Sveučilište u Rijeci

Filozofski fakultet

Ana Gregorić

FILOZOFSKI OKVIR EUKLIDOVIH ELEMENATA

DIPLOMSKI RAD

Rijeka, 2007. godine

Sveučilište u Rijeci

Filozofski fakultet

Odsjek za filozofiju i Odsjek za engleski jezik i književnost

Kolegij: filozofija matematike

Ana Gregorić

Matični broj studenta: 14307

FILOZOFSKI OKVIR EUKLIDOVIH ELEMENATA

DIPLOMSKI RAD

Mentor: Dr. sc. Majda Trobok

Rijeka, rujan 2007. godine

PREDGOVOR:

Ovaj se diplomski rad iz područja filozofije matematike temelji na Euklidovom djelu *Elementi* i filozofskim teorijama na koje se ono oslanja.

Središnji dio radnje bavi se Euklidom kao jednim od najutjecajnijih povijesnih matematičara i njegovim ključnim djelom. Izabrala sam Euklida i njegovo djelo kao oslonac za prikazivanje jedne struje unutar filozofije matematike (one realističke) jer ga smatram najranijom nezaobilaznom matematičko-filozofskom personom bez koje današnja matematika, pa stoga ni filozofija matematike, ne bi bila ista. Njegovo djelo *Elementi* jedna je od najčuvenijih knjiga i prevedena je na gotovo sve svjetske jezike.

Euklid je značajan i utoliko što je prvi aksiomatizirao matematiku[*], u nju uveo red i sustav. A, Hegelovim riječima, pravi lik u kojem egzistira istina može biti samo njezin znanstveni sustav.

Rad počinje uvodnim dijelom u kojem čitatelja uvodim u problematiku filozofije matematike i filozofiju matematike odjeljujem od matematike sâme.

Drugi dio ukratko objašnjava stanje u povijesti i znanosti stare Grčke. Taj dio smatram neophodnim za razumijevanje glavne teme radnje budući da kasnije elaborirane teme stavlja u povijesno-znanstveni kontekst.

U trećem dijelu fokus je na Euklidu, osnovnim podacima o njegovu životu i tadašnjem stanju svijeta.

Četvrti je dio elaboracija *Elemenata* u kojem navodim i objašnjavam glavne teze djela te ekspliciram njegovu strukturu. Također, navedeni su originalni primjeri iz djela kako bi čitatelj stekao dojam o načinu na koji Euklid gradi svoj sustav.

Peti, ključni dio, donosi upoznavanje s Platonovom filozofijom i Aristotelovom logikom, dva filozofska sistema koja su obojila Euklidov rad. Također, ovaj dio spaja do sada rečeno o Euklidovoj matematici i filozofiji Platona i Aristotela. Navodi se i prijepor oko filozofskog statusa Euklidova djela – je li ono platonističko ili pak nije.

[*] Aksiomatizacija je vrlo važna utoliko što broj neizvjesnih matematičkih elemenata svodi na minimum. Dakle, cilj joj je nalaženje minimalnog i ograničenog broja elementarnih matematičkih činjenica iz kojih dalje logički slijede sve ostale matematičke istine. Nalaženjem tih osnovnih i malobrojnih aksioma matematika dobiva na izvjesnosti.

Unatoč postojećim suprotnim mišljenjima, uvriježeno je stajalište da Euklid ipak jest platoničar.

SADRŽAJ:

Stranica:

1. UVOD 1

2. STARA GRČKA – OKRUŽJE ZA RAZVOJ MATEMATIKE 2

2.1. TRI RAZDOBLJA GRČKE MATEMATIKE 2

3. EUKLID 6

3.1. POVIJESNO STANJE 6

3.2. BIOGRAFSKI PODACI 7

4. *ELEMENTI* 9

4.1. STRUKTURA I SADRŽAJ *ELEMENATA* 9

4.2. PROBLEMI EUKLIDOVA SUSTAVA 18

5. FILOZOFSKI OKVIR 23

5.1. PLATON 24

5.1.1. BIOGRAFSKI PODACI 24

5.1.2. PLATONOVA FILOZOFIJA 26

5.1.2.1. PLATON I KARAKTERISTIKE MATEMATIKE 33

5.2. ARISTOTEL 35

5.2.1. BIOGRAFSKI PODACI 36

5.2.2. ARISTOTELOVA LOGIKA 38

5.3. *ELEMENTI* I FILOZOFIJA ____ 45

5.3.1. *ELEMENTI* I ARISTOTEL ____ 46

5.3.2. EUKLID, PLATONIČAR ILI MOŽDA NE? ____ 47

6. ZAKLJUČAK ____ 54

7. LITERATURA

8. PRILOZI

1. UVOD:

Što je to filozofija matematike? Odgovor se sam nameće: filozofsko promišljanje o matematici. No, zašto su se filozofi od davnih vremena odlučili baviti ovom tematikom?

Matematika je temelj ljudskog znanja (slika 1 u prilozima prikazuje matematiku kao korijen iz kojeg izrasta drvo znanosti). Njemački matematičar Carl Friedrich Gauss nazvao ju je kraljicom znanosti. Ona se nalazi u samom dnu piramide ljudskih znanosti kao njezin temelj. I Platon ju je takvom smatrao napisavši na ulaz svoje Akademije: «Nitko tko nije učio geometriju ne smije ovdje ući.»

Za početak, objasnimo razliku između matematike i filozofije matematike. Kako smo vidjeli, matematika je znanost koja za predmet ima apstraktne entitete kao što su geometrijski likovi ili brojevi. Filozofija matematike je grana filozofije koja za svoj predmet ima matematiku, njezine temelje i osnovne pretpostavke koje kritički istražuje. Filozofski misliti o matematici može ili filozof upoznat s pitanjima kojima se bavi matematika ili matematičar koji istupa iz okvira svoje znanosti, iz matematičkih aksioma i teorema, i okreće se metafizičkim pitanjima (poput: koja je priroda predmeta interesa matematike?), semantičkim (kao npr.: koja je priroda matematičke istine?) ili epistemološkim (kako spoznajemo matematičke istine?). «Ni 'čisti filozofi' ni 'čisti matematičari' ne bave se filozofijom matematike.»[1]

Postavlja se pitanje zašto uopće proučavati matematiku u filozofiji. Poznato je da se filozofija bavi najneodređenijim dijelovima različitih disciplina i znanosti. Tako se npr. bavi i semantikom iako je ona dio lingvistike. U matematici su epistemološka i metafizička pitanja ta na koja matematičari nisu tražili odgovore smatrajući ih samoevidentnima (budući da je po njima, kako smo rekli, matematika «paradigmatski primjer izvjesne poznaje») ili pak za matematiku nezanimljivima, te su ih zato postavili filozofi. Dakle, željeli su istražiti prešutne pretpostavke od kojih matematika polazi.

[1] Šikić, Z.: «Filozofija matematike», Školska knjiga, Zagreb, 1995., str. 8

Cilj ovog rada također je filozofski se pozabaviti matematičkim pitanjima.

2. STARA GRČKA - OKRUŽJE ZA RAZVOJ MATEMATIKE:

Kako bismo se mogli upustiti u filozofsko promišljanje o matematici, moramo se upoznati sa matematikom sâmom. Za svrhe ovoga rada odabrala sam jedan od najvećih, svakako najstariji matematički sustav, onaj starogrčkog matematičara Euklida. Oko njegova matematičkog rada splele su se mnoge filozofske teorije te ga to čini pogodnim za istraživanje u ovoj prilici.

Da bi nam sâmo Euklidovo djelo bilo jasnije, potrebno je ukratko objasniti i stanje u Grčkoj za vrijeme i prije njegova djelovanja, kao i djelovanje drugih značajnih antičkih matematičara.

2.1. TRI RAZDOBLJA GRČKE MATEMATIKE:

Sukladno povijesno-društvenom razvoju na području stare Grčke razvijala se i matematička misao. Kao znanost koja izučava apstraktno, matematika je nastala u starog Grčkoj, no ona svoje korijene ima u dalekoj paleolitskoj prošlosti kada je pračovjek u vučjoj kosti (u tzv. «ureznicama») počeo rezbariti zareze. Svrha ureznica još ni danas nije u potpunosti otkrivena, ali se smatra da se radilo o najprimitivnijem obliku matematike, tj. o brojanju ulova.

Kroz stoljeća se dalje razvijala u Sumeru, Babilonu i Egiptu, ali na drugačiji način nego u staroj Grčkoj, Arabiji i Europi. Egipatska i ranije matematike bile su usredotočene na praksu, služile su svakodnevnim potrebama (u građevinarstvu, za kalendar, navigaciju…). Glavno je matematičko pitanje bilo kako nešto izmjeriti ili izgraditi, a rezultati su bili slučajni i još uvijek shvaćani kao dar od bogova. Kao dio matematike, i geometrija je razvijana isključivo kao sredstvo za rješavanje određenih konkretnih problema (kako i sâma riječ kaže: *geometrija = zemljomjerstvo*).

U vrijeme stare Grčke dolazi do obrata. Matematika napušta pragmatiku i praksu i matematičko istraživanje postaje sâmo sebi svrhom. Glavno matematičko pitanje postaje zašto su rezultati takvi kakvi jesu, a oruđe, umjesto metode pokušaja i pogrešaka, postaje razmišljanje i špekulacija. Logika dobiva na značaju, kao i apstraktnost i idealizacija matematičkih objekata. Geometrija u Grčkoj postaje «prava», čista i apstraktna znanost. Ocem geometrije najčešće se smatra Talesa iz Mileta koji je živio u 7. stoljeću pr. Kr.

Dva su filozofa stare Grčke također zaslužna za razvoj matematike: Platon i Aristotel. Platona možemo nazvati prvim pravim filozofom matematike. Njegova je zasluga i to što je u matematiku uveo strogu logičnost i deduktivnost koju nalazimo i u njegovim filozofskim djelima. Aristotel, iako nije bio matematičar, svojim je promišljanjima o logici dao temelj izgradnji deduktivne geometrije kao sistematskog znanja.

Starogrčku matematiku možemo podijeliti u tri razdoblja:

a) razdoblje Pitagore;

b) razdoblje Euklida;

c) razdoblje Arhimeda.

Svako od tih razdoblja prati posebno društveno-povijesno stanje. Kako to biva i u drugim znanostima, i u starogrčkoj matematici su pogledi na svijet ključnih aktera i njihovi filozofski stavovi utjecali na njihov matematički rad.

Krenimo redom.

a) *Razdoblje Pitagore*[2]*:*

> Na početku 6. stoljeća prije naše ere u trgovačkom mjestu Miletu po prvi put u ljudskoj povijesti uspjelo se prevladati ogradu kozmičko-mitskoga pogleda na svijet. Tales, Anaksimandar i Anaksimen započinju novu eru u razvoju ljudske misli kada je Pitagora objasnio matematiku kao metodu argumentacije i dedukcije.[3]

U vrijeme Pitagore teritorij Grčke bio je politički rascjepkan. Geografska udaljenost i razlike u zakonima sprečavale su da ta država postane velikim carstvom. No, unatoč tome, nešto je te prostore povezivalo: jezik, vjera, sustav vrijednosti, način razmišljanja i stil života. Poveznica je bio i veliki grčki pjesnik Homer. Za njega se kaže da je odgojio Grčku, a Grčka Europu, te da je Grke naučio kauzalnom mišljenju. U svojim je djelima pokazivao kako se u kružnom gibanju svijeta iz jednog događaja odmotava cijeli lanac drugih koji su povezani međusobnim zakonitostima uzroka i

[2] Pitagora (vidi sliku 2 u prilozima) se rodio oko 580.g. pr. Kr. na otoku Samosu, blizu Mileta, za vladanja tiranina Polikrata. Zbog sukoba s Polikratom, Pitagora je u dobi od 40 godina napustio Samos i otišao u južnotalijanski Kroton. Po putu se u Egiptu upoznao sa tadašnjim znanjima iz matematike. U Krotonu je osnovao udruženje filozofa i matematičara koje je privuklo mnoge sljedbenike. Umro je 497. pr. Kr. u Metapontu.

[3] Znam, Š. i dr. «Pogled u povijest matematike», Tehnička knjiga, Zagreb, 1989., str. 21

posljedica. Taj novi način razmišljanja doveo je do toga da je, nasuprot principu mita, došlo do principa logike.

Pitagora je bio Talesov učenik i grčki filozof, zaslužan za važne pomake u povijesti matematike, astronomije i teorije glazbe. Budući da nema nikakvih zapisa i pošto je škola svoja saznanja držala u tajnosti, teško je reći što je od pitagorejskih nauka izvorno Pitagorino, a što potječe od njegovih sljedbenika.

Neki od «pronalazaka» Pitagore i njegove škole su: teorem o zbroju kutova trokuta, otkriće nesumjerljivosti veličina, tzv. Pitagorin poučak itd.

Pitagora je svoju teoriju razvijao na temeljima filozofije Miletske škole. Anaksimandrov *apeiron* potaknuo ga je na razmišljanje o prapočelu svega, slagao se sa Anaksimandrom da to prapočelo mora biti opće, ali određenije od *apeirona*. Došao je do zaključka da je broj ono što je zajedničko svemu postojećem.

Ključno za pitagorejsku školu je upravo to, shvaćanje da je u temelju svega, u temelju prirode – broj. Na taj su način matematiku učinili nedjeljivom od svijeta. Matematika jest u svijetu. Ona se nalazi u svakom njegovom dijelu i sve (glazba, putanje nebeskih tijela…) je ustrojeno prema njezinim zakonitostima. To njihovo vjerovanje iščitavamo i iz činjenice da su apstraktne brojeve prikazivali na konkretan, opipljiv način – psefosima, tj. kamenčićima, te ih, zavisno od oblika koji bi takvim slaganjem dobili, svrstavali među trokutaste, kvadratne itd. brojeve (vidi sliku 3 u prilozima).

b) *Razdoblje Euklida:*

Budući da je ovo, srednje, razdoblje starogrčke matematike ključno za ovaj diplomski rad, o njemu ću opsežnije govoriti u sljedećem poglavlju te ga iz tog razloga ovdje preskačem.

c) *Razdoblje Arhimeda:*

Arhimed (vidi sliku 4 u prilozima) je starogrčki matematičar i fizičar koji je živio na Siciliji u Sirakuzi, koja je tada bila grčka kolonija Magna Graecija, od 287. do 212. godine pr. Kr. Rijetki su oni koji nisu čuli za njega i njegove «krugove». Ipak, o njegovu životu ne zna se mnogo budući da su skoro svi podaci izgubljeni do razdoblja renesanse. Ipak, smatra se da je on jedan on najznačajnijih antičkih znanstvenika. Osim što je značajno pridonio matematici i fizici, zaslužan je i za mnoge izume.

Razdoblje u kojem je Arhimed živio obilježeno je nemirima te je i on sâm završio svoj život poginuvši u drugom punskom ratu kada su Rimljani napokon okupirali Sirakuzu nakon dvogodišnje opsade.

Prema Plutarhovim[4] navodima, kada je grad zauzet, Arhimed je bio zamišljen nad svojim matematičkim projektima. Rimski vojnik naredio mu je da upozna Rimskog generala, što je Arhimed odbio rekavši da mora dovršiti započeti posao. To je razbjesnilo vojnika koji ga je potom ubio mačem. Smatra se da su zadnje Arhimedove riječi bile «Ne dirajte moje krugove!», no to nije povijesno potvrđena činjenica.

Arhimedovo je matematičko djelovanje dvojako: s jedne strane, ono je apstraktno promišljanje u Grčkoj tradiciji, a s druge vraćanje matematike praksi. Tome je uvelike razlog i povijesno stanje u kojem je živio. Njegovi su izumi služili Sirakužanima u obrani od Rimljana. Tako se Arhimedu pripisuju izumi mnogih ratnih strojeva, među kojima i sustav zrcala kojima su, uz pomoć sunčevih zraka, palili neprijateljske brodove dok su ovi još bili na sigurnoj udaljenosti od grada (vidi sliku 5 u prilozima).

S druge strane, Arhimed je živio bliže Rimu koji je, za razliku od Grčke, matematiku smatrao samo sredstvom: geometriju kao pomoć u arhitekturi i sl., a aritmetiku kao pomoć u astrologiji. Ta je činjenica negativno djelovala na razvoj matematike u srednjovjekovnoj Europi.

[4] Starogrčki povjesničar.

3. EUKLID:

Osvrnuvši se u uvodnom dijelu na ostala dva ključna razdoblja starogrčke matematike, spremni smo se upustiti u razradu epohe u kojoj je živio i djelovao Euklid. Kako smo već vidjeli u prethodnom poglavlju, povijesno stanje i društvena atmosfera vremena imaju velik utjecaj na rad znanstvenika. Ni Euklid nije iznimka. Stoga ćemo se, prije nego se upustimo u analizu njegova matematičkog rada, pozabaviti stanjem u Grčkoj za njegova života i njegovim biografskim podacima.

3.1. POVIJESNO STANJE:

Razdoblje četvrtog stoljeća prije nove ere razdoblje je obilježeno borbom dviju sila – Atene i Makedonije. To je vrijeme nastanka nove, velike helenističke kulture. Veliko carstvo makedonskog poglavara Filipa II., a kasnije i njegovog nasljednika Aleksandra Velikog, protezalo se od Balkana do Perzije.

To je i vrijeme velikog kulturalnog miješanja i previranja. Demokratska Atenska kultura došla je u doticaj sa kulturom moćne makedonske velesile. Velika je država bila i spona između europskih kultura na zapadu i azijskih na istoku.

Nakon Aleksandrove smrti u Babilonu 323.g. pr. Kr., na prijestolje je došao general Ptolomej[5] i zemljom vladao iz Egipta, osnovavši dinastiju koja će vladati sljedeća tri stoljeća.

Za vrijeme Ptolomejeve vladavine vladalo je kulturno blagostanje. Vladar je uvažavao sugestije mudrih grčkih i egipatskih savjetnika kojima se okružio. Glavnim je gradom učinio Aleksandriju, grad na obalama Sredozemnog mora. Poticao je suradnju sa ostalim sredozemnim državama i razvoj trgovine, kulture, pomorstva, građevinarstva, brodogradnje. Ptolomej je Aleksandriju učinio kulturalnim središtem tadašnjeg zapadnog svijeta utemeljivši Museion, centar obrazovanja, znanosti i umjetnosti. U Museionu se izučavala i predavala matematika, filozofija, zemljopis, filologija, medicina, astronomija i prirodne znanosti – sva područja tadašnje znanosti,

[5] Ptolomej I, general u makedonskoj vojsci i vladar Egipta od 323. do 283.g. pr. Kr. Ne treba ga miješati s astronomom Ptolomejom.

te je on postao uzor za kasnija europska sveučilišta. U Aleksandriji su utemeljeni i botanički i zoološki vrt, zvjezdarnica i slavna knjižnica.

3.2. BIOGRAFSKI PODACI:

Godine i mjesta Euklidovog (vidi sliku 6 u prilozima) rođenja i smrti špekulacije su, a ne znanstveno potvrđene činjenice. Ipak, smatra se da je rođen otprilike 330.g. pr. Kr., a umro 260.g. pr. Kr. Malo se toga zna o njegovu životu. Poznato je, ipak, da je za vrijeme Ptolomejeve vladavine predavao matematiku u egipatskoj Aleksandriji i da je za to vrijeme napisao svoje slavne *Elemente*. Ta je opsežna zbirka matematičkih znanja, koja se oslanja na rad Talesa, Pitagore, Platona, Aristotela i drugih, u upotrebi već više od 2000 godina.

