Kvantne fluktuacije u Chern-Simonsovoj teoriji

Larisa Jonke

Zagreb, 1999.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Nobelovu nagradu za fiziku ove su godine dobili G. t'Hooft i M. J. G. Veltman, uz obrazloženje[1] da su teoriji koju danas zovemo Standardni Model dali matematičku osnovu, točnije, pokazali su kako iskoristiti teoriju za izračunavanje fizikalnih veličina koje se mogu mjeriti u raznim eksperimentima. To obrazloženje sadrži najvažniju karakteristiku suvremene znanosti, a to je kvantitativna provjera teorije kao najvažniji (jedini?!) test njezine vjerodostojnosti. Naglašavanje tog principa ima danas posebnu težinu. Standardni Model je danas u svim udžbenicima, on čini osnovu našeg poimanja prirode, odnosno, onog njenog dijela kojeg *vidimo* pri energijama određenim masama baždarnih bozona ($\sim 10^2$ GeV). Zahvaljujući raznim (više ili manje) popularnim knjigama, koje su približile svijet apstraktnih koncepata, principa i neshvatljivih formula nestručnjacima, Standardni Model je postao dio općeg znanja. Vijest o možebitnom otkriću neke nove čestice pojavljuje se na mnogim *web portalima* zajedno s vijestima o slomu burze, nekoj ograničenoj vojnoj akciji i najnovijim rezultatima istraživanja štetnosti ispijanja kave iz plastičnih šalica. Glavni razlog tog općeg prihvaćanja jest upravo nevjerojatno slaganje teorijskih predviđanja i eksperimentalnih rezultata.

No (uvijek) postoje pitanja na koja ne znamo odgovor i eksperimenti koje ne

[1]Originalni izvještaj se može naći na stranici Kraljevske švedske akademije za znanost http://www.nobel.se/announcement-99/physics99.html.

znamo objasniti. Postoje parametri u Standardnom Modelu koje unutar njega samog ne možemo odrediti. Teorija gravitacije se čini potpuno nekompatibilna s kvantnom teorijom polja, koja je, pak, osnova svih onih eksperimentalno potvrđenih računa u Standardnom Modelu. A Higgsovu česticu da i ne spominjemo. Trenutno postoji konsenzus oko toga da je Standardni Model učinkovna teorija, valjana na niskim energijama, a kvantna teorija gravitacije očekuje se tek na Plankovoj skali ($\sim 10^{19}$ GeV). A što se tiče fizike između te dvije skale, razmatraju se različiti supersimetrični modeli, teorija (super)struna, M teorija i razne druge teorije ujedinjenja. Jedno od pitanja na koje te teorije moraju odgovoriti jest problem hijerarhije, tj. zašto je omjer elektroslabe skale i Plankove skale tako mali ($\sim 10^{-17}$)? Nedavno se pojavio prilično radikalan prijedlog [1] za rješenje tog problema. Naime, tvrdnja je da je elektroslaba skala najmanja fundamentalna skala, te je u nekom $(4+n)$-dimenzijskom prostoru jednaka Plankovoj skali, a sama veličina Plankove skale je posljedica veličine ($\sim$ 1mm) dodatnih $n \geq 2$ dimenzija. Taj prijedlog predviđa i korekcije Newtonovog zakona gravitacije (!). Ukratko, čini se izglednim da ćemo na energijama iznad 1TeV-a "vidjeti" dodatne dimenzije, supersimetrične čestice, neke učinke teorije struna te sasvim sigurno, ponekog "zeca iz šešira".

Zasada, od eksperimentalne provjere ništa; na energijama koje su nam danas dostupne u eksperimentima, Standardni Model je bez greške, a eksperimenti na višim energijama koji bi mogli naći Higgsovu česticu, neke supersimetrične čestice, ili nešto treće, udaljeni su barem pet godina. I upravo stoga je teorijska fizika visokih energija danas tako zabavna. Pojavljuju se nove ideje i utvrđuju novi principi, stari fenomenološki modeli i pretpostavke primjenjuju se na najzačudnije načine, traži se univerzalnost, simetrijski principi i prije svega, konzistentna matematička podloga, koja će (prije ili kasnije) omogućiti preciznu eksperimentalnu provjeru.

Kako malo toga u fizici elementarnih čestica znamo **točno** izračunati, koristimo razne približne metode, u nadi da će nam na taj način dobiveni dijelovi "slike" omogućiti uvid u cjelinu. Koristimo perturbativni račun, tj. računamo fizikalne veličine za male konstante međudjelovanja. Na taj način opisujemo samo dio faznog prostora, odnosno prediktivna snaga teorije je bitno ograničena, ali, možda čak i važnije, nemamo potpunu sliku teorije, pa nam promiču važna svojstva iste. Izvrstan primjer za to su relacije dualnosti koje povezuju različite teorije struna; te relacije su otkrivene tek u razmatranjima neperturbativne strukture (solitonska i instantonska rješenja) teorije struna. Nadalje, koriste se i razne neperturbativne metode i već postojeća matematička znanja, koja nam bitno olakšavaju analizu problema- od teorije grupa, kompleksne analize, topologije, do danas, među fizičarima, vrlo popularne nekomutativne geometrije. Tako se dešava da fizičari pri razmatranju fizikalnih problema riješe i neke matematičke probleme. Jedan od recentih primjera je rad Seiberga i Wittena [2], u kojem je nađena egzaktna struktura vakuuma određenih supersimetričnih teorija. Osim što je imao ogroman utjecaj na teorijska istraživanja u fizici visokih energija (to je najcitiraniji[2] HEP preprint na kraju 1996., ispred (!) rada o opažanju top kvarka), taj rad je izazvao veliku pažnju matematičara zbog novih rezultata u topologiji glatkih četverodimenzijskih mnogostrukosti.

Nažalost, najčešće ni gore nabrojane metode nisu dovoljne, pa u rješavanju određenih fizikalnih problema koristimo pojednostavljene modele. Smanjenje broja dimenzija i/ili jednostavnija dinamika nam daju modele koji su ponekad egzaktno rješivi, te mogu poslužiti za provjeru konzistentnosti novih pretpostavki, novih metoda računanja, ali i za reinterpretaciju i pojašnjenje već "dokazanih" rezultata.

Niskodimenzijski modeli nam, dakle, služe kao "laboratorij" za ispitivanje raznih približnih, perturbativnih i neperturbativanih, metoda koje kasnije možemo koristiti u realističnijem kontekstu. Naravno, ti modeli su zanimljivi sami po sebi, bilo zbog svoje matematičke strukture, bilo zbog toga što često sadrže nove fizičke koncepte, karakteristične za dani broj dimenzija. Možda najbolji primjer za to je pitanje statistike, jer nas je zapravo suptilnost tog problema u dvije i jednoj dimenziji natjerala da preispitamo neke osnovne definicije i pretpostavke [3, 4]. Nadalje, niskodimenzijski modeli opisuju i neke realne fizikalne situacije; jako magnetsko polje (elektroni u najnižem Landauovom stanju) i visoka temperatura (visokotemperaturna kromodi-

[2]http://www.slac.stanford.edu/library/topcites/top40epr.1996.html

namika) učinkovno smanjuju broj dimezija u problemu (preciznije rečeno, smanjuju broj stupnjeva slobode koji interpretiramo kao smanjenje broja dimenzija).

U ovom radu izložit ćemo rezultate istraživanja dvaju niskodimenzijskih modela, dobivene primjenom kolektivne teorije polja [5]. Kolektivna teorija polja zasnovana je na limesu $N \to \infty$, gdje je N broj čestica u modelu, a osnovna prednost tog pristupa jest da omogućuje definiranje autentične teorije polja koja opisuje polazni kvantnomehanički sistem u danom približenju, te je u osnovi semiklasična i neperturbativna.

U sljedećem poglavlju upoznat ćemo se pobliže s kolektivnom teorijom polja, zatim ćemo izložit kolektivnu formulaciju Calogero-Sutherlandovog modela, te naći spektar kvantnih fluktuacija oko konstantnog rješenja. Dio tog poglavlja je već izložen u magistarskom radu [6], i zasniva se na radu [7].

U trećem poglavlju upoznat ćemo se s Chern-Simonsovom teorijom [8], točnije njenom nerelativističkom, samodualnom inačicom poznatom pod imenom Jackiw-Pi model [9]. Zanimljivost Chern-Simonsove teorije jest mogućnost da se dinamika baždarnog polja opiše članom koji nije Maxwellovog tipa, što omogućuje generiranje mase baždarnog bozona bez Higgsovog mehanizma (!). Nadalje, Chern-Simonsova teorija je glavni kandidat za teorijsko objašnjenje kvantnog fraktalnog Hallovog učinka i visokotemperaturne supravodljivosti, i konačno, čini osnovu za opis gravitacije u trodimenzijskom prostor-vremenu. Ukratko, idealni *laboratorij* za svakog teoretičara. Izložit ćemo kolektivnu formulaciju modela [10], naći solitonska rješenja u Bogomol'nyijevom limesu [9, 10], te konačno, potražiti spektar kvantnih fluktuacija oko određenih, solitonskih rješenja u Jackiw-Pi modelu [11].

U sljedećem poglavlju diskutirat ćemo dobivene rezultate. Upravo je tu izložen najbitniji rezultat kako rada [11], tako i same disertacije, a to je uspostava veze između Calogero-Sutherlandovog i Jackiw-Pi modela. Vidjet ćemo kako kolektivna teorija polja, tj. limes $N \to \infty$ prirodno vode na dimenzijsku redukciju, koje su posljedice smanjenja broja dimenzija i kakve to veze ima sa statistikom čestica u modelima.

Na kraju ćemo istaknuti glavne rezultate ove disertacije, naznačiti neka otvorena pitanja i moguće smjerove daljnjih istraživanja.

Poglavlje 2

Calogero-Sutherlandov model

Calogero-Sutherlandov (CS) model je zapravo generički naziv za dva različita modela, Calogerov model [12] i Sutherlandov model [13]. Oba modela opisuju N nerelativističkih čestica bez spina u (1+1) dimenziji, koje međudjeluju putem dvočestičnog potencijala. Što je zapravo taj potencijal, bit će objašnjeno u sljedećem odjeljku, a za sada je dovoljno reći da razlika u eksplicitnom obliku tog člana potiče od toga što u Calogerovom modelu čestice "žive" na pravcu, dok su u Sutherlandovom modelu čestice smještene na kružnicu. Na neki način, Sutherlandov model predstavlja kompaktificiranu, konačnu verziju Calogerovog modela, koji se pojavljuje kad radijus kružnice u Sutherlandovom modelu pustimo u beskonačnost.

CS model je jedan od rijetkih egzaktno rješivih N-čestičnih modela [14] i kao takav predstavlja vrijedan model za ispitivanje fraktalne statistike [14, 4]. Jedna od najbitnijih, u smislu istraživanja statistike modela, karakteristika CS modela je ta što se međudjelovanje može shvatiti kao čisto statističko međudjelovanje, što preslikava model u idealni plin čestica koje se pokoravaju fraktalnoj statistici. Formulacija dvodimenzijske kvantne kromodinamike kao matričnog modela u limesu velikog N, ograničena na singletni potprostor, također vodi na CS model [15, 16]. Preciznije rečeno, čista kvantna kromodinamika ekvivalentna je $c = 1$ matričnom modelu, što je opet specijalan slučaj ($\lambda = 1$) Calogerovog modela. Matrični model je dodatno zanimljiv zbog veze s teorijom struna u jednoj i dvije dimenzije [17]. Drugi zanimljiv model, također intenzivno proučavan, je Haldane-Shastryev spinski lanac [18] koji dobijemo iz Calogerovog modela izborom statističkog parametra $\lambda = 2$. Zanimljiva je i veza Calogero-Sutherlandovog modela s dvodimenzijskom, anionskom fizikom, ali o tome više kasnije.

U ovom poglavlju ćemo se upoznati s kolektivnom teorijom polja, ponovit ćemo neke već ranije prezentirane rezultate [7, 6] i na kraju izvesti određene rezultate u obliku koji će nam kasnije trebati.

2.1 Kolektivna teorija polja

Osnovne ideje metode kolektivnog polja [5] najbolje ćemo ilustrirati na sljedećem primjeru. Razmotrimo kvantnomehanički sistem koji sadrži N čestica bez spina (bozona). Jedan način rješavanja ovog višečestičnog problema je, naravno, rješavanje Schrödingerove jednadžbe, uz izbor potpuno simetrične valne funkcije. Drugi mogući pristup problemu jest da nepoznatu valnu funkciju danog sistema potražimo kao funkciju svih mogućih simetričnih kombinacija koordinata (npr. $\sum_{i=1}^{N} x_i$, $\sum_{i=1}^{N} x_i^2, ...$). Ovaj drugi pristup vodi na kolektivnu teoriju polja. Bit te metode jest prijelaz s originalnih dinamičkih varijabli sistema na skup svih komutirajućih operatora (kolektivno polje). Valnu funkciju sistema jednostavno prepišemo kao funkcional kolektivnog polja i odredimo jakobijan transformacije. Sljedeći, ne tako jednostavan, korak jest reformulacija hamiltonijana. To se može napraviti općenito, ali uz ograničenja koja odaju činjenicu da nisu sve kolektivne varijable nezavisne. No, u ovom trenutku koristimo činjenicu da je naša teorija zasnovana na $N \to \infty$ limesu. Naime, moguće je pokazati da se za konačan N prvi uvjeti između potencija polja $\rho(x)$ javljaju u produktu od $N + 1$ kolektivnih polja[1]. Stoga se u limesu $N \to \infty$,

[1]Razmotrimo slučaj $N = 2$ i $\rho(x)$ je suma delta funkcija.

$$\rho(x) = \delta(x - x_1) + \delta(x - x_2)$$

$$\rho^2(x) = \delta(0)\rho(x) + 2\delta(x - x_1)\delta(x - x_2)$$

$$\rho^3(x) = 3\delta(0)\rho^2(x) - 2(\delta(0))^2\rho(x).$$

funkcionalne veze između polja također pomiču u beskonačnost, te nove varijable postaju gotovo nezavisne, što omogućuje definiranje autentične teorije polja koja opisuje polazni kvantnomehanički sistem u danom približenju. Upravo je to kolektivna teorija polja. U osnovi, sve što radimo je netrivijalna promjena varijabli, prijelaz s N originalnih stupnjeva slobode na novi skup beskonačno mnogo varijabli.

