Jednake sume istih potencija

Igor Urbiha, Zagreb*

Za svaki prirodni broj n postoji beskonačno mnogo parova skupova (prirodnih, realnih ili kompleksnih) brojeva A i B sa svojstvom da su sume k-tih potencija njihovih članova jednake za svaki k, $0 \leq k < n$ (pri čemu smatramo da je $0^0 = 1$). Dokaz te tvrdnje nije težak i zahtijeva elementarno poznavanje upotrebe aksioma matematičke indukcije i rad sa znakom sumacije $\sum$.

Definicija 1. Neka je A konačan i neprazni podskup skupa svih kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Označimo s A^k sumu svih k-tih potencija elemenata skupa A, tj.

$$A^k = \sum_{a \in A} a^k$$

Za dva skupa $A, B \subseteq \mathbf{C}$ ćemo reći da imaju n-svojstvo ako za svaki $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ vrijedi

$$A^k = \sum_{a \in A} a^k = \sum_{b \in B} b^k = B^k$$

Primjer 1. Skupovi $A := \{0, 3, 5, 6\}$ i $B := \{1, 2, 4, 7\}$ imaju 3-svojstvo jer vrijedi

$$\begin{aligned} A^0 &= 0^0 + 3^0 + 5^0 + 6^0 = \ 4 \ = 1^0 + 2^0 + 4^0 + 7^0 = B^0 \\ A^1 &= 0^1 + 3^1 + 5^1 + 6^1 = 14 = 1^1 + 2^1 + 4^1 + 7^1 = B^1 \\ A^2 &= 0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 70 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 = B^2 \end{aligned}$$

Definicija 2. Neka su $S \subseteq \mathbf{C}$ i $c \in \mathbf{C}$. Tada definiramo $S + c$ na ovaj način

$$S + c = \{s + c | s \in S\}.$$

Dakle, ako je $A = \{-2, 0, 3, 8\}$, onda je $A + 2 = \{-2 + 2, 0 + 2, 3 + 2, 8 + 2\} = \{0, 2, 5, 10\}$.

Lema 1. Ako skupovi $A, B \subset \mathbf{C}$ imaju n-svojstvo, onda za svaki $c \in \mathbf{C}$ skupovi $A + c$ i $B + c$ također imaju n-svojstvo.

Dokaz. Treba dokazati da ako vrijedi $A^k = B^k$ za svaki k, $0 \leq k < n$, onda vrijedi i $(A + c)^k = (B + c)^k$ za svaki k, $0 \leq k < n$, što se lagano dokazuje uz pomoć binomnog

* Autor je profesor visoke škole na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu

teorema

$$(y+c)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y^j c^{k-j}.$$

Neka je $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Sada, zbog toga što A i B imaju n-svojstvo, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
(A+c)^k &= \sum_{x \in A+c} x^k = \sum_{a \in A} (a+c)^k = \sum_{a \in A} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j c^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c^{k-j} \sum_{a \in A} a^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c^{k-j} \sum_{b \in B} b^j \\
&= \sum_{b \in B} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b^j c^{k-j} = \sum_{b \in B} (b+c)^k = (B+c)^k
\end{aligned}$$

Time je dokaz leme završen. $\square$

U dokazu je dva puta iskorištena tvrdnja oblika:

$$\sum_{a \in A} \sum_{j=0}^{k} x_j a^j = \sum_{j=0}^{k} x_j \sum_{a \in A} a^j$$

gdje je $x_j = \binom{k}{j} c^{k-j}$. Time je provedeno izlučivanje istog faktora x_j koji se javlja uz iste, j-te potencije svih elemenata skupa A.

Kao što smo vidjeli, skupovi $A := \{0, 3, 5, 6\}$ i $B := \{1, 2, 4, 7\}$ imaju 3-svojstvo. Pogledajmo sada skupove $C = A - 4 = \{-4, -1, 1, 2\}$ and $D = B - 4 = \{-3, -2, 0, 3\}$. Lagano se može provjeriti da i oni imaju 3-svojstvo:

$$\begin{aligned}
C^0 &= \ \ \ 4 = D^0 \\
C^1 &= -2 = D^1 \\
C^2 &= \ \ 22 = D^2
\end{aligned}$$

Lema 2. Ako dva para skupova A, B i C, D imaju n-svojstvo i vrijedi $A \cap C = B \cap D = \emptyset$, onda i skupovi $A \cup C$ i $B \cup D$ također imaju n-svojstvo.