Arapski liječnik i filozof al-Qifti zapisao je da je Euklidov otac bio Naukrat, da mu je djed bio Zenarh, da je on bio Grk rođen u Tiru (gradu u današnjem Libanonu) i da je živio u Damasku (današnja Sirija – Damask je, kao i Aleksandrija, bio poznat po svojoj velikoj knjižnici). No ne postoje dokazi da se zaista radi o istom Euklidu. Naime, drugog se Euklida (iz grčke Megare), filozofa koji je živio u vrijeme Platona, često zabunom poistovjećuje s Euklidom iz Aleksandrije.

Postoji i mišljenje koje je poprilično egzotično i nije povijesno prihvaćeno. Ono kaže da Euklid ustvari nije napisao djela koja mu se pripisuju, nego da je bio na čelu tima matematičara koji su djelovali u Aleksandriji u to doba i čija su zbirna djela objavljena pod njegovom imenom. Još je ekstremniji pogled da Euklid o kojemu govorimo uopće nije postojao, nego da je spomenuti tim matematičara pisao pod zajedničkim pseudonimom kojeg su uzeli u čast spomenutom Euklidu iz Meagre koji je živio stotinu godina ranije. Ovime je Euklid dobio mjesto među velikanima koje neki smatraju nepostojećima. Jedan iz te skupine je i slavni engleski genije, Shakespeare.[6]

Euklida se često smatra ocem geometrije. Vjerojatno je da je pohađao Platonovu Akademiju u Ateni, učio matematiku od Platonovih učenika i dobro se u poznao sa Platonovim promišljanjima o geometriji, te zatim pošao u Aleksandriju. Aleksandrija je tada bila najveći grad zapadnoga svijeta i centar proizvodnje papirusa i trgovine

[6] Vidi http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Euclid.html.

knjigama. Mnogi su tadašnji školovani ljudi tamo predavali i radili. Postoje i neki dokazi da je Euklid u Aleksandriji osnovao svoju i školu i u njoj podučavao.

U literaturi se Euklida spominje kao čovjeka koji je živio za znanost i smatrao da je znanje potrebno zbog znanja sâmoga, a ne zbog moguće koristi koju će ono donijeti, što je, u konačnici, i sukladno intelektualnoj atmosferi u kulturi njegova vremena. U vezi s tim njegovim stavom postoje i anegdote. Jedna kaže da ga je jednom prilikom novi učenik upitao kako će mu znanje stečeno na predavanjima koristiti u životu. Euklid nije odgovorio, nego je učeniku naknadno po robu poslao jedan zlatnik (kada već želi da mu se znanje isplati) i poruku da je otpušten iz škole. Druga anegdota kaže da ga je vladar nakon objave *Elemenata* pozvao u palaču, darovao, te upitao ne postoji li lakši put za ulazak u tajne geometrije od onog predstavljenog u *Elementima*. Euklid mu je odgovorio negativno rekavši da ne postoji kraljevski put u geometriji.

Osim *Elemenata*, do današnjih su dana preživjela još dva Euklidova djela:

- *Data* – bavi se prirodom i implikacijama danih podataka u geometrijskim problemima; tema je usko povezana s prve četiri knjige *Elemenata*;
- *O dijeljenju* – o podjeli geometrijskih likova; samo je djelomično sačuvano djelo i to u arapskom prijevodu.

Oba su djela jednako strukturirana kao i *Elementi* - sastoje se od definicija i dokazivanja pretpostavki.

Postoje i djela koja se opravdano smatraju Euklidovima, no koja su tijekom stoljeća uništena. To su: *Konike*, *Porizmi*, *Pseudaria* ili *Knjiga logičkih pogrešaka*, *O plohama*, *Phaenomena* (o astronomiji), *Optika i katoptrika* (najstarija grčka rasprava o perspektivi, matematička teorija o zrcalima, poglavito o slikama koje se stvaraju na ravnim, izbočenim i udubljenim zrcalima) i *Sectio canonis* (o glazbenim intervalima).

Euklid u svojim djelima nikada nije pisao predgovore (tj. predgovori ni u jednom njegovom djelu nisu pronađeni/sačuvani, što nam dopušta da zaključimo da nikada nisu ni postojali) te nam tako Euklid nije ostavio podatke o svojoj osobnosti i subjektivnim mišljenjima, za razliku od mnogih grčkih filozofa.

Naravno, najvažnija Euklidova ostavština njegovi su *Elementi*. Vrijeme kada su *Elementi* napisani razdoblje je kada je geometrija baratala znatnom količinom znanja, no ono je bilo nestrukturirano i nesustavno. Preuzevši metode i sugestije Platona i Aristotela, Euklid je prvi geometriju sistematizirao na logičan i deduktivan način te ju učinio jasnom i preglednom.

4. *ELEMENTI*:

Euklidovi su *Elementi* (slika 7 u prilozima) jedno od najutjecajnijih znanstvenih djela u povijesti. Njihova ljepota leži u logičkom razvoju geometrije i drugih dijelova matematike. Utjecali su na sve grane znanosti, a ponajviše, naravno, na matematiku i egzaktne znanosti.

Za Euklidova vremena, a i prije njega, bilo je već pokušaja sistematizacije geometrijskog znanja. Primjerice, Teidija iz Male Azije napisao je također vrlo dobre *Elemente*. No Euklidovi su svojim rezultatima nadmašili sve ostale pokušaje. Vrlo brzo preuzeli su vodeće mjesto među geometrijskim djelima, ne samo u Grčkoj nego i izvan njenih granica.

Elementi su se podučavali u 24 zemlje i na mnogo jezika. Prvi je, naravno, bio grčki, zatim arapski (Arapi imaju posebne zasluge budući da su bili posrednici u znanju između antičke i srednjovjekovne Europe), pa latinski, te su se kroz stoljeća dalje prevodili na druge europske jezike. To je kompilacija matematičkog znanja koja su 2000 godina bila centralna za matematička izučavanja. Značaj Euklida i *Elemenata* za Europu vidljiv je i iz činjenice da se predmet geometrije u Engleskoj u 18.st. nazivao jednostavno *Euklid*.

Originalnih Euklidovih rukopisa nema, uništeni su. Ono s čime danas raspolažemo prijepisi su, najvjerojatnije srednjovjekovni, u koje su prepisivači unosili svoje opaske i poboljšanja. No na temelju različitih prijepisa krajem 19. stoljeća rekonstruirano je izvorno Euklidovo djelo.

4.1. STRUKTURA I SADRŽAJ *ELEMENATA*:

Elementi su potpuno teorijsko djelo. U njima nema nikakvih računa ni primjena na praksu. Sastoje se od 13 knjiga u kojima je sistematizirano sve tadašnje geometrijsko znanje. Postoje još dvije knjige za koje je kasnije zaključeno da nisu autentične Euklidove. Prvih šest knjiga, koje su stoljećima bile osnovni udžbenici iz geometrije, bave se planimetrijom[7], sedma, osma i deveta geometrijskom teorijom cijelih brojeva, deseta teorijom iracionalnih brojeva, a jedanaesta, dvanaesta i trinaesta stereometrijom[8]. Pojedinačno:

1. Prva knjiga: temeljna svojstva geometrije, Pitagorin poučak, jednakost kutova, paralelnost, zbroj kutova u trokutu;
2. Druga knjiga: površine trokuta i četverokuta, zlatni rez;
3. Treća knjiga: krugovi, kružnice i njihova svojstva, odsječci, tangente;
4. Četvrta knjiga: opisivanje i upisivanje trokuta i pravilnih poligona;
5. Peta knjiga: o omjerima veličina;
6. Šesta knjiga: primjena omjera u geometriji, sličnost trokuta;
7. Sedma knjiga: teorija brojeva – djeljivost, prim brojevi;
8. Osma knjiga: geometrijski redovi;
9. Deveta knjiga: kombinira rezultate sedme i osme knjige – beskonačnost prim brojeva, suma geometrijskog reda;
10. Deseta knjiga: nesumjerljivost i iracionalni brojevi;
11. Jedanaesta knjiga: primjena rezultata prve do šeste knjige na prostor – okomitost, paralelnost i volumen kod kvadra;
12. Dvanaesta knjiga: površine i volumeni stošca, piramide, valjka, sfere;
13. Trinaesta knjiga: generalizacija rezultata četvrte knjige na prostor – upisivanje pet Platonovih pravilnih tijela u sferu.

Euklid je pisanju djela pristupio sustavno. Njegovo djelo ima temelj i nadogradnju. Temelj je ono što se u teoriju unosi takvo kakvo je, ne mijenja se i ne objašnjava. Nadogradnja je sve ono što se iz tih zadanih temelja stvori. U Euklidovom slučaju, temelj su pojmovi koje ne objašnjava i aksiomi, a nadogradnja su izvedeni pojmovi i teoremi.

Objasnimo sustav pobliže. Najprije je Euklid definirao pojmove koje kasnije u djelu koristi. Nakon toga, odabrao je temeljne činjenice – aksiome i postulate, tj. tvrdnje koje su dogovorno i intuitivno istinite i ne dokazuju se. Na temelju prvih pojmova, aksioma i postulata, sada deduktivno i formalno-logički izgrađuje geometrijski sustav, izvodeći nove činjenice (teoreme) i nove, izvedene pojmove. Euklid je djelo formirao tako da se teoremi nižu kao sastavni dijelovi cijelog

[7] Grana geometrije koja proučava likove u ravnini.
[8] Grana geometrije koja proučava geometrijska tijela u prostoru.

postupka. A svrha mu je dati podlogu za razumijevanje cjelokupne geometrije. U odlomcima koji slijede posvetit ćemo se svakom koraku zasebno i na kraju dati i primjer Euklidovog izvoda kako bi čitatelj stekao dojam o njegovu načinu rada.

Djelo, dakle, počinje **definicijama**.[9] U prvoj knjizi[10] ima ih 23. Kao primjere, navest ću prvih pet. To su:

1. **Točka** je ono što nema dijela.
2. **Crta** je duljina bez širine.
3. Krajevi crte su točke.
4. **Dužina** je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.
5. **Ploha** je ono što ima samo duljinu i širinu.

Prvim definicijama Euklid govori kojim će se to pojmovima kasnije baratati. Prva definicija nam otkriva da je jedan od tih pojmova «točka». Sljedećih nekoliko definicija daje nam još termina koji će se koristiti: «crtu», «dužinu», «plohu» itd. Daje nam i podatke o tome u kakvoj su vezi različiti pojmovi (što se vidi iz definicije broj 3 – crta i točka u takvom su odnosu da točka može biti kraj crte).

Definicija točke kao onoga što nema dijelova govori nam da će Euklid točku tretirati kao nešto bez duljine, širine i dubine. Definicija crte nam, pak, govori da će Euklid crtu definirati kao ono što ima samo jednu dimenziju, naime, duljinu, bez širine i dubine. Na ovom stupnju ne znamo da li govori o ravnoj crti ili zakrivljenoj. U četvrtoj definiciji, pretpostavlja se, govori o ravnoj crti, budući da ona «jednako leži». Peta definicija govori da površina ima dvije dimenzije, duljinu i širinu. Daljnje definicije govore o pojmovima kao što su «kut», «okomitost», «krug», itd.

Kasnije definicije koriste pojmove objašnjene prijašnjim definicijama. Ali prvih nekoliko definicija nema sve pojmove objašnjene. Ti pojmovi su osnovni pojmovi za koje se pretpostavlja da su jasni i koje nije potrebno definirati (takvi pojmovi su «dio», «širina» i dr.). Značenje pojmova određenih definicijama kasnije se još učvršćuje kontekstom u postulatima i aksiomima.

Riješili smo dakle temeljne pojmove i definicije. Prelazimo na temeljne tvrdnje, tvrdnje koje, smatra Euklid, ne potrebuju dokaz. To su postulati i aksiomi.

[9] Euklid: «Elementi», KruZak, Zagreb, 1999., str. 1

[10] Uzeti ćemo primjere iz prve knjige budući da se ona smatra najbitnijom i nesumnjivo je najpopularnija.

U prvoj je knjizi pet **postulata**.[11] Navedimo ih:

1. Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.
2. I da se neograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.
3. I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.
4. I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.
5. I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

Prva tri postulata pripisuju se Euklidovim prethodnicima dok se druga dva pripisuju Euklidu.

Prva tri postulata govore o konstrukciji. Oni također impliciraju da postoje točke, dužine i krugovi i da postojanje drugih geometrijskih objekata deduciramo iz njihovog postojanja. Postoje još neke implicitne pretpostavke u ta tri postulata. Primjerice, prvi pretpostavlja da dvije točke spaja jedna i samo jedna dužina. Također, treći pretpostavlja da se s jednim središtem i jednom udaljenošću može opisati samo jedan jedini krug.[12]

Četvrti i peti postulat drugačije su prirode. Oni govore o zakonitostima. Četvrti postulat, koji tvrdi da su svi pravi kutovi međusobno jednaki, djeluje očit. No, on pretpostavlja da je prostor homogen, tj. da je kut nezavisan od svojeg položaja u prostoru. Također, pokazalo se da se on može dokazati pomoću preostalih aksioma i postulata te zato ne pripada ovdje. Dolazimo do slavnog, petog postulata. Euklidova odluka da ovu tvrdnju učini postulatom dovela je do stvaranja tzv. euklidske geometrije. U 19.st. matematičari su pokušali negirati ovaj postulat želeći istražiti da li će to dovesti do kontradikcije. Kontradikcije nije bilo, a posljedica je stvaranje i proučavanje neeuklidskih geometrija. O tom problemu, problemu petog postulata, govorit ćemo u sljedećem odjeljku.

Slijede **aksiomi**.[13] To nisu svojstva specifično vezana za geometriju, za razliku od postulata, nego opće pretpostavke koje matematičarima omogućavaju da grade deduktivnu znanost. U prvoj knjizi, njih je također pet.

---

[11] Ibid., str. 3
[12] Vidi http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html.
[13] Euklid: «Elementi», KruZak, Zagreb, 1999., str. 3

1. Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.

2. Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.

3. Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostaci su jednaki.

4. Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake.

5. Cjelina je veća od dijela.

Aksiomi se, dakle, ne odnose specifično na brojeve niti geometrijske objekte, već na bilo kakve objekte, neovisno o kontekstu.

Postulati su jasno i nedvosmisleno izneseni. Prvi, dakle, kaže da, ako a=b i b=c, onda i a=c. Četvrti je vrlo sličan prvom. On, naime, kaže da, ako jedna stvar može preuzeti ulogu druge bez da uzrokuje kakvu promjenu, onda su te dvije stvari jednake.

Isto kao što i posljednja dva postulata problematična, tako je i peti aksiom doveden u pitanje. Ali o tome također u sljedećem odjeljku.

Došli smo i do **teorema**. Teoremi su, kako smo rekli, nadogradnja, ono što se stvara na temeljima osnovnih pojmova, aksioma i postulata. Euklid teoreme označava brojevima. U prvoj knjizi ima ih 48. Svaki teorem sastoji se od tvrdnje i dokaza. Svaki korak u dokazu logički je opravdan definicijom, postulatom, aksiomom ili prijašnjim teoremom.[14] Također, uz dokaze se pojavljuju i dijagrami koji ilustriraju dokaze.

Neki se teoremi bave konstruiranjem. Konstruiranje uglavnom ovisi o postulatima koji govore o konstruiranju dužine i kruga (prva tri postulata). Prvi dio teorema o konstruiranju govori kako konstruirati, dok se u drugom dijelu pokazuje kako pokazana konstrukcija zadovoljava potrebe i ciljeve iz tvrdnje.

Ipak, većina teorema ne bavi se konstruiranjem. Njihove tvrdnje govore kako iz određenih uvjeta logički slijede drugi uvjeti. Takva je, primjerice, peta tvrdnja prve knjige koju ćemo kasnije citirati kao ogledni primjerak.

Tvrdnje koje se ne bave konstruiranjem mogu također imati konstrukcijskih dijelova budući da su ponekad konstrukcije dodatnih krugova i dužina potrebne za dokazivanje. Ali glavna je okosnica svih dokaza, bile tvrdnje konstrukcijske ili ne, pokazivanje kako, iz tvrdnji koje su dokazane i logički opravdane, kao kulminacija slijedi tvrdnja koju upravo dokazujemo.

Kao što smo rekli, slijedi citiranje petog teorema prve knjige.

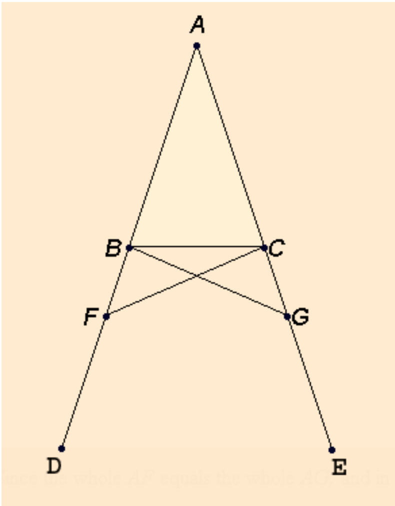
[14] U tvrdnjama se, osim na pojmove, aksiome i postulate, Euklid poziva i na ranije, već dokazane tvrdnje (ista situacija kao u definicijama) te tako tvori mrežu ili sustav u kojemu zaključci ovise jedan o drugome. Gotovo se svi teoremi pozivaju na već dokazane tvrdnje. U prvoj se knjizi samo prvi i četvrti teorem pozivaju isključivo na definicije, aksiome i postulate.

5.

U jednakokračnim trokutima kutovi uz osnovicu međusobno su jednaki i ako jednake dužine produžimo, kutovi ispod osnovice bit će međusobno jednaki.

Neka je ABC jednakokračan trokut koji ima stranicu AB jednaku stranici AC i neka se dužine BD, CE produže u dužini s AB, AC. **[P.2]**

Tvrdim da je kut ABC jednak kutu ACB, a kut CBD kutu BCE.



Neka se naime na BD uzme bilo koja točka F i od veće AE neka se oduzme AG jednaka manjoj AF **[1.3]**

te neka se povuku dužine FC, GB. **[P.1]**

Budući da je dakle AF jednaka AG, a AB jednaka AC, dvije su stranice FA, AC jednake dvjema odgovarajućim stranicama GA, AB i obuhvaćaju zajednički kut, kut FAG.

Stoga je osnovica FC jednaka osnovici GB, a trokut AFC bit će jednak trokutu AGB i ostali će kutovi biti jednaki ostalim odgovarajućim kutovima, oni nasuprot kojima leže jednake stranice – kut ACF kutu ABG, a kut AFC kutu AGB. **[1.4]**

Budući da je cijela AF jednaka cijeloj AG, a njihovi su dijelovi AB i AC jednaki, i preostala BF jednaka je preostaloj CG.

A dokazano je da je i FC jednaka GB. Dakle, dvije stranice BF, FC jednake su dvjema odgovarajućim stranicama CG, GB. K tome, kut BFC jednak je kutu CGB, a BC je njihova zajednička osnovica. I trokut BFC stoga će biti jednak trokutu CGB i ostali će kutovi biti jednaki ostalim odgovarajućim kutovima, oni nasuprot kojima leže jednake stranice. Dakle, kut FBC jednak je kutu GCB, a kut BCF kutu CBG.

Budući da je dokazano da je cijeli kut ABG jednak cijelom kutu ACF, a njihovi su dijelovi CBG i BCF jednaki, preostali kut ABC jednak je preostalom kutu ACB, a oni su kutovi uz osnovicu trokuta ABC. A dokazano je i da je kut FBC jednak kutu GCB, i to su kutovi ispod osnovice.

