

# **PRIMJENA MARKOWITZEVE TEORIJE NA TRŽIŠTE DIONICA ZAGREBAČKE BURZE**

## **THE APPLICATION OF MARKOWITZ PORTFOLIO THEORY ON ZAGREB STOCK EXCHANGE**

**SAŽETAK:** U kontekstu razvoja hrvatskog tržišta kapitala promatranje kretanja prinosa i rizika vrijednosnih papira korištenjem različitih metoda empirijske analize sve više dobivaju na značaju. Porastom broja vrijednosnih papira koji kotiraju na tržištu kapitala te, što je mnogo važnije, porastom volumena njihove trgovine investitori dobivaju nove mogućnosti ulaganja svojih sredstava radi diverzifikacije rizika. Termin portfolio analiza, kojeg je u ekonomsku teoriju uveo Harry Markowitz, nije nov u stručnoj literaturi dostupnoj u Hrvatskoj. Međutim, bilo da govorimo o radovima domaćih ili inozemnih autora, pretežito se analize zasnivaju na primjeru razvijenih tržišta kapitala. Rijetki su slučajevi primjene instrumentarija portfolio analize na hrvatsko tržište kapitala.

**KLJUČNE RIJEČI:** Portfolio teorija, Harry Markowitz, efikasna granica, tržišni rizik, Zagrebačka burza, diverzifikacija.

**ABSTRACT:** In the context of the development of croatian capital market observing movement of return and risk of securities through time using various methods of empirical analysis is becoming more and more important. The growth of number of stock that quote on the capital market, and what is more important, the growth in their trading volume, enables investors to diversify risk. The term portfolio analysis, which was introduced in economic theory by Harry Markowitz, is not new in financial literature available in Croatia. However, there are few examples of the application of the portfolio analysis tools on the Croatian capital market.

**KEYWORDS:** portfolio theory, Harry Markowitz, the efficient frontier, market risk, Zagreb stock exchange, diversification.

## **1. UVOD**

Markowitzeva teorija /10/ fokusirana je na pronalaženje optimalnog portfolija vrijednosnih papira. Općenito, portfolio je kombinacija rizične (realne i financijske) imovine koju posjeduje pojedinac ili tvrtka s ciljem ostvarivanja prihoda. Portfoliom u kontekstu financija smatra se portfolio u investicijskom smislu, dakle, portfolio vrijednosnih papira /1, str. 52./. U odabiru portfolija vrijednosnih papira dva su osnovna parametra koje investitor promatra: prinos i rizik. U ovom radu je istraženo u kojoj mjeri se postavke Markowitzeve teorije mogu primijeniti na tržište dionica Zagrebačke burze, tj. u kojoj mjeri je moguće postići redukciju rizika portfolija (diverzifikaciju). Pritom diverzifikacija predstavlja kombiniranje vrijednosnih papira na način koji će umanjiti relativni rizik /18, str. 53./, tj. rizik portfolija vrijednosnih papira. Odnosno, radi se o postupku kombiniranja rizične imovine radi smanjivanja ukupnog rizika kojemu je investitor izložen.

Na početku su radi vremenskog, prostornog i pojmovnog definiranja statističkog skupa dani osnovni podaci o hrvatskom tržištu kapitala. Zatim su navedeni kriteriji odabira vrijednosnih papira za analizu. Pritom je ključna bila uloga rizika te su u tu svrhu spomenuti najznačajniji rizici u poslovanju s vrijednosnim papirima.

U drugom dijelu rada su nakon prikaza formula za izračun parametara korištenih u analizi primijenjene metode empirijske analize u skladu sa postavkama Markowitzeve teorije, a na temelju podataka o očekivanim prinosima i rizicima odabranih dionica koje kotiraju na Zagrebačkoj burzi u razdoblju od 31. prosinca 1999. do 1. srpnja 2005. godine s ciljem ocjene mogućnosti diverzifikacije portfolija.

Na samom kraju rada dan je osvrt na mogućnosti daljnje razrade modela i njegovog prilagođavanja prilikama na hrvatskom tržištu kapitala.

## **2. TRŽIŠTE KAPITALA U REPUBLICI HRVATSKOJ**

Hrvatsko tržište kapitala je jedan duži period nakon svog osnivanja bilo slabo razvijeno. Možemo reći da je de facto postojalo samo na papiru i u zakonima, a da nije ispunjavalo svoje osnovne funkcije /12, str. 7-11./ :

1. Pribavljanje kapitala potrebnog za financiranje poslovanja i ekspanzije poduzeća
2. Tržišno vrednovanje poduzeća
3. Mobiliziranje decentralizirane štednje u privredne svrhe
4. Povećanje stupnja mobilnosti investicija (omogućuje investitorima održavanje potrebne razine likvidnosti kupnjom i prodajom vrijednosnih papira)

Drugim riječima, nisu stvoreni uvjeti za povezivanje ponude i potražnje vrijednosnih papira (funkcija burze prema Zakonu o tržištu vrijednosnih papira /19, str. 41./). Razlozi tome su bili i na strani ponude (nedovoljan broj dionica zanimljivih kupcima) i na strani potražnje (pomanjkanje investitora).

Osnovni uzrok neatraktivnosti dionica u kontekstu portfolio analize je bila netransparentnost poslovanja poduzeća, mali broj dionica i njihova nelikvidnost. Nelikvidnost se očituje u broju dana netrgovanja koji je za većinu dionica bio jako velik. Uključivanjem takvih dionica nije se mogla postići zadovoljavajuća diverzifikacija rizika portfolija te su se takve dionice u pravilu kupovale u spekulativne svrhe.