2.2 Kolektivna formulacija Calogero-Sutherlandovog modela

Calogerov model, koji opisuje sistem N nerelativističkih čestica smještenih na pravcu, zadan je sljedećim hamiltonijanom:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{g}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\frac{1}{(x_i - x_j)^2}. \tag{2.1}$$

Konstantu interakcije g napišimo u obliku

$$g = \lambda(\lambda - 1)\frac{\hbar^2}{m}, \tag{2.2}$$

gdje je bezdimenzijska konstanta λ pozitivan realan broj koji određuje statistiku modela (npr. $\lambda = 0$ opisuje slobodne bozone, a $\lambda = 1$ slobodne fermione), a m je masa čestica. U ostatku rada koristit ćemo jedinice u kojima je $\hbar = m = 1$. Također ćemo pretpostaviti da je

$$g > -\frac{\hbar^2}{4m}, \tag{2.3}$$

jer bi privlačniji potencijal oblika $1/r^2$ rezultirao u kolapsu valne funkcije. Uočimo da hamiltonijan (2.1) ima singularitet u točki $x_i = x_j$, pa da bi dani kvantnomehanički problem bio dobro definiran, zahtjevamo da valna funkcija iščezava kad se dvije čestice nađu u istoj točki. To postižemo sljedećom faktorizacijom valne funkcije

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \prod_{i<j}^{N}(x_i - x_j)^{\lambda}\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_N). \tag{2.4}$$

Primjenimo hamiltonijan (2.1) na valnu funkciju $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, te koristeći identitet (za dokaz vidi Dodatak B)

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{x_i-x_j}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{(x_i-x_j)^2}, \tag{2.5}$$

dobivamo novi hamiltonijan

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \prod_{i<j}^{N}(x_i-x_j)^{-\lambda} H \prod_{i<j}^{N}(x_i-x_j)^{\lambda} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{d^2}{dx_i^2} - \lambda\sum_{i\neq j}^{N}\frac{1}{x_i-x_j}\frac{d}{dx_i},\end{aligned} \tag{2.6}$$

koji djeluje samo na valnu funkciju $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Hamiltonijan (2.6) je sada u formi pogodnoj za prelazak u reprezentaciju kolektivne teorije polja. Pokazano je, da u limesu $N \to \infty$ hamiltonijan možemo u potpunosti izraziti pomoću gustoće čestica $\rho(x)$

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i), \tag{2.7}$$

i kanonski konjugiranog impulsa $\pi(x) = -i\delta/\delta\rho(x)$, za koje vrijedi

$$[\partial_x\pi(x), \rho(x')] = -i\partial_x\delta(x-x'). \tag{2.8}$$

Koristimo lančano pravilo

$$\frac{d}{dx_i} = \int dx \frac{\partial\rho(x)}{\partial x_i}\frac{\delta}{\delta\rho(x)}. \tag{2.9}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\frac{d^2}{dx_i^2} &= \sum_{i=1}^{N}\int dxdy\partial_i\rho(x)\partial_i\rho(y)\frac{\delta}{\delta\rho(x)}\frac{\delta}{\delta\rho(y)} - \sum_{i=1}^{N}\int dxdy\partial_i\rho(x)\partial_y\delta(x-y)\frac{\delta}{\delta\rho(y)} \\ &= -\int dx\rho(x)(\partial_x\pi(x))^2 + \int dx\partial_x^2\rho(x)\frac{\delta}{\delta\rho(y)}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Drugi član u hamiltonijanu (2.6) transformira se na sljedeći način:

$$\begin{aligned}&\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_i-x_j}\frac{d}{dx_i} = \\ &= -\sum_{i,j}\int dx\partial_x\frac{\delta(x-x_i)}{x-x_j}\frac{\delta}{\delta\rho(x)} - \int dx\left.\frac{\partial_i\rho(x)-\partial_j\rho(x)}{x_i-x_j}\right|_{x_i=x_j}\frac{\delta}{\delta\rho(x)} \\ &= -\int dx\partial_x\left(\rho(x)\fint dy\frac{\rho(y)}{x-y}\right)\frac{\delta}{\delta\rho(x)} - \frac{1}{2}\int dx\partial_x^2\rho(x)\frac{\delta}{\delta\rho(y)}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Crtica preko oznake integrala označava glavnu vrijednost integrala. Konačno dobivamo hamiltonijan Calogerovog modela u kolektivnoj formulaciji:

$$H = \frac{1}{2}\int dx\rho(x)(\partial_x\pi(x))^2 + \int dx\left[\frac{\lambda-1}{2}\partial_x^2\rho(x) + \lambda\partial_x\left(\rho(x)⨍dy\frac{\rho(y)}{x-y}\right)\right]\frac{\delta}{\delta\rho(y)}. \tag{2.12}$$

No, hamiltonijan (2.12) nije hermitski! Zaboravi smo jakobijan transformacije (2.7). Razmotrimo skalarni produkt valnih funkcija:

$$(\Phi_1,\Phi_2) = \int\prod_{i=1}^{N}dx_i\Phi_1^*(x_1,...,x_N)\Phi_2(x_1,...,x_N) = \int d\rho(x)\Phi_1^*(\rho)\Phi_2(\rho)J(\rho), \tag{2.13}$$

gdje je $J(\rho)$ jakobijan transformacije (2.7)

$$J(\rho) = \int\prod_{i=1}^{N}dx_i\prod_x\delta\left(\rho(x) - \sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i)\right). \tag{2.14}$$

Vidimo da moramo reskalirati valni funkcional $J^{1/2}\Phi(\rho)\to\Phi(\rho)$, pa da skalarni produkt (2.13) poprimi standardni oblik. Stoga moramo transformirati i hamiltonijan (2.12) $H\to J^{1/2}HJ^{-1/2}$. Pri tome se kanonski impuls transformira na sljedeći način

$$J^{1/2}\pi(x)J^{-1/2} = \pi(x) + i\frac{1}{2}\frac{\delta\ln J}{\delta\rho(x)}. \tag{2.15}$$

Sad nametnemo uvjet hermitičnosti $H - H^\dagger = 0$, te konačno dobivamo hermitski hamiltonijan

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2}\int dx\rho(x)(\partial_x\pi)^2 + \frac{1}{8}\int dx\rho(x)\left(\partial_x\frac{\delta\ln J}{\delta\rho(x)}\right)^2 - \\ & -\mu\int dx\rho(x) - \frac{1}{4}\int dx\frac{\delta\omega(x)}{\delta\rho(x)}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

gdje je

$$\omega(x) = (\lambda-1)\partial_x^2\rho(x) + 2\lambda\partial_x\left(\rho(x)⨍dy\frac{\rho(y)}{x-y}\right). \tag{2.17}$$

Jakobijan određujemo iz uvjeta hermitičnosti hamiltonijana

$$\partial_x\left(\rho(x)\partial_x\frac{\delta\ln J}{\delta\rho(x)}\right) = \omega(x). \tag{2.18}$$

Iz relacija (2.17) i (2.18) slijedi

$$J = \exp\left[(\lambda-1)\int dx\rho(x)\ln\rho(x) + \lambda\int dxdy\rho(x)\ln|x-y|\rho(y)\right]. \tag{2.19}$$

Treba uočiti da smo hamiltonijanu (2.16) dodali Lagrangeov multiplikator μ, pomoću kojeg definiramo energijsku skalu našeg problema. Zapravo smo u sam hamiltonijan uključili uvjet (*constraint*) normiranja polja $\rho(x)$:

$$\int dx \rho(x) - N = 0 \; . \tag{2.20}$$

Nadalje, zadnji član u hamiltonijanu (2.16) je singularan, ali ne doprinosi u vodećem redu razvoja po $1/N$. U sljedećem poglavlju pokazat ćemo da taj član ima ulogu kontračlana i da se krati sa divergentnim doprinosom koji se javlja u sljedećem redu računa.

Pažljivim razmatranjem same formulacije Calogerovog modela uočavamo jedan problem. Naime, zbog odbojnog potencijala $V(r) \sim 1/r^2$ u (2.1), sistem nije stabilan i sve čestice bi se raspršile. U originalnom modelu [12] to je rješeno tako da je dodan privlačan potencijal $V(r) \sim r^2$, koji onda sve to skupa drži na okupu. U novijoj literaturi taj član se više ne piše, ali uvijek moramo imati na umu da za smislenu teoriju polja moramo model na neki način konfinirati i to harmoničkim članom ili smještanjem modela u kutiju duljine L. Upravo ova druga mogućnost vodi na Sutherlandov model [13]. Smještamo beskonačno mnogo čestica N u "kutiju" beskonačne duljine L, ali tako da prosječna gustoća $d = N/L$ ostane konačna. Zatim moramo specificirati samu kutiju ili pak rubne uvjete. Biramo periodične rubne uvjete i to tako da N čestica smjestimo na kružnicu duljine L, a za periodični potencijal uzimamo manifestno periodičnu sumu na rešetci

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r - jL)^2} = \frac{\pi^2}{L^2 \sin^2(\pi r/L)}. \tag{2.21}$$

Ako uvedemo kutnu koordinatu $\varphi_i = 2\pi x_i/L$ dolazimo do hamiltonijana za Sutherlandov model

$$H = \frac{4\pi^2}{L^2} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{d^2}{d\varphi_i^2} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{4} \sum_{i>j}^{N} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right)} \right) . \tag{2.22}$$

Radi jednostavnosti, faktor r_0^{-2} u hamiltonijanu (2.22) više nećemo pisati, ali trebamo ga imati na umu iz dimenzijskih razloga. Slično kao i u Calogerovom modelu, zbog singularnosti hamiltonijana (2.22) u točkama $\varphi_i = \varphi_j$, faktoriziramo valnu funkciju na slijedeći način:

$$\psi = \Delta^\lambda \phi, \quad \Delta = \prod_{i<j} \sin\left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right). \tag{2.23}$$

Dobivamo novi hamiltonijan, $H \to \Delta^{-\lambda} H \Delta^\lambda$, koji sada djeluje na potpuno simetričnu valnu funkciju ϕ

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \frac{d^2}{d\varphi_i^2} - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j\neq i}^N \mathrm{ctg}\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right)\frac{d}{d\varphi_i} + \frac{\lambda^2}{24}N(N^2-1). \tag{2.24}$$

Zadnji, konstantni član posljedica je trigonometrijskog identiteta (za dokaz vidi Dodatak B)

$$\sum_{i\neq j\neq k}^N \mathrm{ctg}\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\mathrm{ctg}\frac{\varphi_i - \varphi_k}{2} = -\frac{1}{3}N(N-1)(N-2). \tag{2.25}$$

Sada možemo reformulirati hamiltonijan (2.24) pomoću kolektivne teorije polja

$$\begin{aligned} H \quad &= \frac{1}{2}\int d\varphi\rho(\varphi)(\partial_\varphi\pi(\varphi))^2 + \frac{1}{8}\int d\varphi\rho(\varphi)\left(\partial_\varphi\frac{\delta \ln J}{\delta\rho(\varphi)}\right)^2 \\ &-\frac{\lambda-1}{4}\int d\varphi\partial_\varphi^2\delta(\varphi-\varphi')|_{\varphi=\varphi'} - \frac{\lambda}{4}\int d\varphi\rho(\varphi)\partial_\varphi \mathrm{ctg}\frac{\varphi-\varphi'}{2}|_{\varphi=\varphi'} \\ &+\frac{\lambda^2}{24}N(N^2-1), \end{aligned} \tag{2.26}$$

gdje je jakobijan ponovno određen iz zahtjeva za hermitičnošću hamiltonijana

$$\int d\varphi\rho(\varphi)\left(\partial_\varphi\frac{\delta\ln J}{\delta\rho(\varphi)}\right)^2 = 4\int d\varphi\rho(\varphi)\left(\frac{\lambda-1}{2}\frac{\partial_\varphi\rho(\varphi)}{\rho(\varphi)} + \frac{\lambda}{2}⨍ d\varphi'\mathrm{ctg}\frac{\varphi-\varphi'}{2}\rho(\varphi')\right)^2, \tag{2.27}$$

odnosno

$$J = \exp\left[(\lambda-1)\int d\varphi\rho(\varphi)\ln\rho(\varphi) + \frac{\lambda}{2}\int d\varphi d\varphi'\rho(\varphi)\ln\sin^2\frac{\varphi-\varphi'}{2}\rho(\varphi')\right]. \tag{2.28}$$

Slično kao i u Calogerovom modelu, divergentni članovi u hamiltonijanu (2.26) (treći i četvrti član), krate se s doprinosom kvantnih fluktuacija u sljedećem redu u razvoju po $1/N$ [19].

2.3 Statička rješenja u Bogomol'nyijevom limesu

Razmotrimo hamiltonijan Calogerovog modela (2.16). Zanima nas vodeći doprinos u $1/N$ razvoju, te u tom slučaju otpadaju singularni doprinosi i kinetički član. Naime kanonski impuls $\pi(x)$ ide kao $1/N$, što se vidi iz komutacijske relacije (2.8). Vodeći član je dakle, dan učinkovnim potencijalom

$$V_{\text{učin}}(\rho) = \frac{1}{8}\int dx\rho(x)\left(\partial_x \frac{\delta \ln J}{\delta\rho(x)}\right)^2 = \frac{1}{8}\int dx\rho(x)\left[(\lambda-1)\frac{\partial_x\rho(x)}{\rho(x)} + 2\lambda \fint dy\frac{\rho(y)}{x-y}\right]^2. \tag{2.29}$$

Vidimo da je potencijal pozitivno definitan, te stoga najniži mogući doprinos energiji osnovnog stanja potječe od konfiguracije za koju $V_{učin}$ iščezava. Takva konfiguracija predstavlja osnovno stanje modela ukoliko postoji pozitivno i normalizabilno rješenje jednadžbe Bogomol'nyijevog tipa

$$(\lambda-1)\frac{\partial_x\rho(x)}{\rho(x)} + 2\lambda\fint dy\frac{\rho(y)}{x-y} = 0. \tag{2.30}$$

Odmah uočavamo da, neovisno o iznosu statističkog parametra λ, konstantna konfiguracija $\rho(x) = \rho_0$ predstavlja moguće rješenje. Iz uvjeta normalizacije rješenja (2.20) dobivamo da je $\rho_0 = N/L$, gdje je L dimenzija sistema. Energija tog konstantnog rješenja dana je samo članom s kemijskim potencijalom (Lagrangeovim multiplikatorom)

$$E_0 = -\mu\int dx\rho_0. \tag{2.31}$$

U Sutherlandovom modelu, danim hamiltonijanom (2.26), učinkovni potencijal je dan (do na konstantu) izrazom (2.27), pa je stoga odgovarajuća Bogomol'nyijeva jednadžba

$$\frac{\lambda-1}{2}\frac{\partial_\varphi\rho(\varphi)}{\rho(\varphi)} + \frac{\lambda}{2}\fint d\varphi'\text{ctg}\frac{\varphi-\varphi'}{2}\rho(\varphi') = 0. \tag{2.32}$$

Ponovo, kao i u Calogerovom modelu, postoji trivijalno rješenje konstantne gustoće $\rho_0 = N/2\pi$, što slijedi iz relacije normalizacije (2.20), te energije

$$E_0 = \frac{\lambda^2}{24}N(N^2-1), \tag{2.33}$$

što je točan rezultat [13].

2.4 Kvantne korekcije

Obratimo sada pažnju na sljedeći član u razvoju po $1/N$ kolektivnog hamiltonijana (2.16). Proučavat ćemo posljedice malih fluktuacija oko rješenja minimalne energije, tj. rješenja koje zadovoljavaju Bogomol'nyijevu jednadžbu (2.30). Razvijmo polje $\rho(x)$

$$\rho(x) = \rho_0(x) + \eta(x). \tag{2.34}$$

Ako razvijemo hamiltonijan (2.16) oko $\rho_0(x)$, do članova kvadratičnih u $\eta(x)$, možemo ga napisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} H = E_0 + H^{(2)} = E_0 + \frac{1}{2}\int dx\rho_0(x)(\partial_x\pi)^2 + \frac{\pi^2\lambda^2}{2}\int dx\rho_0(x)\eta^2(x) \\ +\frac{(\lambda-1)^2}{8}\int dx\frac{(\partial_x\eta(x))^2}{\rho_0(x)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}⨍ dxdy\frac{\partial_x\eta(x)\eta(y)}{x-y} \\ -\frac{\lambda-1}{4}\int dx\partial_x^2\delta(x-y)|_{y=x} - \frac{\lambda}{2}\int dx\rho_0(x)\partial_x\frac{P}{x-y}|_{y=x}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

gdje su zadnja dva člana samo raspisan singularni doprinos $\delta\omega/\delta\rho$ iz hamiltonijana (2.16).