Dakle, u jednakokračnim trokutima kutovi uz osnovicu međusobno su jednaki i ako pridružimo jednake stranice, kutovi ispod osnovice bit će međusobno jednaki. A to je ono što je trebalo dokazati.[15]

Pogledajmo, dakle, formu/strukturu teorema. Na uzglavlju je redni broj koji nam pokazuje koje mjesto u sustavu ima ovaj teorem. Ispod njega, u *italiku* je napisana tvrdnja koju treba dokazati. Nakon toga slijede vizualni prikaz i već dokazane pretpostavke. U uglatim zagradama naznačeno je na koje se izjave pozivamo u dokazu. Tako se u prvoj pozivamo na drugi postulat, u drugoj na treći teorem prve knjige, u trećoj na prvi postulat i u četvrtoj na četvrti teorem prve knjige. Koristeći već dokazane tvrdnje, tako smo dokazali i ovu.

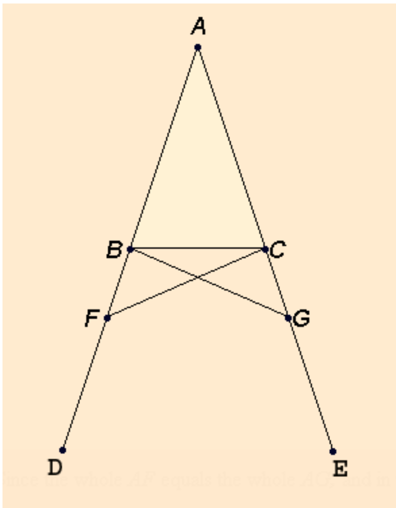
Kako kaže Znam (1989.), starim je Grcima u svemu što su radili najvažnija bila forma. Sistematičnost i dobra forma tražile su se u svemu što je imalo značaj u svakodnevnom životu, od uređenja zajednice i hijerarhije olimpijskih bogova do forme kazališnih djela i matematičkih dokaza. Dobra forma bila je bitna jer je ona dopuštala da se pronikne u srž stvari, dopuštala je da se obuhvati velika količina pojava i pronikne u načela njihove organizacije.

I Euklid je veliku važnost pridavao formi. Forma dokaza umnogome se promijenila od vremena Pitagore i u Euklidovom radu postigla znatan napredak. Znam (1989.) uspoređuje Euklidovu formu dokaza s kazališnim djelom, s tragedijom koja je bila na vrhuncu u antičkoj Grčkoj. Euklidov dokaz se, slično kao i kazališno djelo, sastoji od striktno određenih dijelova. Kada govorimo o dokazu, on ima šest dijelova:

1. formulacija (teorema);
2. prikazivanje (konkretizacija na slici);
3. određivanje (onoga što treba pokazati ili konstruirati);
4. konstruiranje (objekata koji će se pojaviti);
5. demonstriranje (kauzalnih povezanosti);
6. zaključak (ponavljanje izvršenog).

[15] Ibid., str. 8, 9

Pogledajmo sada tablični prikaz forme teorema. Tablica koja slijedi prikazuje šest dijelova teorema. Kraj svakog dijela strukture naveden je dio gore citiranog petog teorema koji mu odgovara. U trećem stupcu su napomene, tj. objašnjenja svakog od šest dijelova.

DIO STRUKTURE TEOREMA/DOKAZA	ODGOVARAJUĆI DIJELOVI IZ NAVEDENOG 5. TEOREMA	NAPOMENE
Formulacija (teorema)	*U jednakokračnim trokutima kutovi uz osnovicu međusobno su jednaki i ako jednake dužine produžimo, kutovi ispod osnovice bit će međusobno jednaki.*	Iznosi se tvrdnja koju treba dokazati.
Prikazivanje (konkretizacija na slici)		Na crtežu je prikazano sve o čemu će se govoriti ne bi li problem čitatelju postao bliži. Čitatelj na crtežu može pratiti o čemu se govori u dokazu.
Određivanje (onoga što treba pokazati ili konstruirati)	Neka je ABC jednakokračan trokut koji ima stranicu AB jednaku stranici AC i neka se dužine BD, CE produže u dužini s AB, AC. **[P.2]** Tvrdim da je kut ABC jednak kutu ACB, a kut CBD kutu BCE.	Tvrdnja u prvom dijelu općenita je. U ovom dijelu ona se prenosi na konkretni trokut. Na konkretnom trokutu, onom koji je prikazan crtežom, objašnjava se što treba pokazati i eksplicira se cilj dokazivanja.
	Neka se naime na BD uzme bilo koja točka F i od veće AE neka se	Konstruiraju se pomoćni objekti

Konstruiranje (objekata koji će se pojaviti)	oduzme AG jednaka manjoj AF **[1.3]** te neka se povuku dužine FC, GB. **[P.1]** Budući da je dakle AF jednaka AG, a AB jednaka AC, dvije su stranice FA, AC jednake dvjema odgovarajućim stranicama GA, AB i obuhvaćaju zajednički kut, kut FAG. Stoga je osnovica FC jednaka osnovici GB, a trokut AFC bit će jednak trokutu AGB i ostali će kutovi biti jednaki ostalim odgovarajućim kutovima, oni nasuprot kojima leže jednake stranice – kut ACF kutu ABG, a kut AFC kutu AGB. **[1.4]**	(pomoćne dužine, u ovom slučaju), oni koji omogućuju da se dokaže tvrdnja. Konstruiranje počiva na aksiomima, postulatima i prethodno dokazanim teoremima (što je navedeno u uglatim zagradama).
Demonstriranje (kauzalnih povezanosti)	Budući da je cijela AF jednaka cijeloj AG, a njihovi su dijelovi AB i AC jednaki, i preostala BF jednaka je preostaloj CG. A dokazano je da je i FC jednaka GB. Dakle, dvije stranice BF, FC jednake su dvjema odgovarajućim stranicama CG, GB. K tome, kut BFC jednak je kutu CGB, a BC je njihova zajednička osnovica. I trokut BFC stoga će biti jednak trokutu CGB i ostali će kutovi biti jednaki ostalim odgovarajućim kutovima, oni nasuprot kojima leže jednake stranice. Dakle, kut FBC jednak je kutu GCB, a kut BCF kutu CBG. Budući da je dokazano da je cijeli kut ABG jednak cijelom kutu ACF, a njihovi su dijelovi CBG i BCF jednaki, preostali kut ABC jednak je preostalom kutu ACB, a oni su kutovi uz osnovicu trokuta ABC. A dokazano je i da je kut FBC jednak kutu GCB, i to su kutovi ispod osnovice.	Navode se i povezuju zakonitosti koji pokazuju da je tvrdnja navedena na početku valjana.
Zaključak (ponavljanje izvršenog)	Dakle, u jednakokračnim trokutima kutovi uz osnovicu međusobno su jednaki i ako pridružimo jednake stranice, kutovi ispod osnovice bit će međusobno jednaki. A to je ono što je trebalo dokazati.	Ukratko se ponavlja izvršeno. Kao logička posljedica izvršenog slijedi tvrdnja s početka, što znači da je dokaz uspješno izveden.

Kada gradi svoje dokaze, Euklid ne raspravlja sa čitaocem kao što to rade Sokrat ili Platon. On samo nudi deduktivan sustav, koji iznosi najjasnije što može, u koji čitatelj mora proniknuti i u potpunosti ga razumjeti.

Euklidovi su *Elementi* izrazito bitni zbog jasnoće kojom su teoremi izneseni i dokazivani. Taj je način iznošenja ostao uzor znanstvenicima stotinama godina. Iako se vjeruje da nije sâm Euklid autor svih dokaza koje iznosi u djelu (naime, napravio je kompilaciju svih geometrijskih znanja tog vremena preuzevši zaključke drugih matematičara), ipak se smatra jednim od najvećih matematičkih učitelja antike, a tisućljetna popularnost *Elemenata*[16] svjedoči da nije samo veliki antički matematičar, nego i jedan od najvećih sve do današnjih dana.

Naravno, ne možemo ni reći da je sve znanje iz *Elemenata* preuzeo od drugih. On je i dokazivao teoreme koji prije njega nisu bili dovoljno dobro/precizno objašnjeni i dokazani i inkorporirao ih u svoj rad.

Ipak, Euklidova je matematika ostala tako slavna i zbog mnogih svojih problema. Matematičari koji su se bavili poboljšavanjem njegovih zaključaka i ukazivanjem na njegove promašaje također su doprinijeli činjenici da *Elementi* još nisu pali u zaborav. U sljedećem odjeljku pozabavit ćemo se nekima od njih i ukratko ih objasniti.

4.2. PROBLEMI EUKLIDOVA SUSTAVA:

U Euklidovom radu, s današnjeg stajališta, ima grešaka. Prva knjiga *Elemenata* nije poznata samo kao izvrstan i slavan udžbenik iz geometrije i stoljetni matematički autoritet. Ta je knjiga, koliko je bila slavljena i priznavana kao temelj znanja, toliko bila i napadana, kritizirana i osporavana. Kritike zauzimaju veliki dio u raspravama o *Elementima* pa smatram da bi im trebalo biti posvećeno barem nekoliko redaka i u ovom radu. Pogledajmo, dakle, zasebno neke od problema i ukratko ih objasnimo.

Naglasimo još jednom da su kritike koje slijede formulirane iz današnje perspektive. Do 19. stoljeća *Elementi* su bili neprikosnoven matematički udžbenik i Euklidova je matematika bila najveći autoritet. Do 19. stoljeća nije ni bilo matematičkih sredstava kojima bi se mogle utvrditi, a kamo li ispraviti Euklidove pogreške o kojima ćemo govoriti.

[16] *Elementi* su po prvi puta štampani 1482. godine i od tada postoji više od 1300 njihovih izdanja. To ih svrstava na drugo mjesto najobjavljivanijih knjiga, odmah iza Biblije.

a) Problem definicija:

U aksiomatskom se sustavu pojmovi dijele na osnovne pojmove i izvedene pojmove. Osnovni pojmovi su oni koji se ne definiraju. Njihovo je značenje intuitivno jasno ili dogovoreno. Izvedeni pojmovi su oni koje definiramo osnovnim pojmovima i osnovnim činjenicama (aksiomima i postulatima). Suvremeni kritičari smatraju da u dobrom aksiomatskom sustavu moraju biti strogo odijeljeni osnovni od izvedenih pojmova. Definicije moraju iscrpiti sve bitne karakteristike pojma koji se definira. Ona ne smije biti preuska, preširoka niti usmjerena na nevažne karakteristike pojma. Također, ako se za isti pojam daje više od jedne definicije, onda se mora dokazati njihova ekvivalentnost.

Uzevši u obzir takav, suvremeni, kriterij, neki kritičari smatraju da Euklid ovdje nailazi na probleme (vidi Volenec, iz pogovora *Elementima*, 1999). On nije eksplicitno odvojio osnovne od izvedenih pojmova. Kada u prvoj definiciji definira točku, definira je pojmom dijela. U drugoj crtu definira pojmom širine. Ali nije jasno po čemu su dio i širina osnovniji od točke i crte.

Nadalje, definicijama 1 i 3 definiraju se točke na dva različita načina, ali bez dokaza da su te dvije definicije ekvivalentne.

Naravno, moramo uzeti u obzir činjenicu da je eksplicitno odjeljivanje pojmova suvremen zahtjev. Euklid ih nije eksplicitno odvojio, ali mu ipak npr. pojam točke ima drugačiji status od npr. pojma dijela, čime ipak jest izdvojio osnovne od izvedenih pojmova i to po sljedećem kriteriju: kao osnovne pojmove uzeo je one koji ne spadaju specifično u jezik matematike te je pomoću njih definirao specifično-matematičke pojmove.

b) Problem ekspliciranja:

Kada smo govorili o postulatima u prethodnom poglavlju, rekli smo da postoje činjenice koje oni ne iznose eksplicitno, činjenice za koje zaključujemo da su tamo. Tako smo spomenuli da prvi postulat pretpostavlja da dvije točke spaja jedna i samo jedna dužina, i da treći pretpostavlja da se s jednim središtem i jednom udaljenošću može opisati samo jedan jedini krug.[17]

Također, kod Euklida ne postoje postulati ni aksiomi koji govore o poretku. Primjerice, nema aksioma tipa: «Točka A nalazi se između točaka B i C.» ili «Točka

[17] Vidi http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html.

A i točka B leže s iste strane pravca.» U ovakvim slučajevima Euklid se oslanja na crtež koji služi da čitatelju prikaže stanje o kojem se govori.

U suvremenom aksiomatskom sustavu sve se tvrdnje moraju eksplicirati, koliko god one bile očite. Ako su samoevidentne, treba ih proglasiti aksiomima ili postulatima, ako nisu, treba ih dokazati kao teoreme. Ali sve tvrdnje moraju biti jasno iznesene. To, vidjeli smo, kod Euklida nije slučaj. Ipak, i ovo je zahtjev koji je postavljen tek u 19. stoljeću kada su aksiomi poretka po prvi puta razrađeni u radovima M. Pascha (Volenec, iz pogovora *Elementima*, 1999).

c) Problem petog aksioma:

Peti aksiom kaže: «Cjelina je veća od dijela.»[18]

Ova činjenica zaista djeluje očigledno i jasno. Takvom se i smatrala stotinama godina sve dok matematičari nisu uzeli u razmatranje sudove koji se bave beskonačnim veličinama.

Georg Cantor, njemački matematičar iz 19. stoljeća, pokazao je da, u domeni beskonačnoga, dio nije manji od cjeline.

Pogledajmo dokaz:

-N je skup svih prirodnih brojeva, tj. N = {1, 2, 3, 4, …, n, n+1,…}

-Z je skup cijelih brojeva, tj. Z = {…, -n, …, -2, -1, 0, 1, 2, …, n, …}

-N je podskup od Z, tj. $N \subset Z$

Ako je N podskup od Z, to znači da je N dio od Z te bi, prema petom aksiomu, N trebao biti manji od Z. No to nije tako. I N i Z su beskonačni skupovi i imaju beskonačno, ali jednako mnogo elemenata.

Prema Cantoru, jedini kriterij da bi skupovi, konačni ili beskonačni, bili jednaki je bijekcija. Bijekcija, bijektivno preslikavanje ili obostrano jednoznačno preslikavanje takva je funkcija koja svakom članu domene pridružuje jedan i samo jedan član kodomene. Dakle, možemo reći da je bijekcija 1-1 korespondencija među skupovima (vidi sliku 8).

Budući da između skupa N i skupa Z postoji bijektivno preslikavanje, oni su jednaki, što proturječi petom aksiomu i osporava ga.

Cantor nije prvi koji se bavio pitanjem beskonačnoga. Promišljanje o beskonačnosti seže još u vrijeme stare Grčke, o čemu nam svjedoče Zenonove aporije.

[18] Euklid: «Elementi», KruZak, Zagreb, 1999., str. 3

U 17. stoljeću o beskonačnosti je pisao Galilej. On je otkrio da prirodnih brojeva ima jednako mnogo koliko i njihovih kvadrata, što također osporava Euklidov peti aksiom. No Galilej se nije želio zamjerat crkvenjacima pa je o tom svom otkriću rekao samo «to ne može biti». Do sličnih su rezultata o domeni beskonačnoga došli i Leibniz i Gauss.

Ipak, mnogi će povjesničari reći da je Euklid na umu imao konačne, a ne beskonačne veličine. Ukoliko je to točno, protuprimjeri iz domene beskonačnog ne štete njegovu sustavu.

d) Problem petog postulata:

Za četvrti smo postulat već rekli kako je dokazano da ne spada među postulate budući da se može dokazati pomoću ostalih postulata i aksioma. I za peti je postulat, primarno zbog toga što je manje intuitivan i očit od drugih postulata, smatrano da ne spada u tu skupinu. Također, njegova je formulacija znatno duža od formulacije drugih postulata. Pokušaj dokazivanja petog postulata spada među najstarije pokušaje popravljanja Euklidova sustava. Peti je postulat danas vjerojatno najpopularniji dio Euklidova djela.

Mnogi su pokušavali dokazati peti postulat. Bezuspješno. Euklidov se peti postulat ne može dokazati pozivajući se samo na temeljne tvrdnje koje je dao Euklid i to potvrđuje njegovo mjesto među postulatima. Drugi su krenuli alternativnim pristupom i, umjesto da pokažu da je peti postulat moguće dokazati, negirati ga, želeći vidjeti kakve će to imati posljedice, tj. pokušali su, negirajući peti postulat, doći do kontradikcije. No kontradikcije nije bilo, a posljedice su bile značajne. Negiranje petog postulata dovelo je do stvaranja logički konzistentnih alternativnih geometrija, neeuklidskih geometrija, u 19. stoljeću. Neeuklidske geometrije građene su na svim Euklidovim aksiomima i postulatima, osim petog postulata, umjesto kojeg se uzima njegova negacija. Tako od 19. stoljeća baratamo trokutima čiji je zbroj unutarnjih kutova veći od 180° i trokutima čiji je zbroj unutarnjih kutova manji od 180°.[19]

[19] Uzmimo primjer ne bi li dočarali o čemu je riječ. U neeuklidskim geometrijama, dakle, pravilo da zbroj unutarnjih kutova iznosi 180°, koje slijedi iz petog postulata, ne vrijedi, što znači da postoje i trokuti sa zbrojem unutarnjih kutova različitim od 180°. Jedan od takvih, a koji pripada sfernoj geometriji, možemo vidjeti na slici 9. Trokut na sferi kao što je Zemljina površina ima dva prava kuta (kutovi koje zatvaraju meridijani s paralelom pravi su kutovi i njihov je zbroj već 180°; tom zbroju dodaje se još kut koji zatvaraju meridijani međusobno). Euklidska geometrija je geometrija ravnine (kako je prikazano na zemljopisnoj karti), a geometrija prikazana na globusu primjer je neeuklidske geometrije.

Dakle, dokazano je da je peti Euklidov postulat nedokaziv, što ga zaista čini postulatom, i dokazano je da je potpuno neovisan od ostalih postulata i aksioma, budući da neeuklidske geometrije funkcioniraju na temeljima koje je postavio Euklid, izuzevši samo peti postulat. To znači da su zamjerke Euklidovu petom postulatu bile neopravdane.

5. FILOZOFSKI OKVIR:

Nakon općeg i matematičkog dijela, dolazimo do onog filozofskog.

Dakle, do sada smo se bavili određivanjem pojma matematike i pojma filozofije matematike, smještanjem Euklida u kontekst antičkog društva, znanosti i vremena. Zatim smo u trećem dijelu elaborirali Euklidov matematički sustav i upoznali se s načinom na koji on gradi *Elemente*. Nakon što smo se upoznali s Euklidovim matematičkim radom, vrijeme je da se upoznamo i sa njegovim filozofskim okvirom. U ovom, četvrtom dijelu radnje, govoriti ću o dva velika filozofska sustava, Platonovom i Aristotelovom.

Iako je Euklid matematičar, a ne filozof, ipak je njegov znanstveni rad filozofski obojen. Točnije, stav o filozofiji koji se može iščitati iz njegovog rada je dvojak.

Prvo, Euklid je iz svojeg djela želio potpuno ukloniti filozofske pojmove. Naime, prije Euklida matematički pojmovi objašnjavani su na više filozofski način. Pitagora je, primjerice, točku definirao kao monadu koja ima svoj položaj. No monada je Euklidu bila pojam koji previše iskače iz matematike i ulazi u filozofiju te je izbjegao taj pojam u svom djelu. Njemu je vrlo stalo do autonomizacije matematike i njenog potpunog odvajanja od filozofije.

S druge strane, iako pojmovno filozofski potpuno neutralni, *Elementi* odaju svoju jaku filozofsku podlogu. U pisanju se Euklid uvelike oslanjao na dva grčka filozofa, na Platona i Aristotela, čija mu je filozofija pomogla u oblikovanju izvoda i sustavnosti.

