SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GEODETSKI FAKULTET

Nedjeljko Frančula

KARTOGRAFSKE PROJEKCIJE

Zagreb, 2004.

PREDGOVOR

Kartografskim projekcijama bavim se oko 35 godina, najprije kao asistent, a potom i nastavnik na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Studentima Geodetskog fakulteta počeo sam predavati gradivo kartografskih projekcija 1977. godine. Skripta nisam napisao sve do sada, jer su postojala dva izvrstna udžbenika profesora dr. Branka Borčića: Matematička kartografija (1955) i Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona (1976). Iako davno rasprodana, oba su udžbenika bila u dovoljnom broju na raspolaganju studentima u fakultetskoj knjižnici.

Potreba da napišem skripta ipak je postojala. Reformom iz 1977. gradivo dvaju dotadašnjih predmeta Kartografija I i II sažeto je u jedan predmet Kartografija II. Reformom iz 1994. predmet je nazvan Kartografske projekcije. Ova skripta potpuno pokrivaju sadržaj tog predmeta i u sažetom obliku sadrže gradivo oba spomenuta udžbenika prof. Borčića.

U skriptama sam obradio i neke projekcije kojih nema u udžbeniku prof. Borčića: Aitovljevu i Aitov-Hammerovu projekciju, Eckertove I-VI. projekcije, pseudocilindrične projekcije prof. Kavrajskog, Van der Grintenovu i Winkelovu trostruku projekciju. Dodana su i poglavlja o matematičkoj osnovi hrvatskih topografskih karata i detaljno poglavlje o izboru projekcije. Novo je i poglavlje o projektiranju matematičke osnove geografskih karata i atlasa. U tom je poglavlju prikazan i računalni program "Kartografske projekcije" nastao u diplomskom radu D. Tutića (1998).

Dražen Tutić unio je čitav tekst u računalo i nacrtao spomenutim programom mreže meridijana, paralela i konture kontinenata u različitim kartografskim projekcijama. Preostale slike nacrtao je programom AutoCAD, a samo nekoliko slika skanirao i unio u tekst. Mnogo mu zahvaljujem na uspješno obavljenom poslu.

Poglavlja 2. i 3. napisao je moj dugogodišnji suradnik doc. dr. sc. Miljenko Lapaine. On je, osim toga, pročitao čitav rukopis i brojnim primjedbama poboljšao njegovu kvalitetu. Stoga mu izražavam veliku zahvalnost.

Sa zahvalnošću ću primiti upozorenja na pogreške u tekstu, bile one tehničke ili stručne naravi.

U Zagrebu 3. siječnja 2000.

Krajem 2003. godine dodano je KAZALO, a u ožujku 2004. i RJEČNIK najvažnijih pojmova.

U Zagrebu 18. ožujka 2004.

N. Frančula

1. UVOD

Grana kartografije koja proučava načine preslikavanja zakrivljene površine Zemlje i ostalih nebeskih tijela na ravninu često se naziva matematičkom kartografijom. Stoga i mnogi udžbenici koji izučavaju kartografske projekcije nose naziv matematička kartografija (Borčić 1955a, Fiala 1957, Solov'ev 1969, Hristov, Daskalova 1970, Rožicky 1973, Jovanović 1983, Vahrameeva i dr. 1986). Danas, kad matematika sve više prodire i u ostale grane kartografije, naziv matematička kartografija nije više prikladan za udžbenik koji izučava samo kartografske projekcije. To je i razlog da ova knjiga nosi naslov *Kartografske projekcije*.

Cilj izučavanja kartografskih projekcija je stvaranje matematičke osnove za izradu karata i rješavanje teorijskih i praktičnih zadataka u kartografiji, geodeziji, geografiji, astronomiji, navigaciji i ostalim srodnim znanostima.

Fizička površina Zemlje vrlo je složena i nepravilna. Zamislimo stoga površinu mirnog mora i oceana protegnutu kroz kontinente. Takvu idealiziranu plohu nazivamo *pravim oblikom Zemlje* ili *geoidom*. To je nivoploha u polju potencijala sile teže. Međutim, i ta je ploha s obzirom na raspored Zemljinih masa nepravilna i neprikladna kao osnova za razna računanja. Pravilna matematička ploha najbliža plohi geoida je *rotacijski elipsoid*. Budući da spljoštenost takvog elipsoida nije velika, u nekim slučajevima možemo ga zamjeniti *sferom* (§3).

Pri izradi karata najprije se točke s fizičke površine Zemlje prenose po određenim pravilima na plohu elipsoida, a zatim se elipsoid preslikava u ravninu. U tu svrhu služe kartografske projekcije. To su načini preslikavanja plohe elipsoida ili sfere u ravninu.

Smatra se da je prvu kartu u nekoj projekciji izradio Tales iz Mileta 600. godine p.n.e. Bila je to karta nebeske sfere u gnomonskoj projekciji. Među najstarije projekcije ubrajaju se stereografska i ortografska projekcija, koje je upotrijebio poznati grčki astronom i matematičar Hiparh, također za izradu karata nebeske sfere oko 150. godine p.n.e. Od tog vremena do danas izumljeno je nekoliko stotina kartografskih projekcija (Snyder, 1993). Radi lakšeg izučavanja tolikog broja projekcija potrebno je izvršiti njihovu klasifikaciju (§5).

U izradi matematičke osnove neke karte potrebno je konstruirati u izabranoj projekciji mrežu meridijana i paralela ili nekih drugih koordinatnih linija koje služe kao kostur za unošenje ostalog sadržaja. Grafički način konstrukcije tih kartografskih mreža u početku je potpuno zadovoljavao zahtjeve geografije i kartografije. S vremenom, pošto su se osnovne točke određivale triangulacijom, a karte sastavljale na temelju topografskih snimaka, bilo je potrebno točnije sastavljanje kartografskih mreža, što je bilo moguće postići izračunavanjem numeričkih vrijednosti koordinata točaka uzduž meridijana i paralela u projekciji. Taj način nazivamo analitičkim, jer koordinate trebaju biti izražene s pomoću matematičkih formula, tj. u analitičkom obliku. Potrebno je, stoga, za svaku kartografsku projekciju uspostaviti

funkcionalnu vezu između točaka na plohi elipsoida i u ravnini projekcije. Ta funkcionalna ovisnost izražava se osnovnim kartografskim jednadžbama (§6-§13).

Osnovne kartografske jednadžbe omogućuju računanje i izučavanje deformacija u kartografskim projekcijama. Naime, pri preslikavanju plohe elipsoida ili sfere na ravninu nastaju deformacije dužina, površina i kutova (§4). Na osnovi veličine i rasporeda deformacija na kartama u pojedinim projekcijama moguće je uspoređivanje projekcija i biranje što povoljnijih. Međutim, na izbor projekcije ne utječu samo deformacije, nego i veći broj drugih činitelja. Uzimajući sve to u obzir, potrebno je za karte određenog područja i određene namjene odabrati najpovoljniju projekciju (§17).

U izabranoj projekciji potrebno je zatim konstruirati mrežu meridijana i paralela. U tu svrhu danas se izrađuju kompjutorski programi za automatsko računanje i crtanje kartografskih mreža za bilo koji dio Zemljine sfere u bilo kojoj projekciji i mjerilu (§18).

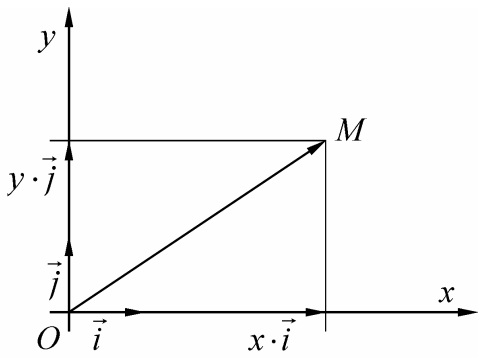
Za potrebe državne izmjere i izradu topografskih karata danas se u većini zemalja svijeta, pa i u Hrvatskoj, upotrebljava Gauß-Krügerova projekcija. To je razlog da je ta projekcija obrađena detaljnije od ostalih (§15). Posebno poglavlje posvećeno je također i matematičkoj osnovi topografskih karata Hrvatske (§16).

2. KOORDINATE*

Koordinate (od lat. *co-* – zajedno i *ordinatus* – uređeni, definirani) su brojevi čijim zadavanjem se definira položaj točke na pravcu, u ravnini, na plohi ili u prostoru. Prve koje su ušle u sustavnu upotrebu bile su astronomske i geografske koordinate – širina i duljina, koje određuju položaj točke na nebeskoj sferi ili na plohi Zemljine kugle. U 14. stoljeću francuski matematičar, fizičar i ekonomist N. Oresme primijenio je koordinate u ravnini za konstrukciju grafova, nazivajući duljinu i širinu onime, što danas nazivamo apscisom i ordinatom. Koordinate su se počele primjenjivati sustavnije u 17. st. pri rješavanju geometrijskih problema u ravnini. Zasluga za objašnjenje značaja koordinata koje omogućuju sustavno prevođenje zadataka geometrije na jezik matematičke analize i obratno pripada francuskom filozofu i matematičaru R. Descartesu (1596–1650, njegovo latinizirano ime je Cartesius). Osim koordinata točaka, razmatraju se također koordinate pravaca, ravnina i drugih geometrijskih objekata.

2.1. Kartezijev sustav koordinata

To je pravolinijski sustav koordinata u euklidskom prostoru. U ravnini se *opći Kartezijev koordinatni sustav* (*afin koordinatni sustav*) zadaje točkom O koja se naziva *ishodištem* i uređenim parom nekolinearnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ koji se nazivaju *baznim vektorima* (sl. 2.1). Pravci koji prolaze ishodištem u smjeru baznih vektora nazivaju se *koordinatnim osima* Kartezijevog koordinatnog sustava. Prva os, određena vektorom $\vec{i}$ naziva se *apscisnom osi* (ili osi x), druga *ordinatnom osi* (ili osi y). Kartezijev koordinatni sustav označava se $O\vec{i}\,\vec{j}$ ili *Oxy*. *Kartezijevim koordinatama točke M* u Kartezijevom koordinatnom sustavu *Oxy* naziva se uređeni par brojeva (x, y) koji su koeficijenti prikaza vektora $\overrightarrow{OM}$ u bazi $\vec{i}$, $\vec{j}$:



Slika 2.1. Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u ravnini

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Broj x naziva se *apscisom*, broj y *ordinatom* točke M. Ako su (x, y) koordinate točke M, piše se $M(x, y)$ i na taj način identificira točka s uređenim parom njenih koordinata.

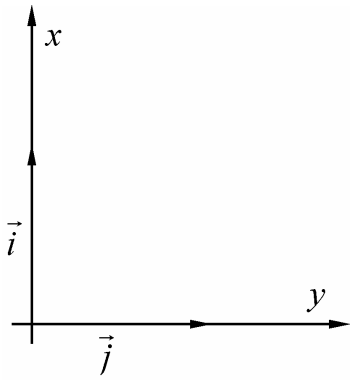
Kartezijev koordinatni sustav naziva se *pravokutnim* ako su bazni vektori ortonormirani, tj. međusobno okomiti i jedinične duljine. Vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$ nazivaju se u tom slučaju *ortima*. U pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu koordinate (x, y)

* Ovo poglavlje napisao je doc. dr. sc. Miljenko Lapaine

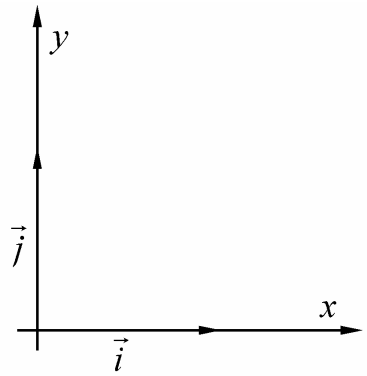
točke M jednake su: x – skalarnoj ortogonalnoj projekciji vektora $\overrightarrow{OM}$ na os apscisa, y – skalarnoj ortogonalnoj projekciji vektora $\overrightarrow{OM}$ na os ordinata.

Ponekad se upotrebljava kosokutni Kartezijev koordinatni sustav koji se razlikuje od pravokutnoga po tome što kut između baznih vektora nije pravi.

Neka su $S=O\vec{i}\,\vec{j}$ i $S'=O'\vec{i}'\vec{j}'$ dva pravokutna koordinatna sustava u ravnini. Postavlja se pitanje da li je moguće krutim gibanjem dovesti sustav S' u poklapanje sa sustavom S, tj. tako da $\vec{i}'$ prijeđe u $\vec{i}$ i $\vec{j}'$ u $\vec{j}$. Ako je to moguće, onda kažemo da su S i S' ekvivalentni (jednako orijentirani) sustavi. U protivnom S i S' nisu ekvivalentni (nisu jednako orijentirani) sustavi. Da bismo odgovorili na postavljeno pitanje, translatirajmo sustav S' tako da njegovo ishodište O' prijeđe u ishodište O sustava S. Zatim gibanjem u ravnini dovedimo $\vec{i}'$ na $\vec{i}$. Pri tome vektor $\vec{j}'$ padne u pravac vektora $\vec{j}$. Ako je $\vec{j}'$ prešlo u $\vec{j}$, onda su S i S' jednako orijentirani (ekvivalentni), a ako je $\vec{j}'$ prešlo u $-\vec{j}$, onda S i S' nisu jednako orijentirani. Iz upravo navedenih razmatranja jasno je da ako dva sustava S i S' nisu jednako orijentirani, onda je svaki treći pravokutni sustav orijentiran ili kao S ili kao S'. Dakle, skup svih pravokutnih koordinatnih sustava u ravnini raspada se na dva podskupa. Dva sustava padaju u isti od tih podskupova ako i samo ako su oni jednako orijentirani.

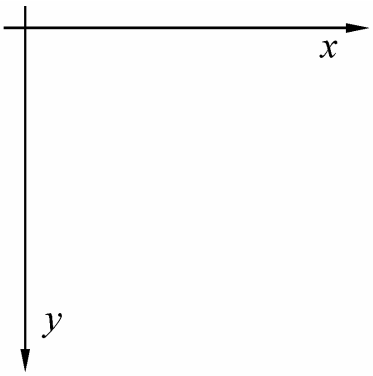


Slika 2.2a. Lijevi Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u ravnini

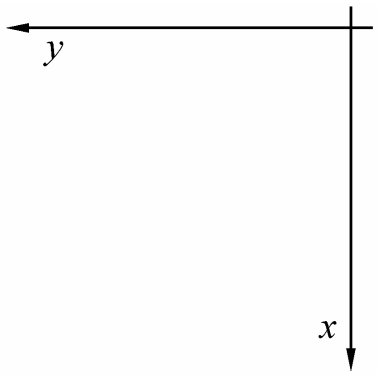


Slika 2.2b. Desni Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u ravnini

Sustav S smatramo pozitivno orijentiranim ili desnim ako gibanjem u smjeru suprotnom gibanju kazaljke na satu vektor $\vec{i}$ prelazi u vektor $\vec{j}$ nakon pređenog pravog kuta. Ukoliko analognim gibanjem vektor $\vec{i}$ prelazi u vektor $\vec{j}$ tek nakon prijeđena tri prava kuta onda je sustav negativno orijentiran ili lijevi. Sustavi prikazani na sl. 2.2a i 2.2b nisu ekvivalentni. Kažemo da je sustav na sl. 2.2a i svaki njemu ekvivalentan sustav *lijevi*, a sustav na sl. 2.2b i svaki njemu ekvivalentan sustav *desni* sustav. Nezgodna strana intuitivno uvedene orijentacije ravnine pomoću gibanja kazaljke na satu vidi se ako ne uzmemo horizontalno položenu, nego kosu ravninu. Naravno da su termini desni i lijevi stvar dogovora. Ono što smo proglasili kao desni mogli bismo proglasiti i kao lijevi, ali bi tada lijevo prešlo u desno. Bitno je da za bilo koja dva sustava možemo ustanoviti da li su jednako orijentirani ili nisu.



Slika 2.2c. Lijevi Kartezijev pravokutni koordinatni sustav na zaslonu monitora



Slika 2.2d. Stari koordinatni sustavi na području Hrvatske (lijevi)

Kriterij po kojemu se za dane sustave S i S' odlučuje jesu li jednako orijentirani ili nisu dobiva se na ovaj način. Vektore $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ razvijemo po vektorima baze $\vec{i}$, $\vec{j}$:

$$\vec{i}' = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$$
$$\vec{j}' = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}.$$

Sada računamo determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ako je $D > 0$, onda su koordinatni sustavi S i S' jednako orijentirani, a ako je $D < 0$, oni nisu jednako orijentirani. Može se pokazati da nikada nije $D = 0$. U navedenom kriteriju nije važno da su sustavi S i S' pravokutni.

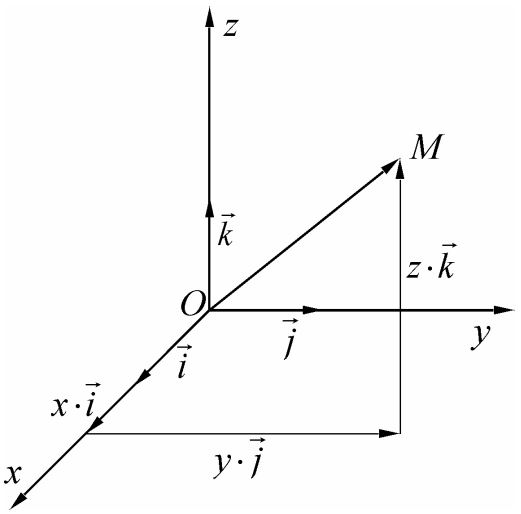
U matematici redovito rabimo desni Kartezijev koordinatni sustav u ravnini, kao što je prikazan na sl. 2.2b. Međutim, u nekim drugim područjima našao je primjenu i lijevi koordinatni sustav.

U računalnoj grafici moramo posvetiti pozornost početnom postavu koordinatnog sustava. Na primjer, ukoliko drugačije ne zadamo, u QuickBasicu je početni postav koordinatnog sustava na zaslonu monitora lijevi s ishodištem u gornjem lijevom kutu (sl. 2.2c).

U matematičkoj kartografiji, gotovo redovito, primjenjuje se lijevi koordinatni sustav kao na slici 2.2a, s dodatnim dogovorom da pozitivni smjer osi x pokazuje sjever, a pozitivni smjer osi y – istok. Ipak, stari koordinatni sustavi na području Hrvatske (Budimpeštanski, Kloštar-Ivanićki, Južni sustav kose konformne cilindrične projekcije, Bečki na području Dalmacije i Krimski) su također lijevi, ali im pozitivan smjer osi x gleda prema jugu, a pozitivan smjer osi y prema zapadu (sl. 2.2d).

Analogno se definira *opći Kartezijev koordinatni sustav* (*afin koordinatni sustav*) u prostoru zadavanjem točke O – ishodišta, i baznih vektora – trojke nekomplanarnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$. Da bi se dobile koordinate x, y, z točke M, vektor $\overrightarrow{OM}$ se prikaže u obliku

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,.$$

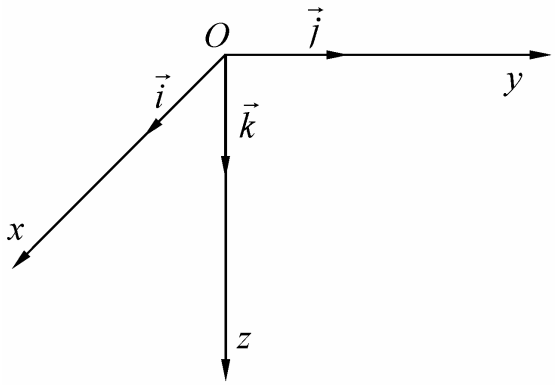


Slika 2.3. Kartezijev pravokutni sustav u prostoru

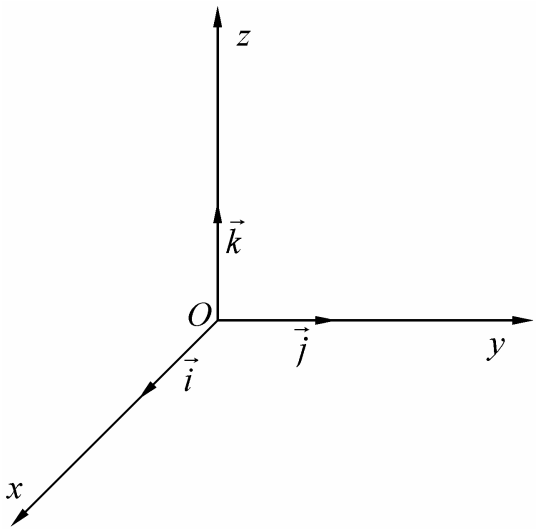
U najjednostavnijem slučaju *pravokutnih koordinata* vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ su u parovima okomiti i imaju jediničnu duljinu. Analogno slučaju u ravnini definiraju se *koordinatne osi – os apscisa* (ili os Ox), *os ordinata* (ili os Oy) i *os aplikata* (ili os Oz). Kartezijev koordinatni sustav u prostoru označava se s $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ ili $Oxyz$ (sl. 2.3). Ravnine koje sadrže par koordinatnih osi nazivaju se *koordinatnim ravninama*.

Neka su $S = O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ i $S' = O'\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$ dva pravokutna koordinatna sustava u prostoru. Postavlja se pitanje da li je moguće krutim gibanjem dovesti sustav S' u poklapanje sa sustavom S, tj. tako da $\vec{i}'$ prijeđe u $\vec{i}$, $\vec{j}'$ u $\vec{j}$ i $\vec{k}'$ u $\vec{k}$. Ako je to moguće, onda kažemo da su S i S' ekvivalentni (jednako orijentirani) sustavi. U protivnom S i S' nisu ekvivalentni (nisu jednako orijentirani) sustavi. Da bismo odgovorili na postavljeno pitanje, translatirajmo sustav S' tako da njegovo ishodište O' prijeđe u ishodište O sustava S. Zatim gibanjem dovedimo $\vec{i}'$ na $\vec{i}$. Pri tome ravnina vektora $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, koja je okomita na $\vec{i}'$, prijeđe u ravninu vektora $\vec{j}$, $\vec{k}$, koja je okomita na $\vec{i}$. Rotacijom prostora oko vektora $\vec{i}$ dovedimo novi položaj vektora $\vec{j}'$ u vektor $\vec{j}$. Pri tome vektor $\vec{k}'$ padne u pravac vektora $\vec{k}$. Ako je $\vec{k}'$ prešlo u $\vec{k}$, onda su S i S' jednako orijentirani (ekvivalentni), a ako je $\vec{k}'$ prešlo u $-\vec{k}$, onda S i S' nisu jednako orijentirani. Iz upravo navedenih razmatranja jasno je da ako dva sustava S i S' nisu jednako orijentirani, onda je svaki treći pravokutni sustav orijentiran ili kao S ili kao S'. Dakle, skup svih pravokutnih koordinatnih sustava raspada se na dva podskupa. Dva sustava padaju u isti od tih podskupova ako i samo ako su oni jednako orijentirani.

Sustavi prikazani na sl. 2.4a i 2.4b nisu ekvivalentni. Ako srednji prst ruke pokazuje u smjeru vektora $\vec{k}$ i palac u smjeru vektora $\vec{i}$, onda kažiprst pokazuje u smjeru vektora $\vec{j}$, i to za sl. 2.4a ako se radi lijevom, a za sl. 2.4b ako se radi desnom rukom. Zbog toga kažemo da je sustav na sl. 2.4a i svaki njemu ekvivalentan sustav *lijevi*, a sustav na sl. 2.4b i svaki njemu ekvivalentan sustav *desni* sustav. Naravno da su termini desni i lijevi stvar dogovora. Ono što smo proglasili kao desni mogli bismo proglasiti i kao lijevi, ali bi tada lijevo prešlo u desno. Bitno je da za bilo koja dva sustava možemo ustanoviti da li su jednako orijentirani ili nisu.



Slika 2.4a. Lijevi Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u prostoru



Slika 2.4b. Desni Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u prostoru

Kriterij po kojemu se za dane sustave S i S' odlučuje jesu li jednako orijentirani ili nisu dobiva se na ovaj način. Vektore $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ razvijemo po vektorima baze $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{i}' = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$
$$\vec{j}' = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$$
$$\vec{k}' = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}\,.$$

Sada računamo determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ako je $D > 0,$ onda su koordinatni sustavi S i S' jednako orijentirani, a ako je $D < 0,$ oni nisu jednako orijentirani. Može se pokazati da nikada nije $D = 0.$ U navedenom kriteriju nije važno da su sustavi S i S' pravokutni.

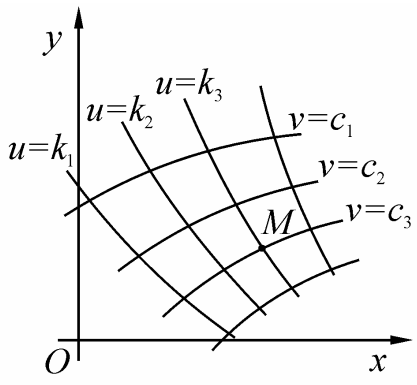
Položaj jednog pravokutnog Kartezijevog koordinatnog sustava u odnosu na drugi pravokutni Kartezijev koordinatni sustav sa zajedničkim ishodištem i iste orijentacije može se definirati pomoću tri Eulerova kuta (J. A. Euler, 1734–1800, ruski matematičar, fizičar i astronom).

Kartezijev koordinatni sustav nazvan je po francuskom matematičaru i filozofu R. Descartesu (1596–1650) koji je u svome djelu *Geometrija* (1673) upotrebljavao kosi koordinatni sustav s koordinatama koje su mogle biti samo pozitivni brojevi. No već u izdanju iz 1659–61 *Geometriji* je priložen rad nizozemskog matematičara J. Huddea (1633–1704), u kojem se prvi puta dozvoljavaju i negativne vrijednosti za koordinate. Prostorni

Kartezijev koordinatni sustav uveo je francuski matematičar i fizičar Ph. de La Hire (1640–1718); on je prvi primijenio riječ ishodište (franc. *origine*) – odatle oznaka O za ishodište. Oznake x, y i z za Kartezijeve koordinate nisu bile predložene odmah, već su se uobičajile početkom 18. st. Suvremene nazive za desni i lijevi koordinatni sustav uveo je engleski fizičar J. C. Maxwell (1831–1879).

2.2. Krivolinijske koordinate

To su koordinate točaka u području na plohi, u prostoru, različite od pravolinijskih (Kartezijevih) koordinata. Neka su na području D, koje se može podudarati s cijelom ravninom, zadane dvije glatke funkcije točaka $u(M)$ i $v(M)$ tako da u području D svaka krivulja familije $u(M)$ = const. siječe svaku krivulju familije $v(M)$ = const. u ne više od jedne točke. Par brojeva (u, v) jednoznačno definira točku M u području D i naziva se *krivolinijskim koordinatama* te točke (sl. 2.5). Krivulje $u(M)$ = const. i $v(M)$ = const. nazivaju se koordinatnim krivuljama u sustavu krivolinijskih koordinata u, v; one pokrivaju područje D *koordinatnom mrežom* koja je u pravilu krivolinijska, i to objašnjava naziv krivolinijske koordinate. Ako je u ravnini definiran pravokutni koordinatni sustav Oxy, tada su funkcije $u(M)$ i $v(M)$ funkcije koordinata (x, y) točke M, tj.



Slika 2.5. Krivolinijske koordinate u ravnini

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{2.1}$$

Funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ preslikavaju područje D uzajamno jednoznačno na neko područje D', tj. sustav (2.1) može se riješiti:

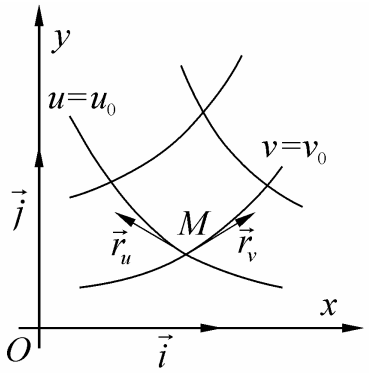
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{2.2}$$

Glatkost funkcija $u(x, y)$ i $v(x, y)$ označava da su funkcije (2.1) neprekidno diferencijabilne po x i y do određenog reda. Pretpostavlja se da su funkcije (2.2) iste glatkoće.

Ako su funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ neprekidno diferencijabilne i uzajamno jednoznačno preslikavaju područje D na područje D' i ako su funkcije (2.2) također neprekidno diferencijabilne, onda su determinante

$$J_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

različite od nule i $J_1 J_2 = 1$. Determinante J_1 i J_2 nazivaju se Jacobijanima preslikavanja (1), odnosno (2). Koordinatne krivulje u okolini svake točke područja D su neprekidno diferencijabilne krivulje, koje dopuštaju parametarski prikaz $x = x(u, v_0)$ i $y = y(u, v_0)$ ili $x = x(u_0, v)$ i $y = y(u_0, v)$. U svakoj točki M (sl. 2.6) područja D određena su dva nekolinearna vektora



Slika 2.6. Lokalna baza u krivolinijskom koordinatnom sustavu

$$\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j},$$

usmjerenih po tangentama na koordinatne krivulje u i v u smjeru porasta parametara ($\vec{i}$ i $\vec{j}$ čine ortonormiranu bazu u koordinatnom sustavu Oxy). Par vektora $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ naziva se *lokalnom bazom* u krivolinijskom koordinatnom sustavu u, v. Ako je lokalna baza orijentirana pozitivno, onda su Jacobijani J_1 i J_2 pozitivni, u protivnom slučaju - negativni. Krivolinijske koordinate nazivaju se *ortogonalnim* ako su koordinatne linije međusobno ortogonalne u svakoj točki područja D. Nužan i dovoljan uvjet ortogonalnosti krivolinijskih koordinata je $\vec{r}_u \vec{r}_v = 0$. Ortogonalne krivolinijske koordinate u ravnini su primjerice: polarne koordinate, bipolarne koordinate, paraboličke koordinate, eliptičke koordinate.

Analogno se uvode krivolinijske koordinate u područje D prostora kao neprekidno diferencijabilno uzajamno jednoznačno preslikavanje definirano funkcijama

$$u = u(x, y, z), \; v = v(x, y, z), \; w = w(x, y, z), \tag{2.4}$$

za koje postoji neprekidno diferencijabilno inverzno preslikavanje

$$x = x(u, v, w), \; y = y(u, v, w), \; z = z(u, v, w). \tag{2.5}$$

Jacobijani preslikavanja (2.4) i njegovog inverznog preslikavanja (2.5) različiti su od nule. Kroz svaku točku M područja D prolazi po jedna ploha familije $u(M) = \text{const.}$, familije $v(M) = \text{const.}$ i familije $w(M) = \text{const.}$, koje se nazivaju *koordinatnim plohama*. Krivulje presjeka dviju koordinatnih ploha nazivaju se *koordinatnim krivuljama*. U svakoj točki područja D definirana je lokalna baza $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_w$ čiji vektori su usmjereni po tangentama na koordinatne krivulje u smjeru porasta parametara. Ako je $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ baza pravokutnog Kartezijevog sustava $Oxyz$, tada je

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u &= \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}, \\
\vec{r}_v &= \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}, \\
\vec{r}_w &= \frac{\partial x}{\partial w}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\vec{k}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ako su lokalna baza i baza $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jednako orijentirane, onda je Jacobijan preslikavanja (5) zajedno s Jacobijanom sustava (2.6) pozitivan, u protivnom slučaju – negativan. Krivolinijski koordinatni sustav naziva se *ortogonalnim* ako su u svakoj točki područja D koordinatne krivulje uzajamno okomite.

Ortogonalne krivolinijske koordinate u prostoru su primjerice sferne koordinate, cilindrične koordinate, bisferne, bicilindrične i toroidalne koordinate (koje se konstruiraju pomoću polarnih koordinata), konusne koordinate, paraboličke koordinate, eliptičke koordinate.

U nizu slučajeva krivolinijske koordinate se proširuju s područja na širi skup uz narušavanje uvjeta uzajamno jednoznačnog pridruživanja između točaka i njihovih krivolinijskih koordinata (primjerice polarne koordinate u ravnini).

Parametarsko zadavanje ploha u prostoru omogućuje uvođenje krivolinijskih koordinata na plohe, pri tome se geometrijska svojstva ploha izučavaju metodama diferencijalne geometrije.

Krivolinijske koordinate rabe se u različitim područjima i posebno u numeričkim zadacima matematike i fizike, geodeziji i kartografiji, a u nekim slučajevima u određenom smislu to su prirodne koordinate (polarne koordinate u kružnim područjima, sferne u kuglastim itd.).

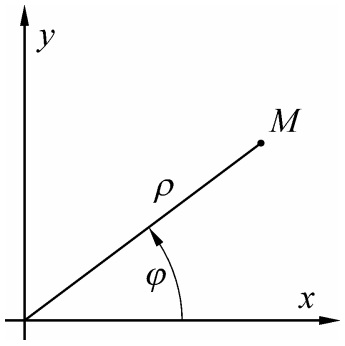
Krivolinijske koordinate prvi je primijenio švicarski matematičar Jacob Bernoulli (1654–1705), a koordinatama ih je nazvao njemački filozof-idealist, matematičar, fizičar, izumitelj, pravnik, povjesničar i jezikoslovac G. W. Leibnitz (1646–1716). Krivolinijske koordinate na plohi vezuju se uz ime njemačkog matematičara koji je dao temeljne doprinose također astronomiji i geodeziji C. F. Gaußa (1777–1855). Naziv za krivolinijske koordinate u prostoru prvi je uveo francuski matematičar i inženjer G. Lamé (1795–1870).

2.3. Polarne koordinate

Osim pomoću Kartezijevih koordinata u ravnini, položaj točke može se opisati i pomoću polarnih koordinata ρ i φ (sl. 2.7), koje su povezane s pravokutnim koordinatama x i y formulama

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

gdje je $0 \le \rho < \infty, \ 0 \le \varphi < 2\pi$. Koordinatne linije su koncentrične kružnice ($\rho = \text{const.}$) i zrake ($\varphi = \text{const.}$). Svakoj točki u ravnini Oxy (osim točke O, za koju je $\rho = 0$, a φ nije definirano) odgovara par brojeva (ρ, φ) i obratno. Udaljenost ρ točke M od pola naziva se *polarnim polumjerom*, a kut φ *polarnim kutom*.



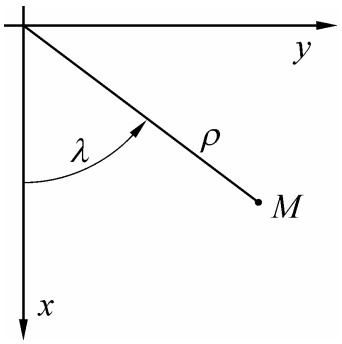
Slika 2.7. Polarni koordinatni sustav u ravnini

Poopćene polarne koordinate su r i ψ, povezane s pravokutnim koordinatama formulama

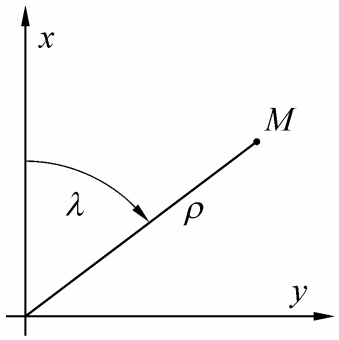
$$x = a\,r\cos\psi, \quad y = b\,r\sin\psi,$$

gdje je $0 \le r < \infty,\ 0 \le \psi < 2\pi,\ a > 0,\ b > 0$. Koordinatne linije su elipse (r = const.) i zrake (ψ =const.). O poopćenju polarnih koordinata na prostor vidjeti pod naslovom *Sferne koordinate.*

Polarne koordinate u implicitnom obliku primijenio je starogrčki matematičar Dinostrat (4. st. pr. Kr.) pri istraživanju kvadratrise. Engleski fizičar i matematičar I. Newton (1643–1727) upotrebljava polarne koordinate i daje formule njihove veze s pravokutnim koordinatama. U gotovo suvremenom obliku polarne koordinate se pojavljuju kod švicarskog matematičara Jacoba Bernoullija (1654–1705). Termin *polarne koordinate* pojavio se u 19. st.



Slika 2.8a. Postav koordinatnog sustava pri azimutalnoj projekciji gornje polusfere

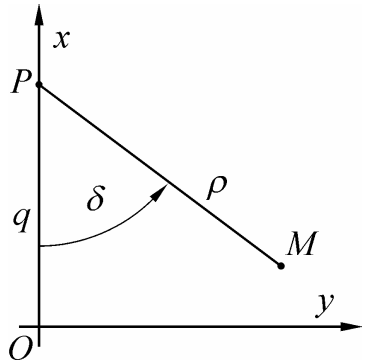


Slika 2.8b. Postav koordinatnog sustava pri azimutalnoj projekciji donje polusfere

U matematičkoj kartografiji polarne koordinate se primjenjuju kod azimutalnih i konusnih projekcija. Kod uspravnih ili polarnih azimutalnih projekcija polarne koordinate u ravnini su ρ i λ, a njihova veza s pravokutnim Kartezijevima

$$x = \rho\cos\lambda\,, \quad y = \rho\sin\lambda\,,$$

gdje je $\rho \ge 0,\ -\pi \le \lambda \le \pi$. Pri tome, ukoliko želimo imati prirodan pogled odozgo na gornju polusferu treba postaviti koordinatni sustav kao na sl. 2.8a. No, taj će postav dati pogled na donju polusferu iznutra, odnosno dobit će se zrcalna slika rasporeda kopna i mora u odnosu na onu na koju smo inače navikli. Stoga u tom slučaju postav koordinatnog sustava



Slika 2.9. Polarni koordinatni sustav kod uspravnih konusnih projekcija

treba biti kao na sl. 2.8b. Postoji naravno i druga mogućnost, prema kojoj postav koordinatnog sustava ostaje uvijek jedan te isti, ali se tada treba na odgovarajući način promijeniti jednadžbe projekcije.

Pri uspravnim konusnim projekcijama polarne koordinate u ravnini su ρ i δ, a njihova veza s pravokutnim Kartezijevim koordinatama

$$x = q - \rho\cos\delta, \quad y = \rho\sin\delta, \quad \delta = k\lambda,$$

gdje je $\rho \geq 0, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$ a q i k konstante projekcije. Pri tome, ukoliko želimo imati prirodan pogled odozgo na gornju polusferu treba postaviti koordinatni sustav kao na sl. 2.9.

2.4. Sferne koordinate

Sferne ili prostorne polarne koordinate ρ, θ i φ povezane su s pravokutnim koordinatama x, y, z formulama

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta,$$

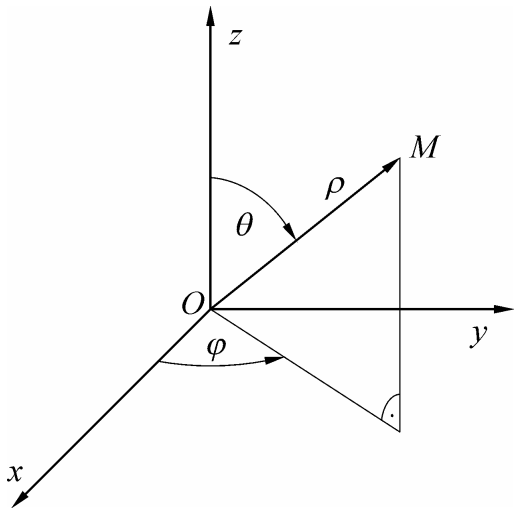
gdje je $0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$ (sl. 2.10). Koordinatne plohe: koncentrične sfere sa središtem O (ρ =const.); poluravnine koje sadrže os Oz (φ =const.); kružni stošci s vrhom O i osi Oz (θ =const.). Sustav sfernih koordinata je ortogonalan.

Poopćene sferne koordinate u, v, w povezane su s pravokutnim koordinatama x, y, z formulama

$$x = au\cos v\sin w, \quad y = bu\sin v\sin w, \quad z = cu\cos w,$$

gdje je $0 \leq u < \infty, \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad 0 \leq w \leq \pi, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$ Koordinatne plohe: elipsoidi (u = const.), poluravnine (v = const.) i eliptički stošci (w = const.).

Sferne koordinate upotrebljavale su se u astronomiji; formule koje povezuju sferne koordinate s pravokutnim koordinatama dao je francuski matematičar i fizičar J. L. Lagrange (1736–1813), a naziv *sferne koordinate* predložio je njemački matematičar-pedagog H. R. Baltzer (1818–1887).



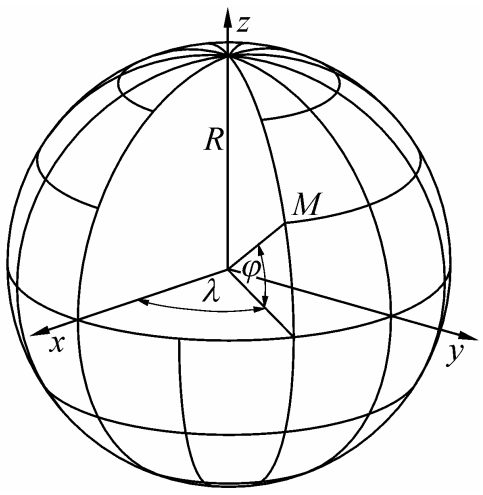
Slika 2.10. Sferni (prostorni polarni) koordinatni sustav

2.5. Geografske koordinate na sferi

Često se za model Zemljine plohe uzima sfera. Jednadžba sfere sa središtem u ishodištu pravokutnoga Kartezijevog sustava *Oxyz* i s polumjerom *R* glasi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Takva se sfera naziva *Zemljinom sferom*. Točka s koordinatama (0, 0, *R*) naziva se *Sjevernim polom*, a ona s koordinatama (0, 0, –*R*) *Južnim polom*. Kružnica na sferi koja je jednako udaljena od polova naziva se *ekvatorom* ili *polutarom* i ona dijeli sferu na dvije *polusfere – polutke*. Pravac koji prolazi polovima naziva se *os Zemljine sfere*, a ravnina u kojoj se nalazi ekvator – *ekvatorskom ravninom*.



Slika 2.11. Geografske koordinate na Zemljinoj sferi

Kut koji zatvara normala (ujedno i radijus-vektor) proizvoljne točke *M* na Zemljinoj sferi s ekvatorskom ravninom naziva se *geografskom širinom* i označava s φ. Sve točke na Zemljinoj sferi koje imaju istu geografsku širinu leže na kružnici koja se naziva *paralelom* ili *usporednicom*.

Polukružnice na Zemljinoj sferi koje spajaju Sjeverni i Južni pol nazivaju se *meridijanima* ili *podnevnicima*. Jedan među njima naziva se *nultim* ili *početnim meridijanom*. To je obično meridijan koji leži u ravnini $y = 0$. *Geografska duljina* proizvoljne točke *M* na Zemljinoj sferi označava se s λ, a to je kut između meridijana koji prolazi točkom *M* i nultog meridijana. Prema tome, sve točke koje leže na istom meridijanu imaju istu geografsku duljinu.

Geografska širina mjeri se u intervalu $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, a geografska duljina najčešće u intervalu $-\pi \le \lambda \le \pi$. Geografske koordinate φ i λ čine krivolinijski koordinatni sustav na sferi. Koordinatne krivulje su paralele i meridijani.

Geografski koordinatni sustav može se interpretirati i kao restrikcija sfernog prostornog koordinatnog sustava na sferu polumjera *R*. Pritom se u geodeziji i kartografiji uvode drugačije oznake od onih u matematici: umjesto φ dolazi λ, a umjesto zenitne daljine θ – geografska širina φ, točnije vrijedi

$$\lambda = \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

gdje su s lijeve strane jednadžbi geografske koordinate, a s desne strane koordinate sfernog prostornog koordinatnog sustava (usporediti slike 2.10 i 2.11).

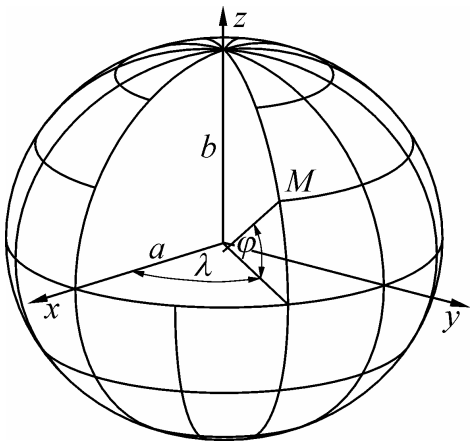
Na temelju izloženoga i sl. 2.11 mogu se izvesti veze pravokutnih Kartezijevih prostornih koordinata x, y, z proizvoljne točke M na sferi i njenih geografskih koordinata φ, λ:

$$x = R\cos\varphi\cos\lambda,\ \ y = R\cos\varphi\sin\lambda,\ \ z = R\sin\varphi.$$

2.6. Geografske koordinate na rotacijskom elipsoidu

Osim sfere, često se za model Zemljine plohe uzima rotacijski elipsoid. Jednadžba rotacijskoga elipsoida sa središtem u ishodištu pravokutnoga Kartezijevog sustava *Oxyz* i poluosima a i b glasi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$



Slika 2.12. Geografske koordinate na rotacijskom elipsoidu

Točka s koordinatama (0, 0, b) naziva se *Sjevernim polom*, a ona s koordinatama (0, 0, –b) *Južnim polom*. Kružnica na elipsoidu koja je jednako udaljena od polova naziva se *ekvatorom* ili *polutarom* i ona dijeli elipsoid na dva dijela – *polutke*. Pravac koji prolazi polovima naziva se *os rotacijskoga elipsoida*, a ravnina u kojoj se nalazi ekvator – *ekvatorskom ravninom*.

Kut koji zatvara normala (ali ne i radijus-vektor) proizvoljne točke M na elipsoidu s ekvatorskom ravninom naziva se *geografskom širinom* i označava s φ. Sve točke na rotacijskom elipsoidu koje imaju istu geografsku širinu leže na kružnici koja se naziva *paralelom* ili *usporednicom*.

Poluelipse na elipsoidu koje spajaju Sjeverni i Južni pol nazivaju se *meridijanima* ili *podnevnicima*. Jedan među njima naziva se *nultim* ili *početnim meridijanom*. To je obično mjeridijan koji leži u ravnini $y = 0$. *Geografska duljina* proizvoljne točke M na elipsoidu označava se s λ, a to je kut između meridijana koji prolazi točkom M i nultog meridijana. Prema tome, sve točke koje leže na istom meridijanu imaju istu geografsku duljinu.

Geografska širina mjeri se u intervalu $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, a geografska duljina najčešće u intervalu $-\pi \le \lambda \le \pi$. Geografske koordinate φ i λ predstavljaju krivolinijski koordinatni sustav na rotacijskom elipsoidu. Koordinatne krivulje su paralele i meridijani.

Na temelju izloženoga i sl. 2.12 mogu se izvesti veze pravokutnih Kartezijevih prostornih koordinata x, y, z proizvoljne točke M na rotacijskom elipsoidu i njenih geografskih koordinata φ, λ:

$$x = \frac{a}{W}\cos\varphi\cos\lambda\,,\ y = \frac{a}{W}\cos\varphi\sin\lambda\,,\ z = \frac{a}{W}(1-e^2)\sin\varphi,$$

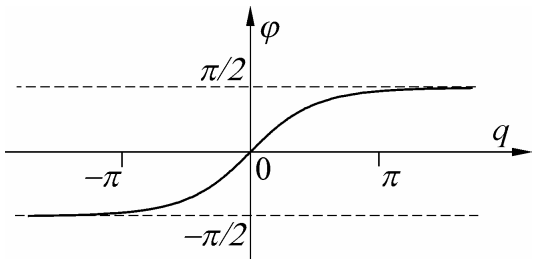
gdje je

$$W = \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,,$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

2.7. Izometrijska širina

U matematičkoj kartografiji i geodeziji najčešće se primjenjuje parametrizacija rotacijskog elipsoida ili sfere pomoću koje se na njih uvodi geografski koordinatni sustav, odnosno mreža meridijana i paralela. Međutim, ponekad će biti spretnije upotrijebiti neku drugu parametrizaciju. Tako se primjerice pri proučavanju konformnih preslikavanja prirodno pojavljuje konformna ili izometrijska širina q. Ona se na rotacijskom elipsoidu definira pomoću geografske širine diferencijalnom jednadžbom



Slika 2.13. Odnos između geografske i izometrijske širine

$$dq = \frac{(1-e^2)\,d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}$$

Nakon integriranja (supstitucija $t = \sin\varphi$) i uz početni uvjet $q(0) = 0$, dobije se izraz za izometrijsku širinu na rotacijskom elipsoidu:

$$q = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{e}\right] =$$

$$= \operatorname{Arth}(\sin\varphi) - e\operatorname{Arth}(e\sin\varphi)\,.$$

U specijalnom slučaju ($e = 0$) dobijemo izometrijsku širinu na sferi:

$$q = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \operatorname{Arth}(\sin\varphi).$$

Grafički prikaz međusobne ovisnosti geografske i izometrijske širine dan je na sl. 2.13. S obzirom da je funkcija $q = q(\varphi)$ bijekcija, to postoji njena inverzna funkcija $\varphi = \varphi(q)$. U slučaju izometrijske širine na sferi, inverzna funkcija glasi:

$$\varphi = \arcsin(\operatorname{th} q) = 2\operatorname{arctg}(e^q) - \frac{\pi}{2}.$$

U slučaju izometrijske širine na rotacijskom elipsoidu, inverzna funkcija se ne može napisati u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija, nego se koriste različiti aproksimacijski postupci ili pak približne formule. Sa stajališta djelotvornosti i za praktičnu primjenu naprikladnije su sljedeće formule:

$$\varphi = \arctan[(a_0 + (a_2 + a_4 T^2)\, T^2)\operatorname{sh} q],$$

$$\varphi = \arctan[(b_0 + (b_2 + (b_4 + b_6 T^2)\, T^2)\, T^2)\operatorname{sh} q],$$

ili

$$\varphi = \arctan[(c_0 + (c_2 + (c_4 + (c_6 + c_8 T^2)\, T^2)\, T^2)\, T^2)\operatorname{sh} q],$$

uz oznake

$$a_0 = b_0 = c_0 = 1 + \varepsilon,$$

$$a_2 = -\frac{1}{6}\varepsilon^2 a_0\ , \quad a_4 = \frac{1}{5}\varepsilon^2 a_0\ ,$$

$$b_2 = -\frac{1}{6}\varepsilon^2 b_0\ , \quad b_4 = \left(\frac{1}{5}\varepsilon^3 + \frac{13}{120}\varepsilon^4\right) b_0\ , \quad b_6 = -\frac{19}{63}\varepsilon^4 b_0\ ,$$

$$c_2 = -\frac{1}{6}\varepsilon^2 c_0\ , \quad c_4 = \left(\frac{1}{5}\varepsilon^3 + \frac{13}{120}\varepsilon^4\right) c_0\ , \quad c_6 = \left(-\frac{19}{63}\varepsilon^4 - \frac{71}{210}\varepsilon^5\right) c_0\ , \quad c_8 = \frac{161}{315}\varepsilon^5 c_0\ ,$$

gdje je

$$\varepsilon = e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \qquad T = \operatorname{th} q.$$

Maksimalna pogreška određivanja geografske širine φ iz izometrijske širine q na rotacijskom elipsoidu prema prvoj formuli iznosi 0.000 0175", prema drugoj formuli iznosi 0.000 000 08", a prema trećoj 0.000 000 000 4".

3. OBLIK I VELIČINA ZEMLJE*

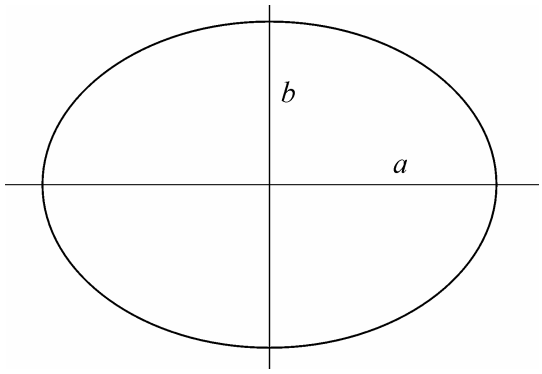
Pri rješavanju različitih zadataka u geodeziji, daljinskim istraživanjima, navigaciji i kartografiji smatramo da je oblik Zemlje rotacijski elipsoid ili sfera. Da bismo se upoznali s veličinama i oznakama koje ćemo sretati u daljnjim poglavljima naznačit ćemo osnovne elemente Zemljina elipsoida i sfere.