Uklonimo, za početak, $\rho_0(x)$ u kinetičkom dijelu hamiltonijana (2.35), uvođenjem nove varijable $\tilde{\eta}(x)$

$$\eta(x) = \partial_x\left(\sqrt{\rho_0(x)}\tilde{\eta}(x)\right). \tag{2.36}$$

Lako vidimo da u tom slučaju kinetički član prelazi u:

$$\frac{1}{2}\int dx\rho_0(x)(\partial_x\pi)^2 \quad\longrightarrow\quad -\frac{1}{2}\int dx\frac{\delta^2}{\delta\tilde{\eta}^2(x)}. \tag{2.37}$$

Nadalje, razvijmo novo polje fluktuacija $\tilde{\eta}(x)$ pomoću normalnih modova

$$\tilde{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho_0(x)}}\sum_n q_n\varphi_n(x), \tag{2.38}$$

i slično, odgovarajući kanonsko konjugirani moment $\tilde{\pi}(x)$

$$\tilde{\pi}(x) = -i\frac{\delta}{\delta\tilde{\eta}(x)} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0(x)}}\sum_n p_n\varphi_n(x), \tag{2.39}$$

gdje operatori q_n i p_n zadovoljavaju uobičajene bozonske komutacijske relacije

$$[q_n, p_m] = i\delta_{nm}, \quad [q_n, q_m] = [p_n, p_m] = 0. \tag{2.40}$$

Još uvijek neodređene funkcije $\varphi_n(x)$ čine ortonormirani i potpuni skup, odnosno vrijede sljedeće relacije:

$$\int dx \frac{\varphi_n(x)\varphi_m(x)}{\rho_0(x)} = \delta_{n,m}, \tag{2.41}$$

$$\sum_n \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\sqrt{\rho_0(x)\rho_0(y)}} = \delta(x-y). \tag{2.42}$$

Uvrstimo relacije (2.38) i (2.39) u hamiltonijan (2.35) te uz korištenje relacije ortonormiranosti (2.41), dobivamo hamiltonijan u dijagonalnom obliku:

$$\begin{aligned} H &= E_0 + \frac{1}{2}\sum_n p_n^2 + \frac{1}{2}\sum_n \omega_n^2 q_n^2 - \\ &- \frac{\lambda-1}{4}\int dx \partial_x^2 \delta(x-y)|_{y=x} - \frac{\lambda}{2}\int dx \rho_0(x)\partial_x \frac{P}{x-y}|_{y=x}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

ukoliko funkcija $\varphi_n(x)$ sljedeću integro- diferencijelnu jednadžbu:

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda-1)^2}{8}\rho_0(x)\partial_x^2\left(\frac{\partial_x^2\varphi_n(x)}{\rho_0(x)}\right) - \frac{\pi^2\lambda^2}{2}\rho_0(x)\partial_x(\rho_0(x)\partial_x\varphi_n(x)) - \\ &-\frac{(\lambda-1)^2}{8}\rho_0(x)\partial_x\left\{\left[\frac{(\partial_x\rho_0(x))^2}{\rho_0^3(x)} + \partial_x\left(\frac{\partial_x\rho_0(x)}{\rho_0^2(x)}\right)\right]\partial_x\varphi_n(x)\right\} + \\ &+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\rho_0(x)\partial_x^2 \fint dy \frac{\partial_y\varphi_n(y)}{x-y} - \frac{\omega^2}{4}\rho_0(x)\int dy \varphi_n(y) = \frac{\omega_n^2}{2}\varphi_n(x). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Na kraju ćemo primijeniti fizikalni zahtjev za nenegativnošću vlastitih frekvencija ω_n. Jednadžbu (2.44) možemo bitno pojednostaviti, odnosno možemo pokazati da iz jednadžbe

$$\omega_n\varphi_n(x) = \frac{\lambda-1}{2}\partial_x^2\varphi_n(x) + \lambda\partial_x \fint dy \rho_0(x)\frac{\varphi_n(x)}{x-y}. \tag{2.45}$$

slijedi jednadžda (2.44), jednostavnim uvrštavanjem jednadžbe (2.45) na desnu stranu nje same, uz korištenje identiteta (dokaz je dan u Dodataku B):

$$\frac{P}{x-y}\frac{P}{x-z} + \frac{P}{y-x}\frac{P}{y-z} + \frac{P}{z-x}\frac{P}{z-y} = \pi^2\delta(x-y)\delta(x-z), \tag{2.46}$$

Rješenja jednadžbe (2.45) uistinu čine ortonormirani skup na intervalu $< -\infty, \infty >$. Dokaz relacije (2.41) dobijemo tako što jednadžbu (2.45) za $\varphi_n(x)$ pomnožimo s $\varphi_m(x)$, te integriramo u intervalu $< -\infty, \infty >$

$$\omega_n \int \frac{\varphi_n(x)\varphi_m(x)}{\rho_0(x)} dx = \lambda \fint dy dx \frac{\partial_y \varphi_n(y)\varphi_m(x)}{x-y} + \frac{\lambda - 1}{2} \int dx \varphi_m(x) \partial_x \left(\frac{\partial_x \varphi_n(x)}{\rho_0(x)} \right). \tag{2.47}$$

Napišimo relaciju (2.47) sa zamijenjenim indeksima m i n, oduzmimo od (2.47), te parcijalno integrirajmo, što konačno daje

$$(\omega_n - \omega_m) \int dx \frac{\varphi_n(x)\varphi_m(x)}{\rho_0(x)} = 0. \tag{2.48}$$

Vidimo da za $n \neq m$, integral mora iščeznuti, te tako dobijemo relaciju (2.41). Nadalje, pretpostavit ćemo da rješenja jednadžbe (2.45) uistinu zadovoljavaju relaciju potpunosti (2.42), što možemo i kasnije provjeriti.

Potražimo rješenje jednadžbe (2.45) u obliku $\varphi_n(x) \propto \exp(\pm inx)$. Iskoristimo izraz za Fourierov transformat "principal- value" distribucije

$$\frac{P}{x-y} = \frac{1}{2i} \int dk e^{ik(x-y)} \mathrm{sign}(k),$$

te izračunajmo

$$\begin{aligned} \int dy \frac{e^{\pm iny}}{x-y} &= \frac{1}{2i} \int dk\ dy\ e^{i(\pm n - k)y} e^{ikx} \mathrm{sign}(k) = -i\pi \int dk\ \delta(\pm n - k)\ e^{ikx} \mathrm{sign}(k) = \\ &= \mp i\pi \mathrm{sign}(n)\ e^{\pm inx}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Uvrstimo dobiveni rezultat u jednadžbu (2.45), te konačno uzmimo u obzir da je naše statičko rješenje minimalne energije konstanta, tj. $\rho_0(x) = \rho_0$

$$\omega_n \varphi_n(x) = \frac{\lambda - 1}{2} \partial_x^2 \varphi_n(x) \mp i\pi\lambda\rho_0 \mathrm{sign}(n)\ \partial_x \varphi_n(x), \tag{2.50}$$

što nakon deriviranja daje izraz za vlastite frekvencije malih oscilacija, odnosno disperzijsku funkciju ω_n:

$$\omega_n = -\frac{\lambda - 1}{2} n^2 + \pi\lambda\rho_0 |n|. \tag{2.51}$$

Vratimo se na trenutak hamiltonijanu (2.43), točnije na dva posljednja, divergentna člana. Pokazat ćemo da se oni točno poništavaju s vakuumskom energijom:

$$E_{vac} = \frac{\langle 0|H^{(2)}|0\rangle}{\langle 0|0\rangle}. \tag{2.52}$$

Vakuumsko stanje operatora H (2.43) dano je izrazom:

$$|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_n \omega_n q_n^2\right). \tag{2.53}$$

To možemo izraziti pomoću polja $\tilde{\eta}(x)$ koristeći inverzan izraz relaciji (2.38)

$$q_n = \int dx\tilde{\eta}(x)\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\rho_0(x)}}, \tag{2.54}$$

i još pojednostavniti koristeći jednadžbu (2.45). Konačno imamo:

$$|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{4}\int dxdy\eta(x)G^{-1}(x,y)\eta(y)\right), \tag{2.55}$$

gdje je $G^{-1}(x,y)$ inverz korelacijske funkcije, dan izrazom

$$G^{-1}(x,y) = -2\lambda\ln|x-y| - (\lambda-1)\frac{\delta(x-y)}{\rho_0(x)}. \tag{2.56}$$

Sad iskoristimo Bogomol'nyijevu jednadžbu (2.30) za minimalnu konfigraciju $\rho_0(x)$, te dobijemo

$$E_{vac} = \frac{\lambda-1}{4}\int dx\partial_x^2\delta(x-y)|_{y=x} + \frac{\lambda}{2}\int dx\rho_0(x)\partial_x\frac{P}{x-y}|_{y=x}. \tag{2.57}$$

Sada je potpuni hamiltonijan dan izrazom

$$H = E_0 + \sum_n \omega_n a_n^\dagger a_n, \tag{2.58}$$

gdje smo uveli standardne bozonske operatore stvaranja i poništenja

$$a_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega_n}q_n - \frac{i}{\sqrt{\omega_n}}p_n\right), \tag{2.59}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega_n}q_n + \frac{i}{\sqrt{\omega_n}}p_n\right). \tag{2.60}$$

Sada ćemo izvesti disperzijsku relaciju za Sutherlondov model, na malo jednostavniji način. Od početka ćemo uzeti u obzir da razvijamo gustoću $\rho(\varphi)$ oko konstantnog rješenja ρ_0. U tom slučaju hamiltonijan kvadratičan u polju $\eta(\varphi)$ je

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}\rho_0 \int d\varphi (\partial_\varphi \pi(\varphi))^2 + \frac{1}{2}\rho_0 \int d\varphi \left(\frac{\lambda - 1}{2\rho_0} \partial_\varphi \eta(\varphi) + \frac{\lambda}{2} \fint d\varphi' \mathrm{ctg} \frac{\varphi - \varphi'}{2} \eta(\varphi') \right)^2 . \tag{2.61}$$

Uvedimo operatore

$$A(\varphi) = \partial_\varphi \pi(\varphi) + i \left[\frac{\lambda - 1}{2\rho_0} \partial_\varphi \eta(\varphi) + \frac{\lambda}{2} \fint d\varphi' \mathrm{ctg} \frac{\varphi - \varphi'}{2} \eta(\varphi') \right] \tag{2.62}$$

$$A^\dagger(\varphi) = \partial_\varphi \pi(\varphi) - i \left[\frac{\lambda - 1}{2\rho_0} \partial_\varphi \eta(\varphi) + \frac{\lambda}{2} \fint d\varphi' \mathrm{ctg} \frac{\varphi - \varphi'}{2} \eta(\varphi') \right] \tag{2.63}$$

čiji je komutator

$$[A(\varphi), A^\dagger(\varphi')] = -\frac{\lambda - 1}{\rho_0} \partial_\varphi \partial_{\varphi'} \delta(\varphi - \varphi') + \lambda \partial_\varphi \mathrm{ctg} \frac{\varphi - \varphi'}{2}. \tag{2.64}$$

Hamiltonijan (2.26) sad možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} H = E_0 &+ \frac{\rho_0}{2} \int d\varphi A^\dagger(\varphi) A(\varphi) + \frac{\rho_0}{4} \int d\varphi [A(\varphi), A^\dagger(\varphi)] \\ &- \frac{\lambda - 1}{4} \int d\varphi \partial_\varphi^2 \delta(\varphi - \varphi')|_{\varphi = \varphi'} - \frac{\lambda}{4}\rho_0 \int d\varphi \partial_\varphi \mathrm{ctg} \frac{(\varphi - \varphi')}{2}|_{\varphi=\varphi'}, \end{aligned} \tag{2.65}$$

gdje je E_0 energija osnovnog pobuđenja dana izrazom (2.33). Lako se možemo uvjeriti da komutator (2.64) u slučaju $\varphi' \to \varphi$ točno krati divergentne doprinose u hamiltonijanu (2.65), i konačno daje

$$H = E_0 + \frac{1}{2}\rho_0 \int d\varphi A^\dagger(\varphi) A(\varphi). \tag{2.66}$$

Potražimo spektar nisko-ležećih pobuđenja, odnosno dijagonalizirajmo hamiltonijan (2.66). Razvit ćemo operatore A i $A^\dagger$ pomoću potpunog skupa operatora a_n i $a_n^\dagger$

$$A(\varphi) = \sum_n f_n(\varphi) a_n \ , \ A^\dagger(\varphi) = \sum_n f_n^*(\varphi) a_n^\dagger, \tag{2.67}$$

koji zadovoljavaju uobičajene bozonske komutacijske relacije

$$[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{n,m} \ , \ [a_n, a_m] = [a_n^\dagger, a_m^\dagger] = 0. \tag{2.68}$$

Zahtjevamo da hamiltonijan (2.66) bude dijagonalan u tim novim operatorima, odnosno da vrijedi:

$$H = \sum_n \omega_n a_n^\dagger a_n. \tag{2.69}$$

U gornjim izrazima u slučaju kontinuiranog spektra, sumu u izrazu (2.69) zamjenjujemo integralom. Uvrstimo sad razvoj (2.67) u komutacijsku relaciju (2.64), te primijenimo komutacijske relacije (2.68) za operatore a_n i $a_n^\dagger$. To nam daje relaciju potpunosti:

$$\sum_n f_n(\varphi) f_n^*(\varphi') = -\frac{\lambda - 1}{\rho_0} \partial_\varphi \partial_{\varphi'} \delta(\varphi - \varphi') + \lambda \partial_\varphi \mathrm{ctg} \frac{\varphi - \varphi'}{2}. \tag{2.70}$$

Nadalje, uvrstimo razvoj (2.67) u hamiltonijan (2.66), te nametnimo zahtjev dijagonalnosti (2.69). Nakon malo algebre, slijedi

$$\frac{1}{2} \rho_0 \int d\varphi f_m^*(\varphi) f_n(\varphi) = \omega_m \delta_{n,m}. \tag{2.71}$$

Pomnožimo gornju relaciju s $f_m^*(\varphi')$ te sumirajmo po m, pa uz primjenu relacije potpunosti (2.70), konačno dobivamo jednadžbu za funkciju $f_n(\varphi)$:

$$\omega_n f_n(\varphi) = \frac{\lambda - 1}{2} \partial_\varphi^2 f_n(\varphi) + \frac{\lambda}{2} \rho_0 \int d\varphi' \partial_{\varphi'} \mathrm{ctg} \frac{\varphi' - \varphi}{2} f_n(\varphi'). \tag{2.72}$$

Iskoristimo poznate trigonometrijske relacije

$$\partial_{\varphi'} \mathrm{ctg} \frac{\varphi' - \varphi}{2} = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2}} = -\frac{1}{1 - \cos(\varphi' - \varphi)}, \tag{2.73}$$

te potražimo rješenje gornje jednadžbe u obliku $f_n \propto \exp(\pm i n \varphi)$. Iskoristimo izraz

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{\exp(\pm i n \varphi)}{1 - \cos\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos n\varphi}{1 - \cos\varphi} = -2\pi |n|, \tag{2.74}$$

te uvrstimo dobiveni rezultat u jednadžbu (2.72) što nakon deriviranja daje izraz za disperzijsku funkciju ω_n:

$$\omega_n = \frac{1}{r_0^2} \left(-\frac{\lambda - 1}{2} n^2 + \frac{N\lambda}{2} |n| \right). \tag{2.75}$$

gdje je r_0 radijus kružnice na kojoj su smještene čestice u modelu (vidi napomenu iza izraza za hamiltonijan (2.22)), a za ρ_0 smo uvrstili rezultat dobiven normalizacijom.

Na kraj još moramo provjeriti nenegativnost vlastitih frekvencija ω_n, u oba modela. Lako se možemo uvjeriti da su oba izraza za vlastite frekvencije (relacije (2.51) i (2.75)) pozitivno definitne, ukoliko je $\lambda < 1$. U slučaju kada je $\lambda > 1$, dobijemo uvjet na kvantni broj n oblika

$$|n| < a\rho_0, \tag{2.76}$$

gdje je $a \sim 1$ pozitivna konstanta. U našem približenju taj uvjet je uvijek ispunjen jer je $\rho_0 \propto N$, a energija pobuđenja mora biti mala.

Poglavlje 3

Nerelativistička, samodualna Chern-Simonsova teorija

Chern-Simonsova teorija opisuje nabijena skalarna polja u $(2+1)$-dimenzijskom prostor-vremenu, minimalno vezana s baždarnim poljem. Dinamika baždarnog polja nije opisana uobičajenim Maxwellovim članom, već je oblika

$$\mathcal{L}_{ChS} = \epsilon_{\mu\nu\rho} Tr \left(\partial^\mu A^\nu A^\rho + \frac{2}{3} A^\mu A^\nu A^\rho \right). \tag{3.1}$$

Ta mogućnost opisivanja baždarnih polja tzv. Chern-Simonsovim članom karakteristika je neparno-dimenzijskog prostor-vremena. Posebno, u $(2+1)$-dimenzijskom prostor-vremenu derivativni član je kvadratičan u poljima. Moguće je u Chern-Simonsov lagranžijan uključiti i Maxwellov član, no kako je on kvadratičan u derivacijama, možemo ga zanemariti na velikim udaljenostima, tj. niskim enegijama. Nas će zanimati samo Abelova teorija, kad baždarna polja A^μ međusobno komutiraju, te u tom slučaju drugi član u gornjem izrazu otpada. Također, proučavat ćemo nerelativistički limes teorije.

Kao što smo u naslovu naznačili, još ćemo dalje ograničiti moguće Chern-Simonsove teorije na samodualne. To je vrlo bitno određenje teorije; odnosi se na teorije u kojima je međudjelovanje posebnog oblika, te posebno izabrane jakosti, tako da se jednadžbe gibanja, koje su općenito vezane, nelinearne jednadžbe drugog reda, reduciraju na jednadžbe prvog reda, što analizu problema čini bitno jednostavnijom. Fizikalno značenje takvog izbora je u tome što "samodualna točka" odgovara minimalizaciji nekog funkcionala, često energije ili akcije.