Aristotel i Platon (slika 10) bazično se razlikuju u shvaćanju pojmova (pa tako i matematičkih) i njihove prirode. Začetnici su temeljne razlike koja se u srednjem vijeku razvila u pitanje o univerzalijama. Ukratko, problem univerzalija bazira se na pitanju jesu li opći predmeti nešto realno ili nisu te kakav je njihov odnos prema pojedinačnom. Dva su moguća odgovora: realistički (u Platonovoj tradiciji) i nominalistički (u Aristotelovoj tradiciji). Realisti vjeruju da opće postoji realno i da je opće to što daje smisao pojedinačnom. Nasuprot realistima, nominalisti smatraju da opće ne postoji realno i odvojeno od nas, da su pojedinačne stvari jedine stvarne, a opći pojam je samo praktično pomagalo pomoću kojega si mi u umu grupiramo stvari. Na taj je, nominalistički način, neki smatraju, Aristotel začetnik empirističkog načina razmišljanja i analitičke filozofije.

Platon ne vjeruje osjetilima i osuđuje ih. Vid i sluh, po njemu, nisu presudni u pronalaženju prave istine. Duša je ta kojom spoznajemo ideje, savršene i najstvarnije entitete. Za razliku od njega, Aristotel smatra da bit predmeta moramo tražiti u njima sâmima, a ne u nekom carstvu ideja odvojenom od stvari koje nas okružuju. Svakidašnje iskustvo nas, po njemu, vodi pravoj istini.

Unatoč toj razlici i neslaganju, obojica su znatno utjecala na Euklidov rad. Postoji i teza oko koje se obojica slažu: smatraju da je matematika izvjesna spoznaja.

Euklid je preuzeo Platonovu filozofiju (ontologiju) i Aristotelovu sistematičnost (logiku). Za Euklida kao platoničara, matematika je nešto sasvim različito od onoga kako ju je shvaćao Pitagora. Matematika je postala potpuno odvojena od vanjskog svijeta i prenesena u idealni.

Posvetimo se sada obojici filozofa odvojeno kako bismo bolje uočili njihov utjecaj na Euklida.

5.1. PLATON:

Prije elaboriranja Platonove filozofije bitno je napomenuti da Platonova filozofija, dakle filozofija koja je utjecala na Euklida, nije isto što i platonizam. Platonizam je veliko područje filozofije koje se unutar sebe dijeli na mnogo područja. Platonizam jest nastavak Platonove filozofije i razvijan je od njegovih sljedbenika, ali se razlikuje od temeljne Platonove filozofije. Filozofija o kojoj ću govoriti u ovom radu je, dakle, izvorna Platonova, koju je on naučavao i o kojoj je pisao u svojim dijalozima.

5.1.1. BIOGRAFSKI PODACI:

Platon je bio Sokratov učenik, Aristotelov učitelj i potomak vrlo ugledne Atenske obitelji. Među njegovim precima s očeve strane nalazimo i vladare Atene. Točna godina njegova rođenja nije poznata, ali se općenito smatra da je živio od 428. ili 427. do 347. g. pr. Kr. Postoji teorija da mu je pravo ime Aristoklo, a Platon samo slavni nadimak koji opisuje njegov stas («platon» na grčkom znači «širok, plećat»).

Prije susreta sa Sokratom učio je filozofiju, gramatiku, glazbu i gimnastiku. Čak se smatra da je sudjelovao na Istmijskim igrama[20] kao hrvač.

Nakon devet godina provedenih sa Sokratom, a poslije njegove smrti, Platon je mnogo putovao. Posjetio je Italiju, Siciliju i Egipat. Nakon povratka u Atenu, u dobi od 40 godina, u Akademovom vrtu je osnovao filozofsku školu – Akademiju, čije se ime u Platonovu čast i danas nalazi u naslovima najviših državnih znanstvenih ustanova. Akademija je prva visokoobrazovna ustanova zapadnog svijeta. U njoj se podučavala filozofija, logika, retorika, matematika, itd. Tu su školovani mnogu grčki i europski učenjaci, najpoznatiji od kojih je Aristotel. Akademija je djelovala do 529.g. naše ere kada ju je zatvorio bizantski vladar Justinijan I. smatrajući je prijetnjom kršćanstvu.

Na Platona je vrlo utjecala filozofija njegovih prethodnika. Tako je od Heraklita preuzeo ideju da se osjetilni svijet neprestano mijenja. Od elejca Zenona naučio je da materija ne može biti temelj svijeta jer je ona nedosljedna, kako ističe Zenon u svojim aporijama, te da mora postojati nešto čvršće u temelju svijeta. Platon je kao temelj postavio ideju. Po elejcu Parmenidu je spoznaju podijelio na osjetilnu (varljivu) i umsku (izvjesnu). Od Empedokla je preuzeo nauk o četiri elementa te im pridružio po jedan savršen geometrijski oblik[21]. Pitagorejci su ga zainteresirali za matematička pitanja. No Sokratov je utjecaj bio najveći. To vidimo i iz činjenice da je za Sokrata rezervirao posebno mjesto u svojim dijalozima. O ovim temama biti će riječi u sljedećim poglavljima.

---

[20] Istmijske igre jedne su od igara Stare Grčke. Kao i Olimpijske igre, organizirane su svake četiri godine i to naizmjenično s Olimpijskim igrama. Dakle, igre su se odigravale svake dvije godine, naizmjenično Olimpijske i Istmijske.

[21] Platon je oktaedar, tetraedar, dodekaedar, kocka i ikosaedar (slika 11) smatrao savršenim tijelima pridruživši tetraedru vatru, oktaedru zrak, ikosaedru vodu, kocki zemlju, a dodekaedru svemir u cjelini.

Poznato je da je Platon svoja filozofska promišljanja bilježio u obliku dijaloga[22] (ostavio je u nasljeđe 35 dijaloga i 13 pisama koje stručnjaci grupiraju po razdobljima u kojima su nastali na rane, srednje i kasne spise). Ipak, nikada kao lika u dijalogu nije postavio sebe, nego svoje stavove prezentira kroz Sokratove riječi ili riječi njegovih učenika. On koristi i Sokratovu metodu pitanja i odgovora, tzv. majeutiku, prema kojoj učitelj pitanjima usmjerava učenika na samostalne ispravne zaključke. Nikada nije otkriveno niti iz povijesnih zapisa zaključeno zašto je Platon odlučio sebe odvojiti od riječi koje piše. Zanimljivo je da Platonovi dijalozi, iako je on sâm bio protiv umjetnosti govoreći da je ona tek odsjaj istine i poričući njihovu didaktičku vrijednost, imaju formu antičkih drama. Oni naime nikad nemaju više od tri lika u fokusu i uvijek imaju zbor tihih slušača. Dijalozi također nisu «suha» filozofska djela. Ona imaju dramsku nit i utoliko što su u njih inkorporirani podaci o obiteljskim odnosima i odnosima između Sokrata i njegovih učenika.

U srednjem vijeku Platonovu je filozofiju u potpunosti zasjenila Aristotelova. U tom je razdoblju Aristotelova teorija bila jedina prava znanost i jedini predmet izučavanja, naravno, adaptirana tako da bude u skladu sa religijskim učenjima. Platonova djela bila su nedostupna i izgubljena za zapadnu civilizaciju tog doba. Očuvana su zahvaljujući bliskoistočnim učenjacima koji su ih kasnije na latinski preveli sa arapskih i perzijskih prijevoda. Tek je renesansa preporodila i Platonovu filozofiju, a do 19.st. vraćena joj je dužna pozornost.

Platonova filozofija bila je posebno utjecajna na području matematike i znanosti. Uz Aristotelovu logiku, utjecala je na znanstvenike kao što su Gottlob Frege, Kurt Gödel, Alfred Tarski ili Albert Einstein.

5.1.2. PLATONOVA FILOZOFIJA:

> Jedan od najljepših poklona koje nam je sudbina sačuvala iz starog doba jesu, bez sumnje, Platonova djela. (Hegel)

Vratimo se za početak na spomenuti problem univerzalija (lat. *universalis* = općenit). Rekli smo da u toj raspravi Platon zauzima stav da je opće ono što postoji realno. Štoviše, pojedinačno postoji samo zato što se u njemu djelomice oprimjeruje

[22] Platon je smatrao da je razgovor najpodobnija forma za filozofiju. Traženje istine, istraživanje, vidi kao bit filozofije. Pretpostavlja da je to razlog zašto je i svoja djela tako oblikovao.

opće. Opće postojanje je pravo postojanje. Pojedinačne stvari promjenjive su i propadljive dok su opće nepromjenjive i vječne. Najopćenitije i najsavršenije su ideje. Ova je tvrdnja kamen temeljac cijele Platonove filozofije.

U Platonovom opusu nalazimo mnoge teme i područja. Teorija ideja je ono što cijeli njegov opus spaja u cjelinu provlačući se kao lajtmotiv kroz njegove dijaloge.

TEORIJA IDEJA:

Teorijom ideja Platon ustvari želi pokazati da smo mi kao ljudi sposobni za apstraktno mišljenje. Teorija ideja razdvaja apstraktni misaoni svijet od osjetilnog svijeta u kojem vladaju umjetnost i mitologija. Platon vjeruje da je svijet ideja superiorniji svijetu pojava. Istražujući svijet ideja, Platon se nada da će dostići veće i izvjesnije znanje.

Platonovo shvaćanje ideja razlikuje se od dijaloga do dijaloga, i nigdje nije u potpunosti razjašnjeno, tako da je umnogome teorija podložna različitim interpretacijama. Teorija ideja po prvi puta je iznesena u dijalogu *Fedon*, ali nije razrađena nego je uvedena kao nešto s čim su sudionici u razgovoru već upoznati. Slično je i sa *Državom* u kojoj se Platon na teoriju ideja oslanja u izgradnji mnogih drugih argumenata, ali ne osjeća potrebu objasniti pobliže sâmu teoriju ideja.

Na kritičarima je, stoga, ostao zadatak da pobliže objasne prirodu ideja i način na koji ideje djeluju na pojavni svijet. Naravno, mišljenja se razilaze. Neki smatraju da su ideje paradigme, savršeni primjeri na temelju kojih je izgrađen osjetilni svijet. Drugi ideje smatraju univerzalijama, općim pojmovima. Tako je, primjerice, ideja ljepote ono što dijele sva lijepa bića. Treća skupina kritičara drži da su ideje konglomeracije, skupovi svih predmeta u osjetilnom svijetu koji posjeduju određenu kvalitetu. To bi značilo da malo ljepote postoji u jednom predmetu, malo ljepote u drugom… Kada bismo sve predmete u kojima se nalazi komadić ljepote stavili na hrpu, to bi bila ideja ljepote. I sâm Platon bio je svjestan nedovršenosti i višeznačnosti svoje teorije, kako i napominje u svojem dijalogu *Parmenid*.

Ipak, teorija da Platon govori da su ideje opći pojmovi, univerzalije, najzastupljenija je među kritičarima. Stoga ćemo uzeti da je ona točna i njome se pobliže baviti. Krenimo.

Ideja je bitak i bit svega. «Ideje su vječne i nepromjenjive biti svega.»[23] One su najsavršeniji entiteti na najvišem stupnju postojanja. Nesavršene i promjenjive pojedinačne stvari materijaliziraju u sebi samo dio savršene, nepromjenjive i vječne ideje. Uzmimo primjer iz područja geometrije. Imamo ideju kružnice. Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta). Samo je idealna kružnica savršena. Materijalna kružnica nikada ne može biti savršena, koliko god bili precizni instrumenti kojima je crtamo i koliko god bio vješt crtač.

> Svaki krug koji se stvarno crta ili ga tokar izradi pun je suprotnosti prema onome ……………ne sadrži, kažemo, u sebi ni u manjoj ni u većoj mjeri ništa od prirode koja mu je suprotna.[24]

Nije moguće niti nacrtati dvije potpuno jednake (materijalne) kružnice. One se nikada neće podudarati, makar i na mikroskopskoj razini, na razini razlike u debljini traga olovke kojom crtamo. Nacrtana kružnica može se izbrisati gumicom ili se može zapaliti papir na kojemu je nacrtana. No ideja se ne može izbrisati ni zapaliti. Ne može se uništiti. Ideja kružnice je ono na što naša nacrtana kružnica referira i što nam dozvoljava da našim nacrtanim aproksimacijama dajemo dogovoreni status kružnice. «Ideja se ne rađa i ne umire, ne reflektira u sebi ništa drugo, i ne mijenja se na ništa drugo. (*Timej* 51E-52E)»[25]

Platon značajno mjesto u svijetu ideja daje geometriji. Smatra da ona pomaže duši da se približi onom stvarnom i pobjegne iz pojavnog svijeta. Smatra da je i Bog geometar. Po Platonu, matematika je smještena između iskustvenog svijeta i svijeta ideja. Ona je, dakle, posrednik između ta dva svijeta. Matematika um izaziva da shvati apstraktne pojmove i odnose te je zato neizmjerno važna. Ona također barata apstraktnim (idealnim) pojmovima te tako omogućuje sagledavanje pojmova izvan iskustvenog svijeta što pomaže u shvaćanju idealne istine. «Pri razumijevanju svih ostalih znanosti imat će neograničenu prednost onaj koji se bavio geometrijom, ispred onoga koji to nije činio.»[26]

Po Platonu, postoje dvije vrste spoznaje:

---

[23] Ibid. str. 96
[24] Platon: «Državnik i sedmo pismo»
[25] Znam, Š. i dr. «Pogled u povijest matematike», Tehnička knjiga, Zagreb, 1989., str. 57
Napomenimo još jednom da se Aristotel ne slaže s ovim stavom. Dok za Platona postojanje matematičkog svijeta nije uvjetovano postojanjem stvari u realnom svijetu, kod Aristotela to nije slučaj. Za Aristotela, primjerice, brojevi postoje samo zato jer postoje stvari koje možemo brojati.
[26] Ibid.

a) Umska – jedina prava, spoznaja pomoću koje spoznajemo ideje, jedina spoznaja koja dovodi do prave i pune istine. Ona dokučuje pravu zbilju, a to je misaona zbilja ili svijet ideja.
b) Osjetilna – ne doseže do srži stvari, ostaje pri nesigurnoj spoznaji tj. prividu. Ona dohvaća samo prolaznu zbilju ili svijet pojava. Ona je *doxa*, privid.

Različitim vrstama spoznaje odgovaraju različiti predmeti spoznavanja. Dakle, umskom spoznajom spoznajemo ideje, a osjetilnom propadljive pojedinačne predmete. Pravo znanje može se steći samo na temelju nematerijalnih ideja te je zato cilj znanosti istraživanje i shvaćanje same ideje.[27]

Platon je prvi koji je uvidio razliku između pojavnih i apstraktnih stvari ili ideja. Zapitao se na koji način svijet različito shvaćaju matematičar i svi ostali. Kada, primjerice, staklar, radeći svoj posao, u prozor ugrađuje staklo mjera 100x50cm, on staklo naziva pravokutnikom ne obazirući se na nesavršenosti. Njemu je staklo «dovoljno dobar pravokutnik». Za matematičara takav pojam «dovoljno dobrog pravokutnika» ne postoji. Njegov pravokutnik, njegova ideja pravokutnika idealna je i neupitna.

Recimo to njegovim riječima. Platon i geometriju i aritmetiku dijeli na popularnu i filozofsku. Popularna geometrija se bavi objektima materijalnog svijeta, ona je primijenjena (kako smo vidjeli na primjeru našega staklara), dok je filozofska geometrija apstraktna, bavi se idejama i posjeduje apsolutnu istinu. Njeni pojmovi se ne nalaze u osjetilnom svijetu. Isto je i s aritmetikom. Popularnom aritmetikom služimo se kada, primjerice, razvrstavamo trešnje u dvije jednake skupine. Filozofskom se aritmetikom bavimo kada govorimo o čistim idejama.

Na ovaj je način, čineći ovu razliku, Platon dao idealizirani, apstraktni oblik matematičkim pojmovima. Smatrajući ih neizbježnima, pripisao im je i realnu opstojnost i oslobodio ih njihovih materijalnih reprezentacija. Platon je matematiku smatrao pojmovno čistom, određenom i idealnom. Matematički pojmovi su, po njemu, čiste ideje.

TEORIJA SJEĆANJA:

S teorijom ideja usko je povezana i teorija sjećanja. To je epistemološka teorija koja objašnjava kako to mi imamo uvid u savršene forme ili ideje. Ako je priroda

[27] Vidi Dadić, Ž.: «Ideja i metoda u matematici», Školska knjiga, Zagreb, 1992., str. 30

ideja takva da ništa u svijetu koji nas okružuje nije njihova savršena slika, na koji ih mi to način spoznajemo? Već smo vidjeli da ideju kružnice ne možemo spoznati ukazivanjem na nacrtanu kružnicu, jer nacrtana kružnica naprosto nije i nikada ne može biti idealna. Nacrtana tangenta kružnicu ne dodiruje u jednoj, nego u više točaka. Ipak, tangentu definiramo kao pravac koji kružnicu dodiruje u jednoj jedinoj točki. Platon smatra da do takve definicije nismo mogli doći generalizacijom iz iskustva naprosto zato jer u materijalnom svijetu ne postoji ni jedna takva kružnica s takvom tangentom. On smatra da je naš uvid u definiciju tangente neka vrsta reminiscencije. Tu nam u pomoć dolazi spomenuta teorija sjećanja.

Teorija sjećanja kaže da je besmrtna duša prije rođenja boravila u carstvu ideja, gdje je neposredno promatrala istinu, tj. ideje. Vidljivi, opažajni svijet pojavnih stvari podsjeća dušu na ideje, uzroke i uzore onoga što sada gleda. Tako je spoznaja zapravo sjećanje. Ono što mi zovemo učenjem i otkrivanjem istine, to je ustvari samo aktiviranje znanja koje je oduvijek bilo u našoj duši.

> Budući, dakle, da je duša besmrtna i da se više puta rađa te budući da je vidjela i ono što je ovdje i ono što je u Hadu i sve stvari, ne postoji ništa što nije naučila, tako da nije čudno što je moguće da se podsjeća na vrlinu i na drugo što je prethodno znala. Jer budući da je sva priroda srodna, a duša je naučila sve, ništa ne priječi da podsjetivši se samo na jednu stvar – a to je ono što ljudi nazivaju učenjem – čovjek sve ostalo sam nalazi, ako je hrabar i ako se ne umori istražujući; jer istraživanje i učenje u cijelosti je podsjećanje.(*Menon,*81c) [28]

Posljedica vječnosti ideja je i besmrtnost duše. «[A]ko svevremena i vječna spoznaja kao takva biva stalno prisutna u duši, onda i duša mora biti svevremena i vječna, dakle besmrtna i nezavisna od tijela i njegovih osjeta koji su smrtni i prolazni.»[29]

Budući da su i matematički entiteti ideje, duša se sjeća i matematike. Ne uči je, nego otkriva, prisjeća je se. Iskustvo nije potrebno za spoznavanje matematike jer mi već posjedujemo matematičke principe. Matematičko znanje je apriorno. Iskustvo doduše može pomoći u prisjećanju, ali nikako nije presudni faktor.