Prijelomna točka je bilo donošenje Zakona o tržištu vrijednosnih papira koji je stupio na snagu 25. srpnja 2002. godine. Stroge odredbe toga zakona su "prisilile" velik broj poduzeća ustrojenih kao dionička društva da "izađu" (*going-public*) na burzu, tj. da ispune uvjete za kotiranje u nekoj od kotacija burze. Sama po sebi ova odredba, tj. sama činjenica da poduzeće kotira na burzi ne bi mnogo značila za razvoj tržišta kapitala. Međutim, kotiranje na burzi obvezuje dionička društva na ispunjavanje određenih uvjeta kao što su periodično objavljivanje financijskih izvještaja kao osnove razumijevanja sigurnosti i uspješnosti poslovanja poduzeća, što bi trebali biti glavni čimbenici odluke investitora o kupnji ili prodaji dionica. Prema tome, povećanje ponude vrijednosnih papira kao i poboljšana transparentnost njihovih izdavatelja u kombinaciji sa liberalizacijom (izmjena Zakona o deviznom poslovanju) i ulaskom jakih institucionalnih investitora (banke, investicijski fondovi, mirovinski fondovi, osiguravajuća društva...), tj. porastom potražnje za vrijednosnim papirima dalo je snažan zamah razvoju hrvatskog tržišta kapitala u vidu značajnog porasta prometa, tržišne kapitalizacije, broja transakcija, burzovnih indeksa i cijene dionica na burzama.

### **3. ODABIR VRIJEDNOSNIH PAPIRA ZA ANALIZU**

Predmet analize, tj. vrijednosni papiri koje će biti korišteni u konstrukciji portfolija su obične dionice. Pritom, predmet promatranja neće biti svih 195 dionica koje su uvrštene na Zagrebačku burzu (ožujak 2006) već će prema određenim kriterijima njihov broj biti reduciran. Razlog za to jest pojednostavljenje analize i izračuna, ali i u teoriji uvriježen stav da se povećanjem broja dionica iznad određenog broja efekt diverzifikacije umanjuje.

Pri donošenju odluke o broju dionica u portfoliju najvažniji čimbenik je utjecaj broja dionica na razinu rizika portfolija, tj. mogućnost da se povećanjem broja dionica taj rizik

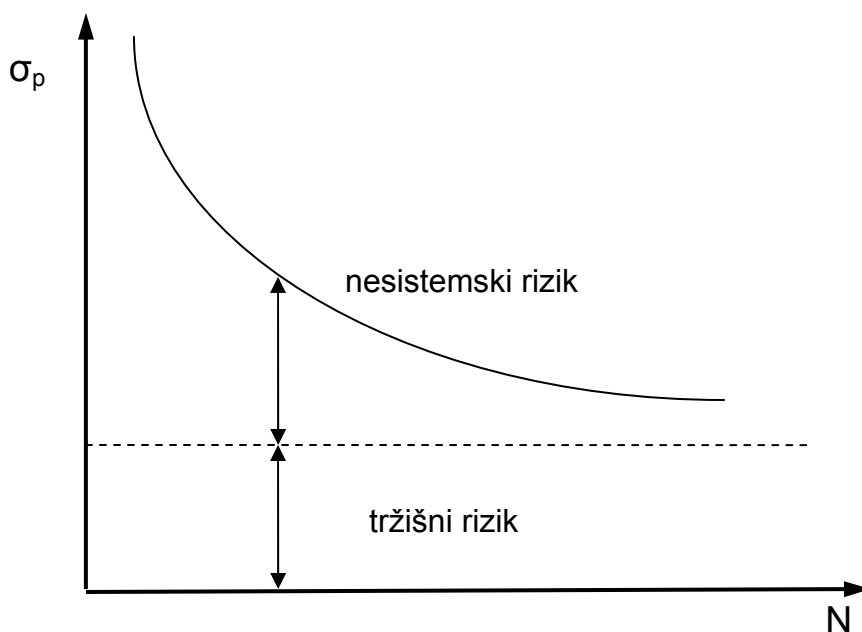
smanji. Drugim riječima, investitoru nije primarna rizičnost pojedine dionice, već doprinos rizika dionice rizičnosti portfolija /15, str. 2./ .

Rizik se definira kao neizvjesnost budućeg ishoda odnosno kao poznavanje nekog stanja u kojem se kao posljedica neke odluke može pojaviti niz rezultata. Pritom je donositelju odluke poznata vjerojatnost ostvarivanja svakog pojedinog rezultata. Investitori su suočeni sa brojnim rizicima: tržišni, kreditni, tečajni, operativni, politički, rizik nelikvidnosti... U poslovanju s dionicama najznačajniji je tržišni rizik, tj. neizvjesnost u promjeni cijene vrijednosnih papira (volatilnost). Uz tržišni rizik, u Hrvatskoj je dugo vremena bio jako značajan rizik nelikvidnosti. Rizik nelikvidnosti može se mjeriti promatranjem raspona između kupovne i prodajne cijene (*bid-ask spread*). Tržišni rizik je najlakše identificirati i kvantificirati jer se cijene vrijednosnih papira bilježe pri svakoj transakciji. Najčešći uzroci promjene cijene dionica su nesklad ponude i potražnje, objava poslovnih rezultata, spajanja i akvizicije poduzeća te promjena kamatnih stopa.