3.1. Elementi Zemljina elipsoida

Zemljin elipsoid nastaje rotacijom elipse (sl. 3.1) oko njene kraće osi za koju pretpostavljamo da se podudara s osi Zemlje.

Pri razmatranju osobina rotacijskog elipsoida dovoljno je poznavati elemente meridijanske elipse čijom rotacijom nastaje Zemljin elipsoid. Veliku poluos te elipse označavamo s a, a malu s b.

Dimenzije elipsoida često se zadaju pomoću velike poluosi a i *spljoštenosti* f koja se definira na sljedeći način



Slika 3.1. Elipsa

$$f = \frac{a-b}{a}. \tag{3.1}$$

Osim toga definira se *druga spljoštenost*

$$f' = \frac{a-b}{b}, \tag{3.2}$$

i treća spljoštenost

$$n = \frac{a-b}{a+b}. \tag{3.3}$$

U računanjima u geodeziji i kartografiji srest ćemo se često s *prvim* i *drugim numeričkim ekscentricitetima* e i e' koji se definiraju sljedećim relacijama:

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad e' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}. \tag{3.4}$$

* Ovo poglavlje napisao je doc. dr. sc. Miljenko Lapaine

Polumjer zakrivljenosti u polu je

$$c = \frac{a^2}{b}. \tag{3.5}$$

Sve linearne i relativne veličine elipse nazivaju se elementima elipse. Elementi elipse istovremeno su i elementi rotacijskog elipsoida čija je izvodnica ta elipsa. Zbog toga se svi gore navedeni elementi elipse i relacije među njima mogu u potpunosti prenijeti na plohu Zemljina elipsoida.

Za određivanje numeričkih vrijednosti elemenata Zemljina elipsoida, obično velike poluosi i spljoštenosti, koristi se veliki broj geodetskih, astronomskih, gravimetrijskih i satelitskih mjerenja.

Određivanjem dimenzija Zemljina elipsoida bavili su se tijekom proteklih stoljeća mnogi učenjaci i ustanove. U tablici 3.1 navodimo dimenzije Zemljina elipsoida koje su u geodetskoj i kartografskoj praksi mnogih zemalja našle do sada najveću primjenu.

Tablica 3.1. Dimenzije Zemljina elipsoida

Naziv	Godina	a	b	$1/f$
Everest	1830	6377276.345	6356075.415	300.801726
Bessel	1841	6377397.155	6356078.963	299.152813
Clarke	1866	6378206.400	6356583.800	294.978698
Clarke	1880	6378249.145	6356514.967	293.466308
Hayford Internacionalni	1909 1924	6378388	6356911.946	297
Krasovskij	1940	6378245	6356863.019	298.3
GRS 1967	1967	6378160	6356774.516	298.247166
GRS 1980	1980	6378137	6356752.3141	298.257222
WGS 72		6378135	6356750.520	298.26
WGS 84	1987	6378137	6356752.314	298.257223563

U geodeziji se Zemljin elipsoid obično identificira sa Zemljinim sferoidom. Sferoid je geometrijsko tijelo blisko po obliku sferi ili kugli. Zbog toga se Zemljin sferoid razmatra kao rotacijski elipsoid s malom spljoštenosti.

3.1.1. Besselov elipsoid

Imajući u vidu stalni razvoj instrumenata i mjerne tehnike, moramo se pripremiti za računanja koja sama po sebi neće donositi nepotrebne dodatne pogreške. S obzirom na to, Lapaine i dr. (1992) ukazali su na neusklađenosti u definiranju osnovnih parametara Besselova elipsoida, predložili za polazne bespogrešne veličine Helmertove dekadske logaritme poluosi, te dali numeričke vrijednosti poluosi i drugih izvedenih konstanti na 24 znamenke.

U literaturi je Besselov elipsoid zadan redovito pomoću numeričkih vrijednosti za poluosi a i b u metrima (Savezna geodetska uprava 1953, Čubranić 1979)

$$\begin{aligned} a &= 6\,377\,397.15500 \\ b &= 6\,356\,078.96325\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

ili u obliku dekadskih logaritama (Glavna geodetska uprava 1951, Jordan/Eggert/Kneissl 1958)

$$\begin{aligned} \log a &= 6.80464\,34637 \\ \log b &= 6.80318\,92839\,, \end{aligned} \tag{3.7}$$

ili istovremeno u oba zapisa (Borčić 1955a, 1955b, 1976, Čubranić 1974a, 1974b, 1979, Helmert 1880, Svečnikov 1953, Živković 1972). Ako antilogaritmiramo izraze (3.7) dobit ćemo poluosi u metrima

$$\begin{aligned} a &= 6\,377\,397.15507\,6050 \\ b &= 6\,356\,078.96289\,7785\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

odakle vidimo neslaganje s (3.6) koje je nešto manje od milimetra. Već je Mittermayer (1964) ustanovio da ta razlika nije bez daljnjega zanemariva. K tomu još treba dodati činjenicu da se računanju izvedenih parametara često nije pridavala potrebna pažnja.

Neusklađene vrijednosti za polazne parametre Besselova elipsoida prvi put je objavio Helmert (1880), odakle su kasnije preuzimane. Mittermayer (1964) je predložio da se spomenuta neusklađenost riješi na taj način, da se u skladu sa zauzetim stavom u poznatom priručniku Jordan/Eggert/Kneissl (1958), kao zadane (bespogrešne) veličine uzmu dekadski logaritmi poluosi (3.7), odnosno točnije zapisano

$$\begin{aligned} \log a &= 6.80464\,34637\,00... \\ \log b &= 6.80318\,92839\,00..., \end{aligned} \tag{3.9}$$

te na osnovi njih ponovno izračunaju same poluosi, kao i sve druge iz njih izvedene konstante.

Tablica 3.2. 24-znamenkaste vrijednosti parametara Besselova elipsoida

a	$= 6.37739\ 71550\ 76049\ 68997\ 032 \cdot 10^{6}$
b	$= 6.35607\ 89628\ 97784\ 71999\ 671 \cdot 10^{6}$
c	$= 6.39878\ 68481\ 46673\ 34196\ 256 \cdot 10^{6}$
e^2	$= 6.67437\ 22306\ 14059\ 90520\ 102 \cdot 10^{-3}$
e	$= 8.16968\ 31215\ 25620\ 04447\ 014 \cdot 10^{-2}$
e'^2	$= 6.71921\ 87979\ 70655\ 22967\ 900 \cdot 10^{-3}$
e'	$= 8.19708\ 41144\ 70617\ 79489\ 314 \cdot 10^{-2}$
$1/f$	$= 2.99152\ 81285\ 33405\ 87660\ 965 \cdot 10^{2}$
$1/f'$	$= 2.98152\ 81285\ 33405\ 87660\ 965 \cdot 10^{2}$
n	$= 1.67418\ 48008\ 15972\ 75641\ 470 \cdot 10^{-3}$

U našoj se zemlji računanja također vrše na Besselovom elipsoidu. Ispravna bi bila dva pristupa. Prvi, da u skladu s Pravilnikom za državni premer (1951) usvojimo kao polazne parametre Besselova elipsoida njegove poluosi u logaritamskom obliku (3.7). Druga mogućnost, prema naredbi ministra financija iz 1924. god. o usvajanju Gauß-Krügerove projekcije (Osnovni geodetski radovi 1953), je prihvaćanje numeričkih vrijednosti za poluosi u metrima (3.6). Bez obzira na spomenutu naredbu, Lapaine i dr. (1992) smatraju da bi točnija geodetska računanja trebalo temeljiti na stavku iz poznatog priručnika Jordan/Eggert/Kneissl (1958), da se kao osnovne zadane bespogrešne veličine primijenjuju Helmertovi dekadski logaritmi za poluosi (3.9).

S obzirom na to da se u mnogim izrazima prema kojima se vrše računanja u geodeziji i kartografiji ne pojavljuju logaritmi poluosi, nego same poluosi, trebamo njihove što točnije vrijednosti. Lapaine i dr. (1992) izračunali su numeričke vrijednosti poluosi Besselova elipsoda, kao i drugih izvedenih parametara, tablica 3.2.

3.1.2. Opći Zemljin elipsoid

Elipsoid kojim se najbolje prikazuje Zemlja kao planeta zove se *Zemljin opći elipsoid*. To je međutim matematički model Zemlje za koji postoji više definicija. Svima njima je cilj da se postigne što veća podudarnost elipsoida s planetom Zemljom. Takav je elipsoid u prostoru apsolutno orijentiran, tj. njegova ravnina ekvatora podudara se s ravninom ekvatora Zemlje, a mala os sa srednjim položajem rotacijske osi Zemlje (srednji položaj za određenu epohu).

U ovisnosti o raspoloživim podacima i primijenjenim matematičkim aparatom izveden je veći broj vrijednosti parametara općeg elipsoida. Pri tome se redovito nastojalo postići apsolutnu orijentaciju. To se dosta uspješno uspjelo ostvariti tek obradom opažanja umjetnih Zemljinih satelita.

Elipsoid na koji se svode geodetska mjerenja i na kojem se ona obrađuju naziva se *referentnim elipsoidom*. Prema tome, i opći elipsoid može biti referentni ako se na njega svedu i na njemu obrađuju geodetska mjerenja.

Opći Zemljin elipsoid nije se u prošlosti koristio kao referentni uglavnom zbog toga što se nije mogao orijentirati na odgovarajući način. Osim toga, nisu postojala sredstva i mjerni materijal za izračunavanje razlike potencijala geoida i općeg elipsoida barem u jednoj točki. Zbog toga se nisu mogle izračunati udaljenosti između tih dviju ploha, a kao posljedica toga, ni redukcija mjerenja na elipsoid (Muminagić 1987).

To je razlog što je svaka država ili grupa država utvrđivala svoj referentni elipsoid koji je bio najprikladniji za njihovo područje kako po dimenzijama, tako i po orijentaciji. Posljedica takvog stanja je diskontinuitet - nepovezanost geodetskih mreža i karata raznih država. Gospodarsko-političke i vojne integracije država, nastale poslije II svjetskog rata, objedinile su unutar svoga područja geodetske radove i prenijele ih svaka na svoj posebno izabran i orijentiran elipsoid.

Suvremena satelitska tehnika i elektronička računala omogućili su uz veliko povećanje točnosti i vrlo točno određivanje središta inercije Zemlje, položaja njene osi rotacije, kao i dimenzija i oblika. Tako se mogao orijentirati opći Zemljin elipsoid i razviti jedinstvena svjetska triangulacija. Osim toga, novim metodama se relativno brzo dobija ogroman broj mjerenja visoke točnosti, koje onda računala obrađuju na željeni način. Prema tome, moguće je izračunati sve točnije parametre oblika, dimenzija Zemlje i polja Zemljine sile teže. Nakon njihovog uspoređivanja i analiziranja Međunarodno geodetsko udruženje (International Association of Geodesy IAG) periodički ih usvaja i preporučuje kao referentne.

Tako je primjerice rezolucijom 17. kongresa IAG-a 1979. godine (Moritz 1980) preporučen Geodetski referentni sustav 1980 (GRS 80). Osnovni parametri pripadnog elipsoida su: $a = 6\,378\,137 \pm 2$ m, $1/f = (298\,257 \pm 1)\cdot 10^{-3}$.

3.1.3. Koordinatni sustav WGS 84

World Geodetic System 1984 (WGS 84) razvijen je u SAD kao zamjena za WGS 72. Razvoj WGS-a 84 bio je iniciran u svrhu pružanja preciznijih geodetskih i gravimetrijskih podataka sustavima navigacije i naoružanja Ministarstva obrane (Department of Defense). Novi sustav prikazuje modeliranje Zemlje iz geometrijskih, geodetskih i gravimetrijskih stajališta koristeći podatke, tehnike i tehnologiju kojom je raspolagala Defense Mapping Agency početkom 1984. godine.

Koordinatni sustav WGS 84 je konvencionalan sustav dobiven modificiranjem sustava nazvanog Navy Navigation Satellite System Doppler Reference Frame (NSWC 9Z-2) u ishodištu i mjerilu te rotaciji koja njegov referentni meridijan dovodi do poklapanja s nul-meridijanom Bureaua International de l'Heure (BIH).

Dakle, ishodište koordinatnog sustava WGS 84 nalazi se u središtu mase Zemlje; WGS 84 Z-os paralelna je smjeru Convetional Terrestrial Pole (CTP) za gibanje pola, kako

je definirao BIH, *X*-os je presjek WGS 84 ravnine referentnog meridijana i ravnine CTP ekvatora, referentni meridijan je paralelan nul-meridijanu definiranom od BIH-a; *Y*-os upotpunjuje na desno orijentirani ortogonalni sustav čvrsto vezan sa Zemljom.

Ishodište i osi koordinatnog sustava WGS 84 služe također kao geometrijsko središte i *X*, *Y* i *Z* osi elipsoida WGS 84. *Z*-os koordinatnog sustava WGS 84 je os rotacije elipsoida WGS 84.

U geodetskim primjenama obično su uključene tri različite plohe ili oblika Zemlje. Osim Zemljine prirodne ili fizičke površine, tu je geometrijska ili matematička referentna ploha - elipsoid, i ekvipotencijalna ploha nazvana geoidom. Pri određivanju WGS 84 elipsoida i pridruženih parametara, prihvaćena su razmišljanja i postupci Međunarodne unije za geodeziju i geofiziku (International Union of Geodesy and Geophysics IUGG) koja je ustanovila i prihvatila Geodetski referentni sustav 1980 (Geodetic Reference System 1980, GRS 80).

Velika poluos elipsoida WGS 84 iznosi $a = 6\ 378\ 137 \pm 2$ m. Ta je vrijednost jednaka onoj elipsoida GRS 80, a 2 metra veća od one elipsoida WGS 72. Vrijednost velike poluosi elipsoida WGS 84 temelji se na procjeni iz podataka dobivenih u periodu 1976-1979 iz laserskih, Dopplerskih, radarsko altimetarskih i kombiniranih mjerenja.

3.1.4. Referentni sustav EUREF

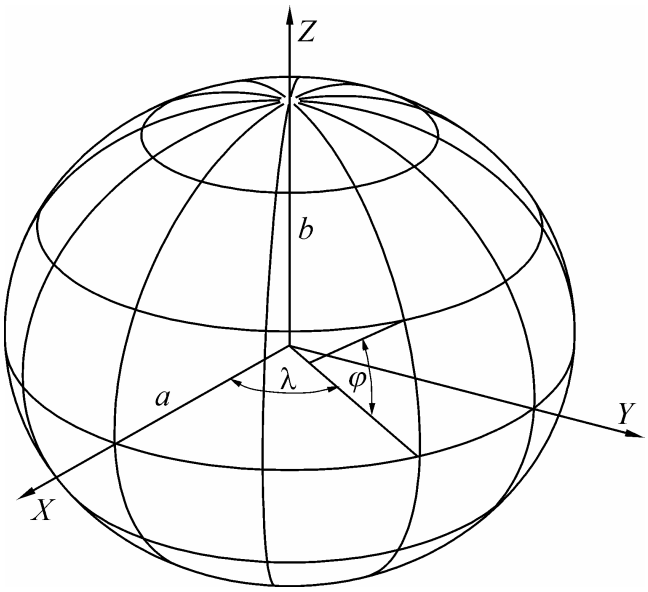
Na svojoj generalnoj skupštini koja je održana 1987. Međunarodno geodetsko društvo (IAG) osnovalo je podkomisiju EUREF za rješavanje pitanja visoko točnog referentnog sustava. Iste godine na generalnoj skupštini Europskog vijeća odgovornih za službenu kartografiju (Comité Européen des Responsables de la Cartographie Officielle - CERCO) osnovana je Radna grupa VIII sa svrhom istraživanja posljedica uvođenja i primjene globalnih pozicijskih sustava (GPS). Jedan od rezultata provedenih vrlo opsežnih mjerenja i istraživanja je da se za referentnu plohu uzima elipsoid GRS 80 koji se nebitno razlikuje od elipsoida WGS 84, tablica 3.1 (Seeger 1993).

3.2. Jednadžba rotacijskog elipsoida

Za određivanje položaja točke na Zemljinu elipsoidu služimo se mrežom meridijana i paralela. Tu mrežu nazivamo *geografskom mrežom*.

Meridijani su poluelipse na plohi rotacijskog elipsoida koje dobijemo presjekom elipsoida ravninama koje prolaze malom osi. *Paralele* su kružnice koje dobijemo presjekom elipsoida ravninama okomitim na malu os. Najveća paralela naziva se *ekvatorom*. Jedan od meridijana naziva se *početnim* ili *nultim meridijanom*, a kut između ravnina početnog meridijana i meridijana kroz danu točku naziva se *geografskom duljinom* te točke i označava s λ. Geografska duljina obično se mjeri kutom u intervalu od –180° do 180°. Kut između okomice na elipsoid u danoj točki i ravnine ekvatora naziva se *geografskom širinom* te točke i označava s φ. Geografska širina mjeri se kutom iz

intervala od –90° do 90°. Geografsku širinu i duljinu nazivamo zajedničkim imenom *geografskim ili geodetskim koordinatama* (sl. 3.2).



Slika 3.2. Elementi Zemljina elipsoida

Rotacijski elipsoid u $\mathbf{R}^3$ s poluosima a i b i sa središtem u ishodištu prostornog pravokutnog koordinatnog sustava je skup

$$\boldsymbol{E} = \left\{ (X, Y, Z) : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \right\}. \tag{3.10}$$

Neka je $(\varphi, \lambda) \in \Omega = (-90°, 90°) \times (-180°, 180°)$ i preslikavanje $\Omega \to \boldsymbol{E}$ zadano formulama

$$X = \frac{a}{W} \cos\varphi \cos\lambda, \quad Y = \frac{a}{W} \cos\varphi \sin\lambda, \quad Z = \frac{a(1-e^2)}{W} \sin\varphi, \tag{3.11}$$

gdje je

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\,. \tag{3.12}$$

Preslikavanje zadano formulama (3.11) naziva se *geografskom parametrizacijom* rotacijskog elipsoida $\boldsymbol{E}$. Za izraze (3.11) kažemo da su jednadžbe rotacijskog elipsoida u parametarskom obliku. Lako se vidi da su parametarske φ-krivulje meridijani, a λ-krivulje paralele na rotacijskom elipsoidu. Točke s pravokutnim koordinatama $(0, 0, b)$ i $(0, 0, -b)$ nazivaju se *polovima* i to su *singularne točke* geografske parametrizacije. U polovima nije definirana geografska duljina. Singularne točke su također sve točke na meridijanu koji je dijametralno suprotan nultome meridijanu. Naime, na tom meridijanu geografska duljina može biti 180° ili –180°.

Postoje i druge parametrizacije elipsoida, no u kartografiji se najčešće primjenjuje upravo navedena geografska ili geodetska parametrizacija.

Osim funkcije W, u mnogim formulama sferoidne geodezije sudjeluje i funkcija V definirana izrazom:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}\,. \tag{3.13}$$

V i W nazivaju se osnovnim sferoidnim funkcijama. Uz njih, vrlo često se susreće još jedna pomoćna funkcija

$$\eta = e' \cos \varphi. \tag{3.14}$$

Među uvedenim funkcijama postoje sljedeće veze

$$V^2 = 1 + \eta^2 \tag{3.15}$$

i

$$W = V\sqrt{1 - e^2}. \tag{3.16}$$

3.3. Polumjeri zakrivljenosti Zemljina elipsoida

Na temelju izraza (3.11) možemo izračunati parcijalne derivacije

$$\begin{bmatrix} X_\varphi & X_\lambda \\ Y_\varphi & Y_\lambda \\ Z_\varphi & Z_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \sin\varphi\cos\lambda & -R_2 \cos\varphi\sin\lambda \\ -R_1 \sin\varphi\sin\lambda & R_2 \cos\varphi\cos\lambda \\ R_1 \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

gdje smo označili

$$R_1 = \frac{a(1-e^2)}{W^3}, \quad R_2 = \frac{a}{W}. \tag{3.18}$$

S pomoću parcijalnih derivacija (3.17) možemo izračunati Gaußove fundamentalne veličine prvog reda

$$E = R_1^2\,, \quad F = 0\,, \quad G = R_2^2 \cos^2 \varphi\,. \tag{3.19}$$

Sada se može napisati prva diferencijalna forma rotacijskog elipsoida

$$ds^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi\, d\lambda + G d\lambda^2 = R_1^2 d\varphi^2 + R_2^2 \cos^2 \varphi\, d\lambda^2\,. \tag{3.20}$$

Izračunamo li druge parcijalne derivacije dobit ćemo:

$$\begin{bmatrix} X_{\varphi\varphi} & X_{\varphi\lambda} & X_{\lambda\lambda} \\ Y_{\varphi\varphi} & Y_{\varphi\lambda} & Y_{\lambda\lambda} \\ Z_{\varphi\varphi} & Z_{\varphi\lambda} & Z_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1\left(\frac{3e^2\sin^2\varphi}{W^2}+1\right)\cos\varphi\cos\lambda & R_1\sin\varphi\sin\lambda & -R_2\cos\varphi\cos\lambda \\ -R_1\left(\frac{3e^2\sin^2\varphi}{W^2}+1\right)\cos\varphi\sin\lambda & -R_1\sin\varphi\cos\lambda & -R_2\cos\varphi\sin\lambda \\ R_1\left(\frac{3e^2\cos^2\varphi}{W^2}-1\right)\sin\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Pomoću drugih parcijalnih derivacija (3.21) možemo izračunati Gaußove fundamentalne veličine drugog reda

$$L = R_1\,, \quad M = 0\,, \quad N = R_2\cos^2\varphi\,. \quad (3.22)$$

Sada se može napisati druga diferencijalna forma rotacijskog elipsoida

$$Ld\varphi^2 + 2Md\varphi\,d\lambda + Nd\lambda^2 = R_1 d\varphi^2 + R_2\cos^2 d\lambda^2. \quad (3.23)$$

Presjeci elipsoida s ravninama koje su položene kroz normalu date točke zovu se *normalnim presjecima*. Izučavanje zakrivljenosti normalnih presjeka daje karakteristiku zakrivljenosti elipsoida u danoj točki. Kroz normalu dane točke može se položiti beskonačno mnogo normalnih ravnina. Svaka od njih siječe elipsoid u elipsi čija se zakrivljenost u promatranoj točki može napisati u obliku kvocijenta druge i prve diferencijalne forme i naziva *normalnom zakrivljenošću elipsoida*:

$$\kappa_n = \frac{Ld\varphi^2 + 2Md\varphi\,d\lambda + Nd\lambda^2}{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi\,d\lambda + Gd\lambda^2} = \frac{R_1 d\varphi^2 + R_2\cos^2\varphi\,d\lambda^2}{R_1^2 d\varphi^2 + R_2^2\cos^2\varphi\,d\lambda^2}. \quad (3.24)$$

Između beskonačno mnogo normalnih presjeka u svakoj (regularnoj) točki postoje dva normalna presjeka s ekstremnim zakrivljenostima: najvećom i najmanjom. Zaista, traženje ekstremnih vrijednosti normalne zakrivljenosti κ_n plohe parametrizirane parametrima φ i λ svodi se općenito na rješavanje jednadžbe

$$(EM - FL)\,d\varphi^2 + (EN + 2FM - GL)\,d\varphi\,d\lambda + (FN - GM)\,d\lambda^2 = 0\,, \quad (3.25)$$

koja se u slučaju rotacijskog elipsoida pojednostavljuje i glasi

$$(R_1 - R_2)R_1R_2\cos^2\varphi\,d\varphi\,d\lambda = 0\,. \quad (3.26)$$

Jednadžba (3.26) ekvivalentna je vrlo jednostavnom sustavu jednadžbi

$$d\lambda = 0\,, \quad d\varphi = 0\,. \quad (3.27)$$

Rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi (3.27) glasi:

$$\lambda = \text{const.}, \quad \varphi = \text{const.} \tag{3.28}$$

što znači da su *krivulje* ekstremnih ili *glavnih zakrivljenosti* parametarske krivulje, tj. meridijani i paralele. Uvrstimo li vrijednosti iz izraza (3.27) u formulu za normalnu zakrivljenost (3.24) dobit ćemo ekstremne ili *glavne zakrivljenosti* normalnih presjeka:

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_1}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{R_2}. \tag{3.29}$$

Pri tome je κ_1 zakrivljenost u smjeru meridijana, a κ_2 zakrivljenost u smjeru paralele. Lako se može vidjeti da je κ_1 uvijek veće od κ_2. Na temelju relacije (3.29) možemo sada dati geometrijsko tumačenje veličinama R_1 i R_2: to su najmanji i najveći polumjeri zakrivljenosti između svih polumjera zakrivljenosti normalnih presjeka u promatranoj točki.

Iz izraza za prvu diferencijalnu formu (3.20) možemo pročitati da je polumjer zakrivljenosti meridijana R_1, a polumjer zakrivljenosti paralele $R_2 \cos\varphi$. Dakle, na temelju izloženog može se zaključiti:

1) Uzduž meridijana na rotacijskom elipsoidu glavna zakrivljenost elipsoida je κ_1, a to je ujedno i zakrivljenost meridijana.
2) Uzduž paralele na rotacijskom elipsoidu glavna zakrivljenost elipsoida je κ_2, ali to *nije* zakrivljenost paralele, nego se zove *zakrivljenost presjeka po prvom vertikalu.* Naime, paralela općenito ne leži u normalnom presjeku. Normalni presjek kojem je glavna zakrivljenost elipsoida u promatranoj točki κ_2 zove se presjek po prvom vertikalu.

Polovi su singularne točke geografske parametrizacije (3.11) rotacijskog elipsoida. U polovima je

$$R_1 = R_2 = c = \frac{a^2}{b}, \tag{3.30}$$

tj. svi su polumjeri zakrivljenosti međusobno jednaki, odnosno sve zakrivljenosti međusobno jednake. Uvodimo sada oznake koje su inače uobičajene u geodetskoj i kartografskoj literaturi: M je polumjer zakrivljenosti meridijana, N je polumjer zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu, a r je polumjer paralele.

$$\begin{aligned} M = R_1 &= \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3}, \\ N = R_2 &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}, \\ r &= R_2\cos\varphi = N\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Formulu za normalnu zakrivljenost elipsoida (3.24) možemo napisati u obliku

$$\kappa_n = M\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + N\cos^2\varphi\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 \tag{3.32}$$

i zatim

$$\kappa_n = \kappa_1 M^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \kappa_2 N^2\cos^2\varphi\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2. \tag{3.33}$$

Uz zamjene

$$\cos\alpha = M\frac{d\varphi}{ds},\quad \sin\alpha = N\cos\varphi\frac{d\lambda}{ds}, \tag{3.34}$$

relacija (3.33) prelazi u Eulerovu formulu

$$\kappa_n = \kappa_1\cos^2\alpha + \kappa_2\sin^2\alpha. \tag{3.35}$$

Ako su u nekoj točki elipsoida poznate glavne zakrivljenosti κ_1 i κ_2, onda se iz prethodne formule može dobiti normalna zakrivljenost za proizvoljni azimut α. Uz zamjenu

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{|\kappa_n|}},\quad y = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{|\kappa_n|}} \tag{3.36}$$

relacija (3.35) prelazi u

$$\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = 1. \tag{3.37}$$

To je jednadžba krivulje drugog reda poznata pod imenom *Dupinova indikatrisa*. Osi indikatrise pokazuju glavne smjerove zakrivljenosti, a predznaci glavnih zakrivljenosti κ_1 i κ_2 govore o tome da li je točka koju istražujemo eliptička, parabolička ili hiperbolička. S obzirom da je na rotacijskom elipsoidu uvijek $\kappa_1 > 0$ i $\kappa_2 > 0$ to zaključujemo da je svaka (regularna) točka eliptička. U polovima je $\kappa_1 = \kappa_2$, tj. polovi su kružne točke.

Dogovorimo se da je srednja zakrivljenost κ elipsoida u nekoj točki jednaka srednjoj vrijednosti svih normalnih zakrivljenosti u toj točki

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\kappa_n\, d\alpha. \tag{3.38}$$

Uvrstimo li u (3.38) izraz za normalnu zakrivljenost (3.35) dobit ćemo nakon integriranja

$$\kappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right). \tag{3.39}$$

Srednja zakrivljenost jednaka je aritmetičkoj sredini glavnih zakrivljenosti, a srednji polumjer zakrivljenosti harmonijskoj sredini glavnih polumjera zakrivljenosti:

$$R = \frac{1}{\kappa} = \frac{2MN}{M+N}. \tag{3.40}$$

Možemo se dogovoriti i drugačije nego prije. Primjerice, neka je srednji polumjer zakrivljenosti R elipsoida u nekoj točki jednak srednjoj vrijednosti svih polumjera zakrivljenosti normalnih presjeka u toj točki

$$R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_n \, d\alpha. \tag{3.41}$$

Izrazimo li zakrivljenosti s pomoću odgovarajućih polumjera zakrivljenosti Eulerova formula prelazi u

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2\alpha}{M} + \frac{\sin^2\alpha}{N} \tag{3.42}$$

i odatle

$$R_n = \frac{MN}{M\sin^2\alpha + N\cos^2\alpha}. \tag{3.43}$$

Uvrstimo li u (3.41) izraz za polumjer zakrivljenosti normalnog presjeka (3.43) dobit ćemo nakon integriranja

$$R = \sqrt{MN}. \tag{3.44}$$

Srednji polumjer zakrivljenosti jednak je sada geometrijskoj sredini glavnih polumjera zakrivljenosti, odnosno srednja zakrivljenost jednaka je geometrijskoj sredini glavnih zakrivljenosti.

Veličine polumjera zakrivljenosti M, N i R neophodne su u mnogim geodetskim i kartografskim računanjima, npr. pri izračunavanju duljine luka meridijana, duljine luka paralele, površine na elipsoidu, pri zamjeni elipsoida sferom i sl.

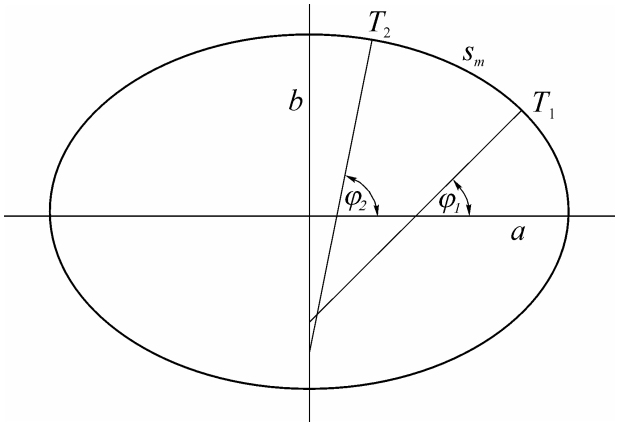
3.4. Duljina luka meridijana i luka paralele na Zemljinom elipsoidu

Prva diferencijalna forma rotacijskog elipsoida prema (3.20) i (3.31) glasi

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2\cos^2\varphi \, d\lambda^2. \tag{3.45}$$

Uzduž meridijana je $d\lambda = 0$, pa za diferencijal duljine luka meridijana možemo napisati

$$ds_m = M d\varphi. \tag{3.46}$$



Slika 3.3. Duljina luka meridijana

Uočimo na meridijanu dvije točke: T_1 s geografskom širinom φ_1 i T_2 s geografskom širinom φ_2 (slika 3.3). Označimo duljinu luka meridijana između točaka T_1 i T_2 sa s_m. Integriranjem izraza (3.46) dobijemo:

$$s_m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = s_m(\varphi_1) - s_m(\varphi_2), \tag{3.47}$$

gdje je

$$s_m(\varphi) = \int_0^{\varphi} M d\varphi\,. \tag{3.48}$$

U posljednjoj formuli (3.48) $s_m(\varphi)$ predstavlja duljinu luka meridijana od ekvatora do točke s geografskom širinom φ. Integral (3.48) je eliptički integral koji nije moguće neposredno integrirati nego se primjenjuju razvoji u redove (Lambert 1772, Helmert 1880, Krüger 1912, König i Weise 1951). Lapaine (1990, 1994) je pokazao da je za računanje duljine luka meridijana najučinkovitija primjena formule oblika

$$s_m(\varphi) = A[\varphi + \sin 2\varphi(c_1 + (c_2 + (c_3 + (c_4 + c_5 \cos 2\varphi)\cos 2\varphi)\cos 2\varphi)\cos 2\varphi)] + \ldots, \tag{3.49}$$

gdje su

$$A = a(1-n)(1-n^2)\left(1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + \ldots\right) \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{3}{2}n + \frac{31}{24}n^3 - \frac{669}{640}n^5 + \ldots \\
c_2 &= \frac{15}{8}n^2 - \frac{435}{128}n^4 + \ldots \\
c_3 &= -\frac{35}{12}n^3 + \frac{651}{80}n^5 + \ldots \\
c_4 &= \frac{315}{64}n^4 + \ldots \\
c_5 &= -\frac{693}{80}n^5 + \ldots
\end{aligned} \tag{3.51}$$

U prethodnim izrazima n je treća spljoštenost definirana relacijom (3.3). Kako je $n^6 \approx 2 \cdot 10^{-17}$ to uvođenje daljnjih članova nema smisla u artimetici sa 16 znamenaka.

Rješavanje obrnutog problema kada treba odrediti geografsku širinu φ_2 točke T_2 iz zadane geografske širine φ_1 točke T_1 i pripadne duljine luka meridijana s_m ide na sljedeći način. Najprije se primjenom formule (3.49) izračuna duljina luka meridijana od ekvatora do točke T_1. Zatim se zbrajanjem dolazi do duljine luka meridijana od ekvatora do točke T_2:

$$s_m(\varphi_2) = s_m(\varphi_1) + s_m \,. \tag{3.52}$$

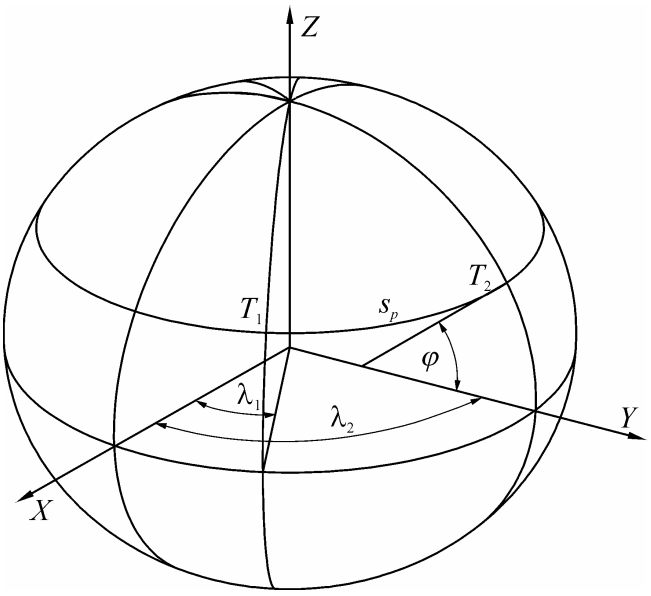
Konačno, treba primijeniti formulu s pomoću koje se određuje geografska širina točke na meridijanu za koju je poznata duljina luka meridijana od ekvatora do same točke:

$$\varphi(s_m) = \psi + \sin 2\psi\,(c_1 + (c_2 + (c_3 + (c_4 + c_5 \cos 2\psi)\cos 2\psi)\cos 2\psi)\cos 2\psi) + \ldots, \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{3}{2}n - \frac{29}{12}n^3 + \frac{553}{80}n^5 + \ldots \\
c_2 &= \frac{21}{8}n^2 - \frac{1537}{128}n^4 + \ldots \\
c_3 &= \frac{151}{24}n^3 - \frac{32373}{640}n^5 + \ldots \\
c_4 &= \frac{1097}{64}n^4 + \ldots \\
c_5 &= \frac{8011}{160}n^5 + \ldots
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\psi = \frac{s_m(\varphi_2)}{A}, \tag{3.55}$$

gdje je A određen formulom (3.50).



Slika 3.4. Luk paralele

Paralela je kružnica s polumjerom $r = N\cos\varphi$ (3.31). Uočimo na paraleli dvije točke: T_1 s geografskom duljinom λ_1 i T_2 s geografskom duljinom λ_2 (sl. 3.4). Duljina luka paralele između točaka T_1 i T_2 jednaka je

$$s_p = r(\lambda_2 - \lambda_1) = N\cos\varphi\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,. \tag{3.56}$$

3.5. Površina elipsoidnog trapeza

Diferencijal površine dP na rotacijskom elipsoidu parametriziranom geografskom parametrizacijom može se napisati u obliku

$$dP = \sqrt{EF - G^2}\; d\varphi\, d\lambda = MN\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda\,, \tag{3.57}$$

gdje su M i N glavni polumjeri zakrivljenosti elipsoida (3.31). Površina P krivolinijskog trapeza koji je omeđen paralelama φ_1 i φ_2 i meridijanima λ_1 i λ_2 može se egzaktno izračunati primjenom formule (Lapaine, Lapaine 1991):

$$\begin{aligned} P &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} MN\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda = \\ &= \frac{b^2}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)\left(\frac{\sin\varphi}{1 - e^2\sin^2\varphi} + \frac{1}{2e}\ln\frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi}\right)\Bigg|_{\varphi_2}^{\varphi_1} \end{aligned} \tag{3.58}$$

Površina čitavog elipsoida je tada

$$P = 2b^2\pi\left(\frac{1}{1 - e^2} + \frac{1}{2e}\ln\frac{1 + e}{1 - e}\right) = 2a^2\pi\left(1 + \frac{1 - e^2}{2e}\ln\frac{1 + e}{1 - e}\right). \tag{3.59}$$

3.6. Elementi Zemljine sfere

U izučavanju kartografskih projekcija često Zemlju smatramo sferom. Polumjer R sfere može se odrediti na razne načine. Može se npr. odrediti iz uvjeta da sfera ima istu površinu kao elipsoid, tj.

$$4R^2\pi = P\,, \tag{3.60}$$

gdje je P određen izrazom (3.59). Iz (3.60) proizlazi

$$R^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1 - e^2}{2e}\ln\frac{1 + e}{1 - e}\right). \tag{3.61}$$

Može se zatim postaviti uvjet da meridijani na sferi imaju istu duljinu kao i meridijani na elipsoidu, tj.

$$R\pi = 2s_m\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.62}$$

Odatle, uz pomoć relacije (3.49) za računanje duljine luka meridijana na elipsoidu, slijedi

$$R = A\,. \tag{3.63}$$

U posljednjoj se formuli A naziva polumjerom rektificirajuće sfere, a za dani elipsoid može se izračunati prema relaciji (3.50).

Za mnoga računanja koja se ne protežu na velika područja možemo dio plohe smatrati dijelom sfere srednjeg polumjera

$$R = \frac{2MN}{M+N} \quad \text{ili} \quad R = \sqrt{MN} \tag{3.64}$$

prema relacijama (3.40) i (3.44) izvedenim u poglavlju o polumjerima zakrivljenosti elipsoida. Međutim, ako se čitav elipsoid želi aproksimirati sferom, tada se osim prema (3.61) i (3.63) može za srednji polumjer Zemljine sfere uzeti aritmetička sredina

$$R = \frac{a+a+b}{3} \tag{3.65}$$

ili polumjer sfere koja ima isti volumen kao i elipsoid:

$$R = \sqrt[3]{a^2 b}\,. \tag{3.66}$$

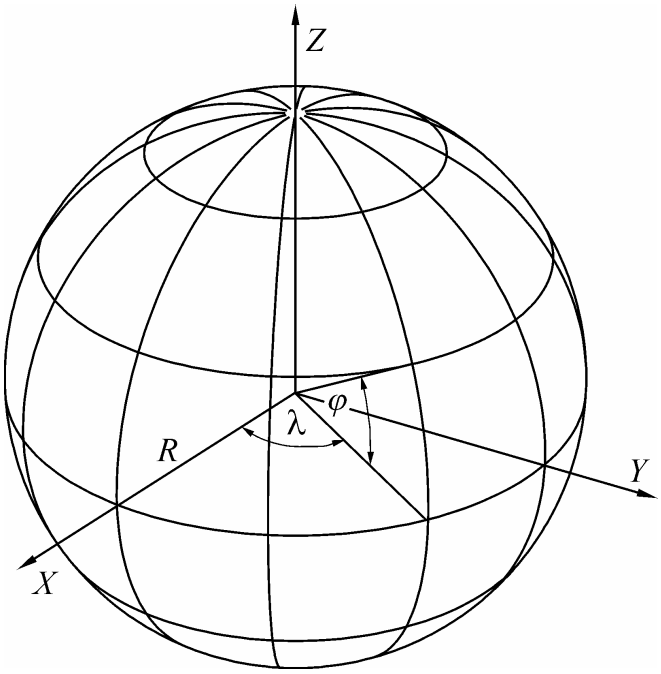
Osim navedenih, ponekad treba primijeniti i druge vrijednosti za polumjer Zemljine sfere (vidi poglavlje 3.8. o preslikavanjima elipsoida na sferu).

Za određivanje položaja točke na Zemljinoj sferi služimo se geografskom mrežom, tj. mrežom meridijana i paralela. Za razliku od geografske mreže na elipsoidu, meridijani su polukružnice i sva računanja na sferi su znatno jednostavnija od odgovarajućih na elipsoidu.

Geografska parametrizacija sfere u $\mathbb{R}^3$ s polumjerom R i sa središtem u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava je preslikavanje zadano formulama

$$X = R\cos\varphi\cos\lambda\,,\quad Y = R\cos\varphi\sin\lambda\,,\quad Z = R\sin\varphi\,. \tag{3.67}$$

Izrazi (3.67) su jednadžbe sfere u parametarskom obliku. Za singularne točke geografske parametrizacije sfere vrijedi potpuno isto što je bilo rečeno za singularne točke geografske parametrizacije rotacijskog elipsoida.



Slika 3.5. Elementi Zemljine sfere

Uočimo na meridijanu dvije točke: T_1 s geografskom širinom φ_1 i T_2 s geografskom širinom φ_2. S obzirom da je meridijan na sferi polukružnica, duljina luka meridijana od točke T_1 do točke T_2 jednaka je

$$s_m = R(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{3.68}$$

Paralela na sferi polumjera R je kružnica s polumjerom $r = R\cos\varphi$. Uočimo na paraleli dvije točke: T_1 s geografskom duljinom λ_1 i T_2 s geografskom duljinom λ_2. Duljina luka paralele na sferi između točaka T_1 i T_2 jednaka je

$$s_p = r(\lambda_2 - \lambda_1) = R\cos\varphi(\lambda_2 - \lambda_1). \tag{3.69}$$

Površina P krivolinijskog trapeza na sferi koji je omeđen paralelama φ_1 i φ_2 i meridijanima λ_1 i λ_2 može se izračunati primjenom formule

$$P = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda = R^2(\lambda_2 - \lambda_1)(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1). \tag{3.70}$$

Kao specijalan slučaj prethodne formule proizlazi poznata formula prema kojoj je površina cijele sfere

$$P = 4R^2\pi. \tag{3.71}$$

3.7. Preslikavanje elipsoida na elipsoid

Već je prije navedeno da je svaka država ili grupa država utvrđivala svoj referentni elipsoid, koji je bio najprikladniji za odgovarajuće područje kako po dimenzijama, tako i po orijentaciji. Posljedica takvog stanja je diskontinuitet - nepovezanost geodetskih mreža i karata raznih država. Gospodarsko-političke i vojne integracije država, nastale poslije II svjetskog rata, objedinile su unutar svoga područja geodetske radove i prenijele ih svaka na svoj posebno izabran i orijentiran elipsoid.

Želimo li npr. izraditi kartografski prikaz koji obuhvaća područje nekoliko država, a koje ne koriste isti lokalni elipsoid, pojavljuje se potreba prijelaza s jednog elipsoida na drugi.

Bilajbegović i Podunavac (1994) ispitivali su vezu između našeg državnog koordinatnog sustava i koordinatnog sustava WGS 84. Zbog nehomogenosti državne mreže, istraživanja su razdvojena na južnu i sjevernu Hrvatsku. Formule za transformaciju između geodetskih koordinata φ i λ na Besselovom elipsoidu i elipsoidu WGS 84 su (φ i λ se zadaju u stupnjevima, a popravke se dobivaju u sekundama):

za južnu Hrvatsku

$$\Delta\varphi'' = 0.5789\,\varphi - 25.325$$
$$\Delta\lambda'' = 0.3174\lambda + 12.154$$

za sjevernu Hrvatsku

$$\Delta\varphi'' = 0.3316\,\varphi - 14.282$$
$$\Delta\lambda'' = -0.023\lambda^2 + 1.1996\lambda + 4.388$$

$$\varphi_{\text{Bessel}} = \varphi_{\text{WGS84}} + \Delta\varphi$$
$$\lambda_{\text{Bessel}} = \lambda_{\text{WGS84}} + \Delta\lambda$$

3.8. Preslikavanje elipsoida na sferu

Mala spljoštenost elipsoida omogućuje pojednostavljanje računanja zamjenom plohe elipsoida sferom. Pri tome treba imati pred očima dva slučaja. Jedna mogućnost je zamjena čitavog elipsoida jednom sferom. Druga mogućnost je zamjena dijela plohe elipsoida dijelom sfere čija zakrivljenost je na najbolji način prilagođena zakrivljenosti elipsoida u promatranom području (Großmann 1976).

Cijeli elipsoid će se zamijeniti sferom samo onda kad se radi o preslikavanju većih dijelova Zemljine površine, odnosno kad se radi o kartama sitnih mjerila.

Kartografske projekcije mogu se definirati kao neposredna preslikavanja elipsoida u ravninu ili kao dvostruka preslikavanja, kada se najprije elipsoid preslika na sferu, a zatim ona u ravninu. U mnogim slučajevima je način dvostrukog preslikavanja jednostavniji i efikasniji kako sa stanovišta postizanja minimalnih deformacija projekcije, tako i s obzirom na djelotvornost (Vahrameeva i dr. 1986). Za preslikavanje elipsoida na sferu i obratno mogu se primijeniti konformno, ekvivalentno ili ekvidistantna preslikavanja.

Neka su Φ i Λ geografske koordinate na rotacijskom elipsoidu, a φ i λ geografske koordinate na sferi. Pri preslikavanjima između elipsoida i sfere najčešće se pretpostavlja da se meridijani elipsoida preslikavaju u meridijane sfere, a isto tako paralele u paralele. Pri tome vrijedi

$$\lambda = \Lambda \tag{3.72}$$

i

$$\varphi = \Phi + \sin 2\Phi(c_1 + (c_2 + (c_3 + c_4 \cos 2\Phi)\cos 2\Phi)\cos 2\Phi) + \ldots, \tag{3.73}$$

gdje su koeficijenti za konformno preslikavanje (Frančula i dr. 1992):

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2n + \frac{2}{3}n^2 + \frac{46}{15}n^3 - \frac{1084}{315}n^4 + \ldots \\
c_2 &= \frac{10}{3}n^2 - \frac{32}{15}n^3 - \frac{376}{35}n^4 + \ldots \\
c_3 &= -\frac{104}{15}n^3 + \frac{136}{21}n^4 + \ldots \\
c_4 &= \frac{4948}{315}n^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{3.74}$$

za ekvivalentno preslikavanje (Lapaine i dr. 1993):

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{4}{3}n - \frac{4}{45}n^2 + \frac{332}{405}n^3 + \frac{191216}{42525}n^4 + \ldots \\
c_2 &= \frac{68}{45}n^2 + \frac{16}{105}n^3 - \frac{161152}{14175}n^4 + \ldots \\
c_3 &= -\frac{6128}{2835}n^3 + \frac{262504}{42525}n^4 + \ldots \\
c_4 &= \frac{27896}{14175}n^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{3.75}$$

za ekvidistantno preslikavanje po meridijanima (Lapaine i dr. 1994):

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{3}{2}n + \frac{9}{16}n^3 + \ldots \\
c_2 &= \frac{15}{16}n^2 - \frac{15}{32}n^4 + \ldots \\
c_3 &= -\frac{35}{48}n^3 + \ldots \\
c_4 &= \frac{315}{512}n^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Pri konformnom preslikavanju između elipsoida i sfere nebitan je odnos između polumjera sfere i poluosi, odnosno veličine elipsoida. Međutim pri ekvivalentnom i ekvidistantnom preslikavanju nije tako. Kod ekvivalentnog preslikavanja polumjer sfere određen je izrazom

$$R = a\left(1 - \frac{2}{3}n + \frac{26}{45}n^2 - \frac{374}{945}n^3 + \frac{722}{2025}n^4 + \ldots\right), \tag{3.77}$$

dok je pri ekvidistantnom preslikavanju po meridijanima

$$R = a\left(1 - n + \frac{5}{4}n^2 - \frac{5}{4}n^3 + \frac{81}{64}n^4 + \ldots\right). \tag{3.78}$$

3.9. Preslikavanje sfere na sferu, Gilbertov globus

Sfera polumjera R sa središtem u ishodištu je skup

$$\left\{(X, Y, Z) : X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2\right\}. \tag{3.79}$$

Preslikavanje zadano formulama

$$X = R\cos\Phi\cos\Lambda,\ Y = R\cos\Phi\sin\Lambda,\ Z = R\sin\Phi \tag{3.80}$$

je geografska parametrizacija sfere. Za tu parametrizaciju imamo

$$\begin{aligned} E &= X_\Phi^2 + Y_\Phi^2 + Z_\Phi^2 = R^2, \\ F &= X_\Phi X_\Lambda + Y_\Phi Y_\Lambda + Z_\Phi Z_\Lambda = 0, \\ G &= X_\Lambda^2 + Y_\Lambda^2 + Z_\Lambda^2 = R^2\cos^2\Phi \end{aligned} \tag{3.81}$$

i prvu diferencijalnu formu

$$dS^2 = Ed\Phi^2 + 2Fd\Phi\, d\Lambda + Gd\Lambda^2 = R^2 d\Phi^2 + R^2\cos^2\Phi\, d\Lambda \tag{3.82}$$

Neka je jedna druga sfera polumjera r skup

$$\left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\} \tag{3.83}$$

parametriziran geografskom parametrizacijom

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda,\ y = r\cos\varphi\sin\lambda,\ z = r\sin\varphi. \tag{3.84}$$

Tada je

$$e = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = r^2,\ f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda + z_\varphi z_\lambda = 0,\ g = x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2 = r^2\cos^2\varphi \tag{3.85}$$

i njena prva diferencijalna forma

$$ds^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi\, d\lambda + gd\lambda^2 = r^2 d\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi d\lambda^2. \tag{3.86}$$

Za uvedene geografske parametrizacije je $F = 0$ i $f = 0$. Da bi preslikavanje s jedne sfere na drugu bilo konformno, moraju lokalna mjerila duljina duž meridijana i duž paralela biti međusobno jednaka:

$$\mu = \frac{ds}{dS} = \frac{r d\varphi}{R d\Phi} = \frac{r \cos\varphi \, d\lambda}{R \cos\Phi \, d\Lambda}. \tag{3.87}$$

Pretpostavimo li da među geografskim duljinama postoji veza oblika

$$\lambda = c_1 \Lambda + c_2 \tag{3.88}$$

tada (3.87) prelazi u diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = c_1 \frac{d\Phi}{\cos\Phi} \tag{3.89}$$

s općim rješenjem

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = c_1 \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right) + \ln c_3 . \tag{3.90}$$

Uz početni uvjet da se ekvator preslika u ekvator

$$\varphi = 0 \;\Leftrightarrow\; \Phi = 0 \tag{3.91}$$

integracijska konstanta

$$c_3 = 1 \tag{3.92}$$

i nakon antilogaritmiranja (3.90) se može napisati u obliku

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}^{c_1}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right) \tag{3.93}$$

i odatle izraziti

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}^{c_1}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)\right] - \frac{\pi}{2}. \tag{3.94}$$

Da bismo cijelu sferu konfromno preslikali na polovicu druge, treba staviti

$$c_1 = 1/2 , \tag{3.95}$$

a tada se izraz (3.94) može napisati i u jednostavnijem obliku:

$$\varphi = \arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}\right). \tag{3.96}$$

Taj izraz zajedno s

$$\lambda = \Lambda/2 + c_2\ ,\ c_2 = 0 \quad \text{odnosno} \quad c_2 = \pi \tag{3.97}$$

daje formule pomoću kojih dolazimo do sfere koja na svakoj od dviju hemisfera sadrži konformno preslikanu sferu. Takva sfera naziva se Gilbertovim globusom, prema američkom matematičaru koji ga je prvi zamislio i konstruirao (slika 3.6).