Dokaz. Treba dokazati da ako vrijedi $A^k = B^k$ i $C^k = D^k$ za svaki k, $0 \leq k < n$, onda vrijedi i $(A \cup C)^k = (B \cup D)^k$ za svaki k, $0 \leq k < n$. Zbog uvjeta disjunktnosti je dokaz lagan:

$$\begin{aligned}
(A \cup C)^k &= \sum_{x \in A \cup C} x^k = \sum_{x \in A} x^k + \sum_{x \in C} x^k \\
&= \sum_{x \in B} x^k + \sum_{x \in D} x^k = \sum_{x \in B \cup D} x^k \\
&= (B \cup D)^k,
\end{aligned}$$

čime je dokaz leme završen. $\square$

Znamo otprije da parovi skupova $A := \{0, 3, 5, 6\}$, $B := \{1, 2, 4, 7\}$ i $C = A - 4 = \{-4, -1, 1, 2\}$, $D = B - 4 = \{-3, -2, 0, 3\}$ imaju 3-svojstvo. Vidi se da vrijedi

$A \cap C = B \cap D = \emptyset$ i nije teško provjeriti da skupovi $A \cup C$ i $B \cup D$ također imaju 3-svojstvo:

$$\begin{aligned}(A+C)^0 &= A^0 + C^0 = \quad 4+4 \quad = B^0 + D^0 = (B+D)^0\\ (A+C)^1 &= A^1 + C^1 = 14+(-2) = B^1 + D^1 = (B+D)^1\\ (A+C)^2 &= A^2 + C^2 = \quad 22+70 \quad = B^2 + D^2 = (B+D)^2\end{aligned}$$

Propozicija 1. Ako skupovi $A, B \subseteq \mathbf{C}$ imaju n-svojstvo, tada skupovi $A_1 = (B+c) \cup A$ i $B_1 = (A+c) \cup B$ imaju $(n+1)$-svojstvo za svaki $c \in \mathbf{C}$ takav da vrijedi $(B+c) \cap A = (A+c) \cap B = \emptyset$.

Dokaz. Iz prethodnih dviju lema vidimo da skupovi A_1 i B_1 imaju n-svojstvo. Da bismo provjerili imaju li oni i $(n+1)$-svojstvo, moramo se uvjeriti da vrijedi $A_1^n = B_1^n$:

$$\begin{aligned}A_1^n &= ((B+c) \cup A)^n = (B+c)^n + A^n = \sum_{b \in B} (b+c)^n + A^n\\ &= \sum_{b \in B} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} c^{n-j} b^j + A^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} c^{n-j} \sum_{b \in B} b^j + A^n\\ &= \sum_{b \in B} b^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} c^{n-j} \sum_{b \in B} b^j + A^n\\ &= B^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} c^{n-j} \sum_{a \in A} a^j + A^n = B^n + (A+c)^n\\ &= (B \cup (A+c))^n = B_1^n.\end{aligned}$$

Dakle skupovi A_1 i B_1 imaju $(n+1)$-svojstvo, čime je dokaz završen. $\square$

Znamo da parovi skupova $A := \{0, 3, 5, 6\}$, $B := \{1, 2, 4, 7\}$ i $A+8 = \{8, 11, 13, 14\}$, $B+8 = \{9, 10, 12, 15\}$ imaju 3-svojstvo. Iz propozicije 1 slijedi da skupovi $A_1 = (B+8) \cup A = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$ i $B_1 = (A+8) \cup B = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ imaju 4-svojstvo, što se lagano provjerava:

$$\begin{aligned}A_1^0 &= \quad 8 \quad = B_1^0\\ A_1^1 &= \quad 60 \quad = B_1^1\\ A_1^2 &= \quad 620 \quad = B_1^2\\ A_1^3 &= 7200 = B_1^3\end{aligned}$$

Od skupova $A_0 := \{0\}$ i $B_0 := \{i\}$ (koji očito imaju 1-svojstvo) uz $c = 1$, koristeći postupak iz propozicije 1, dobivamo skupove $A_1 = \{0, 1+i\}$ i $B_1 = \{1, i\}$ koji imaju 2-svojstvo. Primjenjujući postupak iz propozicije 1 uz $c = \sqrt{2}$ na skupove A_1 i B_1, dobivamo skupove $A_2 = \{0, 1+i, i+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$ i $B_2 = \{1, i, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}+i\}$ koji imaju 3-svojstvo:

$$\begin{aligned}A_2^0 &= \quad 4 \quad = B_2^0\\ A_2^1 &= 2(1+\sqrt{2}+i) = B_2^1\\ A_2^2 &= 4+2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})i = B_2^2\end{aligned}$$