Ukupni rizik dionice ili nekog drugog vrijednosnog papira možemo podijeliti na dvije komponente (slika 1.):

- Sistematski (tržišni)
- Nesistematski (specifični) – rizik tvrtke

**Slika 1. Tržišni i nesistemski rizik**



Diverzifikacijom možemo umanjiti i eliminirati specifični rizik kroz ulaganje u dionice kompanija iz različitih grana gospodarstva. Međutim, diverzifikacijom ne možemo otkloniti

tržišni rizik (stoga je za dobro diverzificiran portfolio tržišni rizik jedini bitan rizik). To je razlog da se efekt diverzifikacije povećanjem broja dionica iznad određenog broja smanjuje. Stav o konkretnom broju dionica kada se to događa se razlikuje od autora do autora. Kombinirajući različite izvore /4, 14, 18/, odlučio sam da će broj izabranih dionica biti između 10 i 15.

### **3.1. Kriteriji odabira dionica**

Pri izboru dionica primjenjeni su slijedeći kriteriji:

- Da se radi o dionicama koje su uvrštene na Zagrebačkoj burzi u jednu od kotacija
- Da se radi o dionicama uključenima u CROBEX indeks, službeni dionički indeks Zagrebačke burze
- Sukladno prethodnom kriteriju, da zadovoljavaju uvjete potrebne za uključenje u CROBEX
- Dovoljno velika tržišna kapitalizacija
- Dovoljno velika vremenska serija (minimalno 450 podataka), odnosno kako se likvidnost ocjenjuje brojem dana trgovanja, da se radi o likvidnim dionicama
- Da se radi o dionicama koje su na burzu uvrštene do 2001. godine

CROBEX je službeni dionički indeks Zagrebačke burze. Burza ga je počela objavljivati 1. rujna 1997. godine. Bazni datum je 1. srpnja 1997. godine, a bazna vrijednost 1.000 bodova. Osim kao jedan od kriterija odabira dionica, CROBEX indeks ću koristiti i u analizi kao zavisnu varijablu. To sam učinio jer u pravilu na svjetskim burzama službeni burzovni indeksi mjere prinos tržišta i služe kao referentne vrijednosti kod analiza. Npr. u SAD to su S&P, Dow Jones i Nasdaq, u Japanu Nikkei, u Njemačkoj DAX, u Ujedinjenom Kraljevstvu FTSE 100.

Dionice trebaju zadovoljiti sljedeće uvjete da bi bile uključene u CROBEX:

- Likvidnost – dionicama se trgovalo u više od 75% ukupnog broja trgovinskih dana u promatranom razdoblju ili se nalaze među prvih 25% dionica rangiranih prema broju trgovinskih dana
- Kotiranje na burzi više od šest mjeseci
- Tržišna kapitalizacija veća od medijana tržišne kapitalizacije dionica na zadnji dan promatranog razdoblja

### 3.2. Izabrane dionice

Navedene kriterije zadovoljilo je 11 dionica. Abecednim redom, zajedno sa njihovim simbolima i kotacijama, radi se o dionicama u tablici 1.

**Tablica 1. Dionice odabrane za analizu i njihova kotacija**

	<b>Simbol</b>	<b>Dioničko društvo</b>	<b>Kotacija</b>
1	ARNT-R-A	Arenaturist d.d.	Tržište JDD
2	ATPL-R-A	Atlantska plovidba d.d.	Tržište JDD
3	CROS-R-A	Croatia osiguranje d.d.	Službeno tržište
4	ISTT-R-A	Istraturist Umag d.d.	Službeno tržište
5	KOEI-R-A	Končar Elektroindustrija d.d.	Tržište JDD
6	KRAS-R-A	Kraš d.d.	Tržište JDD
7	PBZ-R-A	Privredna banka Zagreb d.d.	Tržište JDD
8	PLAG-R-A	Plava laguna d.d.	Tržište JDD
9	PLVA-R-A	Pliva d.d.	Službeno tržište
10	PODR-R-A	Podravka d.d.	Službeno tržište
11	RIVP-R-A	Riviera Holding d.d.	Usporedno tržište

Izvor: [www.zse.hr](http://www.zse.hr)

### 3.3. Prosječne mjesečne promjene cijena

Dva su osnovna izvora informacija koje investitor koristi u izgradnji svog portfolija /10, str. 3-14./ : povijesni podaci o učinku vrijednosnih papira te očekivanja o tim vrijednosnim papirima u budućnosti. U ovom radu naglasak je na povijesnim podacima uz pretpostavku da su povijesni podaci dobre procjene budućih kretanja. Od povijesnih podataka vezanih za dionicu (promet, kapitalizacija) za investitore je ključan podatak o kretanju tržišnih cijena dionica. Stoga se za odabrane dionice promatraju njihove zaključne dnevne cijene, a razdoblje promatranja je od 31. prosinca 1999. do 1. srpnja 2005. Kao što je to uobičajeno u teoriji, u analizi će biti korištene relativne promjene cijena dionica (prinose), a ne apsolutne promjene zbog njihovih različitih nominalnih vrijednosti kako bi u analizi one bile usporedive. Zbog različitog broja dana trgovanja kao i činjenice da se tim dionicama trgovalo u različite dane korištene su prosječne mjesečne promjene, a ne prosječne dnevne promjene. U tu svrhu primjenjeni su logaritamski prinosi koji su definirani na osnovu prirodnog logaritma omjera

cijena, odnosno kao razlika logaritmiranih vrijednosti varijabli koji se računa pomoću izraza (1) /17, str. 112./ .