Slika 3.6. Gilbertov globus

Gilbertov globus moguće je zatim pomoću perspektivne ili ortografske projekcije projicirati u ravninu i dobiti Gilbertovu projekciju (DeLucia i Snyder 1986, Lapaine i Frančula 1992, 1993). Gilbertova perspektivna projekcija iako nedovoljno poznata, zaista ima posebna vizualna svojstva koja je čine zanimljivom i jeftinom zamjenom trodimenzionalnog globusa.

4. OPĆA TEORIJA KARTOGRAFSKIH PROJEKCIJA

4.1. Osnovni pojmovi i jednadžbe

Budući da se plohe elipsoida i sfere kojima u kartografiji aproksimiramo Zemlju ne daju razviti u ravninu bez deformacija to se pri izradi karata služimo kartografskim projekcijama. Kartografska projekcija je način preslikavanja točaka s plohe elipsoida ili sfere u ravninu.

Na plohi elipsoida ili sfere točke su određene presjekom koordinatnih linija meridijana i paralela. Svaka mreža koordinatnih linija preslikana na ravninu naziva se kartografska mreža. Kartografska mreža predstavljena linijama meridijana i paralela naziva se osnovna kartografska mreža. Normalnom mrežom nazivamo onu čiji je oblik u danoj projekciji jednostavniji od oblika bilo koje druge mreže.

Zadatak kartografskog preslikavanja je da ustanovi ovisnost između koordinata točaka na Zemljinom elipsoidu ili sferi i koordinata tih točaka u projekciji.

Ta ovisnost najčešće se određuje jednadžbama

$$x = f_1(\varphi, \lambda),$$
$$y = f_2(\varphi, \lambda).$$

Korištenjem polarnih koordinata u ravnini

$$\rho = f_5(\varphi, \lambda),$$
$$\delta = f_6(\varphi, \lambda).$$

Budući da točku na plohi Zemljinog elipsoida ili sfere najčešće određujemo geografskim koordinatama φ i λ, a u ravnini pravokutnim koordinatama x i y to jednadžbe

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda), \\ y &= f_2(\varphi, \lambda). \end{aligned} \tag{4.1}$$

nazivamo osnovnim jednadžbama kartografskih projekcija. Ove jednadžbe odnosno funkcije f određuju svojstva kartografskih projekcija i može ih biti beskonačno mnogo. U praksi se, međutim koristi nekoliko stotina kartografskih projekcija.

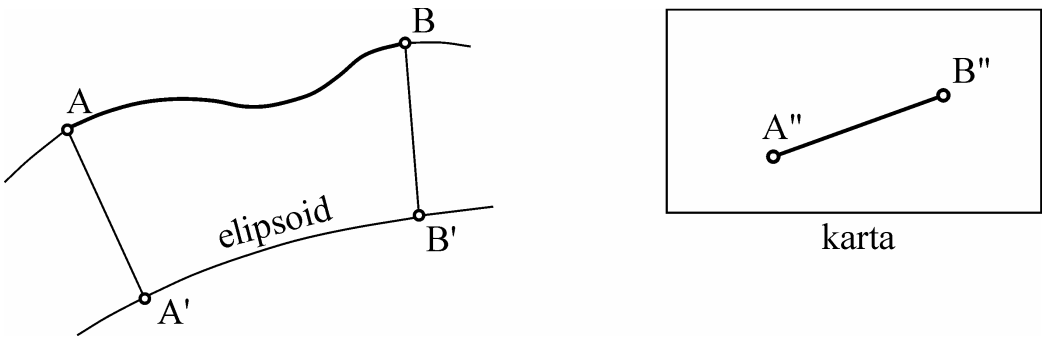
Prikaz Zemljine plohe na ravnini u bilo kojoj projekciji je deformiran. Dužine, površine i kutovi pri preslikavanju se mijenjaju, tj. deformiraju. Veličine deformacija jedan su od bitnih pokazatelja vrijednosti kartografskih projekcija.

4.2. Mjerila i deformacije

Prije nego prijeđemo na izučavanje deformacija uvest ćemo pojam mjerila. Mjerilom nazivamo odnos između dviju veličina izraženih istim mjernim jedinicama.

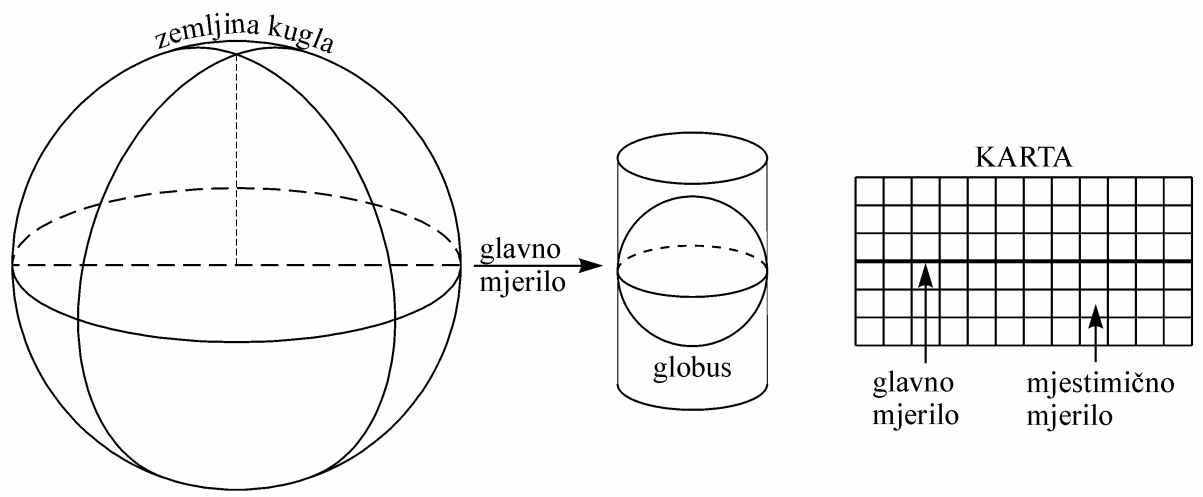
Za mjerilo karte obično kažemo da je to odnos dužina na karti prema odgovarajućim dužinama u prirodi. Ta definicija, međutim, nije pravilna. Pravilnije bi bilo reći da mjerilo karte dobijemo kao odnos dužina na karti i odgovarajućih dužina na Zemljinom elipsoidu ili sferi (sl. 4.1). No ni ta definicija nije precizna, jer elipsoid i sferu ne možemo preslikati u ravninu bez deformacija, pa mjerilo u svakoj točki karte ne može imati istu vrijednost. Zbog toga uvodimo pojmove:

- glavno mjerilo i
- mjestimično mjerilo.



Slika 4.1. Zemljina fizička površina, elipsoid, karta

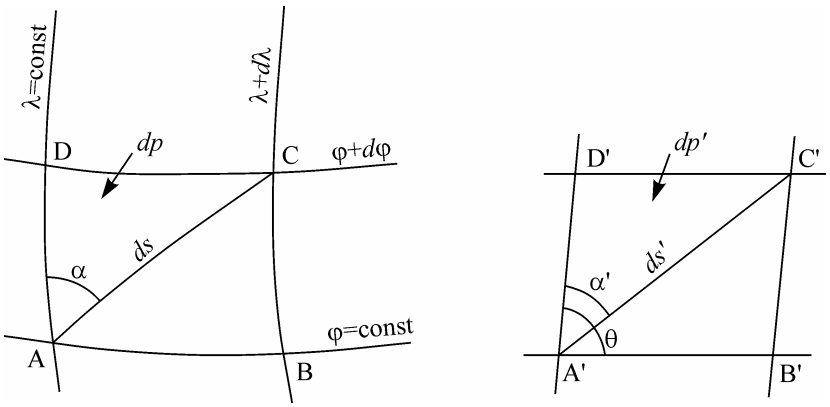
Pri preslikavanju Zemljina elipsoida ili sfere u ravninu možemo zamisliti da elipsoid ili sferu prvo smanjimo u nekom mjerilu, a zatim preslikavamo u ravninu. To mjerilo nazivamo glavnim ili općim mjerilom i ispisujemo ga na karti (sl. 4.2)



Slika 4.2. Zemljina sfera, globus, karta

Glavno mjerilo ne može ostati sačuvano na čitavoj karti, već će ostati sačuvano samo duž nekih karakterističnih linija ili u nekim točkama. Mjerila u ostalim točkama nazivamo mjestimična mjerila. Na primjer, ako je glavno mjerilo 1:10 000 000 mogu mjestimična mjerila imati iznose 1:9 800 000, 1:10 155 625 i sl.

Budući da se mjestimična mjerila mijenjaju od točke do točke, uvodimo pojam linearnog mjerila. Da bismo dobili osnovne jednadžbe koje imaju primjenu kod proučavanja svih projekcija, promatrat ćemo diferencijalni dio elipsoida (ili) sfere oko točke A i odrediti one veličine i odnose koji će nam biti potrebni kod izračunavanja deformacija dužina, kutova i površina (sl. 4.3).



Slika 4.3. Diferencijalni trapez na elipsoidu i u ravnini projekcije

Odnos diferencijala duljine luka u projekciji ds' prema odgovarajućem diferencijalu na Zemljinom elipsoidu (sferi) ds nazivamo linearno mjerilo (mjerilo dužina) i označavamo slovom c:

$$c = \frac{ds'}{ds}. \tag{4.2}$$

Odnos diferencijala površine u projekciji dp' prema odgovarajućem diferencijalu na elipsoidu (sferi) dp nazivamo površinsko mjerilo (mjerilo površina) i označavamo slovom p:

$$p = \frac{dp'}{dp} \tag{4.3}$$

Budući da linearno mjerilo i mjerilo površina ne ovise o glavnom mjerilu odnosno o veličini sfere ili elipsoida koji se preslikavaju, to u teoriji deformacija obično smatramo da je glavno mjerilo jednako jedinici ili da preslikavamo sferu polumjera $R = 1$. Ako se diferencijal duljine luka ds pri preslikavanju ne promjeni možemo pisati:

$$ds = ds'$$

pa je

$$c = 1.$$

Razliku između linearnog mjerila i jedinice nazivamo deformacijom, dakle

$$d = c - 1. \tag{4.4}$$

Deformacije površina određene su izrazom

$$d_p = p - 1. \tag{4.5}$$

Deformacije kutova određene su razlikom kuta u projekciji i odgovarajućeg kuta na elipsoidu.

4.2.1. Linearne deformacije

Linearne deformacije računamo po formuli

$$d = c - 1,$$

gdje je *c* linearno mjerilo određeno izrazom (v. sl. 4.3)

$$c = \frac{ds'}{ds}. \tag{4.6}$$

Izvedimo opću jednadžbu za linearno mjerilo. Za ds' možemo, prema saznanju iz diferencijalne geometrije pisati

$$ds'^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi\, d\lambda + G d\lambda^2, \tag{4.7}$$

gdje su

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{aligned} \tag{4.8}$$

tvz. Gaußove osnovne (fundamentalne) veličine prvog reda.

Za ds možemo napisati

$$ds^2 = E_e d\varphi^2 + 2F_e d\varphi\, d\lambda + G_e d\lambda^2$$

gdje su

$$E_e = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$G_e = \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \lambda}\right)^2,$$

$$F_e = \frac{\partial X}{\partial \varphi}\frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi}\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \varphi}\frac{\partial Z}{\partial \lambda}.$$

Mjerilo je prema tome

$$c^2 = \frac{E d\varphi^2 + 2F d\varphi\, d\lambda + G d\lambda^2}{E_e d\varphi^2 + 2F_e d\varphi\, d\lambda + G_e d\lambda^2}.$$

Iz jednadžbe elipsoida (3.11) dobit ćemo

$$\begin{aligned} E_e &= M^2, \\ G_e &= r^2, \\ F_e &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

pa je

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2,$$

a mjerilo

$$c^2 = \frac{E d\varphi^2 + 2F d\varphi\, d\lambda + G d\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}.$$

Iz te jednadžbe može se jednostavnim transformacijama, vodeći računa da je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{r d\lambda}{M d\varphi}$,

dobiti

$$c^2 = \frac{E}{M^2}\cos^2\alpha + \frac{F}{Mr}\sin 2\alpha + \frac{G}{r^2}\sin^2\alpha. \tag{4.10}$$

Ta jednadžba pokazuje da linearno mjerilo u općem slučaju ne ovisi samo o položaju točke nego i o azimutu α linijskog elementa.

Pogledajmo sada kako se mijenja mjerilo s promjenom azimuta i nađimo one vrijednosti azimuta α za koje će ono imati najveću i najmanju vrijednost. Može se dokazati da u svakoj točki elipsoida postoje dva međusobno okomita pravca uzduž kojih mjerilo ima

najmanju i najveću vrijednost. Te pravce nazivamo glavnim pravcima i mjerila duž njih označavamo s a i b. Ti pravci međusobno su okomiti i u projekciji. Iz opće jednadžbe mjerila možemo izvesti i mjerila u smjeru meridijana i paralela (Borčić, 1955).

Da bismo dobili mjerilo u smjeru meridijana stavit ćemo da je $\alpha = 0°$, pa izlazi

$$c^2 = \frac{E}{M^2} = m^2$$

ili

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M}, \qquad m = \frac{\sqrt{E}}{R} \text{ (za sferu)} \tag{4.11}$$

gdje je m - mjerilo u pravcu meridijana.

Stavimo li da je $\alpha = 90°$ dobit ćemo mjerilo u pravcu paralela tj:

$$c^2 = \frac{G}{r^2} = n^2$$

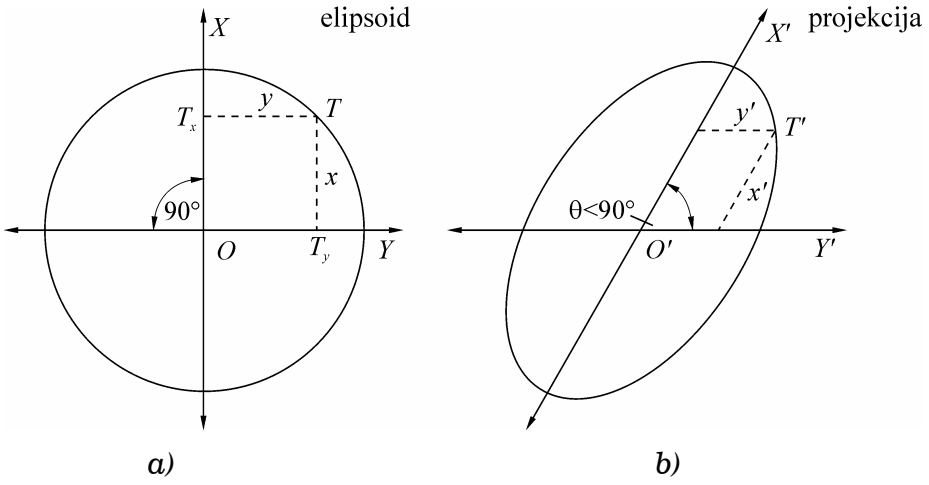
ili

$$n = \frac{\sqrt{G}}{r} \tag{4.12}$$

gdje je n - mjerilo u pravcu paralele. Na elipsoidu $r = N\cos\varphi$, a na sferi $r = R\cos\varphi$.

4.2.2. Elipsa deformacija

Uzmimo na Zemljinom elipsoidu kružnicu s po volji malim polumjerom r i na kružnici točku T s koordinatama x i y. Koordinatne osi neka se podudaraju s meridijanima i paralelama.



Slika 4.4. Elementarna kružnica: a) na plohi elipsoida i b) preslikana u projekciji kao elipsa

Kako smo pretpostavili da se koordinatne osi podudaraju s meridijanima i paralelama to možemo pisati

$$m = \frac{x'}{x} \quad \text{i} \quad n = \frac{y'}{y}.$$

Jednadžba kružnice je

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

a kako je

$$x = \frac{x'}{m} \quad \text{i} \quad y = \frac{y'}{n}$$

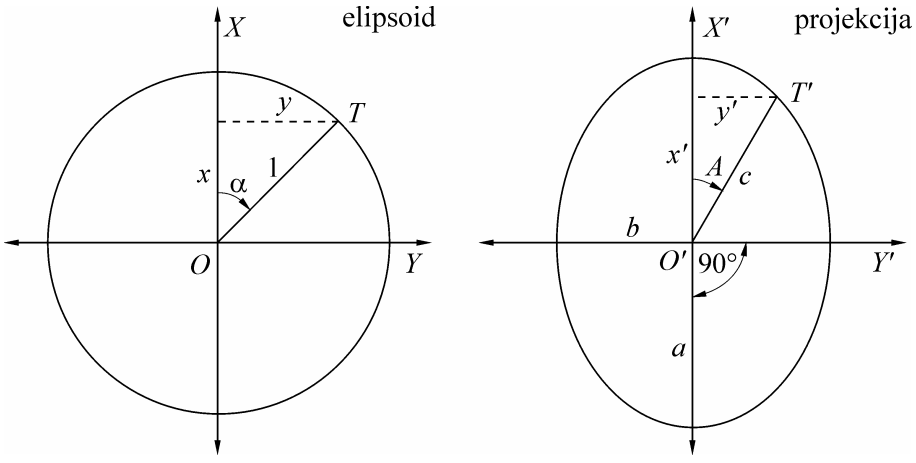
to uvrštavanjem u jednadžbu kružnice dobivamo

$$\left(\frac{x'}{mr}\right)^2 + \left(\frac{y'}{nr}\right)^2 = 1.$$

To je jednadžba elipse s konjugiranim dijametrima *mr* i *nr*. Prema tome možemo izvesti vrlo važan zaključak.

Svaka elementarna kružnica konstruirana na plohi elipsoida preslikava se u bilo kojoj projekciji kao elipsa. Pri tome se dva, bilo koja uzajamno okomita dijametra kružnice, preslikavaju kao konjugirani dijametri elipse.

Ako za koordinatne osi uzmemo dva uzajamno okomita dijametra, koji se poklapaju s glavnim pravcima u centru kružnice, onda će prema svojstvu glavnih pravaca, ta dva dijametra i u projekciji ostati međusobno okomiti. Iz analitičke geometrije je poznato, da elipsa ima samo jedan par konjugiranih dijametara koji su međusobno okomiti. To su osi elipse (sl. 4.5).



Slika 4.5. Elipsa deformacija

Pretpostavimo li još da kružnica na elipsoidu ima polumjer jedanak jedinici, to jednadžba elipse u projekciji glasi

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2+\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1. \tag{4.13}$$

Tu elipsu nazivamo elipsom deformacija ili Tissotovom indikatrisom, jer pokazuje kako se mijenja mjerilo u jednoj točki u raznim pravcima.

Na osnovi elipse deformacije primjenom Apolonijevih teorema (Bronštejn, Semendjajev 1975) možemo uspostaviti vezu između mjerila po glavnim pravcima i mjerila duž meridijana i paralela:

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=m^2+n^2,\\ ab&=mn\sin\theta. \end{aligned} \tag{4.14}$$

iz ovih izraza slijedi:

$$\begin{aligned} a+b&=\sqrt{m^2+n^2+2mn\sin\theta}=A,\\ a-b&=\sqrt{m^2+n^2-2mn\sin\theta}=B, \end{aligned} \tag{4.15}$$

i

$$\begin{aligned} a&=\frac{1}{2}(A+B),\\ b&=\frac{1}{2}(A-B). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Kut θ tj. kut između meridijana i paralela u projekciji jest kut između parametarskih linija. Taj kut, kao što je poznato iz diferencijalne geometrije, određen je izrazima

$$\cos\theta=\frac{F}{\sqrt{EF}},\quad \sin\theta=\frac{H}{\sqrt{EG}},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{H}{F}. \tag{4.17}$$

gdje je:

$$H=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\lambda}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\lambda} \tag{4.18}$$

Umjesto kuta θ često se uvodi u izvode i razmatranja kut ε. Između θ i ε postoje ovi odnosi

$$\varepsilon=\theta-\frac{\pi}{2}, \tag{4.19}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon=-\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \tag{4.20}$$

ili

$$\operatorname{tg}\varepsilon=-\frac{F}{H}. \tag{4.21}$$

4.2.3. Deformacija površina

Deformacije površina računamo po formuli (4.5)

$$d_p = p - 1,$$

gdje je p mjerilo površina određeno izrazom

$$p = \frac{dp'}{dp}.$$

Površina diferencijala dp' određena je izrazom

$$dp' = \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi\, d\lambda, \tag{4.22}$$

a dp izrazom

$$dp = \sqrt{E_e G_e - F_e^2}\, d\varphi\, d\lambda, \tag{4.23}$$

pa je

$$p = \sqrt{\frac{EG - F^2}{E_e G_e - F_e^2}},$$

Za elipsoid je (vidi (4.9))

$$E_e = M^2, \quad G_e = r^2, \quad F_e = 0,$$

pa slijedi

$$p = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{Mr}.$$

Kako je

$$\sqrt{EG - F^2} = H,$$

to možemo pisati

$$p = \frac{H}{Mr}. \tag{4.24}$$

Budući da smo izraze za m i n izveli, uputno je i p izraziti pomoću njih. Iz jednadžbe

$$\sin\theta = \frac{H}{\sqrt{EG}},$$

slijedi

$$H = \sqrt{EG}\,\sin\theta.$$

Iz jednadžbi za mjerila m i n možemo pisati

$$\sqrt{E} = mM, \quad \sqrt{G} = nr$$

pa je

$$H = mM \cdot nr \cdot \sin\theta.$$

Uvrštenjem u (4.24) dobivamo

$$p = mn\sin\theta \tag{4.25}$$

ili prema (4.14)

$$p = ab. \tag{4.26}$$

4.2.4. Deformacije kutova

Kut β s plohe elipsoida preslika se u projekciji u kut β'. Veličina

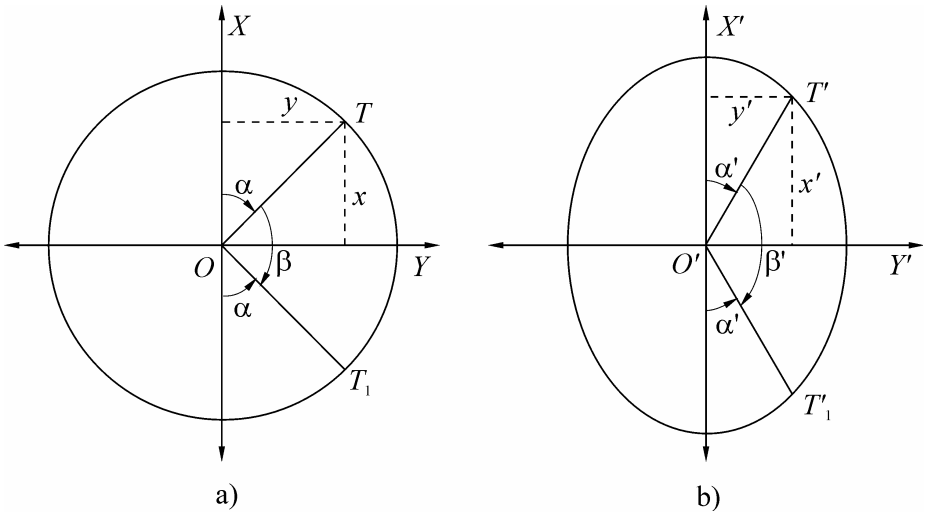
$$\Delta\beta = \beta' - \beta$$

deformacija je tog kuta (sl. 4.6). U određivanju veličine $\Delta\beta$ poslužit ćemo se elipsom deformacija. Pretpostavimo da se koordinatne osi podudaraju s glavnim pravcima. Iz slike 4.6 vidi se da je

$$\beta = \pi - 2\alpha,$$
$$\beta' = \pi - 2\alpha'$$

pa je

$$\Delta\beta = 2(\alpha - \alpha').$$



Slika 4.6. Prikaz kuta: a) na plohi elipsoida i b) u ravnini projekcije

Iz slike 4.6 nadalje slijedi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},$$
$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{y'}{x'}.$$

Prema svojstvu elipse deformacija imamo

$$a = \frac{x'}{x}, \quad b = \frac{y'}{y},$$

odnosno

$$x' = ax, \quad y' = by$$

pa je

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{by}{ax}$$

ili

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha.$$

Koristeći se tom jednadžbom možemo pisati

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha - \frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha$$

i

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha + \frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha$$

odnosno

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha' = \left(\frac{a-b}{a}\right)\operatorname{tg}\alpha, \; \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha' = \left(\frac{a+b}{a}\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Podijeli li se prva jednadžba drugom, dobit će se

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha'} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Uvrstimo li

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'}$$

i sredimo li izraz bit će

$$\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')} = \frac{a-b}{a+b}$$

i

$$\sin(\alpha-\alpha') = \frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha+\alpha').$$

$\alpha-\alpha'$ imat će najveću vrijednost kad je

$$\alpha+\alpha' = \frac{\pi}{2}.$$

Označimo te kutove s α_0 i α'_0 pa je

$$\sin(\alpha_0-\alpha'_0) = \frac{a-b}{a+b}.$$

Označimo li najveću vrijednost

$$\Delta\beta = 2(a_0-\alpha'_0) = \omega$$

tada je

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}, \tag{4.27}$$

gdje ω označava maksimalnu deformaciju kuta.

4.3. Kriteriji za ocjenu kartografskih projekcija na osnovi veličina deformacija

U danoj točki i danom smjeru deformaciju dužina računamo po formuli (4.4)

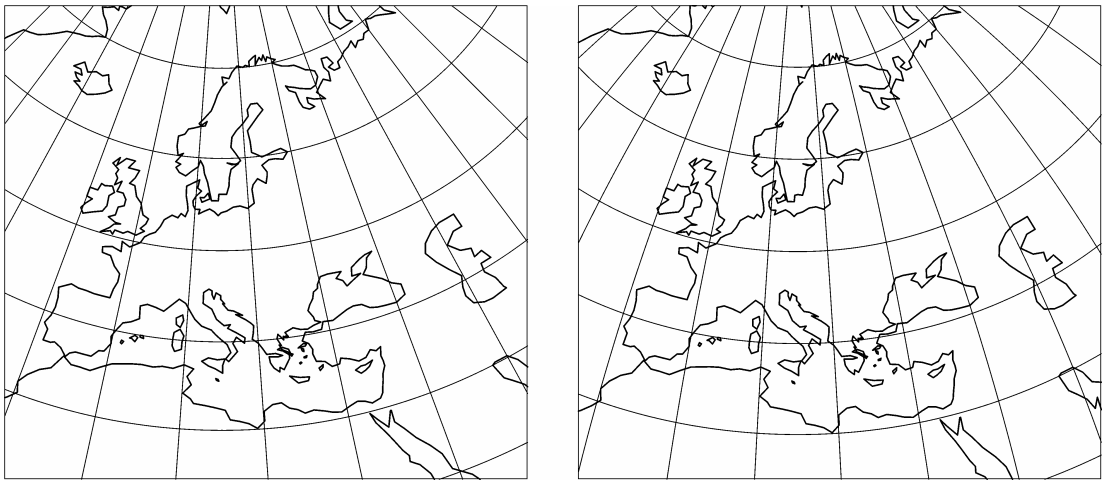
$$d = c-1.$$

Ekstremne vrijednosti deformacija u točki računamo po formuli

$$d_a = a-1, \quad d_b = b-1,$$

gdje su a i b mjerila po glavnim pravcima. Želimo li dvije projekcije usporediti po veličinama maksimalnih deformacija, izračunat ćemo u svim točkama kartografske mreže mjerila po glavnim pravcima.

Za kartu zadanog područja dolaze u obzir projekcija A i projekcija B (sl. 4.7). Treba na osnovi veličina deformacija izabrati povoljniju. Ako je naglasak npr. na deformacijama kutova onda će bolja biti ona projekcija u kojoj je maksimalna deformacija kuta manja. Na isti način izabrat ćemo bolju projekciju na osnovi veličina deformacija dužina i površina.



A B

Slika 4.7. Prikaz istog područja u dvije različite projekcije

Druga je mogućnost usporedba dviju projekcija prema srednjim kvadratnim deformacijama na čitavom području preslikavanja. Da bismo odredili srednje kvadratne deformacije dužina na čitavom području preslikavanja potrebno je prvo odrediti srednje kvadratne deformacije u danoj točki.

Airy (1861) je u tu svrhu predložio aritmetičku sredinu iz deformacija po glavnim pravcima

$$\varepsilon_A^2 = \frac{1}{2}\left[(a-1)^2 + (b-1)^2\right].$$

U istu svrhu Jordan (1896) je predložio formulu

$$\varepsilon_J^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (c-1)^2 \, d\alpha.$$

Srednja kvadratna deformacija dužina na čitavom području preslikavanja G bit će prema prvom kriteriju

$$E_A^2 = \frac{1}{G}\int_G \varepsilon_A^2 \, dG,$$

odnosno

$$E_A^2 = \frac{1}{2G}\int_G \left[(a-1)^2 + (b-1)^2\right] dG.$$

Prema drugom kriteriju izlazi

$$E_J^2 = \frac{1}{G}\int_G \varepsilon_J^2 \, dG,$$

i

$$E_J^2 = \frac{1}{G}\int_G \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (c-1)^2 \, d\alpha \, dG.$$

Prvi kriterij nazivamo kriterijem Airya, a drugi kriterijem Jordana.

Želimo li prema kriteriju Airyja ili Jordana usporediti više kartografskih projekcija potrebno je u svim tim projekcijama izračunati veličine E_A^2 ili E_J^2 za čitavo područje preslikavanja. Projekcija u kojoj je E_A^2 ili E_J^2 najmanji, najbolja je prema tome kriteriju.

Direktna integracija moguća je samo kod nekih projekcija. Kod ostalih projekcija veličine E_A^2 ili E_J^2 moguće je odrediti numeričkim metodama. Numeričke metode treba primijeniti kod svih projekcija kad je granična linija područja preslikavanja nepravilna krivulja.

Ovdje ukratko opisani kriteriji za ocjenu kartografskih projekcija na osnovi veličina deformacija nisu jedino mogući. Postoje u literaturi mnogi primjeri drugačijeg pristupa u rješavanju tog zadatka. Kriterijima za ocjenu kartografskih projekcija na osnovi veličina deformacija bavili su se mnogi autori (Kavrajskij 1958, Meščerjakov 1968, Tolstova 1969, Milnor 1969, Gilbert 1974, Peters 1975, Albinus 1979, Peters 1984, Snyder 1984, Snyder 1985, Canters 1989, Laskowski 1997, Nestorov 1997, Canters 2002).

5. PODJELA KARTOGRAFSKIH PROJEKCIJA

Već smo utvrdili da prikaz plohe elipsoida ili sfere u ravnini može biti vrlo raznovrstan i da prema tome postoji vrlo mnogo kartografskih projekcija. Da bismo ih lakše proučavali i prema tome odabirali za praktičnu primjenu dijelimo ih u grupe. Kao osnova za podjelu kartografskih projekcija obično se uzimaju:

1. osobine preslikavanja odnosno vrste deformacija
2. položaj pola normalne kartografske mreže
3. oblik normalne kartografske mreže

5.1. Podjela kartografskih projekcija prema vrstama deformacija

Prema vrstama deformacija kartografske projekcije dijelimo u ove četiri grupe:

1. konformne ili istokutne
2. ekvivalentne ili istopovršinske
3. ekvidistantne ili istodužinske, ali samo u određenom smjeru
4. uvjetne

5.1.1. Konformne ili istokutne projekcije

Kod projekcija ove grupe, kao što im kaže naziv nema deformacija kutova, pa je $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$. Ako deformacije kuta nema, znači da je

$$\omega = 0.$$

Iz formule za maksimalne deformacije kutova (4.27)

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$$

slijedi

$$a = b,$$

tj. ekstremna su mjerila međusobno jednaka. To drugim riječima znači da se infinitezimalna kružnica preslikava kod konformnih projekcija u kružnicu odnosno da je mjerilo dužina u jednoj točki u svim pravcima jednako, tj. ne ovisi o azimutu. Prema tome možemo pisati

$$c = m = n = a = b. \tag{5.1}$$

Budući da u tim projekcijama nema deformacija kutova znači da se i meridijani i paralele sijeku pod pravim kutom, tj. $\theta = 90°$.

Prema tome nužan i dovoljan uvjet za postojanje konformnosti je da su mjerila duž meridijana i paralela međusobno jednaka i da se meridijani i paralele u projekciji sijeku pod pravim kutom. Zbog tog što u konformnim projekcijama nema deformacija kutova i što mjerilo u danoj točki ne ovisi o azimutu zadržava se sličnost korespodentnih infintezimalnih likova na elipsoidu i u ravnini. Otud im i naziv konformne, tj. po formi slične.

5.1.2. Ekvivalentne ili istopovršinske projekcije

U ekvivalentnim projekcijama očuvana je jednakost (ili konstantan odnos) površina odgovarajućih figura na elipsoidu i u projekciji. Prema tome je u ekvivalentnim projekcijama mjerilo površina jednako jedinici ili ima konstantnu vrijednost u čitavom polju karte, tj:

$$p = ab = mn\sin\theta = 1,$$

ili

$$p = ab = mn\sin\theta = k \tag{5.2}$$

To su jednadžbe koje određuju uvjet ekvivalentnog preslikavanja elipsoida na ravninu.

Iz jednadžbe

$$p = ab = 1$$

slijedi

$$a = \frac{1}{b}, \qquad b = \frac{1}{a}.$$

Iz jednadžbe $p = ab = 1$ koja određuje uvjet ekvivalentnosti proizilazi da nikako ne može biti $a = b$ što je uvjet za konformnost, tj. nemoguće je da jedna projekcija istovremeno bude ekvivalentna i konformna.

5.1.3. Ekvidistantne ili istodužinske projekcije

U ekvidistantnim projekcijama linearno mjerilo preslikavanja jednako je jedinici ili je konstantno duž jednog od glavnih pravaca, tj:

$$a = 1 \quad \text{ili} \quad b = 1 \tag{5.3}$$

odnosno

$$a = k \quad \text{ili} \quad b = k\,. \tag{5.4}$$

Po vrstama i veličini deformacija ekvidistantne se projekcije nalaze u sredini između konformnih i ekvivalentnih projekcija. Naime u ekvidistantnim projekcijama deformacije površina manje su nego u konformnim projekcijama, a deformacije kutova manje su nego u ekvivalentnim projekcijama.

5.1.4. Uvjetne projekcije

U grupu uvjetnih projekcija ubrajaju se sve one projekcije koje nisu niti konformne niti ekvivalentne niti ekvidistantne.

5.2. Podjela kartografskih projekcija prema položaju pola normalne kartografske mreže

U odjeljku 4.1 definirali smo normalnu kartografsku mrežu kao mrežu jednostavniju po obliku od bilo koje druge mreže.

Prema položaju pola $Q(\varphi_p, \lambda_p)$ normalne kartografske mreže projekcije dijelimo na:

1. uspravne $(\varphi_p = \frac{\pi}{2})$
2. poprečne $(\varphi_p = 0)$
3. kose $(0 < \varphi_p < \frac{\pi}{2})$

Uspravne projekcije - to su projekcije kod kojih se pol normalne mreže podudara s geografskim polom, pa je mreža meridijana i paralela ujedno i normalna mreža $(\varphi_p = 90°)$.

Kod poprečnih projekcija, pol normalne mreže nalazi se na ekvatoru $(\varphi_p = 0°)$.

Kod kosih projekcija pol normalne mreže nalazi se u bilo kojoj točki između pola i ekvatora $(0 < \varphi_p < \frac{\pi}{2})$

5.3. Podjela kartografskih projekcija prema obliku normalne kartografske mreže

Normalna kartografska mreža podudara se s mrežom meridijana i paralela u uspravnim projekcijama. To je i razlog da se podjela projekcija po obliku normalne kartografske mreže često naziva "podjela kartografskih projekcija prema obliku mreže meridijana i paralela uspravnih projekcija". Prema toj klasifikaciji projekcije se dijele u slijedeće grupe:

1. konusne
2. cilindrične
3. azimutalne
4. pseudokonusne
5. pseudocilindrične
6. polikonusne
7. kružne.

Konusne projekcije. U konusnim projekcijama se meridijani uspravnih projekcija preslikavaju kao pravci koji se sijeku u jednoj točki pod kutovima proporcionalnim odgovarajućim razlikama duljina, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem u presjeku meridijana (sl. 5.1). Opće jednadžbe u polarnim koordinatama glase

$$\rho = f_1(\varphi), \quad \delta = k(\lambda - \lambda_0) \tag{5.5}$$

gdje su: δ ... kut između meridijana

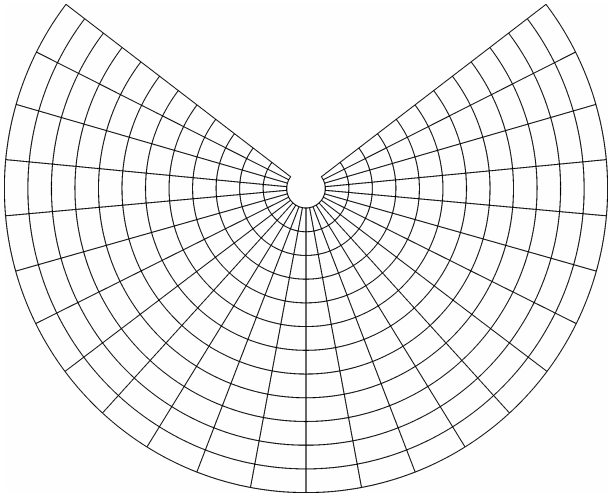
ρ ... polumjeri paralela

k ... konstanta.

Konusne projekcije dijele se na uspravne, poprečne i kose. Oblik funkcije f_1 u jednadžbi

$$\rho = f_1(\varphi)$$

određuje se uz uvjet konformnosti, ekvivalentnosti ili ekvidistantnosti.



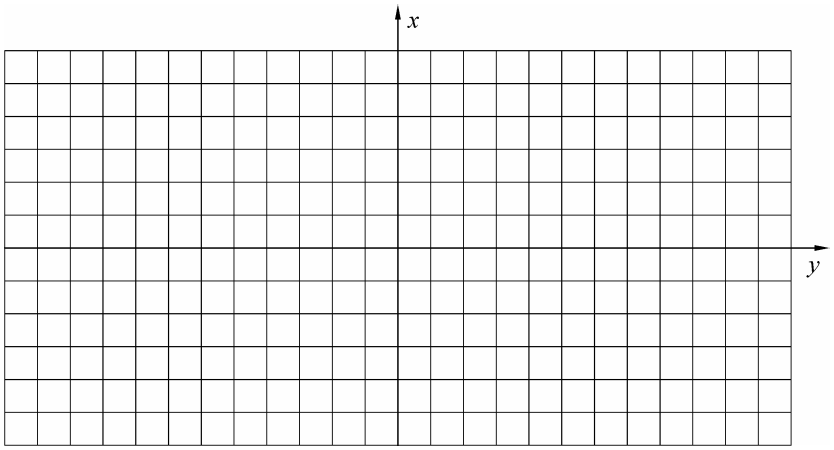
Slika 5.1. Uspravna konusna projekcija

Cilindrične projekcije. U cilindričnim projekcijama se meridijani uspravnih projekcija preslikavaju kao pravci među sobom paralelni, na razmaku proporcionalnom odgovarajućim razlikama duljina, a paralele također kao pravci okomiti na meridijane (sl. 5.2)

Osnovne jednadžbe uspravnih cilindričnih projekcija jesu

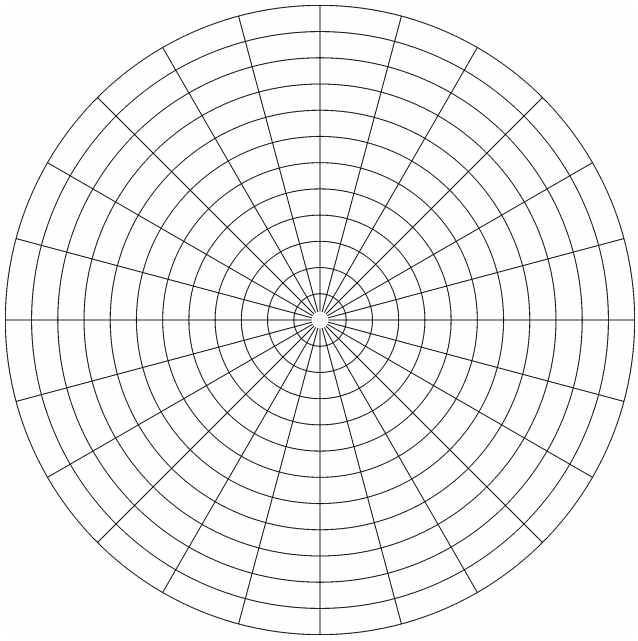
$$y = k(\lambda - \lambda_0), \quad x = f_1(\varphi) \tag{5.6}$$

Dijele se na uspravne, poprečne i kose. Oblik funkcije f_1 određuje se uz uvjet konformnosti, ekvivalentnosti, ekvidistantnosti.



Slika 5.2. Uspravna cilindrična projekcija

Azimutalne projekcije. U azimutalnim projekcijama se paralele uspravnih projekcija preslikavaju kao koncentrične kružnice, a meridijani kao pravci koji se sijeku u zajedničkom centru paralela pod kutovima jednakim odgovarajućim razlikama duljina (sl. 5.3).



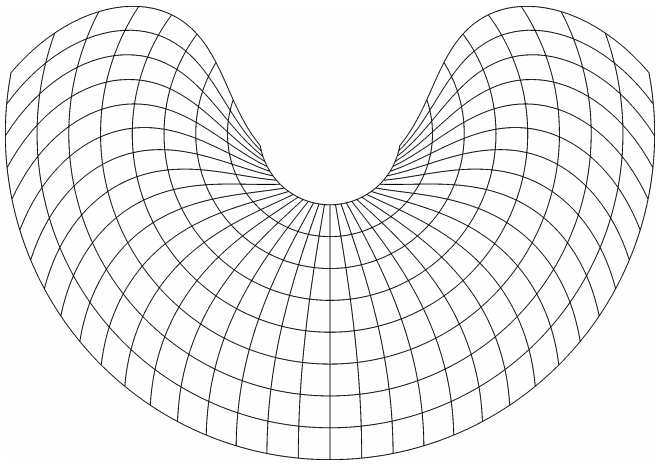
Slika 5.3. Uspravna azimutalna projekcija

Opće jednadžbe uspravnih azimutalnih projekcija jesu

$$\rho = f_1(\varphi), \qquad \delta = \lambda - \lambda_0 \tag{5.7}$$

Dijele se na uspravne, poprečne i kose. Funkcija f_1 određuje se uz uvjet konformnosti, ekvivalentnosti, ekvidistantnosti.

Pseudokonusne projekcije. U pseudokonusnim projekcijama se paralele uspravnih projekcija preslikavaju kao lukovi koncentričnih kružnica, a meridijani kao krivulje koje su simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac (sl. 5.4).

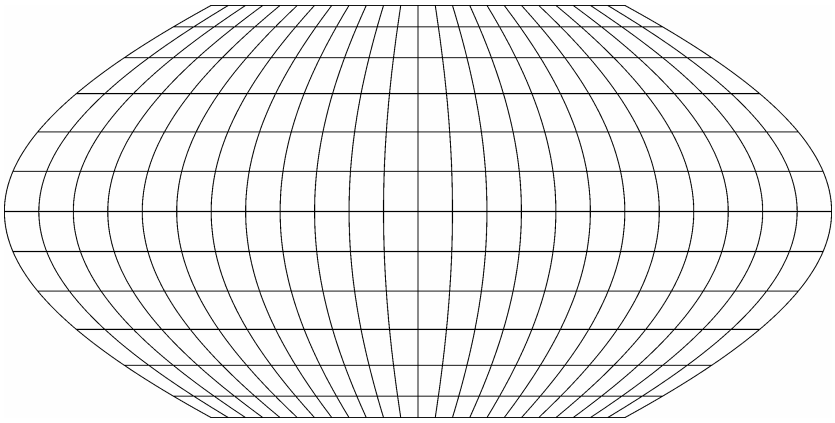


Slika 5.4. Pseudokonusna projekcija

Opće jednadžbe u polarnim koordinatama jesu

$$\rho = f_1(\varphi), \quad \delta = f_2(\varphi, \lambda). \tag{5.8}$$

Pseudocilindrične projekcije. U pseudocilindričnim projekcijama se paralele uspravnih projekcija preslikavaju kao paralelni pravci, a meridijani kao krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se presklikava kao pravac okomit na paralele (sl. 5.5).

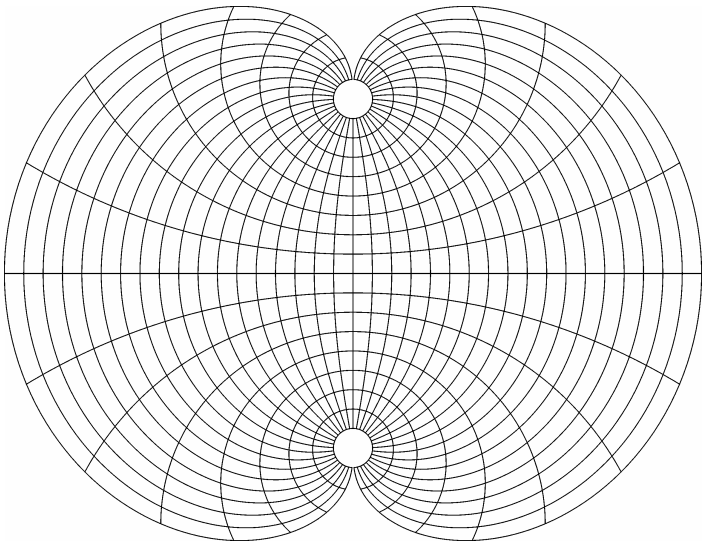


Slika 5.5. Pseudocilindrična projekcija

Opće jednadžbe glase

$$y = f_2(\varphi, \lambda), \quad x = f_1(\varphi). \tag{5.9}$$

Polikonusne projekcije. U polikonusnim projekcijama preslikavaju se paralele uspravnih projekcija kao lukovi ekscentričnih kružnica, a meridijani kao krivulje simetrične s obzirom na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac na kojem se nalaze središta lukova paralela (sl. 5.6).

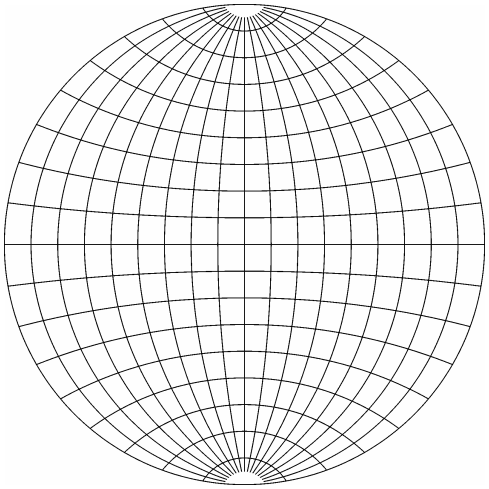


Slika 5.6. Polikonusna projekcija

Opće jednadžbe jesu:

$$\begin{aligned} \rho &= f_1(\varphi), \\ \delta &= f_2(\varphi, \lambda), \\ q &= f_3(\varphi). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Kružne projekcije. U kružnim projekcijama meridijani i paralele preslikavaju se kao kružnice (sl. 5.7).



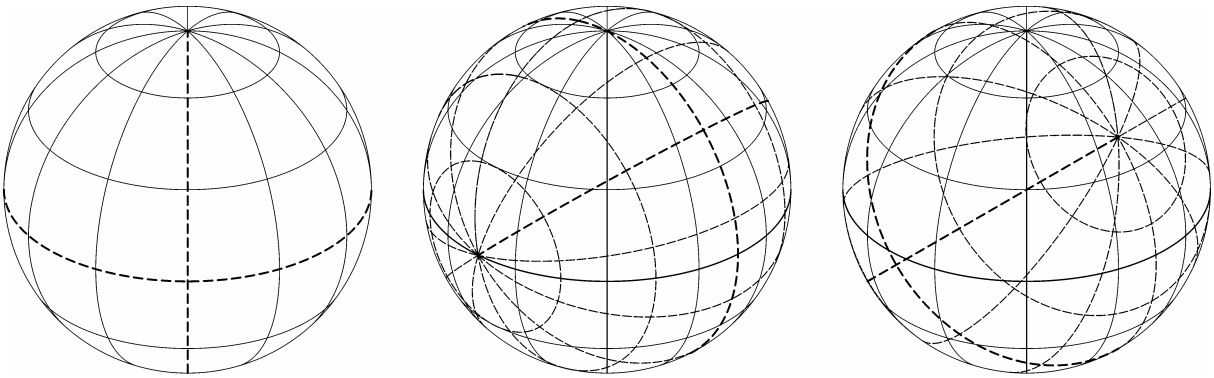
Slika 5.7. Kružna projekcija

U izučavanju kartografskih projekcija usvajamo podjelu projekcija prema izgledu mreže meridijana i paralela kod uspravnih projekcija kao primarnu podjelu, a podjelu prema osobinama preslikavanja kao sekundarnu podjelu. Pri tome projekcije još dijelimo na uspravne, poprečne i kose.

5.4. Veza između uspravnih poprečnih i kosih projekcija

U odjeljku 5.3. napisali smo jednadžbe uspravnih kartografskih projekcija za sve grupe projekcija dobivene podjelom prema obliku mreže meridijana i paralela uspravnih projekcija.

Kod uspravnih projekcija pol normalne mreže podudara se s geografskim polom odnosno mreža meridijana i paralela poklapa se s normalnom mrežom. Kod poprečnih projekcija pol normalne mreže nalazi se na ekvatoru mreže meridijana i paralela, a ekvator normalne mreže prolazi polom mreže meridijana i paralela. Kod kosih projekcija normalna mreža stoji u nekom proizvoljnom položaju u odnosu na sustav meridijana i paralela pa možemo ustvrditi da su uspravne i poprečne projekcije posebni slučajevi kosih projekcija (slika 5.8).



Slika 5.8. Normalna mreža u uspravnim, poprečnim i kosim projekcijama

S obzirom da su formule za uspravne projekcije najjednostavnije to se uvijek i projekcija definira formulama koje se odnose na taj položaj. Da bi se dobile poprečne i kose projekcije najprije se izvrši transformacija geografskih koordinata u kosi ili poprečni projekcijski sustav odnosno sustav sfernih polarnih koordinata te se onda te nove koordinate uvrštavaju u izvorne formule projekcije. Dakle, ako je projekcija zadana formulama

$$y = f_1(\varphi, \lambda)$$
$$x = f_2(\varphi, \lambda)$$

tada će se za kosi ili poprečni oblik projekcije najprije izračunati nove veličine φ' i λ' na temelju podataka o položaju pola φ_p i λ_p te veličina φ i λ, a onda te nove veličine uvrstiti u izvorne formule pa će se dobiti

$$y = f_1(\varphi', \lambda')$$
$$x = f_2(\varphi', \lambda')$$

Na taj način može se uspostaviti veza između uspravnih, poprečnih i kosih projekcija samo kad Zemlju aproksimiramo sferom.

