Sveučilište u Zagrebu
PMF – Matematički odjel

Tvrtko Tadić

Brownovo gibanje i Dirichletov rubni problem

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, listopad 2008.

Sveučilište u Zagrebu
PMF – Matematički odjel

Tvrtko Tadić

Brownovo gibanje i Dirichletov rubni problem

DIPLOMSKI RAD

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, listopad 2008.

Sadržaj

Uvod

Kao što naslov sugerira bavit ćemo se jednim od najvažnijih slučajnih procesa – **Brownovim gibanjem** $\{W(t) : t \geq 0\}$ i njegovom vezom s **Dirichletovim rubnim problemom**

$$\Delta u = 0$$

na otvorenom povezanom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$ s rubnim uvjetom

$$u|_{\partial U} = \varphi$$

za $\varphi \in C(\partial U)$.

Priča o Brownovom gibanju počinje sa britanskim botaničarom **Robertom Brownom**[1], koji je proučavajući pod mikroskopom zrnce peluda u vodi, primijetio da se čestice peluda kaotično kreću. On je uočio da te čestice nasumično mijenjaju smjer i brzinu gibanja. Kasnije je fizikalno objašnjeno da do gibanja dolazi zbog sudara sa drugim česticama iz okoline. Postoje naznake da je ovaj fenomen opažen i ranije.

Albert Einstein i **Marian Smoluchowski**[2] (neovisno jedan od drugoga) pokazali su, preko jednadžbe provođenja, vezu Brownovog gibanja i Gaussovskih funkcija. **Jean Perin**[3] je svojim eksperimentima potvrdio rezultate Einsteina i Smoluchowskog.

Matematički (vjerojatnosni) model nosi naziv Wienerov proces u čast američkog matematičara **Norberta Wienera**. Wiener je prvi postavio precizniji matematički model za Brownovo gibanje. U ovom radu posvetit ćemo se upravo tom modelu.

Danas se matematički model Brownova gibanja koristi za modeliranje cijena na burzama. Kao što na jednu česticu peluda utječe kretanje molekula vode, tako i na kretanje cijena na burzama utječu razni drugi (često nepredvidivi) faktori.

Ovaj rad sastoji se od četiri poglavlja. U nultom poglavlju *Preliminarije* ponovljene su neke definicije i rezultati, a i uvedeni su neki novi pojmovi (poput slučajnih elemenata).

U prvom poglavlju *Osnovna svojstva Brownovog gibanja* definiramo ovaj proces, dokazujemo egzistenciju vjerojatnosnog prostora, pokazujemo da Brownovo

[1] 1773.-1858.

[2] poljski fizičar, 1872.-1917.

[3] francuski fizičar, 1870.-1942.

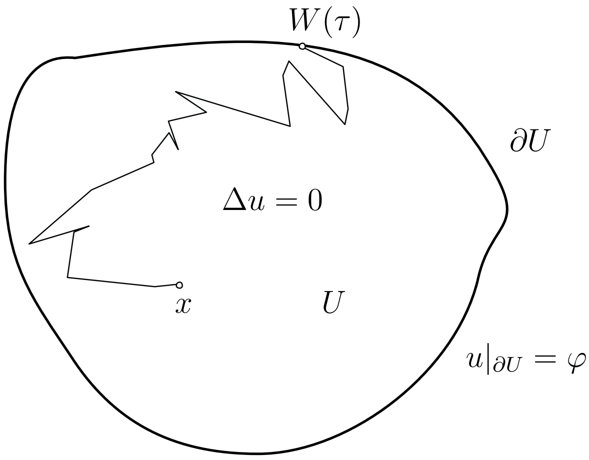
gibanje pripada skupini **Gaussovih procesa** i neka vremenska svojstva, kao i važnu vezu između **slučajne šetnje** i Brownovog gibanja. U ovom poglavlju, nadalje dokazujemo da ne postoji *vremenski interval* u kojem je Brownovo gibanje monotono, te da funkcija $t \mapsto W(t)$ nije derivabilna ni u jednoj točki (gotovo sigurno).

U drugom poglavlju *Markovljevo svojstvo i harmoničnost* uvodimo nove pojmove poput **filtracije**, *višedimenzionalnog* Brownovog gibanja i **vremena zaustavljanja**. Promatramo (jako) **Markovljevo svojstvo** Brownovog gibanja i neke posljedice tih svojstava. Pokazujemo da je Brownovo gibanje **martingal** i da pripada skupini **Markovljevih procesa**. Preko nekih općenitih teorema, koji govore o svojstvima martingala, pokazujemo svojstva vremena izlaska.

U trećem poglavlju *Dirichletov problem* ponavljamo neka poznata svojstva **harmonijskih funkcija**, uvodimo pojam **Dirichletovog rubnog problema** i pokazujemo jedinstvenost njegovog rješenja (ukoliko postoji). Na kraju pokazujemo da ako skup U na kojem je zadan Dirichletov rubni problem omeđen i zadovoljava **Poincaréov uvjet konusa** da onda postoji rješenje Dirichletovog rubnog problema. U tom slučaju rješenje je zadano sa

$$u(x) = \mathbb{E}_x[\varphi(W(\tau))], \tag{$*$}$$

gdje je $\tau = \inf\{t \geq 0 : W(t) \in \partial U\}$.



Slika 0.1. *Interpretacija jednakosti* ($*$)*: Prosjek vrijednosti funkcije* φ *u točkama prvog susreta s rubom* ∂U *Brownovog gibanja s početkom u* x *teži prema* $u(x)$.

0. Preliminarije

0.1. Limesi superior i inferior

Mnogo puta smo se imali priliku susresti s ovim limesima, a i u ovom radu ćemo ih susretati često. Znamo da postoji više vrsta tih limesa, npr. limes inferior za nizove, limes superior za skupove. U ovom odjeljku kratko ćemo ponoviti definicije, uvesti oznake i navesti svojstva ovih limesa, te se upoznati s limesom inferiorom i superiorom funkcija.

Definicija 1. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Tada sa*

$$\liminf_n a_n := \sup\{\inf\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

označavamo ***limes inferior*** *ili* ***donji limes*** *niza (a_n), a sa*

$$\limsup_n a_n := \inf\{\sup\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

označavamo ***limes superior*** *ili* ***gornji limes*** *niza (a_n).*

Sljedeća propozicija govori o svojstvima limesa superior i inferior za niz brojeva.

Propozicija 0.1. *Za niz realnih brojeva (a_n) vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) Limes inferior i superior postižu svoju vrijednost u skupu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, tj. $\liminf_n a_n, \limsup_n a_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

(b) Vrijedi

$$\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$$

i pritom je $\liminf_n a_n$ najmanja, a $\limsup_n a_n$ najveća točka gomilanja niza (a_n) u $\overline{\mathbb{R}}$.

(c) Niz (a_n) konvergira u $\overline{\mathbb{R}}$, ako i samo ako je $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n$. U tom slučaju vrijedi $\lim_n a_n = \liminf_n a_n = \limsup_n a_n$.

Sljedeća vrsta limesa superiora i inferiora s kojom smo se susreli je ona za nizove skupova.

Definicija 2. *Neka je (A_n) niz događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sa*

$$\overline{\lim_n} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

*definiramo **limes superior** tog niza, a sa*

$$\underline{\lim_n} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

***limes inferior** toga niza.*

Sljedeća propozicija nam govori o poznatim svojstvima limesa superior i inferior za niz skupova.

Propozicija 0.2. *Neka je (A_n) niz događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) $\overline{\lim}_n A_n, \underline{\lim}_n A_n \in \mathcal{F}$.

(b) Sljedeće skupovne jednakosti su točne

$$\begin{aligned} \overline{\lim_n} A_n &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ za beskonačno mnogo } n\} \\ \underline{\lim_n} A_n &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ za sve } n \text{ osim njih konačno mnogo}\} \end{aligned}$$

(c) Vrijedi $\underline{\lim}_n A_n \subseteq \overline{\lim}_n A_n$.

(d) Ako je (A_n) rastući niz događaja, tada je

$$\underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

a ako je padajući, tada je

$$\underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(e) Vrijedi nejednakost

$$\mathbb{P}(\underline{\lim_n} A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\overline{\lim_n} A_n)$$

Posljednja vrsta je limes superior i inferior za funkcije u nekoj točki.

Definicija 3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija i S^d skup gomilišta skupa S u $\overline{\mathbb{R}}$. Za $x_0 \in S^d$ sa*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \sup\{a \in \overline{\mathbb{R}} : (\exists (x_n) \in (S \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}})(x_n \to x_0)(f(x_n) \to a)\}$$

*definiramo **limes superior funkcije u točki** x_0, a sa*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \inf\{a \in \overline{\mathbb{R}} : (\exists (x_n) \in (S \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}})(x_n \to x_0)(f(x_n) \to a)\}$$

*definiramo **limes inferior funkcije u točki** x_0.*

Trebat će nam limes superior i inferior s lijeva i zdesna za funkcije u nekoj točki.

Definicija 4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Označimo sa*

$$S_-^d := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : (\forall \varepsilon > 0)(\exists s \in S)(s \in \langle x - \varepsilon, x\rangle)\},$$

$$S_+^d := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : (\forall \varepsilon > 0)(\exists s \in S)(s \in \langle x, x + \varepsilon\rangle)\}.$$

Za $x_0 \in S_-^d$ sa

$$\limsup_{x\to x_0-} f(x) = \sup\{a \in \overline{\mathbb{R}} : (\exists (x_n) \in (S \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}})(x_n \nearrow x_0)(f(x_n) \to a)\}$$

$$\liminf_{x\to x_0-} f(x) = \inf\{a \in \overline{\mathbb{R}} : (\exists (x_n) \in (S \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}})(x_n \nearrow x_0)(f(x_n) \to a)\}$$

*definiramo **limese superior i inferior s lijeva funkcije u točki** x_0. Za $x_0 \in S_+^d$ sa*

$$\limsup_{x\to x_0+} f(x) = \sup\{a \in \overline{\mathbb{R}} : (\exists (x_n) \in (S \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}})(x_n \searrow x_0)(f(x_n) \to a)\}$$

$$\liminf_{x\to x_0+} f(x) = \inf\{a \in \overline{\mathbb{R}} : (\exists (x_n) \in (S \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}})(x_n \searrow x_0)(f(x_n) \to a)\}$$

*definiramo **limese superior i inferior funkcije zdesna u točki** x_0.*

Sljedeća propozicija će nam reći nešto o vezi limesa funkcije i limesa superior i inferior funkcije.

Propozicija 0.3. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija i $x_0 \in R$. Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) Limes $\lim_{x\to x_0} f(x)$ postoji ako i samo ako je

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

(b) Limes $\lim_{x\to x_0\pm} f(x)$ postoji ako i samo ako je

$$\limsup_{x\to x_0\pm} f(x) = \liminf_{x\to x_0\pm} f(x).$$

0.2. Borel-Cantellijeva lema i Borelov zakon nula-jedan

Vrlo često će nam trebati neki kriterij da utvrdimo da li se nešto dogodilo beskonačno mnogo puta. O tome nam govori sljedeća propozicija.

Propozicija 0.4. (Borel-Cantellijeva lema) *Ako su A_n, $n \in \mathbb{N}$ događaji u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty,$$

tada je

$$\mathbb{P}(\overline{\lim_n} A_n) = \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} = +\infty\right) = 0.$$

Ako su događaji A_n i nezavisni, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 0.5. (Borelov zakon nula-jedan) *Neka su A_n, $n \in \mathbb{N}$ nezavisni događaji u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada je*

$$\mathbb{P}(\overline{\lim_n} A_n) = \begin{cases} 0, & \textit{ako je } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty, \\ 1, & \textit{ako je } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty. \end{cases}$$

0.3. Gotovo sigurna svojstva

Ovdje ćemo precizno definirati gotovo sigurna svojstva.

Definicija 5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Za događaj $A \in \mathcal{F}$ kažemo da je* ***vjerojatnosti nula*** *ili* ***zanemariv****, ako je $\mathbb{P}(A) = 0$.*
Za svojstvo $P(\omega)$ kažemo da vrijedi ***gotovo sigurno na događaju*** *$B \in \mathcal{F}$, ako postoji zanemariv događaj $C \in \mathcal{F}$ (podskup od B) takav da za sve $\omega \in B \setminus C$ je ispunjeno $P(\omega)$.*
Ako je $B = \Omega$ onda kažemo da svojstvo P vrijedi ***gotovo sigurno****.*

Vrlo često će se događati da ćemo imati gotovo sigurna svojstva P za koja skup

$$\{\omega \in \Omega : P(\omega)\}$$

uopće *ne mora* biti izmjeriv, tj. nije događaj!

Primjerice, ako imamo vremenski neprekidan slučajni proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ možemo zahtijevati da $t \mapsto X(t)$ bude gotovo sigurno neprekidno preslikavanje, no skup

$$\{\omega \in \Omega : t \mapsto X(t)(\omega) \text{ } \textit{neprekidno preslikavanje}\}$$

ne mora biti događaj. Mi ćemo u ovakvom slučaju pokazati da postoji događaj A za koji je $\mathbb{P}(A) = 1$ takav da je za $\omega \in A$ preslikavanje $t \mapsto X(t)(\omega)$ neprekidno.

0.4. Slučajni elementi na metričkom prostoru i konvergencija po distribuciji

Kako bismo mogli bolje proučavali slučajne procese više nećemo moći promatrati samo slučajne varijable ili vektore na konačnodimenzionalnom realnom prostoru, već ćemo morati razmatrati prirodno poopćenje pojma slučajnih varijabli, tzv. slučajne elemente na nekom općenitom metričkom prostoru.

Definicija 6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i (M, d) metrički prostor. Sa $\mathcal{T}_d$ označimo topologiju na prostoru M induciranu metrikom d i neka je $\mathcal{B}(M) = \sigma(\mathcal{T}_d)$. Preslikavanje $X : \Omega \to M$ je* ***slučajni element*** *(u M), ako je ono izmjeriva funkcija u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(M))$.*

Za slučajne elemente u metričkim prostorima vrijede razni slični teoremi onima koje smo dokazivali za slučajne varijable, no definicija konvergencije po distribuciji je nešto drukčija.

Definicija 7. *Neka je (M, d) metrički prostor i $\mathcal{B}(M)$ Borelova σ-algebra na M. Pretpostavimo da su X_n za $n \in \mathbb{N}$ i X slučajni elementi u M. Kažemo da niz slučajnih elemenata (X_n) konvergira po distribuciji slučajnom elementu X ako za svaku omeđenu neprekidnu funkciju $g : M \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}[g(X)].$$

U tom slučaju pišemo $X_n \xrightarrow{d} X$.

Napomena 1. Uočimo da kompozicija $g \circ X$ izmjerive funkcije $g : M \to \mathbb{R}$ (u paru σ-algebri $(\mathcal{B}(M), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) i slučajnog elementa (na M) X predstavlja izmjerivu funkciju, odnosno u ovom slučaju je $g(X)$ slučajna varijabla.

Napomena 2. Slučajni elementi X i X_n za $n \in \mathbb{N}$ ne moraju nužno biti definirani na istom vjerojatnosnom prostoru. (Kao što to nije bilo nužno ni kod konvergencije po distribuciji slučajnih varijabli).

Pojam konvergencije gotovo sigurno za slučajne elemente je analogan onom kojeg smo imali kod slučajnih varijabli. Kao i kod slučajnih varijabli, kod slučajnih elemenata konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po distribuciji.

Teorem 0.6. *Neka niz (X_n) niz slučajnih elemenata (u metričkom prostoru M) koji konvergira gotovo sigurno prema slučajnom elementu (u M) X (na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$). Tada vrijedi $X_n \xrightarrow{d} X$.*

Sljedeći teorem nam govori o karakterizacijama konvergencije slučajnih elemenata po distribuciji.

Teorem 0.7. (PORTMANTEAUOV TEOREM) *Neka su X i X_n za $n \in \mathbb{N}$ slučajni elementi na nekom metričkom prostoru M. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne.*

(i) $X_n \xrightarrow{d} X$.

(ii) *Za sve zatvorene skupove F u M vrijedi*

$$\limsup_n \mathbb{P}(X_n \in F) \le \mathbb{P}(X \in F).$$

(iii) Za sve otvorene skupove U u M vrijedi

$$\mathbb{P}(X \in U) \leq \liminf_n \mathbb{P}(X_n \in U).$$

(iv) Za sve Borelove skupove A u M za koje je $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

(v) Za sve omeđene izmjerive funkcije $g : M \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $\mathbb{P}(g \text{ ima prekid u } X) = 0$ vrijedi

$$\mathbb{E}[g(X_n)] \to \mathbb{E}[g(X)].$$

Napomena. Za izmjerivu funkciju g skup $\{g \text{ ima prekid u } X\} = \{X \in D_g\}$ (gdje je D_g oznaka za skup točaka u kojima g ima prekid) je izmjeriv.

Za slučajne varijable (i slučajne vektore) definicija konvergencije po distribuciji ekvivalentna onoj za slučajne elemente u metričkom prostoru $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$) sa standardnom euklidskom metrikom.

Teorem 0.8. (Helly-Bray teorem) *Neka su X i X_n za $n \in \mathbb{N}$ slučajne varijable te neka su njihove funkcije distribucije dane sa $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ i $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x)$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne*

(i) Niz (X_n) konvergira po distribuciji prema X (u smislu definicije 7).

(ii) Vrijedi $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ za sve x u kojima je F neprekidna.

Ista tvrdnja vrijedi za slučajne vektore. Odjeljak završavamo sljedećom lemom i njezinom posljedicom.

Lema 0.9. *Neka su M i M' metrički prostori i $g : M \to M'$ neprekidna funkcija. Neka niz slučajnih elemenata (X_n) (u M) konvergira po distribuciji slučajnom elementu (u M) X. Tada su $g(X)$ i $g(X_n)$ za $n \in \mathbb{N}$ slučajni elementi (u (M')) i vrijedi $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.*

Posljedica 0.10. *Neka je $(\mathbf{X}_n)$ niz d-dimenzionalnih slučajnih vektora koji konvergira po distribuciji d-dimenzionalnom slučajnom vektoru $\mathbf{X}$. Tada za sve neprekidne funkcije $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ vrijedi $g(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{d} g(\mathbf{X})$.*

0.5. Višedimenzionalne normalne razdiobe

U cijelom odjeljku radimo na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na kojem su definirane slučajne varijable koje navodimo.

Definicija 8. *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne jedinične normalne slučajne varijable. Slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ zovemo* ***standardni normalni n-dimenzionalni slučajni vektor****. Ovo označavamo $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$.*

Pokazuje se da vrijede sljedeća svojstva.

Propozicija 0.11. *Funkcija gustoće standardnog n-dimenzionalnog normalnog slučajnog vektora $\mathbf{X}$ je dana formulom*

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2},$$

gdje je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Također vrijedi da je očekivanje $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ i kovarijacijska matrica $\mathbf{Cov}[\mathbf{X}] = \mathbf{I} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Definicija 9. *Kažemo da slučajni vektor $\mathbf{Y}$ ima m-**dimenzionalnu normalnu razdiobu** ako postoje n-dimenzionalni standardni normalni slučajni vektor $\mathbf{X}$, matrica $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ i m-dimenzionalni vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ takvi da vrijedi*

$$\mathbf{Y}^\tau = \mathbf{A}\mathbf{X}^\tau + \mathbf{b}^\tau.$$

Vrijede sljedeća svojstva.