$$R_{it} = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (1)$$

$R_{it}$  – logaritamski prinos  $i$  – te dionice u vremenu  $t$

$P_t$  – cijena dionice u vremenu  $t$

$P_{t-1}$  – cijena dionice u vremenu  $t - 1$

Na taj način dobivena je vremenska serija od 66 mjesečnih podataka nad kojima će biti provedena analiza. Dobivena vremenska serija (podaci o prosječnim mjesečnim cijenama) će se u analizi tretirati kao uzorak zbog pretpostavke o permanentnosti poslovanja /12, str. 34./, tj. vremenski neograničenom kontinuitetu poslovanja dioničkih društava. Samim time i dionice koje prezentiraju kapital dioničkog društva predstavljaju permanentne vrijednosne papire. Prema tome, osnovni skup (zaključne cijene dionica) je beskonačan. Stoga su i prikupljeni podaci (dana vremenska serija) uzorak iz takvog osnovnog skupa.

#### 4. PORTFOLIO ANALIZA

Portfolio analiza je usredotočena na pronalaženje optimalne kombinacije vrijednosnih papira. U odabiru portfolija dva su osnovna parametra na kojima investitor bazira svoj izbor: očekivani prinos i rizik. Nakon njihova izračuna u skladu sa postavkama teorije Harryja Markowitza biti će provedena empirijska analiza. Osnovne metode empirijske analize koje će biti primijenjene su korelacijska i kovarijančna analiza. Prije same empirijske analize navedene su formule korištene u izračunu ulaznih parametara analize.

##### 4.1. Procjena očekivanih<sup>1</sup> prinosa dionica i portolija

U portfolio analizi ključni dio je određivanje očekivanih prinosa<sup>2</sup> dionica za vremensko razdoblje držanja. Procjena očekivanog mjesečnog prinosa  $i$  – te dionice ( $R_i$ ) u promatranom razdoblju (66 mjeseci), srednja je vrijednost prosječnih mjesečnih prinosa u  $T$  vremenskih razdoblja. Izračunat je preko izraza (2), a na temelju prosječnih mjesečnih prinosa dobivenih pomoću izraza (1).

---

<sup>1</sup> Zbog pojednostavljenja pisanja kod izračuna parametara izostavio sam oznake očekivanih veličina  $E[]$ .

<sup>2</sup> U prinose nisam uključio dividende već samo kapitalne dobitke.

$$R_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{it} \quad (2)$$

$T$  – broj mjeseci = 66

$R_{it}$  – prosječni mjesečni prinos  $i$  – te dionice u vremenu  $t$

Očekivani mjesečni prinos portfolija ( $R_P$ ) koji se sastoji od  $n$  dionica je dan zbrojem očekivanih prinosa pojedinih dionica u portfoliju pomnoženih s odgovarajućim ponderima i računa se primjenom izraza (3).

$$R_P = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (3)$$

$w_i$  – učešće dionice u portfoliju

$n$  – broj dionica u portfoliju

#### **4.2. Procjena rizika ostvarivanja očekivanog prinosa dionice (rizik dionice) i portfolija (rizik portfolija)**

U trgovanju dionicama najznačajniji je tržišni rizik. Uobičajena metoda određivanja tržišnog rizika dionice je korištenje standardne devijacije vremenske serije povijesnih prinosa. Stoga se za očekivane vrijednosti rizika pojedine dionice uzimaju standardne devijacije prinosa koje se dobivaju iz varijanci /3, str. 356-357./, a koje se računaju primjenom izraza (4). Odstupanje ostvarenih od očekivanih prinosa izraženo je varijancom ( $\hat{\sigma}_i^2$ ), odnosno standardnom devijacijom ( $\hat{\sigma}_i$ , pozitivni drugi korijen iz varijance). Što je razlika stvarnog i očekivanog prinosa veća to je i rizik veći.

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{it} - R_i)^2 \quad (4)$$

Tržišni rizik portfolija je povezan s volatilnošću cijena vrijednosnih papira i korelacijama između različitih vrijednosnih papira. U skladu s time definiran je rizik portfolija /10, str. 19./. Očekivani rizik portfolija dan je očekivanim rizikom pojedinih dionica koje čine portfolio, očekivanim kovarijancama prinosa ( $\hat{\sigma}_{ij}^2$ ) između dionica i učešćem dionica u portfoliju kao što je navedeno u izrazu (5).



$$\hat{\sigma}_P^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \hat{\sigma}_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_i w_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \quad (5)$$

#### 4.3. Izračun korelacije i kovarijance među dionicama

Koeficijenti kovarijance i korelacije mjere međusobnu povezanost prosječnih mjesečnih prinosa od ulaganja portfolija. Procjene kovarijanci između pojedinih dionica dane su putem kovarijanci prosječnih mjesečnih prinosa te se računaju korištenjem izraza (6).

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{it} - R_i)(R_{jt} - R_j) \quad (6)$$

Koeficijenti korelacije ( $r_{ij}$ ) između dionica mogu se izračunati preko kovarijanci i standardnih devijacija prosječnih mjesečnih prinosa pomoću izraza (7).

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_i \sigma_j}, -1 \leq r \leq 1 \quad (7)$$

Koristeći izraze (6) i (7) možemo izračunati elemente kovarijančne i korelacijske matrice – koeficijente korelacije i kovarijance između CROBEX indeksa i prosječnih mjesečnih prinosa dionica, odnosno između prosječnih mjesečnih prinosa pojedinih dionica za promatrano razdoblje. Korelacijska matrica dana je u izrazu (8).