5.4.1. Određivanje geografskih koordinata pola u kosim i poprečnim projekcijama

U određivanju geografskih koordinata pola φ_p i λ_p u kosim i poprečnim projekcijama razlikujemo sljedeća tri slučaja:

1. pol je centralna točka područja preslikavanja kad je granična linija približno okruglog oblika (javlja se kod primjene azimutalnih projekcija),
2. pol se određuje ovisno o pružanju velike kružnice koja prolazi sredinom područja preslikavanja (npr. kod primjene cilindričnih projekcija),
3. pol se određuje ovisno o pružanju male kružnice koja prolazi sredinom zadanog područja (npr. kod primjene konusnih projekcija).

1. slučaj. Pol je centralna točka područja preslikavanja kad je granična linija približno okruglog oblika.

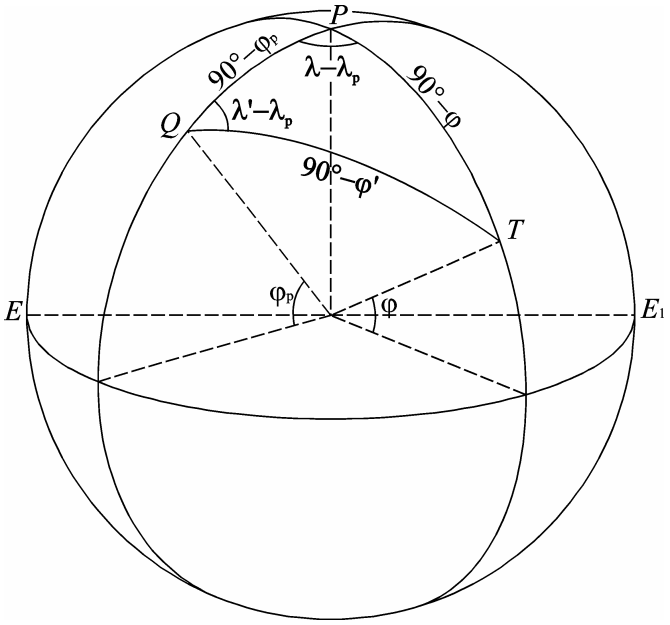
Koordinate pola φ_p i λ_p mogu se očitati s karte ili globusa ili odrediti kao sredina iz koordinata točaka granične linije. Takav način određivanja koordinata pola koristi se kod primjene kosih i poprečnih azimutalnih projekcija. Kod poprečnih projekcija opisanim postupkom određuje se samo λ_p jer je $\varphi_p = 0$.

2. slučaj. U primjeni kosih cilindričnih projekcija područje preslikavanja obično je izduženo duž neke velike kružnice koja prolazi sredinom područja preslikavanja. Položaj te kružnice određuje se na karti ili globusu i odnosu na nju određuju se koordinate pola.

Koordinate pola mogu se odrediti na globusu u presjeku dviju velikih kružnica okomitih na kružnicu koja prolazi sredinom područja preslikavanja. Analitičko rješenje zadatka daje Solov'ev (1969), str. 53.

3. slučaj. Pol kosog sustava određuje se na osnovi male kružnice koja prolazi sredinom područja preslikavanja. To je slučaj u primjeni kosih konusnih projekcija. Koordinate pola kosog sustava mogu se odrediti pomoću globusa i to u presjeku tri velike kružnice okomite na zadanu malu kružnicu. Analitičko rješenje tog zadatka daje Solov'ev (1969), str. 54-55.

5.4.2. Veze između geografskih koordinata φ i λ i koordinata φ' i λ' poprečnog ili kosog sustava



Slika 5.9. Sferni trokut QPT

Na slici 5.9 prikazan je sferni trokut *QPT* u kojem je *P* geografski pol, *T* bilo koja točka s koordinatama φ, λ, a *Q* pol novog sustava s koordinatama φ_p, λ_p. Iz tog trokuta dobiva se

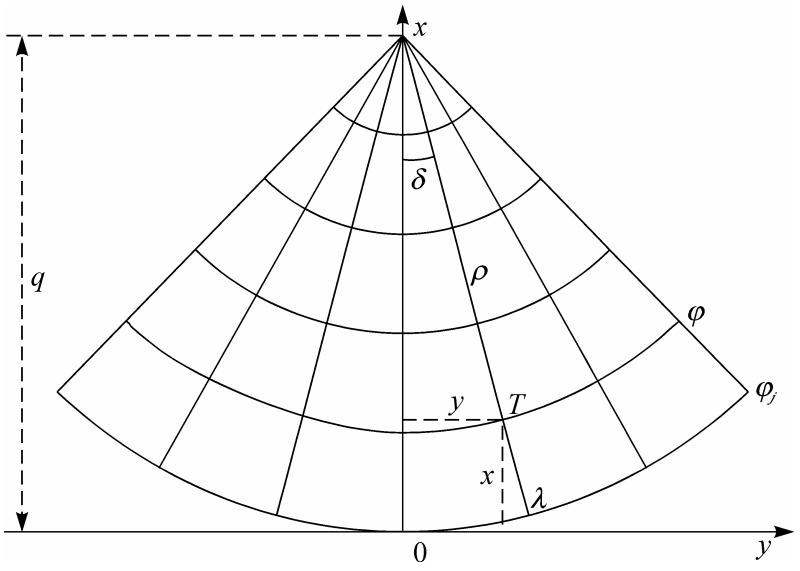
$$\sin\varphi' = \sin\varphi_p \sin\varphi - \cos\varphi_p \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_p)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda' - \lambda_p) = \frac{\cos\varphi \sin(\lambda - \lambda_p)}{\cos\varphi_p \sin\varphi + \sin\varphi_p \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_p)}$$

uz uvjete ako je $\varphi = \varphi_p$ i $|\lambda - \lambda_p| = \pi$, onda je $\varphi' = \pi/2$ i $\lambda = 0$ te ako je $\varphi = -\varphi_p$ i $\lambda - \lambda_p = 0$ ili $|\lambda - \lambda_p| = 2\pi$ onda je $\varphi' = -\pi/2$ i $\lambda = 0$.

6. KONUSNE PROJEKCIJE

Prema definiciji danoj u odjeljku 5.3 u uspravnim konusnim projekcijama meridijani se preslikavaju kao pravci koji se sijeku pod kutovima proporcionalnim razlikama njihovih geografskih duljina, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem u presjeku meridijana (sl. 6.1).



Slika 6.1. Koordinatni sustav u uspravnim konusnim projekcijama

Prema tome opće jednadžbe uspravnih konusnih projekcija u polarnim koordinatama imaju ovaj oblik

$$\begin{aligned} \rho &= f(\varphi), \\ \delta &= k(\lambda - \lambda_0) \end{aligned} \tag{6.1}$$

gdje su

δ ... kut pod kojim se sijeku meridijani u projekciji

ρ ... polumjeri paralela u projekciji

k ... konstanta proporcionalnosti

λ ... geografska duljina

λ_0 ... geografska duljina srednjeg meridijana područja preslikavanja

Za pol polarnih koordinata uzima se točka presjeka meridijana, a za os polarnih koordinata jedan od meridijana, obično meridijan koji prolazi sredinom područja preslikavanja. Oblik funkcije f koja određuje ρ dobiva se ovisno o uvjetima preslikavanja, tj. od uvjeta konformnosti, ekvivalentnosti ili ekvidistantnosti.

Os x pravokutnih koordinata podudara se s osi polarnih koordinata. Ishodište se obično postavlja u presjek najjužnije paralele i srednjeg meridijana.

Odnos između polarnih i pravokutnih koordinata vidljiv je iz slike 6.1 i određen je ovim jednadžbama:

$$\begin{aligned} x &= q - \rho\cos\delta, \\ y &= \rho\sin\delta, \end{aligned} \tag{6.2}$$

gdje je

$$q = \rho_j$$

a ρ_j je polumjer paralele s najmanjom širinom φ_j.

Mjerilo duž meridijana i paralela dobiva se po formulama (4.11) i (4.12)

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M}, \quad n = \frac{\sqrt{G}}{r}.$$

Potrebne parcijalne derivacije jesu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{d\rho}{d\varphi}\cos\delta, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi}\sin\delta, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= k\rho\sin\delta, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = k\rho\cos\delta, \end{aligned} \tag{6.3}$$

pa je

$$E = \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2, \quad G = k^2\rho^2$$

i konačno

$$m = -\frac{d\rho}{Md\varphi}, \quad n = \frac{k\rho}{r}. \tag{6.4}$$

Predznak minus u izrazu za m uvodi se zbog toga jer se φ povećava od ekvatora prema polu, a ρ od pola prema ekvatoru.

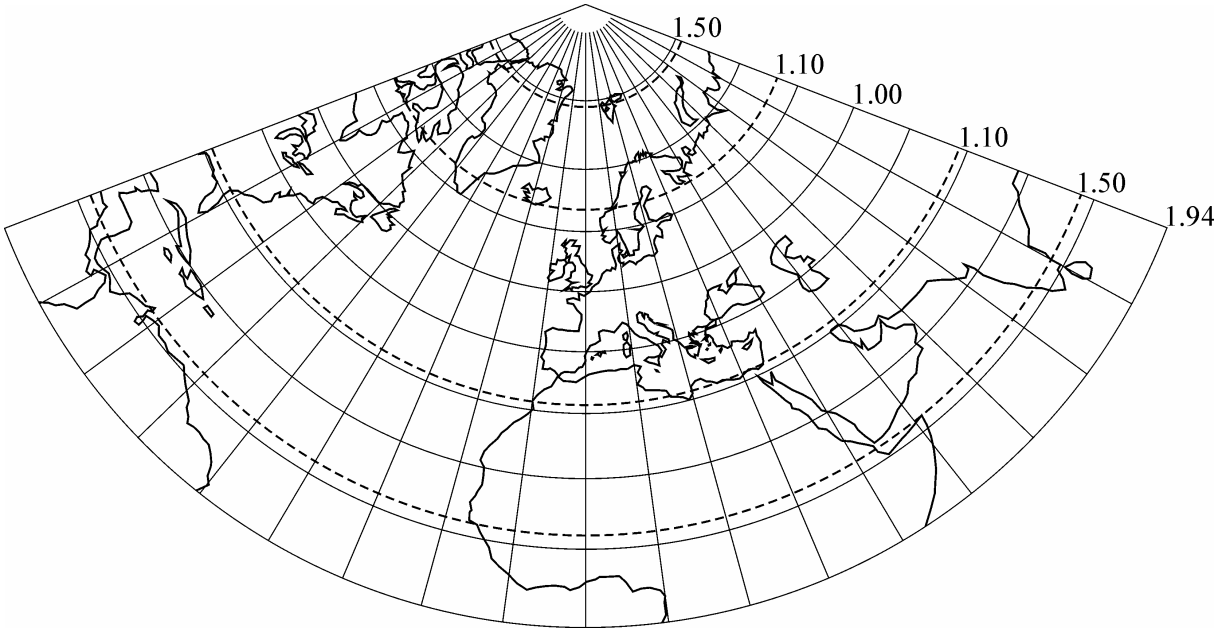
Budući da se meridijani i paralele sijeku u konusnim projekcijama pod pravim kutom, to se glavni pravci podudaraju sa smjerom meridijana i paralela pa je

$$p = ab = mn \tag{6.5}$$

i

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{|m-n|}{m+n}. \tag{6.6}$$

Kao što se iz formula vidi deformacije ovise samo o širini φ, izokole se dakle podudaraju s projekcijama paralela (sl. 6.2).



Slika 6.2. Izokole mjerila površina u konformnoj konusnoj projekciji

6.1. Uspravne konformne konusne projekcije

Prema svojstvu konformnih projekcija da je $\omega = 0$ i $m = n$ slijedi

$$-\frac{d\rho}{Md\varphi} = \frac{k\rho}{r} \tag{6.7}$$

odakle određujemo $\rho = f(\varphi)$.

Uvrsti li se u jednadžbu (6.7) izraz $r = N\cos\varphi$, a potom i izraze za M i N (3.31) može se ona napisati u obliku

$$-\frac{d\rho}{\rho} = k\frac{M}{N}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = k\frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

nakon integriranja dobivamo

$$\ln\rho = -k\ln\mathrm{tg}(45° + \frac{\varphi}{2}) + ke\ln\mathrm{tg}(45° + \frac{\psi}{2}) + \ln K \tag{6.8}$$

gdje je K ... konstanta integracije

ψ ... funkcija širine određena jednadžbom $\sin\psi = e\sin\varphi$.

Jednadžba (6.8) može se napisati u obliku

$$\rho = \frac{K}{U^k}, \tag{6.9}$$

gdje je

$$U = \frac{\operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^e(45° + \frac{\psi}{2})}. \tag{6.10}$$

Za sferu

$$U = \operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2}),$$

pa je

$$\rho = K \operatorname{tg}^k(45° - \frac{\varphi}{2}). \tag{6.11}$$

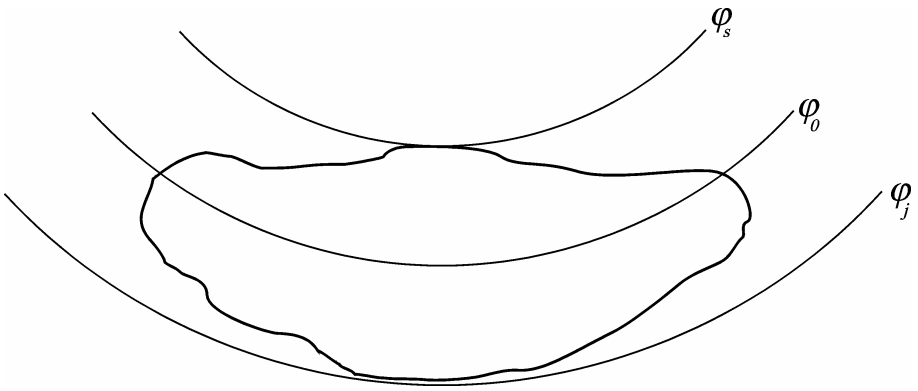
Prema tome formule uspravnih konformnih konusnih projekcija jesu:

$$\begin{gathered} \delta = k(\lambda - \lambda_0), \\ \rho = \frac{K}{U^k}, \\ U = \frac{\operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^e(45° + \frac{\psi}{2})}, \\ \sin\psi = e\sin\varphi. \end{gathered} \tag{6.12}$$

$$\begin{gathered} x = q - \rho\cos\delta, \\ y = \rho\sin\delta, \\ m = n = \frac{kK}{rU^k}, \quad p = m^2, \quad \omega = 0. \end{gathered} \tag{6.12}$$

U tim formulama pojavljuju se dvije konstante k i K koje određujemo pod raznim uvjetima. Ovdje ćemo opisati četiri načina određivanja konstanti. Postoje i druge mogućnosti (npr. Solov'jev 1969, str. 63-68).

1. način. Odrediti konstante k i K uz uvjete da mjerilo n_0 na zadanoj paraleli sa širinom φ_0 bude najmanje i jednako jedinici (sl. 6.3).



Slika 6.3. Standardna paralela prolazi sredinom područja preslikavanja

Prema tome potrebno je vidjeti za koju širinu φ_0 mjerilo n ima najmanju vrijednost. U tu svrhu naći ćemo prvu derivaciju od n po φ:

$$n = k\frac{\rho}{r},$$

a

$$\frac{dn}{d\varphi} = k\frac{M\rho}{r^2}(\sin\varphi - k). \tag{6.13}$$

Ova prva derivacija bit će jednaka nuli kad je :

$$\sin\varphi = k.$$

Označujući s φ_0 širinu za koju je

$$\sin\varphi_0 = k, \tag{6.14}$$

pogledat ćemo da li je za tu vrijednost konstante k mjerilo najmanje ili najveće

$$\left[\frac{d^2n}{d\varphi^2}\right]_{\varphi=\varphi_0} = n_0\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_0} > 0. \tag{6.15}$$

Iz ove jednadžbe vidimo da je druga derivacija od n za $\sin\varphi_0 = k$ uvijek pozitivna, prema tome mjerilo u slučaju kad je $k = \sin\varphi_0$ ima najmanju vrijednost. Na taj način odredili smo konstantu k. Da bismo odredili drugu konstantu K poslužit ćemo se drugim uvjetom prema kome mjerilo duž zadane paralele treba biti jednako jedinici, naime

$$\frac{kK}{r_0U_0^k} = 1,$$

odakle je

$$K = \frac{r_0 U_0^k}{k}. \tag{6.16}$$

2. način. Odrediti konstante k i K pod uvjetom da mjerila na krajevima teritorija budu ista, a mjerilo duž paralele sa širinom φ_0 da bude najmanje i jednako jedinici. To je slučaj s jednom standardnom paralelom, čija širina nije unaprijed zadana već se određuje naknadno.

Prema tim uvjetima možemo napisati ove jednadžbe:

$$n_j = n_s, \quad n_0 = 1, \tag{6.17}$$

gdje su n_0, n_j i n_s mjerila duž paralela sa širinama φ_0, φ_j i φ_s (sl. 6.3).

Prema uvjetu $n_j = n_s$ imamo

$$\frac{kK}{r_j U_j^k} = \frac{kK}{r_s U_s^k},$$

odakle je

$$\ln r_j + k \ln U_j = \ln r_s + k \ln U_s$$

i

$$k = \frac{\ln r_s - \ln r_j}{\ln U_j - \ln U_s}. \tag{6.18}$$

Da bismo zadovoljili uvjet da mjerilo duž paralele sa širinama φ_0 bude najmanje mora biti zadovoljena jednadžba (6.14).

$$\sin\varphi_0 = k,$$

iz koje određujemo širinu φ_0. Prema jednadžbi

$$n_0 = 1$$

imamo prema (6.12)

$$\frac{kK}{r_0 U_0^k} = 1,$$

odakle je

$$K = \frac{r_0 U_0^k}{k}. \tag{6.19}$$

3. način. Odrediti konstante k i K pod uvjetom da mjerila na dvjema krajnjim paralelama budu jednaka, a mjerilo duž treće zadane paralele neka bude jednako jedinici.

Prema tim uvjetima možemo napisati ove jednadžbe

$$n_j = n_s\,, \quad n_3 = 1\,.$$

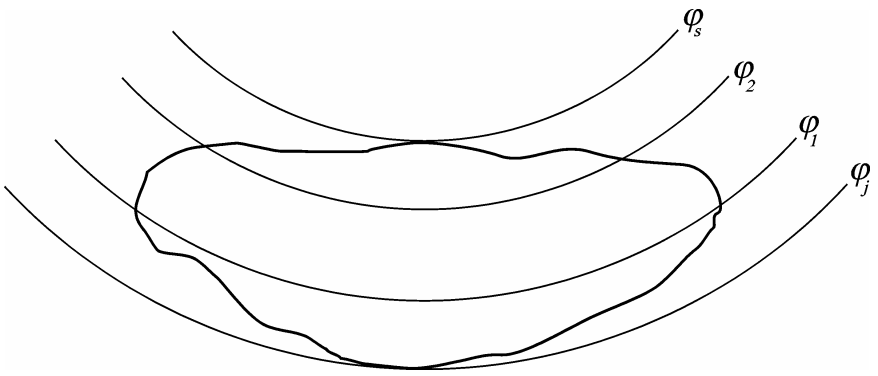
Prema tom uvjetu slijedi

$$k = \frac{\ln r_s - \ln r_j}{\ln U_j - \ln U_s}\,,$$

a prema drugom

$$\frac{kK}{r_3 U_3^k} = 1 \qquad \text{i} \qquad K = \frac{r_3 U_3^k}{k} \tag{6.20}$$

4. način. Odrediti konstante k i K pod uvjetom da mjerila uzduž dviju zadanih paralela budu jednaka jedinici (sl. 6.4)



Slika 6.4. Područje preslikavanja u konusnoj projekciji s dvije standardne paralele

Prema postavljenim uvjetima možemo napisati ove jednadžbe

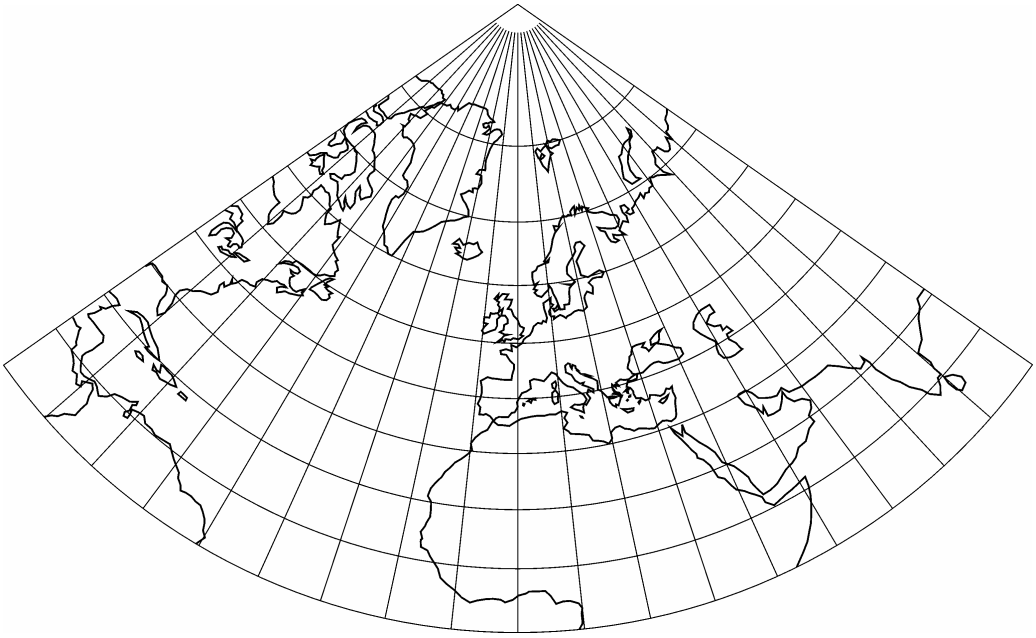
$$n_1 = n_2 = 1\,, \tag{6.21}$$

$$\frac{kK}{r_1 U_1^k} = \frac{kK}{r_2 U_2^k}$$

odakle je

$$k = \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln U_1 - \ln U_2}\,, \tag{6.22}$$

$$K = \frac{r_1 U_1^k}{k} = \frac{r_2 U_2^k}{k}\,. \tag{6.23}$$



Slika 6.5. Uspravna konformna konusna projekcija $\varphi_1 = 30°,\ \varphi_2 = 45°$

6.2. Uspravne ekvivalentne konusne projekcije

Budući da se u konusnim projekcijama meridijani i paralele sijeku pod pravim kutom, to se uvjet ekvivalentnosti na osnovi izraza (6.5) izražava jednadžbom

$$p = ab = mn = 1.$$

Ako u tu jednadžbu uvrstimo izraze za mjerila m i n bit će

$$-\frac{d\rho}{Md\varphi}\frac{k\rho}{r} = 1$$

odakle je

$$-\rho\, d\rho = \frac{1}{k} M\, r\, d\varphi$$

ili ako uvrstimo $r = N\cos\varphi$

$$-\rho\, d\rho = \frac{1}{k} MN\cos\varphi\, d\varphi\,.$$

Kad lijevu stranu jednadžbe integriramo, a na desnoj samo naznačimo integriranje izlazi

$$\rho^2 = \frac{2}{k}\int_0^{\varphi} MN\cos\varphi\, d\varphi + K_1$$

ili

$$\rho^2 = K_1 - \frac{2}{k}\int_0^{\varphi} MN\cos\varphi\, d\varphi\,.$$

Integral

$$S = \int_0^{\varphi} MN\cos\varphi\, d\varphi$$

je površina elipsoidnog trapeza s razlikom duljina od jednog radijana i pružanjem od ekvatora do paralele sa širinom φ i računa se po formuli (3.58):

$$S = \frac{b^2}{2}\left(\frac{\sin\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} + \frac{1}{2e}\ln\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}\right) \tag{5.24}$$

pa možemo pisati

$$\rho^2 = K_1 - \frac{2}{k}S.$$

Uzmemo li da je

$$K_1 = \frac{2}{k}K\,,$$

gdje je K također konstanta izlazi

$$\rho^2 = \frac{2}{k}K - \frac{2}{k}S$$

ili

$$\rho^2 = \frac{2}{k}(K-S)\,. \tag{6.25}$$

Prema tome sve potrebne formule uspravnih ekvivalentnih konusnih projekcija jesu:

$$\delta = k(\lambda - \lambda_0)\,,$$

$$\rho^2 = \frac{2}{k}(K-S)\,,$$

$$S = \frac{b^2}{2}\left(\frac{\sin\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} + \frac{1}{2e}\ln\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}\right),$$

$$x = q - \rho\cos\delta\,,\quad q = \rho_j\,, \tag{6.26}$$

$$y = \rho\sin\delta\,,$$

$$n = \frac{k\rho}{r}\,,\quad m = \frac{1}{n}\,,\quad p = mn = 1\,,$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{|m-n|}{m+n}\,.$$

Konstante k i K mogu se kao i kod konformnih konusnih projekcija odrediti na razne načine.

1. način. Odrediti konstante konstante k i K pod uvjetom da mjerilo n_0 bude najmanje i jednako jedinici.

Ispitujući promjene mjerila po paralelama ovisno o širini u konformnim konusnim projekcijama dobili smo (6.14)

$$\sin\varphi_0 = k\,,$$

što vrijedi i za ekvivalentne projekcije jer je formula za mjerilo po paralelama ista, tj.

$$n = \frac{k\rho}{r}\,.$$

Prema uvjetu

$$n_0 = 1$$

imamo

$$\frac{k\rho_0}{r_0} = 1\,,$$

odnosno

$$\rho_0 = \frac{r_0}{k} = \frac{N_0\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}$$

i

$$\rho_0 = N_0\operatorname{ctg}\varphi_0\,. \tag{6.27}$$

Uz ovako određene k i ρ_0 slijedi iz formule

$$\rho^2 = \frac{2}{k}(K - S)$$

$$\rho_0^2 = \frac{2}{k}(K - S_0)$$

odakle je

$$K = \frac{1}{2}(\rho_0^2 + S_0)\,. \tag{6.28}$$

2. način. Odrediti konstante k i K pod uvjetom da mjerila n_1 i n_2 na paralelama sa širinama φ_1 i φ_2 budu jednaka jedinici.

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 1$$

$$\frac{k\rho_1}{r_1} = 1, \quad \frac{k\rho_2}{r_2} = 1.$$

Odavde možemo pisati:

$$r_1^2 = k^2\rho_1^2,$$

$$r_2^2 = k^2\rho_2^2.$$

Uvrstimo li u ove izraze

$$\rho_1^2 = \frac{2}{k}(K - S_1),$$

$$\rho_2^2 = \frac{2}{k}(K - S_2)$$

dobijemo

$$r_1^2 = 2k(K - S_1),$$

$$r_2^2 = 2k(K - S_2).$$

Napravimo razliku

$$r_1^2 - r_2^2 = 2k(S_2 - S_1),$$

odakle je

$$k = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(S_2 - S_1)}. \tag{6.29}$$

Konstantu K dobit ćemo iz izraza za ρ

$$\rho_1^2 = \frac{2}{k}(K - S_1),$$

$$\rho_2^2 = \frac{2}{k}(K - S_2),$$

odakle je

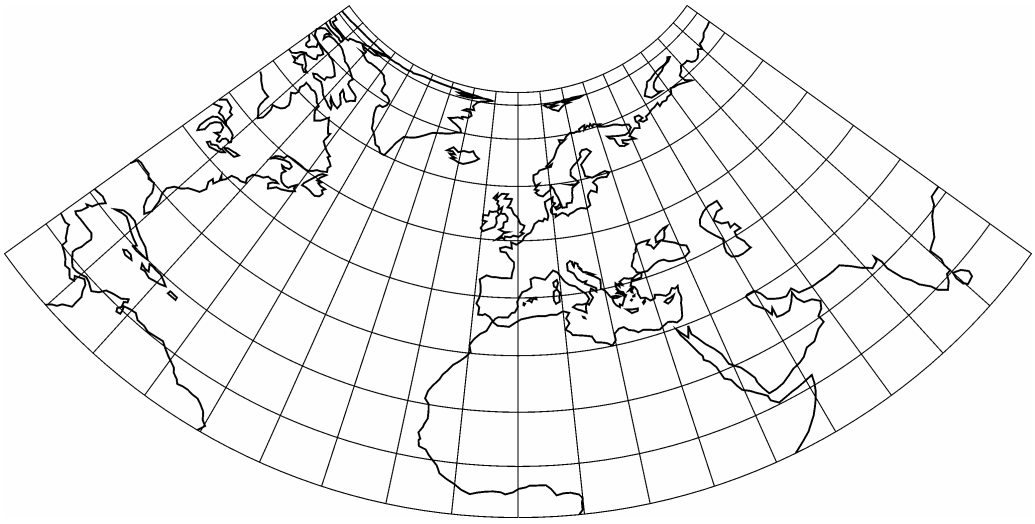
$$K = \frac{\rho_1^2 k}{2} + S_1 = \frac{\rho_2^2 k}{2} + S_2. \tag{6.30}$$

U toj formuli ρ_1 i ρ_2 računamo po formulama

$$\rho_1 = \frac{r_1}{k}, \quad \rho_2 = \frac{r_2}{k}$$

pa je

$$K = \frac{r_1^2}{2k} + S_1 = \frac{r_2^2}{2k} + S_2 . \tag{6.31}$$



Slika 6.6. Uspravna ekvivalentna konusna projekcija.

6.3. Uspravne ekvidistantne konusne projekcije

U uspravnim ekvidistantnim konusnim projekcijama postavljamo uvjet da se meridijani preslikavaju bez deformacija, tj. da je mjerilo duž meridijana jednako jedinici. Izražen analitički uvjet glasi:

$$m = -\frac{d\rho}{Md\varphi} = 1$$

odakle je

$$-\rho = \int_0^{\varphi} Md\varphi$$

ili

$$\rho = K - I_0^{\varphi}, \tag{6.32}$$

gdje je

$$I_0^{\varphi} = \int_0^{\varphi} Md\varphi .$$

Sve potrebne formule za računanje pravokutnih koordinata i deformacija jesu:

$$\delta = k(\lambda - \lambda_0),$$

$$\rho = K - I_0^{\varphi},$$

$$I_0^{\varphi} = A\left[\varphi + \sin 2\varphi(C_1 + (C_2 + C_3\cos 2\varphi)\cos 2\varphi)\right] + \ldots, \quad \text{(v. (3.49))}.$$

$$x = q - \rho\cos\delta, \quad q = \rho_j, \tag{6.33}$$

$$y = \rho\sin\delta,$$

$$m = 1, \quad n = \frac{k\rho}{r}, \quad p = n,$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{|m-n|}{m+n}.$$

Konstante k i K određujemo na razne načine kao i u konformnim i ekvivalentnim projekcijama.

1. način. Odrediti konstante k i K pod uvjetom da mjerilo n_0 na paraleli sa širinom φ_0 bude najmanje i jednako jedinici.

Prema (6.14) i (6.27) imamo

$$\begin{aligned} k &= \sin\varphi_0, \\ \rho_0 &= N_0\operatorname{ctg}\varphi_0, \end{aligned} \tag{6.34}$$

pa je

$$\rho_0 = K - I_0^{\varphi_0}$$

odakle slijedi

$$K = \rho_0 + I_0^{\varphi_0}. \tag{6.35}$$

2. način. Odrediti konstante k i K pod uvjetom da mjerila n_1 i n_2 na paralelama sa širinama φ_1 i φ_2 budu jednaka jedinici.

Budući da je

$$n_1 = n_2,$$

to je

$$\frac{k\rho_1}{r_1} = \frac{k\rho_2}{r_2}$$

ili uvrštavajući vrijednosti za ρ_1 i ρ_2

$$\frac{K - I_0^{\varphi_1}}{r_2} = \frac{K - I_0^{\varphi_2}}{r_2},$$

odakle izlazi

$$K = \frac{r_2 I_0^{\varphi_1} - r_1 I_0^{\varphi_2}}{r_2 - r_1}, \tag{6.36}$$

Budući da je

$$n_1 = 1 \quad \text{i} \quad n_2 = 1,$$

možemo pisati

$$\frac{k\rho_1}{r_1} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{k\rho_2}{r_2} = 1$$

ili

$$r_1 = k\rho_1 \quad \text{i} \quad r_2 = k\rho_2.$$

Napravimo razliku

$$r_1 - r_2 = k(\rho_1 - \rho_2),$$

odakle slijedi

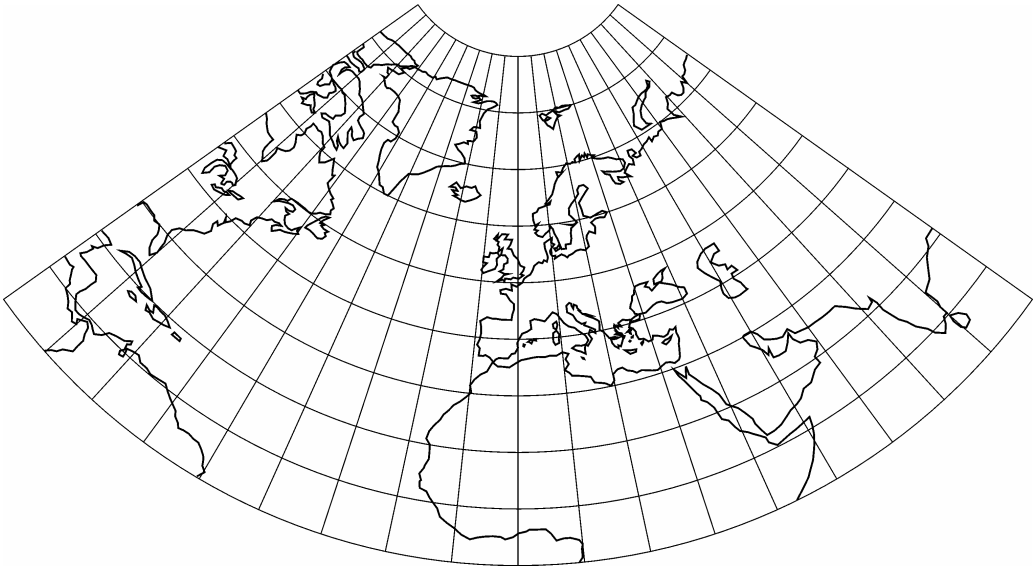
$$k = \frac{r_1 - r_2}{\rho_1 - \rho_2}. \tag{6.37}$$

U ovoj formuli ρ_1 i ρ_2 računamo po formulama

$$\rho_1 = k - I_0^{\varphi_1}, \quad \rho_2 = k - I_0^{\varphi_2}$$

pa je

$$k = \frac{r_1 - r_2}{I_0^{\varphi_2} - I_0^{\varphi_1}}. \tag{6.38}$$



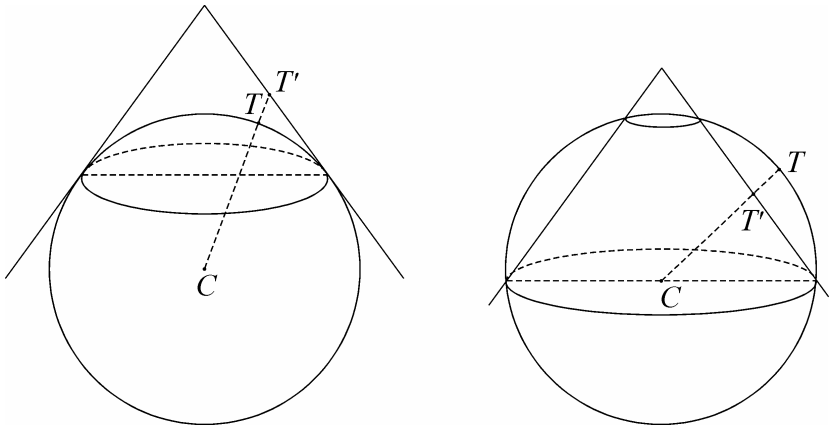
Slika 6.7. Uspravna ekvidistantna konusna projekcija

6.4. Perspektivne konusne projekcije

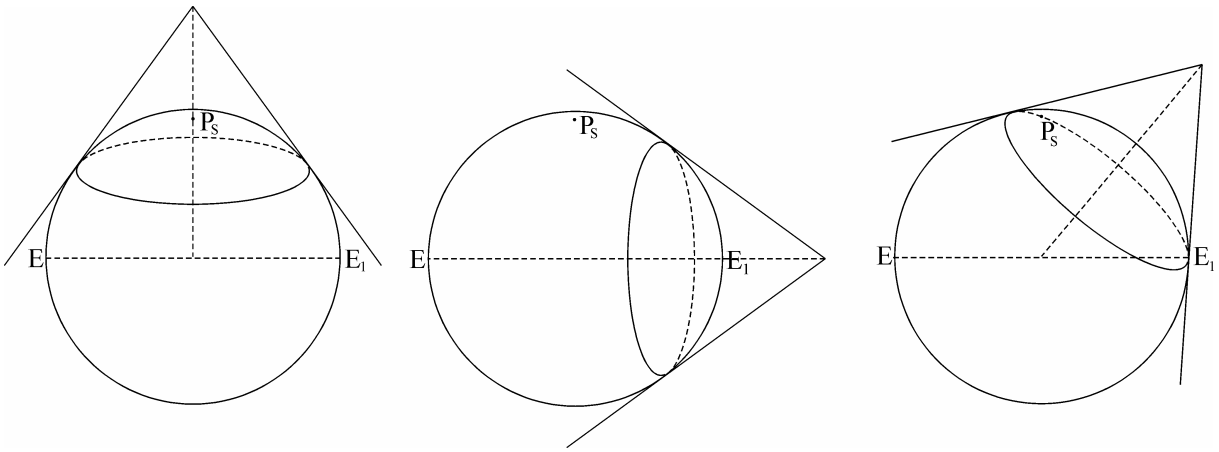
U praksi nemaju veću primjenu. Spominjemo ih jer se vrlo često konusne projekcije objašnjavaju kao perspektivne konusne projekcije.

Perspektivne konusne projekcije jesu projekcije kod kojih zamišljamo da točke sa sfere projiciramo na plašt konusa koji dira ili siječe sferu (sl. 6.8).

Definicija konusnih projekcija pomoću projiciranja na plašt konusa zorna je i koristi se u mnogim udžbenicima. Nakon projiciranja zamišljmo da se konus razrezuje duž izvodnice i razvija u ravninu i na taj način dobiva mreža meridijana i paralela u ravnini.



Slika 6.8. Projiciranje na konus koji dira ili siječe Zemljinu sferu



a) *b)* *c)*

Slika 6.9. Položaj konusa u a) uspravnim, b) poprečnim i c) kosim projekcijama

Pomoću konusa može se zorno protumačiti podjela projekcija na uspravne, poprečne i kose. Položaj konusa prema Zemljinoj sferi može biti različit i prema tome se konusne projekcije dijele na (sl. 6.9):

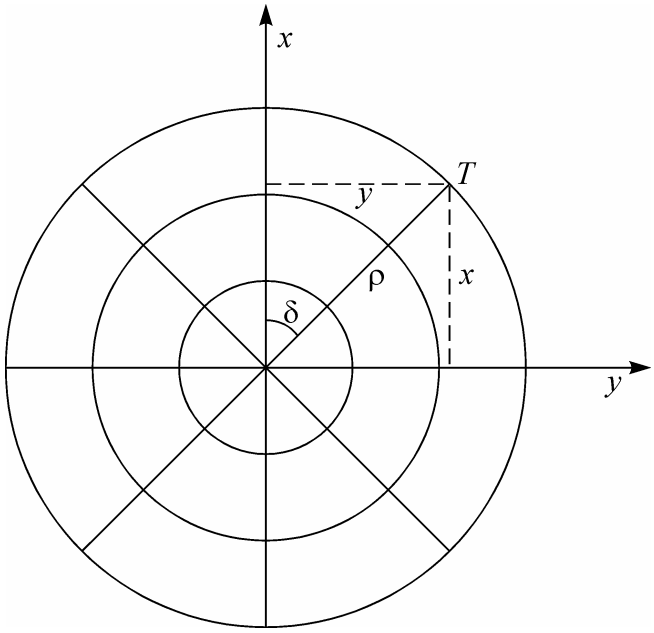
1. uspravne - kod kojih se os konusa podudara s osi Zemlje
2. poprečne - kod kojih os konusa leži u ravnini ekvatora
3. kose - kod kojih os konusa zauzima bilo koji položaj između ravnine ekvatora i Zemljine osi.

7. AZIMUTALNE PROJEKCIJE

U uspravnim azimutalnim projekcijama meridijani su pravci koji se sijeku u jednoj točki pod kutovima jednakim razlikama njihovih geografskih duljina, a paralele su koncentrične kružnice sa središtem u presjeku meridijana.

Prema tome opće jednadžbe uspravnih azimutalnih projekcija u polarnim koordinatama mogu se napisati u ovom obliku

$$\begin{aligned} \delta &= \lambda - \lambda_0, \\ \rho &= f(\varphi). \end{aligned} \tag{7.1}$$



Slika 7.1. Uspravna azimutalna projekcija

gdje je δ kut između meridijana u projekciji, a ρ polumjer paralela (sl. 7.1). Oblik funkcije f ovisi o uvjetima preslikavanja, tj. o tome da li je projekcija konformna, ekvivalentna, ekvidistantna ili ima neka druga svojstva.

Postavi li se pravokutni koordinatni sustav tako da mu je ishodište u centru projekcije tada su pravokutne koordinate bilo koje točke u toj projekciji određene jednadžbama (sl. 7.1):

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\delta, \\ y &= \rho\sin\delta. \end{aligned} \tag{7.2}$$

U uspravnim azimutalnim projekcijama glavni pravci podudaraju se s meridijanima i paralelama, tj. mjerila duž meridijana i paralela su ekstremna što će reći da u danoj točki mjerilo duž njih ima najveću vrijednost a i najmanju vrijednost b.

Do formula za mjerila m i n doći ćemo iz općih formula određujući E i G iz jednadžbi projekcije

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\cos\lambda\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\lambda\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 \tag{7.3}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = (-\rho\sin\lambda)^2 + (\rho\cos\lambda)^2 = \rho^2 \tag{7.4}$$

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M} = -\frac{d\rho}{M\,d\varphi}, \tag{7.5}$$

$$n = \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{N\cos\varphi}. \tag{7.6}$$

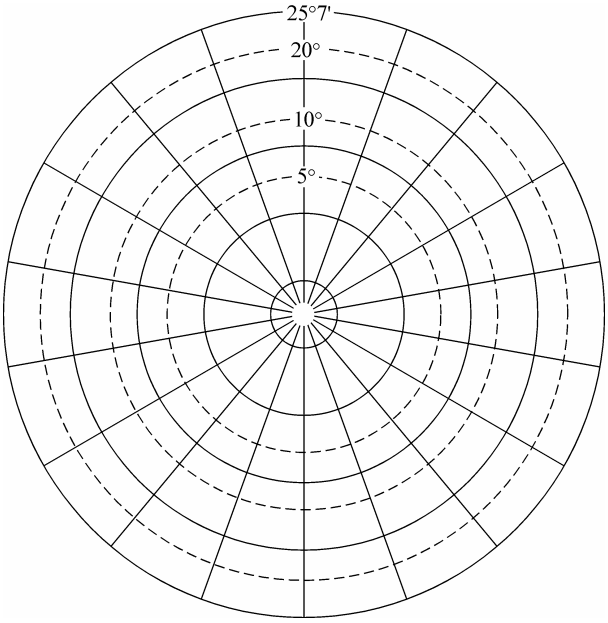
Azimutalne projekcije najčešće primjenjujemo za karte sitnih mjerila, pa stoga Zemlju aproksimiramo sferom. Za sferu je

$$m = -\frac{d\rho}{R\,d\varphi}, \tag{7.7}$$

$$n = \frac{\rho}{R\cos\varphi}. \tag{7.8}$$

Opće formule uspravnih azimutalnih projekcija za plohu sfere prema tome jesu

$$\begin{gathered}
\rho = f(\varphi), \\
\delta = \lambda - \lambda_0, \\
x = \rho\cos\delta, \\
y = \rho\sin\delta, \\
m = -\frac{d\rho}{R\,d\varphi}, \quad n = \frac{\rho}{R\cos\varphi}, \\
p = mn, \quad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{|m-n|}{m+n}.
\end{gathered} \tag{7.9}$$



Slika 7.2. Izokole maksimalnih deformacija kutova u uspravnoj ekvivalentnoj azimutalnoj projekciji

Iz formula (7.9) vidljivo je da deformacije u uspravnim azimutalnim projekcijama ovise samo o geografskoj širini φ pa su izokole kružnice koje se podudaraju s projekcijama paralela (sl. 7.2).

7.1. Uspravne konformne azimutalne projekcije

Uvjet konformnosti u uspravnim azimutalnim projekcijama izražavamo jednadžbom

$$m = n\,. \tag{7.10}$$

Uvrstimo li u tu jednadžbu izraze za mjerila bit će

$$-\frac{d\rho}{r d\varphi} = \frac{\rho}{R\cos\varphi}$$

odnosno

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\,.$$

Integriranjem dobije se

$$\ln\rho = -\ln\operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2}) + \ln K$$

odakle je

$$\rho = \frac{K}{\operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2})}$$

ili

$$\rho = K \operatorname{tg}(45° - \frac{\varphi}{2}). \tag{7.11}$$

Uvrstimo li dobiveni izraz za ρ u izraz za mjerilo bit će

$$n = \frac{K \operatorname{tg}(45° - \frac{\varphi}{2})}{R \cos\varphi} = \frac{K}{2R} \sec^2(45° - \frac{\varphi}{2}). \tag{7.12}$$

Konstantu K određujemo uz uvjet da se jedna paralela preslika bez deformacija. Ako ta paralela ima širinu φ_0 tada je

$$n = \frac{K}{2R} \sec^2(45° - \frac{\varphi_0}{2}) = 1$$

odakle je

$$K = 2R \cos^2(45° - \frac{\varphi_0}{2}).$$

Označimo li

$$k = \cos^2(45° - \frac{\varphi_0}{2}), \tag{7.13}$$

tada je

$$K = 2Rk, \tag{7.14}$$

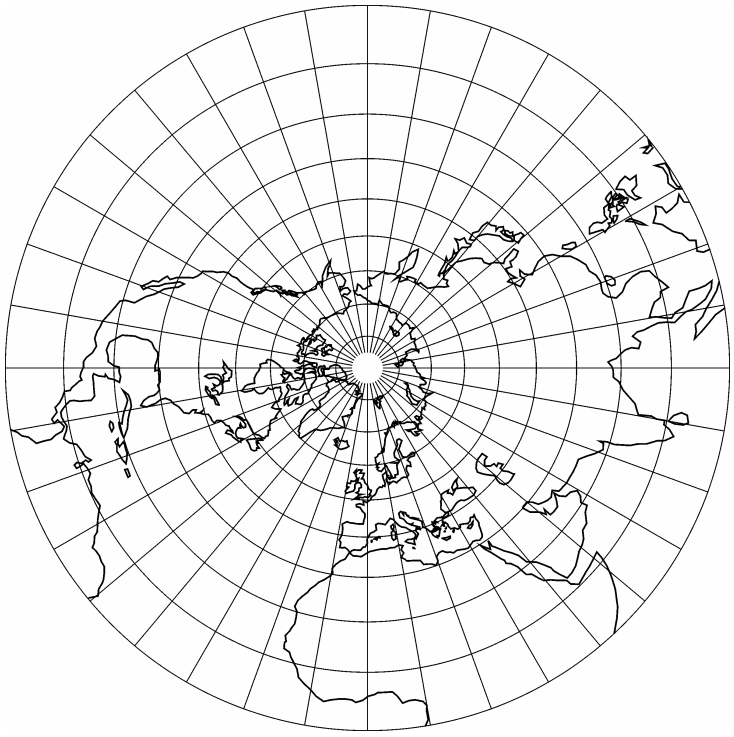
pa formule uspravnih konformnih azimutalnih projekcija jesu

$$\begin{aligned}
\delta &= \lambda - \lambda_0, \\
\rho &= 2Rk \operatorname{tg}(45° - \frac{\varphi}{2}), \\
x &= \rho \cos\delta, \\
y &= \rho \sin\delta, \\
m &= n = k \sec^2(45° - \frac{\varphi}{2}), \\
p &= k^2 \sec^4(45° - \frac{\varphi}{2}), \\
k &= \cos^2(45 - \frac{\varphi_0}{2}).
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Ako želimo da na polu nema deformacija, tada je za $\varphi_0 = 90°$

$$k = 1.$$

Na sl. 7.3 prikazana je sjeverna polusfera u uspravnoj konformnoj azimutalnoj projekciji.



Slika 7.3. Uspravna konformna azimutalna projekcija

7.2. Uspravne ekvivalentne azimutalne projekcije

Uvjet ekvivalentnosti u uspravnim azimutalnim projekcijama izražavamo jednadžbom

$$p = mn = 1. \tag{7.16}$$

Uvrštavanjem izraza za mjerilo dobiva se

$$-\frac{d\rho}{Rd\varphi}\frac{\rho}{R\cos\varphi} = 1,$$

odakle je

$$\rho\, d\rho = -R^2 \cos\varphi\, d\varphi.$$

Integriranjem se dobije

$$\frac{\rho^2}{2} = -R^2 \sin\varphi + K. \tag{7.17}$$

Postavimo li uvjet da se pol preslika kao točka (za $\varphi = 90°$ treba biti $\rho = 0$) izlazi

$$K = R^2.$$

Uvrštavanjem te vrijednosti u (7.17) dobiva se

$$\rho^2 = 2R^2(1 - \sin\varphi).$$

Taj izraz može se napisati i u ovom obliku

$$\rho^2 = 4R^2 \sin^2(45° - \frac{\varphi}{2}),$$

pa je konačno

$$\rho = 2R\sin(45° - \frac{\varphi}{2}). \tag{7.18}$$

Uvrstimo li dobivenu vrijednost za ρ u izraz za mjerilo n izlazi

$$n = \frac{2R\sin(45° - \frac{\varphi}{2})}{R\cos\varphi} = \sec(45° - \frac{\varphi}{2}). \tag{7.19}$$

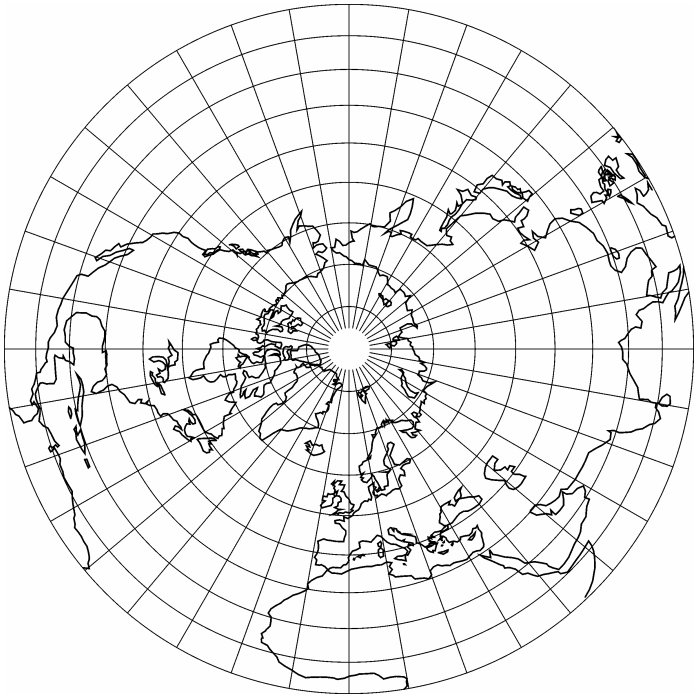
Iz (7.16) slijedi

$$m = \frac{1}{n} = \cos(45° - \frac{\varphi}{2}). \tag{7.20}$$

Prema tome kartografske jednadžbe i izrazi za mjerila i deformacije u uspravnim ekvivalentnim azimutalnim projekcijama jesu:

$$\begin{gathered}
\delta = \lambda - \lambda_0, \\
\rho = 2R\sin(45° - \frac{\varphi}{2}), \\
x = \rho\cos\delta, \\
y = \rho\sin\delta, \\
m = k\cos(45° - \frac{\varphi}{2}), \quad n = k\sec(45° - \frac{\varphi}{2}), \\
p = k^2, \quad k = \cos(45° - \frac{\varphi_0}{2}), \\
\sin\frac{\omega}{2} = \frac{|m-n|}{m+n}.
\end{gathered} \tag{7.21}$$

Sjeverna polusfera u uspravnoj ekvivalentnoj azimutalnoj projekciji prikazana je na sl. 7.4.