3.1 Kolektivna formulacija modela

Analizirat ćemo sistem N čestica bez spina koje su smještene u ravnini i čije je međudjelovanje dano Chern-Simonsovim članom. Hamiltonijan tog sistema je dan izrazom

$$H = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(-i\nabla_n + \mathbf{A}_n)^2 + V, \tag{3.2}$$

gdje je $\mathbf{A}_n$ statističko baždarno polje

$$A_n^i = |\lambda|\epsilon^{ij} \sum_{m\neq n}^{N} \frac{(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m)^j}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|^2},\ i,j = 1,2, \tag{3.3}$$

a skalarni potencijal V odredit ćemo kasnije. Na trenutak ćemo promijeniti varijable; vektor $\mathbf{r}_n$, koji označava položaj n-tog bozona zamijenit ćemo kompleksnim varijablama z_n i $\bar{z}_n$:

$$\begin{aligned} &z \equiv x + iy,\ \bar{z} \equiv x - iy \\ &\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

U tim novim varijablam hamiltonijan (3.2) je dan izrazom:

$$\begin{aligned} H = & -\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial z_n \partial \bar{z}_n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_n \partial z_n} + \frac{|\lambda|^2}{2} \sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{n\neq m}^{N} \frac{1}{z_n - z_m} \right|^2 + V \\ & -|\lambda| \sum_{n\neq m}^{N} \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{z}_m} \frac{\partial}{\partial z_n} + |\lambda| \sum_{n\neq m}^{N} \frac{1}{z_n - z_m} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Treba uočiti nekomutativnost parcijalnih derivacija po z i $\bar{z}$. To je posljedica netrivijalne relacije:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\bar{z}} = \pi\delta^{(2)}(z). \tag{3.6}$$

Prije prijelaza na kolektivne varijable, još ćemo transformirati hamiltonijan (3.5). Naime, zanimat će nas vorteksna rješenja, pa iz valne funkcije izvlačimo prefaktor

$\prod_{n,\alpha}(\bar{z}_n - \bar{Z}_\alpha)^v$, gdje je Z_α kompleksni broj koji određuje položaj vorteksa. Tada dobivamo učinkovni hamiltonijan $\tilde{H}$

$$\begin{aligned}
\tilde{H} = & \prod_{n,\alpha}(\bar{z}_n - \bar{Z}_\alpha)^{-v} H \prod_{n,\alpha}(\bar{z}_n - \bar{Z}_\alpha)^v \\
= & -\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial z_n \partial \bar{z}_n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_n \partial z_n} + \frac{|\lambda|^2}{2} \sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{n \neq m}^{N} \frac{1}{z_n - z_m} \right|^2 \\
- & |\lambda| \sum_{n \neq m}^{N} \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{z}_m} \frac{\partial}{\partial z_n} + |\lambda| \sum_{n \neq m}^{N} \frac{1}{z_n - z_m} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \\
+ & |\lambda| v \sum_{n \neq m, \alpha}^{N} \frac{1}{z_n - z_m} \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{Z}_\alpha} - 2v \sum_{n,\alpha}^{N} \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{Z}_\alpha} \frac{\partial}{\partial z_n} + V.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Prelazimo na kolektivne varijable

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{N} \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n), \\
\pi(\mathbf{r}) &= -i \frac{\delta}{\delta \rho(\mathbf{r})},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

koje zadovoljavaju komutacijsku relaciju

$$[\nabla \pi(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r}')] = -i \nabla \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{3.9}$$

i gustoća $\rho(\mathbf{r})$ je normirana

$$\int d^2\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = N. \tag{3.10}$$

Pri prijelazu koristimo lančano pravilo deriviranja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_n} &= \int d^2\mathbf{r} \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial z_n} \frac{\delta}{\delta \rho(\mathbf{r})}, \\
\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} &= \int d^2\mathbf{r} \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial \bar{z}_n} \frac{\delta}{\delta \rho(\mathbf{r})}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Nakon malo računa dobivamo

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (\nabla \pi(\mathbf{r}))^2 + \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} \omega(\mathbf{r}) \frac{\delta}{\delta \rho(\mathbf{r})} \\
& -\lambda v \int d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') - i\hat{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^2} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') n(\mathbf{r}'') \\
& \frac{\lambda^2}{2} \int d^2\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \left(\int d^2\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right)^2 + \frac{\lambda \pi v}{2} \int d^2\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}) + V \\
& + \int d^2\mathbf{r} \nabla \rho(\mathbf{r}) \hat{k} \times \left(-\lambda \int d^2\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + v \int d^2\mathbf{r}' n(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) \pi(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

gdje smo uveli gustoću vorteksa $n(\mathbf{r})$

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{\alpha}), \tag{3.13}$$

te pokratu $\omega(\mathbf{r})$

$$\omega(\mathbf{r}) = -\Delta\rho(\mathbf{r}) + 2v\nabla\left(\rho(\mathbf{r}) \int d^2\mathbf{r}' n(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\right). \tag{3.14}$$

Vektor $\hat{k}$ je jedinični vektor okomit na ravninu u kojoj je definiran problem. Vidimo da hamiltonijan (3.12) nije hermitski, i to zbog člana koji sadrži $\omega(\mathbf{r})$. Slično kao i u prethodnom poglavlju, reskaliramo valni funkcional koristeći jakobijan transformacije, te transformiramo sam hamiltonijan i konačno imamo hermitski hamiltonijan Chern-Simonsove teorije u formulaciji kolektivne teorije polja:

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) \left\{ \nabla\pi(\mathbf{r}) - \hat{k} \times \left[-\frac{1}{2}\frac{\nabla\rho(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} + \int d^2\mathbf{r}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} (-\lambda\rho(\mathbf{r}') + vn(\mathbf{r}')) \right] \right\}^2 \\ -\frac{1}{4} \int d^2\mathbf{r} \frac{\delta\omega(\mathbf{r})}{\delta\rho(\mathbf{r})} + \pi \int d^2\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) \left[\lambda\rho(\mathbf{r}) + \frac{\lambda v}{2} n(\mathbf{r}) \right] + V. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Drugi član u hamiltonijanu (3.15) je singularan, no ne doprinosi u vodećem redu u N. Kasnije ćemo pokazati da se taj član krati s beskonačnim doprinosom nultih oscilacija u kvantnom spektru fluktuacija oko kolektivnog polja $\rho(\mathbf{r})$. U trećem članu možemo zaboraviti λv doprinos, jer su gustoće $\rho(\mathbf{r})$ i $n(\mathbf{r})$ *ortogonalne* tj. gustoća vorteksa je različta od nule samo tamo gdje nema materije. Ukoliko za, do sada neodređen, potencijal V uzmemo privlačni, kratkodosežni potencijal oblika

$$V = -\lambda\pi \sum_{m \neq n} \delta^{(2)}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n),$$

koji u kolektivnoj teoriji daje

$$V = -\lambda\pi \int d^2\mathbf{r}\rho^2(\mathbf{r}) + \lambda\pi N\delta(0),$$

dobivamo Jackiw-Pi model, tj. samodualnu Chern-Simonsovu teoriju u formulaciji kolektivne teorije polja

$$\begin{aligned} H = \; & \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) \left[\nabla\pi(\mathbf{r}) + \hat{k} \times \left(\frac{1}{2}\frac{\nabla\rho(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} + |\lambda| \int d^2\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - v\frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2} \right) \right]^2 \\ & + \frac{1}{4} \int d^2\mathbf{r} \Delta\delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} + \lambda\pi N\delta(0). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Već smo naglasili važnost samodualnog limesa teorije, i fizikalno značenje istog, no u slučaju Chern-Simonsove teorije, postoji i bonus. Naime, pokazano je [21] da je samo u samodualnom limesu Chern-Simonsova teorija renormalizabilna, tj. ultraljubičasto konačna u svim redovima računa smetnje. U sljedećem odjeljku ćemo zanemariti posljednja dva singularna člana u hamiltonijanu (3.16), no prilikom razmatranja kvantnih fluktucija vidjet ćemo da za to postoji opravdanje.

3.2 Bogomol'nyijev limes

Analizu modela danog hamilonijanom (3.16) započinjemo u klasičnom približenju. U teoriji kolektivnog polja to znači da ćemo razmotriti članove vodeće u $1/N$ razvoju. U konkretnom slučaju, vodeći dio hamiltonijana (3.16) je dan tzv. učinkovnim potencijalom

$$V_{\text{učin}} = \frac{1}{2}\int d^2\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\left(\frac{1}{2}\frac{\nabla\rho(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} + |\lambda|\int d^2\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} - v\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^2}\right)^2. \tag{3.17}$$

Naime, kako je gustoća $\rho(\mathbf{r})$ normirana na N (3.10), kanonski konjugirani moment $\pi(\mathbf{r})$ mora ići s $1/N$, e da bi bila zadovoljena komutacijska relacija (3.9). Stoga, u klasičnom približenju zanemarujeno kinetički član. Vidimo da je učinkovni potencijal (3.17) pozitivno definitan, te je najniža moguća vrijednost koju može poprimiti jednaka nuli. U tom slučaju kažemo da smo dosegli Bogomol'nyijevu granicu, te vrijedi

$$\frac{1}{2}\frac{\nabla\rho_0(\mathbf{r})}{\rho_0(\mathbf{r})} + |\lambda|\int d^2\mathbf{r}'\rho_0(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} - v\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^2} = 0. \tag{3.18}$$

Izračunajmo divergenciju gornjeg izraza:

$$\Delta \ln\rho_0(\mathbf{r}) + 4|\lambda|\pi\rho_0(\mathbf{r}) = 4\pi v\delta(\mathbf{r}). \tag{3.19}$$

U slučaju kada je $v = 0$, gornja jednadžba je tzv. Liouvilleova jednadžba, za koju je pokazano da su sva rješenja dana izrazom:

$$\rho_0(z,\bar{z}) = \frac{2}{|\lambda|\pi}\frac{|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2}, \tag{3.20}$$

gdje je $f(z)$ proizvoljna analitička funkcija, izabrana tako da je gustoća ρ_0 pozitivna, nesingularna, i posebno da nema polova. Kao što smo već rekli, nas će zanimati vorteksna rješenja, dakle gustoća ρ_0 će u nekim točkama iščezavati. Stoga desna strana jednadžbe (3.19) mora u tim točkama kratiti singularitete koji dolaze od člana $\Delta \ln \rho_0(\mathbf{r})$. Radijalno simetrično, nenegativno i normalizabilno rješenje dobijemo ukoliko uzmemo $f(z) = c_n z^{\pm n}$. Uvrstimo taj izraz za f u (3.20), pa u jednadžbu (3.19) dobijemo

$$\rho_0(r) = \frac{2(v+1)^2}{|\lambda|\pi r^2}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{(v+1)} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(v+1)}\right]^{-2}, \tag{3.21}$$

gdje smo definirali $|c_n| \equiv r_0^{-n/2}$. Primjenimo još i uvjet normalizacije gustoće ρ_0 (3.10), čime fiksiramo "vorticity" $v = N|\lambda|/2 - 1$ i konačno imamo

$$\rho_0(r) = \frac{|\lambda|N^2}{2\pi r^2}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{N|\lambda|}{2}} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{N|\lambda|}{2}}\right]^{-2}. \tag{3.22}$$

Ovo rješenje opisuje $n = 2(v+1) = N|\lambda|$ solitona smještenih u ishodištu. Treba uočiti da općenito N nije cijeli broj, ali v po definiciji jest.

Lako se možemo uvjeriti da ukolikoje N dovoljno velik, solitonsku konfiguraciju ρ_0 možemo opisati δ-funkcijom:

$$\rho_0(r) = \frac{N}{2\pi}\frac{\delta(r-r_0)}{r_0}. \tag{3.23}$$

Pri izvodu se koristi poznata reprezentacija δ-funkcije

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\exp(x/\epsilon)}{\epsilon[1+\exp(x/\epsilon)]^2}\ ,\ \epsilon = \frac{1}{N|\lambda|}. \tag{3.24}$$

Postoji još jedno zanimljivo rješenje, i to u slučaju kad je $v = 0$. Pretpostavimo da gustoća ρ_0 ovisi samo o jednoj varijabli, recimo x. U tom se slučaju jednadžba (3.18) reducira na

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\rho_0(x) + |\lambda|\pi\int dx'\rho_0(x')\mathrm{sign}(x-x') = 0, \tag{3.25}$$

gdje smo iskoristili rezultat:

$$\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dy'}{(x-x')^2+(y-y')^2} = \frac{\pi}{|x-x'|} + \mathcal{O}(1/L)\ ,\ x \neq x'. \tag{3.26}$$

Ograničili smo domenu kolektivnog polja $\rho(\mathbf{r})$ na proizvoljno velik, ali konačan interval duljine L, duž y osi. Uvijek treba imati na umu da na kraju računa puštamo $L \to \infty$ i $N \to \infty$ istovremeno, čuvajući omjer N/L konstantnim, ali velikim (tzv. termodinamički limes). Derivirajmo izraz (3.25) po varijabli x, i dobivamo:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\rho_0(x) + 2|\lambda|\pi\rho_0(x) = 0. \tag{3.27}$$

Ova jednadžba posjeduje pozitivno i normalizabilno rješenje

$$\rho_0(x) = \frac{A}{\cosh^2 Bx}, \tag{3.28}$$

gdje je

$$A = \frac{|\lambda|\pi N^2}{2L^2}\ ,\ B = \frac{|\lambda|\pi N}{L}. \tag{3.29}$$

Rješenje izgleda poput zida visine A, duž y osi. Kako N raste, zidno rješenje postaje sve tanje, odnosno, za $N \to \infty$ preuzima oblik δ- funkcije

$$\rho_0(x) = \frac{N}{L}\delta(x). \tag{3.30}$$

Gornji izraz lako provjerimo, koristeći izraz (3.24), gdje je sad mali parametar $\epsilon = L/(2|\lambda|\pi N)$.

3.3 Kvantne fluktuacije

Razmotrimo nadalje, fluktuacije oko rješenja (3.23), odnosno razvijmo kolektivno polje $\rho(\mathbf{r})$

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r}), \tag{3.31}$$

gdje je $\eta(\mathbf{r})$ mala (u $1/N$ razvoju) kvantna popravka, odnosno fluktuacija gustoće oko $\rho_0(\mathbf{r})$. Uvrstimo razvoj (3.31) u (3.16), te razvijmo do kvadratičnih članova u $\eta(\mathbf{r})$, i dobit ćemo vodeći član $V_{\text{učin}}(\rho_0)$ i hamiltonijan kvadratičan u polju $\eta(\mathbf{r})$ i njemu kanonski konjugiranom polju $\pi(\mathbf{r})$. Članova linearnih u polju $\eta(\mathbf{r})$ nema, jer razvijamo oko ekstrema.

$$
\begin{aligned}
H = & \ V_{\text{učin}}(\rho_0) + \frac{1}{2}\int d^2\mathbf{r}\rho_0(\mathbf{r})\left[\hat{k}\times\nabla\pi - \frac{1}{2}\nabla\left(\frac{\eta(\mathbf{r})}{\rho_0(\mathbf{r})}\right) - |\lambda|\int d^2\mathbf{r}'\eta(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\right]^2 \\
& + \frac{1}{4}\int d^2\mathbf{r}\Delta\delta^2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} + |\lambda|\pi N\delta(0). \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Zadnja dva člana su već spomenuti singularni doprinosi. Uvodimo operatore[1]

$$
\begin{aligned}
A(z) &= \frac{\partial\pi}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\eta}{2\rho_0} + |\lambda|\int d^2\mathbf{r}'\ln|z-z'|\eta(z')\right), \\
A^\dagger(z) &= \frac{\partial\pi}{\partial\bar{z}} + i\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\eta}{2\rho_0} + |\lambda|\int d^2\mathbf{r}'\ln|z-z'|\eta(z')\right), \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

komutator (jedini neiščezavajući) kojih je

$$
\left[A(z), A^\dagger(z')\right] = 2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}'}\left(\frac{\delta^2(z-z')}{2\rho_0} + |\lambda|\ln|z-z'|\right). \qquad (3.34)
$$

Pomoću tih operatora možemo izraziti drugi član u hamiltonijanu na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
H^{(2)} &= \int d^2\mathbf{r}\rho_0(z)A^\dagger(z)A(z) + A(z)A^\dagger(z)) \\
&= 2\int d^2\mathbf{r}\rho_0(z)A^\dagger(z)A(z) + \int d^2\mathbf{r}\rho_0(z)[A(z), A^\dagger(z)]. \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

Komutator u gornjem izrazu točno krati singularne doprinosu u hamiltonijanu (3.32), te konačno za kvadratični hamiltonijan dobivamo

$$
H = 2\int d^2\mathbf{r}\rho_0(z)A^\dagger(z)A(z). \qquad (3.36)
$$

Potražimo spektar nisko-ležećih pobuđenja, odnosno dijagonalizirajmo hamiltonijan (3.36). Razvit ćemo operatore A and $A^\dagger$ pomoću potpunog skupa operatora $a_{\mathbf{n}}$ i $a^\dagger_{\mathbf{n}}$:

$$
A(z) = \sum_{\mathbf{n}}\phi_{\mathbf{n}}(z)a_{\mathbf{n}}\ ,\ A^\dagger(z) = \sum_{\mathbf{n}}\phi^*_{\mathbf{n}}(z)a^\dagger_{\mathbf{n}} \qquad (3.37)
$$

koji zadovoljavaju uobičajene bozonske komutacijske relacije

$$
[a_{\mathbf{n}}, a^\dagger_{\mathbf{m}}] = \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}}\ ,\ [a_{\mathbf{n}}, a_{\mathbf{m}}] = [a^\dagger_{\mathbf{n}}, a^\dagger_{\mathbf{m}}] = 0. \qquad (3.38)
$$

[1] Dalje u tekstu podrazumijevamo da ovisnost funkcija i operatora o z, zapravo znači funkcionalnu ovisnost o z i $\bar{z}$.