Sada ćemo za svaki $n \in \mathbf{N}_0$ definirati par skupova A_n i B_n i odmah matematičkom indukcijom dokazati da za svaki $n \in \mathbf{N}_0$ skupovi A_n i B_n imaju $(n+1)$-svojstvo.

(baza indukcije) Odmah se vidi da skupovi $A_0 := \{0\}$ i $B_0 := \{1\}$ imaju 1-svojstvo, tj. $0^0 = 1^0$, $A_0^0 = B_0^0$.

(korak indukcije) Pretpostavimo da skupovi A_{n-1} i B_{n-1} imaju n-svojstvo. Iz propozicije 1 dobivamo da za $c_n := 1 + \max(A_{n-1} \cup B_{n-1})$ skupovi $A_n := A_{n-1} \cup (B_{n-1} + c_n)$ i $B_n := B_{n-1} \cup (A_{n-1} + c_n)$ imaju $(n+1)$-svojstvo, jer iz nenegativnosti brojeva iz skupova A_{n-1} i B_{n-1} te definicije od c_n je $A_{n-1} \cap (B_{n-1} + c_n) = \emptyset = B_{n-1} \cap (A_{n-1} + c_n)$.

Iz aksioma matematičke indukcije slijedi da za svaki prirodni broj n skupovi A_n i B_n imaju $(n+1)$-svojstvo.

n	A_n	B_n	c_{n+1}
0	$\{0\}$	$\{1\}$	2
1	$\{0,3\}$	$\{1,2\}$	4
2	$\{0,3,5,6\}$	$\{1,2,4,7\}$	8
3	$\{0,3,5,6,9,10,12,15\}$	$\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$	16

Definirajmo funkciju $\alpha_2 : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ na ovaj način: $\alpha_2(m)$ je jednak sumi znamenaka binarnog zapisa broja m. Tako imamo npr.,

$$\begin{aligned} \alpha_2(1) &= 1, \quad (1 = (1)_2), \\ \alpha_2(3) &= 2, \quad (3 = (11)_2), \\ \alpha_2(13) &= 3, \quad (13 = (1101)_2). \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da se pomoću funkcije α_2 može jednostavno opisati gorespomenuti niz parova skupova A_n, B_n.

Propozicija 2. Skupovi A_n and B_n se mogu okarakterizirati ovako:

$$A_n = \{m \in \{0,1,\ldots,2^{n+1}-1\} \mid \alpha_2(m) \in 2\mathbf{N}_0\},$$
$$B_n = \{m \in \{0,1,\ldots,2^{n+1}-1\} \mid \alpha_2(m) \in 2\mathbf{N}_0 + 1\},$$

tj., A_n je skup svih prirodnih brojeva manjih od 2^{n+1} koji imaju paran broj znamenaka 1 u njihovim binarnim zapisima i analogno, skup B_n se sastoji od svih prirodnih brojeva manjih od 2^{n+1} koji imaju neparan broj znamenaka 1 u njihovim binarnim zapisima. Vrijedi $c_n = 2^n$. Ovdje $2\mathbf{N}_0$ označava sve parne prirodne brojeve i nulu, a $2\mathbf{N}_0 + 1$ sve neparne prirodne brojeve.

Indukcijom po n dokazujemo tvrdnju propozicije 2 prema kojoj se skupovi mogu okarakterizirati preko funkcije α_2 na navedeni način, pri čemu je $c_n = 2^n$.