Slika 7.4. Uspravna ekvivalentna azimutalna projekcija

7.3. Uspravne ekvidistantne azimutalne projekcije

U ekvidistantnim azimutalnim projekcijama postavljamo uvjet da mjerilo po meridijanima bude jednako jedinici

$$m = 1\,, \tag{7.22}$$

pa je prema (7.7)

$$-\frac{d\rho}{R\,d\varphi} = 1\,,$$

a

$$d\rho = -\,R\,d\varphi\,.$$

Integriranjem dobivamo

$$\rho = -\,R\varphi + K\,. \tag{7.23}$$

Postavimo li uvjet da se pol preslika kao točka (za $\varphi = 90°$ treba biti $\rho = 0$) izlazi

$$K = R \cdot 90°$$

pa je

$$\rho = R(90° - \varphi)\,. \tag{7.24}$$

Za mjerilo po paralelama dobiva se prema (7.8)

$$n = \frac{(90° - \varphi)}{\cos\varphi}, \tag{7.25}$$

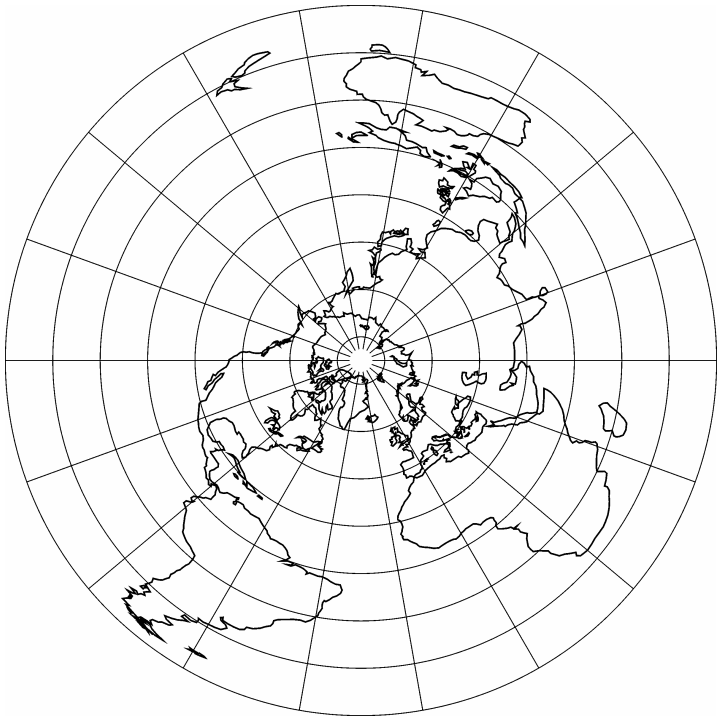
a za mjerilo površina

$$p = mn = n. \tag{7.26}$$

Kartografske jednadžbe i izrazi za mjerila i deformacije u uspravnim ekvidistantnim azimutalnim projekcijama, prema tome, jesu

$$\begin{gathered}
\delta = \lambda - \lambda_0, \\
\rho = R(90° - \varphi), \\
x = \rho\cos\delta, \\
y = \rho\sin\delta, \\
m = k = \frac{\cos\varphi_0}{90° - \varphi_0}, \quad n = \frac{k(90° - \varphi)}{\cos\varphi}, \\
p = mn, \quad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{|m - n|}{m + n}.
\end{gathered} \tag{7.27}$$

Karta svijeta u uspravnoj ekvidistantnoj azimutalnoj projekciji (sl. 7.5) poslužila je za izradu amblema Ujedinjenih naroda.



Slika 7.5. Karta svijeta u uspravnoj ekvidistantnoj projekciji. Područje preslikavanja prostire se od sjevernog pola do paralele s geografskom širinom $\varphi = -60°$

7.4. Kose i poprečne azimutalne projekcije

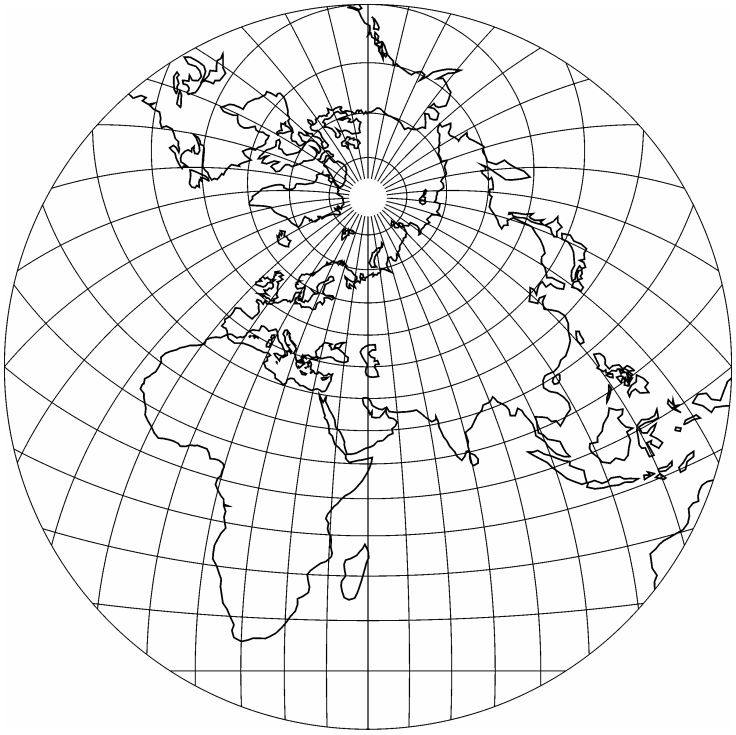
U kosim i poprečnim azimutalnim projekcijama normalna kartografska mreža ne podudara se s mrežom meridijana i paralela. Pol normalne kartografske mreže ima geografske koordinate φ_p i λ_p i podudara se sa srednjom točkom područja preslikavanja.

Poprečne azimutalne projekcije često se upotrebljavaju za izradu karata istočne i zapadne polusfere, a kose azimutalne projekcije mnogo se upotrebljavaju za karte kontinenata.

Slično kao i kod mnogih drugih projekcija pojedine azimutalne projekcije nazivaju se u literaturi imenima njihovih autora. Tako se ekvivalentne azimutalne projekcije nazivaju i Lambertove azimutalne projekcije po imenu njihova pronalazača poznatog njemačkog matematičara Johana Heinricha Lamberta (1728-1777). Ekvidistantna azimutalna projekcija, kod koje je $k = 1$, naziva se Postelova projekcija po imenu francuskog geografa Guillaumea Postela (1510-1581).

Na slici 7.6 prikazana je istočna polusfera u poprečnoj konformnoj azimutalnoj projekciji. Mreža meridijana i paralela i konture kontinenata u kosoj konformnoj azimutalnoj projekciji prikazani su na sl. 7.7.

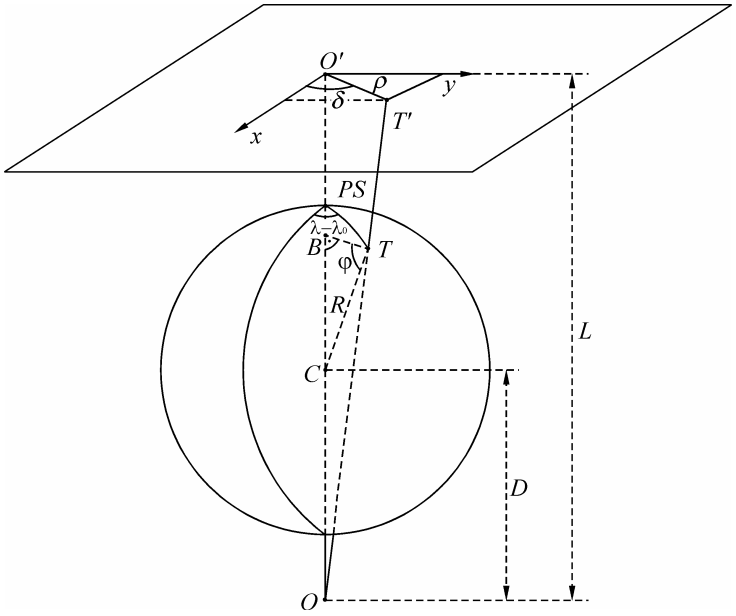
Slika 7.6. Poprečna konformna azimutalna projekcija



Slika 7.7. Kosa konformna azimutalna projekcija

7.5. Perspektivne azimutalne projekcije

U perspektivnim azimutalnim projekcijama Zemlju obično aproksimiramo sferom polumjera R. Točke s plohe sfere projiciraju se po zakonima linearne perspektive na ravninu projekcije koja je okomita na pravac koji spaja točku promatranja sa središtem sfere (sl. 7.8).



Slika 7.8. Projiciranje točaka Zemljine sfere na projekcijsku ravninu u perspektivnim azimutalnim projekcijama

Udaljenost točke promatranja O do središta sfere označena je s D, a udaljenost do projekcijske ravnine s L (sl. 7.8). Ovisno o veličini D, perspektivne azimutalne projekcije dijele se na:

1. ortografske, $D = \infty$;
2. stereografske, $D = R$;
3. centralne, $D = 0$;
4. vanjske, $R < D < \infty$.

Položaj okomice iz točke promatranja na projekcijsku ravninu određen je geografskim koordinatama φ_p i λ_p (točke Q) probodišta okomice sa sferom. Ta točka obično je srednja točka područja preslikavanja. U odnosu na položaj točke Q odnosno spojnice OO' svaka od grupa perspektivnih azimutalnih projekcija dijeli se na:

1. uspravne (polarne) ($\varphi_p = 90°$), spojnica OO' prolazi kroz polove,
2. poprečne ($\varphi_p = 0°$), spojnica OO' leži u ravnini ekvatora,
3. kose ($0° < \varphi_p < 90°$), spojnica OO' prolazi bilo kojom točkom između ekvatora i polova.

Opće formule perspektivnih azimutalnih projekcija odgovaraju općim formulama azimutalnih projekcija. Naime iz sl. 7.8 vidljivo je da će se velike kružnice koje prolaze točkom Q preslikati u ravninu projekcije kao pravci koji se sijeku u točki O' pod kutovima jednakim kutovima na sferi, a sve točke koje su na jednakoj udaljenosti od točke Q i u projekciji će biti jednako udaljene od točke O'. To je očito oblik mreže azimutalnih projekcija.

Kao i kod ostalih grupa projekcija dovoljno je izvesti osnovne kartografske jednadžbe uspravnih projekcija. Prijelaz na poprečne i kose projekcije može se ostvariti postupkom opisanim u §5.4.

Do osnovnih kartografskih jednadžbi doći ćemo projiciranjem bilo koje točke s plohe sfere na projekcijsku ravninu. Na sl. 7.8 točka T' projekcija je točke T. Budući da se točka Q poklapa sa sjevernim geografskim polom (P), primjer je to za uspravne azimutalne projekcije.

Iz sličnosti trokuta $OO'T'$ i OBT (sl. 7.8) slijedi:

$$O'T' : BT = O'O : OB \tag{7.28}$$

ili

$$\rho : R\cos\varphi = L : (D + R\sin\varphi), \tag{7.29}$$

pa je

$$\rho = \frac{LR\cos\varphi}{D + R\sin\varphi}. \tag{7.30}$$

To je opći izraz za ρ u uspravnim perspektivnim azimutalnim projekcijama. Svi ostali izrazi jednaki su ranije izvedenim izrazima azimutalnih projekcija. (v. (7.9)).

Prema tome opće formule uspravnih perspektivnih azimutalnih projekcija jesu:

$$\begin{gathered}\delta = \lambda - \lambda_0 , \\ \rho = \frac{LR\cos\varphi}{D + R\sin\varphi}, \\ x = \rho\cos\delta , \\ y = \rho\sin\delta , \\ m = -\frac{d\rho}{R\,d\varphi}, \quad n = \frac{\rho}{R\cos\varphi}, \\ p = mn , \quad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{|m-n|}{m+n}.\end{gathered} \tag{7.31}$$

Osnovne jednadžbe ortografskih, stereografskih, centralnih i vanjskih projekcija dobit ćemo uvrštavajući odgovarajuće vrijednosti za D u opće formule.

7.5.1. *Uspravna ortografska projekcija*

U ovoj projekciji točka promatranja se nalazi u beskonačnosti ($D = \infty$), pa se projiciranje vrši međusobno paralelnim zracima okomitim na projekcijsku ravninu. Obično se uzima da projekcijska ravnina tangira sferu u središnjoj točki područja preslikavanja, tj. $L = D + R$.

Uvrsti li se $L = D + R$ u opći izraz za ρ (7.30) dobiva se

$$\rho = \frac{(D+R)R\cos\varphi}{D + R\sin\varphi}.$$

Uvrsti li se $D = \infty$ dobiva se neodređen izraz. Izraz za ρ možemo napisati i u ovom obliku

$$\rho = \frac{(1+\frac{R}{D})\,R\cos\varphi}{1+\frac{R}{D}\sin\varphi}.$$

Uvrsti li se sad $D = \infty$ izlazi

$$\rho = R\cos\varphi . \tag{7.32}$$

Za mjerilo u smjeru meridijana izlazi prema (7.31)

$$m = \sin\varphi , \tag{7.33}$$

a za mjerilo u smjeru paralela

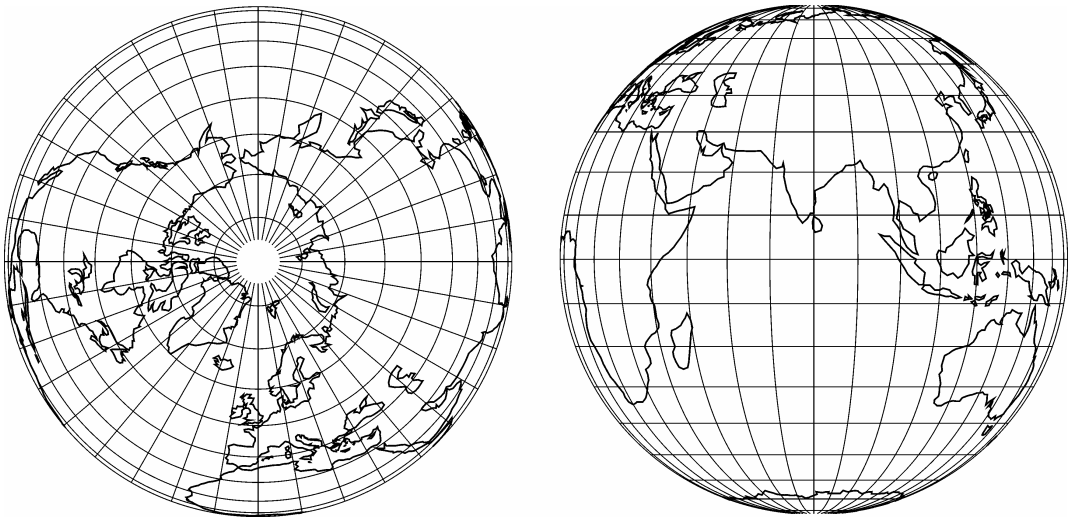
$$n = 1.$$

Budući da je $n = 1$, ortografske projekcije pripadaju grupi ekvidistantnih, tj. paralele se preslikavaju u pravoj veličini.

Kartografske jednadžbe i izrazi za mjerila i deformacije u uspravnoj ortografskoj projekciji jesu:

$$\begin{gathered}\delta = \lambda - \lambda_0\,,\\ \rho = R\cos\varphi\,,\\ x = \rho\cos\delta\,,\\ y = \rho\sin\delta\,,\\ m = \sin\varphi\,,\quad n = 1\,,\quad p = m\,,\\ \sin\frac{\omega}{2} = \frac{|m-n|}{m+n}\,.\end{gathered} \tag{7.34}$$

Mreža meridijana i paralela u ortografskoj projekciji pruža utisak sferičnosti (sl. 7.9b). Ortografska projekcija se često upotrebljava za izradu karata Mjeseca.



a) *b)*

Slika 7.9. a) uspravna i b) poprečna ortografska projekcija

7.5.2. Uspravna stereografska projekcija

U stereografskoj projekciji točka promatranja nalazi se na površini sfere ($D = R$), a projekcijska ravnina tangira sferu u središnjoj točki područja preslikavanja, pa je $L = 2R$. Uvrštavajući ove vrijednosti u opći izraz za ρ (7.30) dobiva se

$$\rho = \frac{2R\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\,.$$

Ovaj izraz može se napisti i u obliku

$$\rho = 2R \operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2}). \tag{7.35}$$

Uspoređujući dobiveni izraz za ρ s izrazom za ρ u (7.15) vidimo da je stereografska projekcija konformna azimutalna projekcija kod koje je $k = 1$, tj kod koje nema deformacija u središnjoj točki područja preslikavanja.

Prema tome kartografske jednadžbe i izrazi za mjerila i deformacije u uspravnoj stereografskoj projekciji jesu:

$$\begin{aligned} \delta &= \lambda - \lambda_0, \\ \rho &= 2R \operatorname{tg}(45° - \frac{\varphi}{2}), \\ x &= \rho \cos\delta, \\ y &= \rho \sin\delta, \\ m &= n = \sec^2(45° - \frac{\varphi}{2}), \\ p &= \sec^4(45° - \frac{\varphi}{2}). \end{aligned} \tag{7.36}$$

U stereografskoj projekciji se sve kružnice sa sfere, osim velikih kružnica koje prolaze središtem projekcije, preslikavaju i u projekciji kao kružnice.

7.5.3. *Uspravna centralna projekcija*

U centralnoj (gnomonskoj) projekciji točka promatranja nalazi se u centru sfere, a projekcijska ravnina tangira sferu ($D = 0, L = R$).

Uvrste li se ove vrijednosti u opći izraz za ρ (7.30) dobiva se

$$\rho = R \operatorname{ctg} \varphi. \tag{7.37}$$

Za mjerila duž meridijana i paralela dobiva se iz (7.7) i (7.8)

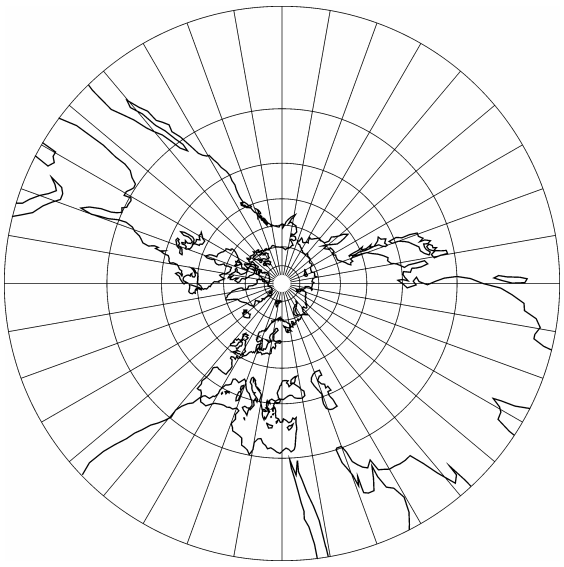
$$\begin{aligned} m &= \operatorname{cosec}^2\varphi, \\ n &= \operatorname{cosec} \varphi. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Kartografske jednadžbe i izrazi za mjerila i deformacije u uspravnoj centralnoj projekciji, prema tome, jesu:

$$\begin{gathered}\delta = \lambda - \lambda_0 ,\\ \rho = R \operatorname{ctg} \varphi ,\\ x = \rho \cos \delta ,\\ y = \rho \sin \delta ,\\ m = \operatorname{cosec}^2 \varphi , \quad n = \operatorname{cosec} \varphi , \quad p = \operatorname{cosec}^3 \varphi ,\\ \sin \frac{\omega}{2} = \frac{|m-n|}{m+n} .\end{gathered} \tag{7.39}$$

Po vrstama deformacija centralna projekcija spada u grupu uvjetnih projekcija. Lukovi velikih kružnica (ortodrome) preslikavaju se u toj projekciji kao pravci, što je njezina glavna vrijednost.

Oblik mreže meridijana i paralela i konture kontinenata u uspravnoj centralnoj projekciji prikazane su na sl. 7.10. Jasno su uočljive velike deformacije dužina, površina i oblika, koje naglo rastu udaljavanjem od središnje točke područja preslikavanja.



Slika 7.10. Uspravna centralna projekcija.

7.5.4. Vanjske projekcije

Perspektivne azimutalne projekcije u kojima se točka promatranja nalazi izvan sfere, ali na konačnoj udaljenosti nazivaju se vanjske projekcije. Prema tome je $R < D < \infty$.

Ispitivanja su pokazala da se prikladnim izborom veličine D može postići povoljan raspored deformacija. Veličine D i L odredili su razni autori pod raznim uvjetima.

Među vanjskim projekcijama ističe se Clarkeova projekcija. Clarke je udaljenost D odredio tako, da zbroj kvadrata razlika između glavnog mjerila i mjerila po glavnim pravcima bude najmanji na čitavom području preslikavanja. Za kartu polusfere dobio je $D = 1.465R$ i $L = 2.031R$ (Borčić, 1955a).

7.6. Modifikacija azimutalnih projekcija

Modifikacijom azimutalnih projekcija nastale su dvije projekcije pogodne za izradu karata svijeta. To su Aitovljeva i Hammer-Aitovljeva projekcija (Leighly, 1955).

7.6.1. Aitovljeva projekcija

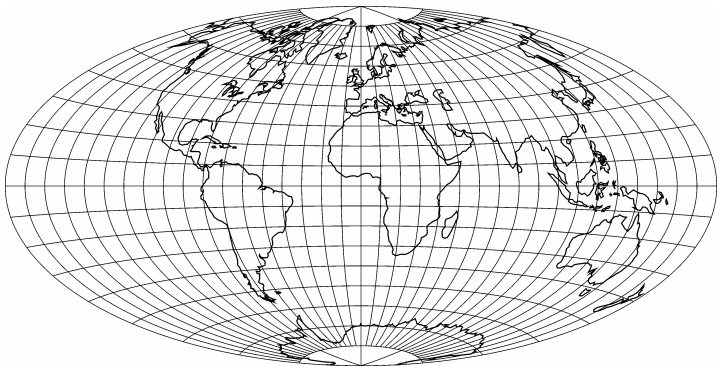
Ova projekcija nastala je modifikacijom poprečne ekvidistantne azimutalne projekcije. Modifikacija projekcije sastoji se u tome da se obodna kružnica karte polusfere s duljinom $\lambda = \pm 90°$ zamjeni elipsom, unutar koje će se preslikati čitava Zemljina sfera.

Kartografske jednadžbe Aitovljeve projekcije jesu

$$\begin{aligned} x &= Rz\cos\alpha\,, \\ y &= 2Rz\sin\alpha\,, \end{aligned} \tag{7.40}$$

$$\begin{aligned} z &= \arccos(\cos\varphi\cos\frac{\Delta\lambda}{2})\,, \\ \alpha &= \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\varphi\sin\frac{\Delta\lambda}{2})\,. \end{aligned} \tag{7.41}$$

U toj projekciji pol je točka, odnos duljine ekvatora prema duljini srednjeg meridijana je 2:1, a prema vrsti deformacija projekcija je uvjetna. Oblik mreže meridijana i paralela i kontura kontinenata na karti svijeta u Aitovljevoj projekciji dan je na sl. 7.11.



Slika 7.11. Aitovljeva projekcija.

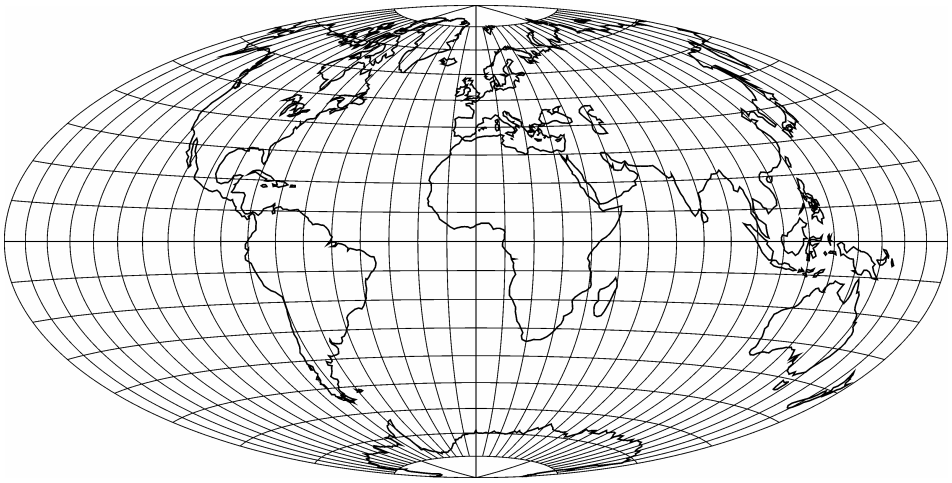
7.6.2. Hammer-Aitovljeva projekcija

Hammer-Aitovljeva projekcija nastala je modifikacijom poprečne ekvivalentne azimutalne projekcije na isti način kao i Aitovljeva projekcija modifikacijom poprečne ekvidistantne azimutalne projekcije (v. 7.6.1.). Kartografske jednadžbe tako dobivene projekcije jesu

$$x = 2R \sin \frac{z}{2} \cos \alpha ,$$
$$y = 4R \sin \frac{z}{2} \sin \alpha . \qquad (7.42)$$

Polarne koordinate z i α računaju se po formulama (7.41).

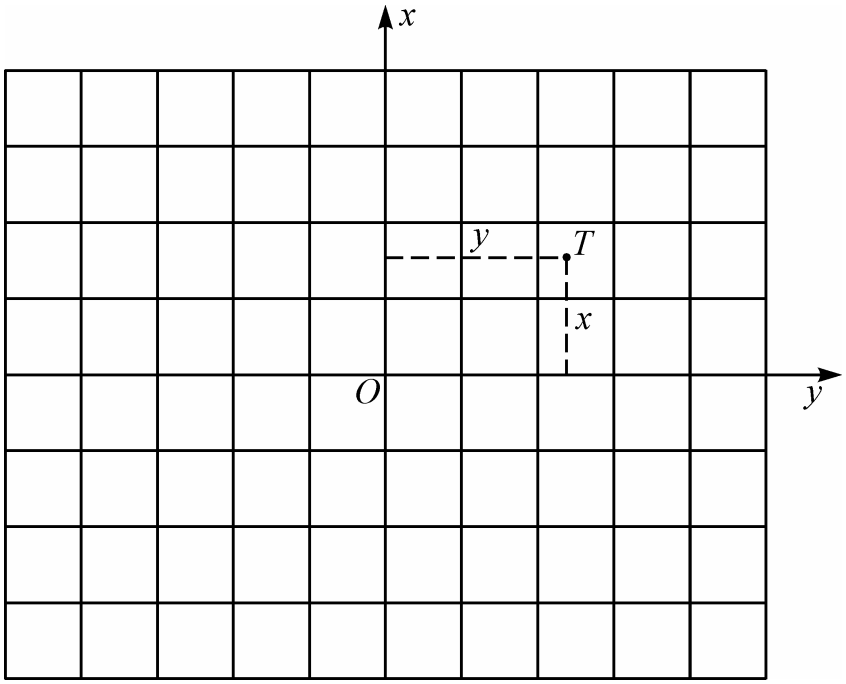
Projekcija je ekvivalentna, pol je točka, a odnos duljine ekvatora prema duljini srednjeg meridijana je 2:1. Oblik mreže meridijana i paralela i kontura kontinenata na karti svijeta u Hammer-Aitovljevoj projekciji dan je na sl. 7.12.



Slika 7.12. Hammer-Aitovljeva projekcija

8. CILINDRIČNE PROJEKCIJE

U uspravnim cilindričnim projekcijama meridijani se preslikavaju kao pravci međusobno paralelni na razmaku proporcionalnom razlikama njihovih geografskih duljina, a paralele također kao pravci okomiti na meridijane (sl. 8.1). Mreža meridijana i paralela u uspravnim projekcijama ujedno je i normalna mreža.



Slika 8.1. Uspravna cilindrična projekcija

Opće formule uspravnih cilindričnih projekcija mogu se napisati u ovom obliku

$$\begin{aligned} x &= f(\varphi), \\ y &= k(\lambda - \lambda_0), \end{aligned} \tag{8.1}$$

gdje su x i y pravokutne koordinate.

Za os x uzima se jedan od meridijana, običan srednji meridijan područja preslikavanja, a za os y projekcija ekvatora ili paralele s najmanjom širinom.

Oblik funkcije f koja određuje koordinatu x ovisi o osnovnim uvjetima preslikavanja. Prema uvjetima preslikavanja cilindrične projekcije se dijele na konformne, ekvivalentne, ekvidistantne i uvjetne.

U uspravnim cilindričnim projekcijama glavni pravci podudaraju se s pravcima meridijana i paralela, to znači da mjerila po meridijanima i paralelama imaju ekstremne vrijednosti.

Koristeći opće formule za mjerila i deformacije i navedena svojstva cilindričnih projekcija možemo napisati sve potrebne formule uspravnih cilindričnih projekcija rotacijskog elipsoida:

$$x = f(\varphi),$$
$$y = k(\lambda - \lambda_0),$$

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M}, \quad E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2$$

pa slijedi

$$m = \frac{dx}{Md\varphi} \tag{8.2}$$

$$n = \frac{\sqrt{G}}{r}, \quad G = \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = k^2,$$

i

$$n = \frac{k}{r}, \quad r = N\cos\varphi,$$
$$p = mn, \quad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{|m-n|}{m+n}.$$

Ako uspravne cilindrične projekcije primjenimo za preslikavanje sfere, tada sve formule, osim formula za mjerila m i n, imaju isti oblik kao u (8.2). Mjerila m i n računamo u tom slučaju po formulama:

$$m = \frac{dx}{Rd\varphi},$$
$$n = \frac{k}{R\cos\varphi}. \tag{8.3}$$

Iz formula (8.2) i (8.3) vidi se da mjerila i deformacije ovise u uspravnim cilindričnim projekcijama samo o geografskoj širini. Izokole su prema tome pravci i podudaraju se s projekcijama paralela.

8.1. Uspravne konformne cilindrične projekcije

Budući da se u uspravnim cilindričnim projekcijama glavni pravci podudaraju s meridijanima i paralelama, to prema (5.1) uvjet konformnosti izražavamo s $m = n$. Prema tom uvjetu imamo

$$\frac{dx}{Md\varphi} = \frac{k}{N\cos\varphi},$$

odakle je uvrštavanjem vrijednosti za M i N

$$dx = k\frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Nakon integriranja dobije se

$$x = k\left[\ln \operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2}) - e\ln \operatorname{tg}(45° + \frac{\psi}{2})\right] + K.$$

Ako dopustimo da se os y podudara s ravninom ekvatora bit će $K = 0$, pa slijedi

$$x = k\ln U, \tag{8.4}$$

gdje je

$$U = \frac{\operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^e(45° + \frac{\psi}{2})}, \tag{8.5}$$

a

$$\sin\psi = e\sin\varphi. \tag{8.6}$$

Za sferu je $e = 0$, pa izraz (8.4) možemo napisati u obliku

$$x = k\ln \operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2}). \tag{8.7}$$

Konstantu k određujemo uz uvjet da mjerilo n_0 na paraleli sa širinom φ_0 bude jednako jedinici

$$\frac{k}{r_0} = 1,$$

odakle je za plohu elipsoida

$$k = r_0 = N_0\cos\varphi_0,$$

a za plohu sfere

$$k = R\cos\varphi_0.$$

Prema tome konstanta k jednaka je polumjeru one paralele koja pri preslikavanju zadržava svoju duljinu. Kad je $\varphi_0 = 0$, onda je $k = a$, gdje je a velika poluos Zemljinog elipsoida.

Osnovne kartografske jednadžbe i izrazi za računanje mjerila i deformacija u uspravnoj konformnoj cilindričnoj projekciji elipsoida jesu:

$$y = k(\lambda - \lambda_0),$$

$$x = k \ln U,$$

$$U = \frac{\operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2})}{\operatorname{tg}^e(45° + \frac{\psi}{2})}, \quad \sin\psi = e\sin\varphi, \tag{8.8}$$

$$m = n = \frac{k}{r}, \quad r = N\cos\varphi, \quad p = m^2,$$

$$\omega = 0, \quad k = N_0\cos\varphi_0.$$

Za preslikavanje sfere u ovoj projekciji vrijede ovi izrazi

$$y = k(\lambda - \lambda_0),$$

$$x = k \ln \operatorname{tg}(45° + \frac{\varphi}{2}),$$

$$m = n = \frac{k}{R\cos\varphi}, \quad p = m^2, \tag{8.9}$$

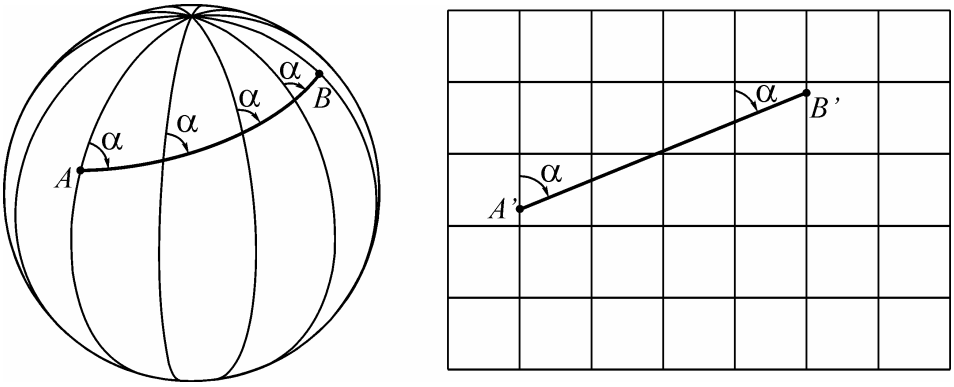
$$\omega = 0, \quad k = R\cos\varphi_0.$$

Uspravna konformna cilindrična projekcija naziva se Mercatorova projekcija po njenom pronalazaču, slavnom kartografu, Gerhardu Kremeru Mercatoru (1512 - 1594).

Mercatorova projekcija ima veliku primjenu u izradi pomorskih i zrakoplovnih karata i to zbog ovih svojih osobina:

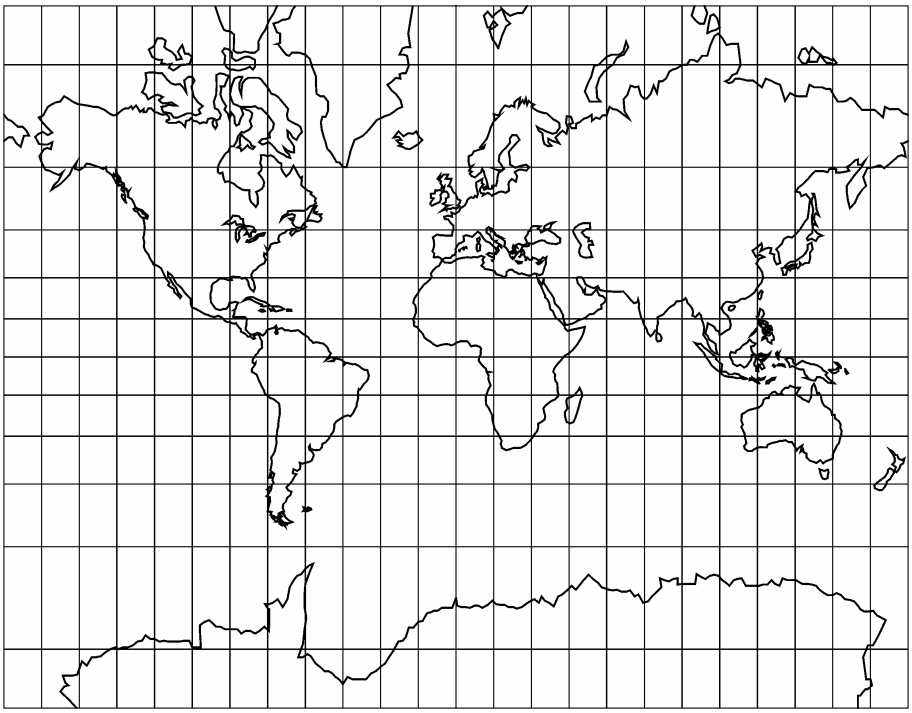
1. meridijani i paralele preslikavaju se kao pravci,
2. sačuvana je jednakost kutova, i što je najvažnje,
3. loksodrome se preslikavaju kao pravci.

Loksodroma je krivulja na elipsoidu koja s meridijanima preko kojih prolazi zatvara iste kutove. Prema tome brod plovi po loksodromi kad stalno plovi po istom kursu, tj. pod istim azimutom. Ako brod treba iz točke A ploviti u točku B, tada pomorac na karti u Mercatorovoj projekciji spaja pravcem projekcije tih točaka (A'B') i očitava azimut α (sl. 8.2). To je moguće jer se loksodroma preslikava u pravac i jer je projekcija konformna pa kut u projekciji nije deformiran.



Slika 8.2. Loksodroma na sferi i u Mercatorovoj projekciji

Karta svijeta u Mercatorovoj projekciji dana je na slici 8.3. Deformacija nema na ekvatoru. Udaljavanjem od ekvatora deformacije dužina i površina uočljivo rastu. Na paraleli sa širinom $\varphi = \pm 60°$ deformacije površina iznose 300% (tablica 8.1). Da bi se dobila zorna predodžba o velikim deformacijama površina u Mercatorovoj projekciji, treba usporediti veličine kontinenata na karti u Mercatorovoj projekciji (sl. 8.3) s veličinama kontinenata na kartama u ekvivalentnim projekcijama (npr. sl. 8.4 i sl. 8.5). Zbog velikih i lako uočljivih deformacija površina Mercatorova projekcija nije pogodna za izradu općegeografskih i političkih karata svijeta.



Slika 8.3. Mercatorova projekcija. Područje preslikavanja ograničeno je paralelama sa širinom $\varphi = \pm 80°$

Tablica 8.1: Mjerila u Mercatorovoj projekciji

φ	$m = n$	p
0	1.000	1.000
15	1.035	1.071
30	1.155	1.333
60	2.000	4.000
75	3.864	14.930

8.2. Uspravne ekvivalentne cilindrične projekcije

U uspravnim ekvivalentnim cilindričnim projekcijama meridijani i paralele sijeku se pod pravim kutom, pa uvjet ekvivalentnosti glasi

$$p = mn = 1 . \tag{8.10}$$

Budući da se ekvivalentne cilindrične projekcije upotrebljavaju za izradu karata sitnih mjerila, to u izvođenju formula Zemlju smatramo sferom. Uvrštavajući u (8.10) izraze za m i n dobiva se

$$\frac{dx}{Rd\varphi}\,\frac{k}{R\cos\varphi} = 1$$

i

$$dx = \frac{1}{k} R^2 \cos\varphi \, d\varphi .$$

Nakon integriranja dobivamo:

$$x = \frac{R^2}{k}\sin\varphi + K$$

gdje je K konstanta integracije. Postavimo li os y u ravninu ekvatora to je $K = 0$, a

$$x = \frac{R^2}{k}\sin\varphi . \tag{8.11}$$

Konstantu k određujemo uz uvjet da je mjerilo n_0 na paraleli sa širinom φ_0 jednako jedinici. Prema tom uvjetu imamo

$$\frac{k}{R\cos\varphi_0} = 1$$

i

$$k = R\cos\varphi_0 . \tag{8.12}$$

Osnovne kartografske jednadžbe i izrazi za mjerila i deformacije u uspravnoj ekvivalentnoj cilindričnoj projekciji sfere jesu

$$\begin{aligned} y &= k(\lambda - \lambda_0), \\ x &= \frac{R^2}{k}\sin\varphi, \\ n &= \frac{k}{R\cos\varphi}, \quad m = \frac{1}{n}, \quad p = 1, \\ \sin\frac{\omega}{2} &= \frac{|m-n|}{m+n}, \quad k = R\cos\varphi_0 . \end{aligned} \tag{8.13}$$

Ako se u toj projekciji ekvator preslika bez deformacija ($\varphi_0 = 0$), tada je prema (8.12)

$$k = R . \tag{8.14}$$

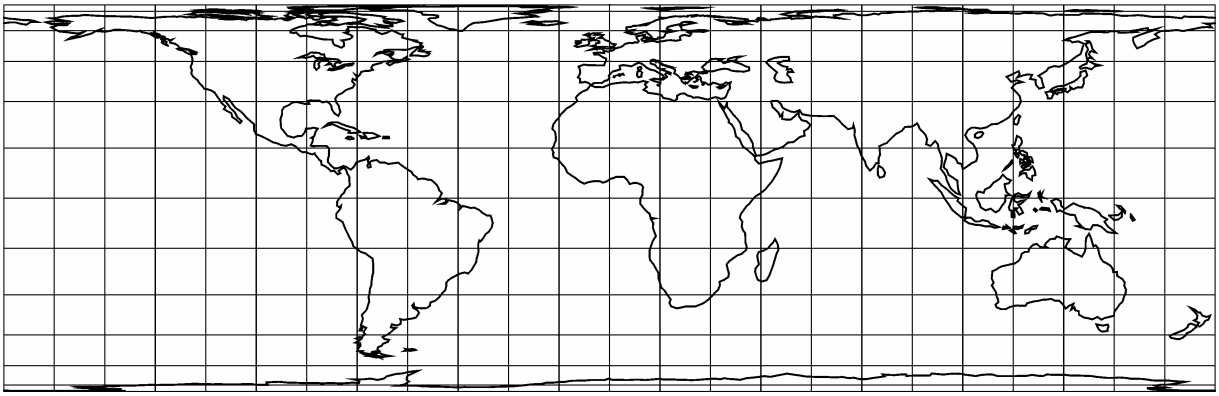
Uvrstimo li dobivenu vrijednost konstante ($k = R$) u formule (8.13) dobivamo jednadžbe uspravne ekvivalentne cilindrične projekcije u kojoj nema deformacija na ekvatoru:

$$\begin{aligned} y &= R(\lambda - \lambda_0), \\ x &= R\sin\varphi, \\ n &= \sec\varphi, \quad m = \cos\varphi . \end{aligned} \tag{8.15}$$

Mjerila m, n i maksimalne deformacije kutova ω u toj projekciji dane su u tablici 8.2, a mreža meridijana i paralela i konture kontinenata na sl. 8.4. Deformacije dužina i kutova udaljavanjem od ekvatora naglo rastu, pa se ta projekcija rijetko upotrebljava za prikaz čitavog svijeta. Na sl. 8.4 lako se uočavaju velike deformacije dužina i oblika kontinenata (npr. Aljaske, Grönlanda, sjeverne Europe i sjeverne Azije).

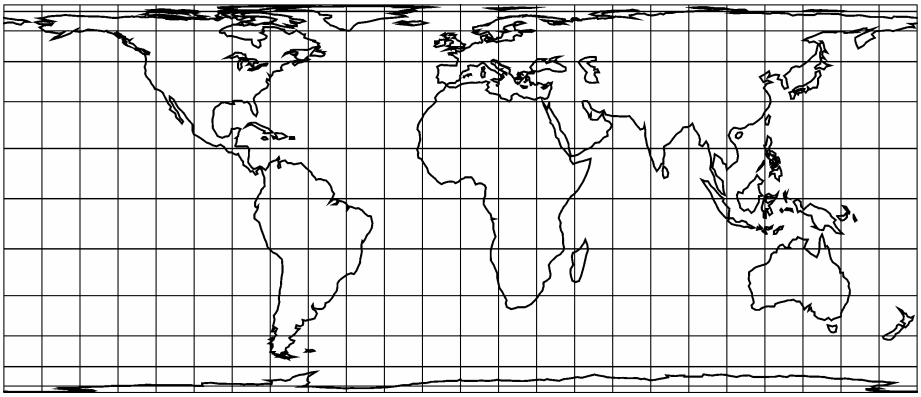
Tablica 8.2: Mjerila i deformacije u ekvivalentnoj cilindričnoj projekciji

φ	n	m	p	ω
0°	1	1	1	0°00'
15°	1.035	0.966	1	3°58'
30°	1.155	0.866	1	16°26'
60°	2.000	0.500	1	73°44'
75°	3.864	0.259	1	121°57'



Slika 8.4. Uspravna ekvivalentna cilindrična projekcija, $\varphi_0 = 0°$

Ako se, umjesto ekvatora, bez deformacija preslikaju paralele sa širinom $\varphi_0 = \pm 30°$, dobiva se povoljniji raspored deformacija (sl. 8.5).



Slika 8.5. Uspravna ekvivalentna cilindrična projekcija, $\varphi_0 = \pm 30°$

8.3. Uspravne ekvidistantne cilindrične projekcije

U uspravnim ekvidistantnim cilindričnim projekcijama Zemlju, obično, smatramo sferom i postavljamo uvjet da se meridijani preslikaju bez deformacija:

$$m = \frac{dx}{Rd\varphi} = 1,$$

odakle je

$$dx = R\varphi .$$

Nakon integriranja dobivamo:

$$x = R\varphi + K .$$

Postavimo li os y u ravninu ekvatora, to je $K = 0$ i

$$x = R\varphi . \tag{8.16}$$

Konstantu k određujemo uz uvjet da je mjerilo n_0 na paraleli sa širinom φ_0 jednako jedinici

$$n_0 = \frac{k}{R\cos\varphi_0} = 1 ,$$

odakle je

$$k = R\cos\varphi_0 . \tag{8.17}$$

Osnovne kartografske jednadžbe i izrazi za mjerila i deformacije u uspravnoj ekvidistantnoj cilindričnoj projekciji sfere na ravninu jesu:

$$\begin{gathered} y = k(\lambda - \lambda_0) , \\ x = R\varphi , \\ m = 1 , \quad n = \frac{k}{R\cos\varphi} , \quad p = n , \\ \sin\frac{\omega}{2} = \frac{|m-n|}{m+n} , \quad k = R\cos\varphi_0 . \end{gathered} \tag{8.18}$$

Ako postavimo uvjet da se ekvator preslika bez deformacija, ($\varphi_0 = 0$), tada je prema (8.17)

$$k = R . \tag{8.19}$$

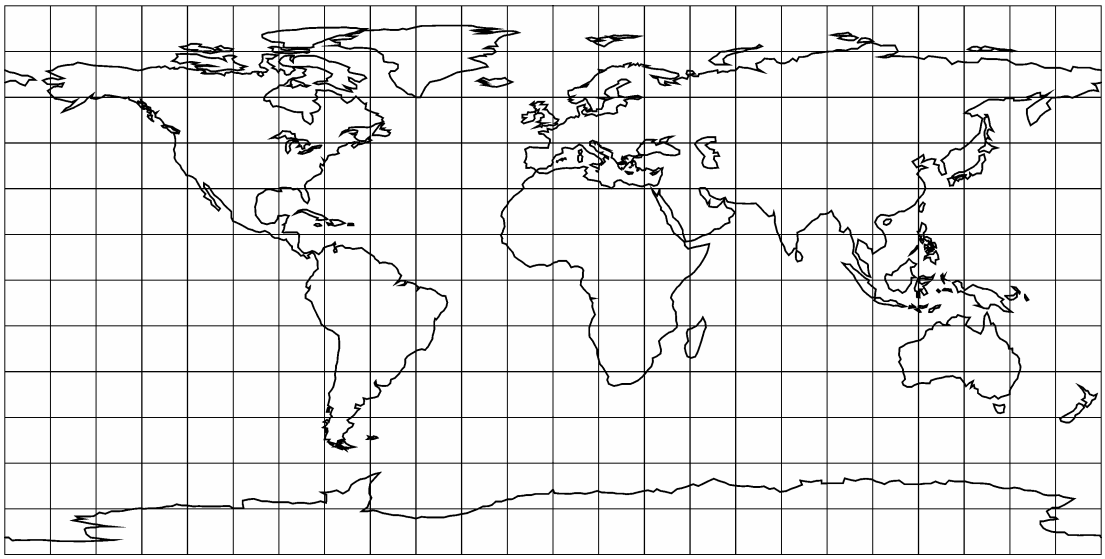
Uvrstimo li u dobivenu vrijednost konstante ($k = R$) u jednadžbe (8.18) izlazi:

$$\begin{gathered} x = R\varphi , \\ y = R(\lambda - \lambda_0) , \\ m = 1 , \quad n = \sec\varphi . \end{gathered} \tag{8.20}$$

To su jednadžbe uspravne ekvidistantne projekcije u kojoj nema deformacija na ekvatoru. Ta projekcija naziva se i kvadratična projekcija, jer mreža meridijana i paralela čini mrežu kvadrata (sl. 8.6). Mjerila i deformacije u toj projekciji dane su u tablici 8.3. Maksimalne deformacije kutova rastu udaljavanjem od ekvatora sporije nego u ekvivalentnim projekcijama (tablica 8.2), ali zato postoje deformacije površina koje na paraleli sa širinom $\varphi_0 = \pm 75°$ iznose već 286%. Velike deformacije površina, ali mnogo manje nego u Mercatorovoj projekciji (tablica 8.1 i sl. 8.3), lako se uoče ako se usporedi površina Grönlanda na sl. 8.5.

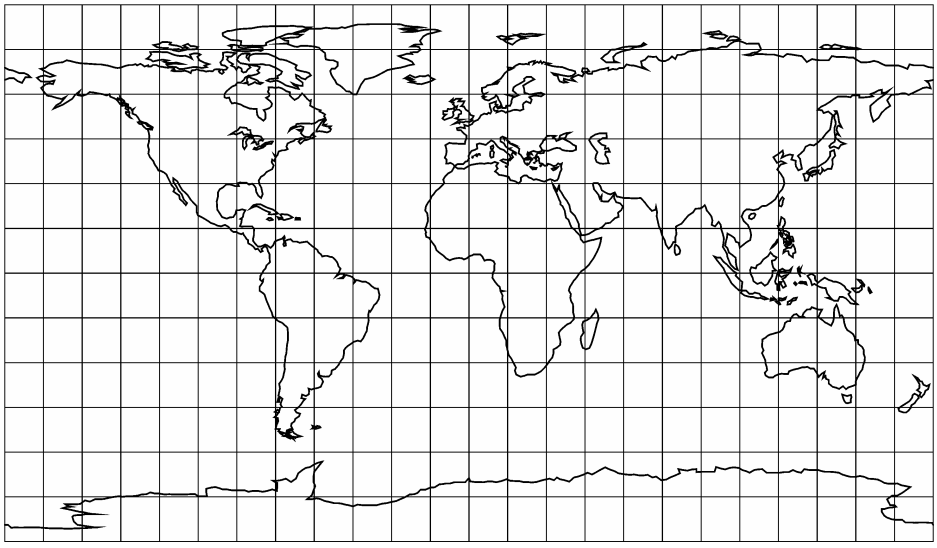
Tablica 8.3: Mjerila i deformacije u ekvidistantnim cilindričnim projekcijama

φ	$n = p$	m	ω
0°	1.000	1	0°00'
15°	1.035	1	1°59'
30°	1.155	1	8°14'
60°	2.000	1	38°57'
75°	3.864	1	72°09'



Slika 8.6. Uspravna ekvidistanatna cilindrična projekcija, $\varphi_0 = 0°$

Povoljniji raspored deformacija dobit će se ako se umjesto ekvatora bez deformacija preslikaju dvije paralele sa širinama $\varphi_0 = \pm 30°$ (sl. 8.7).



