesis deals with the residual spectrum of the hermitian quaternionic group G_2' which is an inner form of the split group SO_8. The approach is based on the Langlands spectral theory. The part of the residual spectrum which is obtained by the iterated cancellation of the poles of the Eisenstein series attached to cuspidal automorphic representations of the Levi factor of the minimal parabolic subgroup of G_2' is decomposed. The results show interesting parts of the residual spectrum which do not appear for quasi–split groups.

During the calculation of the poles of the Eisenstein series the local standard intertwining operators should be normalized by the meromorphic scalar functions in such a way that the normalized intertwining operators are holomorphic and nonvanishing in the closure of the positive Weyl chamber. For quasi–split groups the normalizing factors can be written as the quotients of L–functions and ε–factors using the Langlands–Shahidi method. For the group G_2' which is not quasi–split the normalizing factors are defined in this thesis transferring the normalizing factors from its split form.

Životopis

Rođen sam u Rijeci 2. kolovoza 1974. godine. Osnovnu školu pohađao sam u Lovranu, a matematičku Gimnaziju Andrije Mohorovičića u Rijeci gdje sam i maturirao 1993. godine. Iste godine sudjelovao sam na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi u Istanbulu.

Dodiplomski studij matematike započeo sam akademske godine 1993/94 na inžinjerskom smjeru Matematičkog odjela Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirao sam s radom *Hermitski prostori i dualni parovi* 1999. godine kod Prof. dr.sc. Marka Tadića. Tijekom studija dobio sam Rektorovu nagradu i Nagradu za najboljeg studenta Matematičkog odjela.

U jesen 2000. godine započinjem raditi kao znanstveni novak na Zavodu za primijenjenu matematiku Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu gdje radim i danas. Istodobno započinjem znanstveni rad na znanstvenom projektu *Reprezentacije klasičnih grupa* s voditeljem Prof. dr.sc. Markom Tadićem, te upisujem poslijediplomski znanstveni studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno–Matematičkog Fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Zvanje magistra znanosti stekao sam 2003. godine s radom *Teoremi konverzije i funktorijalnost* kod Prof. dr.sc. Gorana Muića i Prof. dr.sc. Marka Tadića. Sudjelovao sam na nizu ljetnih škola i konferencija te nekoliko puta na njima održao predavanje o svojim znanstvenim rezultatima. Član sam Seminara za teoriju reprezentacija grupa.