Zahtjevamo da hamiltonijan (3.36) bude dijagonalan u tim novim operatorima, odnosno da vrijedi:

$$H = \sum_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}^{\dagger} a_{\mathbf{n}}. \tag{3.39}$$

U gornjim izrazima, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ predstavlja par kvantnih brojeva, te u slučaju kontinuiranog spektra, sumu u izrazu (3.39) zamjenjujemo integralom. Uvrstimo sad razvoj (3.37) u komutacijske relacije (3.34), te primjenimo (3.38). To nam daje relaciju potpunosti:

$$\sum_{\mathbf{n}} \phi_{\mathbf{n}}(z)\phi_{\mathbf{n}}^{*}(z') = 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}'}\left(\frac{\delta^2(z-z')}{2\rho_0} + |\lambda| \ln|z-z'|\right). \tag{3.40}$$

Nadalje, uvrstimo razvoj (3.37) u hamiltonijan (3.36), te nametnimo zahtjev dijagonalnosti (3.39). Nakon malo algebre, slijedi

$$2\int d^2\mathbf{r}\rho_0(z)\phi_{\mathbf{m}}^{*}(z)\phi_{\mathbf{n}}(z) = \omega_{\mathbf{m}}\delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}}. \tag{3.41}$$

Pomnožimo gornju relaciju s $\phi_{\mathbf{m}}(z')$ te sumirajmo po $\mathbf{m}$, pa uz primjenu relacije potpunosti (3.40), konačno dobivamo jednadžbu za funkciju $\phi_{\mathbf{n}}(z)$:

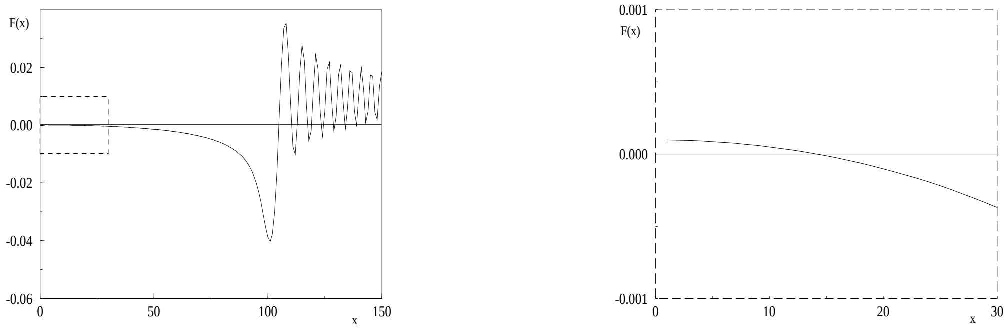
$$\frac{1}{2}\omega_{\mathbf{n}}\phi_{\mathbf{n}}(z) = -\partial_z\partial_{\bar{z}}\phi_{\mathbf{n}}(z) - \partial_{\bar{z}}\ln\rho_0(z)\partial_z\phi_{\mathbf{n}}(z) - (\partial_z\partial_{\bar{z}}\ln\rho_0(z))\phi_{\mathbf{n}}(z) - |\lambda|\pi\rho_0(z)\phi_{\mathbf{n}}(z). \tag{3.42}$$

Kao što smo već ranije naglasili, nas zanimaju pobuđenja oko točno određenog osnovnog stanja, točnije onog danog izrazom (3.23). Stoga iskoristimo jednadžbu (3.19) da izrazimo zadnja dva člana u jednadžbi (3.42), te potražimo rješenje u obliku $\psi_{\mathbf{n}}(r,\varphi) = \phi_{\mathbf{n}}(r,\varphi)\sqrt{\rho_0(r)}$:

$$\omega_{\mathbf{n}}\psi_{\mathbf{n}}(r,\varphi) = -\frac{1}{2}\left(\nabla - i\mathbf{A}\right)^2\psi_{\mathbf{n}}(r,\varphi) - \frac{1}{2}\left(v\delta(\mathbf{r}) + |\lambda|N\frac{\delta(r-r_0)}{r_0}\right)\psi_{\mathbf{n}}(r,\varphi). \tag{3.43}$$

Vidimo da jednadžbu (3.43) možemo interpretirati kao Schrödingerovu jednadžbu za bozonsku česticu u magnetskom polju te u dodatnom "delta" potencijalu, gdje je

$$\begin{aligned} A_r(r,\varphi) &= 0, \\ A_\varphi(r,\varphi) &= -\frac{N|\lambda|}{2r}\,\mathrm{sign}(r-r_0), \\ B = \nabla\times\mathbf{A} &= -\frac{N|\lambda|}{r}\,\delta(r-r_0). \end{aligned} \tag{3.44}$$



Slika 3.1: Na slici lijevo prikazana je funkcija $F(x)$ za $\nu = \mu = 101$, $N\lambda/2 = 100$. Područje u iscrtanom okviriću je prikazano uvećano na desnoj strani.

Treba uočiti da možemo ispustiti vorteksni hamiltonijanlan u jednadžbi (3.43), jer u slučaju kad r teži ka nuli valna funkcija $\psi_{\mathbf{n}}(r,\varphi)$ mora isčezavati barem s r^2.

Operator na desnoj strani jednadžbe (3.43) komutira s operatorom angularnog momenta $(-i\partial/\partial\varphi)$, pa možemo iz valne funkcije izvuči fazu oblika $\exp(\pm in\varphi)$. U tom slučaju dobivamo novu jednadžbu

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)\tilde{\psi}_{0,n}(r) + \left[2\omega_n - \frac{1}{r^2}(\frac{N|\lambda|}{2}\mathrm{sign}(r-r_0) \pm n)^2\right]\tilde{\psi}_{0,n}(r) + \frac{N|\lambda|}{r_0}\delta(r-r_0)\tilde{\psi}_{0,n}(r) = 0, \tag{3.45}$$

gdje $\tilde{\psi}_{0,n}(r)$ predstavlja rješenje najniže energije, za svaki n. Vidimo da postoje dva tipa rješenja, ovisno o predznaku u fazi. Jedno je oblika:

$$\psi_{\mathbf{n}}(r,\varphi) = \exp(\pm in\varphi) \times \begin{cases} J_\nu(x) & \text{za } r < r_0, \\ N_\mu(x) & \text{za } r > r_0, \end{cases} \tag{3.46}$$

a drugo je:

$$\psi_{\mathbf{n}}(r,\varphi) = \begin{cases} \exp(\pm in\varphi)J_\nu(x) & \text{za } r < r_0, \\ \exp(\mp in\varphi)N_\nu(x) & \text{za } r > r_0, \end{cases} \tag{3.47}$$

$J_\nu(x)$ i $N_\nu(x)$ su Besselove funkcije reda ν, $x = \sqrt{2\omega_n}\,r$, $\mu = N|\lambda|/2 \pm n$ i $\nu = N|\lambda|/2 \mp n$. Sad zahtjevamo kontinuitet rješenja $\tilde{\psi}_{0,n}(r)$ u r_0, pa integriramo jednadžbu (3.45) oko r_0, što nam daje jednadžbu oblika

$$F(x) \equiv J_\sigma(x) N_{\sigma'}(x) - \frac{2}{N|\lambda|\pi} = 0. \tag{3.48}$$

Dobili smo transcedentnu jednadžbu koju moramo riješiti da bismo konačno dobili spektar malih pobuđenja oko osnovnog rješenja. Razvit ćemo Besselove funkcije za velike vrijednosti indeksa σ, σ'[22]. Također moramo pokazati da je rješenje koje dobijemo **jedino** rješenje.

Za male vrijednosti x, odnosno za nisko-ležeća pobuđenja, funkcija $F(x)$ monotono opada, pa stoga ima najviše jednu nultočku. Na slici 3.1 smo prikazali ponašanje funkcije $F(x)$, za određene vrijednosti parametara ν, μ i v. Vidimo da je sljedeća nultočka funkcije $F(x)$ negdje oko $x \sim \sigma$. U tom slučaju je $\omega_n \gtrsim N^2/r_0^2$, i u našem približenju to znači da treba uložiti beskonačno mnogo energije da bi se doseglo sljedeće stanje. Dakle, naše niskoenergijsko pobuđenje je **jedino** bitno stanje u kolektivnoj teoriji polja, odnosno za velike vrijednosti N.

Rješavajući jednadžbu (3.48) za $\sigma \neq \sigma'$, odnosno za rješenje tipa (3.46), dobivamo tzv. nulte modove, koji su posljedica rotacijske invarijantnosti jednadžbe (3.45), tj. $\omega_n = 0$. No za slučaj $\sigma = \sigma'$, odnosno rješenje tipa (3.47), dobivamo $2\omega_n r_0^2 = 4n^2 \mp nN|\lambda|$. Primjenimo fizikalni zahtjev za pozitivnošću ω_n, te konačno dobivamo

$$\psi_{\mathbf{n}}(r,\varphi) = \begin{cases} \exp(-i|n|\varphi) J_\nu(x) & \text{for } r < r_0, \\ \exp(+i|n|\varphi) N_\nu(x) & \text{for } r > r_0, \end{cases} \tag{3.49}$$

gdje je $\nu = \frac{1}{2}N\lambda + |n|$, a izraz za spektar nisko-ležećih pobuđenja oko specifičnog rješenja (3.23), u Chern-Simonsovom je modelu:

$$\omega_n = \frac{1}{r_0^2}(2n^2 + |n|\frac{N|\lambda|}{2}). \tag{3.50}$$

Nađimo sad odgovarajući izraz za vlastite frekvencije malih fluktuacija oko rješenja (3.30). Uvrstimo u jednadžbu (3.42) jednadžbu za $\rho_0(x)$ (3.27), faktorizirajmo funkciju $\Phi_{\mathbf{n}}(z) = \Psi_{\mathbf{n}}(x,y)/\sqrt{\rho_0(x)}$, i lako dobijemo

$$\begin{aligned} \omega_n \Psi_{\mathbf{n}}(x,y) &= -\frac{1}{2}\Delta\Psi_{\mathbf{n}}(x,y) - i\frac{|\lambda|\pi N}{L}\mathrm{sign}(x)\partial_y\Psi_{\mathbf{n}}(x,y) + \frac{\lambda^2\pi^2N^2}{2L}\Psi_{\mathbf{n}}(x,y) \\ &\quad -|\lambda|\pi\rho_0(x)\Psi_{\mathbf{n}}(x,y). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Kako operator na desnoj strani gornje jednadžbe komutira s $p_y = -i\partial_y$, tražimo rješenje u obliku $\Psi_{\mathbf{n}}(x,y) = \exp(\pm iny)\psi_{0,n}(x)$, te dobivamo

$$\omega_n\psi_{0,n}(x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2\psi_{0,n}(x) \pm n\,\mathrm{sign}(x)\Lambda_N\psi_{0,n}(x) + \frac{1}{2}(n^2+\Lambda_N^2)\psi_{0,n}(x) - |\lambda|\pi\rho_0(x)\psi_{0,n}(x), \tag{3.52}$$

gdje smo uveli pokratu

$$\frac{|\lambda|\pi N}{L} = \Lambda_N.$$

Predznak u fazi funkcije $\Psi_{\mathbf{n}}(x,y)$ biramo tako da dobijemo

$$\omega_n\psi_{0,n}(x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2\psi_{0,n}(x) + \frac{1}{2}(\Lambda_N + |n|)^2\psi_{0,n}(x) - \Lambda_N\delta(x)\psi_{0,n}(x), \tag{3.53}$$

gdje smo za $\rho_0(x)$ uvrstili granični izraz (3.30). Bilo koja druga kombinacija predznaka faze vodi ili na negativne frekvencije, što je fizikalno neprihvatljivo ili na nulte modove, koji nas u ovom trenutku ne zanimaju. Jednadžbu (3.53) rješava funkcija $\psi_{0,n}(x) = \sqrt{\Lambda_N}\exp(-\Lambda_N|x|)$, i tako za vlastite frekvencije malih oscilacija oko rješenja (3.30) dobivamo:

$$\omega_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{|\lambda|\pi N}{L}|n|. \tag{3.54}$$

Poglavlje 4

Diskusija

U prethodna dva poglavlja izložili smo neke rezultate istraživanja dva, naizgled, nevezana niskodimenzijska modela u formulaciji kolektivne teorije polja. Sada slijedi najvažniji rezultat ovog rada- veza između Calogero-Sutherlandovog i Jackiw-Pi modela. Na početku poglavlja ćemo izložiti otprije poznate rezultate istraživanja veze Chern-Simonsove teorije i Calogero-Sutherlandovog modela, zatim ćemo komentirati naš rezultat, te ćemo se na kraju osvrnuti na zanimljiv problem kvantne statistike.

4.1 Dimenzijska redukcija

Pronaći vezu između različitih modela, modela koji opisuju različite dinamike čestica različitih statistika, naboja i drugih elementarnih svojstava, je priličan problem, a u našem slučaju još imamo problem različite dimenzionalnosti prostor-vremena. Dakle, potreban nam je i nekakav mehanizam dimenzijske redukcije. Kada se spomene pojam dimenzijske redukcije, najčešća asocijacija je Kaluza-Kleinov [23] mehanizam. To podrazumjeva kompaktifikaciju jedne (najčešće prostorne) dimenzije, nametanje određenih rubnih uvjeta na polja u problemu, identifikaciju komponenata polja kao novih, nezavisnih stupnjeva slobode u nižedimenzijskom problemu, te reinterpretaciju spektra pobuđenja. Ta ideja od svoje pojave dvadesetih godina ovog stoljeća privlači izuzetno puno pažnje, jer se uvidjelo da u većem broju dimenzija možemo definirati prirodno poopćenje i ujedinjenje nižedimenzijskih teorija, a onda nas mehanizam dimenzijske redukcije vraća natrag, obično uz bonus- objašnjenje porijekla slobodnog parametra u nižedimenzijskoj teoriji i/ili određenje tog parametra, objašnjenje porijekla određenih simetrija u modelu i slično. Današnja teorija (super)struna vjerojatno ne bi pobuđivala toliko pažnje da nije tog mehanizma. Na žalost, još uvijek ima dosta problema, jer osim pitanja kako kompaktificirati veći broj dimenzija, ostaje i vječno pitanje zašto. Zato se krenulo i u drugom smjeru, tj. pokušali su se pronaći neki fizikalni mehanizmi dimenzijske redukcije. Dobar primjer je tzv. holografski princip [24], kad dimaniku fizikalnog sustava u nekom prostoru opisujemo isključivo poljima na graničnoj plohi tog prostora, tj. u jednoj dimenziji niže. Teorija gravitacije se danas upravo na taj način pokušava uklopiti u okvir sačinjen od kvantne teorije polja i specijalne teorije relativnosti- kao učinkovna (znači nerenormalizabilna) teorija na rubu.

Premda se veza između Chern-Simonsove teorije i raznih jednodimenzijskih modela dosta istraživala, jedino su autori rada [25], primijenili klasični Kaluza-Kleinov mehanizam, dok je većina istraživanja bila zasnovana na nekom fizikalnom mehanizmu koji će učinkovno sniziti dimenzionalnost problema.