Propozicija 0.12. *Slučajni vektor $\mathbf{Y}$ definiran u definiciji 9 ima matematičko očekivanje $\mathbb{E}[\mathbf{Y}] = \mathbf{b}$ i kovarijacijsku matricu $\mathbf{Cov}[\mathbf{Y}] = \mathbf{A}\mathbf{A}^\tau$.*

Propozicija 0.13. *Neka je $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ regularna matrica, $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{Y}^\tau = \mathbf{A}\mathbf{X}^\tau + \mathbf{b}^\tau$. Tada je $\mathbf{Y}$ neprekidan n-dimenzionalan normalna slučajan vektor s gustoćom*

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = (\sqrt{2\pi})^{-n}(\det \mathbf{C})^{-1/2} \exp\big((\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{b})|\mathbf{y}-\mathbf{b})\big) \tag{1}$$

za sve $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, gdje je $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\tau$ kovarijacijska matrica.

Propozicija 0.14. *Neka je $\mathbf{C}$ pozitivno definitna matrica, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{Y}$ n-dimenzionalan slučajni vektor s funkcijom gustoće (1) tada postoji regularna matrica $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ takvi da je $\mathbf{Y}^\tau = \mathbf{A}\mathbf{X}^\tau + \mathbf{b}^\tau$.*

Koristimo oznaku $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{b}, \mathbf{C})$ za n-dimenzionalnu normalnu slučajnu varijablu s očekivanjem $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ i kovarijacijskom matricom $\mathbf{C} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Propozicija 0.15. *Neka je $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{b}, \mathbf{C})$, te neka je $\mathbf{B}$ regularna matrica reda m. Označimo sa $\mathbf{Z} := \mathbf{B}\mathbf{Y}$, tada je $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{B}\mathbf{b}, \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{B}^\tau)$.*

Sljedeća propozicija nam govori o nezavisnosti komponenti normalnog slučajnog vektora.

Propozicija 0.16. *Neka je $\mathbf{C} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)$ i $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{b}, \mathbf{C})$. Tada su komponente od $\mathbf{Y}$ nezavisne slučajne varijable.*

0.6. Uvjetno očekivanje

Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ i X slučajna varijabla na tom vjerojatnosnom prostoru za koju postoji $\mathbb{E}[X]$. Za $A \in \mathcal{F}_0$ označavali smo uvjetno očekivanje slučajne varijable X za dani A sa

$$\mathbb{E}(X|A) = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}_A,$$

gdje je $\mathbb{P}_A(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A)$ uvjetna vjerojatnost uz uvjet A.

Sada ćemo promatrati malo drukčije uvjetno očekivanje.

Definicija 10. *Neka je σ-algebra $\mathcal{F}$ na Ω takva da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$.* ***Uvjetnim očekivanjem od** X **uz dano** $\mathcal{F}$ zovemo svaku slučajnu varijablu Y (na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$) koja ima sljedeća svojstva*

(i) $\sigma(Y) \subseteq \mathcal{F}$, *odnosno Y je $\mathcal{F}$-izmjeriva;*

(ii) *za sve $A \in \mathcal{F}$ vrijedi*

$$\int_A X \, d\mathbb{P} = \int_A Y \, d\mathbb{P}.$$

Vrijedi tvrdnja sljedećeg teorema.

Teorem 0.17. *Slučajna varijabla Y postoji i jedinstvena je do na $\mathcal{F}$-izmjeriv skup vjerojatnosti nula.*

Radi ovog teorema za uvjetno očekivanje od X uz danu σ-algebru $\mathcal{F}$ označavamo sa

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}).$$

Neka je Z neka slučajna varijabla na početnom vjerojatnosnom prostoru. Definiramo uvjetno očekivanje slučajne varijable X uz uvjet slučajne varijable Z sa

$$\mathbb{E}(X|Z) = \mathbb{E}(X|\sigma(Z)).$$

Sljedećim teoremom opisana su svojstva uvjetnog očekivanja.

Teorem 0.18. *Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, slučajne varijable X, Y i σ-algebru $\mathcal{F}$ na Ω takvu da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$.Pretpostavimo da je $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$ i $\mathbb{E}[|Y|] < +\infty$. Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{F})] = \mathbb{E}[X]$.

(b) $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y|\mathcal{F}) = \alpha \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + \beta \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$. (linearnost)

(c) *Ako je $X \leq Y$, onda vrijedi $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$.* (monotonost)

(d) *Ako je $X_n \geq 0$ i $X_n \nearrow X$, onda vrijedi $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \nearrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$.* (monotona konvergencija)

(e) *Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna i $\mathbb{E}[|\varphi(X)|] < +\infty$. Tada vrijedi $\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{F})$.* (uvjetna Jensenova nejednakost)

(f) *Neka je X $\mathcal{F}$-izmjeriva. Tada vrijedi $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$.*

(g) *Neka je X $\mathcal{F}$-izmjeriva i $\mathbb{E}[|XY|] < +\infty$. Tada vrijedi $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$.*

(h) *Neka je X nezavisna o $\mathcal{F}$, tj. za sve $A \in \sigma(X)$ i $B \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Tada je $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[X]$.*

(i) Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}_0$ takvi da je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$ za $i = 1, 2, \dots n$ i $\mathcal{F} = \sigma\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i]\mathbf{1}_{A_i}.$$

Iz definicije uvjetnog očekivanja definiramo i uvjetnu vjerojatnost.

Definicija 11. *Uz iste oznake kao i na početku definiramo*

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{F}) := \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}).$$

0.7. Diskretni martingali

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Promatramo niz slučajnih varijabli (X_n) na tom vjerojatnosnom prostoru i familiju rastućih σ-podalgebri $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ od $\mathcal{F}$.

Definicija 12. *Za niz slučajnih varijabli (X_n) kažemo da je* ***martingal*** *(u odnosu na $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$) ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

(i) $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$;

(ii) X_n *je* $\mathcal{F}_n$ *izmjeriva;*

(iii) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$.

Martingali brojna svojstva.

Teorem 0.19. *Ako je (X_n) martingal tada za $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $m < n$ vrijedi*

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) = X_m.$$

Nadalje, vrijedi $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_m]$.

Definicija 13. *Kažemo da je slučajna varijabla N* ***vrijeme zaustavljanja*** *ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\{N = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Sa

$$\mathcal{F}_N := \{A \in \mathcal{F} : (\forall n \in \mathbb{N})(A \cap \{N = n\} \in \mathcal{F}_n)\}$$

definiramo σ-algebru pridruženu slučajnom vremenu N.

Propozicija 0.20. *Ako je N vrijeme zaustavljanja i (X_n) je martingal, onda je $X_{\min\{N,n\}}$ također martingal.*

Teorem 0.21. *Neka je (X_n) martingal i N, M vremena zaustavljanja. Ako je $M \leq N$ i postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathbb{P}(N \leq k) = 1$, onda vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) $\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_N] = \mathbb{E}[X_k]$.

(b) $\mathbb{E}[X_M] = \mathbb{E}[X_N]$.

(c) $\mathbb{E}[X_N|\mathcal{F}_M] = X_M$.

Kao posljedica svojstava martingala dobiva se sljedeći koristan teorem.

Teorem 0.22. *Neka je $(\mathcal{A}_n)$ padajući niz σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ i Y slučajna varijabla s konačnim očekivanjem na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vrijedi*

$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}_n] \xrightarrow{g.s.} \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}] \quad i \quad \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}_n] \xrightarrow{m^1} \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}],$$

gdje je $\mathcal{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$.

0.8. Općeniti Markovljevi procesi

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $(E, \mathcal{E})$ izmjeriv prostor (najčešće $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ili $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$) i $T \subseteq \mathbb{R}$ skup parametara.

Definicija 14. ***Slučajnim procesom*** *s vrijednostima u $(E, \mathcal{E})$ zovemo svaku familiju $\mathcal{X} = \{X(t) : t \in T\}$ funkcija $X(t) : \Omega \to E$ izmjerivih u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$.*

U daljem tekstu je $T = \mathbb{R}_0^+$.

Definicija 15. *Neka je $\mathcal{X} = \{X(t) : t \in T\}$ slučajni proces s vrijednostima u $(E, \mathcal{E})$, $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ rastuća familija σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ na Ω, $\{\mathbb{P}_x : x \in E\}$ familija vjerojatnosnih mjera na $(\Omega, \mathcal{F})$, te $\{\theta_t : \Omega \to \Omega : t \geq 0\}$ niz preslikavanja. Kažemo da je $\mathcal{X}$* ***Markovljev proces*** *ako su zadovoljene sljedeće tvrdnje.*

(a) Preslikavanje $x \mapsto \mathbb{P}_x(X(t) \in B)$ sa E u $[0, 1]$ je $\mathcal{E}$-izmjerivo za sve $t \geq 0$ i $B \in \mathcal{E}$.

(b) Za sve $t, h \geq 0$ vrijedi $X(t) \circ \theta_h = X(t + h)$.

(c) Vrijedi ***Markovljevo svojstvo***

$$\mathbb{P}_x(X_{t+s} \in B|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}_{X(t)}(X_s \in B) \tag{MS}$$

za sve $t, s \geq 0$, $x \in E$ i $B \in \mathcal{E}$.

Sljedeći teorem govori nešto o svojstvima Markovljevih procesa.

Teorem 0.23. *Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) Preslikavanje $x \mapsto \mathbb{E}_x[Y]$ je $\mathcal{E}$-izmjerivo za sve $x \in E$ i ograničenu slučajnu varijablu Y koja je $\sigma\{X(s) : s \leq t\}$-izmjeriva.

(ii) Markovljevo svojstvo (MS) ekvivalentno je s

$$\mathbb{E}_x(f(X_{t+s})|\mathcal{F}(t)) = \mathbb{E}_{X(t)}[f(X_t)] \tag{MS1}$$

za sve $x \in \mathcal{E}$, $t, s \geq 0$ i $\mathcal{E}$-izmjerive omeđene funkcije f.

(iii) *Markovljevo svojstvo* (MS) *ekvivalentno je s*

$$\mathbb{E}(Y \circ \theta_t | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{X(t)}[Y] \tag{$MS2$}$$

za sve $x \in E$, $t \geq 0$ *i ograničenu slučajnu varijablu* Y *koja je* $\sigma\{X(s) : s \leq t\}$*-izmjeriva.*

Definicija 16. *Preslikavanje* $T : \Omega \to [0, +\infty]$ *zove se* ***vrijeme zaustavljanja*** *obzirom na* $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ *ako je* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *za sve* $t \geq 0$. *Nadalje, definiramo* $\mathcal{F}_T$ *pripadnu* σ*-podalgebru od* $\mathcal{F}$ *na* Ω *sa*

$$\mathcal{F}(T) := \{A \in \mathcal{F} : (\forall t \geq 0)(A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t))\}.$$

Lako se pokaže da je determinističko vrijeme $T = t$ vrijeme zaustavljanja i u tom slučaju je $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(t)$.

Teorem 0.24. *Neka je* E *metrički prostor i* $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. *Ako je proces* $\mathcal{Y} = \{Y(t) : t \geq 0\}$ *neprekidan zdesna i* $Y(t)$ *je* $\mathcal{F}(t)$*-izmjerivo za svaki* $t \geq 0$, *onda je* $Y(T)$ *izmjeriv u paru* σ*-algebri* $(\mathcal{F}_T, \mathcal{E})$.

Neka je T vrijeme zaustavljanja za Markovljev proces $\mathcal{X}$ operator translacije $\theta_T : \Omega \to \Omega$ definiramo na sljedeći način

$$\theta_T(\omega) = \theta_{T(\omega)}(\omega).$$

Očito vrijedi $X(h) \circ \theta_T(\omega) = X(h + T(\omega))(\omega)$.

U daljem tekstu pretpostavljamo da imamo vjerojatnosni prostor takav da je θ_T na njemu dobro definiran.

Propozicija 0.25. *Neka je je* $\mathcal{X}$ *Markovljev proces. Za sva vremena zaustavljanja* T *takva da je* $X(T)$ $\mathcal{F}(T)$*-izmjerivo, vrijedi*

$$\theta_T^{-1}(\sigma\{X(s) : s \leq t\}) \subseteq \mathcal{F}(T + t),$$

odnosno $\theta_T^{-1}(\sigma\{X(t) : t \geq 0\}) \subseteq \mathcal{F}(T + t)$.

Definicija 17. *Neka je* $\mathcal{X} = \{X(t) : t \in T\}$ *Markovljev proces s vrijednostima u* $(E, \mathcal{E})$. *Kažemo* $\mathcal{X}$ *ima* ***jako Markovljevo svojstvo*** *ako za svako vrijeme zaustavljanja* T *i* $\mathcal{E}$*-izmjerivu i ograničenu funkciju* f *vrijedi*

(i) $X(T)$ *je izmjerivo u paru* σ*-algebri* $(\mathcal{F}(T), \mathcal{E})$;

(ii) *za sve* $t \geq 0$ *i* $x \in E$ *je*

$$\mathbb{E}_x(f(X_{t+T}) | \mathcal{F}(T)) = \mathbb{E}_{X(T)}[f(X(t))].$$

Sljedeći teorem će nam trebati.

Teorem 0.26. *Neka je* $\mathcal{X}$ *jaki Markovljev proces i* Y *ograničena i* $\sigma\{X(t) : t \geq 0\}$*-izmjeriva slučajna varijabla. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}_x[Y \circ \theta_T | \mathcal{F}(T)] = \mathbb{E}_{X(T)}\mathbb{E}[Y] \tag{JMS}$$

za sve $x \in E$ *i svako vrijeme zaustavljanja* T.

Mnoge od tvrdnji ovdje izrečenih ćemo ponovno razmatrati za Brownovo gibanje u 2. poglavlju.

0.9. Integrali po plohama

Ovdje ćemo ukratko ponoviti integrale po plohama.

Definicija 18. *Za $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***glatka (elementarna)*** k***-dimenzionalna ploha*** *ako postoji otvoren povezan podskup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ i preslikavanje $r : \Omega \to \mathbb{R}^n$ klase C^1 takvo da vrijedi:*

(1) $r(\Omega) = \Sigma$, r je difeomorfizam između Ω i Σ;

(2) za svako $q \in \Omega$ je

$$\{\partial_1 r(q), \partial_2 r(q), \ldots, \partial_k r(q)\} \tag{2}$$

linearno nezavisan skup. (Ovaj skup zovemo bazom tangencijalnog prostora.)

Ako je $k = n-1$, onda Σ zovemo ***hiperplohom****.*

Za dano preslikavanje r i točku q iz njegove domene definiramo Gramovu matricu

$$G_r(q) := [(\partial_i r(q)|\partial_j r(q))]_{i,j=1,\ldots r} = (\nabla r(q))^\tau \nabla r(q).$$

Pokazuje se da vrijedi $\det G_r(q) > 0$.

Vektori (2) određuju tangencijalni prostor, a u njemu (kao bridovi) paralelotop

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \partial_j r(q) : 0 \leq \lambda_j \leq 1, j = 1, \ldots, k \right\}.$$

Volumen tog paralelotopa je $D_r(q) = (\det G_r(q))^{1/2}$.

Definicija 19. *Neka $D \subseteq \Omega$ J-izmjeriv, $Q := r(D)$ i $f : Q \to \mathbb{R}$ neprekidna. Definiramo* ***integral funkcije*** f ***po plohi*** Q *formulom*

$$\int_Q f\,dS = \int_D (f \circ r)(q) D_r(q)\,dq.$$

Pokazuje se da definirani integral ne ovisi o parametrizaciji (D, r) skupa Q.

Ako je Q unija (do na zanemariv skup) disjunktnih ploha $Q_1, \ldots, Q_p$ s parametrizacijom (D_1, r_1), (D_2, r_2), $\ldots$, (D_p, r_p) tada je

$$\int_Q f\,dS := \sum_{j=1}^{p} \int_{Q_j} f\,dS = \sum_{j=1}^{p} \int_{D_j} (f \circ r_j)(q) D_{r_j}(q)\,dq.$$

Npr. kod integriranja funkcije po sferi, ponekad, računamo integral posebno po gornjem i donjem dijelu sfere.

Definirani integral ima uobičajena svojstva po skupovima u $\mathbb{R}^n$.

Sa

$$|Q| := \int_Q dS$$

definiramo k**-dimenzionalnu površinu** plohe Q. (Ovu oznaku nadalje redovito koristimo u navedenom značenju.)

Promatrajmo hiperplohu Q s parametrizacijom (D, r). Tada je tangencijalni prostor u točki $x \in Q$ $(n-1)$-dimenzionalan, a njegov ortogonalni komplement je jednodimenzionalan podprostor određen vektorom

$$N(q) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ \partial_1 r_1(q) & \partial_1 r_2(q) & \cdots & \partial_1 r_n(q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{n-1} r_1(q) & \partial_{n-1} r_2(q) & \cdots & \partial_{n-1} r_n(q) \end{vmatrix}.$$

Lako se pokaže da vrijedi $\|N(q)\| = D(q)$. Vektor

$$\nu(x) := \frac{(N \circ r^{-1})(x)}{\|(N \circ r^{-1})(x)\|}$$

zovemo jedinična normala hiperplohe Q u točki x.

Vrijedi sljedeći poznati teorem.

Teorem 0.27. (Teorem o divergenciji) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ područje i $\Gamma = \partial U$ po dijelovima glatka hiperploha. Za funkciju $f \in C^1(\overline{\Omega}^n)$ vrijedi*

$$\int_\Omega \operatorname{div} f dV = \int_\Gamma (f|\nu)\, dS.$$

($\operatorname{div} f := \sum_{j=1}^n \partial_j f$*)*

1. Osnovna svojstva Brownovog gibanja

U ovom poglavlju proučit ćemo definiciju Brownovog gibanja, dokazati egzistenciju tog procesa i pokazati neka njegova svojstva.

1.1. Definicija i konstrukcija

Definicija 20. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ zove se* ***Brownovo gibanje*** *s početkom u $x \in \mathbb{R}$ ako zadovoljava sljedeća četiri uvjeta:*

(i) $W(0) = x$.

(ii) Za sve $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ su ***prirasti***

$$W(t_1) - W(t_0),\ W(t_2) - W(t_1), \ldots,\ W(t_m) - W(t_{m-1})$$

nezavisne slučajne varijable.

(iii) Za sve $0 \leq s < t$ je $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$.

(iv) Putovi $t \mapsto W(t)(\omega)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}_0^+$ u $\mathbb{R}$ (za skoro sve $\omega \in \Omega$).

Ako je $x = 0$, kažemo da je $\mathcal{W}$ ***standardno*** *Brownovo gibanje.*

Postoji li uopće vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i slučajni proces $\mathcal{W}$ takav da su zadovoljeni uvjeti iz ove definicije?

Odgovor na postavljeno pitanje je potvrdan. Prije nego iznesemo konstruktivni dokaz postojanja Brownovog gibanja trebat će nam sljedeća lema.

Lema 1.1. *Neka je $X \sim N(0,1)$, tada za sve $x > 0$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

<u>*Dokaz.*</u> Za $u \in [x, +\infty\rangle$ vrijedi $1 \leq \frac{u}{x}$, što povlači

$$\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{u}{x} e^{-u^2/2}\, du = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

■

Također će nam trebati i ova propozicija.