Slika 8.7. Uspravna ekvidistantna cilindrična projekcija, $\varphi_0 = \pm 30°$

8.4. Kose i poprečne cilindrične projekcije

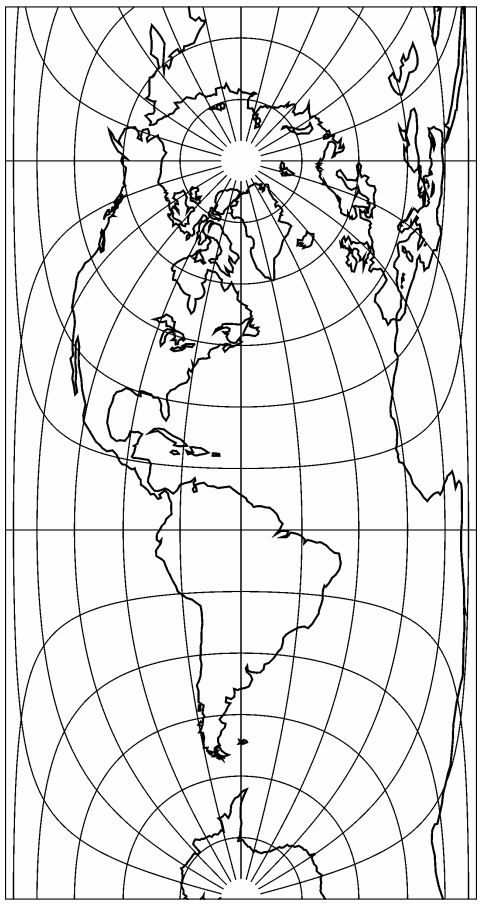
Uspravne cilindrične projekcije pogodne su za preslikavanje područja izduženih duž ekvatora. Za područja izdužena duž meridijana pogodne su poprečne cilindrične projekcije, a za područja izdužena duž proizvoljnih velikih kružnica kose cilindrične projekcije.

U kosim i poprečnim cilindričnim projekcijama Zemlja se obično smatra sferom. Normalna mreža ne podudara se s mrežom meridijana i paralela.

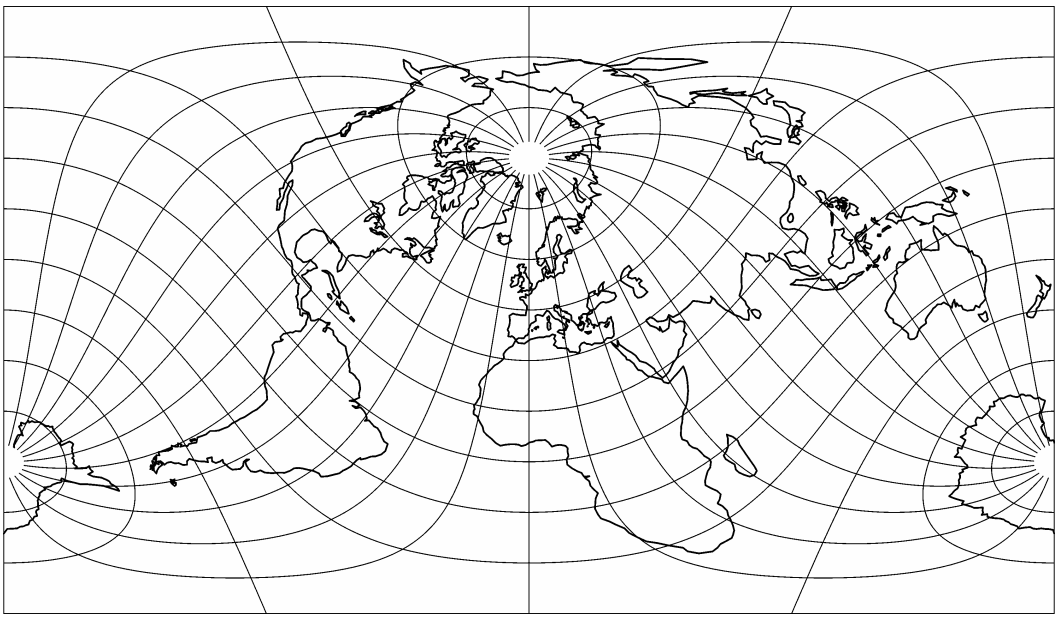
Opće formule kosih i poprečnih cilindričnih projekcija imaju isti oblik kao i formule uspravnih cilindričnih projekcija. U tim formulama potrebno je samo φ i λ zamjeniti s φ' i λ' (v. §5.4).

Izračunavanje kartografske mreže u kosim i poprečnim projekcijama izvodi se ovim redom:

1. određivanje koordinata pola φ_p i λ_p kosog ili poprečnog sustava,
2. prijelaz od geografskih koordinata φ, λ na koordinate φ' i λ',
3. izračunavanje koordinata, mjerila i deformacija u projekciji.



Slika 8.8. Poprečna ekvivalentna cilindrična projekcija.



Slika 8.9. Kosa ekvidistantna cilindrična projekcija

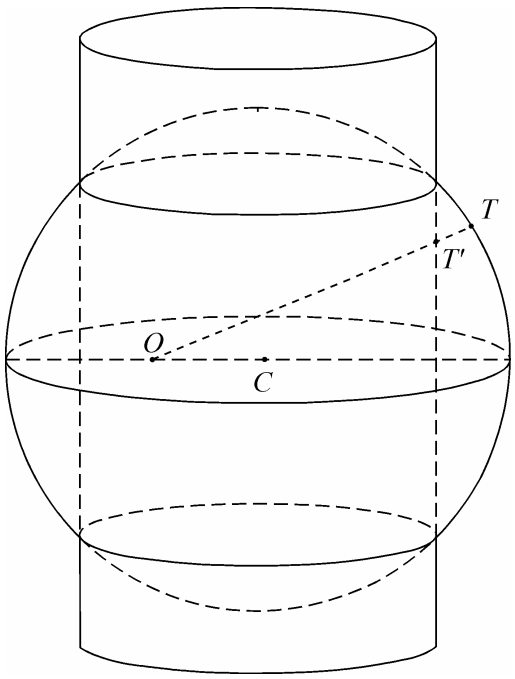
Od poprečnih i kosih cilindričnih projekcija izuzetnu važnost i primjenu ima poprečna konformna cilindrična projekcija elipsoida tvz. Gauss-Krügerova projekcija. Tu projekciju koristi danas veliki broj država za potrebe državne izmjere i izradu topografskih karata. U tim slučajevima Zemlju moramo smatrati elipsoidom pa do formula Gauss-Krügerove projekcije ne možemo doći postupkom koji smo koristili u ovom odjeljku smatrajući Zemlju sferom. Gauss-Krügerova projekcija bit će obrađena u poglavlju 15.

8.5. Perspektivne cilindrične projekcije

Dobivanje perspektivnih cilindričnih projekcija može se objasniti geometrijski. Zamislimo valjak (cilindar) koji dira Zemljinu sferu duž ekvatora, ili je kao na sl. 8.10, siječe duž dviju paralela, simetričnih u odnosu na ekvator. Iz točke promatranja (O) projiciramo točke s plohe sfere na valjak. Kao i u perspektivnim azimutalnim projekcijama (v. §7.5), točka promatranja može biti u središtu sfere, na plohi sfere, izvan sfere na konačnoj udaljenosti i u beskonačnosti. Projiciranje se vrši za svaku meridijansku ravninu posebno, a točka promatranja se pri tome pomiče u ravnini ekvatora, po kružnici polumjera CO (sl. 8.10).

Projicirajmo opisanim postupkom mrežu meridijana i paralela na valjak. Razrežimo valjak duž jedne izvodnice i razvijmo u ravninu. Projiciranjem dobivena mreža imat će oblik karakterističan za sve uspravne cilindrične projekcije: meridijani su paralelni pravci, a paralele pravci okomiti na meridijane.

Mijenjajući udaljenost točke promatranja od središta sfere i širine paralela duž kojih valjak siječe sferu možemo utjecati na raspored deformacija i razmak između paralela. Time imamo mogućnost projekciju prilagoditi specifičnim potrebama pri izradi matematičke osnove pojedinih karata.



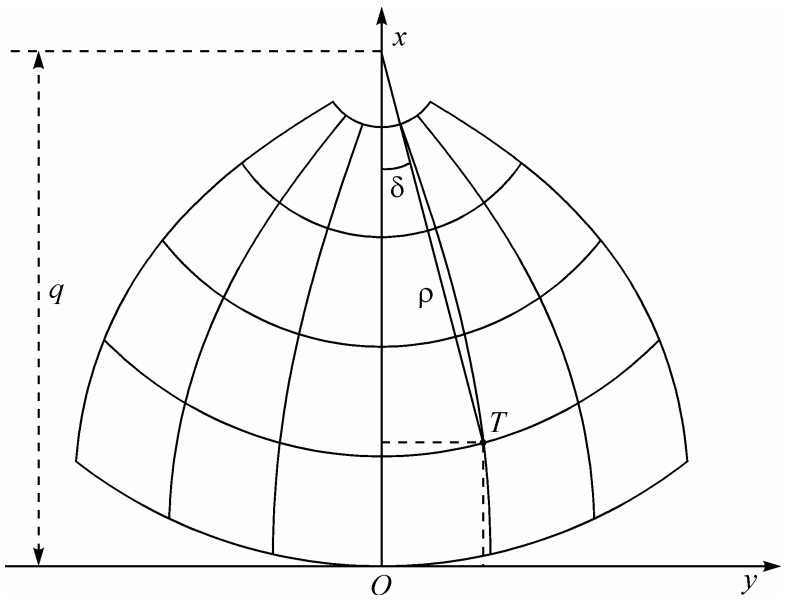
Slika 8.10. Projiciranje na valjak koji siječe Zemljinu sferu duž dviju paralela.

Među perspektivnim cilindričnim projekcijama, koje su našle veću primjenu u praksi ističe se Gallova projekcija. U toj projekciji točka promatranja nalazi se na površini sfere pa joj odatle i naziv Gallova stereografska projekcija, a valjak siječe sferu duž paralela sa širinom $\varphi_0 = \pm 45°$. Osnovne jednadžbe te projekcije glase (Solov'ev 1969, str. 147):

$$
\begin{aligned}
x &= (1+\cos\varphi_0) R \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \\
y &= \cos\varphi_0 (\lambda - \lambda_0), \\
n &= \cos\varphi_0 \sec\varphi, \quad m = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi_0)\sec^2\frac{\varphi}{2}, \\
p &= mn, \quad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{|m-n|}{m+n}.
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

9. PSEUDOKONUSNE PROJEKCIJE

U pseudokonusnim projekcijama meridijani uspravnih projekcija preslikavaju se kao krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica (sl. 9.1).



Slika 9.1. Pseudokonusna projekcija

Osnovne jednadžbe ovih projekcija jesu:

$$\rho = f_1(\varphi),$$

$$\delta = f_2(\varphi, \lambda),$$

$$q = konst.$$

$$x = q - \rho\cos\delta,$$

$$y = \rho\sin\delta, \tag{9.1}$$

$$m = -\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{\sec\varepsilon}{R},\quad n = \frac{\rho}{r}\frac{\partial\delta}{\partial\lambda},\quad p = mn\sin\theta,$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \rho\frac{\dfrac{\partial\delta}{\partial\varphi}}{\dfrac{d\rho}{d\varphi}},$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

9.1. Bonneova projekcija

Bonneova projekcija je pseudokonusna ekvivalentna projekcija u kojoj se sve paralele i srednji meridijan preslikavaju bez deformacija. Osim toga na paraleli sa širinom φ_0 nema ni deformacija kutova. Navedena svojstva izražena analitički glase:

$$p = 1, \quad n = 1, \quad m_0 = 1, \quad \omega_0 = 0. \tag{9.2}$$

Rigobert Bonne* je ovu projekciju predložio 1752. za kartu Francuske.

Budući da se srednji meridijan preslikava kao pravac i u pravoj veličini, možemo pisati:

$$m_0 = -\frac{d\rho}{Rd\varphi} = 1. \tag{9.3}$$

Predznak minus označuje da ρ i φ rastu u suprotnim smjerovima. Iz (9.3) slijedi

$$-d\rho = Rd\varphi$$

i

$$\rho = K - R\varphi, \tag{9.4}$$

gdje je K konstanta integracije.

Iz uvjeta da se paralele preslikavaju bez deformacija slijedi

$$n = \frac{\rho \partial\delta}{r\partial\lambda} = 1,$$

odakle je

$$\partial\delta = \frac{r}{\rho}\partial\lambda$$

i

$$\delta = \frac{r}{\rho}(\lambda - \lambda_0), \tag{9.5}$$

a konstanta integracije je nula ako os x postavimo na srednji meridijan.

Do formule za mjerilo po meridijanima doći ćemo iz izraza:

$$p = mn\sin\theta = 1.$$

Uvrstimo

$$n = 1$$

pa je

$$m = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin(90° - \varepsilon)}$$

---

* Rigobert Bonne (1727-1795), francuski inženjer hidrograf.

i konačno

$$m = \sec \varepsilon . \tag{9.6}$$

Iz formule (9.1) slijedi (v. Borčić 1955, str. 51 i 289-292)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = (\lambda - \lambda_0)(\sin \varphi - \frac{r}{\rho}) . \tag{9.7}$$

Budući da je $\omega_0 = 0$, to je na toj paraleli $\varepsilon = 0$ i $\operatorname{tg} \varepsilon = 0$. Iz (9.7) dobiva se

$$\sin \varphi_0 - \frac{r_0}{\rho_0} = 0$$

i nakon uvrštavanja $r_0 = R \cos \varphi_0$

$$\rho_0 = R \operatorname{ctg} \varphi_0 . \tag{9.8}$$

Iz (9.4) slijedi

$$K = \rho_0 + R\varphi_0$$

i

$$K = R(\operatorname{ctg} \varphi_0 + \varphi_0) \tag{9.9}$$

pa je konačna formula za ρ

$$\rho = R(\operatorname{ctg} \varphi_0 + \varphi_0 - \varphi) . \tag{9.10}$$

Kartografske jednadžbe i izrazi za računanje mjerila i deformacija u Bonneovoj projekciji jesu

$$y = \rho \sin \delta ,$$

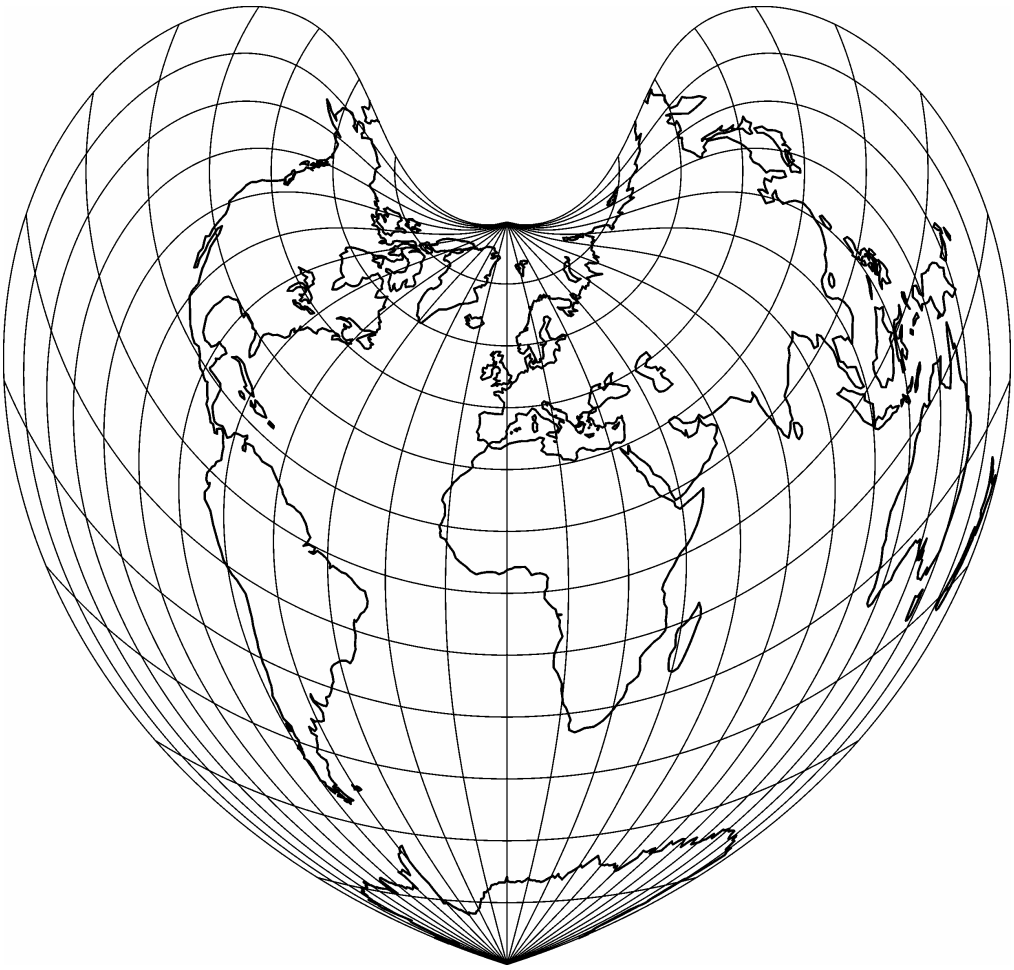
$$x = q - \rho \cos \delta , \quad q = \rho_j ,$$

$$\rho = R(\operatorname{ctg} \varphi_0 + \varphi_0 - \varphi) , \quad \delta = \frac{r}{\rho}(\lambda - \lambda_0) , \tag{9.11}$$

$$m = \sec \varepsilon , \quad n = 1 , \quad p = 1 ,$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} , \quad \operatorname{tg} \varepsilon = (\lambda - \lambda_0)(\sin \varphi - \frac{r}{\rho}) .$$

Karta svijeta u Bonneovoj projekciji dana je na sl. 9.2.

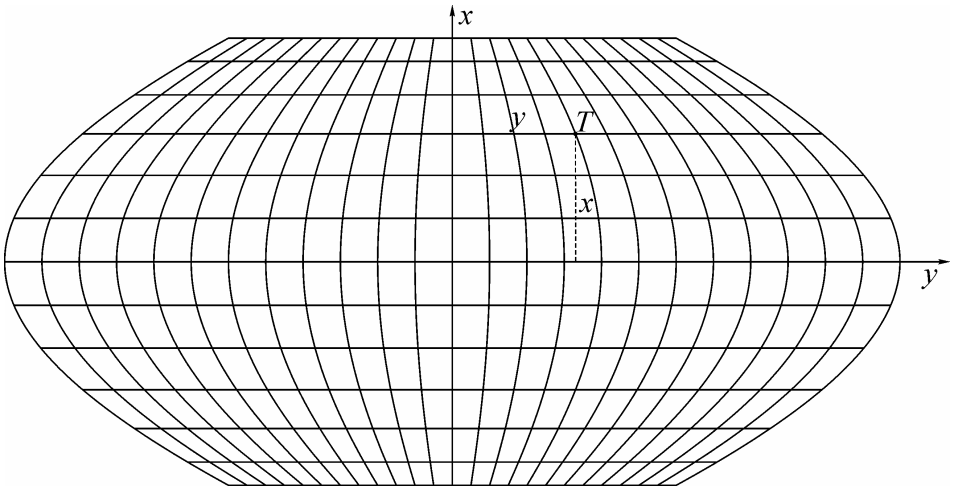


Slika 9.2. Bonneova projekcija

Bonneova projekcija mnogo se upotrebljavala i za karte kontinenata. Budući da su u toj projekciji deformacije kutova mnogo veće nego u ekvivalentnoj azimutalnoj projekciji to se azimutalna projekcija danas gotovo isključivo upotrebljava za karte kontinenata. Na sl. 18.2b prikazana je Sjeverna Amerika u ekvivalentnoj azimutalnoj projekciji, a na sl. 18.2a u Bonneovoj projekciji. Po kutovima pod kojima se sijeku meridijani i paralele na pojedinim dijelovima karte u Bonneovoj projekciji prostim su okom uočljive velike deformacije kutova.

10. PSEUDOCILINDRIČNE PROJEKCIJE

U pseudocilindričnim projekcijama meridijani uspravnih projekcija preslikavaju se kao krivulje simetrične prema srednjem meridijanu koji se preslikava kao pravac, a paralele se preslikavaju kao međusobno paralelni pravci okomiti na srednji meridijan (sl. 10.1).



Slika 10.1. Pseudocilindrična projekcija

Osnovne jednadžbe jesu:

$$x = f_1(\varphi),$$

$$y = f_2(\varphi, \lambda),$$

$$m = \frac{dx}{d\varphi}\frac{\sec\varepsilon}{R}, \quad n = \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \tag{10.1}$$

$$p = mn\sin\theta, \quad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

10.1. Sansonnova projekcija

Sansonnova projekcija je ekvivalentna sinusoidalna pseudocilindrična projekcija u kojoj se sve paralele i srednji meridijan preslikavaju u pravoj veličini, tj:

$$p = 1, \quad n = 1, \quad m_0 = 1. \tag{10.2}$$

Budući da se srednji meridijan preslikava kao pravac, u pravoj veličini možemo pisati, uz pretpostavku da Zemlju smatramo sferom,

$$m_0 = \frac{dx}{Rd\varphi} = 1,$$

odakle je

$$dx = Rd\varphi$$

i

$$x = R\varphi + K\,.$$

Postavimo li os y u ravninu ekvatora to je:

$$\varphi = 0 \quad \text{i} \quad x = 0\,,\ \text{pa slijedi i}\ K = 0\,,$$

a

$$x = R\varphi\,. \tag{10.3}$$

Za mjerilo duž paralela možemo pisati:

$$n = \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 1\,,$$

odakle je

$$\partial y = r\partial\lambda$$

i (10.4)

$$y = r(\lambda - \lambda_0)$$

ili

$$y = R(\lambda - \lambda_0)\cos\varphi\,. \tag{10.5}$$

Iz izraza

$$p = mn\sin\theta = 1$$

slijedi ($n = 1$):

$$m = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin(90° - \varepsilon)} = \frac{1}{\cos\varepsilon}$$

$$m = \sec\varepsilon\,. \tag{10.6}$$

Kut ε računamo po formuli:

$$tg\varepsilon = -\frac{F}{H}\,,$$

gdje su:

$$F = -R^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot(\lambda - \lambda_0)\,,$$

$$H = R^2\cos\varphi\,,$$

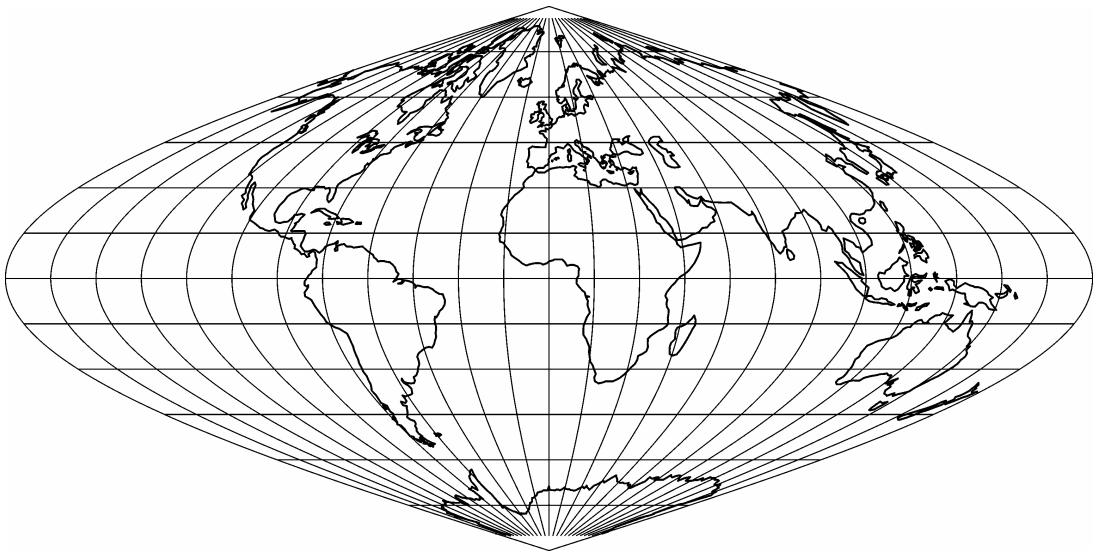
pa slijedi

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi\,.$$

Prema tome, osnovne kartografske jednadžbe i izrazi za računanje mjerila i deformacija u Sansonnovoj projekciji jesu

$$\begin{gathered} x = R\varphi\,, \\ y = R(\lambda - \lambda_0)\cos\varphi \\ m = \sec\varepsilon\,,\quad n = 1\,,\quad p = 1\,, \\ \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}\,,\quad \operatorname{tg}\varepsilon = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi\,. \end{gathered} \tag{10.7}$$

Mreža meridijana i paralela i konture svijeta u Sansonnovoj projekciji dani su na sl. 10.2.



Slika 10.2. Sansonnova projekcija

10.2. Mollweideova projekcija

Mollweideova projekcija je ekvivalentna pseudocilindrična projekcija u kojoj se svi meridijani preslikavaju kao elipse osim srednjeg meridijana i meridijana duljine

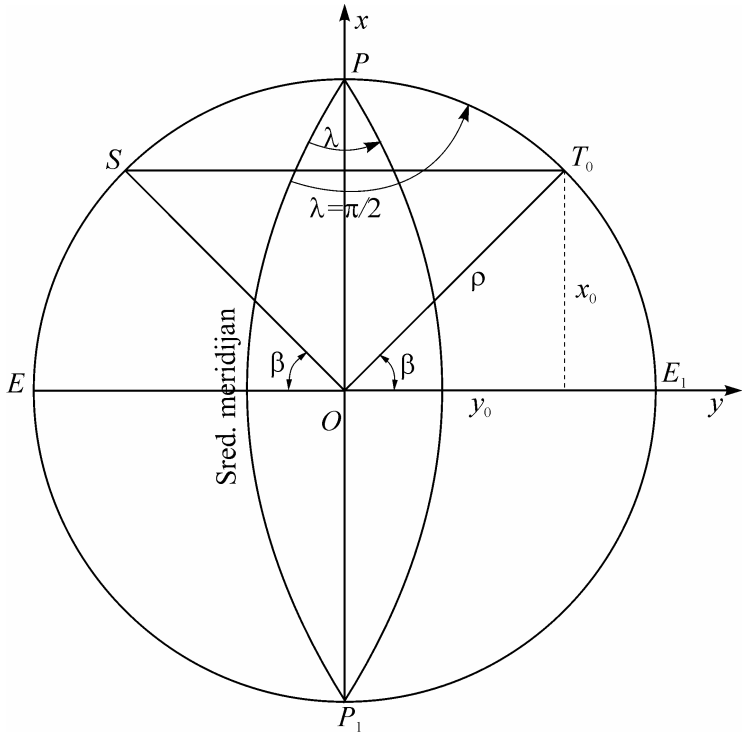
$$\lambda = \pm\frac{\pi}{2}\,.$$

Srednji meridijan preslikava se kao pravac, a meridijan koji je udaljen za 90° od srednjeg meridijana kao kružnica čija je površina jednaka površini Zemljine polusfere (sl. 10.3):

$$\rho^2\pi = 2R^2\pi\,,$$

odakle je

$$\rho = R\sqrt{2}\,. \tag{10.8}$$



Slika 10.3. Meridijan duljine $\lambda = \pm 90°$ preslikava se u Mollweidovoj projekciji kao kružnica

Sa slike 10.3 vidimo da su pravokutne koordinate neke točke T_0, koja se nalazi na meridijanu s duljinom $\lambda = 90°$, određene jednadžbama:

$$x_0 = \rho \sin \beta ,$$
$$y_0 = \rho \cos \beta . \tag{10.9}$$

Budući da se u Mollweidovoj projekciji paralele preslikavaju kao pravci paralelni ekvatoru, to su za dani kut β sve apscise jednake, tj.

$$x = R\sqrt{2} \cdot \sin \beta . \tag{10.10}$$

Do izraza za računanje ordinata doći ćemo iz omjera

$$y_0 : y = \frac{\pi}{2} : \lambda$$

odakle je

$$y = \frac{2 y_0 \lambda}{\pi}$$

i uvrštavanjem y_0 iz (10.9) i ρ iz (10.8) dobiva se

$$y = \frac{2R\sqrt{2} \cdot \cos \beta \cdot \lambda}{\pi} \tag{10.11}$$

Da bismo odredili odnos između kuta β i geografske širine φ, poslužit ćemo se uvjetom ekvivalentnosti. Prema tome uvjetu površina lika SEE_1T_0 (sl. 10.3) treba biti jednaka površini kuglina pojasa između ekvatora i paralele sa širinom φ, čija je projekcija dužina ST_0. Označimo površinu trokuta OST_0 s P_t, a površinu kružnog isječka OT_0E_1 s P_i, to je

$$P_t + 2P_i = R^2\pi\sin\varphi\,. \tag{10.12}$$

Iz sl. 10.3 vidi se da je visina trokuta OST_0

$$v = \rho\sin\delta\,,$$

a baza trokuta

$$b = 2\rho\cos\delta\,,$$

pa je njegova površina

$$P_t = \frac{2\rho^2\sin\beta\cos\beta}{2} = \frac{\rho^2\sin 2\beta}{2}\,. \tag{10.13}$$

Površina kružnog isječka OT_0E_1 je

$$P_i = \frac{\rho^2\beta}{2} \tag{10.14}$$

pa uvrštavanjem (10.13) i (10.14) u (10.12) izlazi

$$\frac{\rho^2\sin 2\beta}{2} + \rho^2\beta = R^2\sin\varphi\,.$$

Uvrstili se još prema (10.8)

$$\rho = R\sqrt{2}$$

izlazi

$$\sin 2\beta + 2\beta = \pi\sin\varphi\,. \tag{10.15}$$

Ovu jednadžbu možemo riješiti nekom od približnih metoda. Poslužit ćemo se Newtonovim postupkom. Prema tom postupku ako za jednadžbu $f(x) = 0$ znamo približnu vrijednost x_0 tada ćemo bolje približenje dobiti po jednadžbi

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,. \tag{10.16}$$

Ako dobivena vrijednost nije dovoljno točna stavimo $x_0 = x_1$ i postupak nastavljamo.

U našem primjeru bit će:

$$f(\beta_0) = \pi \sin\varphi - \sin 2\beta_0 - 2 - \beta_0 ,$$
$$f'(\beta_0) = -2\cos 2\beta_0 - 2 . \tag{10.17}$$

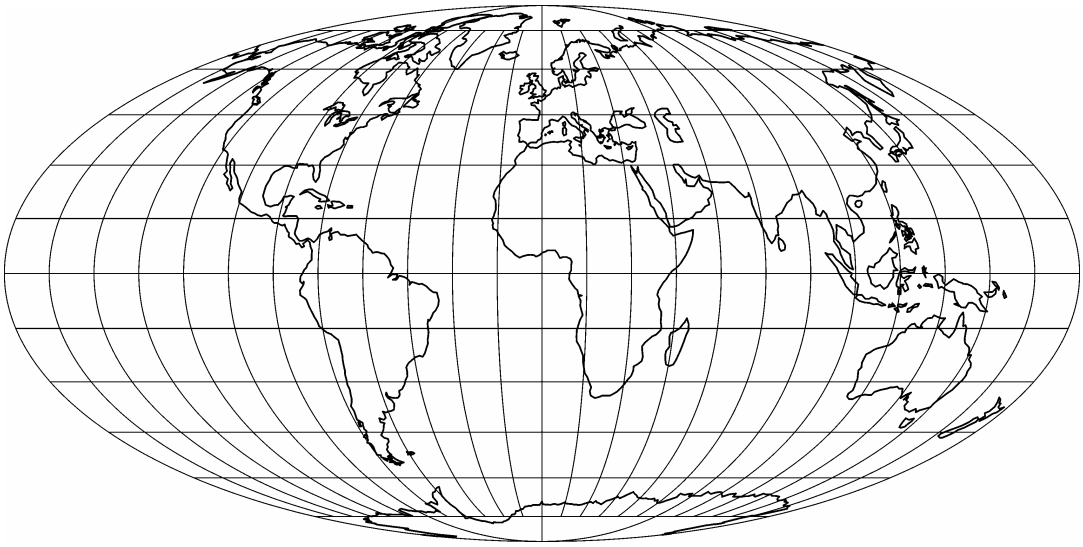
a za prvo približenje ćemo uzeti

$$\beta_0 = \varphi .$$

Kartografske jednadžbe Mollweideove projekcije, prema tome, jesu

$$x = R\sqrt{2}\sin\beta ,$$
$$y = \frac{2R\sqrt{2}\cdot(\lambda - \lambda_0)\cos\beta}{\pi} ,$$
$$\sin 2\beta + 2\beta = \pi \sin\varphi .$$

Mjerila i deformacije u ovoj projekciji možemo računati po općim izrazima datim u §4.2. Mreža meridijana i paralela i konture svijeta u Mollweideovoj projekciji dani su na sl. 10.4.



Slika 10.4. Mollweideova projekcija

10.3. Eckertove projekcije

Njemački kartograf Max Eckert predložio je početkom ovog stoljeća šest novih pseudocilindričnih projekcija za izradu karata svijeta. Projekcije su poznate pod nazivom Eckertove projekcije I-VI. U svih šest projekcija pol se preslikava kao linija upola kraća od ekvatora. U prve dvije projekcije meridijani su izlomljeni na ekvatoru. To im je najveći nedostatak, pa se u praksi ne primjenjuju. Za izradu karata svijeta mogu se preporučiti Eckertove projekcije III, IV, V, VI (Frančula, 1968).

10.3.1. Eckertova projekcija III

Po osobinama preslikavanja Eckertova projekcija III je uvjetna projekcija. Meridijani su lukovi elipsa, a čitava površina preslikanog područja jednaka je površini kugle.

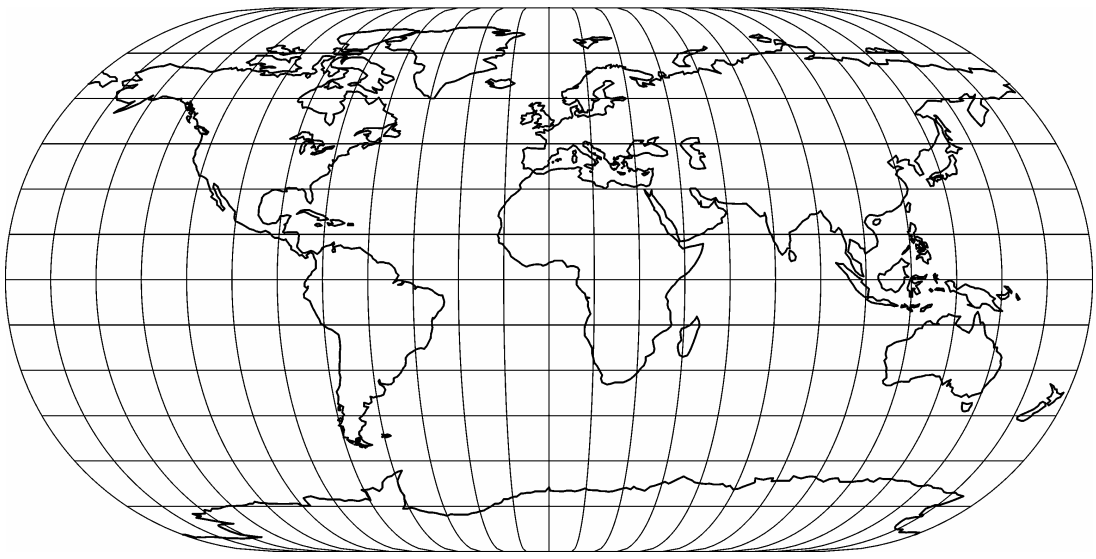
Osnovne jednadžbe ove projekcije jesu:

$$x = \frac{4R\varphi}{\sqrt{\pi(4+\pi)}},$$
$$y = \frac{2R(\lambda-\lambda_0)}{\sqrt{\pi(4+\pi)}}\left(1+\frac{1}{\pi}\sqrt{\pi^2-4\varphi^2}\right). \tag{10.18}$$

Parcijalne derivacije potrebne za računanje deformacija, uz pretpostavku $R=1$, jesu:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{4}{\sqrt{\pi(4+\pi)}}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{-8\varphi\lambda}{\pi\sqrt{\pi(4+\pi)\,(\pi^2-4\varphi^2)}}, \tag{10.19}$$
$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{2}{\sqrt{\pi(4+\pi)}}\left(1+\frac{1}{\pi}\sqrt{\pi^2-4\varphi^2}\right).$$

Karta svijeta u ovoj projekciji dana je na sl. 10.5.



Slika 10.5. Eckertova projekcija III

10.3.2. Eckertova projekcija IV

Projekcija je ekvivalentna. Meridijani su lukovi elipsa, osim graničnog meridijana koji je kružnica. Pravokutne koordinate u ovoj projekciji određene su jednadžbama

$$x = R\sin\beta\cdot\sqrt{\frac{\pi}{4+\pi}},$$
$$y = \frac{2R(\lambda-\lambda_0)(1+\cos\beta)}{\sqrt{\pi(4+\pi)}}. \tag{10.20}$$

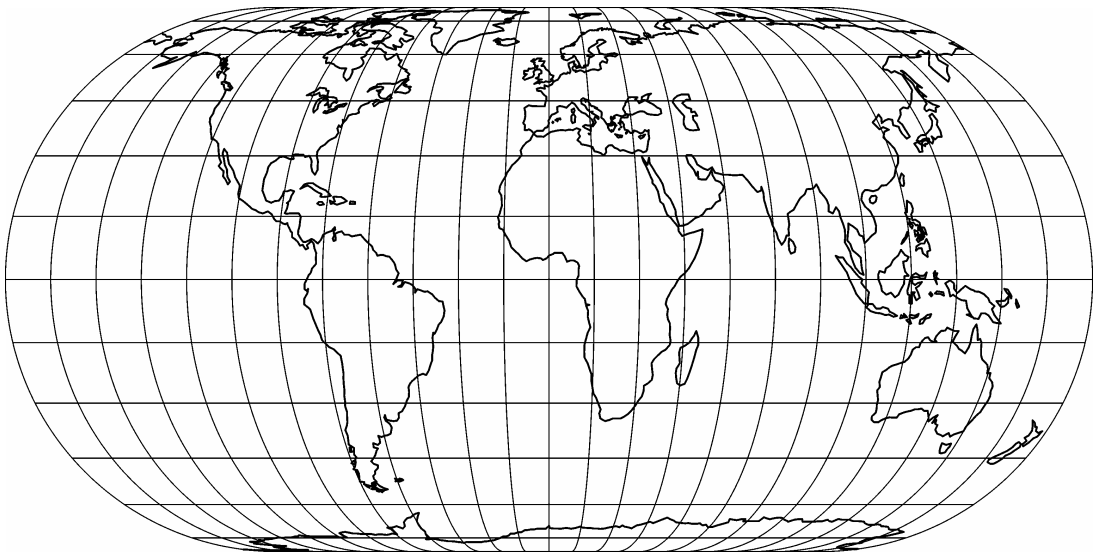
Kut β određuje se metodom postepenog približavanja iz jednadžbe

$$(4+\pi)\sin\varphi = 2\beta + 4\sin\beta + \sin 2\beta. \tag{10.21}$$

Parcijalne derivacije potrebne za računanje deformacija, uz pretpostavku $R=1$, jesu:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\pi(4+\pi)}}{4\cos^2\frac{\beta}{2}},\quad \frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{-\lambda(4+\pi)\,\mathrm{tg}\,\beta\cos\varphi}{4\cos^2\frac{\beta}{2}\sqrt{\pi(4+\pi)}},\quad \frac{\partial y}{\partial\lambda} = \frac{2(1+\cos\beta)}{\sqrt{\pi(4+\pi)}}. \tag{10.22}$$

Karta svijeta u ovoj projekciji dana je na sl. 10.6.



Slika 10.6. Eckertova projekcija IV

10.3.3. Eckertova projekcija V

Po osobinama preslikavanja Eckertova projekcija V je uvjetna. Površina čitavog preslikanog područja jednaka je površini kugle. Meridijani su lukovi sinusoida. Projekcija se može dobiti kao artimetička sredina između Sansonnove projekcije i uspravne ekvidistantne cilindrične projekcije.

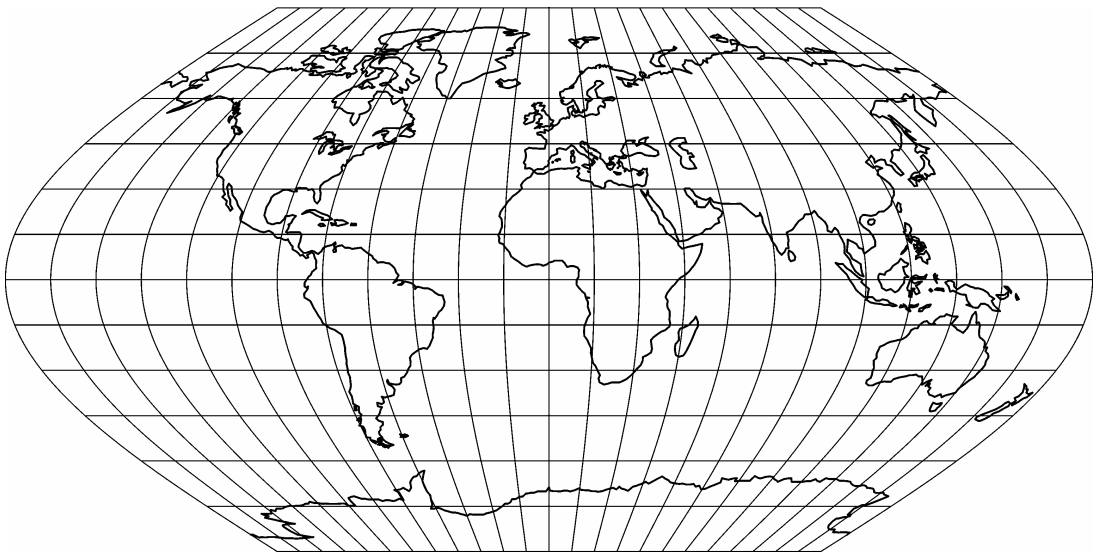
Jednadžbe projekcije jesu:

$$x = \frac{2R\varphi}{\sqrt{\pi + 2}},$$
$$y = \frac{R(\lambda - \lambda_0)(1 + \cos\varphi)}{\sqrt{\pi + 2}}. \tag{10.23}$$

Parcijalne derivacije potrebne za računanje deformacija, uz pretpostavku $R = 1$, jesu:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{2}{\sqrt{\pi + 2}}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\lambda \sin\varphi}{\sqrt{\pi + 2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{1 + \cos\varphi}{\sqrt{\pi + 2}}. \tag{10.24}$$

Karta svijeta u ovoj projekciji dana je na sl. 10.7.



Slika 10.7. Eckertova projekcija V

10.3.4. Eckertova projekcija VI

Projekcija je ekvivalentna, a meridijani su lukovi sinusoida. Osnovne jednadžbe ove projekcije jesu:

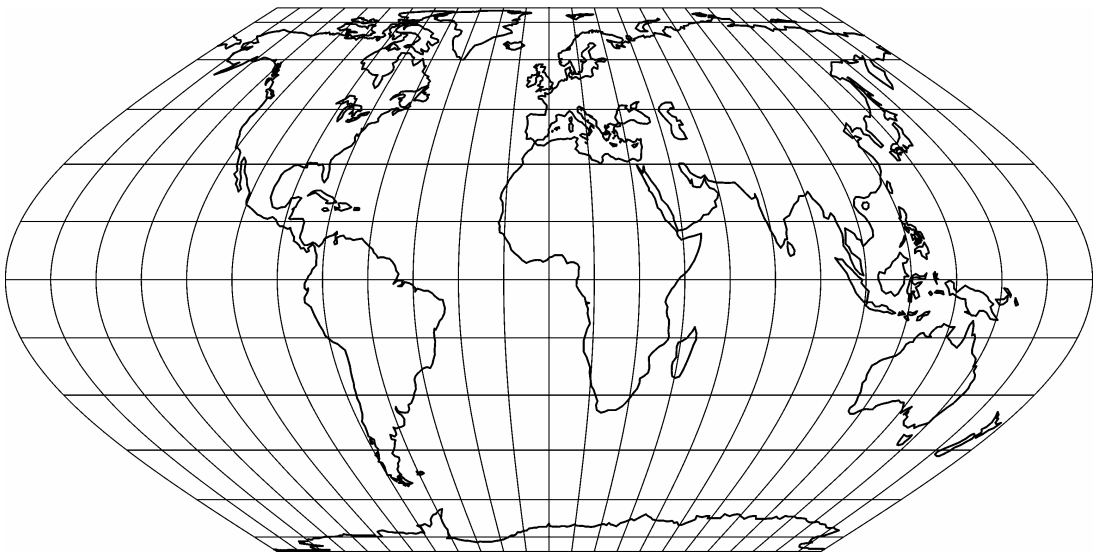
$$x = \frac{2R\beta}{\sqrt{\pi + 2}},$$
$$y = \frac{R(\lambda - \lambda_0)(1 + \cos\beta)}{\sqrt{\pi + 2}}, \tag{10.25}$$

$$\frac{\pi + 2}{2}\sin\varphi = \beta + \sin\beta. \tag{10.26}$$

Kut β određuje se iz jednadžbe (10.26) metodom postepenog približavanja.

Parcijalne derivacije potrebne za računanje deformacija, uz pretpostavku $R = 1$, jesu:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{(\pi + 2)\cos\varphi}{(1 + \cos\beta)\sqrt{\pi + 2}},\cdot \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\lambda \sin\beta\cos\varphi(\pi + 2)}{2(1 + \cos\beta)\sqrt{\pi + 2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{1 + \cos\beta}{\sqrt{\pi + 2}}. \tag{10.27}$$



Slika 10.8. Eckertova projekcija VI

10.4. Pseudocilindrične projekcije Kavrajskog

10.4.1. Ekvivalentna sinusoidalna pseudocilindrična projekcija Kavrajskog

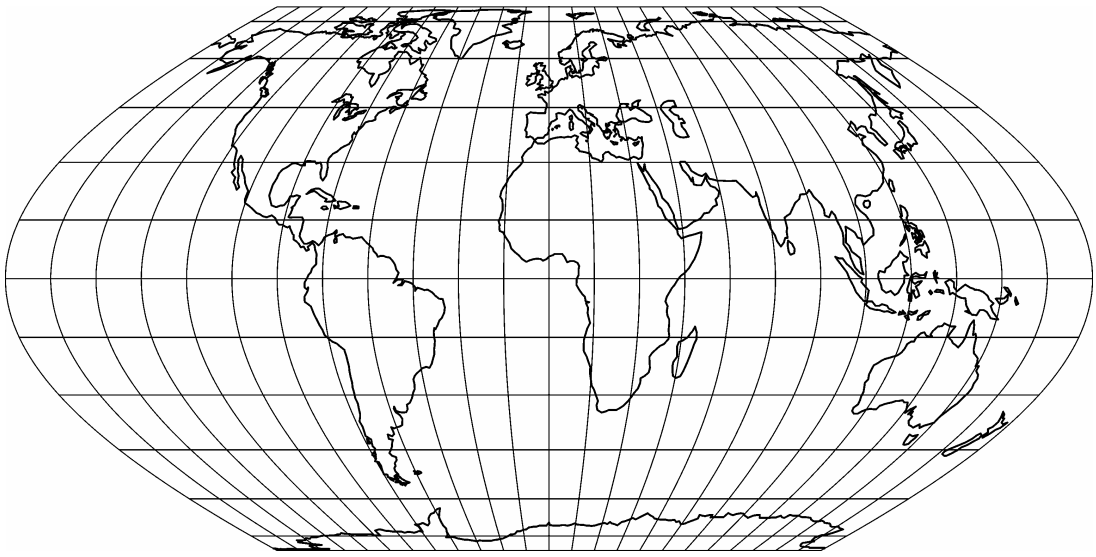
Kavrajski je 1936. godine predložio za izradu karata svijeta ekvivalentnu sinusoidalnu pseudocilindričnu projekciju. Osnovne jednadžbe te projekcije glase (Graur, 1956):

$$x = R\sqrt[4]{3}\beta\,,$$

$$y = \frac{2R}{3}\sqrt[4]{3}(\lambda - \lambda_0)\cos\beta\,, \tag{10.28}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\,.$$

Pol se u toj projekciji preslikava kao linija duljine jednake polovici ekvatora. Projekcija je i po obliku mreže meridijana i paralela (sl. 10.9) i po veličinama i rasporedu deformacija vrlo slična Eckertovoj VI. projekciji.



Slika 10.9. Ekvivalentna sinusoidalna pseudocilindrična projekcija Kavrajskog

Parcijalne derivacije potrebne za računanje deformacija, uz pretpostavku $R = 1$, jesu:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\varphi}}\,, \quad \frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0\,,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{-2\sqrt[4]{3}\lambda\sin\beta}{3\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\varphi}}\,, \quad \frac{\partial y}{\partial\lambda} = \frac{2\sqrt[4]{3}}{3}\cos\beta\,. \tag{10.29}$$

10.4.2. Eliptična pseudocilindrična projekcija Kavrajskog

Projekcija spada u grupu uvjetnih projekcija. Ima sljedeća svojstva:

1. srednji meridijan preslikava se u pravoj veličini,
2. meridijan s duljinom $\lambda = \pm 120°$ preslikava se kao kružnica,
3. meridijani se preslikavaju kao elipse i dijele paralele na jednake dijelove
4. polovi se preslikavaju kao linije, čija je duljina jednaka polovici duljine ekvatora (sl. 10.10).

Osnovne jednadžbe ove projekcije glase (Graur, 1956):

$$x = R\varphi\,,$$

$$y = \frac{R\sqrt{3}}{2}(\lambda - \lambda_0)\cos\beta\,, \tag{10.30}$$

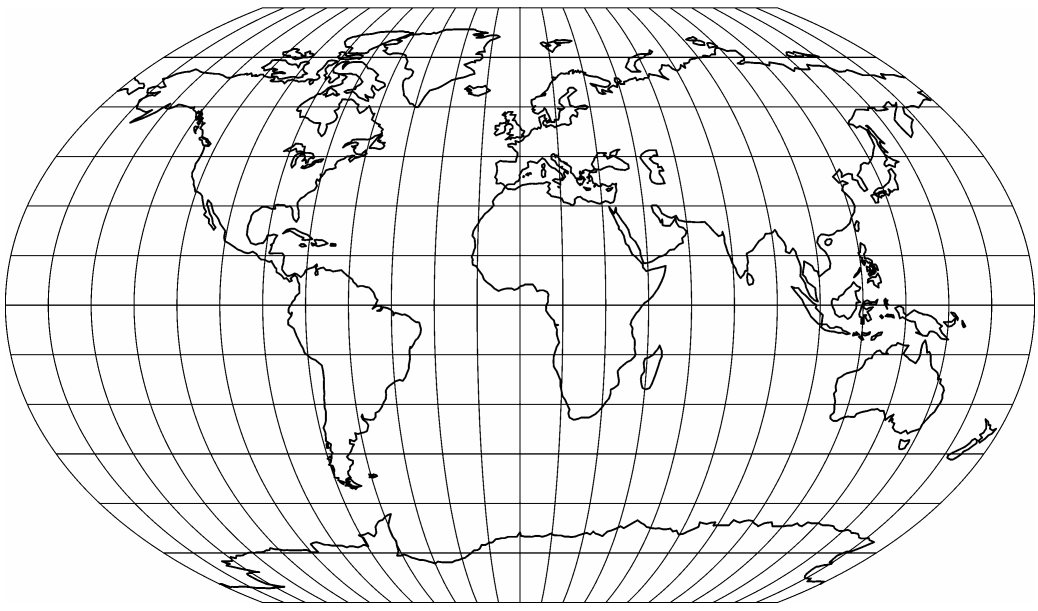
$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\varphi\,.$$

Parcijalne derivacije potrebne za računje deformacija, uz pretpostavku $R = 1$, jesu:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 1\,, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0\,,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{-3\lambda\sin\beta}{2\sqrt{\pi^2 - 3\varphi^2}}\,, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta\,. \tag{10.31}$$

Karta svijeta u ovoj projekciji dana je na sl. 10.10.