Opis anionske fizike u fraktalnom kvantnom Hallovom (FQH) učinku, zasniva se na Chern-Simonsovoj teoriji u vanjskom magnetskom polju. Upravo je u istraživanjima FQH učinka primjećeno da je u nekim slučajevima fizika tog problema učinkovno jednodimenzionalna. Naime, može se pokazati da je sistem aniona u najnižem Landauovom nivou, odnosno, u jakom magnetskom polju, zapravo identičan Calogerovom modelu [26]. Ekvivalentnost ta dva modela može se dokazati algebarski, tj. identificira se kompleksna, Bargmann-Fockova reprezentacija algebre operatora u danim modelima [27].

Također je pokazano se da osnovno stanje u Calogero-Sutherlandovom modelu i Lauglinovo stanje u FQH učinku podudaraju na geometriji uskog valjka [28]. Koristeći hidrodinamičku kolektivnu teoriju polja, author rada [29] su pokazali da korelacijske funkcije fermiona na rubu FQH uzorka prelaze u korelacijske funkcije u Calogerovom modelu kako se širina uzorka smanjuje. Konačno, FQH učinak i Calogero-Sutherlandov model dijele istu, beskonačno dimenzionalnu W_∞ algebru [30].

Instruktivno je pogledati kako jako magnetsko polje vodi na dimenzijsku redukciju u sistemu. Razmotrimo hamiltonijan čestice u magnetskom polju

$$H_0 = \sum_{i=1,2} \frac{(\Pi_i)^2}{2m},\ \Pi_i = p_i - A_i,\ i = 1, 2.$$

Pretpostavimo da imamo konstantno magnetsko polje u smjeru negativne z-osi, te definirajmo operatore stvaranja i poništenja

$$a = (\Pi_x - i\Pi_y)/\sqrt{2B},\ [a, a^\dagger] = 1$$

U tom slučaju je $H_0 = \omega_c(a^\dagger a + 1/2)$, gdje je $\omega_c = B/m$ ciklotronska frekvencija. Spektar hamiltonijana H_0 je kvantiziran u obliku Landauovih nivoa, a stanja u najnižem Landauovom nivou zadovoljavaju uvjet $a\phi_0 = 0$. Fazni prostor opisanog sistema pogodno je opisati pomoću varijabli (Π_x, Π_y, X, Y), gdje su

$$X = x - \frac{\Pi_y}{B},\ Y = y + \frac{\Pi_x}{B},\ [X, Y] = i/B$$

U jakom magnetskom polju sve se čestice nalaze u najnižem Landauovom nivou, pa ako ograničimo Hilbertov prostor samo na taj nivo, dvije od četiri varijable u faznom prostoru i to (Π_x, Π_y) su "zamrznute" i jedini preostali stupnjevi slobode su (X, Y). Tako možemo dvodimenzijski koordinatni prostor (X, Y) interpretirati kao fazni prostor jednodimenzionalnog sistema!

U radu [31] je razmotren sistem dva aniona koji su vanjskim potencijalom ograničeni na kretanje u jednoj dimenziji, ali ovaj put u stvarnom, konfiguracijskom prostoru. Naime, ukoliko je razmak energijskih nivou zbog vanjskog potencijala (recimo $V(y)$) velik, u usporedbi s energijom $E_x = p_x^2/2m$, i čestice su daleko, možemo zanemariti sva, osim najnižeg, vlastita stanja u y smjeru, i tako učinkovno dobivamo jednodimenzijski sistem.

Naš rezultat je na tom tragu. Naime, ako se prisjetmo rezultata prošlog poglavlja, gdje smo izveli izraz za fluktuacije oko osnovnog stanja u Jackiw-Pi modelu, mi smo zanemarili sva, osim osnovnog stanja u y smjeru, ali uz bitnu razliku. Za to nam nije trebao jaki vanjski potencijal- naš rezultat prirodno slijedi iz kolektivne teorije polja zahvaljujući limesu $N \to \infty$.

Razmotrimo to pobliže. U odjeljku (3.2) izdvoji smo nama zanimljivo rješenje minimalne energije (3.22), te našli oblik te solitonske konfiguracije u limesu $N \to \infty$ (3.23). U sljedećem odjeljku smo potražili spektar kvantnih fluktuacija oko tog rješenja, i uvjerili se (vidi sliku (3.1) i diskusiju vezanu uz nju) da u našem približenju uistinu imamo "jednodimenzijska" pobuđenja, preciznije rečeno dobili smo izraz za spektar tih pobuđenja (3.50), ovisan samo o *jednom* kvantnom broju. Čini se prirodnim sada potražiti jednodimenzijski model sa sličnim spektrom, a iz svega prije rečenog, jasno je da nas zanima Calogero-Sutherlandov model.

No najprije ćemo razmotriti rezultate izložene u radu [32], gdje smo uspostavili vezu između hamiltonijana Calogerovog modela i Jackiw-Pi modela, u formulaciji kolektivne teorije polja. Krenuli smo od "zidnog" rješenja (3.30) u Jackiw-Pi modelu, te smo pretpostavili da kvantne fluktuacije sadrže rješenje osnovnog stanja kao faktor, te da možemo razdvojiti x i y ovisnost gustoće fluktuacija:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) + \rho_0(x)\tilde{\eta}(\mathbf{r}) = \rho_0(x)\tilde{\rho}(y). \tag{4.1}$$

Uvrstili smo gornju pretpostavku u hamiltonijan (3.16), te izintegrirali $\rho_0(x)$. Pri tome je potreban je oprez, zbog baratanja δ- funkcijom

$$\begin{aligned} H = \frac{N}{2L} \int dx dy \delta(x) \tilde{\rho}(y) \Bigg[& \frac{\partial \pi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \ln \tilde{\rho}(y) \\ & - \frac{N|\lambda|}{L} \int dx' dy' \delta(x') \tilde{\rho}(y') \frac{y - y'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \Bigg]^2 \\ + \frac{N}{2L} \int dx dy \delta(x) \tilde{\rho}(y) \Bigg[& \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho_0(x) \\ & + \frac{N|\lambda|}{L} \int dx' dy' \delta(x') \tilde{\rho}(y') \frac{x - x'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \Bigg]^2 . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Uzimajući u obzir jednadžbu (3.25) i oblik rješenja za $\rho_0(x)$, dan izrazom (3.30), interpretiramo izraz $\partial_x \ln \rho_0(x)$ kao $-2N|\lambda|\pi \mathrm{sign}(x)/L$, što nam daje

$$\begin{aligned} H &= \frac{N}{2L}\int dy\tilde{\rho}(y)\left[\left.\frac{\partial\pi}{\partial x}\right|_{x=0} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\ln\tilde{\rho}(y) - \frac{N|\lambda|}{L}\fint dy'\frac{\tilde{\rho}(y')}{(y-y')}\right]^2 \\ &+ \frac{N}{2L}\int dy\tilde{\rho}(y)\left.\left(\frac{\partial\pi}{\partial y}\right)^2\right|_{x=0}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Integral po y' u gornjem izrazu izvrijednit ćemo kao glavnu vrijednost integrala. Naime, zbog prisustva δ- funkcije jezgra integrala u prvom članu hamiltonijana (4.2)

$$\frac{y-y'}{(x-x')^2+(y-y')^2} \;\text{ ide u }\; \frac{y-y'}{\varepsilon^2+(y-y')^2},$$

kako ε ide u nulu, pa po definiciji imamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{y-y'}{\varepsilon^2+(y-y')^2} \equiv \mathcal{P}\frac{1}{y-y'}.$$

Imajući na umu komutator (3.9) i strukturu (4.1) gustoće $\rho(\mathbf{r})$, možemo pokazati, koristeći lančano pravilo funkcionalnog deriviranja, da se kanonski impuls $\pi(\mathbf{r})$ transformira u

$$\pi(\mathbf{r}) \equiv -i\frac{\delta}{\delta\rho(\mathbf{r})} = -i\int dz\frac{\delta\tilde{\rho}(z)}{\delta\rho(\mathbf{r})}\frac{\delta}{\delta\tilde{\rho}(z)} = -i\frac{\delta(0)}{\rho_0(x)}\frac{\delta}{\delta\tilde{\rho}(y)} \equiv \frac{\delta(0)}{\rho_0(x)}\tilde{\pi}(y). \tag{4.4}$$

Slično vidimo da derivacija impulsa po x iščezava:

$$\partial_x\pi(\mathbf{r})|_{x=0} = -\left.\frac{L}{N}\frac{\partial_x\rho_0(x)}{\rho_0(x)}\right|_{x=0}\tilde{\pi}(y) = 0. \tag{4.5}$$

Konačno imamo hamiltonijan izražen pomoću jednodimenzijskog polja $\tilde{\rho}(y)$ i njemu kanonski konjugiranog impulsa $\tilde{\pi}(y)$

$$H = \frac{L}{2N}\int dy\tilde{\rho}(y)\left(\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial y}\right)^2 + \frac{N}{2L}\int dy\tilde{\rho}(y)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\ln\tilde{\rho}(y) + \frac{N|\lambda|}{L}\fint dy'\frac{\tilde{\rho}(y')}{(y-y')}\right)^2. \tag{4.6}$$

To je hamiltonijan Calogerovog model. Još ćemo reskalirati polje $\tilde{\rho}(y) \to c\rho(y)$ i impuls $\tilde{\pi}(y) \to \pi(y)/c$, te uspostaviti punu korespondenciju s hamiltonijanom (2.16)

$$H = \frac{L}{cN}\left\{\frac{1}{2}\int dy\rho(y)\left(\frac{\partial\pi}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\int dy\rho(y)\left[\frac{\lambda_c-1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\ln\rho(y) + \lambda_c\fint dy'\frac{\rho(y')}{y-y'}\right]^2\right\}. \tag{4.7}$$

Postoji veza između konstante interakcije u Jackiw-Pi modelu $|\lambda|$, statističkog parametra u Calogerovom modelu λ_c i parametra c:

$$\frac{N}{L}c = \lambda_c - 1 \text{ and } \lambda\frac{N^2c^2}{L^2} = \lambda_c. \tag{4.8}$$

Parametar c nije slobodan, već je određen relacijom normiranja (3.10) gustoće u Jackiw-Pi modelu, te zahtjevom

$$\int dy\rho(y) = N_c,$$

gdje je N_c broj čestica u Calogerovom modelu, što nam daje $c = L/N_c$. Konačno, kombinacijom gornjih relacija dobivamo vezu među statističkim parametrima u modelima:

$$|\lambda|\left|\frac{N}{N_c}\right| = \frac{\lambda_c}{|\lambda_c - 1|}. \tag{4.9}$$

Svojstva ove relacije komentirat ćemo malo kasnije, u ovom odjeljku.

Rezultat rada [32] je vrlo zanimljiv, ali je zasnovan na pretpostavci (4.1), koju nažalost ne možemo dokazati, bar ne direktno. Zato smo u sljedećem koraku [11] razmotrili isti problem, u niskoenergijskom približenju, i upravo ta istraživanja čine okosnicu ove disertacije.

U drugom poglavlju smo ukratko izložili glavna svojstva Calogero-Sutherlandovog modela u kolektivnoj formulaciji, te smo našli disperzivnu relaciju (2.75) za male kvantne oscilacije oko konstantnog rješenja. U trećem poglavlju smo proučavali Jackiw-Pi model, glavna svojstva, solitonska rješenja, te konačno, spektar malih oscilacija oko točno određenog rješenja. Usporedimo spektar malih oscilacija oko osnovnog stanja u Calogero-Sutherlandovom modelu i u Jackiw-Pi modelu:

$$\text{Sutherlandov model}: \quad \omega_n^s = \frac{1}{r_0^2}\left(-\frac{\lambda_s - 1}{2}n^2 + \frac{N_s\lambda_s}{2}|n|\right), \tag{2.75}$$

$$\text{Jackiw} - \text{Pi model}$$

$$(\text{sferno} - \text{simetrično rješenje}): \quad \omega_n^{jp} = \frac{1}{r_0^2}\left(2n^2 + |n|\frac{N_{jp}|\lambda_{jp}|}{2}\right). \tag{3.49}$$

Veličine λ i N s indeksom s odnose se na statistički parametar i broj čestica u Sutherlandovom modelu, dok one s indeksom jp označavaju iste parametre, ali u

Jackiw-Pi modelu. Vidimo da su izrazi vrlo slični. Disperzionu relaciju za Jackiw-Pi model možemo reskalirati

$$\omega_n^{jp} \to \frac{4\omega_n^{jp}}{1-\lambda_s},$$

i dobivamo disperzijsku relaciju identičnu onoj za Sutherlandov model, ukoliko zahtjevamo da su broj čestica i statistički parametar u jednom i u drugom modelu vezani relacijom:

$$N_{jp}|\lambda_{jp}| = \frac{4N_s\lambda_s}{1-\lambda_s}. \tag{4.10}$$

Čini se prirodnim da je dinamička dimenzijska redukcija praćena statističkom transmutacijom, ali ono što ovu relciju izdvaja jest činjenica da je relacija (4.10) invarijantna na slijedeću transformaciju:

$$\lambda_s \to \frac{1}{\lambda_s} \text{ i } N_s \to -\lambda_s N_s. \tag{4.11}$$

Otprije je poznato da je Calogero-Sutherlandov model invarijantan [33] na tu transformaciju "dualnosti". Autori rada [34] su iskoristili tu dualnost da bi izračunali korelacijske funkcije gustoće za statističke parametre λ_s i $1/\lambda_s$, što je kasnije potvrđeno [14] korištenjem nekih svojstava egzaktnog rješenja (tj. Jackovih polinoma). To je lijep primjer pojma dualnosti tj. veze između perturbativnog i neperturbativnog limesa (ne nužno iste) teorije. Korištenjem relacija dualnosti pokazano je da su pet različitih teorija superstruna zapravo samo različiti limesi općenitije M- teorije. Ako malo bolje pogledamo relaciju dualnosti (4.11) i relaciju (4.10) vidimo da N, broj čestica može promijeniti predznak (!), što se baš ne čini fizikalnim. No, sama transformacija dualnosti odnosi se na pobuđenja u Calogero-Sutherlandovom modelu, tj. na kvazičestice i kvazišupljine, i tu je N samo parametar pa o tome ne moramo brinuti. Inače, istu vezu možemo dobiti ukoliko usporedimo disperzionu relaciju (2.51) za Calogerov model i izraz za spektar malih fluktuacija u Jackiw-Pi modelu (3.54), oko "zidnog" rješenja (3.30):

$$\text{Calogerov model}: \; \omega_n^c = \left(-\frac{\lambda_c - 1}{2} n^2 + \lambda_c \pi \rho_0^c |n|\right), \tag{2.51}$$

$$\text{Jackiw} - \text{Pi model (zidno rješenje)}: \ \omega_n^{jp} = \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{N_{jp}|\lambda_{jp}|\pi}{L}|n|\right), \qquad (3.55)$$

gdje je ρ_0 u disperzionoj relaciji za Calogerov model konstantno rješenje, normirano (u "kutiji" duljine L) kao $\rho_0 = N_c/L_c$, tako da zapravo ne dobivamo relaciju (4.10), već

$$\left(\frac{N}{L}\right)_{jp} |\lambda_{jp}| = \left(\frac{N}{L}\right)_c \frac{\lambda_c}{1-\lambda_c}, \qquad (4.12)$$

no L je ovdje samo parametar normalizacije inače nefizikalnih (divergentnih) rješenja, pa možemo odabrati da bude isti u oba slučaja. Primjećujemo i različit numerički faktor u relacijama (4.10) i (4.12), no on je posljedica različitih numeričkih faktora u relacijama (2.71) i (3.41) i može se izbjeći redefinicijom nekih konstanti. Vidimo da relacija (4.12) odgovara relaciji (4.9); u slučaju kad je $\lambda_c < 1$, gore navedene relacije su identične, a u slučaju kad je $\lambda_c > 1$, u relaciji (4.9) napravimo transformaciju dualnosti (4.11) i opet dobijemo relaciju (4.12). Dakle, možemo zaključiti da smo uspijeli, makar indirektno, potvrditi pretpostavku (4.1), o funkcionalnom obliku malih kvantnih oscilacija u Jackiw-Pi modelu, te na dva neekvivalentna načina izvesti relaciju (4.12), koja oslikava tip veze među analiziranim modelima.