Propozicija 1.2. *Neka je* $(\mathbf{X}_n)$ *niz* m*-dimenzionalnih normalno distribuiranih slučajnih vektora i* $\mathbf{X} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n$ *gotovo sigurno. Ako postoje* $\mathbf{b} := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\mathbf{X}_n$ *i* $\mathbf{C} := \lim_{n\to\infty} \mathbf{Cov}\,\mathbf{X}_n \in \mathrm{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ *takvi da je* $\det \mathbf{C} > 0$*, tada je* $\mathbf{X}$ m*-dimenzionalan normalno distribuiran slučajni vektor s očekivanjem* $\mathbf{b}$ *i kovarijacijskom matricom* $\mathbf{C}$*.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{X}_n \sim N(\mathbf{b}_n, \mathbf{C}_n)$. Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po distribuciji. Neka je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ tada vrijedi

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbf{X}_n \leq \mathbf{x})$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\langle -\infty, \mathbf{x}]} (2\pi)^{-m/2} (\det \mathbf{C}_n)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{C}_n^{-1}(\mathbf{t}-\mathbf{b}_n)|\mathbf{t}-\mathbf{b}_n)\right) d\lambda(\mathbf{t}).$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Funkcija $\det : \mathrm{M}_{m\times m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ je neprekidna. To povlači da je $\lim_{n\to\infty} \det \mathbf{C}_n = \det \mathbf{C}$. Kako je $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{C}_n\| = \|\mathbf{C}\|$, postoji $M > 0$ takav da je $\|\mathbf{C}_n\| < M$. Kako je $\mathbf{C}_n$ simetrična $\|\mathbf{C}_n\|$ je njena najveća svojstvena vrijednost. Zbog pozitivne definitnosti matrica $\mathbf{C}_n$ i $\mathbf{C}_n^{-1}$ je $\|\mathbf{C}_n\|^{-1}$ najmanja svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{C}_n^{-1}$, te vrijedi $\|\mathbf{C}_n\|^{-1}\|t\|^2 \leq (\mathbf{C}_n^{-1}t|t)$.

Sada smo dobili

$$\left|\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{C}_n^{-1}\mathbf{t}|\mathbf{t})\right)\right| \leq \left|\exp\left(-\frac{1}{2\|\mathbf{C}_n\|}(\mathbf{t}|\mathbf{t})\right)\right| \leq \left|\exp\left(-\frac{1}{2M}(\mathbf{t}|\mathbf{t})\right)\right|.$$

Funkcija $\mathbf{t} \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2M}(\mathbf{t}|\mathbf{t})\right)$ je Lebesgue/Riemann integrabilna na $\langle -\infty, \mathbf{x}]$, a zbog neprekidnosti vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{C}_n^{-1}\mathbf{t}|\mathbf{t})\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{t}|\mathbf{t})\right),$$

za sve $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ (pa onda i λ-gotovo sigurno). Po Lebesgueovu teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\langle -\infty, \mathbf{x}]} (2\pi)^{-m/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{C}_n^{-1}\mathbf{t}|\mathbf{t})\right) d\lambda(\mathbf{t}) =$$
$$= \int_{\langle -\infty, \mathbf{x}]} (2\pi)^{-m/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{t}|\mathbf{t})\right) d\lambda(\mathbf{t})$$

Konačno dobivamo:

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = \int_{\langle -\infty, \mathbf{x}]} (2\pi)^{-m/2} (\det \mathbf{C})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{t}|\mathbf{t})\right) d\lambda(\mathbf{t}).$$

Dakle, $X \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C})$. Time je pokazano traženo. ∎

Još nam je potrebna definicija nezavisnosti slučajnih procesa.

Definicija 21. *Neka su $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{R}$. Dva slučajna procesa $\mathcal{X} = \{X(t) : t \in T_1\}$ i $\mathcal{Y} = \{Y(t) : t \in T_2\}$ su nezavisni, ako su njihove σ-algebre $\sigma(\mathcal{X}) = \sigma\{X(t) : t \in T_1\}$ i $\sigma(\mathcal{Y}) = \sigma\{Y(t) : t \in T_2\}$ međusobno nezavisne.*

Slično se definira nezavisnost slučajnog procesa i σ-algebre.

Teorem 1.3. *Standardno Brownovo gibanje postoji.*

Dokaz. Prvo konstruiramo Brownovo gibanje na $[0,1]$. Definirajmo

$$\mathcal{D}_n := \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 \le k \le 2^n \right\} \quad \text{i} \quad \mathcal{D} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n.$$

$\mathcal{D}$ zovemo skup dijadskih točaka. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor na kojemu je definiran $\{Z_d : d \in \mathcal{D}\}$ skup nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom $N(0,1)$ na tom vjerojatnosnom prostoru.

Neka je $W(0) := 0$ i $W(1) := Z_1$. Za sve $n \in \mathbb{N}_0$ definiramo $W(d)$ za $d \in D_n$ tako da:

(1) Za sve $r < s < t$ iz $\mathcal{D}_n$ vrijedi da je $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$ i nezavisno od $W(s) - W(r)$.

(2) Slučajni vektor $(W(d) : d \in \mathcal{D}_n)$ i niz slučajnih varijabli $(Z_d : d \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n)$ su nezavisni.

Za $\mathcal{D}_0 = \{0,1\}$ zadovoljeni su ovi uvjeti pa nastavljamo induktivno. Pretpostavimo da smo definirali $W(d)$ za $d \in D_{n-1}$. Sada definiramo za $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$

$$W(d) := \frac{W(d - 2^{-n}) + W(d + 2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}.$$

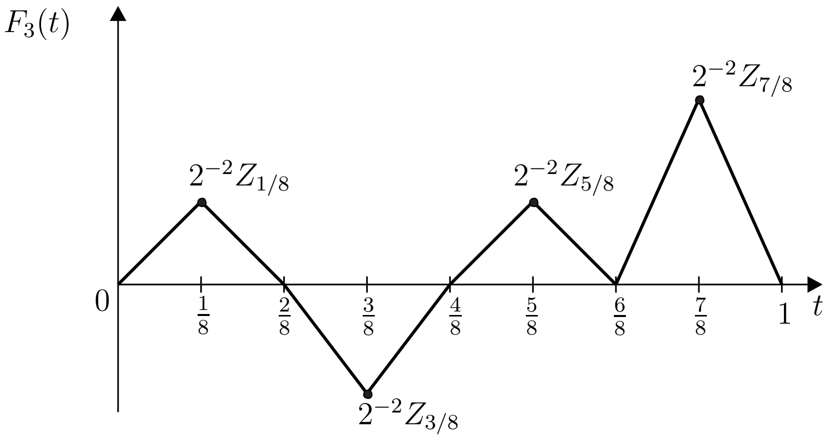
Uočimo da prvi razlomak predstavlja aritmetičku sredinu dva susjeda od d u $\mathcal{D}_{n-1}$. Dakle $W(d)$ je nezavisna slučajna varijabla od $(Z_t : t \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_n)$ i svojstvo (2) je ispunjeno.

Kako $\frac{1}{2}[W(d + 2^{-n}) - W(d - 2^{-n})]$ ovisi samo o $(Z_t : t \in D_{n-1})$, nezavisna je slučajna varijabla od $Z_d / 2^{(n+1)/2}$. Obje slučajne varijable imaju distribuciju $N(0, 2^{-(n+1)})$. Stoga su i njihov zbroj $W(d) - W(d - 2^{-n})$ i razlika $W(d + 2^{-n}) - W(d)$ neovisne slučajne varijable (zbog propozicije 0.16[1]) s distribucijom $N(0, 2^{-n})$.

Štoviše, svi prirasti $W(d) - W(d - 2^{-n})$ za $d \in \mathcal{D}_n \setminus \{0\}$ su nezavisni. Kako bi to pokazali dovoljno je vidjeti da su u parovima nezavisni, jer je njihov vektor $(2^n + 1)$-dimenzionalni normalni slučajni vektor. Pokazali smo da su $W(d) - W(d - 2^{-n})$ i $W(d + 2^{-n}) - W(d)$ za $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$ nezavisni. Druga mogućnost

[1] Neka su $X, Y \sim N(0, a)$ nezavisne slučajne varijable. Tada je $(X+Y, X-Y)^\tau = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & -\sqrt{a} \end{bmatrix} (X/\sqrt{a}, Y/\sqrt{a})^\tau$. Kako je $(X/\sqrt{a}, Y/\sqrt{a})$ standardni normalni dvodimenzionalni slučajni vektor, kovarijacijska matrica vektora $(X+Y, X-Y)$ $\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ povlači da su slučajne varijable $X+Y$ i $X-Y$ nezavisne s distribucijom $N(0, 2a)$.

je da prirasti definirani s različitih strana nekog $d \in \mathcal{D}_{n-1}$. Odaberimo $d \in \mathcal{D}_j$ s tim svojstvom i najmanjim j takvim da su dva intervala za koje promatramo priraste u redom u $[d-2^{-j}, d]$ i $[d, d+2^{-j}]$. Induktivno prirasti duljine 2^{-j} nad ova dva intervala su nezavisni i prirasti duljine 2^{-n} su konstruirani od nezavisnih prirasta $W(d) - W(d-2^{-j})$ i $W(d+2^{-j}) - W(d)$ koristeći disjunktne skupove sastavljenje od niza $(Z_t : t \in \mathcal{D}_n)$. Dakle, oni su nezavisni. Ovo dokazuje svojstvo (1) i korak indukcije.



Slika 1.2.

Sada kad smo izabrali vrijednosti procesa na svim dijadskim točkama, interpoliramo između njih. Formalno definiramo $F_0(t) := tZ_1$, uočimo da je $F_0(0) = 0$, $F_0(1) = Z_1$ i da je funkcija linearna. Slično definiramo za $n \geq 1$ po dijelovima linearnu funkciju (vidi sliku 1.2.):

$$F_n(t) := \begin{cases} 2^{-(n+1)/2} Z_t & \text{za } t \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1} \\ 0 & \text{za } t \in \mathcal{D}_{n-1} \\ 2^{-(n+1)/2} Z_{t_-} \frac{t_+ - t}{2^n} & \text{za } t \in \langle t_-, t_+ \rangle, t_- \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}, t_+ \in \mathcal{D}_{n-1} \\ 2^{-(n+1)/2} Z_{t_+} \frac{t - t_-}{2^n} & \text{za } t \in \langle t_-, t_+ \rangle, t_- \in \mathcal{D}_{n-1}, t_+ \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}, \end{cases}$$

gdje su za $t \in [0,1] \setminus \mathcal{D}_n$ točke t_- i t_+ susjedne u $\mathcal{D}_n$ takve da je $t_- < t < t_+$. Ove funkcije su neprekidne na $[0,1]$ i za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i $d \in \mathcal{D}_n$ vrijedi

$$W(d) = \sum_{i=0}^{n} F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d). \tag{1}$$

Ovo se dokazuje indukcijom.Tvrdnja vrijedi za $n = 0$. Pretpostavimo da vrijedi za $n-1$. Neka je $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$. Kako za $0 \leq i \leq n$ funkcija F_i je linearna na $[d-2^{-n}, d+2^{-n}]$, dobivamo

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_i(d) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i(d-2^{-n}) + F_i(d+2^{-n})}{2} = \frac{1}{2}(W(d-2^{-n}) + W(d+2^{-n})).$$

Kako je $F_n(d) = 2^{-(n+1)/2} Z_d$, dobivamo (1). S druge strane, iz definicije Z_d i leme 1.1. za $c > 0$ i dovoljno veliki n vrijedi

$$\mathbb{P}(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) \leq \exp\left(\frac{-c^2 n}{2}\right).$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}((\exists d\in D_n)(|Z_d|\geq c\sqrt{n})) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{d\in D_n}\{|Z_d|\geq c\sqrt{n}\}\right) \qquad (2)\\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{d\in\mathcal{D}_n}\mathbb{P}(|Z_d|\geq c\sqrt{n})\\
&\leq \sum(2^n+1)\exp\left(\frac{-c^2n}{2}\right)
\end{aligned}$$

Za $c>\sqrt{2\ln 2}$ red $\sum(2^n+1)\exp\left(\frac{-c^2n}{2}\right)$ konvergira, pa tada konvergira i red (2). Fiksirajmo takav c. Po Borel-Cantellijevoj lemi (propozicija 0.4) slijedi

$$\mathbb{P}(\overline{\lim_n}\{(\exists d\in D_n)(|Z_d|\geq c\sqrt{n})\})=0,$$

odnosno

$$1=\mathbb{P}((\overline{\lim_n}\{(\exists d\in D_n)(|Z_d|\geq c\sqrt{n})\})^c)=\mathbb{P}(\underline{\lim_n}\{(\forall d\in D_n)(|Z_d|<c\sqrt{n}\}).$$

Dakle, za gotovo sve $\omega\in\Omega$ postoji $N=N(\omega)$ takav da za sve $n\geq N(\omega)$ i sve $d\in\mathcal{D}_n$ vrijedi $|Z_d(\omega)|<c\sqrt{n}$. Za sve $n\geq N$,

$$\|F_n\|_\infty < c\sqrt{n}2^{-(n+1)/2}.$$

Ova gornja granica implicira da, gotovo sigurno, red

$$W(t):=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(t)$$

konvergira uniformno na $[0,1]$. Uočimo da je ovako dobivena funkcija $W:[0,1]\to\mathbb{R}$, gotovo sigurno, neprekidna.

Preostaje provjeriti da prirasti dobivenog procesa $\{W(t):t\in[0,1]\}$ imaju tražene distribucije. Ovo slijedi izravno zbog svojstava W na gustom podskupu $\mathcal{D}$ skupa $[0,1]$ i neprekidnosti dobivene funkcije W. Zaista, pretpostavimo da su $t_1<t_2<\ldots<t_n$ iz skupa $[0,1]$. Možemo za $k=1,2,\ldots$ naći $t_{1,k}<t_{2,k}<\ldots<t_{n,k}$ u $\mathcal{D}$ takve da je $\lim_{k\to\infty}t_{i,k}=t_i$. Iz neprekidnosti od W slijedi

$$W(t_{i+1})-W(t_i)=\lim_{k\to\infty}(W(t_{i+1,k})-W(t_{i,k})).$$

Kako je $\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}[W(t_{i+1,k})-W(t_{i,k})]=0$ i

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{Cov}\,(W(t_{i+1,k})-W(t_{i,k}),W(t_{j+1,k})-W(t_{j,k}))=\begin{cases} t_{i+1}-t_i, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

prirasti $W(t_{i+1})-W(t_i)$ su po propoziciji 1.2 neovisne normalne slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $t_{i+1}-t_i$.

Konstruirali smo neprekidni proces $W : [0,1] \to \mathbb{R}$ sa istim distribucijama prirasta kao standarno Brownovo gibanje na $[0,1]$.

Za svaki $t \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}_0$ po definiciji je $F_n(t)$ linearna funkcija neke slučajne varijable iz skupa $\{X_d : d \in \mathcal{D}_n\}$. Kako je $\sigma\{X_d : d \in \mathcal{D}_n\} \subseteq \sigma\{X_d : d \in \mathcal{D}\}$ te je $F_n(t)$ $\sigma\{X_d : d \in \mathcal{D}_n\}$-izmjeriva, $F_n(t)$ je $\sigma\{X_d : d \in \mathcal{D}\}$-izmjeriva. To povlači da je $\sum_{k=0}^{m} W_k(t)$ $\sigma\{X_d : d \in \mathcal{D}\}$-izmjeriva za sve $m \in \mathbb{N}$, odnosnopo definiciji je $W_n(t)$ (kao limes tih suma) $\sigma\{X_d : d \in \mathcal{D}\}$-izmjeriva slučajna varijabla. Prema tome je $\sigma\{W_n(t) : t \geq 0\} \subseteq \sigma\{X_d : d \in \mathcal{D}\}$.

Konstrirajmo Brownovo gibanje na $[0, +\infty\rangle$. Odaberimo (novi) vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na kojem je definirana familija $\{X_{d,n} : d \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}\}$ nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom $N(0,1)$.

Neka je $W_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ Brownovo gibanje na $[0,1]$ konstruirano kao u prvom dijelu dokaza pomoću familije slučajnih varijabli $\{X_{d,1} : d \in \mathcal{D}\}$, $W_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ Brownovo gibanje na $[0,1]$ konstruirano kao u prvom dijelu dokaza pomoću familije slučajnih varijabli $\{X_{d,2} : d \in \mathcal{D}\}$,... Na taj način dobili smo niz $W_1, W_2, \ldots$ takvih procesa na $[0,1]$. Kako vrijedi $\sigma\{W_k(t) : t \in [0,1]\} \subseteq \sigma\{X_{d,k} : d \in \mathcal{D}\}$ za $k \in \mathbb{N}$, ovi procesi su nezavisni jer je $\{\sigma\{X_{d,k} : d \in \mathcal{D}\} : k \in \mathbb{N}\}$ nezavisna familija.

Sada procese *slijepimo* na sljedeći način

$$W(t) = W_{\lfloor t \rfloor}(t - \lfloor t \rfloor) + \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor - 1} W_i(1),$$

za sve $t \geq 0$. Tako smo definirali funkciju $W : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ za koju se lako pokaže da je standardno Brownovo gibanje. ■

1.2. Svojstva Brownovog gibanja

U ovom odjeljku upoznat ćemo se nekim svojstvima standardnog Brownovog gibanja $\mathcal{W}$.

Lema 1.4. (Skalirajuće svojstvo) *Neka je $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ standardno Brownovo gibanje. Za sve $a > 0$ proces $\mathcal{X} = \{X(t) := \frac{1}{a} W(a^2 t) : t \geq 0\}$ je također standardno Brownovo gibanje.*

Dokaz. Očito je $X(0) = 0$. Neprekidnost putova i nezavisnost prirasta će ostati i nakon skaliranja. Zbog svojstava normalne distribucije, distribucija slučajne varijable $X(t) - X(s) = \frac{1}{a}(W(a^2 t) - W(a^2 s))$ je normalna s očekivanjem 0 i varijancom $t - s$, za sve $t > s \geq 0$. ■

Lema 1.5. (Svojstvo simetrije) *Neka je $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ standardno Brownovo gibanje. Negativno standardno Brownovo gibanje $-\mathcal{W} := \{-W(t) : t \geq 0\}$ je ponovo standardno Brownovo gibanje.*

Dokaz. Promjena predznaka očuvala je neprekidnost putova te nezavisnost i distribuciju prirasta. Početno stanje je $-W(0) = 0 = W(0)$. ■

Brownovo gibanje kao Gaussov proces

Sada ćemo pokazati da Brownovo gibanje pripada skupini Gaussovih procesa.

Definicija 22. *Slučajni proces $\mathcal{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ se zove* **Gaussov***, ako za sve $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ slučajni vektor $\mathbf{X} = (X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ ima n-dimenzionalnu normalnu razdiobu.*

Teorem 1.6. *Brownovo gibanje $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ s početkom u $x \in \mathbb{R}$ je Gaussov proces.*

<u>*Dokaz.*</u> Odaberimo $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Neka su

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{D} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{t_1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t_2 - t_1}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{t_n - t_{n-1}}} \end{bmatrix} \tag{3}$$

matrice iz $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sada je

$$\mathbf{Y}^\tau := \mathbf{DM}(W(t_1) - x, \ldots, W(t_n) - x)^\tau,$$

standardni n-dimenzionalni slučajni vektor. Kako su matrice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{D}$ regularne, tada je $\mathbf{A} := \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^{-1} = (\mathbf{DM})^{-1}$ dobro definirana. Označimo li sa $\mathbf{b} := (x, x, \ldots, x)^\tau \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, dobivamo da je

$$(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n))^\tau = \mathbf{A}\mathbf{Y}^\tau + \mathbf{b}.$$

Dakle slučajni vektor $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n))$ ima n-dimenzionalnu normalnu razdiobu. Neka je $t_0 = 0$, lako se pokaže da $(W(t_0), W(t_1), \ldots, W(t_n))$ ima $(n+1)$-dimenzionalnu normalnu razdiobu: tada je

$$(W(t_0), W(t_1), \ldots, W(t_n))^\tau = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Y}^\tau + \tilde{\mathbf{b}},$$

gdje je $\tilde{\mathbf{b}} = (x, x, \ldots, x)^\tau \in \mathrm{M}_{(n+1)\times 1}(\mathbb{R})$ i $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 \ldots 0 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{(n+1)\times n}(\mathbb{R})$.