Baza indukcije je trivijalna (slijedi iz definicije). Pretpostavimo da je

$$A_{n-1} = \{m \in \{0,1,\ldots,2^n-1\} | \alpha_2(m) \in 2\mathbf{N}_0\},$$
$$B_{n-1} = \{m \in \{0,1,\ldots,2^n-1\} \mid \alpha_2(m) \in 2\mathbf{N}_0 + 1\}$$

i $c_n = 2^n$. Iz definicije imamo

$$A_n = A_{n-1} \cup (B_{n-1} + c_n),$$
$$B_n = B_{n-1} \cup (A_{n-1} + c_n).$$

Nadalje, $\max(A_n \cup B_n) = c_n + \max(A_{n-1} \cup B_{n-1}) = 2c_n - 1 = 2^{n+1} - 1$, pa je $c_{n+1} = 2^{n+1}$. Sada imamo

B_{n-1}	sadrži brojeve s neparnim brojem jedinica u binarnom zapisu
c_n	ima točno jednu jedinicu u binarnom zapisu
$B_{n-1} + c_n$	sadrži brojeve s parnim brojem jedinica u binarnom zapisu

A_{n-1} sadrži brojeve s parnim brojem jedinica u binarnom zapisu

A_n sadrži brojeve s parnim brojem jedinica u binarnom zapisu

ili simbolički:

$$(B_{n-1}+c_n)=\{m\in\{0,1,\dots,2^n-1\}\mid \alpha_2(m)\in 2\mathbf{N}_0+1\}+2^n,$$

pa je

$$A_n=A_{n-1}\cup(B_{n-1}+c_n)=\{m\in\{0,1,\dots,2^{n+1}-1\}\mid \alpha_2(m)\in 2\mathbf{N}_0\}.$$

Analogno se dokazuje tvrdnja za B_n, čime je proveden korak indukcije i završen dokaz propozicije 2. $\square$

Niz brojeva $t_n:=\alpha_2(n)$ mod 2 je poznat kao Prouhet–Thue–Morseov niz (vidi [1] i [2], primjer 12) koji ima mnoga zanimljiva svojstva[1].

Primijetimo da se skupovi A_n and B_n mogu okarakterizirati i na ovaj način:

$$A_n=\{m\in\{0,1,\dots,2^{n+1}-1\}\mid t_m=0\},$$
$$B_n=\{m\in\{0,1,\dots,2^{n+1}-1\}\mid t_m=1\}.$$

Drugim riječima, skup A_n (B_n) se sastoji od svih nenegativnih cijelih brojeva manjih od 2^{n+1} koji se mogu prikazati kao suma parnog (neparnog) broja potencija broja dva.

Zadaci

1. Napišite program koji za učitani n ispisuje $\alpha_2(n)$.

2. Napišite program koji za učitani n ispisuje članove Prouhet-Thue-Morseovog niza $t_0,t_1,\dots,t_n$.

3. Napišite program koji za učitani n ispisuje skupove A_n i B_n.

Literatura

[1] Jean–Paul Allouche and Jeffrey Shallit, *The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence*, in C. Ding. T. Helleseth, and H. Niederreiter, eds., Sequences and Their Applications: Proceedings of SETA '98, Springer-Verlag, 1999, pp. 1–16., `http://www.cs.uwaterloo.ca/~shallit/Papers/ubiq.ps`

[2] Jeffrey Shallit, *The ring of k-regular sequences*, Theoret. Comput. Sci. 98 (1992), 163–197.

[3] `http://en.wikipedia.org/wiki/Thue-Morse_sequence`

[1] Prouhet–Thue–Morseov niz zadovoljava rekurziju: $t_{2n}=t_n, t_{2n+1}=1-t_n$ uz $t_0=0$. Zanimljivo svojstvo je da u tom beskonačnom nizu nula i jedinica ne postoji tri puta zaredom ponovljeni isti (konačan) niz nula i jedinica ("cube free property"). To svojstvo je matematičar Dr. Max Euwe (prvak svijeta u šahu od 1935.–1937.) primijenio na jednom interesantnom problemu u šahu. Naime, pravilima se pokušalo spriječiti pojavu beskonačnih partija šaha i u tu svrhu je bilo predloženo tzv. njemačko pravilo prema kojem se partija proglašavala remijem ako se isti niz poteza ponovi tri puta za redom. Euwe je pokazao, koristeći Prouhet–Thue–Morseov niz, da postoje beskonačne partije šaha koje ne bi došle pod udar tog pravila. Npr. slijedeći Prouhet–Thue–Morseov niz $t_0,t_1,t_2,\dots$, i igranjem niza poteza (Sf3,Sf6,Sg1,Sg8) svaki put kad se u nizu naiđe na nulu, a (Sc3,Sc6,Sb1,Sb8) kad se naiđe na jedinicu, igrači bi igrali beskonačnu partiju na koju se njemačko pravilo ne može primijeniti.