Zanimljivost ove dimenzijske redukcije jest i u tome da njen rezultat nije Calogerov i/ili Sutherlandov model, već za svaki od njih dobijemo obje mogućnosti- model sa statističkim parametrom λ i brojem čestica N, te onaj sa statističkim parametrom $1/\lambda$ i brojem čestica $-\lambda N$. Izgleda kao da smo iz više dimenzije dobili "objašnjenje" za postojanje određene simetrije u nižedimenzijskom modelu. Teško je potvrditi ovakvu pretpostavku, zapravo interpretaciju dobivenih rezultata, ali svakako je vrlo intrigantno, i u svakom slučju potpuno u skladu s motivima koji stoje iza korištenja dimenzijske redukcije pri analizi određenih fizikalnih sustava.

4.2 Kvantna statistika

Zanimljivo je i pitanje statistika u modelima. Naime, u jednoj i dvije prostorne dimenzije, sam koncept statistike je suptilniji nego u uobičajene tri prostorne dimenzije. U ta dva slučaja moguće je definirati "intermedijarnu" statistiku, odnosno statistiku koja interpolira između bozonskog i fermionskog slučaja.

Lako se možemo uvjeriti da se spin u dvije prostorne dimenzije bitno razikuje od spina u tri ili više prostornih dimenzija. Naime, algebra angularnog impulsa spina je u tri dimenzije nekomutativna

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k,\ i,j,k = 1,2,3,$$

dok u dvije dimenzije imamo trivijalno komutativnu algebru, jer postoji samo jedan generator. Posljedica nekomutativnosti algebre jest da iz zahtjeva za pozitivnošću norme vlastitih stanja slijedi da vlastite vrijednosti spinskog angularnog momenta moraju biti cijeli ili polucijelobrojni višekratnici $\hbar$. U dvije prostorne dimenzije ne postoje nikakvi uvjeti na vlastite vrijednosti spinskog angularnog momenta, pa tako on može poprimiti bilo koji vrijednost. U relativističkoj kvantnoj teoriji polja postoji veza između spina čestica i njihove statistike (spin-statistika teorem [35]), pa tako možemo zaključiti da čestice u dvije dimenzije mogu imati bilo koju- intermedijarnu statistiku. U jednoj prostornoj dimenziji spin nije definiran, pa se pojam statistike mora definirati drugačije- nešto više o tome kasnije.

Uobičajena definicija kvantne statistike odnosi se na fazu koju dobije valna funkcije kad zamijenimo dvije identične čestice, no ispravno bi bilo reći da se radi o fazi koja se javlja kad dvije čestice *adijabatski* transportiramo da bi ih zamijenili. U tri ili više dimenzija gornje definicije su identične, no u nižim dimenzijama to više nije tako. To je vezano za činjenicu da pravi konfiguracijski prostor sistema identičnih čestica, tj. prostor u kome su identificirane točke koje odgovaraju različitom označavanju čestica, sadrži singularne točke. To su točke gdje se položaji dviju ili više čestica podudaraju. To znači da valne funkcije mogu biti višeznačne, te kad čestica pređe put po zatvorenoj krivulji oko singulariteta, valna funkcija dobiva netrivijalni fazni faktor.

Razmotrimo to pobliže. Neka je kofiguracijski prostor jedne čestice X. Konfiguracijski prostor N identičnih čestica, nije, kako bi to naivno pomislili X^N, već

X^N/S_N, gdje je S_N diskretna, konačna grupa dobivena permutacijama N identičnih čestica. Prostori X^N i X^N/S_N su lokalno izomorfni, osim u singularnim točkama, no globalno su bitno razlikuju. Da bismo odredili konfiguracijski prostor N identičnih čestica, moramo iz X^N/S_N isključiti točke u kojima se položaji dviju ili više čestica podudaraju. Tako dobivamo prostor sa singularitetima, te valna funkcija dobiva fazni faktor kad obiđemo oko singulariteta. Taj obilazak oko singulariteta fizikalno odgovara zamijeni dviju čestica, što u tri prostorne dimenzije daje $+1$ za bozone i -1 za fermione, dok su u dvije dimenzije mogući i drugi fazni faktori. Postojanje singulariteta u bilo kojem, pa tako i u konfiguracijskom, prostoru za posljedicu ima višestruku povezanost dvodimenzijskog prostora i samo dvostruku povezanost u tri prostorne dimenzije. Matematički rečeno prva klasa homotopije $\pi_1(X^N/S_N)$, odnosno grupa koju čine klase neekvivalentnih krivulja, je

$$\begin{aligned} \pi_1(X^N/S_N) &= B_N \text{ za } d=2 \\ &= S_N \text{ za } d \geq 3 \end{aligned}$$

B_N je grupa pletenica (*braid group*), koja ima kontinuiranu familiju jednodimenzionalnih reprezentacija, dok S_N, grupa permutacija ima samo dvije jednodimenzionalne reprezentacije. Elementarni uvod u grupu pletenica dan je u dodatku A.

U jednodimenzijskom slučaju situacija je još zamršenija, jer čestice moraju proći jedna kroz drugu da bi zamijenile mjesta, pa izgleda kao da je pitanje statistike vezano uz konkretan tip međudjelovanja u danom modelu. Stoga je novi, Haldaneov [4] koncept statistike, baziran na poopćenom Paulijevom principu isključenja, izazvao veliko zanimanje. Razmotrimo sistem s ukupnim brojem čestica $N = \sum_j N_j$, gdje je N_j broj čestica j-te vrste. Dodajmo jednu česticu tipa i u sistem, s tim da ne mijenjamo veličinu sistema i rubne uvjete. Držeči fiksnim N čestica početnog sistema, valnu funkciju novog, $N+1$-čestičnog sistema možemo razviti u bazi valnih funkcija dodane čestica. Dimenziju te baze označavamo s D_i. Ključna točka ovog razmatranja jest ta da dimenzija D_i može ovisiti o broju N_j čestica početnog sistema. Pretpostavljajući da je ta veza linearna, Haldane definira *statističku inter-*

akciju pomoću relacije:

$$\frac{\partial D_i}{\partial N_j} = -g_{ij}. \tag{4.13}$$

Za bozone, broj mogućih (slobodnih) jednočestičnih stanja ne ovisi o broju N_j, pa je $g_{ij} = 0$. Za fermione, broj slobodnih jednočestičnih stanja se smanji za jedan sa svakom dodanom česticom, pa je $g_{ij} = \delta_{ij}$. Glavna razlika između standarnog pristupa statistici i Haldaneovog je u tome što se u prvom pristupu statistika odnosi na realne, točkaste čestice, dok se u Haldaneovom pristupu toj statistici pokoravaju elementarna pobuđena sistema.

Poglavlje 5

Zaključak

I što reći za kraj? Ova disertacija predstavlja zaokruženje višegodišnjeg istraživanja Chern-Simonsove teorije tj. Jackiw-Pi modela i Calogero-Sutherlandovog modela. Naime, s Jackiw-Pi formulacijom [9] Chern-Simonsove teorije upoznala sam se pri izradi diplomskog rada. Zatim sam, u suradnji s dr. I. Andrićem i svojim mentorom, dr. V. Bardekom, istraživala Calogero-Sutherlandov model, primjenjujući metode kolektivne teorije polja. Između ostalog, analizirali smo spektar kvantnih fluktuacija oko osnovnog rješenja, te smo našli zanimljiva solitonska rješenja [36, 19]. Kako su otprije bila poznata solitonska rješenja u Jackiw-Pi modelu [9, 10], krenuli smo u istraživanje kvantnih fluktuacija oko tih rješenja, tražeći vezu s Calogero-Sutherlandovim modelom, i rezultati su izloženi u radovima [32, 11].

Ova veza, između modela u različito dimenzijskim prostor-vremenima, zanimljiva je sama po sebi, no ono što je u ovom trenutku čini posebno intrigantnom je još neistražena korespondencija s tzv. $\mathrm{AdS}_d/\mathrm{CFT}_{d-1}$ dualnošću [37]. Anti de Sitterov prostor (AdS) je, kao i de Sitterov prostor, rješenje Einsteinove jednadžbe za prazan prostor

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Razlika između anti de Sitterovog i de Sitterovog prostora jest u predznaku kozmološke konstante Λ. CFT označava konformnu teoriju polja, indeksi označavaju pripadni broj dimenzija. Originalna pretpostavka o vezi AdS prostora i konformne teorije polja odnosi se na teoriju (super)struna na prostoru tipa $\mathrm{AdS}_d\times\ \mathrm{M}_{D-d}$, gdje je M_{D-d} određena kompaktifikacija $(D-d)$-dimenzijskog prostora. Pretpostavka kaže da je kvantna teorija struna u tom prostoru matematički ekvivalentna, odnosno dualna, konformno invarijantnoj teoriji polja u jednoj dimenziji manje, tj. teoriji polja na granici AdS prostora.

U čemu je značaj takve pretpostavke, ukoliko je točna? Pokazano je da koristeći tu pretpostavku možemo iz klasične teorije struna i klasične supergravitacije dobiti neperturbativne informacije o konfornmo invarijantnoj teoriji polja u limesu $N\to\infty$. U nekoliko radova [38] je razmatrano kako zaobići zahtjev za konformnom invarijantnošću teorije na rubu, što bi omogućilo neperturbativnu analizu kvantne kromodinamike u limesu $N\to\infty$.

A kakve to veze ima s Chern-Simonsovom teorijom? Rekli smo da je AdS/CFT veza još uvijek pretpostavka, pa bi bilo korisno provjeriti da li vrijedi u nižem broju dimenzija, recimo za $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$. Einstein-Hilbertova akcija u (2+1)-dimenzijskom prostor-vremenu jest upravo Chern-Simonsova akcija, čije jednadžbe gibanja daju Einsteinovu jednadžbu za prazni prostor. Također, pokazano je da je Calogero-Sutherlandov model konformno invarijantana teorija polja s centralnim nabojem $c=1$[39]. U pristupu kolektivne teorije polja radimo u limesu $N\to\infty$, te imamo vezu između konstanti interakcije (4.12). Zapravo, bilo bi bolje napisati recimo relaciju (4.12) u obliku koji jasno odaje onu *klasičnu* relaciju dualnosti- odnos jakog i slabog vezanja:

$$\kappa=\left(\frac{1}{\lambda_s}-1\right)\frac{N_{jp}}{8\pi N_s},$$

gdje je κ konstanta interakcije u Chern-Simonsovoj teoriji. Nadam se da će buduća istraživanja potvrditi ova razmišljanja.

Dodatak A

Grupa pletenica

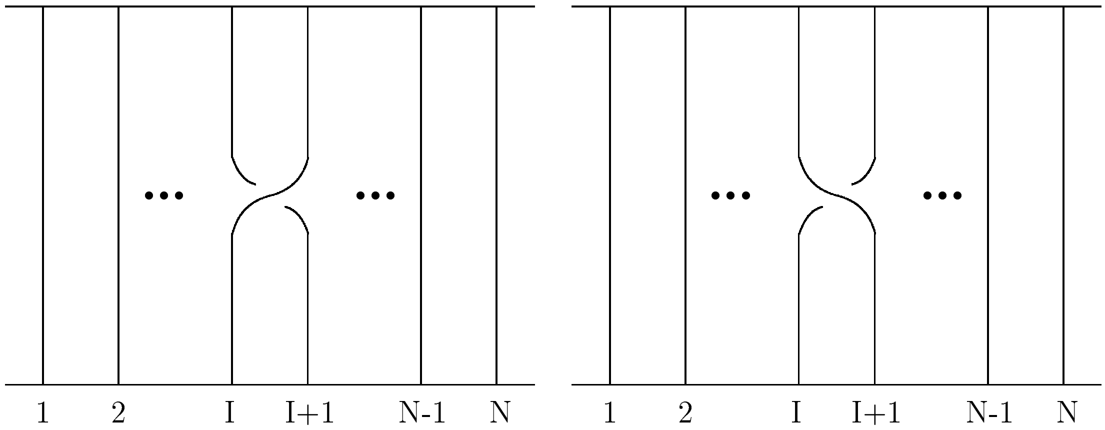
Grupa pletenica od N niti (B_N) je beskonačna grupa koja ima $N-1$ generatora σ_I ($1 \leq I \leq N-1$). Ti generatori zadovoljavaju sljedeće dvije relacije:

$$\sigma_I \sigma_{I+1} \sigma_I = \sigma_{I+1} \sigma_I \sigma_{I+1} \text{ za } I = 1, 2, \ldots, N-2 \tag{A.1}$$

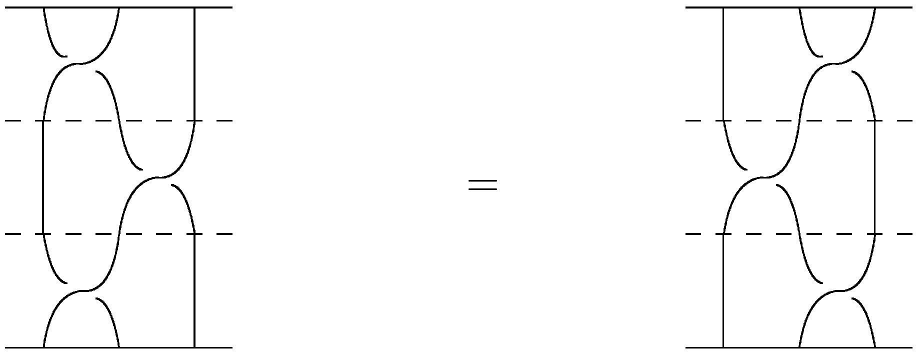
$$\sigma_I \sigma_J = \sigma_J \sigma_I \text{ za } |I - J| \geq 2 \tag{A.2}$$

Zapravo se može pokazati da su to jedine dvije relacije među generatorima σ_I. Inverzni generator označavamo sa σ_I^{-1}, identitet je 1, a centar grupe je generiran s $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{N-1})^N$.

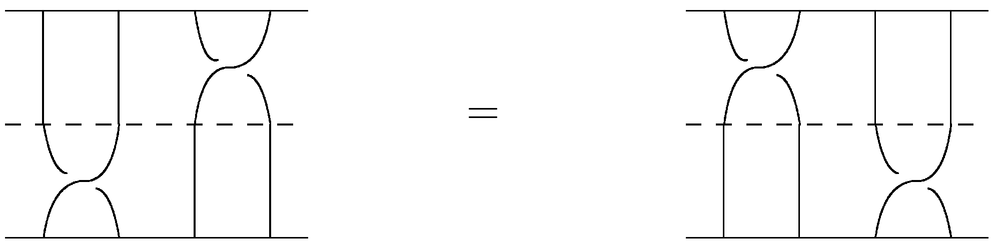
Slikovito govoreći, djelovanje generatora σ_I odgovara uplitanju I-te niti oko $(I+1)$ niti u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, i to tako da ne zahvatimo niti jednu drugu nit. Inverzni generator σ_I^{-1}, odgovara obrnutom "križanju" niti, što je prikazano na slici (A1). Na slijedeće dvije slike (slike (A2) i (A3)) prikazane su relacije (A.1) i (A.2). Iz priloženih slika, te gore navedenih svojstava, lako možemo zaključiti da je grupa pletenica puno bogatija od grupe permutacija. Razmotrite dvije putanja prikazane na slici (A4). U oba prikazana slučaja nema permutacije, i što se grupe permutacija tiče, oba slučaja pripadaju u klasu zajedno s identitetom, i grupa permutacija ne razlikuje te putanje. No, te dvije putanje su različiti elementi grupe pletenica.



Slika A1. Lijevo je prikazano djelovanje operatora σ_I, a desno inverznog operatora σ_I^{-1}.

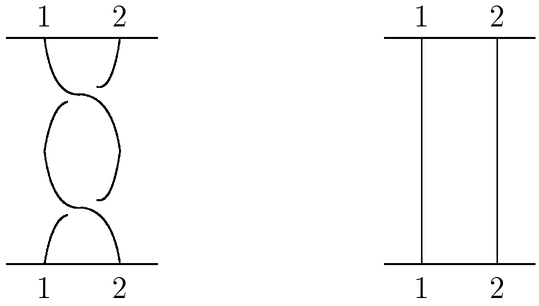


Slika A2. Slikoviti prikaz relacije (A.1).



Slika A3. Slikoviti prikaz relacije (A.2).

Iz slike je također jasno da općenito, σ_I na neku potenciju ne daje identitet. Samo u specijalnom slučaju kada je $\sigma_I^2 = 1$, za svaki I, grupa pletenica svodi se na grupu premutacija.



Slika A4. Bogatstvo grupe pletenica u usporedbi s grupom permutacija.