Dakle, Brownovo gibanje $\mathcal{W}$ s početkom u x je Gaussov proces. ■

Lema 1.7. *Neka je $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ standardno Brownovo gibanje. Tada je*

$$\mathbf{Cov}(W(s), W(t)) = \min\{s, t\}.$$

<u>*Dokaz.*</u> Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $t \geq s$. Redom dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(W(s), W(t)) &= \mathbb{E}[W(s)W(t)] = \mathbb{E}[W(s)((W(t) - W(s)) + W(s))] \\ &= \mathbb{E}[W(s)(W(t) - W(s))] + \mathbb{E}[W(s)^2]. \end{aligned}$$

Iz nezavisnosti slučajnih varijabli $W(s)$ i $W(t) - W(s)$ je $\mathbb{E}[W(s)(W(t) - W(s))] = 0$. Zbog $W(s) \sim N(0, s)$ slijedi $\mathbb{E}[W(s)^2] = \mathbf{Var}W(s) = s$. Time smo pokazali traženo. ■

Posljedica 1.8. *Neka je $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje s početkom u $x \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$\mathbf{Cov}(W(s), W(t)) = \min\{s, t\}.$$

Dokaz. Kako je $\mathbf{Cov}(W(s), W(t)) = \mathbb{E}[(W(s) - \mathbb{E}[W(s)])(W(t) - \mathbb{E}[W(t)])] = \mathbb{E}[(W(s) - x)(W(t) - x)]$, a $\mathcal{W}' = \{W'(t) := W(t) - x : t \geq 0\}$ je standardno Brownovo gibanje, tvrdnja slijedi iz prethodne leme. ■

Iz posljednjih razmatranja slijedi da je kovarijacijska matrica normalnog slučajnog vektora $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n))$ za $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ jednaka

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \ldots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Dobiveni rezultati nam daju sljedeću karakterizaciju Brownovog gibanja.

Teorem 1.9. (KARAKTERIZACIJA BROWNOVOG GIBANJA) *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ slučajni proces definiran na njemu, te neka su putovi $t \mapsto W(t)(\omega)$ neprekidni gotovo sigurno i $W(0) = 0$. $\mathcal{W}$ je standardno Brownovo gibanje ako i samo ako je Gaussov proces takav da za sve $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ slučajni vektor $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n))$ ima vektor očekivanja nula i kovarijacijsku matricu zadanu sa* (4).

Dokaz. Jedan smjer smo dokazali, da je standardno Brownovo gibanje Gaussov proces sa traženim svojstvima. Obratno, neka za $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ slučajni vektor $\mathbf{W} = (W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n))$ ima n-dimenzionalnu normalnu razdiobu s kovarijacijskom matricom $\mathbf{A}$ zadanu sa (4) i vektorom očekivanja $\mathbf{0}$. Promatrajmo slučajni vektor $\mathbf{X} := (W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1}))$. Očito je $\mathbf{X}^\tau = \mathbf{M}\mathbf{W}^\tau$, gdje je $\mathbf{M}$ zadana s (3). Sada je kovarijacijska matrica vektora $\mathbf{X}$ dana sa

$$\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^\tau = \operatorname{diag}(t_1, t_1 - t_2, \ldots, t_n - t_{n-1}).$$

Odavde, po svojstvima n-dimenzionalnih slučajnih vektora, slijedi da su komponente vektora $\mathbf{X}$ nezavisne normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem nula i varijancama redom $t_1, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}$. ■

Lako se pokazuje sljedeća posljedica.

Posljedica 1.10. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ slučajni proces definiran na njemu, te neka su putovi $t \mapsto W(t)(\omega)$ neprekidni gotovo sigurno i $W(0) = x \in \mathbb{R}$. $\mathcal{W}$ je Brownovo gibanje s početkom u $x \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je Gaussov proces takav da za sve $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ slučajni vektor $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n))$ ima vektor očekivanja $\mathbf{b} = (x, x \ldots, x)$ i kovarijacijsku matricu zadanu sa* (4).

Vremenska inverzija

Još jedno svojstvo invarijantnosti Brownovog gibanja je vremenska inverzija. Kako bi dokazali ovo svojstvo treba nam sljedeća poznata nejednakost.

Lema 1.11. (Kolmogorovljeva nejednakost) *Neka su* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *nezavisne sa svojstvom da je* $\mathbb{E}[X_i] = 0$ *i* $\mathbf{Var}[X_i] < +\infty$ *za sve* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Ako je* $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, *onda za sve* $x > 0$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\right) \leq \frac{\mathbf{Var}[S_n]}{x^2}.$$

Teorem 1.12. (Vremenska inverzija) *Neka je* $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ *standardno Brownovo gibanje. Tada je slučajan proces* $\mathcal{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ *zadan sa*

$$X(t) := \begin{cases} 0 & \text{za } t = 0, \\ tW(\frac{1}{t}) & \text{za } t > 0, \end{cases}$$

također standardno Brownovo gibanje.

Dokaz. Proces $\mathcal{X}$ je Gaussov, takav da za za sve $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ slučajni vektor $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ ima n-dimenzionalnu normalnu razdiobu s vektorom očekivanja $\mathbf{0}$. Za $t > 0$ i $h \geq 0$ po lemi 1.7 dobivamo

$$\mathbf{Cov}(X(t+h), X(t)) = (t+h)t\mathbf{Cov}(W(\frac{1}{t+h}), W(\frac{1}{t})) = (t+h)t \cdot \frac{1}{t+h} = t.$$

Očito je $\mathbf{Cov}(X(h), X(0)) = 0$ za sve $h \geq 0$.

Preostaje pokazati da je $\mathcal{X}$ gotovo sigurno neprekidan. Putovi $t \mapsto X(t)$ su očito gotovo sigurno neprekidni za $t > 0$. Za $t = 0$ ćemo pokazati da je

$$\lim_{t\to 0+} tW(\frac{1}{t}) = \lim_{s\to+\infty} \frac{W(s)}{s} \overset{g.s.}{=} 0.$$

Za $s \in [n, n+1]$ redom dobivamo

$$\begin{aligned} \left|\frac{W(s)}{s} - \frac{W(n)}{n}\right| &\leq \left|\frac{W(s)}{s} - \frac{W(n)}{s}\right| + \left|\frac{W(n)}{s} - \frac{W(n)}{n}\right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sup_{s\in[n,n+1]} |W(s) - W(n)| + |W(n)| \left|\frac{1}{s} - \frac{1}{n}\right| \\ &\leq \frac{Z_n}{n} + \frac{|W(n)|}{n^2}, \end{aligned}$$

gdje je $Z_n = \sup_{s\in[0,1]} |W(n+s) - W(n)|$. Kako je $(W(j) - W(j-1))_{j\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem 0, jaki zakon velikih brojeva nam daje

$$\frac{W(n)}{n^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(W(j) - W(j-1))}{n^2} \overset{g.s.}{\to} 0.$$

Kako bi pokazali da $\dfrac{Z_n}{n} \overset{g.s.}{\to} 0$, dovoljno je pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(|Z_n|/n > \varepsilon\right) < +\infty.$$

Koristimo Kolmogorovljevu nejednakost, iz koje slijedi

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0<k\leq 2^m} |W(n+k2^{-m}) - W(n)| > \varepsilon n\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}.$$

Posljednja nejednakost kad $m \to \infty$ daje

$$\mathbb{P}\left(|Z_n| > \varepsilon n\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}.$$

Kako red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira, slijedi tvrdnja teorema. ■

1.3. Slučajna šetnja i Brownovo gibanje

Brownovo gibanje možemo promatrati kao vremenski neprekidnu aproksimaciju slučajne šetnje gdje je pomak malen, a pomaci su češći. U daljem tekstu pod slučajnom šetnjom smatramo proces $\{S_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ definiran na sljedeći način:

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable na tom prostoru za koje vrijedi $\mathbb{E}[X_n] = 0$ i $\mathbf{Var}[X_n] = 1$. Definiramo proces $\{S_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ zadan sa $S_0 := 0$ i $S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Sljedeći teorem pokazat će nam vezu između Brownovog gibanja i slučajne šetnje. Za sve $n \in \mathbb{N}$ definirajmo vremenski neprekidan proces $\mathcal{W}_n := \{W_n(t) : t \geq 0\}$, sa

$$W_n(t) := \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}, \ t \geq 0. \tag{5}$$

Lema 1.13. *Za sve $t \geq 0$ vrijedi*

$$W_n(t) \overset{d}{\to} W(t).$$

<u>*Dokaz*</u>. Za $t = 0$ tvrdnja je trivijalna. Promatrajmo $t > 0$. Po centralnom graničnom teoremu vrijedi

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \overset{d}{\to} N(0,1).$$

Slučajnu varijablu $W_n(t)$ možemo zapisati

$$W_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \sqrt{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}},$$

kako je $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} = t$ i $\lim_{n\to\infty} \lfloor nt \rfloor = \infty$, slijedi

$$W_n(t) \overset{d}{\to} \sqrt{t} N(0,1) = N(0,t) \overset{d}{=} W(t).$$

■

Lema 1.14. *Za sve $t > s \geq 0$ vrijedi*

$$W_n(t) - W_n(s) \xrightarrow{d} W(t) - W(s).$$

Dokaz. Dobivamo

$$\begin{aligned} W_n(t) - W_n(s) &= \frac{\sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor} X_j}{\sqrt{n}} \overset{d}{=} \frac{S_{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor}}{\sqrt{n}} \\ &\xrightarrow{d} \sqrt{t-s}N(0,1) = N(0, t-s) \overset{d}{=} W(t) - W(s). \end{aligned}$$

■

Nadalje, vrijedi.

Propozicija 1.15. *Neka je $k \in \mathbb{N}$, za sve $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ i realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n(t_i) \leq x_i : i = 1, 2, \ldots, k) = \mathbb{P}(W(t_i) \leq x_i : i = 1, 2, \ldots, k).$$

Dokaz. Slučajni vektor

$$(W_n(t_1), W_n(t_2) - W_n(t_1), \ldots, W_n(t_k) - W_n(t_{k-1}))$$

sastoji se od međusobno nezavisnih slučajnih varijabli, jer svaka komponenta funkcija različitih X_i-jeva. Promatrajući distribuciju vektora i koristeći leme 1.13 i 1.14 dobivamo

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(W_n(t_1) \leq x_1, W_n(t_2) - W_n(t_1) \leq x_2, \ldots, W_n(t_k) - W_n(t_{k-1}) \leq x_k) \\ = \; & \mathbb{P}(W_n(t_1) \leq x_1)\mathbb{P}(W_n(t_2) - W_n(t_1) \leq x_2) \ldots \mathbb{P}(W_n(t_k) - W_n(t_{k-1}) \leq x_k) \\ \to \; & \mathbb{P}(W(t_1) \leq x_1)\mathbb{P}(W(t_2) - W(t_1) \leq x_2) \ldots \mathbb{P}(W(t_k) - W(t_{k-1}) \leq x_k) \\ = \; & \mathbb{P}(W(t_1) \leq x_1, W(t_2) - W(t_1) \leq x_2, \ldots, W(t_k) - W(t_{k-1}) \leq x_k). \end{aligned}$$

Time smo pokazali da

$$\begin{aligned} & (W_n(t_1), W_n(t_2) - W_n(t_1), \ldots, W_n(t_k) - W_n(t_{k-1})) \\ & \qquad \xrightarrow{d} (W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_k) - W(t_{k-1})) \end{aligned}$$

Kako je $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ zadana sa

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{g}{\mapsto} (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$$

neprekidna, slijedi

$$(W_n(t_1), W_n(t_2), \ldots, W_n(t_k)) \xrightarrow{d} (W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_k)).$$

■

Definicija 23. ***Marginalnim distribucijama*** *slučajnog procesa* $\mathcal{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ *zovemo zakone razdiobe konačnodimenzionalnih slučajnih vektora*

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n))$$

gdje je $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

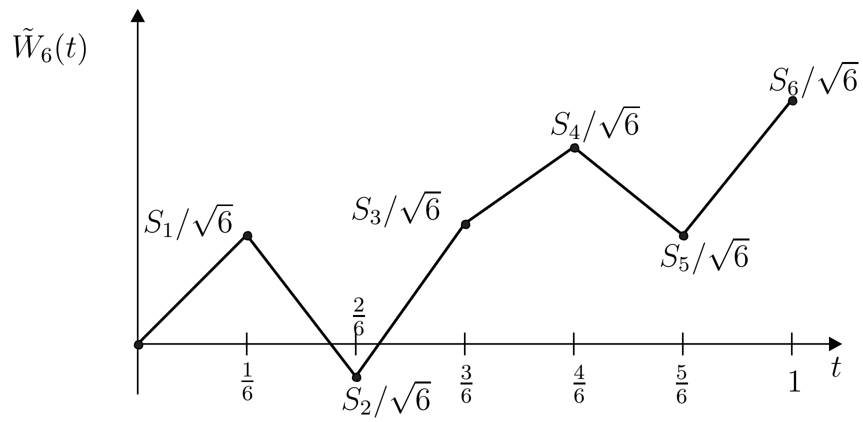
Za opis ovih zakona dovoljno je poznavati zajedničke zakone razdiobe $X(0)$ i vektora prirasta

$$(X(t_1) - X(0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})).$$

Pokazali smo da marginalne distribucije procesa $\mathcal{W}_n$ konvergiraju prema marginalnim distribucijama Brownovog gibanja $\mathcal{W}$. Međutim za dani proces $\mathcal{W}_n = \{W_n(t) : t \geq 0\}$, preslikavanje $t \mapsto W_n(t)$ nije neprekidna funkcija (gotovo sigurno). Stoga se obično promatra modificirani proces $\tilde{\mathcal{W}}_n$ zadan sa

$$\tilde{W}_n(t) = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\frac{X_{\lfloor nt \rfloor + 1}}{\sqrt{n}}$$

za $t \geq 0$. Graf funkcije $t \mapsto \tilde{W}_n(t)$ se dobiva tako da se dužinama spoje sve točke iz skupa $\{(\frac{j}{n}, \frac{S_j}{\sqrt{n}}) : j \geq 0\}$.



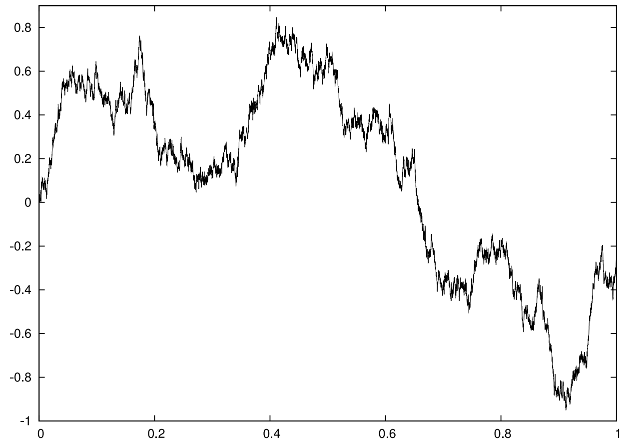
Slika 1.3.

Simulacija

Kao što smo vidjeli, prethodna razmatranja nam pokazuju da proces $\tilde{\mathcal{W}}_n$ *dobro* oponaša standardno Brownovo gibanje. Kako bi to dodatno poboljšali stavimo $X_k \sim N(0,1)$ za $k \in \mathbb{N}$. Tada je $\tilde{W}_n(k/n) - \tilde{W}_n(l/n) \sim N(0, (k-l)/n)$ za nenegativne cijele brojeve $k > l$. Pomoću $\tilde{\mathcal{W}}_n$ ćemo simulirati (aproksimativno) Brownovo gibanje na nekom intervalu, odnosno njegovu trajektoriju. Napravimo realizaciju $\tilde{\mathcal{W}}_n$ procesa za $n = 10000$. Prvo simulirajmo realizaciju $x_1, \ldots, x_{10000}$ slučajnog uzorka od $N(0,1)$. Pomoću njih opišemo realizaciju koraka slučajne šetnje $\hat{S}_0, \ldots, \hat{S}_{10000}$ i nacrtamo točke iz skupa $\{(\frac{j}{10000}, \frac{\hat{S}_j}{100}) : j = 0, \ldots, 10000\}$. Na kraju nacrtane točke redom spojimo dužinama. Evo kako je ispala simulacija na intervalu $[0,1]$ u programu Octave.

Slika 1.4. *Simulacija*

```
>x=randn(1,10000);
>s(1)=0;
>for i=1:10000
>s(i+1)=sum(x(1:i));
>end
>s=s/100;
>j=(0:10000)/10000;
>plot(j,s)
```



1.4. Nemonotonost i nediferencijabilnost Brownovog gibanja

U ovom odjeljku proučit ćemo svojstva (ne)monotonosti i (ne)diferencijabilnosti Brownovog gibanja.

Zanimljivo je da Brownovo gibanje nema intervala monotonosti.

Lema 1.16. *Gotovo sigurno, za sve* $0 < a < b < +\infty$ *Brownovo gibanje nije monotono na intervalu* $[a, b]$.

Dokaz. Fiksirajmo interval $[a, b]$. Ako je $[a, b]$ interval na kojem je $W(t)$ monotona funkcija, odaberimo brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takve da vrijedi $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$. Svaki prirast $W(a_{i+1}) - W(a_i)$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ mora biti istog predznaka. Zbog nezavisnosti prirasta slijedi

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\{W(a_{i+1}) - W(a_i) \leq 0\} \cup \bigcap_{i=1}^{n-1}\{W(a_{i+1}) - W(a_i) \geq 0\}\right) \\
= & \ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\{W(a_{i+1}) - W(a_i) \leq 0\}\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\{W(a_{i+1}) - W(a_i) \geq 0\}\right) \\
= & \prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(W(a_{i+1}) - W(a_i) \in \mathbb{R}_0^-) + \prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(W(a_{i+1}) - W(a_i) \in \mathbb{R}_0^+) = 2 \cdot 2^{-(n-1)},
\end{aligned}$$

što kada $n \to \infty$ teži u 0. Dakle vjerojatnost da je $[a, b]$ interval monotonosti je 0.

Promatramo li prebrojivu uniju pokazujemo da je vjerojatnost da postoji interval monotonosti s krajevima u racionalnim točkama je nula. No, ako postoji interval monotonosti onda on sadržava monotoni podinterval s krajevima u racionalnim točkama.

■

Derivacija funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realne varijable je definirana kao limes

$$Df(x) := f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

no taj limes ne mora postojati. Zato uvijek postoje gornja i donja derivacija zdesna

$$D^+f(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{i} \quad D_+f(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Na sličan se način definiraju gornja i donja derivacija slijeva $D^-f(x)$ i $D^-f(x)$. (Ovo su tzv. *Dinijeve derivacije.*) Ako je $D^+f(x) = D_+f(x)$ onda postoji derivacija funkcije f zdesna, a ako su sve četiri derivacije jednake onda funkcija f ima derivaciju.

Pokazat ćemo da gotovo sigurno, za svaki $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ preslikavanje $t \mapsto W(t)$ nema čak ni derivaciju zdesna u t_0.