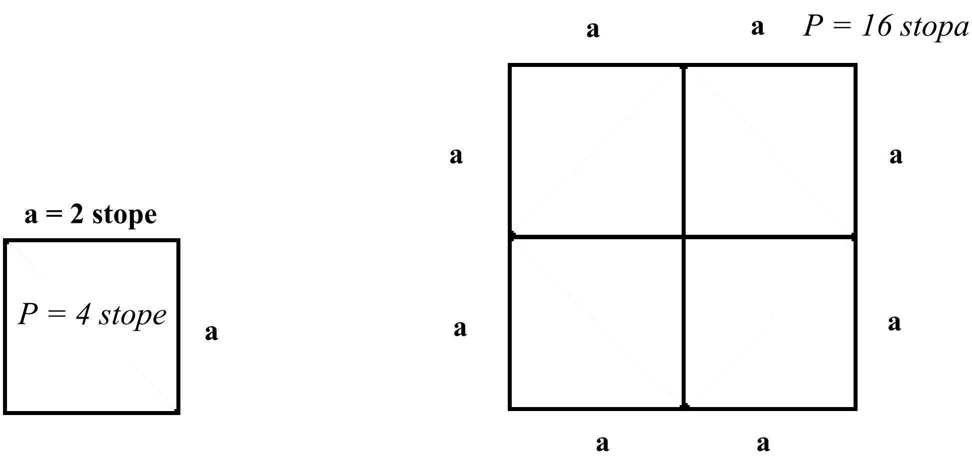
Rekonstruirajmo argument kojega Platon navodi.[30]

[28] Platon: «Menon», KruZak, Zagreb, 1997., str. 41
[29] Šikić, Z. «Filozofija matematike», Školska knjiga, Zagreb, 1995., str. 12
[30] Platon: «Menon», KruZak, Zagreb, 1997., str. 41-55

Sokrat poziva Menonova roba, neobrazovanog i nepismenog, kako bi s njim razgovarao o geometrijskom problemu. Jedino sustavno znanje roba je govorenje i razumijevanje grčkog jezika. Nikada nije bio podučavan geometriju.

Sokrat robu postavlja sljedeće pitanje: koliko se mora povećati veličina stranice kvadrata da bi se udvostručila njegova površina? Najprije utvrđuje zna li rob što je to kvadrat. Kada se uvjeri da zna, dovodi ga u nepriliku. Navodi roba da pogrešno zaključi da se površina udvostručuje udvostručavanjem stranice. To smatra didaktičkim potezom jer su, po njegovu mišljenju, nesigurnost i sumnja da bi zaključci koje posjedujemo mogli biti krivi, prvi korak u nalaženu istine. Ako dogmatično vjerujemo u svoje zablude, nikada ih se nećemo riješiti. Svrha sumnje i «neprilike» je da nas probudi iz naših slijepih vjerovanja i usmjeri na propitivanje svoga znanja.

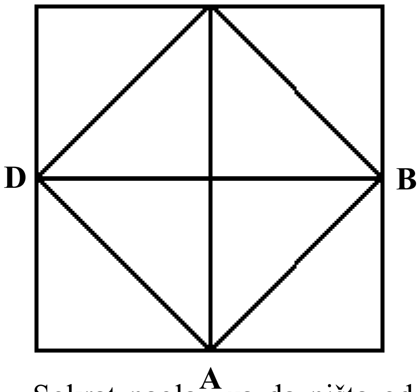
Sljedeći je korak robu ukazati na pogrešku. Sokrat mu objašnjava da dvostruko veća stranica daje četverostruko veću površinu. Rob uviđa gdje je pogriješio.



dvostruko veća stranica = četiri puta veća površina

Treći korak. Koliko treba biti dugačka stranica da bismo dobili dvostruku površinu? Mora biti veća od dvije i manja od četiri stope. Sokrat potiče roba da pogađa veličinu. Rob pokušava s veličinom od tri stope, ali ga Sokrat opovrgava i potiče ga da mu na slici pokaže tu stranicu koja će činiti dvostruku površinu kada je već ne zna brojčano izraziti.

Naposljetku, rob uviđa da od četverostruke površine možemo dobiti onu koju tražimo, dvostruku, tako da ovu prepolovimo. Sokrat ga navodi na odgovor da je najbolji način učiniti to tako da svaki od naša četiri kvadrata dijagonalom podijelimo na pola. Tako smo dobili četiri polovice i smanjili površinu na pola, što nam je i bio cilj.



Površina unutarnjeg kvadrata (ABCD), čije stranice su dijagonale izvornih kvadrata, iznosi 8 stopa.

Sokrat naglašava da ništa od ovoga on nije podučio roba, nego da ga je samo navodio na ispravne zaključke pomažući mu da se prisjeti onoga što je unaprijed znao, ispitujući ga, a ne podučavajući. Kaže: «[U] onome tko ne zna nalaze se istinita mnijenja o onome što ne zna. (…) Ni od koga podučen, znat će, sam iz sebe ponovo uzimajući znanje. (…) A sam ponovo uzimati znanje u sebi, ne znači li to podsjećati se? (*Menon* 85c)»[31]

Nakon obrazlaganja teorije ideja i teorije sjećanja, zaključimo. Platonova teorija je realistička teorija. Realizam govori da objekti neke domene objektivno postoje, da ti objekti postoje nezavisno od nas i našeg znanja o njima, tj. da bi postojali i kada ne bi postojao nitko tko bi ih mogao percipirati na bilo koji način. S epistemološke strane, realizam kaže da svijet možemo spoznati točno onakvog kakav on jest, možemo ga spoznati objektivno.

Nadalje, Platonova je teorija realistička po pitanju univerzalija. On govori da su opći pojmovi stvarni. Štoviše, ne samo da su stvarni nego su i savršeniji od pojavnih, promjenjivih i propadljivih oblika koji obitavaju u materijalnom svijetu. Na isti način kao i ideje dobra, lijepoga i sl. tretira i matematičke entitete. Matematički su entiteti idealni i savršeni i u njihove istine imamo direktan, *a priori* uvid, kako nam to objašnjava teorija sjećanja. Matematički su sudovi istiniti ili lažni s obzirom na stanje u matematičkom svijetu.

Važno je napomenuti da termini «stvaran» i «postoji», kada se odnose na matematičke pojmove i istine, nisu korišteni na metaforički način. Platon zaista smatra da su matematički objekti jednako stvarni kao i krov koji nas čuva od kiše ili kamen koji leži u vrtu. Štoviše, budući da su matematički objekti ideje, oni su čak na

[31] Platon: «Menon», KruZak, Zagreb, 1997., str. 53

višem stupnju postojanja od materijalnih predmeta koji pripadaju fizičkom svijetu (budući da je fizički svijet samo kopija idealnog). Matematički entiteti zaista, objektivno i nezavisno od našeg znanja o njima, postoje. I kada ne bi bilo ni jednog čovjeka koji bi o njima razmišljao ili pisao, oni bi svejedno postojali u svojem idealnom obliku. Matematički objekti, brojevi, skupovi, funkcije, trokuti, krugovi, integrali, pravci, itd., su *sui generis*, što znači da svoje postojanje ne duguju ničem drugom. Napredovanje u matematici nije stvaranje nego otkrivanje (isto kao i napredovanje, primjerice, u biologiji) onoga što je već postojalo nezavisno od nas. Pitagorejci su otkrili, a ne stvorili, Pitagorin poučak, isto kao što je i Kopernik otkrio, a ne stvorio ili izumio, Zemljino kretanje oko Sunca.

5.1.2.1. PLATON I KARAKTERISTIKE MATEMATIKE:

Filozofija matematike bavi se, između ostalog, i proučavanjem određenih karakteristika matematike. Na pitanja vezana uz te karakteristike različiti filozofski pravci daju različite odgovore. U ovom odjeljku navest ćemo neke od karakteristika i vidjeti kakve odgovore daje Platonova teorija na pitanja koja iz njih izviru.

a) Ontološka obveza matematičkog diskursa

Matematički je diskurs, dakle način na koji govorimo o matematici i matematičkim predmetima, takav da implicira da ti predmeti (geometrijski likovi, funkcije, brojevi itd.) zaista i postoje. Taj je diskurs realistički, što znači da implicira da ti entiteti ne samo da postoje, nego da postoje nezavisno od nas i nezavisno od našeg znanja o njima.

Npr. kada kažemo da postoji broj čiji je drugi korijen broj 5, impliciramo da broj 25 zaista, realno i objektivno postoji, nezavisno od nas. Na sličan, realistički način o svojim predmetima govore i druge znanosti, npr. fizika (o elektronima, silama, valovima) ili biologija (o stanicama, populacijama, jedinkama).

Prema Platonovoj teoriji, matematički diskurs koji implicira realnu opstojnost sasvim je razumljiv. Prema njoj, ontološka obveza se podrazumijeva budući da ona i tvrdi da matematički predmeti zaista objektivno postoje. Diskurs je realistički jer su i predmeti realno postojeći. Kada ne bi bili, ni diskurs ne bi bio realistički.

b) Idealnost matematičkih predmeta

Matematički predmeti (pravci, trokuti, kvadrati) nisu fizički predmeti. Oni su idealni, apstraktni i postoje nezavisno od fizičkih predmeta u svijetu. Postavlja se pitanje na koji ih način onda spoznajemo.

Također, ni dokazi za matematičke tvrdnje ne smiju biti fizički. Želimo li npr. dokazati da je zbroj kutova u trokutu 180°, nećemo otkinuti vrhove školskog, drvenog, fizičkog trokuta i pokušati ih složiti na ravnu crtu. To nije valjan matematički dokaz. Umjesto toga, u dokazivanju ćemo se poslužiti dijagramima i apstraktnim matematičkim pravilima.

Idealnost ili apstraktnost *de facto* jest Platonov pogled na matematiku. Matematički entiteti su realno postojeći, ali idealni ili apstraktni, a ne prostorno-vremenski. Spoznajemo ih prije rođenja kada duša ima uvid u čiste ideje te ih se nakon rođenja prisjećamo.

c) Beskonačnost

Beskonačnost je pojam koji se vrlo često koristi u matematici. Brojeva (npr. prirodnih) ima beskonačno mnogo. Također, između dva prirodna broja ima beskonačno mnogo (realnih) brojeva. Kroz jednu točku se može provući beskonačno mnogo pravaca, pravac seže u beskonačnost… No pojam beskonačnosti nije važan samo matematički nego i filozofski. To je jedan od spomenutih pojmova koji su dovoljno neodređeni da bi bili filozofski zanimljivi.

Beskonačnost nije problem Platonu budući da on barata idejama, a ne materijalnim predmetima. U materijalnom svijetu beskonačnost jest problem (nije potpuno jasno kako bi se beskonačnost mogla predstaviti u materijalnom svijetu budući da je naše iskustvo konačno). No u matematičkom, idealnom svijetu beskonačnost nije nova niti nepoznata stvar. Beskonačni predmeti, poput pravaca ili ravnina, postoje u idealnoj matematičkoj stvarnosti.

d) Apriornost

Matematika se počela razvijati još u drevnim kulturama isključivo kao sredstvo koje pomaže u svakodnevnom poslu, u graditeljstvu, u poljoprivredi i sl. U Egiptu su se, primjerice, matematikom služili kako bi mjerili zemljište nakon poplava Nila. Matematika je, dakle, primjenjiva u iskustvu. No je li ona empirijska znanost, je li matematičko istraživanje empirijsko? Napreduje li matematika razmišljanjem matematičara ili premjeravanjem njiva? Da li se matematika spoznaje, širi i razvija nezavisno od iskustva? Je li apriorna?

Prema Platonovoj teoriji, matematika jest apriorna, urođena. Ona nije empirijska znanost. Nova matematička saznanja ne stječemo iz iskustva nego prisjećanjem, prizivanjem u svijest onoga što je otprije bilo u duši. Teorija sjećanja o tome nam govori.

e) Imunost na empirijsko opovrgavanje

Činjenica je da u svakodnevnom životu potpuno vjerujemo matematici. Uvriježeno je mišljenje da nas ona neće iznevjeriti. Primjerice, kada bismo trojici ljudi pribrojali drugu petoricu, ponovno ih išli brojati i dobili rezultat različit od osam, zadnje u što bismo posumnjali je matematičko pravilo. Vjerojatnije je da bismo pomislili da smo pogriješili u brojanju, da se netko šali s nama, da smo umorni i dekoncentrirani ili pak da haluciniramo. U matematička pravila jednostavno ne sumnjamo, čak ni u slučaju kada nam iskustvo govori drugačije.

Matematika, po Platonu, ionako ne govori o fizičkom, materijalnom svijetu te, prema njegovoj teoriji, preko fizičkog svijeta ne može biti niti opovrgnuta, empirija joj nije prijetnja niti iz nje može proizaći protuprimjer za matematiku. Matematičke ideje pouzdane su i nepobitne dok je materijalna stvarnost promjenjiva, propadljiva i nepouzdana.

f) Primjenjivost

Iako to zvuči proturječno karakteristici *e)*, matematika je zaista primjenjiva u fizičkom svijetu. I to ne samo na banalnoj razini zbrajanja 2 i 2 bombona što daje 4 bombona, nego i na vrlo kompliciranim tehničkim poljima (građevina, tehnika, astronomija, ekonomija…). Što bi o tome rekao Platon?

Iako idealna i pretpostavljena materiji, matematika je primjenjiva. Matematičke ideje u svojem se nesavršenom obliku utjelovljuju u materijalnom predmetima. Materijalna stvarnost emanira iz idealne matematičke. Idealni svijet determinira onaj materijalni. To nam omogućava da imamo «paralelne pravce» na tračnicama i «sferne» lopte za pilates. Naravno, niti su tračnice paralelni pravci niti je lopta za pilates sfera. Ali «približnost» je dovoljno dobra za nesavršeni materijalni svijet.

5.2. ARISTOTEL:

Do sada smo, govoreći o Platonovoj filozofiji, spominjali i naznačili točke u kojima se Platon i Aristotel razilaze. Rekli smo da, dok je Platon realist po pitanju univerzalija, Aristotel je nominalist. Kod Platona spoznaja počinje kada duša promatra ideje i nastavlja se kada oči promatraju pojave i prisjećaju se ideja. Kod Aristotela spoznaja počinje u iskustvu koje generalizacijom uzdižemo do spoznaje općeg. Također, opće ne postoji izvan uma. Samo su pojedinačni predmeti realno postojeći.

Tim raskolom između njih dvojice nećemo se detaljnije baviti. Cilj ovog rada nije uspoređivanje Platonove i Aristotelove teorije o prirodi svijeta, nego prikaz filozofskog okvira po kojemu je svoje djelo radio Euklid. Zato ću se u govoru o Aristotelu usredotočiti isključivo na njegovu logiku. No, držimo se i ovoga puta ustaljenog rasporeda i započnimo opet biografskim podacima.

5.2.1. BIOGRAFSKI PODACI:

Aristotel je rođen u Stagiri u sjevernoj Grčkoj 384.g. pr. Kr. Otac mu je bio liječnik na makedonskom dvoru za vladanja Aminta III., oca Filipa II. i djeda Aleksandra Velikog. U dobi od 17 godina pošao je u Atenu studirati na Platonovoj Akademiji i tamo je ostao sljedećih dvadeset godina. Bavio se skoro svim područjima ljudske djelatnosti toga vremena: filozofijom, logikom, fizikom, politikom, etikom, psihologijom, retorikom, poetikom, gramatikom, biologijom i astronomijom. Bio je poprilično slavna ličnost. Akademiju je napustio 347.g. godine, kada je umro Platon. Postoje teorije da je otišao jer se osjećao povrijeđenim što ga Platon nije imenovao za nasljednika na čelu Akademije. Ipak, vjerojatnije je da je otišao zbog sve jače atenske odbojnosti prema svemu makedonskom zbog čega se Aristotel bojao da će biti optužen zbog suradnje s dvorom Filipa II.

Sljedeće četiri godine puno je putovao po Egeju, podučavajući, učeći i baveći se biologijom. 343.g. pozvan je da se vrati na makedonski dvor kako bi bio osobni učitelj sinu Filipa II., mladom Aleksandru. To je i učinio i sljedeće tri godine bio je Aleksandrov učitelj.

Nakon što su Makedonci zavladali Grčkom, Aristotel se vratio u Atenu i osnovao svoju filozofsku školu u šetalištima Apolona Likeja, Peripatetičku školu ili

Likej (grč. *peripatos* = šetalište). U to je vrijeme na čelu Akademije bio Ksenokrat prema kojemu je Aristotel gajio izrazito negativne osjećaje, i u osobnom i u stručnom smislu. U Likeju je Aristotel podučavao od 335. do 323.g. Zapisi koje je ostavio u nasljeđe uglavnom su predavanja koja je držao u Likeju. Uzrok suhoparnom stilu i neuobičajenoj strukturi najvjerojatnije leži u činjenici da su to bile samo bilješke za predavanja koje nikada nisu bile namijenjene za izdavanje, kao i u činjenici da tekstove, onakve kakve ih danas poznajemo, nije organizirao Aristotel nego su oni uređivani mnogo stoljeća nakon njegove smrti. Aristotel je, naime, objavljivao mnoga popularna djela koja su bila omiljena zbog pitkosti i prijemčivog stila, ali, nažalost, ta djela nisu sačuvana do naših dana.

Procjenjuje se da danas posjedujemo manje od trećine svega što je Aristotel napisao. Ipak, i taj mali dio poprilično je impresivan. No ni njima ne znamo kronološki poredak niti smo sigurni da su sva djela koja mu se pripisuju izvorno njegova.

Sačuvana djela dijele se na logičke spise (*Organon* ili «oruđe», oruđe za pravilno mišljenje), spise o prirodnim zakonitostima, filozofske spise (od kojih je najznačajnija *Metafizika* ili prva filozofija), političke spise i poetičke spise. Njegovi poetički spisi prvi su tekst iz teorije književnosti u povijesti. Zanimljivo je da je iz spisa o poetici sačuvan samo dio o tragediji, dok je dio o komediji uništen. Smatra se da razlog tome leži u ranom srednjem vijeku. Naime, u to se doba u crkvenjačkim krugovima (a crkvenjaci su bili ti koji su imali pristup knjigama) smatralo da smijeh ne može biti od Boga, jer ljudsko lice, kada se smije, poprima životinjsku grimasu. Postoje teorije da je stoga dio o komediji tada namjerno uništen.

Aristotelov utjecaj na buduće generacije je ogroman. Iako su njegova djela bila sakrivena i nedostupna tijekom mnogih stoljeća, sačuvali su ih arapski znanstvenici i vratili u Europu u srednjem vijeku. Zahvaljujući Tomi Akvinskom, Aristotel je bio najveći filozofski autoritet u kasnom srednjem vijeku. Biologija i logika nisu znatno pomaknule granice koje je on postavio sve do 19. stoljeća.

Aristotel je bio pravi sistematičar. Prije nego bi dao svoje mišljenje o određenom problemu, uvijek bi najprije naveo povijesni pregled i komentirao prijašnja dostignuća. On je i tvorac logike koju je smatrao temeljom za svaku drugu znanost i filozofiju. Osnovao je načela znanstvenog rada i njegova logika ostala je autoritet sve dok nije osnovana moderna simbolička logika. Njegova sistematičnost očituje se i u činjenici da je od Likeja stvorio pravo istraživačko-znanstveno središte koje je dalo temelje osnutku zasebnih znanosti kasnije u helenizmu.

Aristotel je umro 322.g. pr. Kr. u šezdeset i drugoj godini života.

Do sada smo objasnili jedan dio filozofskog okvira Euklidovog rada – Platonov. Sada ćemo se baviti drugim dijelom – Aristotelovim. Kako se već moglo naslutiti, Euklid je od Platona preuzeo metafiziku, dakle teoriju ideja, a od Aristotela logiku, način izgradnje argumenta, način definiranja i sustavnost. Pogledajmo sada kako izgleda taj slavni Aristotelov logički sistem.