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{y1} & \dots & r_{yj} & \dots & r_{yK} \\ r_{1y} & 1 & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1K} \\ r_{2y} & r_{21} & \dots & r_{2j} & \dots & r_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{iy} & r_{i1} & \dots & r_{ij} & \dots & r_{iK} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{Ky} & r_{K1} & \dots & r_{Kj} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Gdje je  $r_{iy}$  koeficijent korelacije između stopa promjena zavisne varijable (u našem slučaju to je CROBEX indeks) i prosječnih mjesečnih prinosa  $i$  – te dionice (prvi redak i prvi stupac matrice). S druge strane,  $r_{ij}$  je koeficijent korelacije između prosječnih mjesečnih prinosa između  $i$  – te i  $j$  – te dionice (ostali reci i stupci). Na dijagonali korelacijske matrice ( $i = j$ ) su jedinice jer je koeficijent korelacije jedne varijable sa samom sobom uvijek jednak jedan.

Nepristrane procjene elemenata kovarijančne matrice dane su izrazom (9).

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{y1} & \dots & \sigma_{yj} & \dots & \sigma_{yK} \\ \sigma_{1y} & \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1j} & \dots & \sigma_{1K} \\ \sigma_{2y} & \sigma_{21} & \dots & \sigma_{2j} & \dots & \sigma_{2K} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \sigma_{iy} & \sigma_{i1} & \dots & \sigma_{ij} & & \sigma_{iK} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \sigma_{Ky} & \sigma_{K1} & \dots & \sigma_{Kj} & \dots & \sigma_{KK} \end{bmatrix} \left( \frac{n}{n-1} \right) \quad (9)$$

Kovarijančnu matricu sam pomnožio sa  $\frac{n}{n-1}$  kako bi dobio nepristrane procjene kovarijanci prinosa dionica. Na taj način na glavnoj dijagonali ( $i = j$ ) ćemo dobiti procjene varijanci stope promjene CROBEX indeksa te procjene varijanci prosječnih mjesečnih prinosa dionica. Ostali elementi matrice ( $i \neq j$ ) su kovarijance između stope promjena CROBEX indeksa i prosječnih mjesečnih prinosa dionica (u prvom retku i prvom stupcu kovarijančne matrice), odnosno kovarijance između prosječnih prinosa  $i$  – te i  $j$  – te dionice (u preostalim recima i stupcima).

## 5. IZRAČUN PARAMETARA ANALIZE

### 5.1. Izračun očekivanih prinosa i rizika

Očekivani mjesečni prinosi dionica izračunati na temelju izraza (2), kao i kolebanje cijena dionica (njihova volatilnost) izmjerena procjenom standardnih devijacija prinosa dionica, primjenom izraza (4) su prikazani u tablici 2.

**Tablica 2. Procjene očekivanog prinosa i rizika dionica u %**

	$R_i$	$\hat{\sigma}_i$
<b>ARNT</b>	2,2	20,3
<b>ATPL</b>	5,2	22,6
<b>CROS</b>	2,9	14,2
<b>ISTT</b>	3,4	13,2
<b>KOEI</b>	2,5	13
<b>KRAS</b>	2,5	11,8
<b>PBZ</b>	2,4	11,3
<b>PLAG</b>	2	22,2
<b>PLVA</b>	-0,4	8,5
<b>PODR</b>	1,7	9
<b>RIVP</b>	2,4	11,4

*Izvor: izračun autora*

## 5.2. Izračun korelacijske i kovarijančne matrice

Kovarijančne i korelacijske matrice izračunate su na temelju promatranja povezanosti vremenske serije od 66 podataka o mjesečnim postotnim promjenama zaključnih cijena dionica u razdoblju od 31. prosinca 1999. zaključno sa 1. srpnja 2005. Matrice su simetrične (kvadratne) jer kod kovarijančne matrice vrijedi da je:

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ji}^2 \quad (10)$$

A kod korelacijske matrice vrijedi izraz (11), zbog čega možemo izostaviti gornje vrijednosti matrice.

$$r_{ij} = r_{ji} \quad (11)$$

**Tablica 3. Korelacijska matrica**

	CROBEX	ARNT	ATPL	CROS	ISTT	KOEI	KRAS	PBZ	PLAG	PLVA	PODR	RIVP
CROBEX	1											
ARNT	0,250	1										
ATPL	0,278	0,367	1									
CROS	0,281	-0,026	-0,004	1								
ISTT	0,457	0,425	0,076	0,024	1							
KOEI	0,555	0,354	0,259	0,084	0,518	1						
KRAS	0,458	0,302	0,225	-0,007	0,484	0,383	1					
PBZ	0,398	0,162	0,323	0,171	0,016	0,129	-0,181	1				
PLAG	0,413	0,093	0,086	-0,054	0,051	0,221	0,169	-0,077	1			
PLVA	0,530	0,035	-0,133	0,065	0,181	0,209	0,125	0,038	0,205	1		
PODR	0,675	0,073	0,172	0,034	0,496	0,494	0,484	0,065	0,391	0,391	1	
RIVP	0,537	0,436	0,276	0,091	0,507	0,447	0,343	0,321	0,267	0,081	0,360	1

*Izvor: izračun autora*

Odabrane dionice su iz različitih sektora privrede: bankarski sektor, turizam, osiguravajuće društvo, prehrambena, farmaceutska industrija, elektroindustrija i brodski prijevoz. Time su ostvarene pretpostavke za diverzifikaciju ulaganja i redukciju rizika.