Teorem 1.17. *Gotovo sigurno, Brownovo gibanje nije diferencijabilno. Štoviše, vrijedi da je za sve za sve $t \in \mathbb{R}_0^+$ ili $D^+W(t) = +\infty$ ili $D_+W(t) = -\infty$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $t_0 \in [0,1]$ takav da je $-\infty < D_+W(t_0) \leq D^+W(t_0) < +\infty$. Tada za neki $M \in \mathbb{R}_0^+$ za t_0 vrijedi

$$\sup_{h\in[0,1]} \frac{|W(t_0+h) - W(t_0)|}{h} \leq M.$$

Dovoljno je pokazati da je vjerojatnost gornjeg događaja nula za sve $M \geq 0$. Fiksirajmo M. Neka je t_0 sadržano u intervalu $[(k-1)/2^n, k/2^n]$ za $n > 2$, tada za sve $1 \leq j \leq 2^n - k$ iz nejednakosti trokuta slijedi

$$\begin{aligned} & \left| W\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - W\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right) \right| \\ \leq\ & \left| W\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - W(t_0) \right| + \left| W(t_0) - W\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right) \right| \\ \leq\ & M(2j+1)/2^n. \end{aligned}$$

Definirajmo događaje

$$Y_{n,k} := \left\{ \left| W\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - W\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right) \right| \leq M(2j+1)/2^n \text{ za } j = 1,2,3 \right\}.$$

Sada iz nezavisnosti prirasta i skalirajućeg svojstva (lema 1.4) dobivamo za $1 \leq k \leq 2^n - 3$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{n,k}) &= \prod_{j=1}^{3} \mathbb{P}\left(\left| W\left(\frac{k+j}{2^n}\right) - W\left(\frac{k+j-1}{2^n}\right) \right| \leq M(2j+1)/2^n \right) \\ &\leq \mathbb{P}(|W(1)| \leq 7M/\sqrt{2^n})^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7M/\sqrt{2^n}}^{7M/\sqrt{2^n}} e^{-x^2/2}\, dx \right)^3 \\ &\leq (14M/\sqrt{2^{n+1}\pi})^3, \end{aligned}$$

jer je $e^{-x^2/2} \leq 1$. Stoga je

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-3} Y_{n,k} \right) \leq 2^n (14M/\sqrt{2^{n+1}\pi})^3 = (14M/\sqrt{2\pi})^3 2^{-n/2}.$$

Uočimo da je $\sum_{n\in\mathbb{N}}(14M/\sqrt{2\pi})^3 2^{-n/2} < +\infty$, što po Borelovu zakonu nula-jedan povlači

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_n}\bigcup_{k=1}^{2^n-3} Y_{n,k}\right) = 0.$$

Kako je

$$\left\{(\exists t_0 \in [0,1])\left(\sup_{h\in[0,1]} \frac{|W(t_0+h)-W(t_0)|}{h} \leq M\right)\right\} \subseteq \overline{\lim_n}\bigcup_{k=1}^{2^n-3} Y_{n,k}$$

tvrdnja slijedi. ■

2. Markovljevo svojstvo i harmoničnost

2.1. Višedimenzionalno Brownovo gibanje

Nezavisnosti slučajnih procesa smo definirali u 1.1. (vidi definiciju 21). Vrijedi sljedeća karakterizacija nezavisnosti slučajnih procesa.

Teorem 2.1. *Neka su $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{R}$. Dva slučajna procesa $\mathcal{X} = \{X(t) : t \in T_1\}$ i $\mathcal{Y} = \{Y(t) : t \in T_2\}$ su nezavisni ako i samo ako za sve konačne skupove $\{t_1, \dots, t_m\} \subseteq T_1$ i $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subseteq T_2$ su slučajni vektori*

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)) \quad i \quad (Y(s_1), Y(s_2), \dots, Y(s_n))$$

nezavisni.

Dokaz. Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ nezavisni slučajni procesi onda je tvrdnja očita.

Za obrat, promatrajmo familije skupova

$$\mathcal{S}_{\mathcal{X}} = \{\{X(t_1) \in B_1, X(t_2) \in B_2, \dots, X(t_m) \in B_m\} : m \in \mathbb{N}, \\ t_1, \dots, t_m \in T_1, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}\},$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{Y}} = \{\{Y(s_1) \in A_1, Y(s_2) \in A_2, \dots, Y(s_n) \in A_n\} : n \in \mathbb{N}, \\ s_1, \dots, s_n \in T_2, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}\}.$$

Familija $\{\mathcal{S}_{\mathcal{X}}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}\}$ je prema pretpostavci nezavisna i lako se provjeri da su $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ π-sistemi. Sada je $\{\sigma(\mathcal{S}_{\mathcal{X}}), \sigma(\mathcal{S}_{\mathcal{Y}})\}$ nezavisna familija.

Očito je $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} \subseteq \sigma(\mathcal{X})$, što povlači $\sigma(\mathcal{S}_{\mathcal{X}}) \subseteq \sigma(\mathcal{X})$. Nadalje je $\sigma(X(t)) \subseteq \sigma(\mathcal{S}_{\mathcal{X}})$ za sve $t \in T_1$. To povlači $\bigcup_{t \in T_1} \sigma(X(t)) \subseteq \sigma(\mathcal{S}_{\mathcal{X}})$, odnosno $\sigma(\mathcal{X}) = \sigma\left(\bigcup_{t \in T_1} \sigma(X(t))\right) \subseteq \sigma(\mathcal{S}_{\mathcal{X}})$. Time smo pokazali $\sigma(\mathcal{X}) = \sigma(\mathcal{S}_{\mathcal{X}})$. Na isti način se pokaže $\sigma(\mathcal{Y}) = \sigma(\mathcal{S}_{\mathcal{Y}})$. ∎

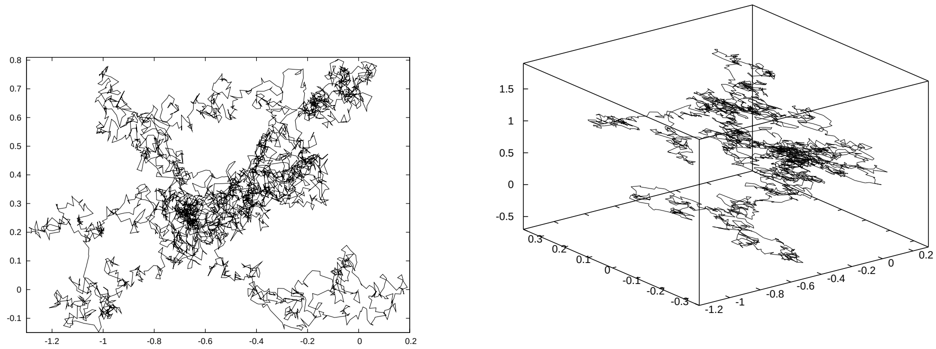
Do sada smo promatrali jednodimenzionalno (*linearno*) Brownovo gibanje, a dalje promatramo d-dimenzionalno Brownovo gibanje.

Definicija 24. *Ako su $\mathcal{W}_j = \{W_j(t) : t \geq 0\}$ za $j = 1, 2, \dots, d$ nezavisna linearna Brownova gibanja s početkom redom u $x_1, x_2, \dots, x_d$, tada se slučajni proces $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ zadan sa*

$$W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_d(t))$$

*zove d-**dimenzionalno Brownovo gibanje** s početkom u $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$. d-dimenzionalno Brownovo gibanje s početkom u ishodištu se također naziva **standardnim**, a dvodimenzionalno Brownovo gibanje se naziva **planarnim**.*

Nadalje, pod Brownovim gibanjem podrazumijevamo d-dimenzionalno Brownovo gibanje. U sljedećem teoremu pokazujemo da Brownovo gibanje zadovoljava Markovljevo svojstvo.



Slika 2.5. *Simulacija standardnog dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog Brownovog gibanja do trenutka $t = 1$*

2.2. Markovljevo svojstvo

Kod slučajne šetnje i drugih vremenski diskretnih slučajnih procesa često smo spominjali *Markovljevo svojstvo*. Slično svojstvo ima i Brownovo gibanje.

Teorem 2.2. (Markovljevo svojstvo) *Pretpostavimo da je $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje s početkom u $x \in \mathbb{R}^d$. Neka je $s > 0$, tada slučajni proces $\{W(t+s) - W(s) : t \geq 0\}$ je Brownovo gibanje s početkom u ishodištu i nezavisan o procesu $\{W(t) : t \in [0, s]\}$.*

Dokaz. Lako se provjeri da proces $\{W(t+s) - W(s) : t \geq 0\}$ zadovoljava definiciju d-dimenzionalnog Brownovog gibanja. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x = (0, \ldots, 0)$. Za $m, n \in \mathbb{N}$ promatrajmo skupove $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subseteq [0, +\infty\rangle$ i $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\} \subseteq [0, s]$. Pokažimo da su slučajni vektori

$$W_1 := (W(t_1 + s) - W(s), \ldots, W(t_n + s) - W(s))$$

i

$$W_2 := (W(s_1), \ldots, W(s_n))$$

nezavisni. Vrijedi da je

$$W_1 = g_n(W(t_1+s) - W(s), W(t_2+s) - W(t_1+s), \ldots, W(t_n+s) - W(t_{n-1}+s)),$$

i $W_2 = g_m(W(s_1), W(s_2) - W(s_1), \ldots, W(s_m) - W(s_{m-1}))$, gdje je $g_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ zadana sa

$$g_k(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$$

za $k = m, n$. Kako su g_m i g_n neprekidne (time i Borelove funkcije) te prirasti $W(s_1), \ldots, W(s_m) - W(s_{m-1})$, $W(t_1 + s) - W(s), \ldots, W(t_n + s) - W(t_{n-1} + s)$ međusobno nezavisni, vektori W_1 i W_2 su nezavisni. ■

Sada uvodimo još jedan novi pojam.

Definicija 25. ***Filtracija*** *na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je familija $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ σ-podalgebri na Ω takvih da je $\mathcal{F}(s) \subseteq \mathcal{F}(t) \subseteq \mathcal{F}$ za sve $s < t$. Vjerojatnosni prostor zajedno s filtracijom zove se* ***filtrirani vjerojatnosni prostor****. Slučajni proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ definiran na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ naziva se* ***adaptiranim*** *ako je $X(t)$ $\mathcal{F}(t)$-izmjeriva za sve $t \geq 0$.*

Promatramo li Brownovo gibanje $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ definirano na nekom vjerojatnosnom prostoru, tada možemo definirati filtraciju $\{\mathcal{F}^0(t) : t \geq 0\}$ tako da je $\mathcal{F}^0(t)$ σ-algebra generirana skupom slučajnih varijabli $\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$. S ovakom definicijom, Brownovo gibanje je očito prilagođeno filtraciji.

U teoremu 2.2 pokazali smo da je proces $\{W(t+s) - W(s) : t \geq 0\}$ nezavisan od $\mathcal{F}^0(s)$. Možemo malo poboljšati taj rezultat. Za proizvoljni $s \geq 0$ promatrajmo (malo veću) σ-algebru

$$\mathcal{F}^+(s) := \bigcap_{t>s} \mathcal{F}^0(t).$$

Uočimo da je $\mathcal{F}^+(s)$ σ-algebra i $\mathcal{F}^0(s) \subseteq \mathcal{F}^+(s)$. Očito je $\{\mathcal{F}^+(t) : t \geq 0\}$ ponovo filtracija. Događaje iz $\mathcal{F}^+(s)$ promatramo kao *pogled u budućnost*, tj. $A \in \mathcal{F}^+(s)$ ako za sve $\varepsilon > 0$ vrijedi $A \in \mathcal{F}^0(s + \varepsilon)$. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.3. *Za svaki $s \geq 0$ proces $\{W(t + s) - W(s) : t \geq 0\}$ je nezavisan od $\mathcal{F}^+(s)$.*

Dokaz. Neka je (s_n) padajući niz za koji $s_n \to s$. Zbog neprekidnosti slijedi $W(t + s) - W(l + s) = \lim_{n\to\infty} W(t + s_n) - W(l + s_n)$ $\mathbb{P}$-gotovo sigurno za sve $t > l \geq 0$. Također je $W(t + s) - W(l + s) \stackrel{d}{=} W(t + s_n) - W(l + s_n)$. Neka je $A \in \mathcal{F}^+(s)$ proizvoljan, tada je za sve $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W(t + s) - W(s) \in B)\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(W(t + s_n) - W(s_n) \in B)\mathbb{P}(A) \\ &= \mathbb{P}(\{W(t + s_n) - W(s_n) \in B\} \cap A). \quad (1) \end{aligned}$$

Ako je $\mathbb{P}(A) = 0$, tada se lako pokaže da je $\mathbb{P}(W(t + s) - W(s) \in B)\mathbb{P}(A) = 0 = \mathbb{P}(\{W(t + s) - W(s) \in B\} \cap A)$. Ako je $\mathbb{P}(A) > 0$ onda jednakost (1) zapravo znači $\mathbb{P}_A(W(t + s_n) - W(s_n) \in B) = \mathbb{P}(W(t + s) - W(s) \in B)$. Također je $W(t+s_n) - W(s_n) \to W(t+s) - W(s)$ $\mathbb{P}_A$-gotovo sigurno. Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po distribuciji, pa za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ i $B = \langle -\infty, \mathbf{x}]$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A(W(t + s) - W(s) \leq \mathbf{x}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_A(W(t + s_n) - W(s_n) \leq \mathbf{x}) \\ &= \mathbb{P}(W(t + s) - W(s) \leq \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Kako su funkcije distribucija iste, one induciraju istu vjerojatnost na vjerojatnosnom prostoru $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Stoga za sve $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

$$\mathbb{P}_A(W(t+s) - W(s) \in B) = \mathbb{P}(W(t+s) - W(s) \in B), \tag{2}$$

odnosno, zbog proizvoljnosti od A, $W(t+s) - W(s)$ je nezavisno od $\mathcal{F}^+(s)$.

Na sličan način se pokazuje da je za proizvoljan konačan podskup $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \subseteq [0, +\infty\rangle$ slučajni vektor

$$(W(t_1+s) - W(s), \ldots, W(t_m+s) - W(s))$$

nezavisan od $\mathcal{F}^+(s)$. Dalje tvrdnja slijedi iz istih razloga kao u teoremu 2.1. ∎

Jednostavna posljedica prethodnog teorema je sljedeća tvrdnja.

Posljedica 2.4. (Blumenthalov zakon 0-1) *Neka je $x \in \mathbb{R}^d$ i $A \in \mathcal{F}^+(0)$ tada je*

$$\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

<u>*Dokaz*</u>. Koristeći teorem 2.3 znamo da je svaki skup $A \in \sigma\{W(t) - W(0) : t \geq 0\}$ nezavisan od $\mathcal{F}^+(0)$. Ovo se odnosi i na proizvoljan skup $A \in \mathcal{F}^+(0)$. Zato je $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$, što povlači $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. ∎

Sada ćemo dokazat važnu posljedicu Markovljevog svojstva. Prvo navodimo lemu koju ćemo dosta koristiti.

Lema 2.5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. Pretpostavimo da za d-dimenzionalne slučajne vektore X i Y vrijedi da je X $\mathcal{G}$-izmjeriv i Y nezavisan od $\mathcal{G}$. Neka je $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ograničena Borelova funkcija i definirajmo*

$$g(x) = \mathbb{E}[h(x, Y)].$$

Tada je (g.s.)

$$\mathbb{E}[h(X, Y)|\mathcal{G}] = g(X).$$

<u>*Dokaz*</u>. Zbog Fubinijevog teorema je g izmjeriva, te je $g(X)$ $\mathcal{G}$-izmjeriva. Preostaje dokazati da za svaki $A \in \mathcal{G}$ vrijedi

$$\int_A h(X(\omega), Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_A (\int_\Omega h(X(\omega_1), Y(\omega_2))\, d\mathbb{P}(\omega_2))\, d\mathbb{P}(\omega_1). \tag{3}$$

Dokažimo jednakost (3) za $h = \mathbf{1}_B$ gdje je $B \in \mathcal{B}^{2d}$. Uočimo da su sa $B \overset{\mu_1}{\mapsto} \int_A \mathbf{1}_B(X(\omega), Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega)$ i $B \overset{\mu_2}{\mapsto} \int_A(\int_\Omega \mathbf{1}_B(X(\omega_1), Y(\omega_2))\, d\mathbb{P}(\omega_2))\, d\mathbb{P}(\omega_1)$ zadane konačne mjere na $\mathcal{B}^{2d}$. (Lako se pokaže da vrijedi $\mu_1(\mathbb{R}^{2d}) = \mu_2(\mathbb{R}^{2d}) = \mathbb{P}(A) \leq 1$.) Neka je $B = C \times D$ gdje su $C, D \in \mathcal{B}^d$. Dobivamo

$$\begin{aligned}
\mu_1(C \times D) &= \int_A \mathbf{1}_{C \times D}(X(\omega), Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega \mathbf{1}_{\{X \in C, Y \in D\} \cap A}\, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(\{X \in C, Y \in D\} \cap A) \\
&= \mathbb{P}(Y \in D)\mathbb{P}(\{X \in C\} \cap A).
\end{aligned}$$

Jednakost u zadnjem redu vrijedi zbog nezavisnosti Y od $\mathcal{G}$. Na sličan način slijedi

$$\begin{aligned}\mu_2(C\times D) &= \int_A \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_{C\times D}(X(\omega_1),Y(\omega_2))\,d\mathbb{P}(\omega_2)\Big)\,d\mathbb{P}(\omega_1)\\ &= \int_A \Big(\int_\Omega \mathbf{1}_C(X(\omega_1))\mathbf{1}_D(Y(\omega_2))\,d\mathbb{P}(\omega_2)\Big)\,d\mathbb{P}(\omega_1)\\ &= \int_A \mathbf{1}_C X(\omega_1)\mathbb{P}(Y\in D)\,d\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(Y\in D)\mathbb{P}(\{X\in C\}\cap A).\end{aligned}$$

Znači $\mu_1(C\times D)=\mu_2(C\times D)$ za sve $C,D\in\mathcal{B}^d$. Kako je $\mathcal{B}^{2d}=\mathcal{B}^d\times\mathcal{B}^d=\sigma\{C\times D : C,D\in\mathcal{B}^d\}$ te je $\{C\times D : C,D\in\mathcal{B}^d\}$ π-sustav, po teoremu o Dynkinovim klasama vrijedi $\mu_1=\mu_2$.

Za jednostavne funkcije $h=\sum_{k=1}^n a_k\mathbf{1}_{A_k}$ gdje je $A_1,A_2,\dots,A_n\in\mathcal{B}^{2d}$ tvrdnja (3) slijedi iz aditivnosti integrala.

Neka je $h\geq 0$, tada postoji rastući niz $h_n\geq 0$ jednostavnih funkcija takvih da vrijedi $h_n\uparrow h$. Korištenjem Lebesgueova teorema o monotonoj konvergenciji slijedi (3).

Za izmjerivu funkciju h, promatramo pozitivni (h^+) i negativni dio (h^-). Tvrdnja (3) slijedi iz prethodnog koraka.

Jednakost (3) vrijedi u smislu ako postoji jedan od ta dva integrala, onda postoji i drugi i vrijednosti su im jednake. Kako je h ograničena oba integrala postoje. ■

U daljnjem tekstu koristimo oznake $\mathbb{E}_x$ i $\mathbb{P}_x$ koje označavaju očekivanje i vjerojatnost ako Brownovo gibanje $\mathcal{W}$ ima početak u $x\in\mathbb{R}^d$ (različito od ishodišta).