Iz relacija (A.1) i (A.2) lako možemo odrediti jednodimenzijske reprezentacije grupe pletenica. Jednodimenzijska reprezentacija je komutativna pa vrijedi:

$$\chi(\sigma_1) = \chi(\sigma_2) = \ldots = \chi(\sigma_{N-1}). \tag{A.3}$$

Različite reprezentacije parametriziramo parametrom θ,

$$\chi_\theta(\sigma_J) = \exp(i\theta), \text{ za svaki } 1 \leq J \leq N-1, \tag{A.4}$$

gdje je $0 \leq \theta < 2\pi$, ali inače proizvoljan, što odgovara činjenici da postoji beskonačno mnogo jednodimenzijskih reprezentacija grupe pletenica, označenih kontinuiranim statističkim parametrom θ.

U slučaju kada se opisuju kompliciraniji fizikalni sustavi, gdje su valne funkcije multipleti, potrebno je razmotriti višedimenzijske reprezentacije grupe pletenica. Također je u određenim fizikalnim situacijama potrebno razmatrati anione na plohama s netrivijalnim genusom, ili zakrivljenim plohama. No ovaj kratki pregled nekih svojstava grupe pletenica je trebao ukazati na porijeklo intermedijarne statistike u dvije dimenzije, te zainteresirane za sve neizrečeno, upućujemo na postojeću literaturu [40].

Dodatak B

Matematički identiteti

B1

Dokažimo relaciju (2.5), koju smo koristili u drugom poglavlju

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{x_i-x_j}\right)^2=\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{(x_i-x_j)^2}.$$

Raspišimo lijevu stranu gornjeg izraza

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{x_i-x_j}\right)^2=\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{(x_i-x_j)^2}+\sum_{j\neq i\neq k}^{N}\frac{1}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}. \tag{B.1}$$

Vidimo da sada moramo dokazati sljedeći identitet

$$\sum_{j\neq i\neq k}^{N}\frac{1}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}=0. \tag{B.2}$$

U gornjem izrazu (B.2) su svi indeksi "njemi" (sumiramo po njima), pa možemo napravititi supstitucije $i \leftrightarrow j$ ili $i \leftrightarrow k$, pa očito vrijedi

$$\begin{aligned}3\sum_{j\neq i\neq k}^{N}\frac{1}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)} &= \sum_{j\neq i\neq k}^{N}\frac{1}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}+\sum_{j\neq i\neq k}^{N}\frac{1}{(x_j-x_i)(x_j-x_k)}\\ &\quad+\sum_{j\neq i\neq k}^{N}\frac{1}{(x_k-x_j)(x_k-x_i)}.\end{aligned} \tag{B.3}$$

Svedemo li desnu stranu relacije (B.3) na zajednički nazivnik dobijemo

$$\sum_{j\neq i\neq k}^{N}\frac{(x_j-x_k)+(x_k-x_i)+(x_i-x_j)}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)(x_j-x_k)}=0, \tag{B.4}$$

što znači

$$\sum_{j\neq i\neq k}^{N} \frac{1}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} = 0. \tag{B.5}$$

Q.E.D.

B2

Na sličan način možemo dokazati identitet (2.25)

$$\sum_{i\neq j\neq k}^{N} \mathrm{ctg}\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\mathrm{ctg}\frac{\varphi_i - \varphi_k}{2} = -\frac{1}{3}N(N-1)(N-2).$$

Raspišimo lijevu stranu gornjeg izraza

$$\begin{aligned} 3\sum_{i\neq j\neq k}^{N} \mathrm{ctg}\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\mathrm{ctg}\frac{\varphi_i - \varphi_k}{2} &= \sum_{i\neq j\neq k}^{N} \mathrm{ctg}\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\mathrm{ctg}\frac{\varphi_i - \varphi_k}{2} \\ &+ \sum_{i\neq j\neq k}^{N} \mathrm{ctg}\frac{\varphi_j - \varphi_i}{2}\mathrm{ctg}\frac{\varphi_j - \varphi_k}{2} + \sum_{i\neq j\neq k}^{N} \mathrm{ctg}\frac{\varphi_k - \varphi_j}{2}\mathrm{ctg}\frac{\varphi_k - \varphi_i}{2}, \end{aligned} \tag{B.6}$$

te pređimo na nave varijable $z_i = \exp(i\varphi_i)$. Lako se uvjerimo da vrijedi

$$\mathrm{ctg}\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2} = i\frac{z_i + z_j}{z_i - z_j}. \tag{B.7}$$

Uvrstimo relaciju (B.7) u (B.6), svedemo na zajednički nazivnik i dobijemo

$$\sum_{i\neq j\neq k}^{N} \frac{(z_i + z_j)(z_i + z_k)(z_j - z_k) - (i \leftrightarrow j) - (i \leftrightarrow k)}{(z_i - z_j)(z_i - z_k)(z_j - z_k)} = \sum_{i\neq j\neq k}^{N} -1, \tag{B.8}$$

gdje oznaka $(i \leftrightarrow j(k))$ označava izraz ekvivalentan prethodnom, uz izmjenu indeksa i indeksom $j(k)$ i obrnuto. Sumacija po i, j i k, uz uvjet $i \neq j \neq k$ onda točno reproducira traženu relaciju (2.25).

B3

Dokažimo relaciju koju smo u drugom poglavlju naveli u formi

$$\frac{P}{x-y}\frac{P}{x-z} + \frac{P}{y-x}\frac{P}{y-z} + \frac{P}{z-x}\frac{P}{z-y} = \pi^2\delta(x-y)\delta(x-z).$$

Gornja relacija vrijedi za distribucije, pa ćemo ju pomnožiti s $\rho(x)\rho(y)\rho(z)$, te integrirati po $x,\ y,\ z$,

$$\int dx \rho(x) \fint dy \frac{\rho(y)}{x-y} \fint dz \frac{\rho(z)}{x-z} = \frac{\pi^2}{3} \int dx \rho^3(x). \tag{B.9}$$

Identitet (B.9) dokazujemo pomoću funkcije

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int dx \frac{\rho(x)}{x-z}, \tag{B.10}$$

koja je očito analitička u kompleksnoj ravnini s rezom na realnoj osi. Kako je $\rho(x)$ ograničena s (2.20), slijedi da za $z \to \infty$, $f(z) \to -1/\pi z$. Ukoliko sada $f^3(z)$ integriramo po konturi C koja se proteže u beskonačnost, imamo

$$\oint_C f^3(z) dz = 0. \tag{B.11}$$

Deformacijom konture do gornje i donjeg ruba realne osi dobivamo

$$\int dx [f^3(x+i\varepsilon) - f^3(x-i\varepsilon)] = 0. \tag{B.12}$$

Usporedbom realnog i maginarnog dijela relacije (B.10) dobivamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} f(x+i\varepsilon) &= \frac{1}{\pi} \fint dy \frac{\rho(y)}{y-x}, \\ \mathrm{Im} f(x+i\varepsilon) &= \rho(x). \end{aligned} \tag{B.13}$$

Pri izvođenju gornjih relacija koristili smo izraze

$$\begin{aligned} P\frac{1}{x} &= \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} \\ \delta(x) &= \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}. \end{aligned} \tag{B.14}$$

Uočimo da je samo druga relacija u (B.14) osjetljiva na predznak ε, odnosno da vrijedi $\mathrm{Im} f(x+i\varepsilon) = -\mathrm{Im} f(x-i\varepsilon)$, i $\mathrm{Re} f(x+i\varepsilon) = \mathrm{Re} f(x-i\varepsilon)$. Iz (B.12) onda slijedi

$$\int dx \left[6i \left(\mathrm{Re} f(x+i\varepsilon)\right)^2 \mathrm{Im} f(x+i\varepsilon) - 2i \left(\mathrm{Im} f(x+i\varepsilon)\right)^3\right] = 0. \tag{B.15}$$

Uvrštavanjem relacija (B.13) u gornji izraz lako dobivamo traženi identitet (B.9).

Literatura

[1] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos i G. Dvali, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 086044.

[2] N. Seiberg i E. Witten, *Nucl. Phys.* **B426** (1994) 19; (E) *Nucl. Phys.* **B430** (1994) 485.

[3] J. M. Leinaas i J. Myrheim, *Nuovo Cim.* **B37**, (1977) 1.

[4] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 937.

[5] A. Jevicki i B. Sakita, *Nucl. Phys.* **B165** (1980) 511.

[6] L. Jonke, "Solitoni u Calogero-Sutherlandovom modelu", magistarski rad, Zagreb, 1997.

[7] I. Andrić, V. Bardek i L. Jonke, *Fizika* **B4** (1995) 93.

[8] G. Dunne, *Self-Dual Chern-Simons Theories*, Lecture notes in Physics- New Series m: Monographs 36, Springer, 1995.

[9] R. Jackiw i S. Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2969 ; *Phys. Rev.* **D42** (1990) 3500 ; *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 107, (1992) 1.

[10] I. Andrić i V. Bardek, *Phys. Rev.* **D47** (1993) 5546.

[11] I. Andrić, V. Bardek i L. Jonke, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 107702.

[12] F. Calogero, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 2191, 2197; *J. Math. Phys.* **12** (1971) 419.

[13] B. Sutherland, *Phys. Rev.* **A4** (1971) 2019; *Phys. Rev.* **A5** (1972) 1372; *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975) 1083.

[14] Z. N. C. Ha, *Nucl. Phys.* **B435** (1995) 604.

[15] Andrić i V. Bardek, *J. Phys.* **A21** (1988) 2847; *J. Phys.* **A24** (1991) 353.

[16] J. A. Minahan i A. P. Polychronakos, *Phys. Lett.* **B312** (1993) 155.

[17] A. Jevicki, *Nucl. Phys.* **B376** (1992) 75; J. Polchinski, "What is string theory?", NSF-ITP-94-97, hep-th/9411028.

[18] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 635; B. S. Shastry, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 639.

[19] I. Andrić, V. Bardek i L. Jonke, *J. Phys.* **A30** (1997) 717.

[20] Andrić, A. Jevicki i H. Levine, *Nucl. Phys.* **B215** (1983) 307.

[21] S.- J. Kim, *Phys. Lett.* **B343** (1995) 244 ; S.- J. Kim i C. Lee, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 2227.

[22] I. S. Gradshteyn i I. M. Ryzhik (ur.), *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 1980.

[23] T. Kaluza, *Sitzungsber. Preuss Akad. Wiss. Berlin Math. Phys.* **B130**, (1921) 174; O. Klein, *Z. Phys.* **37**, (1926) 895; D. Bailin i A. Lowe, *Rep. Prog. Phys* **50**, (1987) 1087.

[24] G. 't Hooft, *Salamfest 1993*, p.284, gr-qc/9310026; L. Susskind, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377.

[25] H.-c. Kao, K. Lee i T. Lee, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 6447.

[26] A. P. Polychronakos, *Phys. Lett.* **B264** (1991) 362; T. H. Hansson, J. M. Leinaas i J. Myrheim, *Nucl. Phys.* **B384** (1992) 559.

[27] L. Brink, T. H. Hansson, S. Konstein i M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys.* **B401** (1993) 591.

[28] S. Iso, *Mod. Phys. Lett.* **A9** (1994) 2123; H. Azuma i S. Iso, *Phys. Lett.* **B331** (1994) 107.

[29] S. Iso i S. J. Rey, *Phys. Lett.* **B352** (1995) 111.

[30] S. Iso, D. Karabali i B. Sakita, *Phys. Lett.* **B296** (1992) 143; A. Cappeli, C. A. Trugenberger i G. R. Zemba, *Nucl. Phys.* **B396** (1993) 465 ; *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 1902; R. Caracciolo, A. Lerda i G. R. Zemba, *Phys. Lett.* **B352** (1995) 304.

[31] T. H. Hansson, J. M. Leinaas i J. Myrheim, *Nucl. Phys.* **B384** (1992) 559.

[32] I. Andrić, V. Bardek i L. Jonke, *Fizika* **B7** (1998) 119.

[33] R. P. Stanley, *Adv. Math.* **77**, (1989) 76.

[34] J. A. Minahan i A. P. Polychronacos, *Phys. Rev.* **B50** (1994) 4236.

[35] R. F. Streater i A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, 1964.

[36] I. Andrić, V. Bardek i L. Jonke, *Phys. Lett.* **B357** (1995) 374.

[37] J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, (1998) 231; O. Aharony, S. Gusber, J. Maldacena, H. OOguri i Y. Oz, hep-th/9905111.

[38] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, (1998) 505; A. M. Polyakov, *Int. J. Mod. Phys.* **A14**, (1999) 645; I. R. Klebanov i A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys.* **B546** (1999) 155.

[39] N. Kawakami i S.-K. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 2493 ; *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **107**, (1992) 59.

[40] Y. Hatsugai, M. Kohmoto i Y.- S. Wu, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **107**, (1992) 101, i tamo navedena literatura.

Sažetak

U radu je izložena kolektivna formulacija Calogero-Sutherlandovog i Jackiw-Pi modela. Nađene su disperzione relacije malih kvantnih fluktuacija oko određenih rješenja minimalne energije u oba modela. Uočeno je da kolektivna teorija polja, odnosno limes $N \to \infty$ prirodno vodi na dimenzijsku redukciju Jackiw-Pi modela, što omogućuje identifikaciju veze među modelima. Diskutirane su posljedice dimenzijske redukcije, statistička transmutacija i relacije dualnosti.

Summary

We consider the Calogero-Sutherland model and the Jackiw-Pi model in the collective-field approach based on the $1/N$ expansion. Dispersion relations for small quantum fluctuations around specific ground-state solutions have been found in both models. It has been noticed that collective-field theory, i. e., the large-N limit, leads to the dimensional reduction of the Jackiw-Pi model, allowing one to identify the type of relation between the two models. The consequences of the dimensional reduction, being statistical transmutation and duality relations, have been discussed.

Životopis

Rođena sam 27. listopada 1970. godine u Zagrebu, gdje sam završila osnovnu i srednju školu (MIOC). Godine 1988. upisala sam se na studij fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

Dana 21. ožujka 1994. uspješno sam položila diplomski ispit i time završila dodiplomski studij fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu s prosječnom ocjenom 4.55. Diplomski rad, s temom "Nerelativistička kvantna i klasična Chern-Simonsova teorija", izradila sam pod vodstvom prof. dr. Ivice Piceka (Fizički odjel, PMF), te stručnim vodstvom dr. Velimira Bardeka (Zavod za teorijsku fiziku, IRB).

U travnju iste godine zaposlena sam na Institutu Ruđer Bošković, u Zavodu za teorijsku fiziku, kao znanstveni novak. Magistrirala sam 21. ožujka 1997. i time završila poslijediplomski studij prirodnih znanosti na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Magistarski rad, s temom "Solitoni u Calogero-Sutherlandovom modelu", izradila sam pod vodstvom dr. Velimira Bardeka (Zavod za teorijsku fiziku, IRB).

Popis radova

Znanstveni radovi:

1. Quantum fluctuations of the Chern-Simons theory and dynamical dimensional reduction,
   I. Andrić, V. Bardek, L. Jonke, Phys. Rev. D59 (1999) 107702

2. Edge excitations and the contact term in anyonic systems,
   I. Andrić, V. Bardek, L. Jonke, Nuovo Cim. B113 (1998) 1253

3. Collective-field fluctuations around the wall solution of the Chern-Simons theory,
   I. Andrić, V. Bardek, L. Jonke, Fizika B7 (1998) 119

4. Multi-vortex solution in the Sutherland model,
   I. Andrić, V. Bardek, L. Jonke, J. Phys. A30 (1997) 717

5. Collective-Field Excitations in the Calogero Model,
   I. Andrić, V. Bardek, L. Jonke, Fizika B4 (1995) 93

6. Solitons in the Calogero-Sutherland Collective-Field Model,
   I. Andrić, V. Bardek, L. Jonke, Phys. Lett. B357 (1995) 374

Radovi u zbornicima:

1. Dimensional Reduction of the Chern-Simons Theory in Large-N Limit,
   I. Andrić, V. Bardek, L. Jonke, Proceedings of the IV Workshop on QCD, Paris 1998, ur: H. M. Fried i B. Mueller, World Scientific 1999, str. 326-331

2. Solitons in the Calogero-Sutherland Collective-Field Model,
I. Andrić, V. Bardek, L. Jonke, Proceedings of the Schladming School 1995 (Lecture Notes in Physics 469), ur: H. Grosse i L. Pittner, Springer-Verlag 1996, str. 245-248