5.2.2. ARISTOTELOVA LOGIKA:

> Ni jedna znanstvena disciplina nije rođena iz čistoga otkrivačkog užitka. Pojava svake znanosti ima duboke društvene uzroke. Uzrok pojave logike [kao sistematiziranog skupa pravila zaključivanja] je bila potreba u suočeljavanju raskolu koji su po Grčkoj širili sofisti – «učitelji mudrosti». Učili su kako lukavstvom zaskočiti protivnika i tada kada je pravda na njegovoj strani. Mudrost i obrazovanost stavljali su u službu napretka.[32]

Aristotel, kao i Sokrat i Platon, smatra da su sofisti veliki neprijatelji vrline i nemilosrdno ih napada. Sofisti, koji su bili relativno poznati u Aristotelovo vrijeme, bili su putujući učitelji koji su za novac mlade državnike podučavali umijeću retorike i debatiranja. Naučavali su da su vrijednosti relativne i da je pobjeda u debati jedino mjerilo kojim se dokazuje istinitost i valjanost argumenta. Pogledajmo primjer sofizma:

Sokrat je čovjek.
Korik je drugačiji od Sokrata.
Korik je nešto drugo od čovjeka.[33]

Zaključak očito nije valjan, ali na prvi pogled izgleda kao da je dobro konstruiran. Na to su računali i sofisti i na prijevaru pobjeđivali u debatama.

Sofisti su svoje mjesto na sceni našli nakon što je u Grčkoj počeo opadati značaj mitova i religije, što se dogodilo kada je grčka kultura krenula u period racionalnosti.

[32] Znam, Š. i dr. «Pogled u povijest matematike», Tehnička knjiga, Zagreb, 1989., str. 58
[33] Ibid.

Stare vrijednosti počele su gubiti na snazi, a nije bilo novih da ih zamijene. Platon je predvidio opasnosti koju taj novi relativizam nosi za njegovo društvo i prokazao njihovu demagogiju koju su mnogi smatrali mudrošću. Aristotelova je logika, kao i Platonova *Država*, pokušaj da se moralne vrijednosti osnuju na čvrstim temeljima.

Sofisti, su, dakle, ti koji su potaknuli Aristotela da oformi novi sustav ispravnog zaključivanja i argumentacije. On se protiv njih borio znanjem i znanstvenom analizom. Za razliku od današnje formalizirane simboličke logike, Aristotelova se logika bavi prirodnim jezikom i zakonitostima pravilnog zaključivanja unutar njega te je u tom smislu svakodnevna. Aristotel je napisao šest radova o logici koji su kasnije nazvani zajedničkim imenom *Organon* ili «oruđe». Ovo je djelo temelj logike kao nove znanstvene discipline. Sastoji se od rasprava o pojmovima, sudovima, zaključcima, dokazima, logičkim pogreškama, elementima definicije, itd.

Organon se, dakle, sastoji od šest knjiga. Pojedinačno, to su:

1. *Prva analitika* – o zaključivanju, tj. silogizmu;
2. *Druga analitika* – o dokazu i definiciji;
3. *O tumačenju* – o dijelovima i vrstama rečenica;
4. *Topika* – o dijalektičkom zaključivanju na osnovi vjerojatnih premisa;
5. *O varljivim dokazima* – o sofizmima, tj. o zaključcima čija je konkluzija netočna, ali premise daju privid istinitosti;
6. *Kategorije* – učenje o deset općih predikata bića.

Ova se djela smatraju Aristotelovim logičkim djelima, iako ima dijelova koje danas ne bismo svrstali u logiku. Isto tako, u nekim drugim Aristotelovim djelima, primjerice u Metafizici, postoje dijelovi koji spadaju pod logiku. Fokus ovih djela nije isključivo na određivanju što je istinito, a što nije, nego se ona primarno bave istraživanjem struktura koje vode ka istini. *Organon*, dakle, daje smjernice kako stvarima dati smisao.

Logika je dobila ime po *logosu*, tj. **pojmu**. Pojam, tj. dobra definicija pojma, je temelj uspješne komunikacije i uspješnog i ispravnog zaključivanja, pa je stoga i temelj logike, koja se i sâma bavi uspješnim i ispravnim zaključivanjem. Pojam je umska apstrakcija onoga što primamo osjetilnom spoznajom. Primjerice, kada vidimo konja, u umu nam se stvara pojam pod koji ćemo supsumirati sve druge konje koje ćemo u životu vidjeti. Aristotel smatra da, ukoliko izostane ta prva, osjetilna karika, ne može doći ni do formiranja pojma u umu. Iskustvo je prvi i temeljni korak u spoznavanju. Vidimo da se u tome bazično razlikuje od Platona.

Ljudi komuniciraju pomoću pojmova. Do problema dolazi kada pod istim pojmom dvoje ljudi podrazumijeva različite stvari. Tada dolazi do nesporazuma i greške.[34] Da bismo izbjegli nesporazume, potrebno je ispravno i potanko **definirati pojmove**. Aristotel je dao formulu kako se konstruiraju definicije. Svaka dobra definicija mora sadržavati: *genus proximum* (najbliži viši rodni pojam) i *differentiu specificu* (specifičnu razliku). Primjerice, ako želimo definirati pojam trokuta, *genus proximum* (ono pod što ga možemo grupirati, vrsta, rod) nam kaže da je to geometrijski lik, a *differentia specifica* (ono po čemu se razlikuje od svih drugih pojmova istog roda, naime, od svih drugih geometrijskih likova) da ima tri stranice.

Nadalje, u definiciji se moraju upotrebljavati samo poznate i jasne riječi, ona ne smije biti preuska (tj. mora obuhvatiti sve bitne karakteristike pojma) i mora biti istinita. Također, definicija ništa je govori o ontologiji pojma koji definira, ne govori da li taj pojam zaista postoji ili ne. Ona govori samo o njegovim karakteristikama. Primjerice, ako Sherlocka Holmesa definiramo kao briljantnog i pronicljivog londonskog detektiva kasnog 19. stoljeća (*genus proximum*) koji svira violinu, puši opijum i s Dr. Watsonom iznimno uspješno rješava zagonetke (*differentia specifica*), nismo rekli ništa o tome postoji li on realno ili ne. Barem tako tvrdi Aristotel.[35]

Spomenimo sada i ukratko objasnimo neke od pojmova kojima se Aristotel bavi u *Organonu*.

Aristotel uvodi dva pojma: **indukciju** i **dedukciju**. Kada put spoznaje ide od jednostavnog ka općem, onda govorimo o indukciji. Tako dobivene podatke provjeravamo zaključcima, i to ponovnim svođenjem općeg na pojedinačno. To je **dedukcija**. Indukcija donosi nove stvari i nova znanja dok se dedukcijom samo vrtimo u krug sa starim, postojećim znanjima. Ali dedukcija je snažnija od indukcije i sigurno čuva istinitost, dok se indukcija bavi vjerojatnostima.

Aristotel uvodi i pojam **dokaza**. Dokazujemo tvrdnju kada pokažemo da je novo načelo posljedica već postojećeg. Nadgradnja te operacije je **silogizam** ili logički zaključak, jedan od najbitnijih pojmova Aristotelove logike.

Tematski se veliki dio *Organona* bavi silogizmom, glavnim Aristotelovim logičkim oruđem. Silogizam je objašnjen primarno u *Prvoj analitici* i u *O tumačenju*. U ostale četiri knjige fokus je na drugim temama kao što su znanje i argument.

[34] Ponovimo, na greške ovakvog tipa računaju sofisti u svojim varljivim argumentima.
[35] Platoničari se s time ne bi složili. Vidjeli smo da oni realistički diskurs povezuju s realizmom sâmim.

Hipoteza je tvrdnja koja nije bila dokazivana, ali je poznata obojici diskutanata.

Postulati su tvrdnje koje uzimamo kao istinite na temelju vjerovanja. O njima nemamo direktne spoznaje. **Aksiomi** su temeljne tvrdnje koje se ne dokazuju. Oni su baza na koju se nadograđuju sve druge tvrdnje te su najopćenitiji. Dijele se na **zajedničke** i **posebne**. Primjerice, aksiom «Dvije različite točke određuju pravac» je posebni aksiom geometrije. Aksiom «Broj se sastoji od jedinica» je posebni aksiom aritmetike. A aksiom «Oni objekti koji su jednaki istom objektu jednaki su i međusobno» je zajednički aksiom geometrije i aritmetike jer se može primijeniti i na objekte aritmetike (brojeve) i na objekte geometrije (geometrijske likove).[36]

Još je jedna zanimljivost da je Aristotel redefinirao pojam **istine**. Do njega, istinitim se smatralo, po Parmenidu, ono što «otkriva bitak». Istina je bila *ălétheia* (grč. neskrivenost, razotkrivenost). Aristotel je istinu utemeljio kao podudaranje mišljenja s predmetom o kojem se misli. Ta definicija vrijedi i danas i naziva se teorijom adekvacije ili korespondencije.

Spomenuli smo vrlo važan pojam silogizma. Vratila bih se na njega i pobliže ga objasnila, budući da se nauka o zaključku ili silogistika smatra jezgrom aristotelovske logike.

Silogizam je zaključak od tri koraka koji sadrži tri različita pojma. Navedimo jednostavan, ali slavan primjer:

Svi ljudi su smrtni.
Sokrat je čovjek.
Sokrat je smrtan.

Ovaj se trodijelni zaključak sadrži tri suda u kojima su spomenuta tri pojma: «Sokrat», «čovjek» i «smrtan». Prva dva suda zovu se premise, a treći je konkluzija. U valjanom silogizmu, kakav je i ovaj koji smo naveli, konkluzija nužno slijedi iz premisa. To znači da, ako znamo da su obje premise istinite, sigurni smo da je i konkluzija istinita. (Radi se o spomenutom deduktivnom zaključivanju koje čuva istinu.)

Aristotel koristi sljedeću terminologiju kako bi imenovao dijelove silogizma:

[36] Vidi Znam, Š. i dr. «Pogled u povijest matematike», Tehnička knjiga, Zagreb, 1989., str. 59

- premisa čiji se subjekt pojavljuje u konkluziji zove se **manja premisa** ili premisa *minor*;
- premisa čiji se predikat pojavljuje u konkluziji zove se **veća premisa** ili premisa *major*.

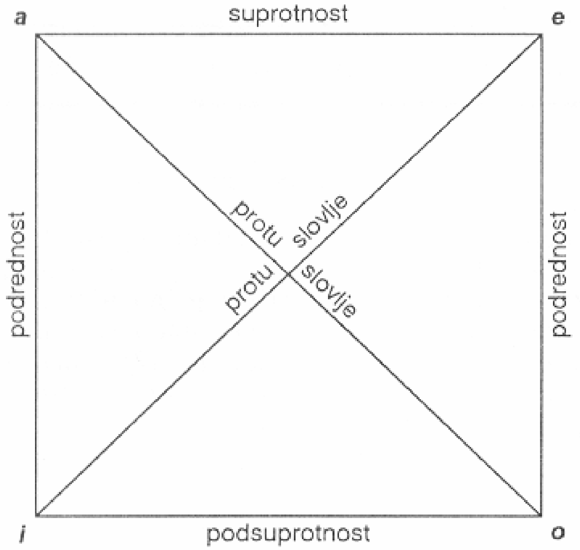
Premisa «Svi ljudi su smrtni» je premisa *major* budući da se njezin predikat pojavljuje u konkluziji. Također, njezin se predikat («smrtni»), stoga naziva većim pojmom. «Sokrat» je manji pojam jer se nalazi u manjoj premisi i jer se pojavljuje kao subjekt u konkluziji. A «čovjek», koji se u silogizmu pojavljuje u obje premise, ali ne i u konkluziji (doduše, u većoj premisi u množini «ljudi»), naziva se srednjim pojmom.

Kada analizira silogizam, Aristotel čini razliku između dvije vrste termina: **pojedinačnih** i **univerzalnih**. «Sokrat» je pojedinačni termin jer se odnosi na jednu, određenu osobu. Termini «čovjek» i «smrtan» su univerzalni jer imenuju opće kategorije ili kvalitete koje se mogu primijeniti na mnoge pojedinačne termine. «Sokrat» je jedan od milijardi pojedinačnih termina kojima se pripisuje univerzalni termin «čovjek». Univerzalni termini mogu biti subjekti ili predikati u sudu dok pojedinačni termini mogu biti samo subjekti.

Aristotel definira četiri vrste kategoričnih sudova. Ukoliko je subjekt suda univerzalni termin, ispred njega mora stajati jedan od kvantifikatora: «svaki», «neki» ili «ni jedan». Kako bismo to ilustrirali, vratimo se na trenutak na naš primjer silogizma sa Sokratom. Prva premisa ne kaže «Ljudi su smrtni», nego «Svi ljudi su smrtni.»

Dakle, Aristotel sudove dijeli na:

- **a-sud** ili opće-potvrdni sud («Svi ljudi su smrtni.»);
- **e-sud** ili opće-niječni sud («Ni jedan čovjek nije smrtan.»);
- **i-sud** ili posebno-potvrdni sud («Neki ljudi su smrtni.»);
- **o-sud** ili posebno-niječni sud («Neki ljudi nisu smrtni.»).



Odnosi među sudovima vidljivi su na logičkom kvadratu (slika preuzeta iz Kovač, S.:

Logika, Hrvatska sveučilišna naklada, Zagreb, 1999., str. 56). Sudu *a* suprotan je sud *e*. Oba mogu u isto vrijeme biti neistinita, ali ne mogu oba biti istinita.

Sudu *i* podsuprotan je sud *o*. Oba ne mogu biti neistinita, ali oba mogu biti istinita.

Sudovi *i* i *o* podređeni su sudovima *a* i *e* jer *i* slijedi iz *a*, i *o* slijedi iz *e*.

Dijagonale logičkog kvadrata prikazuju proturječnost. Proturječni sudovi isključuju jedan drugog. Oba ne mogu u isto vrijeme biti istiniti, a ne mogu u isto vrijeme biti ni neistiniti.

Aristotel kaže da se sve rečenice, svi sudovi koje kažemo i pomislimo, mogu staviti u formu jednog od ova četiri suda i tako učinit podobnima za silogizam. Ako se sve rečenice mogu oblikovati kao dio silogizma, to znači da je silogizam okvir kojim se objašnjava sve ljudsko razmišljanje i zaključivanje. Svaki valjani argument mora moći podržati formu silogizma. Na taj je način Aristotelova analiza silogizma ustvari analiza cjelokupnog ljudskog argumentiranja. On analizira četrdeset i osam mogućih načina slaganja silogizma koji se mogu konstruirati od kategoričkih sudova i zaključuje da je od njih 48 samo 14 valjanih.

U knjizi *O tumačenju* Aristotel širi ovu teoriju i ulazi u područje modalne logike, tj. u rečenice umeće modifikatore «moguće» i «nužno». Ne ulazi duboko u tu analizu, ali dolazi do jednog važnog zaključka. Zaključuje da su se svi događaji iz prošlosti ili nužno dogodili ili se nužno nisu dogodili. Ne postoje prošli događaju koji su se možda dogodili (ne govorimo o našem znanju o događajima, nego o stanju stvari u svijetu). Za razliku od toga, kada govorimo o budućnosti, govorimo u domeni mogućeg.

Aristotelovo insistiranje na silogizmu kao okviru ispravnog mišljenja i zaključivanja pokazuje i njegovu uvjerenost da je znanje hijerarhijski strukturirano, kako i eksplicitno govori u *Drugoj Analitici*. Znati nešto ne znači samo biti sposoban ponoviti činjenicu koju smo čuli ili pročitali. Znati nešto znači biti u stanju objasniti ili demonstrirati zašto je to tako, tj. pokazati da je predmet znanja konkluzija valjanog silogizma. Konkluzija valjanog silogizma može biti dalje korištena kao premisa sljedećeg silogizma. To je ispravan način konstruiranja i zove se silogistički niz.

Ako su neke istine premise koje možemo koristiti u dokazivanju drugih istina, te prve istine logički su primarnije drugima, onima koje slijede iz njih. Naposljetku, tako dolazimo do skupine «prvih istina» ili principa iz kojih sve duge istine slijede, a one same ne slijede ni iz čega (to su već spomenuti aksiomi). Ipak, ako te prve istine ne slijede ni iz čega, onda njih ne možemo nazvati znanjem budući da ne možemo demonstrirati silogizme kojima smo do njih došli i pokazati da su valjani. Aristotel smatra da do tih prvih istina dolazimo intuicijom i nekom vrstom generalizacije iz iskustva.

Iako sve istinsko znanje kreće od prvih istina ili principa, prava, svakodnevna debatiranja i prepirke puno su manje transparentne. Kada dvoje ljudi debatira, ne vraćaju se unatrag do prvih istina kako bi utemeljili svaku svoju tvrdnju. Umjesto toga, oni kreću od tvrdnji oko kojih se oboje slažu. U debatiranju je bitno naći premise s kojima se protivnik slaže i onda pokazati da iz njih nužno slijede konkluzije suprotne onima koje zastupa protivnik. Velik dio *Topike* posvećen je klasificiranju različitih konkluzija koje slijede iz različitih vrsta premisa. *O varljivim dokazima* razlaže različite logičke trikove i sofizme kojima se mogu zavarati ljudi kako bi prihvatili krive konkluzije.

Aristotelov rad u polju logike zaista je impresivan, pogotovo kad znamo da je on i utemeljio logiku kao granu znanosti. Njegov se rad nije mijenjao ni nadopunjavao sve do stvaranja moderne matematičke logike u kasnom 19. stoljeću. Naravno, Aristotel nije prvi koji se koristio formom silogizma u argumentiranju, čak nije ni prvi koji je razmišljao o načinu oblikovanja zaključaka. Ipak, on je prvi koji je pokušao sustavno izložiti vrste zaključaka, eksplicirati njihovu strukturu i metodu kojom se određuje jesu li oni točni, netočni, valjani ili ne. Njegova analiza čini transparentnim način argumentiranja što nam pomaže da vidimo istinu čak i kada je ona umotana u nejasnu retoriku, višeznačnost i sofizam. Aristotel nam govori kako se, uz pomoć pravilne analize, argument može izložiti kao slijed jednostavnih sudova što će njegovu valjanost ili nevaljanost učiniti očitom.

Vidjeli smo dakle što Aristotel govori o nekim ključnim logičkim pojmovima. Ali općenito se smatra da je njegov cilj bio posve metodološki. Želio je pokazati put kojim se može doći do sigurne, izvjesne spoznaje. Kao što su sofisti učili vještinu uvjeravanja (bili u pravu ili ne), tako je Aristotel učio vještinu znanstvenog istraživanja, spoznavanja i dokazivanja. Ni sâm Aristotel, stoga, logiku nije svrstavao među druge filozofske discipline, nego ju je gledao kao opće «oruđe» pomoću kojeg se do istine dolazi u svim znanostima.

5.3. *ELEMENTI* I FILOZOFIJA:

U četvrtom poglavlju razmotrili smo glavne točke Euklidovih *Elemenata*. Vidjeli smo na koji način on gradi svoj matematički sustav, kojim pojmovima i tehnikama se služi ne bi li jasno izložio matematičke ideje i dostignuća svoga vremena. Dotaknuli smo se njegovih definicija, postulata, aksioma i teorema, ali također i problema koji izviru iz njegova sustava.

Zatim smo u prvom i drugom dijelu petoga poglavlja objasnili dva velika filozofska sistema koja su imala znatan utjecaj na oblikovanje Euklidovog matematičkog sustava. Eksplicirali smo glavne teze Platonove filozofije. To je teza da su matematički pojmovi i matematičke istine objektivno postojeće. Govorili smo o teoriji ideja i teoriji sjećanja, o dvije vrste spoznaje, o zasnivanju matematike kao znanosti koja se bavi apstraktnim pojmovima. Također smo rekonstruirali argument iz *Menona* koji objašnjava teoriju sjećanja. Zatim smo se pozabavili Aristotelom, njegovim stavom prema sofistima i glavnim temama iz *Organona*. To su pojam, definicija, indukcija i dedukcija, hipoteza, dokaz, aksiom, kategorije, i najvažniji silogizam.