Teorem 2.6. *Neka je $\mathcal{W}=\{W(t): t\geq 0\}$ d-dimenzionalno Brownovo gibanje i $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ ograničena Borelova funkcija. Tada za $0\leq s\leq t$ vrijedi sljedeći niz jednakosti (g.s)*

$$\mathbb{E}[f(W(t))|\mathcal{F}^+(s)]=\mathbb{E}[f(W(t))|\mathcal{F}^0(s)]=\mathbb{E}[f(W(t))|W(s)]=E_{W(s)}[f(W(t-s))].$$

Dokaz. Neka $\mathcal{F}(s)$ označava neku od σ-algebri $\mathcal{F}^+(s)$, $\mathcal{F}^0(s)$, $\sigma(W(s))$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(W(t))|\mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[f(W(s)+W(t)-W(s))|\mathcal{F}(s)],\\ &= \mathbb{E}[h(W(s),W(t)-W(s))],\end{aligned}$$

gdje je $h(x,y)=f(x+y)$. Uočimo da je $W(s)$ $\mathcal{F}(s)$-izmjeriva, a $W(t)-W(s)$ nezavisno od $\mathcal{F}(s)$. Po prethodnoj lemi 2.5 vrijedi jednakost (g.s.)

$$\mathbb{E}[f(W(t))|\mathcal{F}(s)]=g(W(s)), \tag{4}$$

gdje je

$$g(x)=\mathbb{E}[h(x,W(t)-W(s))]=\mathbb{E}[f(x+(W(t)-W(s)))].$$

Zbog jednake distribuiranosti slučajnih vektora $W(t)-W(s)$ i $W(t-s)-W(0)$ slijedi

$$g(x)=\mathbb{E}_x[f(W(t-s))].$$

Iz (4) slijedi tvrdnja. ■

Sada ćemo definirati *Markovljevu jezgru* i *vremenski homogen Markovljev proces* na $\mathbb{R}^d$, te pokazati da Brownovo gibanje spada u tu vrstu procesa s pripadajućom jezgrom.

Definicija 26. *Funkcija* $p : [0, +\infty\rangle \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}^d \to \mathbb{R}$ *je* ***Markovljeva tranzicijska jezgra*** *ako je*

(i) $(t, x) \mapsto p(t, x, A)$ *izmjeriva funkcija za svaki* $A \in \mathcal{B}^d$*;*

(ii) $p(t, x, \cdot)$ *je vjerojatnosna mjera na* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ *za sve* $t \geq 0$ *i* $x \in \mathbb{R}^d$*;*

(iii) za sve $A \in \mathcal{B}^d$*,* $x \in \mathbb{R}^d$ *i* $t, s > 0$ *vrijedi*

$$p(t + s, x, A) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, y, A) p(s, x, dy).$$

Adaptirani proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ *je (vremenski homogen)* ***Markovljev proces*** *s tranzicijskom jezgrom* p *u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$*, ako za sve* $t \geq s$ *i Borelove skupove* $A \in \mathcal{B}^d$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(X(t) \in A | \mathcal{F}(s)) = p(t - s, X(s), A).$$

Uočimo da je $p(t, x, A)$ vjerojatnost da je proces poprimio vrijednost u A u trenutku t, ako je počeo u x.

Propozicija 2.7. *d-dimenzionalno Brownovo gibanje je Markovljev proces opisan jezgrom*

$$p(t, x, A) = \int_A (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{2t}\right) d\lambda(y).$$

Dokaz. Koristeći definiciju uvjetne vjerojatnosti i teorem 2.6 dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W(t) \in A | \mathcal{F}^+(s)) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(W(t)) | \mathcal{F}^+(s)] \\
&= \mathbb{E}_{W(s)}[\mathbf{1}_A(W(t - s))] \\
&= \int_A (2\pi(t - s))^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|W(s) - y\|^2}{2(t - s)}\right) d\lambda(y) \\
&= p(t - s, W(s), A).
\end{aligned}$$

Iz prethodne definicije slijedi tvrdnja. ∎

2.3. Vremena zaustavljanja

Slobodno rečeno, Markovljevo svojstvo kaže da Brownovo gibanje počinje *iznova* u svakom determinističkom trenutku. Ovo značajno svojstvo Brownovog gibanja vrijedi za vrlo važnu klasu slučajnih vremena, tzv. *vremena zaustavljanja*.

Definicija 27. *Slučajna varijabla T, s vrijednostima u $[0, +\infty]$, definirana na vjerojatnosnom prostoru s filtracijom $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ zove se* ***vrijeme zaustavljanja*** *ako za sve $t \geq 0$ vrijedi $\{T < t\} \in \mathcal{F}(t)$. Slučajna varijabla T je* ***strogo vrijeme zaustavljanja*** *ako za sve $t \geq 0$ vrijedi $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$.*

Pokazuje se da su sva stroga vremena zaustavljanja ujedno i vremena zaustavljanja.

Lema 2.8. *Ako je T strogo vrijeme zaustavljanja, onda je T vrijeme zaustavljanja.*

Dokaz. Neka je t proizvoljan. Za sve $n \in \mathbb{N}$ je $\{T \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}(t - \frac{1}{n}) \subseteq \mathcal{F}(t)$. Vrijedi

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}(t).$$

■

Ovisno o filtraciji vjerojatnosnog prostora, može vrijediti i obrat prethodne tvrdnje. Ključni uvjet na filtraciju $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$, kao što ćemo pokazati, je *neprekidnost zdesna*, odnosno da za sve $t \geq 0$ vrijedi

$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(t).$$

Teorem 2.9. *Svako vrijeme zaustavljanja T u odnosu na neku zdesna neprekidnu filtraciju $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ je strogo vrijeme zaustavljanja.*

Dokaz. Vrijedi

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T < t + \frac{1}{n}\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(t + 1/n) = \mathcal{F}(t).$$

■

Filtraciju $\{\mathcal{F}^+(t) : t \geq 0\}$ smo uveli u prethodnom odjeljku upravo jer ona ima svojstvo neprekidnosti zdesna. Lako se pokaže

$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}^+(s) = \bigcap_{s>t} \left(\bigcap_{u>s} \mathcal{F}^0(u) \right) = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}^0(u) = \mathcal{F}^+(t).$$

Posljedica 2.10. *Svako vrijeme zaustavljanja T u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}^+(t) : t \geq 0\}$ je strogo vrijeme zaustavljanja.*

U slučaju Brownovog gibanja $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ koristit ćemo filtraciju $\{\mathcal{F}^+(t) : t \geq 0\}$ i promatrati vremena zaustavljanja u odnosu na nju.

Teorem 2.11. *Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) Svako determinističko vrijeme $t \geq 0$ je vrijeme zaustavljanja.

(b) Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren skup. Tada je $T = \inf\{t \geq 0 : W(t) \in U\}$ vrijeme zaustavljanja.

(c) Ako je (T_n) rastući niz vremena zaustavljanja i $T = \lim_{n\to\infty} T_n$. Tada je T vrijeme zaustavljanja.

(d) Neka je $F \subseteq \mathbb{R}^d$ zatvoren skup. Tada je $T = \inf\{t \geq 0 : W(t) \in F\}$ vrijeme zaustavljanja.

(e) Neka je T vrijeme zaustavljanja, tada je $T_n := \frac{\lfloor 2^n T\rfloor + 1}{2^n}$ (za $n \in \mathbb{N}$) vrijeme zaustavljanja.

Dokaz. (a) Trivijalno. (b) Zbog neprekidnosti Brownovog gibanja $\mathcal{W}$ slijedi

$$\{T < t\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap\langle 0,t\rangle} \{W(s) \in U\} \in \mathcal{F}^+(t).$$

(c) Očito je $T = \sup_{n\in\mathbb{N}} T_n$. Dobivamo

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}^+(t).$$

(d) Neka je $U(n) := \{x \in \mathbb{R}^d : (\exists y \in F)(\|y - x\| < 1/n)\}$. Nije teško pokazati da je $U(n) = \bigcup_{y\in F} K(y, 1/n)$, odnosno $U(n)$ je otvoreni skup. Također vrijedi $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U(n)$. Sada definiramo $T_n := \inf\{t \geq 0 : W(t) \in U(n)\}$. Zbog $U(n+1) \subseteq U(n)$ slijedi $T_n \leq T_{n+1}$. Pokazuje se $T = \lim_{n\to\infty} T_n$.
(e) Za $t \geq 0$ dobivamo

$$\{T_n \leq t\} = \{\lfloor 2^n T\rfloor \leq 2^n t - 1\} = \{\lfloor 2^n T\rfloor \leq \lfloor 2^n t - 1\rfloor\}.$$

Ako je $t < 2^{-n}$, onda je $\{T_n \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{F}^+(t)$.
Ako je $t \geq 2^{-n}$, onda je

$$\{\lfloor 2^n T\rfloor \leq \lfloor 2^n t\rfloor - 1\} = \{2^n T < \lfloor 2^n t\rfloor\} = \{T \leq \frac{\lfloor 2^n t\rfloor}{2^n}\} \in \mathcal{F}^+(\lfloor 2^n t\rfloor / 2^n) \subseteq \mathcal{F}^+(t).$$

Zadnja inkluzija slijedi zbog $\lfloor 2^n t\rfloor / 2^n \leq t$. ■

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor na kojem je definirano Brownovo gibanje $\mathcal{W}$. Za vrijeme zaustavljanja T definiramo σ-algebru

$$\mathcal{F}^+(T) := \{A \in \mathcal{F} : (\forall t \geq 0)(A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}^+(t))\}.$$

Lako se pokaže da vrijedi

$$\mathcal{F}^+(T) = \{A \in \mathcal{F} : (\forall t \geq 0)(A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}^+(t))\}.$$

Očito, za determinističko vrijeme $T = t$ vrijedi $\mathcal{F}^+(T) = \mathcal{F}^+(t)$.

Propozicija 2.12. *Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) Ako je T vrijeme zaustavljanja, onda je T $\mathcal{F}^+(T)$-izmjeriva.

(ii) *Ako su* S, T *vremena zaustavljanja takva da vrijedi* $S \leq T$*, onda je* $\mathcal{F}^+(S) \subseteq \mathcal{F}^+(T)$.

(iii) *Ako su* S, T *vremena zaustavljanja, onda je* $\{S < T\}$ *sadržan u* $\mathcal{F}^+(S)$ *i* $\mathcal{F}^+(T)$.

(iv) *Neka je* (T_n) *niz vremena zaustavljanja, onda je* $T = \inf\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ *vrijeme zaustavljanja i vrijedi*

$$\mathcal{F}^+(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(T_n).$$

(v) *Slučajna varijabla* $W(T)$ *je* $\mathcal{F}^+(T)$*-izmjeriva.*

<u>*Dokaz.*</u> (i) Moramo pokazati da je $\{T \leq a\} \in \mathcal{F}^+(T)$ za proizvoljni $a \geq 0$. Za sve $t \geq 0$ dobivamo

$$\{T \leq a\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq \min\{a, t\}\} \in \mathcal{F}^+(\min\{a, t\}) \subseteq \mathcal{F}^+(t).$$

(ii) Neka je $A \in \mathcal{F}^+(S)$. Za sve $t \geq 0$ slijedi

$$A \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}^+(t).$$

(iii) Za sve $t \geq 0$ vrijedi jednakost

$$\{S < T\} \cap \{T \leq t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}, q \leq t} (\{S < q\} \cap \{q < T \leq t\}) \in \mathcal{F}^+(t).$$

To povlači $\{S < T\} \in \mathcal{F}^+(T)$. Za sve $t \geq 0$ i $D_t = [0, t] \cap \mathbb{Q} \cup \{t\}$ vrijedi jednakost

$$\{S < T\} \cap \{S \leq t\} = \bigcup_{q \in D_t} \{S \leq q\} \cap \{q < T\} \in \mathcal{F}^+(t).$$

To povlači $\{S < T\} \in \mathcal{F}^+(S)$.

(iv) Za sve $t \geq 0$ vrijedi $\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_n < t\} \in \mathcal{F}^+(t)$. T je vrijeme zaustavljanja.

Kako je $T \leq T_n$, po (ii) slijedi $\mathcal{F}^+(T) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^+(T_n)$. Neka je $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^+(T_n)$. Za sve $t \geq 0$ vrijedi

$$A \cap \{T \leq t\} = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_n \leq t\}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap \{T_n \leq t\}) \in \mathcal{F}^+(t).$$

Znači $A \in \mathcal{F}^+(T)$.

(v) Promatrajmo vremena zaustavljanja $T_n = (\lfloor 2^n T \rfloor + 1)/2^n$. Pokažimo da je $W(T_n)$ vrijeme zaustavljanja. Neka su $s_0 < s_1 < s_2 < \ldots$ vrijednosti koje T_n postiže. Za proizvoljne $B \in \mathcal{B}^d$ i $t \geq 0$ vrijedi

$$\{W(T_n) \in B\} \cap \{T_n \leq t\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0, s_k \leq t} \{W(s_k) \in B\} \in \mathcal{F}^+(t).$$

To znači $\{W(T_n) \in B\} \in \mathcal{F}^+(T_n)$. Nadalje je $T \leq T_{n+1} \leq T_n$ i $T = \inf_{n \in \mathbb{N}} T_n = \lim_{n \to \infty} T_n$. Vrijedi $\mathcal{F}^+(T_n) \subseteq \mathcal{F}^+(T_{n+1}) \subseteq \mathcal{F}^+(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(T_n)$. Zbog neprekidnosti Brownovog gibanja je $\lim_{n \to \infty} W(T_n) = W(T)$. Za svaki $k, n \in \mathbb{N}$ je $W(T_{n+k})$ $\mathcal{F}^+(T_k)$-izmjeriv (jer je $(\mathcal{F}^+(T_n)))$ padajući niz σ-algebri, stoga je $\lim_{n \to \infty} W(T_n) = \lim_{n \to \infty} W(T_{n+k})$ $\mathcal{F}^+(T_k)$-izmjeriv. To povlači da je $W(T)$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}(T_k) = \mathcal{F}^+(T)$ izmjeriv. ■

2.4. Jako Markovljevo svojstvo

Sada ćemo dokazati jako Markovljevo svojstvo za Brownovo gibanje. Trebat će nam sljedeća lema.

Lema 2.13. *Neka su X i X_n za $n \in \mathbb{N}$ m-dimenzionalni slučajni vektori na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) Slučajni vektor X i familija $\mathcal{A}$ su međusobno nezavisni ako i samo ako su za svaki $A \in \mathcal{A}$ slučajni vektor X i varijabla $\mathbf{1}_A$ nezavisne.

(ii) Ako $X_n \overset{g.s.}{\to} X$ i za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da su X_n i $\mathcal{A}$ nezavisne, tada su X i $\mathcal{A}$ nezavisne.

Dokaz. (a) Odaberimo $A \in \mathcal{A}$ proizvoljno. Ako su X i $\mathbf{1}_A$ nezavisne slijedi

$$\mathbb{P}(\{X \in B\} \cap A) = \mathbb{P}(X \in B, \mathbf{1}_A \in \{1\}) = \mathbb{P}(X \in B)\mathbb{P}(\mathbf{1}_A \in \{1\}) = \mathbb{P}(X \in B)\mathbb{P}(A)$$

za sve $B \in \mathcal{B}^m$. Zbog proizvoljnosti skupa A, X i $\mathcal{A}$ su nezavisni.

Neka su X i $\mathcal{A}$ nezavisni. Odaberimo proizvoljan $A \in \mathcal{A}$. Tada je $\{\mathbf{1}_A \in C\} \in \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ za sve $C \in \mathcal{B}$. Lako se pokaže da je svaki od tih događaja nezavisan događaju $\{X \in B\}$ za proizvoljan $B \in \mathcal{B}^m$.

(b) Odaberimo proizvoljan $A \in \mathcal{A}$. Prema (a) X_n i $\mathbf{1}_A$ su nezavisni. To znači da je

$$\varphi_{(X_n, \mathbf{1}_A)}(\mathbf{t}, k) = \varphi_{X_n}(\mathbf{t})\varphi_{\mathbf{1}_A}(k) \tag{5}$$

za sve $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ i $k \in \mathbb{R}$. $X_n \overset{g.s.}{\to} X$ povlači $(X_n, \mathbf{1}_A) \overset{g.s.}{\to} (X, \mathbf{1}_A)$. Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po distribuciji, pa (5) po teoremu neprekidnosti povlači

$$\varphi_{(X, \mathbf{1}_A)}(\mathbf{t}, k) = \varphi_X(\mathbf{t})\varphi_{\mathbf{1}_A}(k).$$

Zadnja jednakost je karakterizacija nezavisnosti X i $\mathbf{1}_A$ preko karakterističnih funkcija. Po (a) slijedi nezavisnost X i $\mathcal{A}$. ■

Teorem 2.14. (Jako Markovljevo svojstvo) *Za svako gotovo sigurno konačno vrijeme zaustavljanja T proces $\{W(T+t) - W(T) : t \geq 0\}$ je standardno Brownovo gibanje neovisno od $\mathcal{F}^+(T)$.*

Dokaz. Proces $\{W(T+t) - W(T) : t \geq 0\}$ je očito gotovo sigurno neprekidan.

Promatrajmo vremena zaustavljanja $T_n = (\lfloor 2^n T \rfloor + 1)/2^n$. Vrijedi $T = \lim_{n\to\infty} T_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$.

Odaberimo proizvoljan $n \in \mathbb{N}$. T_n postiže prebrojivo mnogo vrijednosti. Označimo ih redom $s_0 < s_1 < s_2 < \ldots$. Pokažimo da za proizvoljne $0 \leq t_1 < t_2$ vrijedi $W(T_n + t_2) - W(T_n + t_1) \overset{d}{=} W(t_2) - W(t_1)$. Za proizvoljan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W(T_n + t_2) - W(T_n + t_1) \leq \mathbf{x}) \\
= &\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(W(T_n + t_2) - W(T_n + t_1) \leq \mathbf{x}, T_n = s_k) \\
= &\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(W(s_k + t_2) - W(s_k + t_1) \leq \mathbf{x}, T_n = s_k).
\end{aligned}$$

Kako je $\{T_n < s_k\}, \{T_n \leq s_k\} \in \mathcal{F}^+(s_k)$, slijedi $\{T_n = s_k\} = \{T_n \leq s_k\} \setminus \{T_n < s_k\} \in \mathcal{F}^+(s_k)$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Iz teorema 2.3 dobivamo

$$\mathbb{P}(W(s_k+t_2)-W(s_k+t_1) \leq \mathbf{x}, T_n = s_k) = \mathbb{P}(W(s_k+t_2)-W(s_k+t_1) \leq \mathbf{x})\mathbb{P}(T_n = s_k)$$

za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Iz svojstava Brownovog gibanja slijedi

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(W(T_n + t_2) - W(T_n + t_1) \leq \mathbf{x}) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(W(s_k + t_2) - W(s_k + t_1) \leq \mathbf{x})\mathbb{P}(T_n = s_k) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(W(t_2) - W(t_1) \leq \mathbf{x})\mathbb{P}(T_n = s_k) \\
= & \mathbb{P}(W(t_2) - W(t_1) \leq \mathbf{x}) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n = s_k) \\
= & \mathbb{P}(W(t_2) - W(t_1) \leq \mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Vrijedi $W(T_n+t_2)-W(T_n+t_1) \xrightarrow{g.s.} W(T+t_2)-W(T+t_1)$, a to povlači $W(T_n+t_2)-W(T_n+t_1) \xrightarrow{d} W(T+t_2)-W(T+t_1)$. Iz upravo pokazanog (zbog proizvoljnosti od n)

$$\mathbb{P}(W(T + t_2) - W(T + t_1) \leq \mathbf{x}) = \mathbb{P}(W(t_2) - W(t_1) \leq \mathbf{x}).$$

Zbog proizvoljnosti t_1 i t_2 pokazali smo da prirasti imaju istu distribuciju kao prirasti Brownovog gibanja.