Kontraintuitivno, najveći koeficijent korelacije je ostvaren između dionica iz različitih sektora privrede, ISTT i KOEI (0,51), što znači da postoji pozitivna povezanost između prinosa tih dviju dionica. Drugim riječima, investitor može očekivati da će u slučaju ekspanzije gospodarstva obje dionice ostvarivati porast prinosa sličnog intenziteta odnosno u slučaju recesije gubitke sličnog intenziteta. Stoga će investitor koji želi smanjiti rizik kombinirati dionice sa što nižom, odnosno po mogućnosti sa negativnom korelacijom. Naime, u slučaju negativne korelacije prinosi dionica se kreću u suprotnom smjeru – kada jedna dionica ostvaruje gubitak, druga dionica ostvaruje prinos čime se reducira rizik.

### 5.3. Učešća dionica u portfoliju

Svaka dionica sudjeluje u portfoliju s ponderom  $w_i$  uz uvjet dan u izrazu (12).

$$\sum_{i=1}^{11} w_i = 1 \quad (12)$$

Nema posuđivanja dionica (*short-selling*) pa su stoga svi ponderi  $w_i$  pozitivne veličine /11, str. 78./.

$$w_i \geq 0 \quad (13)$$

Dodatno, ograničio sam maksimalna i minimalna učešća dionica u portfoliju te će ponderi poprimati vrijednosti u intervalu:

$$0,05 \leq w_i \leq 0,25 \quad (14)$$

#### 5.4. Empirijska analiza

Empirijska analiza (optimizacija portfolija) provedena je pomoću potprograma Solver ugrađenog u programski paket Microsoft Excel. Na temelju kovarijančne matrice i očekivanog prinosa i rizika dionica, uvažavajući ograničenja na učešća dionica (izvedenih iz postavki Markowitzove teorije) navedena u izrazima (12), (13) i (14) za određeni zahtijevani prinos, Solver je odredio učešća dionica u portfoliju za koja će se zahtijevani prinos ostvariti uz najmanji rizik, odnosno uz najnižu varijancu portfolija. Primjenom izraza (15) i kovarijančne matrice izračunate pomoću izraza (9) za učešća izračunata pomoću Solvera mogu se izračunati standardne devijacije prinosa portfolija ( $\hat{\sigma}_P$ ).

$$\hat{\sigma}_P^2 = w^T \cdot \hat{\Sigma} \cdot w \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}_P^2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_i & \dots & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} & \dots & \hat{\sigma}_{1j} & \dots & \hat{\sigma}_{1n} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22} & \dots & \hat{\sigma}_{2j} & \dots & \hat{\sigma}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{\sigma}_{i1} & \hat{\sigma}_{i2} & \dots & \hat{\sigma}_{ij} & \dots & \hat{\sigma}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{\sigma}_{n1} & \hat{\sigma}_{n2} & \dots & \hat{\sigma}_{nj} & \dots & \hat{\sigma}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

U tablici 4. su dani dobiveni rezultati odnosno portfoliji poredani prema njihovim očekivanim mjesečnim prinosima (od najmanjeg prema najvećem) zajedno sa procjenom rizika izračunatih portfolija kao i ponderima koje je na temelju postavljenih ograničenja izračunao Solver. Dobiveni rezultati ukazuju na ovisnost volatilnosti i očekivanih prinosa: porastom rizika investitori zahtijevaju veće prinose od vrijednosnih papira, što je u skladu sa postavkama Markowitzove teorije.

Dobrobit diverzifikacije (*diversification benefit*) kvantificirana je usporedbom razlika između ponderirane sume individualnih rizika i rizika portfolija (17) u tablici 4 gdje vidimo da je dobrobit diverzifikacije veća na većim razinama zahtijevanog prinosa.

$$\sum_{i=1}^{11} w_i \sigma_i - \sigma_p \quad (17)$$

**Tablica 4. Procjene očekivanog mjesečnog prinosa i rizika portfolija za izračunata učešća i dobrobit diverzifikacije u %**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ARNT	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
ATPL	5	5	5	5,19	6,76	13,87	17,01	20,16	23,3	25	25	25
CROS	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
ISTT	5	5	5	5	5	5	5	5	5	7,68	17,36	22,14
KOEI	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
KRAS	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
PBZ	5	5	13,27	25	25	5	5	5	5	7,32	5	5
PLAG	7,62	9,64	5	9,81	8,24	21,13	17,99	14,84	11,7	5	5	5
PLVA	7,38	5,36	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
PODR	25	25	21,73	5	5	5	5	5	5	5	5	5
RIVP	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	17,64	12,86
$R_p$	2,20	2,25	2,30	2,40	2,45	2,60	2,70	2,80	2,90	3,00	3,10	3,15
$\hat{\sigma}_p$	1,91	1,92	1,94	2,00	2,05	2,16	2,22	2,28	2,34	2,46	2,72	2,86
<i>benefit</i>	10,83	11,10	10,66	11,53	11,48	13,58	13,53	13,49	13,44	12,83	12,75	12,69