Sada kada je objašnjena temeljna filozofska podloga i kada su predstavljeni Elementi, jasno se vidi povezanost tog trojca. U ovome ćemo dijelu vidjeti u kojim se to momentima Euklid oslanja na dva filozofska sustava koje smo naveli i objasnili u trećem poglavlju.

Nesumnjivo je da je Euklidovo djelo napisano u duhu Aristotelove logike. Aristotel se logikom borio protiv sofizma i zamiranja vrijednosti u grčkom društvu, a Euklid protiv nereda u nakupljenom, nesistematiziranom geometrijskom i uopće matematičkom znanju.

No, kada govorimo o Platonovom utjecaju na Euklida, nailazimo na različita mišljenja. Postoje dva suprotna stava. Jedna strana kaže da Euklid ustvari nije platoničar, dok druga tvrdi da jest, i to pravi i prvi primjer jasne Platonove tradicije u matematici. Uvriježeno i zastupljenije je mišljenje da jest platoničar. U zadnjem ćemo odjeljku ovog poglavlja razmotriti argumente i za jedan i za drugi stav.

5.3.1. *ELEMENTI* I ARISTOTEL:

Zaključak koji se nezaobilazno nameće kada Euklida promatramo kroz prizmu Aristotelove logike jest da je Euklidov sustav aksiomatizirani sustav aristotelovskog tipa. Pogledajmo samo kako se pojmovno podudaraju ta dva sistema. Euklid je od Aristotela preuzeo pojmove kao što su definicija, dokaz, postulat i aksiom, osnovne građevne strukture svoga sistema.

Dakle, prema Aristotelovu predlošku i smjernicama kako bi dobar aksiomatski sustav trebao izgledati, Euklid odabire nekoliko jednostavnih načela kao temelje na kojima će dalje graditi svoj matematički sustav. To je ranije spomenuti sustav temelja i nadgradnje koji smo temeljito analizirali i u poglavlju o Elementima i u poglavlju o Aristotelu. To je sustav koji kaže da svako područje ljudske djelatnosti i promišljanja, pa i matematika, ima svoj poseban vokabular, skup stručnih riječi koje koristi. Taj skup stručnih riječi potrebno je definirati jednostavnijim i poznatijim pojmovima. Lanac definiranja, naravno, ne može ići u beskonačnost, nego on staje kada dođemo do pojma koji više ne može biti definiran jednostavnijim pojmom. Te pojmove «definiramo», tj. određujemo, tako da za njih ukazujemo na primjere iz vanjskog svijeta koji će nam razjasniti što se pod tim pojmom podrazumijeva. Sve druge pojmove, dakle, definiramo koristeći se osnovnim pojmovima. Tako u Euklidovoj matematici dolazimo do pojmova kao što su točka, crta i slično.

Euklid zatim daje aksiome i postulate, tj. tvrdnje koje su intuitivno istinite i ne dokazuju se, kako kaže Aristotel, to su najopćenitiji počeci svega ostalog. Zatim kreće na teoreme koje izvodi koristeći pojmove, aksiome i postulate. U kasnijim dokazima koristi i prethodno dokazane tvrdnje, prema zakonitostima Aristotelova silogističkog niza.

Ono što je Aristotel nazvao zajedničkim i posebnim aksiomima (str.40 ovog rada) kod Euklida nalazimo kao aksiome i postulate. Aristotelovi zajednički aksiomi Euklidovi su aksiomi, a Aristotelovi posebni aksiomi Euklidovi su postulati. Manja razlika u terminologiji, ali vjerno slijeđenje metodologije.

Bitno je još jednom naglasiti da u takvom aksiomatskom sustavu iz prvotnih istina logički slijede izvedene što stvara isprepletenu mrežu znanja. Takav je aksiomatski sustav jednostavan, elegantan, čist i jasan. Tako dobiveno znanje je sustavno i jedinstveno. Sustavno jer se može izložiti aksiomatski, a jedinstveno jer sve istine izvodimo iz jednog skupa aksioma (Barnes, 1996).

Također, način na koji on gradi svoje teoreme strogo je deduktivan. Deduktivan je jer sve ostale pojmove koje definiramo logički deduciramo ili izvodimo iz osnovnih pojmova i aksioma. Bitno je da to činimo čisto logički, bez pozivanja na intuiciju ili empiriju. To je način za koji je Aristotel rekao da sigurno čuva istinu te možemo biti sigurni da su nam zaključci istiniti ukoliko su istinite pretpostavke, što je Euklid smatrao jedinim dobrim načinom izgradnje matematike.

Nadalje, rekli smo da Aristotel kaže da znati nešto ne znači samo biti sposoban ponoviti činjenicu koju smo čuli ili pročitali. Znati nešto znači moći objasniti ili demonstrirati zašto je to tako, tj. pokazati da je predmet znanja konkluzija valjanog silogizma (str.43 ovog rada). Ovo je i način na koji Euklid dokazuje svoje teoreme. Euklid, doduše ne koristi formu silogizma niti kategorične sudove, ali jasno naznačuje na koje se prethodne pretpostavke i prethodno dokazane tvrdnje referira. Slijedeći Aristotelov predložak, tako nam Euklid demonstrira kako je do zaključaka došao i pokazuje da je put građenja njegova sustava put koji čuva istinu.

Zaključujemo, dakle, da je Aristotelova logika skela, način gradnje ili forma u koju je u Euklidovom djelu umetnuto tkivo, znanje ili sadržaj. Logika je kostur koji podržava nagomilano i do Euklida nesistematizirano matematičko znanje i daje mu preglednost i transparentnost. Od terminologije do načina izgradnje, Aristotelov utjecaj na Euklida je neporeciv, nezaobilazan i očit.

Također, Aristotelova logika nije utjecala samo na Euklida, ona je utjecala i na metodologiju drugih znanosti. Riječima Alberta Einsteina:

> Mi u staroj Grčkoj poštujemo kolijevku zapadne znanosti. Ovdje je po prvi put stvoreno misaono čudo logičkog sustava, čije su tvrdnje s takvom oštrinom proizlazile jedne iz drugih da je svaka od dokazanih tvrdnji bila van svake sumnje.[37]

[37] Radić, M. «O izgradnji geometrije i dokazi nekih ključnih teorema», Pedagoški fakultet u Rijeci, Rijeka, 1997, str. 3

5.3.2. EUKLID, PLATONIČAR ILI MOŽDA NE?

Kada govorimo o Platonovom utjecaju na Euklida, nailazimo na različita mišljenja. Postoje dva suprotna stava. Jedna strana kaže da Euklid ustvari nije platoničar, dok druga tvrdi da jest, i to pravi i prvi primjer jasne Platonove tradicije u matematici. U ovom ćemo dijelu govoriti o obje skupine argumenata. Pozabavimo se sada najprije argumentima u prilog tvrdnji da Euklid nije platoničar. Napomenimo također da to stajalište pretežno zastupaju matematičari i oni koji Elemente ne čitaju «filozofski», nego «matematički».

NEGACIJSKI ARGUMENTI:

- Sjetimo se prvo karakteristika matematike nabrojanih u odjeljku 5.1.2.1. Jedna od njih bila je ontološka obveza matematičkog diskursa. Dakle, karakteristika koja ide u prilog Platonovoj teoriji je ta da naš matematički govor implicira da mi govorimo o realno postojećim stvarima. Zastupnici stava da Euklid nije platoničar neće se prikloniti tom stavu. Oni, poput Aristotela, vjeruju da realistički diskurs ne govori ništa o stvarnom postojanju predmeta, tj. o njegovoj metafizici. Metafizički aristotelovci će reći da oblik diskursa ništa je govori o ontologiji pojma o kojemu je riječ, ne govori da li taj pojam zaista postoji ili ne (str.40 ovog rada). On govori samo o njegovim karakteristikama. Sjetimo se primjera sa Sherlockom Holmesom.

- Nadalje, sjetimo se problema univerzalija i raskola između Platona i Aristotela. Platon smatra da spoznaja počinje od općeg, a Aristotel da počinje od pojedinačnog. Autori poput Dadića (1992.) smatraju da je Euklid, po pitanju ontologije, više na Aristotelovoj nego na Platonovoj strani. Naime, kako smo rekli, početne postavke, aksiomi, postulati i temeljni pojmovi, ne dokazuju se. Oni su postavljeni kao direktno i intuitivno jasni. Intuicija je ovdje ključan pojam. «Prostorna intuicija», kako kaže Dadić. Cijeli je Euklidov aksiomatski sustav sazidan na temeljnim činjenicama koje nisu ništa drugo nego utemeljene na direktnom iskustvu i prostornoj intuiciji. Direktno iskustvo i osjetilna predodžba izvor su cijelog apstraktnog sustava. Po ovom uvjerenju, Euklidova geometrija nije stroga aksiomatska teorija izgrađena na hipotetičkim tvrdnjama već slika stvarnog svijeta podignuta na razinu apstraktnog.

> On [Euklid] je tim «definicijama», čini se, htio dati samo zornu predodžbu o apstraktnim osnovnim pojmovima, koji su apstrakcijom uzeti iz svakidašnjeg života.[38]

Euklid, prema Dadiću, smatra da nema ničeg pouzdanijeg od naše intuicije, pa ona mora opravdati sve polazne pretpostavke. Zbog toga cijela njegova geometrija nikad ne gubi kontakt s prostornom intuicijom ni osjetilnim svijetom na čijim temeljima se gradi. U ovoj, dakle, priči nigdje nema govora o platonističkom idealnom svijetu ideja. Osjet je temelj svega, a dedukcijska nadgradnja građena je na temeljima sazdanim od običnog osjeta.

Upitno je, ipak, koliko čvrstu potkrjepu ovaj argument nalazi u *Elementima*. Primjerice, Euklid definira točku kao nešto što nema dijelova. Do njega se, tradicionalno u grčkoj matematici, pojam točke povezivao s pojmom mjesta, s lokacijom.[39] Euklid se ne trudi očuvati tu tradiciju. Njegova se definicija zasniva na odbijanju povezanosti ideje točke s materijalnošću što je jasno povezano s Platonovom tradicijom.

- Sljedeći argument nije usmjeren direktno na filozofiju pod čijim utjecajem je Euklid gradio matematiku nego na koncept urođenog matematičkog znanja. Argument ide ovako. Platonova teorija kaže da postoje objektivno postojeći matematički objekti koji postoje realno i nezavisno od nas. Naše znanje o tim objektima je apriorno, tj. ne učimo o njima i zakonitostima koje među njima vladaju iz iskustva, nego nam je to znanje urođeno (sjetimo se teorije sjećanja). Također, postoji euklidska geometrija za koju neki smatraju da opisuje taj idealni svijet matematičkih predmeta. Euklidska geometrija, prema tome, trebala bi biti izvjesna, sigurna, neosporiva i nepromjenjiva budući da opisuje stvarnost koja je idealna i nepromjenjiva. No, kako je onda moguće da postoje neeuklidske geometrije? Ispočetka je to bio skup teorija koje su dolazile do konzistentnih, ali kontraintuitivnih rezultata. No Riemann i drugi matematičari upravo te nove geometrije vide kao pravo znanje koje opisuje objektivnu stvarnost. Koja, je, dakle geometrija nužna apriorna spoznaja koje se naša duša sjeća? Koja od geometrija vjerno opisuje Platonovu idealnu matematičku stvarnost? Budući da nemamo konačnog odgovora na to pitanje,

[38] Volenec, V. iz pogovora *Elementima*, Euklid: «Elementi I-VI», KruZak, Zagreb, 1999., str. 239

[39] U staroj grčkoj su se koristile dvije riječi za točku: *stigme* i *semeion*, obje povezane s pojmom mjesta: *stigme* = ubod, mjesto gdje je strijela prodrla u tijelo; *semeion* = znak, oznaka mjesta.

možda je najbolje odbaciti koncept urođenog matematičkog znanja.[40] A ako taj koncept odbacimo, onda moramo odbaciti i ideju Euklidova sustava kao utemeljenog na apriornom matematičkom znanju.[41]

Ovakva su promišljanja u pogledu Euklidovog rada malobrojna. Većina filozofa matematike ipak smatra da je Euklidova matematika pravi primjer matematike pisane u duhu Platonove filozofije. Spojimo dakle do sada rečeno o Platonu i Euklidu i razmotrimo argumente u prilog Euklida kao platoničara.

AFIRMACIJSKI ARGUMENTI:

➢ Vratimo se još jednom na karakteristike matematike navedene u odjeljku 5.1.2.1. Vidjeli smo na koji ih način objašnjava Platonova filozofija. Uvrstimo sada u tu jednadžbu i konkretni matematički sustav, onaj Euklidov.

Unatoč činjenici da smo na pretprošloj stranici naveli aristotelovsko pobijanje značaja realističkog diskursa u matematici, on nije potpuno neznakovit. Euklid o matematičkim predmetima i činjenicama govori kao da vjeruje da oni realno postoje, to je neosporno, što nam daje za pravo barem pretpostaviti da je on to zaista, u duhu Platonove teorije, i vjerovao.

Nadalje, što se tiče idealnosti matematičkih predmeta, Euklidova nam metodologija govori da on vjeruje da su matematički objekti apstraktni, idealni i da nisu u doticaju sa osjetilnim svijetom koji nas okružuje. U njegovu djelu nigdje ne nailazimo na konkretne primjere niti na slučajeve primjenjive u praksi. On, također, dokaze ne gradi na empiriji nego na čisto apstraktnoj razini (dakle, da je zbroj kutova u trokutu 180° ne dokazuje tako da otkine vrhove školskog trokuta i pokuša ih složiti na ravnu crtu, nego se služi apstraktnim matematičkim pravilima).

S beskonačnošću Euklid, kao ni Platon, nema problema. Euklid s beskonačnim veličinama vješto barata, primjerice kada govori o paralelnim pravcima (koji se ne sijeku ni u beskonačnosti). Idealnom svijetu pojam beskonačnosti nije stran. S druge strane, da je Euklidov sustav baziran na iskustvenom svijetu, pojam beskonačnosti bio bi mu problematičan budući da je, kako smo rekli, naše iskustvo ograničeno.

---

[40] Vidi Šikić, Z.: «Filozofija matematike», Školska knjiga, Zagreb, 1995., str. 40

[41] Ovaj argument, naravno, ništa ne govori o tome što je Euklid vjerovao kada je pisao *Elemente* i koje su filozofske postavke na njega utjecale u njegovu matematičkom radu.

Euklidova je matematika i apriorna na platonistički način. Izgrađena je razmišljanjem matematičara (Euklida i njegovih prethodnika), a ne premjeravanjem njiva. Euklidova se matematika spoznaje, širi i razvija nezavisno od iskustva, čistim matematičarevim promišljanjima.

Euklidova je, kao i Platonova, matematika apstraktna i ne govori o fizičkom, materijalnom svijetu te preko njega ne može biti niti opovrgnuta, empirija joj nije prijetnja niti iz nje može proizaći protuprimjer za matematiku. Matematičke su ideje pouzdane dok je materijalna stvarnost promjenjiva, propadljiva i nepouzdana.

Euklidova je matematika i primjenjiva. Njegova je geometrija stoljećima i tisućljećima bila glavno sredstvo za premjeravanje i proračunavanje udaljenosti u osjetilnom svijetu. Ipak, to ne znači da nije idealna i pretpostavljena materiji. Kako rekosmo, materijalna stvarnost emanira iz idealne matematičke. Idealni svijet determinira onaj materijalni. Tako primjenjivost, Euklidova geometrija i Platonova filozofija mogu koegzistirati bez kontradikcije.

Euklidov sustav, dakle, nigdje nije u koliziji s objašnjenjima koja Platonova teorija daje u pogledu karakteristika matematike te nam to dopušta da zaključimo da Euklid zaista jest platoničar u punom smislu riječi.

- Sljedeći argument da Euklid jest platoničar nalazimo u činjenici da je za cilj cijelog djela *Elementi* postavio konstrukciju Platonovih pet pravilnih tijela: tetraedra, heksaedra, oktaedra, dodekaedra i ikozaedra (slika 11). Veliko finale djela, trinaesta knjiga, bavi se upisivanjem pravilnih platoničkih tijela u sferu. Bilo bi zaista čudno, u najmanju ruku, da se odlučio baviti Platonovim pravilnim tijelima, a da gaji stavove suprotne Platonovoj filozofiji. To nam daje pravo da zaključimo, ponovno, da jest platoničar.

- Nadalje, činjenicu da je Euklid platoničar iščitavamo i iz njegova nevoljkog korištenja pojma gibanja. Platonove savršene ideje su stalne, neuništive i nepromjenjive, statične su. U Platonovu idealnom svijetu nema gibanja. Kod Euklida uočavamo da je, kad je god to bilo moguće, izbjegao pozivati se na gibanje. Umjesto vrlo jednostavnog konstruiranja pomoću gibanja, on se radije odlučivao za komplicirane i dugačke izvode i konstrukcije koje ne uključuju gibanje.

Ipak, u slučajevima kada se gibanje ne može izbjeći, Euklid ga primjenjuje (primjerice, u četvrtoj propoziciji o sukladnosti dvaju trokuta). Gibanje je pojam koji se u geometriji često spominje i koristi. Primjerice, i kružnica nastaje tako da se vrh šestara giba oko središta. Bez gibanja ne možemo konstruirati ni kružnicu . Ipak, to ne proturječi stavu da je Euklid platoničar. Gibanje koje koristimo u osjetilnom svijetu, koje geometričar koristi kada zorno prikazuje zakonitosti geometrije, samo su sjene i nadomjesci idealnih objekata. Iako nesavršene, one odražavaju i predstavljaju ideje. Geometričar umom zahvaća ono što njegove oči naziru kada gleda nacrtanu kružnicu. Također, nesavršena nacrtana kružnica koja je konstruirana pomoću gibanja nije prijetnja čistoći idealne kružnice.

➢ Daljnji se argument za Euklida kao platoničara temelji na njegovu shvaćanju i definiranju pojma točke. Iz Euklidova djela može se iščitati da on ima predodžbu točke kao objekta sa dvije razine apstrakcije. Jedna je razina ona u definiciji: «Točka je ono što nema dijela.»[42] Posve općenito i ekvivalentno Platonovoj ideji. Također, postoji beskonačno mnogo primjera pojedinačnih, konkretnih točaka na drugoj razini apstrakcije: «točka A», «točka B»… One su ekvivalentne Platonovim pojavama u kojima se ozbiljuje dio ideje. U svakom teoremu situacija se navodi najprije općenito, a poslije se konkretizira. Dvije razine apstrakcije, dakle, javljaju se u svakom teoremu. Opća točka, ona na višoj razini apstrakcije ili prauzrok svih pojedinačnih točaka, nije određena položajem, dok pojedinačna, ona na nižoj razini apstrakcije, jest. Također, za razliku od njegovih prethodnika matematičara (koji su točku definirali kao mjesto), Euklid odbija povezati točku s materijalnošću, što nam također govori da je sljedbenik Platonove filozofije.

➢ Razmotrimo i posljednji argument u prilog tezi da je Euklid pisao *Elemente* u duhu Platonove filozofije. U pretprošlom paragrafu vidjeli smo da su zorni prikazi i nesavršeni oblici konstruiranja u osjetilnom svijetu dopušteni budući da je osjetilni svijet samo odraz i pripomoć u shvaćanju idealnog. Tako dolazimo i do problema crteža u Elementima. Naime, činjenica da se Euklid služi crtežom da dočara, pokaže i približi čitatelju ono izrečeno mogla bi se protumačiti kao nešto što nije kompatibilno s Platonovom filozofijom. No to nipošto nije tako. Štoviše, to i jest Platonova tradicija. I Platonov lik Sokrat u Menonu Menonovu robu crtežom dočarava problem o kojem razgovaraju. I kod Euklida, crtež se pojavljuje kada treba

[42] Euklid: «Elementi», KruZak, Zagreb, 1999., str. 1

vječnu istinu približiti čitatelju, i to uvijek u drugom dijelu dokaza, kako bi doprinio jasnoći. U Platonovoj tradiciji, crtež se nikada ne pojavljuje tamo gdje se iskazuju vječne istine o nepromjenjivom svijetu ideja.