Na isti način se pokazuje da za $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W(T + t_1) - W(T + t_0) \leq \mathbf{x}_1, \ldots, W(T + t_m) - W(T + t_{m-1}) \leq \mathbf{x}_m) = \\
= \mathbb{P}(W(t_1) - W(t_0) \leq \mathbf{x}_1, \ldots W(t_m) - W(t_{m-1}) \leq \mathbf{x}_m).
\end{aligned}$$

Zbog nezavisnosti prirasta Brownovog gibanja i prije pokazanog dobivamo

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(W(T + t_1) - W(T + t_0) \leq \mathbf{x}_1, \ldots, W(T + t_m) - W(T + t_{m-1}) \leq \mathbf{x}_m) \\
= & \mathbb{P}(W(t_1) - W(t_0) \leq \mathbf{x}_1) \ldots \mathbb{P}(W(t_m) - W(t_{m-1}) \leq \mathbf{x}_m) \\
= & \mathbb{P}(W(T + t_1) - W(T + t_0) \leq \mathbf{x}_1) \ldots \mathbb{P}(W(T + t_m) - W(T + t_{m-1}) \leq \mathbf{x}_m).
\end{aligned}$$

Time je pokazana nezavisnost prirasta. Dakle $\{W(t + T) - W(T) : t \geq 0\}$ je standardno Brownovo gibanje.

Po teoremu 2.12(iv) vrijedi $\mathcal{F}^+(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^+(T_n)$. Odaberimo proizvoljne $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{F}^+(T)$ i $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ i fiksirajmo ih. Pokažimo da su za sve $n \in \mathbb{N}$ slučajni vektor

$$W_n := (W(T_n + t_1) - W(T_n), \ldots, W(T_n + t_m) - W(T_n)),$$

i skup A nezavisni. Uočimo da je $A \in \mathcal{F}(T_n)$ i neka su $s_0 < s_1 < s_2 < \ldots$ vrijednosti koje postiže T_n. Neka je $B \in B^{md}$ proizvoljan, vrijedi

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{W_n \in B\} \cap A) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{W_n \in B\} \cap A \cap \{T_n = s_k\}) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{(W(s_k + t_1) - W(s_k), \ldots, W(s_k + t_m) - W(s_k)) \in B\} \cap A \cap \{T_n = s_k\}).
\end{aligned}$$

Ranije smo pokazali da je $\{T_n = s_k\} \in \mathcal{F}^+(s_k)$, a po definiciji vrijedi $A \cap \{T_n \leq s_k\} \in \mathcal{F}^+(s_k)$. To povlači $(A \cap \{T_n \leq s_k\}) \cap \{T_n = s_k\} = A \cap \{T_n = s_k\} \in \mathcal{F}^+(s_k)$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Po teoremu 2.3 dobivamo

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{W_n \in B\} \cap A) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((W(s_k + t_1) - W(s_k), \ldots, W(s_k + t_m) - W(s_k)) \in B)\mathbb{P}(A \cap \{T_n = s_k\}). \end{aligned}$$

Kako su procesi $\{W(t+T_n) - W(T_n) : t \geq 0\}$ i $\{W(t) : t \geq 0\}$ prema prvom dijelu dokaza standardna Brownova gibanja, oni imaju iste marginalne distribucije pa je

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((W(s_k + t_1) - W(s_k), \ldots, W(s_k + t_m) - W(s_k)) \in B) = \\ & \quad = \mathbb{P}((W(T_n + t_1) - W(T_n), \ldots, W(T_n + t_m) - W(T_n)) \in B) = \mathbb{P}(W_n \in B). \end{aligned}$$

Sad dobivamo

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{W_n \in B\} \cap A) \\ = \ & \mathbb{P}(W_n \in B) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap \{T_n = s_k\}) \\ = \ & \mathbb{P}(W_n \in B)\mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je W_n nezavisan od $\mathcal{F}^+(T)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Kako $W_n \stackrel{g.s.}{\to} W^* := (W(T + t_1) - W(T), \ldots, W(T + t_m) - W(T))$, po tvrdnji (b) prethodne leme su W^* i $\mathcal{F}^+(T)$ nezavisni. Zbog proizvoljnosti izbora $t_1, \ldots, t_m$ slijedi da su proces $\{W(t + T) - W(T) : t \geq 0\}$ i $\mathcal{F}^+(T)$ nezavisni. ■

Sada slijedi poopćenje teorema 2.6.

Teorem 2.15. *Neka je $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ d-dimenzionalno Brownovo gibanje i $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ograničena Borelova. Tada za gotovo sigurno konačno vrijeme zaustavljanja T i $t \geq 0$ vrijedi sljedeća jednakost (g.s)*

$$\mathbb{E}[f(W(t + T))|\mathcal{F}^+(T)] = E_{W(T)}[f(W(t))].$$

<u>*Dokaz*</u>. Redom dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(W(t + T))|\mathcal{F}^+(T)] &= \mathbb{E}[f(W(t + T) - W(T) + W(T))|\mathcal{F}^+(T)] \\ &= \mathbb{E}[h(W(T), W(t + T) - W(T))|\mathcal{F}^+(T)], \end{aligned}$$

gdje je $h(x, y) = f(x + y)$. Prema lemi 2.5 vrijedi (g.s.) jednakost

$$\mathbb{E}(f(W(t + T)|\mathcal{F}^+(T)) = g(W(T))$$

gdje je $g(x) = \mathbb{E}[f(x + W(t + T) - W(T))]$. Zbog jednake distribuiranosti $W(t + T) - W(T)$ i $W(t) - W(0)$ vrijedi

$$g(x) = \mathbb{E}_x[f(W(t))].$$

■

Sljedeći teorem pokazat će se značajnim kasnije.

Teorem 2.16. *Neka je T vrijeme zaustavljanja i $F \subseteq \mathbb{R}^d$ zatvoren skup. Označimo sa $\tau(F) := \inf\{t > 0 : W(t) \in F\}$. Pretpostavimo da je $T \leq \tau(F)$ i da su oba vremena gotovo sigurno konačna. Tada za svaku ograničenu Borelovu funkciju $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ vrijedi (g.s.)*

$$\mathbb{E}_x(f(W(\tau(F))|\mathcal{F}^+(T)) = \mathbb{E}_{W(T)}[f(W(\tau(F))].$$

Dokaz. Zbog $T \leq \tau(F)$ dobivamo

$$\tau(F) \circ \theta_T(\omega) = \inf\{t \leq 0 : W(t + T(\omega))(\omega)\} = \tau(F)(\omega) - T(\omega).$$

Nadalje je

$$W(\tau(F)) \circ \theta_T(\omega) = W(\tau(F) \circ \theta_T(\omega))(\theta_T(\omega)) = W(\tau(F)(\omega))(\omega).$$

Ovime smo pokazali $f(W(\tau(F))) \circ \theta_T = f(W(\tau(F)))$. Prema teoremu 0.26 sada slijedi

$$\mathbb{E}_x[f(W(\tau(F)))|\mathcal{F}(T)] = \mathbb{E}_x[f(W(\tau(F))) \circ \theta_T|\mathcal{F}(T)] \stackrel{(JMS)}{=} \mathbb{E}_{W(T)}[f(W(\tau(F)))].$$

■

2.5. Brownovo gibanje kao martingal

U ovom odjeljku pokazat ćemo da Brownovo gibanje pripada važnoj skupini slučajnih procesa - *martingalima.* Krećemo s definicijom.

Definicija 28. *Slučajni proces $\{M(t) : t \geq 0\}$ je* ***martingal*** *s obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ ako ima sljedeća tri svojstva:*

(a) $\mathbb{E}[|M(t)|] < +\infty$ za sve $t \geq 0$.

(b) Proces $\{M(t) : t \geq 0\}$ je adaptiran na filtraciju.

(c) Za svaki par vremena $0 \leq s \leq t$ vrijedi

$$\mathbb{E}(M(t)|\mathcal{F}(s)) = M(s) \ g.s.$$

Intuitivno, martingal je proces u kojem je trenutno stanje najbolja procjena budućeg stanja.

Propozicija 2.17. *Linearno Brownovo gibanje $\mathcal{W} = \{W(t) : t \geq 0\}$ je martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}^+(t) : t \geq 0\}$.*

Dokaz. Koristeći svojstva Brownovog gibanja i uvjetnog očekivanja dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(t)|\mathcal{F}^+(s)) &= \mathbb{E}(W(t)-W(s)+W(s)|\mathcal{F}^+(s)) \\ &= \mathbb{E}[W(t)-W(s)]+W(s)=W(s).\end{aligned}$$

■

Sada ćemo dokazati rezultat o martingalima koji će nam omogućiti da izračunamo prosječna vremena izlaska iz intervala.

Teorem 2.18. *Neka je $\{X(t) : t \geq 0\}$ zdesna neprekidan martingal adaptiran na zdesna neprekidnu filtraciju $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$. Ako je T omeđeno vrijeme zaustavljanja, tada je $\mathbb{E}[X(T)] = E[X(0)]$.*

Dokaz. Neka je h prirodan broj takav da je $\mathbb{P}(T \leq h-1) = 1$. Promatrajmo vrijeme zaustavljanja $T_n = (\lfloor 2^n T \rfloor + 1)/2^n$. (Ovo je vrijeme zaustavljanja po propoziciji 2.11(e).) Označimo $Y_k^n := X(k2^{-m})$ za $n, k \in \mathbb{N}_0$. Za sve $n \in \mathbb{N}_0$ je niz slučajnih varijabli $(Y_k^n)_k$ martingal (u smislu definicije 12) u odnosu na familiju σ-algebri $\{\mathcal{F}_k^n = \mathcal{F}(k2^{-n}) : k \in \mathbb{N}_0\}$ i $S_n = 2^n T_n$ je vrijeme zaustavljanja (u smislu definicije 13). Sada po teoremu 0.21(c) vrijedi

$$X(T_n) = Y_{S_n}^n = \mathbb{E}(Y_{h2^n}^n | \mathcal{F}_{S_n}^n) = \mathbb{E}(X_h | \mathcal{F}(T_n)).$$

Kako je niz (T_n) padajući vrijedi $T = \inf_{n \in \mathbb{N}} T_n = \lim_{n \searrow \infty} T_n$. Zbog neprekidnosti zdesna dobivamo $\lim_{n\to\infty} X(T_n) = X(T)$ i po propoziciji 2.12(iv) je $\mathcal{F}(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(T_n)$. Iz tvrdnje teorema 0.22 slijedi

$$X(T) = \mathbb{E}(X(n)|\mathcal{F}(T)).$$

Očekivanje nam daje $\mathbb{E}[X(T)] = \mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}[X(0)]$ jer je niz $(X(n-1))$ martingal (u smislu definicije 12). ■

Sada ćemo iskoristiti martingalno svojstvo i prethodni teorem da bi utvrdili neke činjenice vezane uz linearno Brownovo gibanje. Zanimat će nas, za Brownovo gibanje s početkom u $0 \in \langle a, b \rangle$, kolika je vjerojatnost da će izaći iz tog intervala kroz a ili kroz b i koliko će prosječno vremena u njemu provesti?

Za odgovor na ova pitanja korisna je sljedeća lema.

Teorem 2.19. *Neka je $\{W(t) : t \geq 0\}$ linearno Brownovo gibanje. Tada je proces $\{W(t)^2 - t : t \geq 0\}$ martingal.*

Dokaz. Po definiciji Brownovog gibanja je $\mathbb{E}[W(t)^2] < +\infty$ za sve $t \geq 0$. Novi proces je očito adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}^+(t) : t \geq 0\}$. Dobivamo za $s < t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W(t)^2 - t|\mathcal{F}^+(s)] &= \mathbb{E}[(W(t)-W(s))^2|\mathcal{F}^+(s)] \\ &\quad +2\mathbb{E}[W(t)W(s)|\mathcal{F}^+(s)] - W(s)^2 - t \\ &= (t-s) + 2W(s)^2 - W(s)^2 - t = W(s)^2 - s.\end{aligned}$$

Time smo pokazali da je novi proces također martingal. ■

Prethodni rezultati su dovoljni za izračunavanje izlazne vjerojatnosti i očekivanog vremena za linearno Brownovo gibanje.

Teorem 2.20. *Neka je $a < 0 < b$ i za standardno linearno Brownovo gibanje $\{W(t) : t \geq 0\}$ definirajmo $T = \inf\{t \geq 0 : W(t) \in \{a, b\}\}$. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}(W(T) = a) = \frac{b}{|a| + b} \quad i \quad \mathbb{P}(W(T) = b) = \frac{|a|}{|a| + b}. \tag{6}$$

Nadalje, $\mathbb{E}[T] = |a|b$.

Dokaz. Pokažimo da je T integrabilna, tj. $\mathbb{E}[T] < +\infty$. Dobivamo

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)\, dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(B(s) \in \langle a, b\rangle \ \forall s \in [0, t])\, dt.$$

Izraz ispod integrala za $t \geq k \in \mathbb{N}$ je ograničen k-tom potencijom izraza $\sup_{x \in \langle a,b\rangle} \mathbb{P}_x\{W(1) \in \langle a, b\rangle\}$. Ovaj integral možemo ograničiti geometrijskim redom, pa je T integrabilna.

Prema prethodnom vrijedi $T < +\infty$ g.s. Neka je $S_n := \min\{T, n\}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za ova vremena zaustavljanja vrijedi $\lim_{n\to\infty} S_n = T$. Prema teoremu 2.18 vrijedi

$$E[W(S_n)] = E[W(0)] = 0.$$

Kako je $|W(S_n)| \leq \max\{|a|, b\}$ i $\lim_{n\to\infty} W(S_n) = W(T)$, po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$E[W(T)] = 0.$$

Sada je

$$0 = \mathbb{E}[W(T)] = a\mathbb{P}(W(T) = a) + b\mathbb{P}(W(T) = b).$$

Odavde i iz trivijalne jednakosti $\mathbb{P}(W(T) = a) + \mathbb{P}(W(T) = b) = 1$ slijede jednakosti (6).

Očekivano vrijeme izlaska odredit ćemo na sličan način. Koristit ćemo činjenicu da je proces $\{W(t)^2 - t : t \geq 0\}$ martingal. Uočimo da vrijedi

$$|W(S_n)^2 - S_n| \leq (\max\{|a|, b\})^2 + T.$$

Koristeći tvrdnju teorema 2.18 i teorem o dominiranoj konvergenciji

$$\mathbb{E}[W(T)^2 - T] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[W(S_n)^2 - S_n] = \mathbb{E}[W(0)^2 - 0] = 0.$$

Iz jednakosti (6) dobivamo

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[W(T)^2] = \frac{a^2 b}{|a| + b} + \frac{|a| b^2}{|a| + b} = |a|b.$$

■

Prethodni teorem nam omogućuje da pokažemo kako će d-dimenzionalno Brownovo gibanje uvijek izaći iz omeđenog skupa $S \subseteq \mathbb{R}^d$.

Lema 2.21. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}^d$ *omeđen skup i* $\{W(t) : t \geq 0\}$ *Brownovo gibanje s početkom u* $x_0 \in S$. *Tada je* $\tau = \inf\{t \geq 0 : W(t) \in S^c\} < +\infty$ *gotovo sigurno.*

Dokaz. Neka je $\pi_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ projekcija prve koordinate, tj. $\pi_1(x) = x_1$ za sve $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Kako S omeđen skup, tada je $\pi_1(S)$ omeđen, odnosno postoji interval $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $a, b \in \mathbb{R}$ i $\pi_1(S) \subseteq \langle a, b \rangle$. No, $\pi_1(W(t))$ je (linearno) Brownovo gibanje s početkom u $\pi_1(x_0)$ koje će po teoremu 2.20 gotovo sigurno izaći iz intervala $\langle a, b \rangle$. To povlači da će i $W(t)$ izaći iz S, odnosno $\tau < +\infty$ gotovo sigurno. ∎

3. Dirichletov problem

3.1. Harmonijske funkcije i Dirichletov rubni problem

U ovom odjeljku upoznajemo se s harmonijskim funkcijama i Laplaceovom jednadžbom s Dirichletovim rubnim uvjetima. Rezultati koji će biti izneseni su standardni sadržaj svake knjige o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. (Dokazi svih tvrdnji ovdje izrečenih mogu se naći, primjerice, u knjizi [1, Aganović, Veselić], str. 71.)

Definicija 29. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren skup. Za funkciju $u : U \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***harmonijska*** *na skupu U, ako je $u \in C^2(U)$ i za sve $x \in U$ vrijedi*

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) = 0.$$

Sljedeći rezultati nam govore o svojstvima ovih funkcija.

Propozicija 3.1. (Teorem srednje vrijednosti) *Neka je $u : U \to \mathbb{R}$ harmonijska funkcija na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Tada za sve $x \in U$ i svaku otvorenu kuglu $K(x,r) \subseteq U$ vrijedi*

$$u(x) = \frac{1}{|K(x,r)|} \int_{K(x,r)} u(y)\, dy,$$

$$u(x) = \frac{1}{|\partial K(x,r)|} \int_{\partial K(x,r)} u\, dS. \tag{1}$$

Propozicija 3.2. (Obrat teorema srednje vrijednosti) *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren skup i $u \in C^2(U)$. Ako za svaki $x \in U$ i svaku otvorenu kuglu $K(x,r) \subseteq U$ vrijedi jednakost* (1) *onda je u harmonijska funkcija.*

Važno svojstvo harmonijskih funkcija je sadržano u principu maksimuma.

Teorem 3.3. (Princip maksimuma) *Neka je $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ harmonijska funkcija na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Tada vrijedi:*

(i) Ako je U područje i u postiže maksimum na U, onda je u konstantna funkcija na tom skupu.

(ii) Ako je u neprekidna na $\overline{U}$ i U je omeđen, onda vrijedi

$$\max_{x\in\overline{U}} u(x) = \max_{x\in\partial U} u(x) \quad i \quad \min_{x\in\overline{U}} u(x) = \min_{x\in\partial U} u(x).$$

Posljedica 3.4. *Neka su funkcije $u_1, u_2 : \overline{U} \to \mathbb{R}$ harmonijske na ograničenom području $U \subseteq \mathbb{R}^d$ i neprekidne na $\overline{U}$. Ako je $u_1|_{\partial U} = u_2|_{\partial U}$, onda je $u_1 = u_2$.*

Dokaz. Funkcija $v := u_1 - u_2$ je također harmonijska na U, te je $v|_{\partial U} = 0$. Stoga je po principu maksimuma

$$\min_{x\in\overline{U}} v(x) = \min_{x\in\partial U} v(x) = 0 = \max_{x\in\partial U} v(x) = \max_{x\in\overline{U}} v(x).$$

Dakle $v = 0$, odnosno $u_1 = u_2$. ■

Definicija 30. *Pod* ***Dirichletovim rubnim problemom*** *podrazumijevamo rješenje* ***Laplaceove jednadžbe***

$$\Delta u = 0$$

na otvorenom povezanom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$ uz ***Dirichletov rubni uvjet***

$$u|_{\partial U} = \varphi,$$

gdje je $\varphi : \partial U \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.

Rješenje ove jednadžbe tražimo u skupu $C^2(U) \cap C(\overline{U})$ i uobičajeno ga je promatrati za omeđen skup U. Tada rješenje, ako postoji, po posljedici 3.4 je jedinstveno. No skup U ne može biti bilo kakav. Obično se traže rješenja kada je rub ∂U po dijelovima gladak.

U idućem odjeljku mi ćemo pokazati da postoji rješenje za drukčiju vrstu skupova U.

3.2. Poincaréov uvjet konusa i rješenje Dirichletovog rubnog problema

Dirichletov rubni problem prvi je postavio **Gauss**, koji je mislio da rješenje uvijek postoji. Kasnije su **Zaremba** i **Lebesgue** našli da to nije uvijek tako. Pokazuje da skup U mora zadovoljavati neke uvjete, kako bi postojalo rješenje. Mi ćemo pokazati egzistenciju rješenja preko Brownovog gibanja.

Prvo pokazujemo vezu između Brownovog gibanja i harmonijskih funkcija.