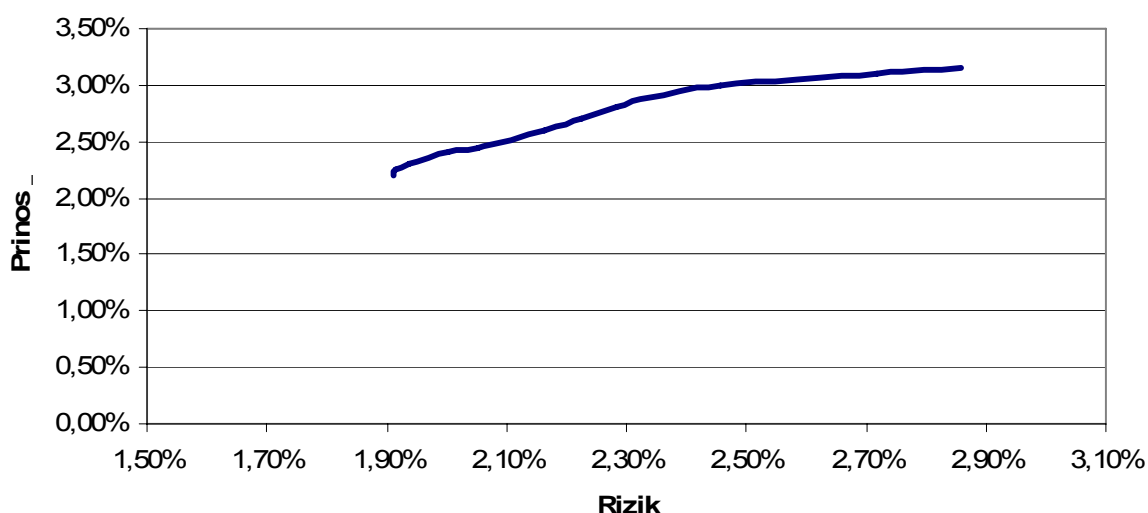
*Izvor: izračun autora*

Najveći očekivani primos ima dionica ATPL te je intuitivno bilo za očekivati da će porastom zahtijevanog prinosa portfolija rasti i učešće te dionice u portfoliju. Isto tako na nižim razinama rizika portfolija dominiraju dionice nižeg rizika (PODR i RIVP).

Na temelju kombinacija ulaganja može se nacrtati dijagram rasipanja kombinacija rizika i prinosa investicija. Uočava se određena pravilnost u razmještanju tih kombinacija te ih možemo povezati krivuljom koja je u financijskoj teoriji poznata pod nazivom efikasna

granica (slika 2). Efikasna granica sastoji se od skupa efikasnih portfolija, odnosno od kombinacija ulaganja koje uz određeni rizik obećavaju najveći prinos ili za neki dani prinos imaju najmanji rizik. Lijevo od efikasne granice ne nalaze se moguće kombinacije ulaganja jer nema takvih kombinacija koje bi obećavale veći prinos uz manji rizik. Desno se nalaze kombinacije ulaganja koje nisu optimalne, odnosno koje su inferiorne u odnosu na kombinacije na efikasnoj granici jer isti prinos ostvaruju uz veći rizik, odnosno za isti rizik nude niži prinos.

**Slika 2. Efikasna granica**



Izvor: [www.zse.hr](http://www.zse.hr)

Redukcija rizika je postignuta ukoliko je rizik portfolija niži od rizika pojedinačnih investicija. Usporedbom tablice 2. (očekivani prinos i rizik dionica) i tablice 4. (očekivani prinos i rizik portfolija) možemo uočiti da je doista došlo do redukcije rizika.

Optimalan portfolio jest onaj s najvećim očekivanim prinosom uz dani stupanj rizika (mjereno standardnom devijacijom prinosa), odnosno portfolio s najmanjim rizikom uz dani očekivani prinos. Za pronalazak optimalnog portfolija vrijednosnih papira pojedinog investitora nužno je procijeniti njegovu krivulju indiferencije. Oblik krivulje ovisi o stavu investitora prema riziku. Krivulja indiferencije opreznijeg investitora (s većom averzijom prema riziku) će biti okomitija te će on tražiti veću premiju rizika. S druge strane, krivulja indiferencije agresivnijeg investitora (skloniji riziku) će biti položenija. Optimalni portfolio se nalazi u točki gdje se efikasna granica i krivulja indiferencije dodiruju. Za agresivnog

investitora optimalni portfolio će se nalaziti na većoj razini prinosa i rizika u odnosu na investitora s većom averzijom prema riziku.

## 6. ZAKLJUČAK

Donošenje /7, str. 8./ odluke o odabiru optimalnog portfolija dionica, odnosno najpovoljnijeg učešća dionica u portfoliju zasniva se na pronalaženju udjela koji zadovoljavaju navedene uvjete (izraze (12) i (13)) i maksimiziraju funkciju korisnosti investitora (čiji je oblik prethodno potrebno procijeniti<sup>3</sup>) uz dani skup ulaznih parametara (očekivani prinosi  $R_i$ , rizik  $\sigma_i$ , kovarijance između dionica  $\sigma_{ij}$ ). Ovaj problem se rješava pomoću kvadratnog programiranja<sup>4</sup>. Na taj način dobiva se skup udjela  $\{w_i; i=1, \dots, N\}$  koji predstavlja optimalni portfolio. To znači da za danu razinu rizika taj portfolio daje najveći prinos, odnosno za dani prinos ima najmanji rizik.