> Niti jedan od 14 aksioma, niti jedna od 113 definicija, a i niti jedan od više od 500 općenitih izraza (tvrdnji, zaključaka, tema) nije ilustriran crtežom. […] Crtež ne primjenjuje u svijetu ideja i ostaje tek pomoćnik koji omogućuje čovjeku bolje sačuvati u saznanju predodžbe onoga što se razmatra. Crtež ne govori o svijetu planimetrije, on ga samo približuje.[43]

Zaključimo, dakle, i ovo posljednje poglavlje u kojemu smo pokazali na koji je način filozofija utjecala na Euklidov rad. Rekli smo da utjecaj Aristotelove logike nikako nije sporan i potpuno je očigledan. Utjecaj Platona je onaj koji je bio stavljan pod znak upitnika. No mišljenje da Euklid nije platoničar poprilično je egzotično u filozofskim krugovima. Nakon što smo naveli argumente u prilog objema tezama, moramo priznati da su argumenti za Euklida kao platoničara jači. Uzmimo u obzir i činjenicu da je Euklid svoje obrazovanje stekao u Platonovoj Akademiji i da je odgojen u duhu idealne matematike Platonovog tipa. Ipak, prepuštam čitatelju da sâm zaključi koje mu je stajalište bliže.

[43] Znam, Š. i dr. «Pogled u povijest matematike», Tehnička knjiga, Zagreb, 1989., str. 74

6. ZAKLJUČAK:

Cilj ovog rada bio je ući u dio problematike filozofije matematike i pozabaviti se nekim njezinim područjima. Euklid, Platon i Aristotel stoje u počecima razmatranja matematike kao predmeta zanimljivog filozofiji. Platon je, možemo reći, uz Zenona iz Eleje, prvi pravi filozof matematike, prvi koji se na filozofski način pozabavio pitanjima koja su kasnije prerasla u područja proučavanja filozofije matematike. On je prvi promišljao o ontološkom statusu matematičkih predmeta i bio začetnik nove grane filozofije.

Teme koje smo u ovom radu načeli povoji su onoga što će se u ovom području razvijati u narednim stoljećima. Iz njih će se, kasnije, razviti problem univerzalija koji će biti centralni problem u srednjem vijeku, a taj će predmet stoljećima kasnije na precizniji i argumentiraniji način razviti moderni matematičari i filozofi matematike.

Unatoč problemima koji iz njih izviru, *Elementi* su neosporno neizmjerno važno matematičko djelo, kako u području matematike tako i u području filozofije matematike, čemu svjedoči i činjenica da nakon svih ovih stoljeća još nije palo u zaborav.

Razlog zbog kojega sam se odlučila baviti ovom prvom, startnom fazom filozofije matematike, a ne modernom i razvijenom, je taj što smatram da su počeci svake znanosti izuzetno važni. A starogrčki začeci znanosti dali su temelje ne samo filozofiji i filozofiji matematike nego cjelokupnoj zapadnoj kulturi. Temelji koje su stari Grci udarili odredili su put i smjer kretanja zapadne civilizacije i to ih čini neizmjerno bitnima.

Također, način na koji antički mislioci grade znanost mnogo je bliži izvornom ljudskom načinu razmišljanja. Kao što je Aristotelova logika svakodnevna logika, logika zdravog razuma (za razliku od simboličke logike rezervirane za uski krug intelektualaca), tako su i starogrčka filozofija i matematika grane znanosti koje na način pristupačan svima objašnjavaju bitne stvari. Starogrčki je način promišljanja, stoga, i estetski primamljiviji, što je također jedan od razloga zašto sam se odlučila baviti tim periodom u ovom radu.

Za kraj još samo jedna opaska o vezi filozofije i matematike, dva područja koja sam pokušala spojiti u ovom radu. Na prvi pogled može se učiniti da filozofija i matematika nemaju pretjerano mnogo dodirnih točaka. Ipak, iako su im područja rada vrlo različita, matematičari i filozofi jedni od drugih mogu mnogo naučiti. Matematičar, baveći se filozofijom, može ući dublje u temelje svojeg predmeta izučavanja, a filozof od matematičara može naučiti zakonitosti čvrstog i nedvosmislenog dokazivanja. I Platon je rekao da onaj koji nije učio geometriju ne može očekivati da će uspjeti proniknuti u druge istine. Naposljetku,

> [u]čenik koji se nije uspio upoznati s geometrijskim dokazima, propustio je najbolje i najjednostavnije primjere pravilnog dokazivanja i propustio najbolju priliku da usvoji ideju strogog zaključivanja. Bez te ideje on neće imati pravo mjerilo kojim bi mogao uspoređivati razne tvrdnje i tobožnje dokaze na koje će u životu nailaziti.(G. Polya)[44]

[44] Radić, M.: «O izgradnji geometrije i dokazi nekih ključnih teorema», Pedagoški fakultet u Rijeci, Rijeka, 1997., str.52

LITERATURA:

1. Aristotel: *Metafizika*, Liber, Zagreb, 1985.
2. Barbarić, D.: *Grčka filozofija*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
3. Barnes, J.: *Aristotel*, KruZak, Zagreb, 1996.
4. Berčić, B.: *Filozofija bečkog kruga*, KruZak, Zagreb, 2002.
5. Brown, J. R.: *Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, London and New York, 1999
6. Dadić, Ž.: *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
7. Devitt, M. i Sterelny, K.: *Jezik i stvarnost: uvod u filozofiju jezika*, KruZak, Zagreb, 2002.
8. Euklid: *Elementi I-VI*, KruZak, Zagreb, 1999.
9. Godfrey-Smith, P.: *Theory and reality: An Introduction to the Philosophy of Science*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 2003
10. Kovač, S.: *Logika*, Hrvatska sveučilišna naklada, Zagreb, 1999.
11. Lelas, S. i Vukelja, T.: *Filozofija znanosti – s izborom tekstova*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.
12. Mintaković, S.: *Neeuklidska geometrija Lobačevskog*, Školska knjiga, Zagreb, 1972.
13. Platon: *Državnik I Sedmo pismo*, Kruzak, Zagrfeb, 1997.
14. Platon: *Menon*, KruZak, Zagreb, 1997.
15. Platon: *Fedon*, Naklada Jurčić, Zagreb, 1996.
16. Radić, M.: *O izgradnji geometrije i dokazi nekih ključnih teorema*, Pedagoški fakultet u Rijeci, Rijeka, 1997.
17. Raeper, W. i Smith, L.: *Kratka povijest ideja: prekretnice u povijesti ljudske misli*, Mozaik knjiga, Zagreb, 2001.
18. Shapiro, S.: *Thinking about Mathematics: the Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press Inc., New York, 2000
19. Šikić, Z.: *Filozofija matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
20. Trobok, M.: *Platonism in the Philosophy of mathematics*, Filozofski fakultet u Rijeci, Rijeka, 2006.

21. Windelband, W.: *Povijest filozofije, sv.1*, Naprijed, Zagreb, 1990.

22. Znam, Š. i dr.: *Pogled u povijest matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

23. Zovko, J.: *Ogledi o Platonu*, Naklada Jurčić, Zagreb, 1998.

24. Stanford Encyclopedia of Philosophy, by The Metaphysics Research Lab Stanford University, 2005.

25. The Internet Encyclopaedia of Philosophy, James Fieser, Ph.D., founder and general editor, 2005

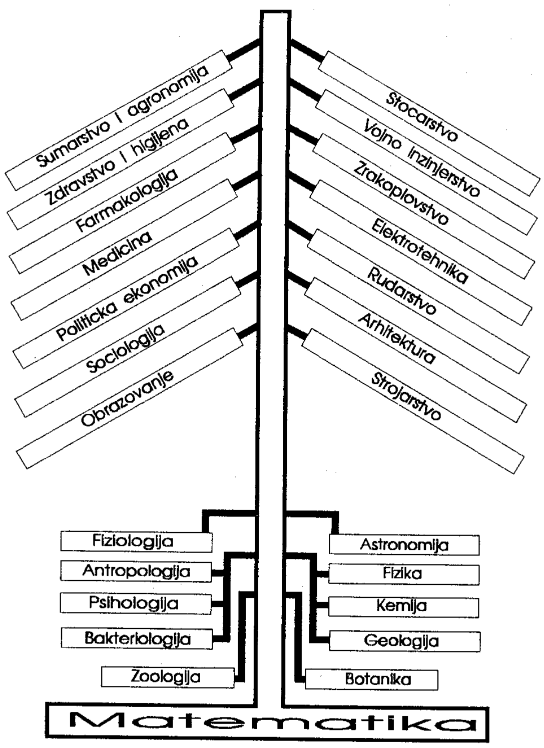
26. http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html - D. E. Joyce, Clark University, Worcester, Massachusetts, USA, June 1997

27. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Euclid.html - School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, January 1999

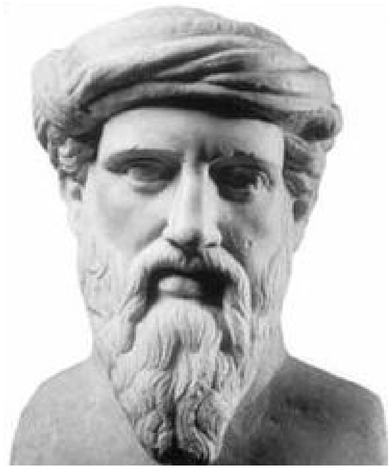
PRILOZI:

Slika 1: matematika u korijenu drva znanosti

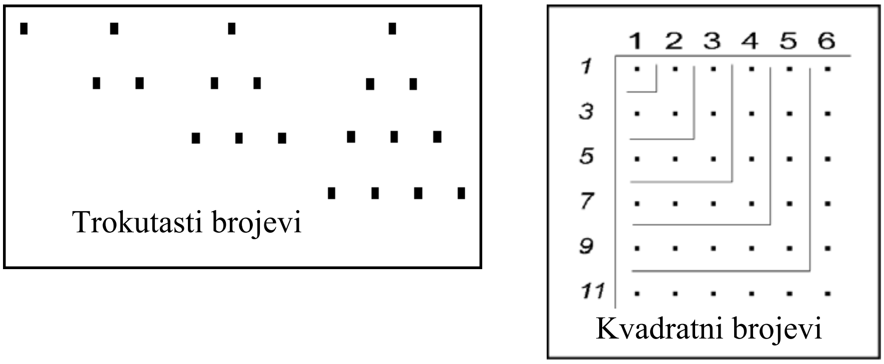
Preuzeto iz Radić, M.: O izgradnji geometrije i dokazi nekih ključnih teorema, Pedagoški fakultet u Rijeci, Rijeka, 1997., str. II



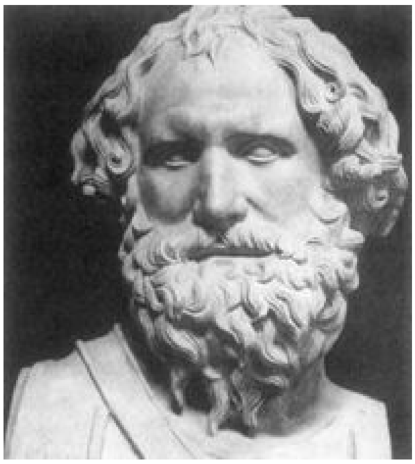
Slika 2: **Pitagora**



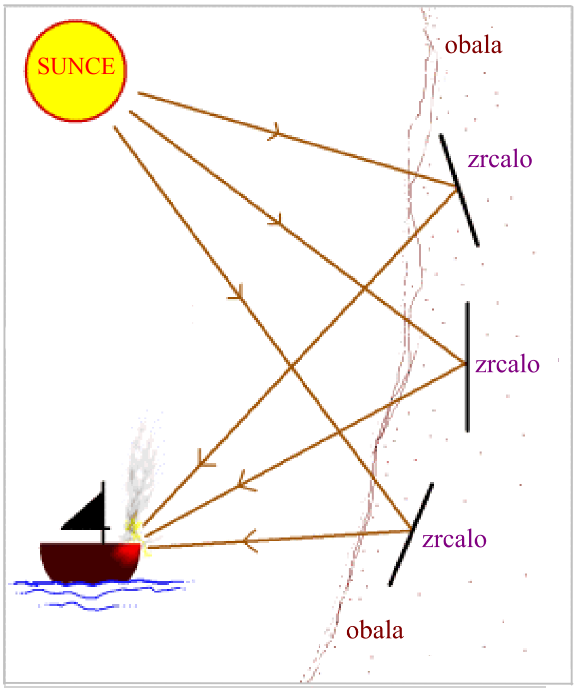
Slika 3: **psefosi i figurativni brojevi**



Slika 4: **Arhimed**

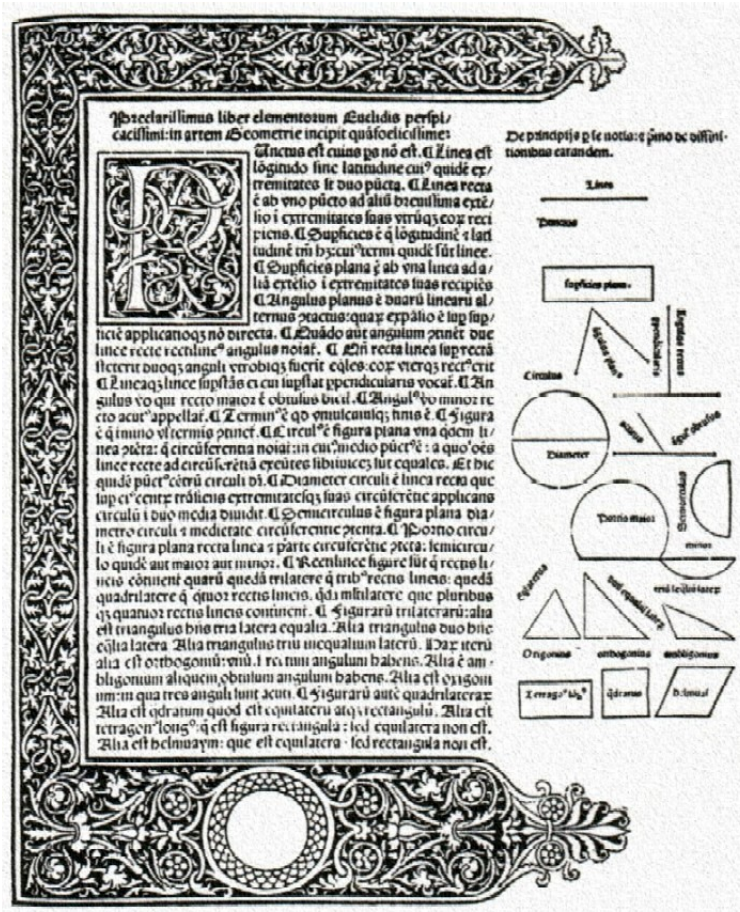


<u>Slika 5:</u> Arhimedov sustav obrane zrcalima

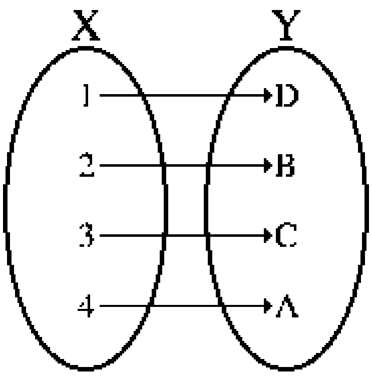


<u>Slika 6:</u> Euklid

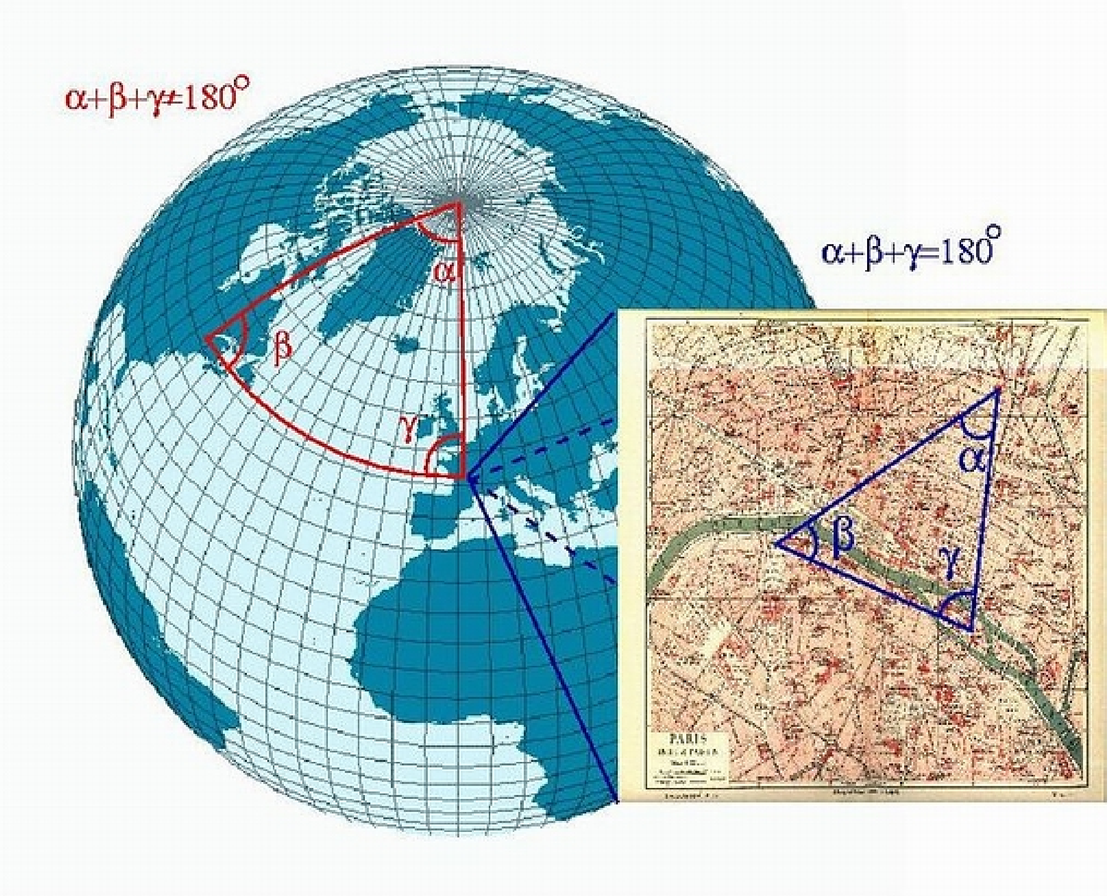
<u>Slika 7:</u> stranica iz srednjovjekovnih «Elemenata»



<u>Slika 8:</u> bijektivno 1-1 preslikavanje
Svakom elementu domene (X) pridružen je jedan i samo jedan element kodomene (Y).



<u>Slika 9:</u> sferna nasuprot euklidskoj geometriji



<u>Slika 10:</u> Platon i Aristotel

<u>Slika 11:</u> pet pravilnih Platonovih tijela – oktaedar, tetraedar, dodekaedar, kocka i ikosaedar

Preuzeto iz Dadić, Ž.: Ideja i metoda u matematici, Školska knjiga, Zagreb, 1992., str. 30