Teorem 3.5. *Neka je U područje, $\{W(t) : t \geq 0\}$ Brownovo gibanje s početkom u U i $\tau = \inf\{t > 0 : W(t) \in \partial U\}$ vrijeme prvog susreta s rubom. Neka je $\varphi : \partial U \to \mathbb{R}$ izmjeriva i takva da funkcija $u : U \to \mathbb{R}$ zadana sa*

$$u(x) = \mathbb{E}_x[\varphi(W(\tau))\mathbf{1}_{\{\tau<+\infty\}}] \tag{2}$$

postoji za sve $x \in U$ i lokalno je ograničena. Tada je u harmonijska funkcija.

Dokaz. Iskoristimo jako Markovljevo svojstvo i obrat teorema srednje vrijednosti. Neka je $K(x,r) \subseteq U$ i $\tilde{\tau} = \inf\{t > 0 : W(t) \notin K(x,r)\}$. Jako Markovljevo svojstvo (točnije teorem 2.16) nam daje

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\varphi(W(\tau))\mathbf{1}_{\{\tau<+\infty\}}|\mathcal{F}^+(\tilde{\tau})]] \\ &= \mathbb{E}_x[u(W(\tilde{\tau}))] = \int_{\partial K(x,r)} u(y)\varpi_{x,r}(dy), \end{aligned}$$

gdje je $\varpi_{x,r}$ jednolika distribucija na sferi $\partial K(x,r)$. Dakle u zadovoljava (1) te je po obratu teorema srednje vrijednosti u harmonijska. ■

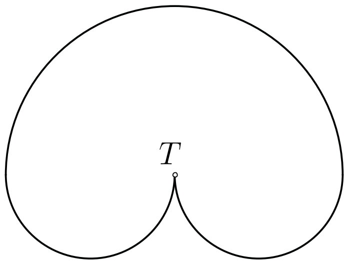
U daljenjem tekstu, za zatvoren skup $F \subseteq \mathbb{R}^d$, sa $\tau(F)$ označavamo vrijeme prvog dolaska Brownovog gibanja u F, tj. $\tau(F) := \inf\{t > 0 : W(t) \in F\}$.

Definicija 31. *Točka x zove se* ***regularna rubna točka*** *od U ako je $x \in \partial U$ i $\mathbb{P}_x(\tau(U^c) = 0) = 1$. Skup regularnih rubnih točaka od U se označava $(\partial U)_r$ i kaže se da je U* ***regularna*** *ako je $(\partial U)_r = \partial U$.*

Pokazuje se da su rubne točke regularne ako zadovoljavaju uvjet konusa.

Definicija 32. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^d$ područje. Kažemo da U zadovoljava* ***Poincaréov uvjet konusa*** *u $x \in \partial U$ ako postoji konus V s vrhom u x i kutom $\alpha > 0$ te $h > 0$ tako da je $V \cap K(x,h) \subseteq U^c$.*

Po dijelovima glatki putovi ne zadovoljavaju nužno Poincaréov uvjet konusa. Rub područja na slici 3.6., sastavljen od jedne veće (gornje) polukružnice i



Slika 3.6. *Rub je po dijelovima gladak put koji ne zadovoljava Poincaréov uvjet konusa*

dvije manje (donje) polukružnice (dvostruko manjeg polumjera), ne zadovoljava Poincaréov uvjet konusa. (Uvjet nije zadovoljen u točki T.)

Teorem 3.6. *Neka je $x \in \partial U$. Ako je u točki x zadovoljen Poincaréov uvjet konusa, tada je x regularna rubna točka.*

Dokaz. Neka je V konus s vrhom u x i kutom $\alpha > 0$ te $h > 0$ tako da je $V \cap K(x,h) \subseteq U^c$. Označimo

$$C := \frac{|V \cap S(x,h)|}{|S(x,h)|} > 0.$$

$(S(x,h) = \partial K(x,h))$ Neka su $K_n := K(z, h/n)$ i $A_n = A \cap S(x, h/n)$. Za promatrano Brownovo gibanje s početkom u x vrijedi

$$\{\tau(U^c) = 0\} \supseteq \overline{\lim_n}\{W(\tau(K_n^c)) \in A_n\}.$$

Zato je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(\tau(U^c) = 0) &\geq \mathbb{P}_x(\overline{\lim_n}\{W(\tau(K_n^c)) \in A_n\}) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(W(\tau(K_n^c)) \in A_n) = C. \end{aligned}$$

Kako je $\{\tau(U^c) = 0\} \in \mathcal{F}^+(0)$ slijedi iz Blumenthalovog zakona 0-1 (tj. posljedice 2.4) da je $\mathbb{P}_x(\tau(U^c) = 0) = 1$. ■

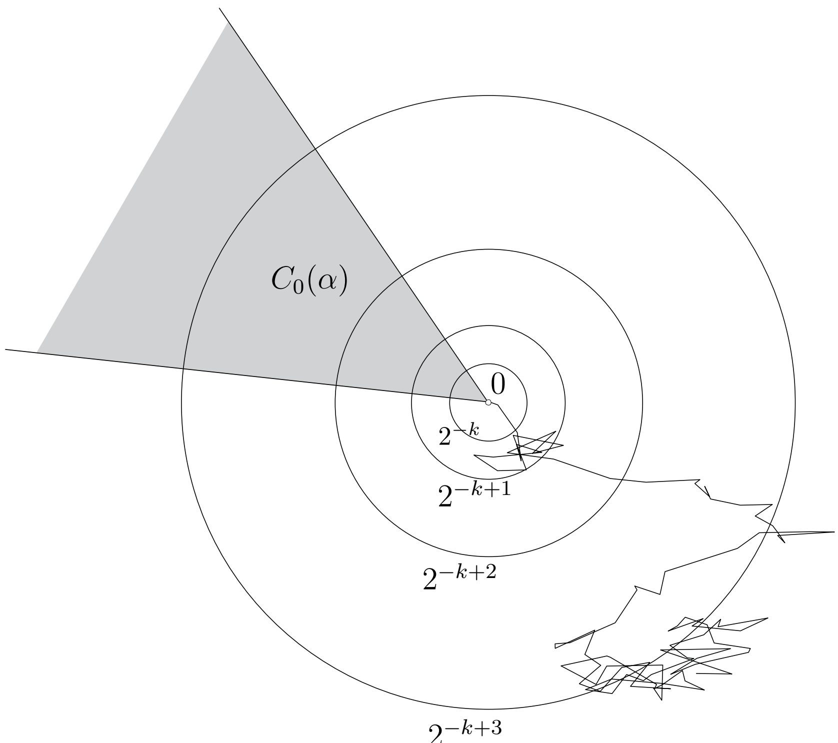
Lema 3.7. *Neka su $0 < \alpha < 2\pi$ i $C_0(\alpha) \subseteq \mathbb{R}^d$ s vrhom u ishodištu i kutom otvaranja α. Označimo*

$$a := \sup_{x \in \overline{K}(0,\frac{1}{2})} \mathbb{P}_x(\tau(\partial K(0,1)) < \tau(C_0(\alpha))).$$

Tada je $a < 1$ i za sve $k \in \mathbb{N}$ i $h' > 0$ imamo

$$\mathbb{P}_x(\tau(\partial K(z,h')) < \tau(C_z(\alpha))) \leq a^k,$$

za sve $x, z \in \mathbb{R}^d$ sa svojstvom $\|x - z\| < 2^{-k}h'$, gdje $C_z(\alpha)$ konus sa vrhom u z i kutom otvaranja α.



Slika 3.7.

Dokaz. Očito $a < 1$. Ako je $W(0) = x \in K(0, 2^{-k})$ tada vrijedi

$$\tau(\partial K(0, 2^{-k+1})) \leq \tau(\partial K(0, 2^{-k+2})) \leq \cdots \leq \tau(\partial K(0,1)).$$

Označimo sa

$$A_i := \{\tau(\partial K(0, 2^{-k+i+1})) < \tau(C_0(\alpha)\}$$

za $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Lako se utvrdi $A_{k-1} \subseteq A_{k-2} \subseteq \ldots \subseteq A_1 \subseteq A_0$.

Vrijedi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_x(\tau(\partial K(0,1)) < \tau(C_0(\alpha))) = \mathbb{P}_x(A_{k-1}) \\ = \; & \mathbb{P}_x(A_{k-1}|A_{k-2})\mathbb{P}_x(A_{k-1}|A_{k-2}) \cdots \mathbb{P}_x(A_2|A_1)\mathbb{P}_x(A_1|A_0)\mathbb{P}_x(A_0) \end{aligned}$$

Vrijedi $\mathbb{P}_x(A_0) \leq a$. Za $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ dobivamo

$$\mathbb{P}_x(A_l|A_{l-1}) = \frac{1}{\mathbb{P}_x(A_{l-1})} \int_{A_{l-1}} \mathbf{1}_{A_l} \, d\mathbb{P}_x. \tag{3}$$

Prema tvrdnji (iii) teorema 2.12 vrijedi $A_{l-1} \in \mathcal{F}^+(\tau(\partial K(0, 2^{-k+l})))$, a po jakom Markovljevu svojstvu je $\mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{A_l}|\mathcal{F}^+(\tau(\partial K(0, 2^{-k+l})))) = \mathbb{E}_{W(\tau(\partial K(0, 2^{-k+l})))}[\mathbf{1}_{A_l}]$, pa jednakost (3) povlači

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(A_l|A_{l-1}) &= \frac{1}{\mathbb{P}_x(A_{l-1})} \int_{A_{l-1}} \mathbb{E}_{W(\tau(\partial K(0, 2^{-k+l})))}[\mathbf{1}_{A_l}] \, d\mathbb{P}_x \\ &\leq \frac{1}{\mathbb{P}_x(A_{l-1})} \int_{A_{l-1}} \sup_{x \in \overline{K}(0, 2^{-k+l})} \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{A_l}] \, d\mathbb{P}_x \\ &= \sup_{x \in \overline{K}(0, 2^{-k+l})} \mathbb{P}_x(A_l) = a. \end{aligned}$$

Time dobivamo

$$\mathbb{P}_x(\tau(\partial K(0,1)) < \tau(C_0(\alpha))) \leq a^k.$$

Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $h' > 0$, vrijedi (zbog homotetije)

$$\mathbb{P}_x(\tau(\partial K(z, h')) < \tau(C_z(\alpha))) \leq a^k,$$

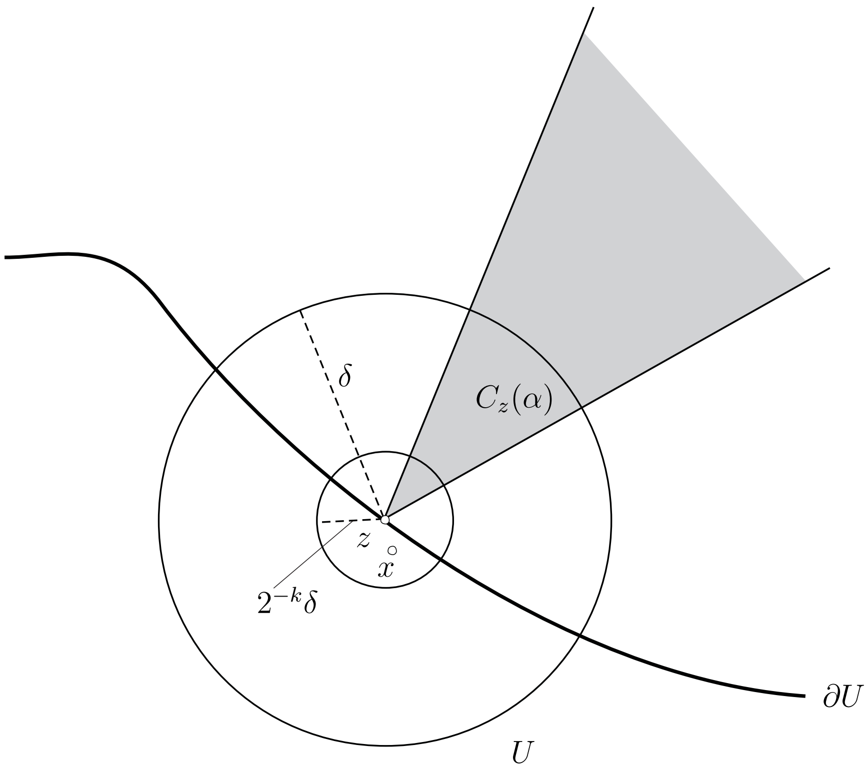
za x sa svojstvom $\|x - z\| < 2^{-k}h'$. ∎

Teorem 3.8. (Dirichletov problem) *Pretpostavimo da je $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ograničeno područje, tako da svaka točka ruba ∂U zadovoljava Poincaréov uvjet konusa i $\varphi : \partial U \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija. Tada postoji jedinstvena neprekidna funkcija $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$ koja je harmonijska na U takva da je $u(x) = \varphi(x)$ za sve $x \in \partial U$.*

Dokaz. Jedinstvenost slijedi iz posljedice 3.4. Teorem 3.5 nam sugerira formu rješenja: Neka je $\{W(t) : t \geq 0\}$ d-dimenzionalno Brownovo gibanje i

$$u(x) = \mathbb{E}_x[\varphi(W(\tau(\partial U)))]. \tag{4}$$

(Zbog leme 2.21 je $\mathbf{1}_{\{\tau(\partial U) < +\infty\}} \overset{g.s.}{=} 1$, pa jednakost (2) povlači gornju jednakost.)



Slika 3.8.

Funkcija φ je neprekidna na kompaktnom skupu, pa je i omeđena. Time smo pokazali da je i $u(x)$ omeđena. Prema teoremu 3.5 u je harmonijska funkcija na U.

Preostaje pokazati da Poincaréov uvjet konusa povlači da gornja funkcija neprekidna na rubu. Odaberimo $z \in \partial U$, tada postoji konus $C_z(\alpha)$ s vrhom u z i kutom $\alpha > 0$ takav da je za neki $h > 0$ $C_z(\alpha) \cap K(z,h) \subseteq U^c$. Po lemi 3.7 za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $h' > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}_x(\tau(\partial K(z,h')) < \tau(C_z(\alpha))) \leq a^k$$

za sve x sa svojstvom $\|x - z\| < 2^{-k}h'$. Neka je $\varepsilon > 0$, tada postoji $0 < \delta < h$ takav da za sve $y \in \partial U \cap K(z,\delta)$ vrijedi $|\varphi(y) - \varphi(z)| < \varepsilon$. Za sve $x \in \bar{U}$ za koje je $|z - x| < 2^{-k}\delta$ slijedi

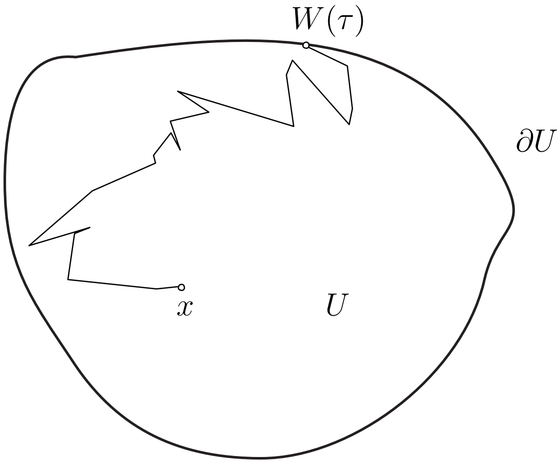
$$|u(x) - u(z)| = |\mathbb{E}_x[\varphi(W(\tau(\partial U)))] - \varphi(z)| \leq \mathbb{E}_x[|\varphi(W(\tau(\partial U))) - \varphi(z)|] \quad (5)$$

Ako Brownovo gibanje pogodi konus $C_z(\alpha)$ koji je izvan domene U, prije sfere $\partial K(z,\delta)$, tada je $|z - W(\tau(\partial U))| < \delta$ i $\varphi(W(\tau(\partial U)))$ je blizak $\varphi(z)$. Komplement suprotnog događaja ima malu vjerojatnost. Preciznije, (5) je omeđen odozgo sa

$$2\|\varphi\|_\infty \mathbb{P}_x(\tau(\partial K(z,\delta)) < \tau(C_z(\alpha))) + \varepsilon \mathbb{P}_x(\tau(\partial U) < \tau(\partial K(z,\delta))) \leq 2\|\varphi\|_\infty a^k + \varepsilon.$$

Time smo pokazali da je u neprekidna na $\bar{U}$. ∎

Tvrdnju ovog teorema možemo interpretirati na sljedeći način: Ako pustimo česticu iz točke $x \in \bar{U}$, koja se giba po Brownovom gibanju, prosjek vrijednosti funkcije φ u točkama prvog susreta s rubom ∂U će (gotovo sigurno) težiti prema $u(x)$.



Slika 3.9.

Kako bi opravdali ograničenja koja smo stavili na domenu U, pogledajmo sljedeću napomenu (Zarembin primjer).

Napomena. Neka je $v : \bar{K}(0,1) \to \mathbb{R}$ rješenje Dirichletovog rubnog problema na kugli $K(0,1)$ s rubnim uvjetom $\varphi : \partial K(0,1) \to \mathbb{R}$. Neka je $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\} = K(0,1) \setminus \{0\}$ probušeni krug. Tvrdimo da Dirichletov rubni problem na U s rubnim uvjetom $\varphi : \partial K(0,1) \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ nema rješenja u obliku (4) ako je $\varphi(0) \neq v(0)$. Pretpostavimo da je $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$ rješenje ovog rubnog problema dano s (4). Kako Brownovo gibanje (gotovo sigurno) ne pogađa točke, vrijeme prvog pogotka skupa $\partial U = \partial K(0,1) \cup \{0\}$ i skupa $\partial K(0,1)$ se poklapaju gotovo sigurno. Stoga bi za sve $x \in U$ vrijedilo $u(x) = \mathbb{E}_x[\varphi(\tau(\partial U))] = \mathbb{E}_x[\varphi(\tau(\partial K(0,1)))] = v(x)$. Kako je $v|_U = u|_U$ zbog neprekidnosti slijedi $u(x) = v(x)$ za sve $x \in \bar{U} = \bar{K}(0,1)$, što je u suprotnosti s $u(0) = \varphi(0) \neq v(0)$.

Zahvale

Zahvaljujem se voditelju rada prof. dr. sc. Hrvoju Šikiću na predloženoj zanimljivoj temi i velikoj pomoći koju mi je pružio prilikom pisanja ovog rada.

Hvala svima koji su mi savjetima i na drugi način pomogli u pisanju ovoga rada.

Ovom prilikom, zahvalio bih svim svojim nastavnicima i profesorima tijekom mog školovanja.

Također, zahvaljujem svojim roditeljima na podršci koju su mi pružili.

Literatura

[1] AGANOVIĆ I., VESELIĆ K., *Linearne diferencijalne jednadžbe : uvod u rubne probleme*, Element, Zagreb, 1997.

[2] BLUMENTHAL R.M., GETOOR R.K.,*Markov Processes and Potential Theory*, Dover Publication Inc., New York, 2007.

[3] CHUNG K.L., ZHAO Z., *From Brownian Motion to Schrödinger's Equation*, Springer, Berlin, 2001.

[4] DURRETT R., *Probability: Theory and Examples*, Third Edition, Brooks/Cole, 2005.

[5] KARATZAS I., SHREVE S.E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer, New York, 1991.

[6] MÖRTERS P., PERES Y., *Brownian Motion*
`http://www.stat.berkeley.edu/~peres/bmbook.pdf`

[7] RESNICK S.I., *Advantures in Stochastic Processes*, Birkhäuser, Boston,1992.

[8] SARAPA N., *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[9] VONDRAČEK Z., *Predavanja iz financijskog modeliranja*
`http://web.math.hr/nastava/fm/predavanja.html`