Slika 10.10. Eliptična pseudocilindrična projekcija Kavrajskog

10.5. Goodeove modifikacije pseudocilindričnih projekcija

Među načinima dvodimenzionalnog prikaza sferne Zemljne površine prekinuti prikazi pojavljivali su se kontinuirano kroz stoljeća. Iako su se rano pojavili i imali široku primjenu nisu istraženi toliko koliko zaslužuju.

Oko četiri stoljeća prekinute projekcije karakterizirala je simetričnost prikaza. Nasuprot tome danas prevladavaju nesimetrične projekcije. Do sada se obično P. Goode smatrao pronalazačem nesimetričnih prekinutih projekcija. Dahlberg (1962) pokazuje da je Goode prije dobar advokat nego pronalazač tih projekcija.

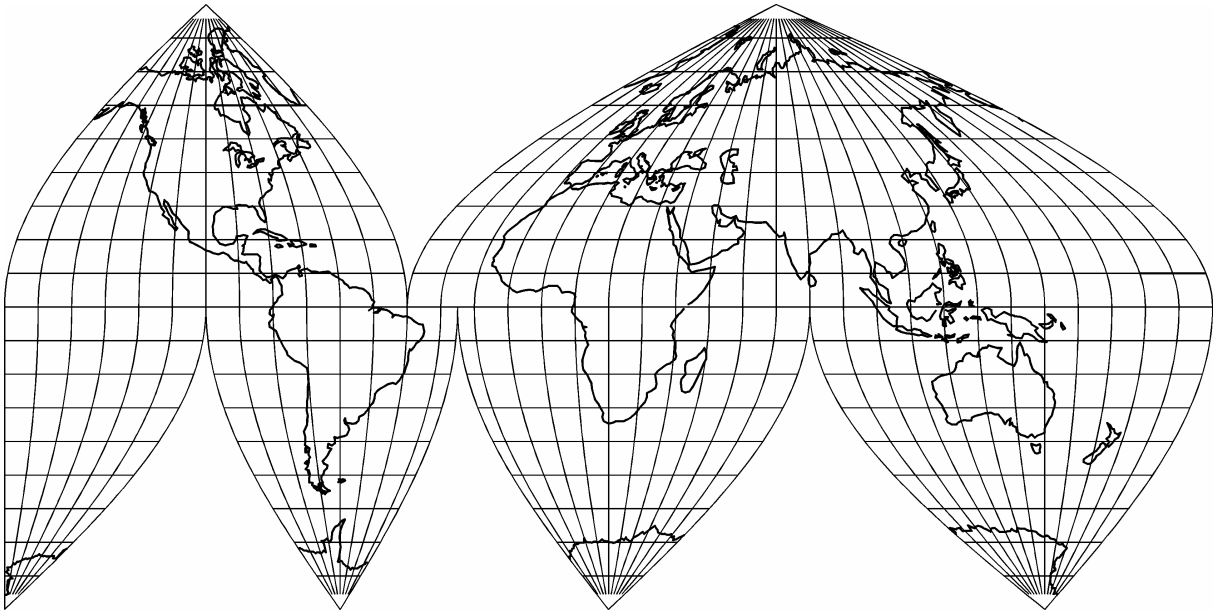
Početkom ovog stoljeća za izradu karata svijeta mnogo su se upotrebljavale Sansonnova i Mollweideova projekcija. U tim projekcijama deformacije u nekim područjima vrlo su velike i to je veliki nedostatak tih projekcija. Deformacije se mogu smanjiti, dopustimo li da se pol preslika u liniju, manju od duljine ekvatora. Amerikanac Paul Goode predložio je 1916. drugi način smanjivanja deformacija u pseudocilindričnim projekcijama. Po tom načinu bilo koju pseudocilindričnu projekciju koristi se za izradu karata cijelog svijeta po pojedinim dijelovima koji su povezani jedino duž ekvatoora. Za svaki dio izabire se poseban srednji meridijan. Njegovu duljinu treba izabrati tako da bi na tom području deformacije bile što manje. Obično se biraju srednji meridijani za pojedine kontinente sa sljedećim duljinama:

PODRUČJE	λ_0
Sjeverna Amerika	–100°
Južna Amerika	–60°
Euroazija	+60°
Afrika	+20°
Australija	+150°

Na taj način prikaz je prekinut duž oceana pa se takve projekcije nazivaju prekinute projekcije.

Takva modifikacija može se primijeniti na bilo koju pseudocilindričnu projekciju. Koordinate pravokutne mreže računaju se po formulama projekcije.

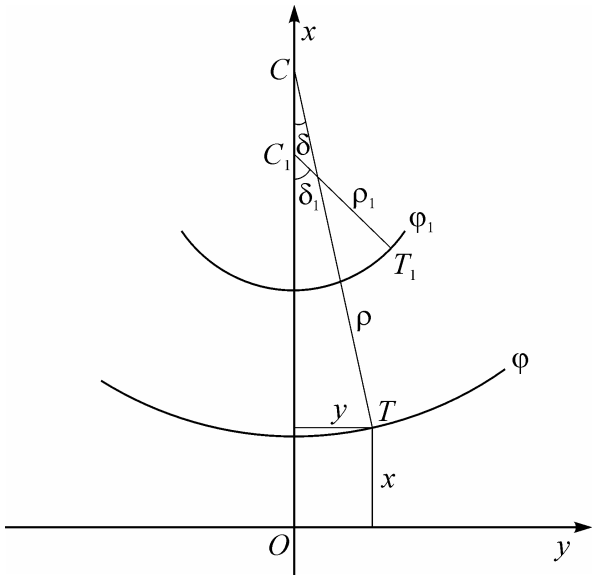
Prednost prekinutih projekcija jesu male deformacije na području kontinenata, a njihov nedostatak prekinutost prikaza (sl. 10.11).



Slika 10.11. Goodeova modifikacija Sansonnove projekcije

11. POLIKONUSNE PROJEKCIJE

U polikonusnim projekcijama meridijani uspravnih projekcija preslikavaju se kao krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac, paralele se preslikavaju kao ekscentrične kružnice čija se središta nalaze na srednjem meridijanu (sl. 11.1).



Slika 11.1. Polikonusna projekcija

Opće jednadžbe polikonusnih projekcija imaju ovaj oblik:

$$\begin{gathered} \rho = f_1(\varphi), \quad \delta = f_2(\varphi, \lambda), \\ q = f_3(\varphi), \\ x = q - \rho\cos\delta, \quad y = \rho\sin\delta. \end{gathered} \tag{11.1}$$

11.1. Jednostavna (američka) polikonusna projekcija

U ovoj projekciji mjerilo duž srednjeg meridijana i duž sviju paralela jednako je jedinici:

$$m_0 = 1, \quad n = 1.$$

Kod polikonusnih projekcija polumjere paralela računamo po formuli:

$$\rho = R\,\mathrm{ctg}\,\varphi. \tag{11.2}$$

što u geometrijskoj interpretaciji znači da su polumjeri jednaki izvodnicama konusa koji tangiraju sferu po tim paralelama.

Budući da je srednji meridijan pravac i da se preslikava u pravoj veličini, bit će:

$$q = R(\varphi + \mathrm{ctg}\,\varphi). \tag{11.3}$$

Budući da su paralele kružnice, za mjerilo n možemo pisati:

$$n = \frac{\rho \partial \delta}{r \partial \lambda} = 1$$

odakle je

$$\partial \delta = \frac{r}{\rho} \partial \lambda$$

i

$$\delta = \frac{r}{\rho}(\lambda - \lambda_0). \tag{11.4}$$

Uvrstimo li u (11.4) izraze za r ($r = R\cos\varphi$) i ρ (11.2) bit će:

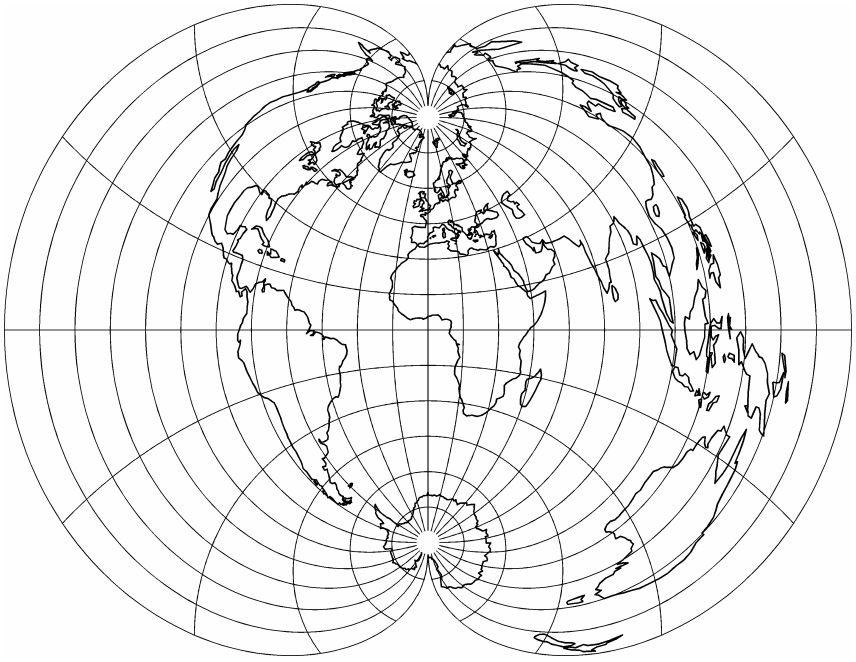
$$\delta = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi. \tag{11.5}$$

Kartografske jednadžbe jednostavne polikonusne projekcije, prema tome, jesu

$$\begin{gathered} x = q - \rho\cos\delta \\ y = \rho\sin\delta, \\ \rho = R\,\mathrm{ctg}\,\varphi, \quad \delta = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi, \\ q = R(\varphi + \mathrm{ctg}\,\varphi). \end{gathered} \tag{11.6}$$

Jednostavna polikonusna projekcija mnogo se upotrebljavala za izradu topografskih karata u Sjedinjenim Američkim Državama, pa se zbog toga često naziva i američkom projekcijom.

Mreža meridijana i paralela i konture svijeta u jednostavnoj polikonusnoj projekciji dani su na sl. 11.2.



Slika 11.2. Jednostavna polikonusna projekcija

12. KRUŽNE PROJEKCIJE

Projekcije u kojima se meridijani i paralele preslikavaju kao kružnice nazivaju se kružne projekcije. Najpoznatija u toj grupi projekcije je Van der Grintenova projekcija.

12.1. Van der Grintenova projekcija

Po svojstvima preslikavanja Van der Grintenova projekcija ubraja se u grupu uvjetnih projekcija. Meridijani se preslikavaju kao kružnice simetrične u odnosu na srednji meridijan, koji se preslikava kao pravac. Paralele su također kružnice simetrične u odnosu na ekvator, koji se preslikava kao pravac. Čitava Zemljina kugla preslikava se unutar kružnice polumjera $k = \pi R$, gdje je R polumjer Zemljine kugle (sl. 12.1).

Alphons Van der Grinten opisao je grafički način konstrukcije projekcije, koja danas nosi njegovo ime, u patentnoj specifikaciji iz 1904. godine (O'Keefe, Greenberg 1977).

Za računanje pravokutnih koordinata y i x u toj projekciji izvelo je više autora formule različitog oblika. Najprikladnije za računanje elektroničkim računalima jesu formule koje je izveo Snyder (1979):

$$y = \frac{\pm R\pi\left[d(g-u^2) + \sqrt{d^2(g-u^2)^2 - (u^2+d^2)(g^2-u^2)} \right]}{u^2+d^2},$$

$$x = \frac{\pm R\pi\left[uv - d\sqrt{(d^2+1)(u^2-d^2) - v^2} \right]}{u^2+d^2}, \tag{12.1}$$

gdje su

$$d = \frac{1}{2}\left| \frac{180^\circ}{\lambda-\lambda_0} - \frac{\lambda-\lambda_0}{180^\circ} \right|,$$

$$\sin\theta = \left| \frac{\varphi}{90^\circ} \right|,$$

$$g = \frac{\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta - 1}, \tag{12.2}$$

$$u = g\left(\frac{2}{\sin\theta} - 1 \right),$$

$$v = d^2 + g\,.$$

Po formulama (12.1) nije moguće računati pravokutne koordinate za $\varphi = 0^\circ$, $\lambda - \lambda_0 = 0^\circ$ i $\varphi = \pm 90^\circ$ jer se dobiju neodređeni izrazi. Za te slučajeve vrijede ove formule:

$$\begin{aligned}
&\text{za } \varphi = 0: \quad y = \pm R(\lambda - \lambda_0), \quad x = 0, \\
&\text{za } \lambda - \lambda_0 = 0: \quad y = 0, \quad x = \pm R\pi \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \\
&\text{za } \varphi = \pm 90°: \quad y = 0, \quad x = \pm R\pi.
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Za apscise x uzima se predznak od φ, a za ordinate y predznak od λ. Kutovi φ i λ dani su u stupnjevima.

Slika 12.1 Van der Grintenova projekcija

Van der Grintenova projekcija mnogo se upotrebljava za izradu političkih karata svijeta, iako za tu svrhu zbog velikih deformacija površina nije prikladna. Npr. Grönland je tri puta manji od Australije, a u Van der Grintenovoj je projekciji veći od Australije (sl. 12.1).

13. MJEŠOVITE PROJEKCIJE

Mješovitim projekcijama nazivaju se projekcijie dobivene kombinacijom dviju ili više kartografskih projekcija. Najpoznatija u toj grupi projekcija je Winkelova (trostruka) projekcija.

13.1. Winkelova projekcija

O. Winkel predložio je ovu projekciju za izradu karata svijeta 1913. godine. Ta projekcija dobije se kao aritmetička sredina između Aitovljeve i uspravne ekvidistantne cilindrične projekcije (Winkel, 1921).

Osnovne kartografske jednadžbe Aitovljeve projekcije (v. 7.6.1) jesu:

$$\begin{aligned} x &= Rz\cos\alpha\,, \\ y &= 2Rz\sin\alpha\,, \end{aligned} \tag{13.1}$$

a jednadžbe ekvidistantne cilindrične projekcije (v. 8.3)

$$\begin{aligned} x &= R\varphi\,, \\ y &= R(\lambda-\lambda_0)\cos\varphi_0\,. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Iz aritmetičke sredine vrijednosti za x i y tih dviju projekcija dobije se

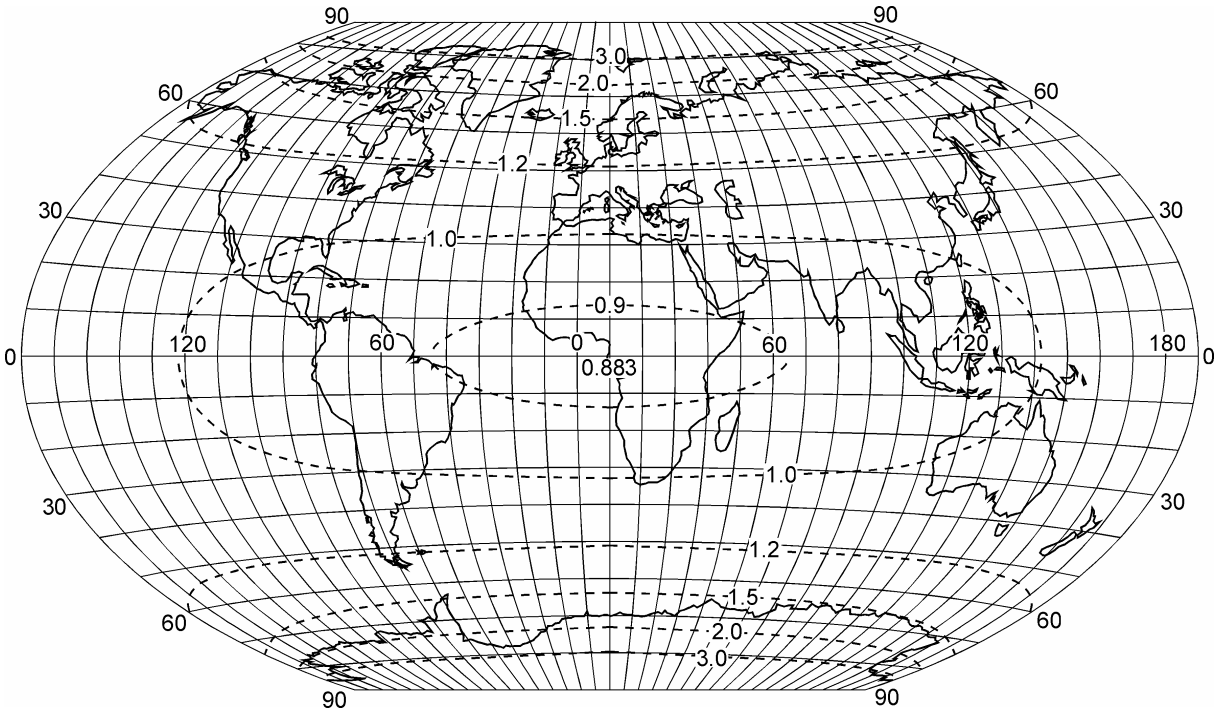
$$\begin{aligned} x &= \frac{R(\varphi + z\cos\alpha)}{2}\,, \\ y &= \frac{R((\lambda-\lambda_0)\cos\varphi_0 + 2z\sin\alpha)}{2}\,. \end{aligned} \tag{13.3}$$

To su osnovne kartografske jednadžbe Winkelove projekcije u kojima su z i α određeni ovim izrazima

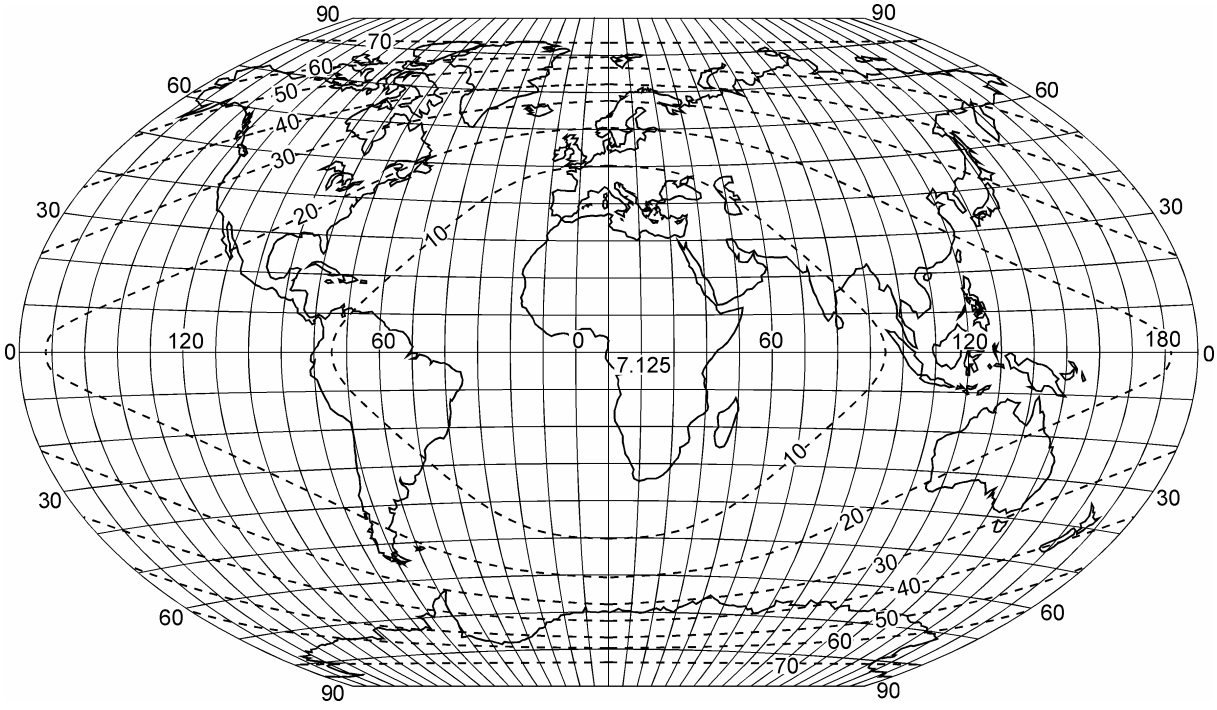
$$\begin{aligned} z &= \arccos(\cos\varphi\cos\frac{\Delta\lambda}{2})\,, \\ \alpha &= \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\varphi\sin\frac{\Delta\lambda}{2})\,. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Winkelova projekcija spada u grupu uvjetnih projekcija. Sa φ_0 označena je širina paralele koja se preslikava bez deformacija.

Za $\varphi_0 = 40°$ dobiva se vrlo povoljan raspored deformacija površina i kutova, pa se ta projekcija mnogo upotrebljava za karte svijeta (v. sl. 13.1 i sl. 13.2).



Slika 13.1. Winkelova projekcija ($\varphi_0 = 40°$) s ucrtanim izokolama mjerila površina



Slika 13.2. Winkelova projekcija ($\varphi_0 = 40°$) s ucrtanim izokolama maksimalnih deformacija kutova

Budući da je Aitovljeva projekcija dobivena modifikacijom poprečne azimutalne ekvidistantne projekcije, to je Winkelova projekcija, prema tome, izvedena iz tri projekcije pa joj odatle i naziv trostruka.

14. POLIEDARSKA PROJEKCIJA

Poliedarska projekcija ne uklapa se u podjelu kartografskih projekcija po obliku normalne kartografske mreže, koja nam je poslužila kao primarna podjela u izučavanju projekcija. To je razlog što je izučavamo u posebnom poglavlju.

Osim toga poliedarska se projekcija bitno razlikuje od svih dosad opisanih projekcija, jer kod nje preslikavamo plohu Zemljinog elipsoida ne na jednu, nego na mnogo ravnina.

U toj projekciji zamišljamo da je čitavo područje preslikavanja podijeljeno meridijanima i paralelama u elipsoidne trapeze. Svaki takav trapez posebno se preslikava u ravninu tako da se strane trapeza preslikavaju kao pravci. Duljine strana ravnog trapeza dobiju se na dva načina:

1. duljine strana jednake su duljinama odgovarajućih meridijana i paralela,
2. visina trapeza jednaka je duljini srednjeg meridijana lista, a donja i gornja baza duljinama odgovarajućih paralela.

Ostali meridijani i paralele su isto tako pravci, koji se dobiju interpolacijom između graničnih meridijana i paralela.

Veličine strana pojedinog trapeza (sl. 14.1), u prvoj varijanti poliedarske projekcije, računaju se po ovim formulama (usp. 3.1.2):

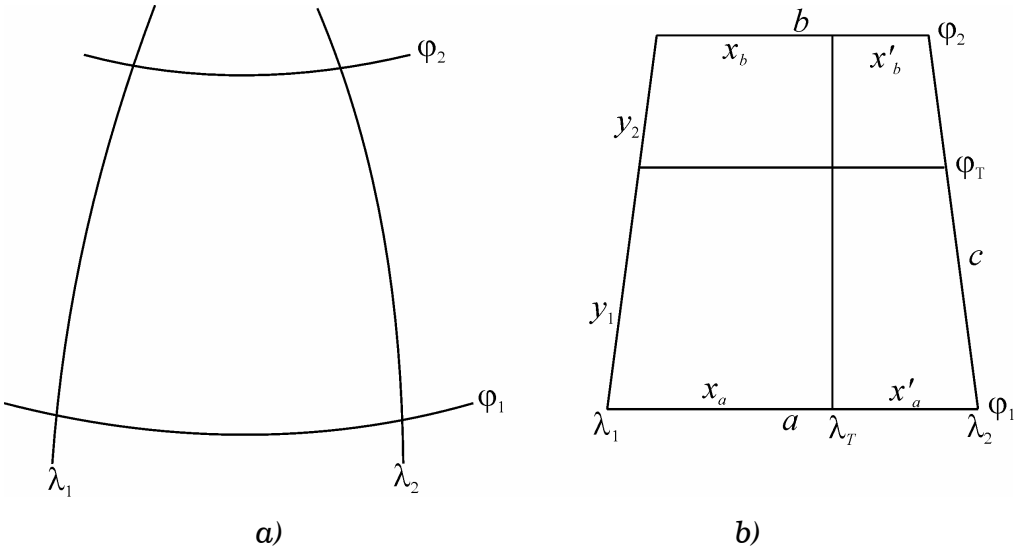
$$c = \frac{M_0(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\rho''} \tag{14.1}$$

$$a = \frac{N_1 \cos\varphi_1(\lambda_2 - \lambda_1)''}{\rho''}$$

$$b = \frac{N_2 \cos\varphi_2(\lambda_2 - \lambda)''}{\rho''} \tag{14.2}$$

Sa tako izračunatim duljinama strana konstruira se ravni trapez, koji čini okvir karte.U drugoj varijanti te iste projekcije po formuli (14.1) računa se visina trapeza.

Točka zadana geografskim koordinatama φ_T i λ_T kartirat će se na list karte u poliedarskoj projekciji ovim postupkom. Treba izračunati duljine odsječaka x_a, x'_a, x_b i x'_b duž donje i gornje baze (sl. 14.1b) i duljine y_1 i y_2 duž krakova trapeza (u drugoj varijanti duž visine trapeza). Položaj točke *T* dobije se u presjeku spojnica navedenih odsječaka.



Slika 14.1. Trapez: a) na elipsoidu b) u poliedarskoj projekciji

Duljine traženih odsječaka x_a i y_1 određene su ovim omjerima:

$$x_a : a = (\lambda_T - \lambda_1) : (\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$y_1 : c = (\varphi_T - \varphi_1) : (\varphi_2 - \varphi_1),$$

odakle je

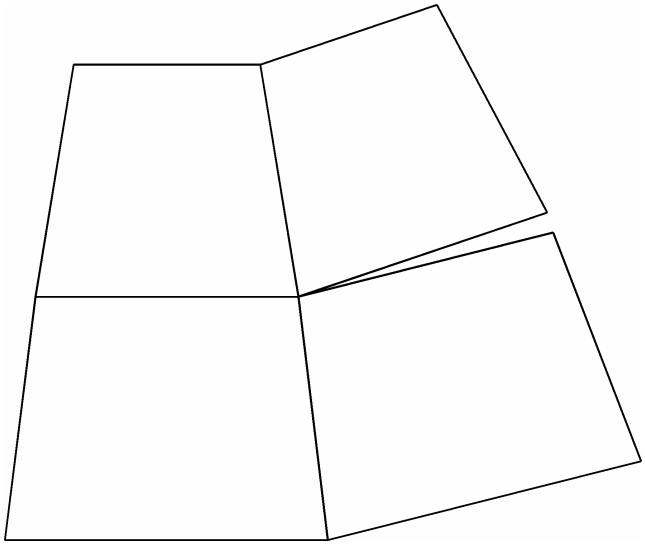
$$x_a = \frac{a(\lambda_T - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad (14.3)$$

$$y_1 = \frac{c(\varphi_T - \varphi_1)}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

Na isti način računaju se duljine i svih ostalih odsječaka.

Poliedarska projekcija spada u grupu uvjetnih projekcija. Na listovima karte u toj projekciji deformacije su razmjerno male, često manje od grafičke točnosti sastavljanja karte. Deformacije su male, jer je na svaki pojedini list preslikan mali dio Zemljine plohe, maksimalno $1° \times 1°$.

Zbog toga što je svaki list posebna projekcijska cjelina, ne postoji jedinstveni pravokutni koordinatni sustav, koji bi povezivao sve listove. To je najveći nedostatak ove projekcije. Očituje se i u nemogućnosti spajanja više listova u jednu cjelinu bez rascjepa (sl. 14.2).



Slika 14.2. Spajanje više listova u poliedarskoj projekciji

Topografske karte bivše Jugoslavije, mjerila 1:50 000, 1:100 000 i 1:200 000, nastale na osnovi topografske izmjere (1920-1933) izrađene su u poliedarskoj projekciji (v. §17.1). Upotrebljena je prva varijanta te projekcije u kojoj se sve stranice trapeza preslikavaju u pravoj veličini.

15. GAUSS-KRÜGEROVA PROJEKCIJA

15.1. Uvod

Posebnu grupu projekcija čine tvz. "geodetske projekcije", tj. projekcije za potrebe državne izmjere. Projekcija za potrebe državne izmjere, je projekcija koja će poslužiti za preračunavanje koordinata trigonometrijskih točaka u ravninu. U toj će projekciji, prema tome, biti određene definitivne pravokutne koordinate trigonometrijskih točaka u ravnini. Ta projekcjia treba poslužiti kao matemtička osnova za sva računanja u ravnini i za izradu planova i karata najkrupnijih mjerila.

Za potrebe državne izmjere u većini zemalja upotrebljava se danas Gauss-Krügerova projekcija. To je konformna poprečna cilindrična projekcija elipsoida na ravninu. Zašto upravo ta projekcija, a ne neka druga odgovorit ćemo u posebnom poglavlju pod naslovom "Izbor projekcije" (v. §17.1).

Austrija je bila prva država koja je uvela Gauss-Krügerovu projekciju za potrebe državne izmjere. Bilo je to 1917. godine. Njemačka je to isto učinila 1923. godine. Bivša Jugoslavija je Gauss-Krügerovu projekciju uvela 1924. godine. Izbor projekcije izvršila je komisija u kojoj su bili najpoznatiji geodetski stručnjaci tog vremena. Komisija je nakon detaljne analize u opsežnom pismenom izvještaju, kao najpogodniju predložila Gauss-Krügerovu projekciju.

Projekcija je dobila ime po velikom njemačkom znanstveniku Carlu-Friedrichu Gaussu (1777-1855) koji je i geodeziju zadužio mnogim otkrićima. Između 1821. i 1825. godine Gauss je pri izračunavanju hanoverske triangulacije za preslikavanje s elipsoida na ravninu primjenio način preslikavanja koji danas nosi naziv Gauss-Krügerova projekcija.

Prof. dr L. Krüger je 1912. objavio knjigu o toj projekciji, a 1919. zbirku formula za praktičnu primjenu. Od tada ta projekcija se naziva Gauss-Krügerova. U literaturi engleskog jezičnog područja ova se projekcija susreće pod nazivom Transverse Mercator Projection.

Budući da se geodetske projekcjie osim za izradu karata krupnih mjerila koriste kao osnova za sva računanja u ravnini, to je u njihovom proučavanju osim računanja geografskih koordinata u ravnini iz geografskih koordinata potrebno riješiti i niz ostalih zadataka:

1. računanje geografskih koordinata iz pravokutnih koordinata u ravnini projekcije,
2. računanje konvergencije meridijana iz geografskih i pravokutnih koordinata
3. računanje linearnog mjerila iz geografskih i pravokutnih koordinata
4. računanje redukcije pravaca i dužina

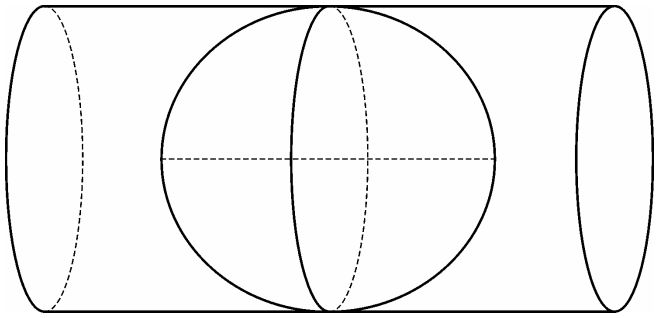
5. računaje pravokutnih koordinata točke, kad su zadane pravokutne koordinate jedne točke i duljina i azimut geodetske linije
6. računanje duljina i azimuta geodetske linije iz pravokutnih koordinata dviju točaka
7. transformacija koordinata između susjednih koordinatnih sustava

15.2. Svojstva Gauss-Krügerove projekcije

Gauss-Krügerova projekcija određena je ovim uvjetima:

1. projekcija je konformna,
2. srednji meridijan preslikava se u pravoj veličini ili je mjerilo duž njega konstantno,
3. os x pravokutnog koordinatnog sustava poklapa se sa srednjim meridijanom. Ishodište se može postaviti u bilo kojoj točki srednjeg meridijana, obično se uzima u presjeku srednjeg meridijana i ekvatora.

Za Gauss-Krügerovu projekciju također kažemo da je konformna poprečna cilindrična projekcija elipsoida na ravninu. Svojstva te projekcije možemo vizualizirati zamislimo li preslikavanje na eliptični valjak koji dira elipsoid duž srednjeg meridijana područja preslikavanja ili na plašt valjka koji siječe elipsoid (sl. 15.1).



Slika 15.1.

Napomena: Sve formule u Gauss-Krügerovoj projekciji bit će izvedene uz pretpostavku da je mjerilo na srednjem meridijanu jednako jedinici ($m_0 = 1$). Koordinate izvedene uz taj uvjet nazivaju se nereducirane i označavaju s $\bar{x}$, $\bar{y}$. Jednostavnosti radi u svim izvodima pisat ćemo x, y, a tek na kraju u konačnim formulama prijeći na prave oznake $\bar{x}$, $\bar{y}$ (vidi 15.8)

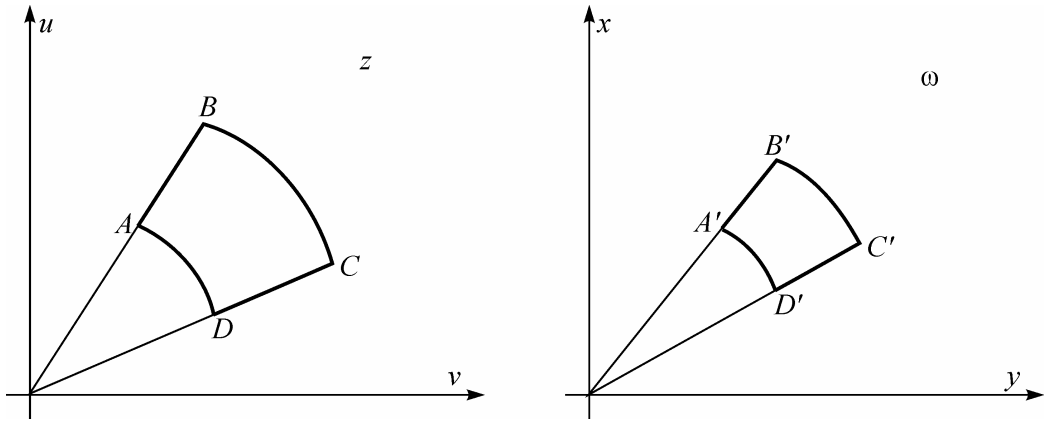
15.3. Konformno preslikavanje pomoću analitičkih funkcija

Osnovne formule konformnog preslikavanja moguće je izvesti na različite načine. Za proučavanje konformnih preslikavanja vrlo prikladan matematički aparat su matematičke funkcije kompleksne varijable.

Funkcija kompleksne varijable ima oblik

$$\begin{gathered} w = f(z), \\ w = x + \mathrm{i}y, \quad z = u + \mathrm{i}v, \\ x = f_1(u, v), \\ y = f_2(u, v) \end{gathered} \tag{15.1}$$

Funkciju kompleksne varijable geometrijski možemo interpretirati kao preslikavanje iz kompleksne z-ravnine u kompleksnu w-ravninu (sl. 15.2).



Slika 15.2. Geometrijska interpretacija funkcije kompleksne varijable

Ako je funkcija kompleksne varijable

$$w = f(z)$$

analitička, preslikavanje je konformno.

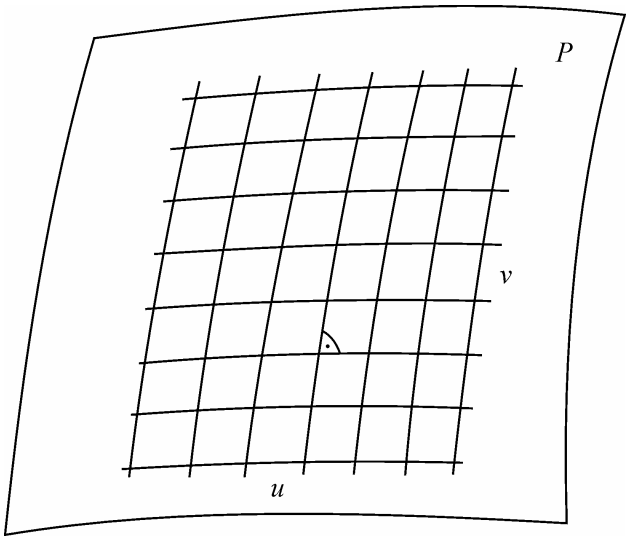
Jednoznačna neprekinuta funkcija $f(z)$ naziva se analitička u nekom području G ako ima određenu neprekinutu derivaciju u svakoj točki područja. Nužni uvjet da funkcija kompleksne varijable z ima derivaciju u točki z je da zadovoljava Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial y}{\partial v}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned} \tag{15.2}$$

Pri konformnom preslikavanju pomoću analitičkih funkcija veliku važnost imaju izometrijske koordinate.

15.3.1. Izometrijske koordinate

Neka na plohi P položaj bilo koje točke bude određen proizvoljno odabranim, no međusobno okomitim koordinatnim linijama u, v (sl. 15.3).



Slika 15.3.

Linijski element na plohi određen je tada izrazom

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 , \tag{15.4}$$

gdje su E i G poznate Gaussove oznake. Diferencijali luka duž koordinatnih linija u i v određeni su izrazima

$$\begin{aligned} ds_1 &= \sqrt{E}\,du , \\ ds_2 &= \sqrt{G}\,dv . \end{aligned} \tag{15.5}$$

Pri uvjetu $du = dv$ neće biti $ds_1 = ds_2$ jer E nije jednako G.

Na istoj plohi P moguće je, međutim, ustanoviti takav sustav koordinata U, V u kojem će pri uvjetu $dU = dV$ i diferencijali luka duž koordinatnih linija ds_1 i ds_2 biti međusobno jednaki. Da bi to bilo, očito je da linijski element na plohi mora imati oblik

$$ds^2 = f^2(U,V)\cdot(dU^2 + dV^2) \tag{15.6}$$

Koordinate u kojima linijski element plohe ima oblik (15.6) nazivaju se izometrijske koordinate, a mreža koordinatnih linija što je čine izometrijska mreža.

Izometrijske koordinate su koordinate kod kojih jednakim, beskonačno malim prirastima ovih koordinata odgovaraju jednaki pomaci duž koordinatnih linija. To znači da izometrijske koordinate pri uvjetu $\Delta u = \Delta v$ razbijaju plohu na male kvadrate, točnije rečeno na likove, kojih forma teži kvadratnoj kad $\Delta u = \Delta v \to 0$.

Kao najjednostavniji primjer izometrijskih koordinata mogu poslužiti pravokutne koordinate x, y u ravnini kod kojih se linijski element računa po formuli

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 .$$

Potrebno je sada ispitati da li su geografske koordinate φ, λ na elipsoidu izometrijske koordinate. Linijski element na elipsoidu računamo po formuli

$$ds^2 = (Md\varphi)^2 + (N\cos\varphi\, d\lambda)^2 . \tag{15.7}$$

Usporedba s (15.6) pokazuje da φ i λ nisu izometrijske koordinate. Vrlo je jednostavno (15.7) svesti na oblik (15.6). Izlučimo $N^2\cos^2\varphi$

$$ds^2 = N^2\cos^2\varphi\left[\left(\frac{Md\varphi}{N\cos\varphi}\right)^2 + d\lambda^2\right].$$

Uvedimo novu varijablu

$$\frac{Md\varphi}{N\cos\varphi} = dq , \tag{15.8}$$

pa je

$$ds^2 = N^2\cos^2\varphi(dq^2 + d\lambda^2) . \tag{15.9}$$

Time izraz (15.7) sveden na oblik (15.6) tj. q i λ su izometrijske koordinate.

Koordinatu q nazivamo izometrijskom širinom. Određena je izrazom

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{\varphi}\frac{Md\varphi}{N\cos\varphi} = \int_0^{\varphi}\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \\ q &= \ln\left[\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\varphi}{2})\cdot\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}\right]. \end{aligned} \tag{15.10}$$

Zbog svojstva konformnog preslikavanja (v. §5.1.1) izometrijska mreža na jednoj plohi preslikat će se u bilo kojoj konformnoj projekciji u izometrijsku mrežu na drugoj plohi. Odatle slijedi i ovaj vrlo važan zaključak. Da bismo točke s jedne plohe konformno preslikali na drugu plohu treba na obje plohe uvesti izometrijske koordinate, obuhvatiti ih kompleksnim brojevima i sastaviti jednadžbu oblika

$$x + \mathrm{i}y = f(U + \mathrm{i}V) \tag{15.11}$$

u kojoj je f analitička funkcija.

15.4. Računanje pravokutnih koordinata x, y (Gauss-Krügerovih koordinata) iz geografskih koordinata φ i λ

Zadane su geografske koordinate φ i λ neke točke na elipsoidu, a potrebno je izračunati pravokutne koordinate x i y u Gauss-Krügerovoj projekciji, Za pravokutne koordinate x i y u Gauss-Krügerovoj projekciji često upotrebljavamo termin Gauss-Krügerove koordinate.

Uvjet konformnog preslikavanja elipsoida na ravninu možemo prema (15.1) izraziti jednadžbom

$$x + \mathrm{i}y = f(q + \mathrm{i}\lambda) \tag{15.12}$$

gdje je f analitička funkcija, a q izometrijska širina.

Budući da pravokutne koordinate računamo od meridijana duljine λ_0, tj od srednjeg meridijana područja preslikavanja, to možemo ne umanjujući općenitost zadatka pisati

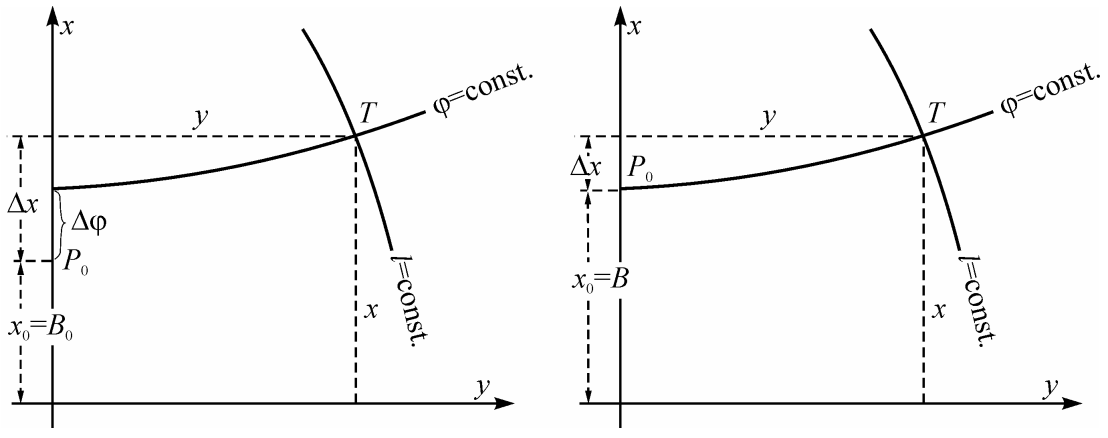
$$x + \mathrm{i}y = f(q + \mathrm{i}l)$$

gdje je

$$l = \lambda - \lambda_0 . \tag{15.13}$$

Širina područja preslikavanja obično iznosi 3° ili 6° pa je $l \leq 1.5°$ ili $l \leq 3°$. Zbog toga možemo u svim daljim izvodima smatrati l malom veličinom.

Izometrijska širina q ima u odnosu na l veliku vrijednost, jer je kao i geografsku širinu φ mjerimo od ekvatora. Mnogi izvodi i računanja znatno bi se pojednostavili, kad bismo i q mogli smatrati malom veličinom. U tu svrhu izabrat ćemo na srednjem meridijanu pomoćnu točku P_0 kao provizorno ishodište (sl. 15.4a).



Slika 15.4.

Sad možemo pisati

$$\Delta x = x - x_0\,, \quad \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0\,, \quad \Delta q = q - q_0\,,$$

i

$$\Delta x + \mathrm{i}y = f(\Delta q + \mathrm{i}l)\,.$$

Razvojem u Taylorov red dobijemo:

$$\Delta x + \mathrm{i}y = a_1(\Delta q + \mathrm{i}l) + a_2(\Delta q + \mathrm{i}l)^2 + a_3(\Delta q + \mathrm{i}l)^3 + \ldots,$$

gdje je

$$a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n(x + \mathrm{i}y)}{d(q + \mathrm{i}l)^n}\right]_0\,. \tag{15.14}$$

Zadatak će se još pojednostavniti ako provizorno ishodište postavimo točno u presjek paralele pojedine točke i srednjeg meridijana (sl. 15.4b). Time, zapravo, svaka točka ima vlastito provizorno ishodište. Slijedi

$$\Delta x = x - B\,, \quad x_0 = B\,, \quad \varphi_0 = \varphi\,, \quad q_0 = q\,, \quad \Delta\varphi = 0\,, \quad \Delta q = 0\,,$$

i

$$\Delta x + \mathrm{i}y = a_1(\mathrm{i}l) + a_2(\mathrm{i}l)^2 + a_3(\mathrm{i}l)^3 + \ldots\,.$$

Uvrstimo li $\Delta x = x - B$ i izjednačimo li realne s realnim, a imaginarne s imaginarnim članovima lijeve i desne strane dobijemo:

$$\begin{aligned} x &= B - a_2 l^2 + a_4 l^4 - a_6 l^6, \\ y &= a_1 - a_3 l^3 + a_5 l^5\,. \end{aligned} \tag{15.15}$$

Potrebno je sad odrediti koeficjente $a_1 \ldots a_6$. Budući da analitičku funkciju možemo diferencirati u bilo kojem smjeru diferencirat ćemo u smjeru meridijana. Srednji meridijan se preslikava kao pravac pa je

$$l = y = 0\,,$$

a budući da se preslikava i u pravoj veličini to je

$$x = B = \int_0^{\varphi} M d\varphi\,. \tag{15.16}$$

Na osnovi toga slijedi

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n B}{dq^n}\,. \tag{15.17}$$

Tražene derivacije dobit ćemo kao derivacije složene funkcije

$$\frac{dB}{dq} = \frac{dB}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq}. \tag{15.18}$$

Iz (15.17) slijedi

$$\frac{dB}{d\varphi} = M\,,$$

a iz (15.18)

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{N\cos\varphi}{M}$$

pa se uvrštavanjem u (15.18) dobiva

$$\frac{dB}{dq} = N\cos\varphi\,.$$

Odredimo li sve potrebne derivacije i uvrstimo li dobivene vrijednosti u (15.14) i potom u (15.15) dobivamo

$$\begin{aligned} \bar{x} &= B + (x_1)l^2 + (x_2)l^4 + (x_3)l^6, \\ \bar{y} &= (y_1)l + (y_2)l^3 + (y_3)l^5, \end{aligned} \tag{15.19}$$

gdje pojedine oznake imaju ova značenja

$$(y_1) = N\cos\varphi\,,$$

$$(y_2) = \frac{N}{6}\cos^3\varphi\,(1 - t^2 + \eta^2)\,,$$

$$(y_3) = \frac{N}{120}\cos^5\varphi(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2)\,,$$

$$(x_1) = \frac{N}{2}\sin\varphi\cos\varphi\,, \tag{15.20}$$

$$(x_2) = \frac{N}{24}\sin\varphi\cos^3(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)\,,$$

$$(x_3) = \frac{N}{720}\sin\varphi\cos^5\varphi(61 - 58t^2 + t^4)\,,$$

$$t = \operatorname{tg}\varphi\,,$$

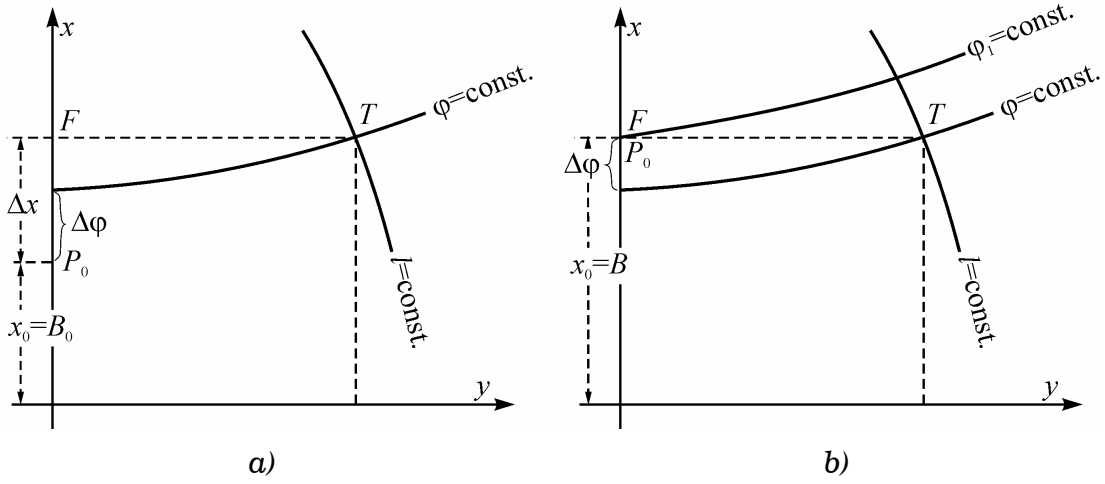
$$\eta = e'\cos\varphi\,.$$

15.5. Računanje geografskih koordinata φ i λ iz pravokutnih koordinata x i y

Prema uvjetu konformnosti možemo napisati

$$q + \mathrm{i}l = F(x + \mathrm{i}y)\,.$$

Izvodi i računanja bit će mnogo jednostavniji, kao i u prethodnom zadatku pomaknemo li ishodište u pomoćnu točku P_0 (sl. 15.5a).



Slika 15.5.