Daljnja analiza bi podrazumijevala uključivanje obveznica i drugih vrijednosnih papira, državne obveznice kao nerizičnog ulaganja te poduzimanje međunarodne diverzifikacije, tj. uključivanje inozemnih vrijednosnih papira kao i primjenu različitih metoda zaštite od rizika – *hedging*. Ili u slučaju mirovinskih i investicijskih fondova uzimanje u obzir statutarne i zakonskih ograničenja pri ulaganju, tj. kreiranju portfolija vrijednosnih papira.

Međutim postoje stanoviti nedostaci primjene Markowitzeva modela na hrvatsko tržište kapitala kojih moramo biti svjesni. Poput većine teorijskih modela i ovaj je izrađen na temelju razvijenog – američkog tržišta kapitala. Stoga detaljnija analiza zahtijeva prilagođavanje modela hrvatskim prilikama i specifičnostima te naglašavanje pojedinih čimbenika kao što je tečajni rizik i nelikvidnost koja je još uvijek u određenoj mjeri prisutna. Uz to CROBEX nije referentna vrijednost na hrvatskom tržištu kapitala, za razliku od, primjerice, S&P indeksa na američkom tržištu kapitala čije se promjene prate iz minute u minutu.

U proteklih pet godina hrvatsko je tržište kapitala zabilježilo znatan napredak gledano kroz porast prometa, tržišne kapitalizacije, broja uvrštenih vrijednosnih papira, broja dana trgovanja... Ali to je još uvijek jako daleko od razine razvijenih tržišta kapitala, naročito od visokih standarda koje je postavilo američko tržište kapitala kao najrazvijenije tržište kapitala u svijetu. Ipak, ukoliko bi tržište nastavilo ići u tom smjeru ovakve analize bi bile relevantnije.

---

<sup>3</sup> Upravo se problem procjene funkcije korisnosti investitora smatra glavnim nedostatkom Markowitzeve teorije.

<sup>4</sup> Postupak se može vidjeti npr. u radu /9/.



## LITERATURA

1. Andrijašević, S., Petranović, V., *Ekonomika osiguranja*, Alfa, Zagreb, 1999.
2. Barac, Z., Latković, M., "Kako riješiti problem odabira portfelja na hrvatskom tržištu dionica?" - poglavlje u knjizi: Baletić, Z. (glavni urednik): *Hrvatsko gospodarstvo u tranziciji*. Ekonomski institut, 143-167., Zagreb, 1999.
3. Barac, Z., Latković, M., "Argumenti za globalnu alokaciju imovine mirovinskih fondova; razmatranja iz perspektive osiguranika", *Financijska teorija i praksa*, 24 (3), 355-382., 2000.
4. Brealey, R. A., Myers, S. C., *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill, Fourth edition, New York, 1991.
5. Eror Matić, B., Latković, M., "Uspješnost poslovanja investicijskog fonda: mirovinska reforma i problem odabira fonda", *Financijska teorija i praksa*, 26 (2), 447-461., 2002.
6. Komisija za vrijednosne papire, *Godišnje izvješće* [online], Zagreb, 2005. Raspoloživo na [[http://www.crosec.hr/izvjesca/GI\\_KVPRH\\_2004.pdf](http://www.crosec.hr/izvjesca/GI_KVPRH_2004.pdf)].
7. Latković, M., "Streetwise" [online], Zagreb, 2001. Raspoloživo na [[www.phy.hr/~laci/art/streetwise.pdf](http://www.phy.hr/~laci/art/streetwise.pdf)].
8. Latković, M., "Upravljanje rizicima: identifikacija, mjerenje i kontrola", *Financijska teorija i praksa*, 26 (2), 463-467., 2002..
9. Lukić, Z., "Izbor optimalnih dioničkih portfelja na srednjoeuropskim tržištima kapitala" [online], Seminarski rad, Zagreb, 2003. Raspoloživo na [[www.hupi.hr/zoran/Zoran%20Lukic%20-%20Portfelji%20-%20Seminarski%20rad.pdf](http://www.hupi.hr/zoran/Zoran%20Lukic%20-%20Portfelji%20-%20Seminarski%20rad.pdf)].
10. Markowitz, H. M., *Portfolio Selection (Efficient Diversification of Investment)*, John Wiley & Sons, New York, 1959.
11. Markowitz, H. M., *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, Volume 7, Issue 1 (Mar., 1952), 77-91, Raspoloživo na [<http://links.jstor.org/sici?sici=0022-1082%28195203%297%3A1%3C77%3APS%E2.0.CO%3B2-1>].
12. Orsag, S., *Financiranje emisijom vrijednosnih papira*, RIFIN, Zagreb, 2002.
13. Pravila Zagrebačke burze [online], Raspoloživo na [<http://www.zse.hr/docs/pravila.pdf>].
14. Ross, S. A., Westerfield, R. W., Jordan, B. D., *Essentials of Corporate Finance*, Irwin & McGraw Hill, Third edition, New York, 2001.

15. Rubinstein, M., *Markowitz's "Portfolio Selection": A Fifty-Year Retrospective*, The Journal of Finance, Volume 57, No. 3, 2002.
16. Šošić, I., *Pregled formula iz statistike*, Školska knjiga, Zagreb, 2000.
17. Šošić, I., *Primijenjena statistika*, Školska knjiga, Zagreb, 2006.
18. Van Horne, J. C., *Financijsko upravljanje i politika (Financijski menedžment)*, deveto izdanje, MATE, , Zagreb, 1997.
19. Zakon o tržištu vrijednosnih papira, Narodne novine (NN 84/02), Zagreb, 2002.