Sada imamo

$$\Delta q + \mathrm{i}l = F(\Delta x + \mathrm{i}l)\,.$$

Razvojem u Taylorov red dobijemo

$$\Delta q + \mathrm{i}l = b_1(\Delta x + \mathrm{i}y) + b_2(\Delta x + \mathrm{i}y)^2 + b_3(\Delta x + \mathrm{i}y)^3 + \ldots$$

gdje je

$$b_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n(q + \mathrm{i}l)}{d(x + \mathrm{i}y)^n}\right]_0 .$$

Izvodi će se još više pojednostavniti postavimo li točku P_0 u točku F (sl. 15.5b) kojoj odgovara širina φ_1. Sada je

$$\varphi_0 = \varphi_1\,,\quad q_0 = q_1\,,\quad \Delta q = q - q_1\,,\quad \Delta\varphi = \varphi - \varphi_1\,,\quad x = B\,,\quad \Delta x = 0\,.$$

Na osnovi toga bit će

$$\Delta q + \mathrm{i}l = (b_1)_1\ (\mathrm{i}y) + (b_2)_1\ (\mathrm{i}y)^2 + (b_3)_1\ (\mathrm{i}y)^3 + \ldots\ .$$

Rastavljeno na realne i imaginarne članove bit će

$$\begin{aligned} \Delta q = q - q_1 &= -(b_2)_1 y^2 + (b_4)_1 y^4 - (b_6)_1 y^6 , \\ l &= (b_1)_1 y - (b_3)_1 y^3 + (b_5)_1 y^5 . \end{aligned} \tag{15.21}$$

Pri određivanju koeficijenata b diferencirat ćemo u smjeru meridijana pa je

$$y = l = 0 , \quad x = B = \int_0^{\varphi} M d\varphi$$

i

$$b_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n q}{dB^n}\right)_1$$

Tražene diferencijalne kvocijente dobit ćemo kao diferencijalne kvocijente složene funkcije

$$\frac{dq}{dB} = \frac{dq}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dB} .$$

Diferencijalni kvocijent $\frac{dq}{d\varphi}$ dobit ćemo iz izraza

$$\frac{M d\varphi}{N \cos\varphi} = dq$$

odakle slijedi

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{M}{N \cos\varphi}$$

Diferencijalni kvocijent $\frac{d\varphi}{dB}$ dobit ćemo iz izraza

$$B = \int_0^{\varphi} M d\varphi$$

odakle je

$$\frac{d\varphi}{dB} = \frac{1}{M}$$

pa je

$$\frac{dq}{dB} = \frac{M}{N \cos\varphi} \cdot \frac{1}{M} = \frac{1}{N \cos\varphi} .$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u izraz za b_n dobit ćemo potrebne koeficijente:

$$(b_1)_1 = \frac{1}{N_1 \cos\varphi_1}$$

$$(b_2)_1 = -\frac{t_1}{2N_1^2 \cos\varphi_1} \tag{15.22}$$

$$(b_3)_1 = -\frac{1+2t_1^2+\eta_1^2}{6N_1^3 \cos\varphi_1}$$

$$(b_4)_1 = \frac{t_1(5+6t_1^2+\eta_1^2-4\eta_1^2)}{24N_1^4 \cos\varphi_1}$$

Te koeficijente treba uvrstiti u formule za Δq i l. Time dobivamo konačnu formulu za l. Potrebno je još odrediti $\Delta\varphi$ i Δq. Možemo pisati

$$\Delta\varphi = f(\Delta q).$$

Razvojem u Taylorov red dobivamo

$$\Delta\varphi = d_1\Delta q + d_2\Delta q^2 + d_3\Delta q^3 + \ldots$$

gdje je

$$d_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n\varphi}{dq^n}.$$

Diferencijalne kvocjente $\frac{d^n\varphi}{dq^n}$ dobit ćemo kao diferencijalne kvocijente složene funkcije

$$\frac{d^2\varphi}{dq^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dq}\right) \cdot \frac{d\varphi}{dq},$$

$$\frac{d^3\varphi}{dq^3} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d^2\varphi}{dq^2}\right) \cdot \frac{d\varphi}{dq}.$$

Diferencijalni kvocijent $\frac{d\varphi}{dq}$ dobit ćemo iz izraza

$$\frac{Md\varphi}{N\cos\varphi} = dq$$

odakle je

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{N\cos\varphi}{M}.$$

Uvrštavanjem tih koeficijenata i prethodno dobivenog izraza za Δq u izraz za $\Delta\varphi$ dobivamo

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1 = (\varphi_1)\bar{y}^2 + (\varphi_2)\bar{y}^4 + (\varphi_3)\bar{y}^6$$

ili u konačnom obliku

$$\varphi = \varphi_1 + (\varphi_1)\bar{y}^2 + (\varphi_2)\bar{y}^4 + (\varphi_3)\bar{y}^6 \tag{15.23}$$

a

$$l = (l_1)\bar{y} + (l_2)\bar{y}^3 + (l_3)\bar{y}^5 \tag{15.24}$$

gdje su

$$(\varphi_1) = -\frac{t_1}{2N_1^2}(1+\eta_1^2),$$

$$(\varphi_2) = \frac{t_1}{24N_1^4}(5+3t_1^2+6\eta_1^2-6t_1^2\eta_1^2), \tag{15.25}$$

$$(\varphi_3) = -\frac{t_1}{720N_1^6}(61+90t_1^2+45t_1^4),$$

$$(l_1) = \rho\frac{1}{N_1\cos\varphi_1}$$

$$(l_2) = -\frac{1+2t_1^2+\eta_1^2}{6N_1^3\cos\varphi_1}, \tag{15.26}$$

$$(l_3) = \frac{5+28t_1^2+24t_1^4}{120N_1^5\cos\varphi_1}.$$

$$t_1 = \operatorname{tg}\varphi_1, \quad \eta_1 = e'\cos\varphi_1, \quad N_1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_1}}.$$

Širina φ_1 je pomoćna veličina koju se određuje po formuli (Lapaine, 1990):

$$\varphi_1 = \psi + \sin 2\psi(B_1 + (B_2 + B_3\cos 2\psi)\cos 2\psi) \tag{15.27}$$

gdje su:

$$\psi = \frac{\bar{x}}{A_0}$$

$$A_0 = a(1-n)(1-n^2)(1+\frac{9}{4}n^2+...)$$

$$n = \frac{a-b}{a+b}$$

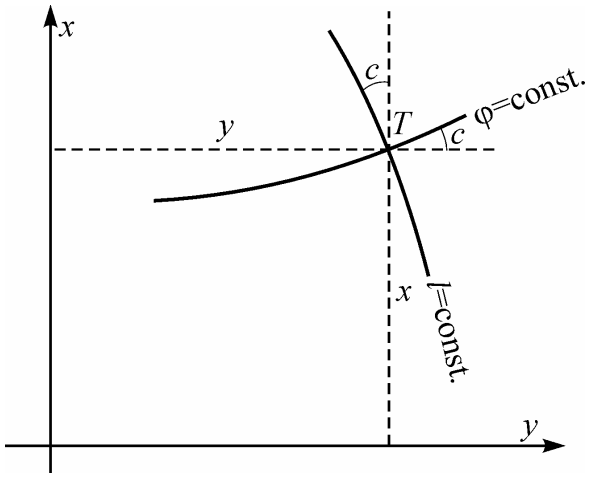
$$B_1 = \frac{3}{2}n - \frac{29}{12}n^3 + ... \qquad (15.28)$$

$$B_2 = \frac{21}{8}n^2 - ...$$

$$B_3 = \frac{151}{24}n^3 - ...$$

15.6. Konvergencija (zbližavanje) meridijana u ravnini Gauss-Krügerove projekcije

Konvergencija meridijana u ravnini jest kut c, što ga u jednoj točki projekcije meridijana čine tangenta i paralela s osi x. Isti taj kut u konformnim projekcijama u toj točki čine tangenta na projekciju paralele i paralela s osi y (sl.15.6)



Slika 15.6. Konvergencija meridijana

Značenje ovog kuta je u tome što nam on omogućuje da odredimo geodetski (Gaussov) smjerni kut θ ako je zadan azimut α neke strane triangulacije i obrnuto.

15.6.1. Računanje konvergencije meridijana u ravnini kad su zadane geografske koordinate φ i λ

Iz slike 15.6 vidimo da je

$$\operatorname{tg} c = \frac{dx}{dy}.$$

Projekcija paralele određena je jednadžbama

$$x = f_1(\varphi_0, l)$$

$$y = f_2(\varphi_0, l)$$

odakle slijedi

$$dx = \frac{\partial x}{\partial l} dl,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial l} dl.$$

Kada te izraze uvrstimo u formulu za $\operatorname{tg} c$ dobijemo

$$\operatorname{tg} c = \frac{\frac{\partial x}{\partial l}}{\frac{\partial y}{\partial l}}.$$

Parcijalne derivacije $\frac{\partial x}{\partial l}$ i $\frac{\partial y}{\partial l}$ dobit ćemo iz jednadžbi

$$x = B + (x_1)l^2 + (x_2)l^4 + (x_3)l^6,$$

$$y = (y_1)l + (y_2)l^3 + (y_3)l^5.$$

Iz tih jednadžbi dobijemo

$$\frac{\partial x}{\partial l} = 2(x_1)l + 4(x_2)l^3 + 6(x_3)l^5, \qquad (15.29)$$

$$\frac{\partial y}{\partial l} = (y_1) + 3(y_2)l^2 + 5(y_3)l^4.$$

Uvrštavanjem u $\operatorname{tg} c$ izlazi

$$\operatorname{tg} c = \frac{2(x_1)l + 4(x_2)l^3 + 6(x_3)l^5}{(y_1) + 3(y_2)l^2 + 5(y_3)l^4}$$

Veličinu c dobit ćemo razvojem u ciklometrijski red

$$c = \operatorname{tg} c - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 c + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 c.$$

Ako izračunamo $\mathrm{tg}^3 c$ i $\mathrm{tg}^5 c$ s točnošću do pete potencije te ako umjesto oznaka $(x_1)...$, $(y_1)...$ uvedemo njihove izraze, nakon sređivanja dobit ćemo

$$c = l \cdot \sin\varphi + (c_1) l^3 + (c_2) l^5 \tag{15.30}$$

gdje su

$$\begin{aligned} (c_1) &= \frac{1}{3} \sin\varphi \cos^2\varphi (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4), \\ (c_2) &= \frac{1}{15} \sin\varphi \cos^4\varphi (2 - t^2). \end{aligned} \tag{15.31}$$

15.6.2. Računanje konvergencije meridijana u ravnini iz pravokutnih koordinata x i y

Iz slike 15.6 se vidi da je c određen jednadžbom

$$\mathrm{tg}\, c = -\frac{dy}{dx}.$$

Neka je jednadžba projekcije meridijana dana u implicitnom obliku

$$l = f(x,\ y) = const.$$

tada je

$$dl = \frac{\partial l}{\partial x} dx + \frac{\partial l}{\partial y} dy = 0$$

i

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial l}{\partial x}}{\dfrac{\partial l}{\partial y}}.$$

Prema tome slijedi

$$\mathrm{tg}\, c = \frac{\dfrac{\partial l}{\partial x}}{\dfrac{\partial l}{\partial y}}.$$

Primjenjujući prvu od ove dvije Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial l}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y},$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

možemo pisati

$$\operatorname{tg} c = -\frac{\dfrac{\partial q}{\partial y}}{\dfrac{\partial l}{\partial y}}.$$

U (15.21) dobili smo

$$q = q_1 - (b_2)_1 y^2 + (b_4)_1 y^4 - (b_6)_1 y^6,$$

$$l = (b_1)_1 y - (b_3)_1 y^3 + (b_5)_1 y^5.$$

Iz ovih jednadžbi možemo odrediti $\dfrac{\partial q}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial l}{\partial y}$:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = -2(b_2)_1 y + 4(b_4)_1 y^3 - 6(b_6)_1 y^5,$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} = (b_1)_1 - 3(b_3)_1 y^2 + 5(b_5)_1 y^4.$$

Uvrštavanje u $\operatorname{tg} c$ izlazi:

$$\operatorname{tg} c = \frac{2(b_2)_1 y - 4(b_4)_1 y^3 + 6(b_6)_1 y^5}{(b_1)_1 - 3(b_3)_1 y^2 + 5(b_5)_1 y^4}$$

Razvojem u red dobijemo

$$c = \operatorname{tg} c - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 c + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 c.$$

Kad u tu formulu uvrstimo $\operatorname{tg} c$, $\operatorname{tg}^3 c$ i $\operatorname{tg}^5 c$ te umjesto oznaka $(b_1)_1$ ... $(b_6)_1$ njihove iznose (15.22) dobit ćemo nakon sređivanja

$$c = (c_3)\bar{y} + (c_4)\bar{y}^3 + (c_5)\bar{y}^5, \tag{15.32}$$

gdje su

$$(c_3) = \frac{t_1}{N_1},$$

$$(c_4) = -\frac{t_1}{3N_1^3}(1 + t_1^2 - \eta_1^2), \tag{15.33}$$

$$(c_5) = \frac{t_2}{15N_1^5}(2 + 5t_1^2 + 3t_1^4).$$

15.7. Mjerila i deformacije

Budući da je projekcija konformna i da vrijedi $m = n$, to mjerilo možemo računati po bilo kojoj od ove dvije formule

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M}, \quad n = \frac{\sqrt{G}}{r}.$$

Za mjerilo ćemo upotrebljavati oznaku m. Deformacija dužina bit će prema tome

$$d = m - 1.$$

Iz osnovne formule za mjerilo površina

$$p = mn \sin\theta$$

slijedi

$$p = m^2.$$

15.7.1. Računanje mjerila iz geografskih koordinata φ i λ

Za računanje mjerila koristit ćemo drugu od prethodno navedene dvije formule pa možemo pisati

$$m = \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{1}{N\cos\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2}.$$

Uvrstimo li u taj izraz prethodno određene $\frac{\partial x}{\partial l}$ i $\frac{\partial y}{\partial l}$ (15.29), nakon sređivanja dobije se:

$$m = 1 + (m_1)l^2 + (m_2)l^4, \tag{15.34}$$

gdje su

$$\begin{aligned}(m_1) &= \frac{\cos^2\varphi}{2}(1+\eta^2),\\ (m_2) &= \frac{\cos^4\varphi}{24}(5-4t^2).\end{aligned} \tag{15.35}$$

15.7.2. Računanje mjerila m iz pravokutnih koordinata x i y

Kad u formulu

$$m = 1 + (m_1)l^2 + (m_2)l^4$$

umjesto oznaka (m_1) i (m_2) uvrstimo njihove iznose dobijemo

$$m = 1 + \frac{1+\eta^2}{2}\cos^2\varphi \cdot l^2 + \frac{5-4\mathrm{tg}^2\varphi}{24}\cos^4\varphi \cdot l^4.$$

Nadalje kad u formulu

$$y = (y_1)l + (y_2)l^3 + \ldots$$

umjesto oznaka (y_1) i (y_2) uvrstimo njihove iznose dobijemo

$$y = N\cos\varphi \cdot l + N\cos^3\varphi(1 + \mathrm{tg}^2\varphi)\frac{l^3}{6} + \ldots$$

Iz te formule možemo dobiti

$$l \cdot \cos\varphi = \frac{Y}{N} - \frac{Y^3}{6N^3}(1 - \mathrm{tg}^2\varphi)$$

i

$$l^2\cos^2\varphi = \frac{Y^2}{N^2} - \frac{Y^4}{3N^4}(1 - \mathrm{tg}^2\varphi),$$

$$l^4\cos^4\varphi = \frac{Y^4}{N^4}.$$

Kad te vrijednosti uvrstimo u formulu za m dobijemo

$$m = 1 + \frac{1+\eta^2}{N^2} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24N^4}.$$

Kako je

$$\frac{1+\eta^2}{N^2} \approx \frac{1}{R^2}$$

i

$$N^4 \approx R^4$$

dobijemo

$$m = 1 + \frac{\bar{y}^2}{2R^2} + \frac{\bar{y}^4}{24R^4} \tag{15.36}$$

gdje je

$$R = \sqrt{MN}.$$

Deformacije u Gauss-Krügerovoj projekciji određene su izrazom

$$d = m - 1,$$

odnosno

$$d = \frac{\bar{y}^2}{2R^2} + \frac{\bar{y}^4}{24R^4}. \tag{15.37}$$

Za praktično računanje obično se možemo zadovoljiti s točnošću koju daje prvi član

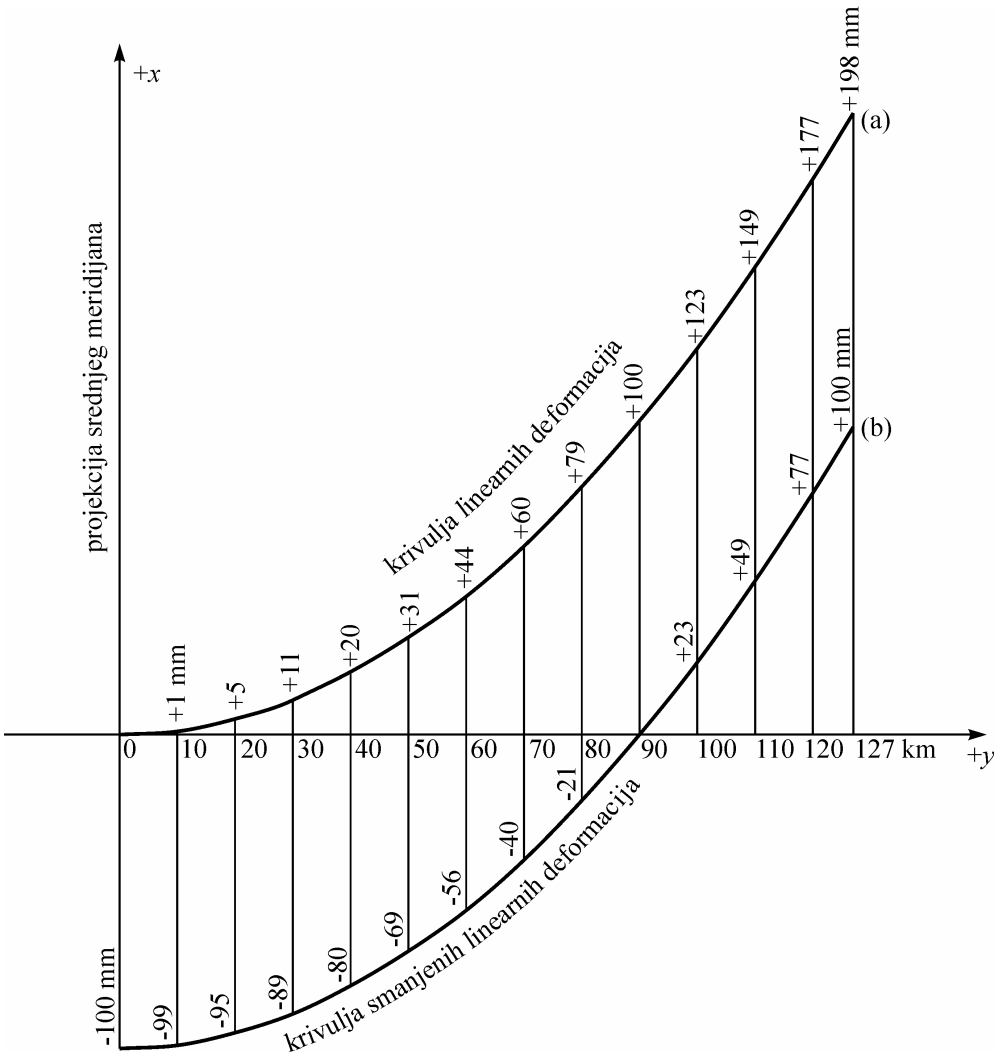
$$d = \frac{\bar{y}^2}{2R^2}. \tag{15.38}$$

15.8. Uvođenje linearne deformacije na srednjem meridijanu i praktično značenje tog postupka

Govoreći o osnovnim svojestvima Gauss-Krügerove projekcije naveli smo da u toj projekciji nema deformacija na srednjem meridijanu, tj. srednji meridijan se preslikava u pravoj veličini. To se najbolje vidi iz formule

$$d = \frac{\bar{y}^2}{2R^2}.$$

Što je $\bar{y}$ veći to su i deformacije veće. Zanima nas sada da vidimo kako rastu deformacije udaljavanjem od osi x, tj. srednjeg meridijana. Prikazat ćemo zakon rasporeda deformacija u grafičkom obliku. Na os y nanosit ćemo udaljenosti od srednjeg meridijana, a na os x deformacije i to deformacije na kilometar dužine izražene u milimetrima.



Slika 15.7. Krivulje linearnih deformacija u Gauss-Krügerovoj projekciji kod: a) nereduciranih i b) reduciranih koordinata

Sad se postavlja pitanje kolike se maksimalne deformacije mogu dozvoliti u jednom koordinatnom sustavu. Deformacije projekcije moraju biti manje od pogrešaka mjerenja u poligonskoj mreži odnosno triangulaciji IV reda ili drugim riječima točnost projekcije mora biti veća od točnosti mjerenja u triangulacijskoj mreži IV reda ili poligonskoj mreži. Obično se uzima da je relativna linearna pogreška poligonske mreže 1:3 000. Ako uzmemo da je točnost projekcije 1:10 000 očito je točnost projekcije tri puta veća od točnosti poligonske mreže i da se takva deformacija projekcije može prihvatiti, a da o njoj ne moramo voditi računa u računaju poligonske mreže.

Iz krivulje linearnih deformacija na sl. 15.7 vidimo da od srednjeg meridijana možemo ići na istok ili zapad do 90 km, a da linearne deformacije ne budu veće od 0.0001 (1:10 000). Dakle širina koordinatnog sustava uz tu točnost može iznositi 180 km.

Postavlja se pitanje ne bi li se uz istu točnost 1:10 000 moglo povećati područje preslikavanja tako da se sa što manje sustava obuhvati zadano područje. Zadatak smo riješili uvođenjem negativnih deformacija na srednjem meridijanu. Na srednjem meridijanu uveli smo maksimalnu negativnu deformaciju. Očito da u tom slučaju kad su deformacije u intervalu od -0.0001 do +0.0001 je područje preslikavanja veće nego u slučaju kad se deformacije kreću u intervalu od 0 do +0.0001. Uvođenjem negativne deformacije na srednjem meridijanu područje preslikavanja je prošireno i iznosi 127 km istočno i zapadno od srednjeg meridijana što znači 254 km.

Osnovne jednadžbe za $\bar{y}$ i $\bar{x}$ izveli smo uz uvjet da nema deformacija na srednjem meridijanu i dobili

$$\bar{y} = (y_1)l + (y_2)l^3 + (y_3)l^5,$$

$$\bar{x} = B + (x_1)l^2 + (x_2)l^4.$$

Postavlja se pitanje kako doći do koordinata kod kojih je na srednjem meridijanu uvedena negativna deformacija. Do tih koordinata doći ćemo množenjem koordinata $\bar{y}$ i $\bar{x}$ s modulom m_0 koji treba biti jednak mjerilu na srednjem meridijanu, tj.:

$$y = \bar{y} \cdot m_0 ,$$

$$x = \bar{x} \cdot m_0 .$$

Deformacija na srednjem meridijanu iznosi:

$$d = -0.0001,$$

a kako je

$$d = m - 1,$$

to je

$$m_0 = 0.9999.$$

Koordinate $\bar{y}$, $\bar{x}$ nazivamo nereducirane (nesmanjene), a koordinate y, x reducirane (smanjene).

Za sve praktične radove u nižoj geodeziji i za sva kartiranja koristimo reducirane koordinate (y, x), jer su te koordinate omogućile da se s dva koordinatna sustava pokrije područje Hrvatske.

Nereducirane koordinate ($\bar{y}$, $\bar{x}$) koristimo samo u onim računanjima kad se radi o preslikavanju između elipsoida i ravnine Gauss-Krügerove projekcije, jer su sve formule izvedene uz uvjet da nema deformacija na srednjem meridijanu. Npr. ako imamo zadane koordinate y i x, a treba izračunati φ i λ onda moramo prvo iz y i x izračunati $\bar{y}$, $\bar{x}$ pa izračunati φ i λ po formulama

$$\varphi = \varphi_1 + (\varphi_1)\bar{y}^2 + (\varphi_2)\bar{y}^4 + (\varphi_3)\bar{y}^6,$$

$$l = (l_1)\bar{y} + (l_2)\bar{y}^3 + (l_3)\bar{y}^5 .$$

Zaključak. Razlika reduciranih i nereduciranih koordinata je samo u rasporedu deformacija. Kod nereduciranih koordinata na srednjem meridijanu nema deformacija, udaljavanjem od srednjeg meridijana deformacije rastu i maksimalne su na granici sustava. Kod reduciranih koordinata na srednjem meridijanu su maksimalne negativne deformacije, udaljavanjem od srednjeg meridijana deformacije se smanjuju i na 90 km jednake su nuli. Nastavkom udaljavanja deformacije rastu. Ovakav raspored deformacija omogućio je veće područje preslikavanja kod reduciranih koordinata.

15.9. Sustavi Gauss-Krügerove projekcije u Hrvatskoj

Ustanovili smo u prethodnom odjeljku da primjenom reduciranih koordinata širina područja preslikavanja iznosi 127 km istočno i zapadno od srednjeg meridijana, što u stupanjskoj mjeri iznosi 1.5° ili čitava širina jednog sustava 3°. Kako projekcija ekvatora predstavlja os y, to apscise x računamo od ekvatora. Prednost takvog računanja za područja sjeverno od ekvatora jest u tome što su apscise uvijek pozitivne i što prema veličini apscise možemo približno zaključivati o položaju točke na Zemljinoj površini.

Da bismo izbjegli negativne ordinate dodajemo svim ordinatama 500 000 metara odnosno os y ima koordinatu y = 500 000 metara. Tako točke koje leže istočno od apscisne osi, odnosno od srednjeg meridijana, imaju ordinate veće od 500 000 m, a točke koje se nalaze zapadno od srednjeg meridijana imaju ordinate manje od 500 000 m, ali uvijek pozitivne.

Broj koordinatnog sustava u kojem se dotična točka nalazi stavlja se ispred iznosa ordinate. Tako npr. točka s koordinatama

$$y = 5\ 550\ 635.17$$

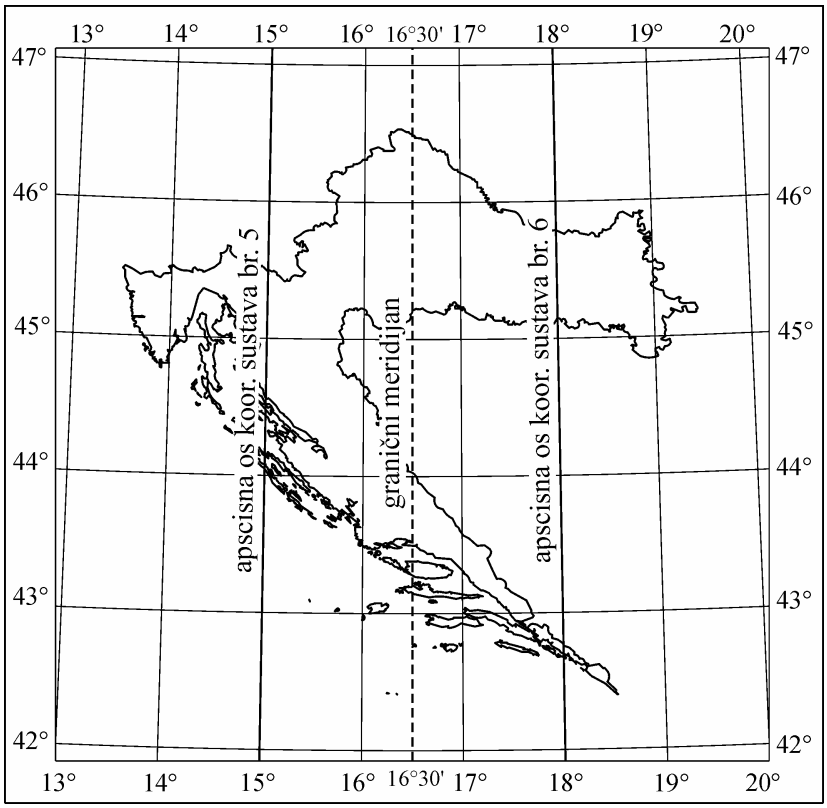
$$x = 5\ 050\ 127.18$$

nalazi se u 5. sustavu i to 50 635.17 m istočno od srednjeg meridijana. Točka s koordinatama

$$y = 6\,451\,832.54$$

$$x = 5\,060\,382.44$$

nalazi se u 6. sustavu i to 48 167.46 m zapadno od srednjeg meridijana.



Slika 15.8. Koordinatni sustavi Gauss-Krügerove projekcije na području Hrvatske

Prema tome da bismo dobili stvarnu udaljenost točke od srednjeg meridijana odnosno od osi x moramo od ordinata y oduzeti za

5. sustav: $K = 5\,500\,000$

6. sustav: $K = 6\,500\,000$.

Prema tome kod prelaza s $\bar{y}$, $\bar{x}$ na y, x bit će

$$y = \bar{y} \cdot m_0 + K\,,$$

$$x = \bar{x} \cdot m_0\,,$$

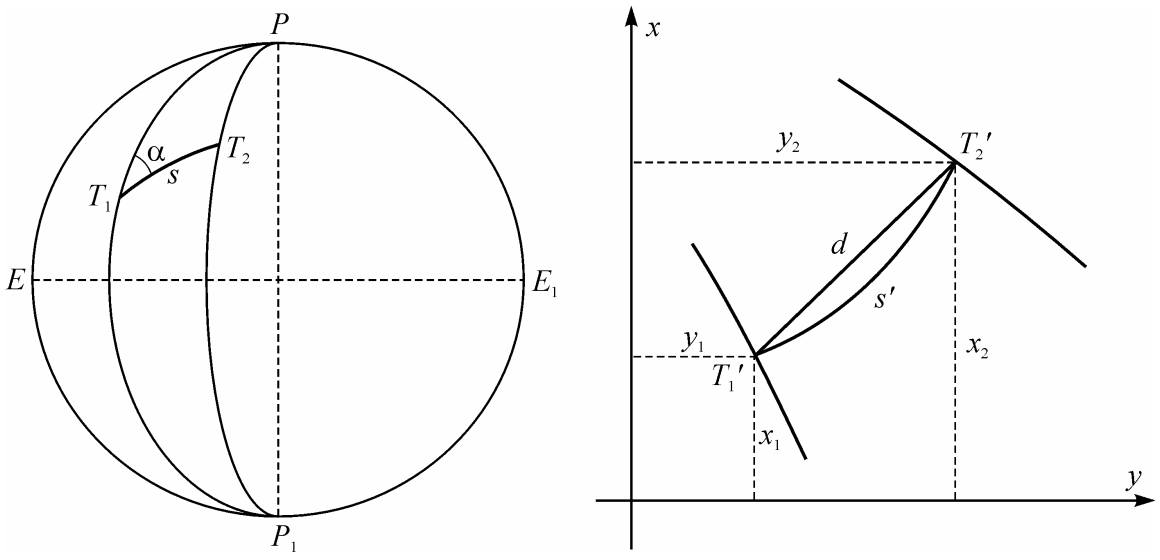
a

$$\bar{y} = \frac{y - K}{m_0},$$

$$\bar{x} = \frac{x}{m_0}.$$

15.10. Redukcija duljina

Neka su T_1 i T_2 krajnje točke geodetske linije s na elipsoidu (sl.15.9).



Slika 15.9. Geodetska linija na elipsoidu (s) i njena projekcija (s')

S T_1' i T_2' označene su projekcije tih točaka u ravnini Gauss-Krügerove projekcije, a sa s' projekcija (slika) geodetske linije s. Najkraći razmak između točaka T_1' i T_2' označen je s d.

Prema tome ovdje se pojavljuju tri veličine:

s ... geodetska linija na elipsoidu

s' ... projekcija geodetske linije na ravnini

d ... najkraći razmak na ravnini između točaka T_1' i T_2'.

Razliku između duljina s' i s nazivamo deformacijom duljina, a razliku između duljina d i s redukcijom duljina, tj.

$s' - s$ ... deformacija duljine T_1T_2,

$d - s$ ... redukcija duljine T_1T_2.

Da bismo odredili razliku između duljina d i s poslužit ćemo se linearnim mjerilom:

$$m = \frac{ds'}{ds},$$

odakle je

$$ds' = mds$$

$$s' = \int_0^s mds.$$

Za rješavanje ovog integrala primjenit ćemo SIMPSONOVU formulu za određivanje približne vrijednosti integrala:

$$s' = \int_0^s m ds = \frac{s}{6}(m_1 + 4m_m + m_2)\,. \tag{15.39}$$

Odavde slijedi

$$\frac{s'}{s} = \frac{1}{6}(m_1 + 4m_m + m_2)\,.$$

Za sva praktična računanja može se uzeti da je

$$s' \approx d$$

pa je

$$\frac{d}{s} = \frac{1}{6}(m_1 + 4m_m + m_2)\,, \tag{15.40}$$

gdje su

$$m_1 = 1 + \frac{\bar{y}_1^2}{2R_1^2} + \frac{\bar{y}_1^4}{24R_1^4}\,,$$

$$m_m = 1 + \frac{\bar{y}_m^2}{2R_m^2} + \frac{\bar{y}_m^4}{24R_m^4}\,, \tag{15.41}$$

$$m_2 = 1 + \frac{\bar{y}_2^2}{2R_2^2} + \frac{\bar{y}_2^4}{24R_2^4}\,.$$

Uvrstimo li u prije navedenu formulu izraze za m_1, m_m i m_2 i uz supstitucije

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_m - \frac{\Delta\bar{y}}{2}\,,$$

$$\bar{y}_2 = \bar{y}_m + \frac{\Delta\bar{y}}{2}$$

nakon sređivanja dobije se

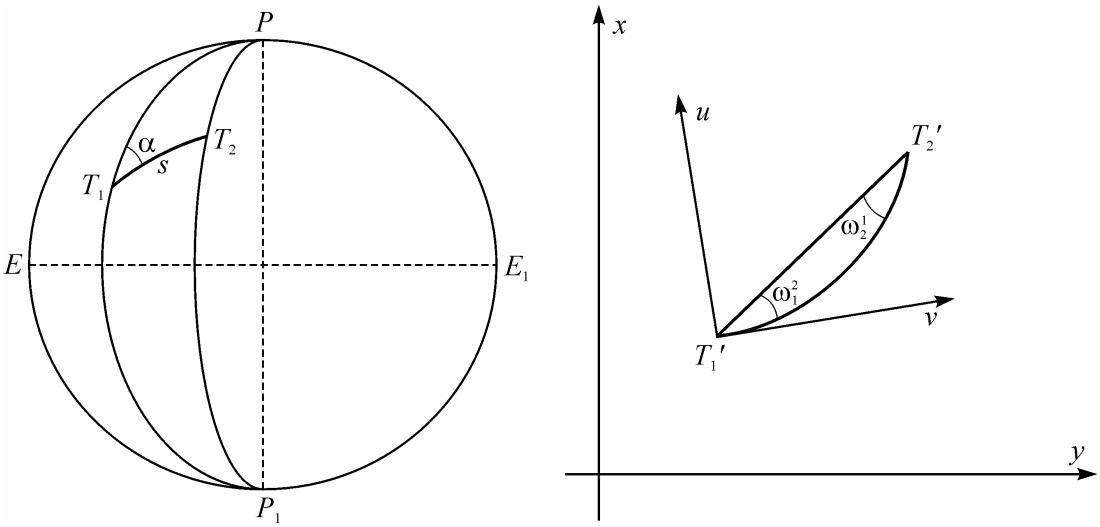
$$\frac{d}{s} = 1 + \frac{\bar{y}_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta\bar{y}^2}{24R_m^2} + \frac{\bar{y}_m^4}{24R_m^4}\,.$$

U praktičnim računanjima može se zadnji član zanemariti pa je

$$\frac{d}{s} = 1 + \frac{\bar{y}_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta\bar{y}^2}{24R_m^2}\,. \tag{15.42}$$

15.11. Redukcija pravaca

Neka su T_1 i T_2 krajnje točke geodetske linije na elipsoidu čija je je dužina s. S T_1' i T_2' označene su projekcije tih točaka u ravnini Gauss-Krügerove projekcije, sa s' projekcija geodetske linije, a s d ravna spojnica točaka T_1' i T_2'.



Slika 15.10.

Kutove u točkama T_1' i T_2' što ih zatvaraju projekcija geodetske linije i ravna spojnica označavamo s ω_1^2 i ω_2^1 i nazivamo redukcijama pravaca ili popravkama za zakrivljenost projekcije (slike) geodetske linije.

Postavimo li u točki T_1 pomoćni koordinatni sustav u, v tako da se pozitivna os v poklapa sa smjerom tangente na geodetsku liniju, a pozitivna os u sa smjerom normale (sl. 15.10) kut ω_1^2 određen je tada izrazom

$$\omega_1^2 = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}.$$

Razvojem u red dobijemo

$$\omega_1^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{u}{v}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u}{v}\right)^5 \ldots$$

Da bismo odredili kut ω_1^2 kao funkciju duljine luka S i zakrivljenosti K_1 u točki T_1' koristit ćemo jednadžbe krivulje u kanonskom obliku

$$v = S - K_1^2\frac{S^3}{6} - K_1K_1'\frac{S^4}{8} - \ldots$$

$$u = K_1\frac{S^2}{2} + K_1'\frac{S^3}{6} + \ldots$$

Uvrstimo li te izraze u formulu za ω_1^2 bit će:

$$\omega_1^2 = K_1 \frac{S}{2} + K_1' \frac{S^2}{6} + K_1'' \frac{S^3}{24} + \ldots$$

Ako zakrivljenost u točki T_1 zamjenimo zakrivljenošću u točki T_M bit će

$$\omega_1^2 = K_M \frac{S}{2} + K_M' \frac{S^2}{12} + K_M'' \frac{S^3}{48} + \ldots$$

To je formula s pomoću koje se mogu računati redukcije pravaca u bilo kojoj projekciji ako se odredi zakrivljenost K_M geodetske linije u toj projekciji.

Zakrivljenost projekcije geodetske linije u konformnim projekcijama računa se po formuli

$$K = \frac{\partial \ln m}{\partial u},$$

tj. jednaka je parcijalnoj derivaciji logaritma mjerila po vanjskoj normali. Desnu stranu tog izraza možemo napisati kao totalni diferencijal funkcije dviju varijabli

$$K = \frac{\partial \ln m}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial \ln m}{\partial y}\frac{dy}{du}.$$

Izračunavanjem K i uvrštavanjem u formulu za ω_1^2 dobije se konačna formula

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \psi_1 - \psi_2, \\ \omega_2^1 &= -(\psi_1 + \psi_2), \end{aligned} \tag{15.43}$$

gdje su

$$\begin{aligned} \psi_1 &= k_1 \Delta\bar{x}\, \bar{y}_m - k_2\, \bar{y}_m^3\, \Delta\bar{x} + k_3\ \ \bar{y}_m^2\, \Delta\bar{y}, \\ \psi_2 &= k_4\, \Delta\bar{y}\, \Delta\bar{x}, \end{aligned} \tag{15.44}$$

a

$$k_1 = \frac{\rho''}{2R_m^2}, \quad k_2 = \frac{\rho''}{6R_m^4}, \quad k_3 = \frac{\eta_m^2\, t_m\, \rho''}{R_m^3} \quad \text{i} \quad k_4 = \frac{\rho''}{12R_m^2}. \tag{15.45}$$

Tim formulama dobiva se točnost koja je dovoljna za triangulaciju I reda.

Ako su strane triangulacije kraće od 25 km, a $y_m \le 200$ km tada možemo ψ_1 i ψ_2 računati po formulama

$$\psi_1 = \rho'' \frac{\Delta\bar{x}\, \bar{y}_m}{2R_m^2}, \quad \psi_2 = \rho'' \frac{\Delta\bar{x}\, \Delta\bar{y}}{12R_m^2}. \tag{15.46}$$

Ako je

$$s < 12\,\text{km}, \quad y \le 200\,\text{km}$$

tada je

$$\omega_1^2 = \psi_1, \quad \omega_2^1 = -\psi_1, \tag{15.47}$$

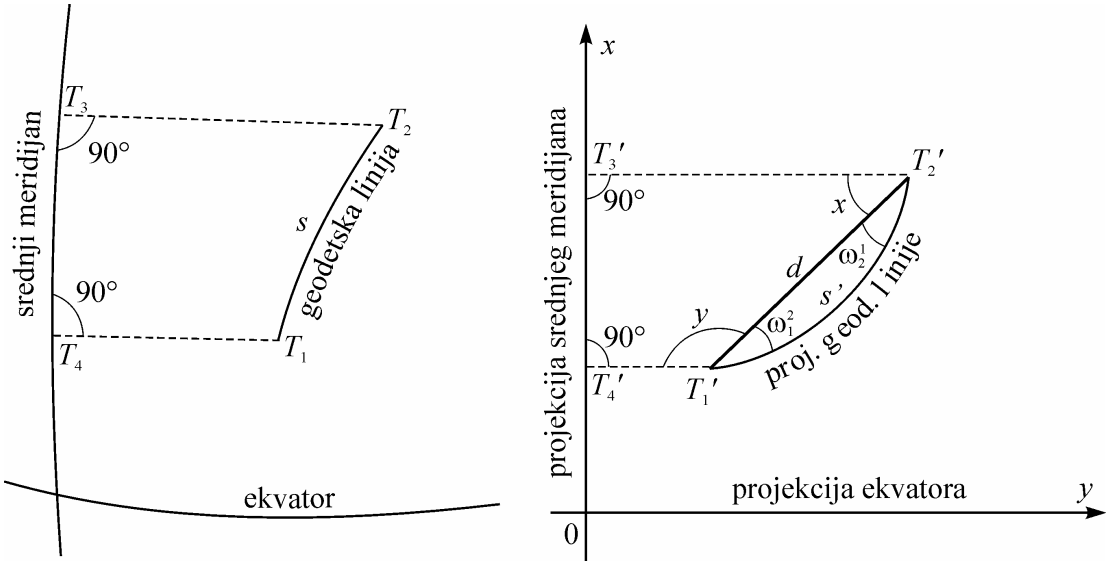
a

$$\psi_1 = \rho'' \frac{\Delta\bar{x}\,\bar{y}_m}{2R_m^2}. \tag{15.48}$$

15.12. Projekcija (slika) geodetske linije

U Gauss-Krügerovoj projekciji geodetska linija preslikava se kao krivulja, koja je svojom konkavnom stranom okrenuta osi x. To se može dokazati ovim razmatranjem:

Neka su T_1', T_2', T_3' i T_4' projekcije točaka T_1, T_2, T_3 i T_4 (sl. 15.11).

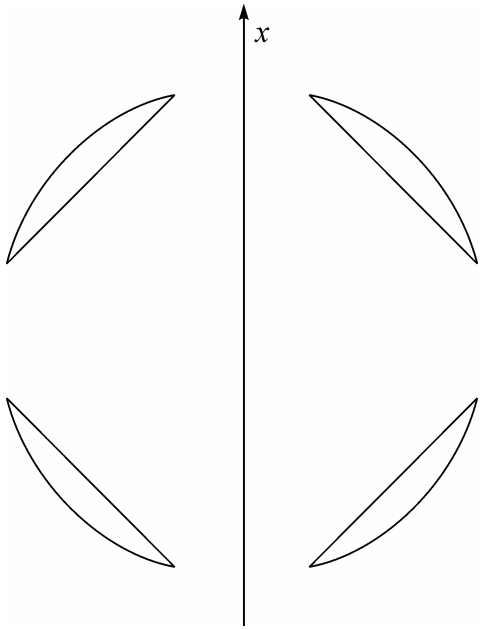


Slika 15.11. Geodetska linija na elipsoidu (s) i njena slika (s') u Gauss-Krügerovoj projekciji

Zbroj kutova u četverokutu T_1, T_2, T_3 i T_4 na elipsoidu je $360° + \varepsilon$, gdje je ε sferni eksces. Zbog konformnosti projekcije suma kutova u ravnini mora biti jednaka sumi kutova na elipsoidu, pa prema slici slijedi:

$$x + y + \omega_1^2 + \omega_2^1 + 180° = 360° + \varepsilon.$$

Prema tome slijedi da je zbroj kutova ω_1^2 i ω_2^1 jednak sfernom ekscesu ε. Ujedno vidimo da zbroj kutova u četverokutu T_1, T_2, T_3, T_4 u ravnini kojem je jedna stranica projekcija geodetske linije mora biti veći od 360°, a to je moguće samo ako je projekcija geodetske linije svojom konkavnom stranom okrenuta prema osi x (sl. 15.12).

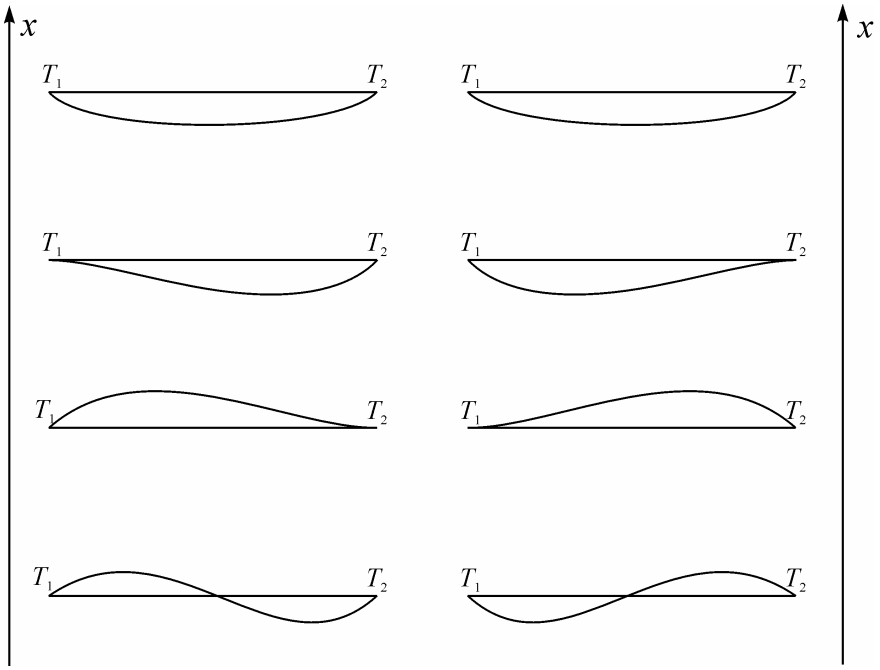


Slika 15.12. Projekcija (slika) geodetske linije u Gauss-Krügerovoj projekciji

To svojstvo geodetske linije narušeno je u ova dva slučaja (Borčić, 1976):

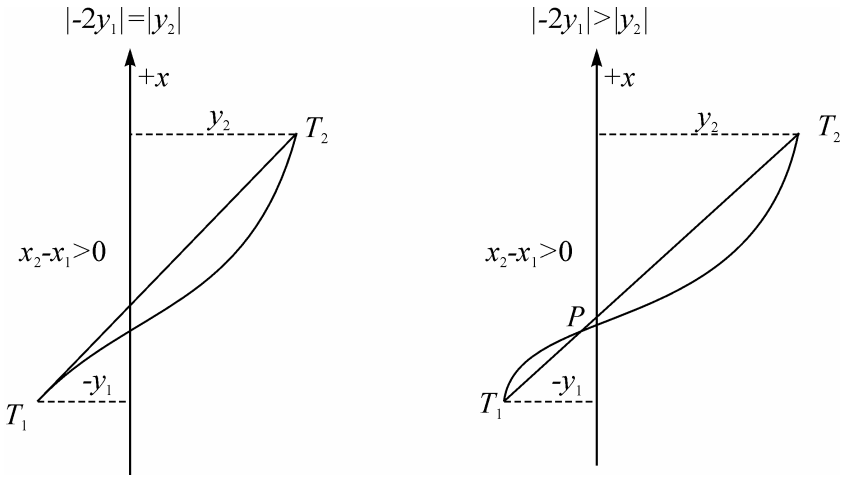
1. kada je iznos kuta ν_1^2 blizu ili jednak 90°
2. kada projekcija geodetske linije siječe os x.

Kada je $x_2 - x_1 = 0$, tada projekcija geodetske linije ima oblike prikazane na sl. 15.13. Potrebno je napomenuti da su popravci ω_1^2 i ω_2^1 kad je $x_2 - x_1 = 0$, vrlo mali, tako da se u većini slučajeva mogu zanemariti.

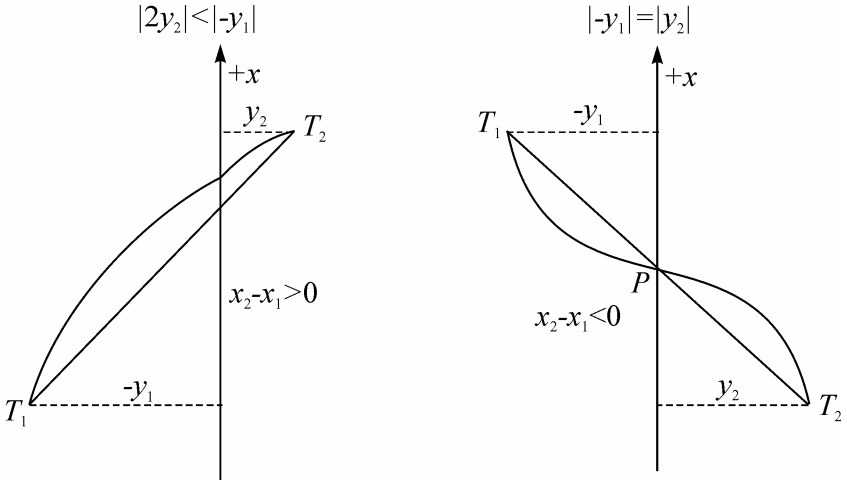


Slika 15.13. Projekcija geodetske linije kad je $x_2 - x_1 = 0$

Kad su ordinate krajnjih točaka projekcije geodetske linije različitog predznaka, tad projekcija geodetske linije ima različite oblike. Neki od tih oblika prikazani su na sl. 15.14 i sl. 15.15.



Slika 15.14.

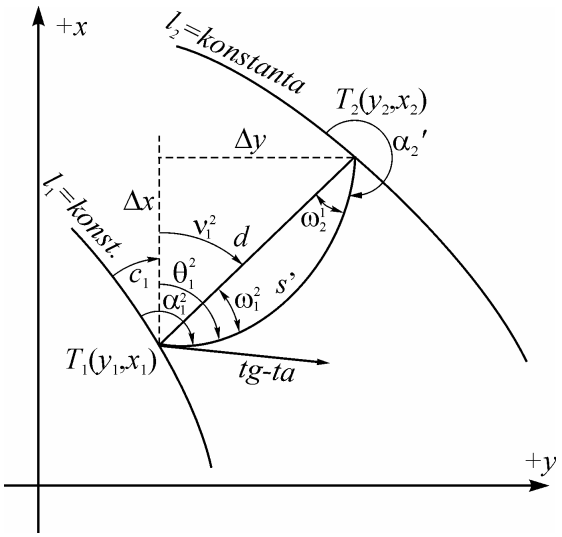


Slika 15.15.

15.13. Osnovni ili prvi geodetski zadatak

U ovom zadatku radi se o računanju pravokutnih koordinata na ravnini kad su poznate pravokutne koordinate za jednu točku i duljina i azimut geodetske linije na elipsoidu prema točki koja se računa.

Neka je krivulja s' projekcija geodetske linije na ravnini, čije su krajnje točke T_1 i T_2 (sl. 15.16). Zadane su koordinate točke $T_1(y_1, x_1)$, azimut α_1^2 i duljina geodetske linije s_1^2 na elipsoidu, a potrebno je izračunati pravokutne koordinate točke $T_2(y_2, x_2)$.



Slika 15.16. Prvi geodetski zadatak

Iz sl. 15.16 vidimo da je

$$\bar{y}_2 = \bar{y}_1 + \Delta\bar{y}\,, \quad \Delta\bar{y} = d\sin\nu_1^2\,,$$

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \Delta\bar{x}\,, \quad \Delta\bar{x} = d\cos\nu_1^2\,.$$

Da bismo riješili zadatak potrebno je odrediti veličine d i ν_1^2. Prema sl. 15.16 imamo

$$\nu_1^2 = \alpha_1^2 - c_1 - \omega_1^2\,.$$

Budući da je točka T_1 zadana, konvergenciju meridijana c_1 možemo izračunati po formuli

$$c_1 = (c_3)\bar{y}_1 + (c_4)\bar{y}_1^3 + (c_5)\bar{y}_1^5\,.$$

Za računanje redukcija pravca ω_1^2 potrebno je imati pravokutne koordinate obiju krajnjih točaka projekcije geodetske linije. Međutim, kako imamo koordinate samo jedne točke, mjesto koordinata druge točke mogu nam poslužiti približne koordinate, koje možemo izračunati iz poznatih veličina. Približne koordinatne razlike Δx_0 i Δy_0 izračunat ćemo iz smjernog kuta geodetske linije θ_1^2 izračunatog po formuli

$$\theta_1^2 = \alpha_1^2 - c_1$$

i dužine s

$$\Delta\bar{x}_0 = s\cos\theta_1^2,$$

$$\Delta\bar{y}_0 = s\sin\theta_1^2.$$

Približne koordinate točke T_2 $(\bar{y}_2)_0$ i $(\bar{x}_2)_0$ izračunat ćemo po formulama

$$(\bar{y}_2)_0 = \bar{y}_1 + \Delta\bar{y}_0\,,$$

$$(\bar{x}_2)_0 = \bar{x}_1 + \Delta\bar{x}_0\,,$$

a približne koordinate srednje točke

$$(\bar{x}_m)_0 = \bar{x}_1 + \frac{\Delta\bar{x}_0}{2},$$

$$(\bar{y}_m)_0 = \bar{y}_1 + \frac{\Delta\bar{y}_0}{2}.$$

Sad možemo izračunati popravku za zakrivljenost projekcije geodetske linije ω_1^2 po formuli

$$\omega_1^2 = \psi_1 - \psi_2,$$

gdje su

$$\psi_1 = k_1\Delta\bar{x}_0(\bar{y}_m)_0 - k_2(\bar{y}_m)_0^3\Delta\bar{x}_0 + k_3(\bar{y}_m)_0^2\Delta\bar{y}_0,$$

$$\psi_2 = k_4\Delta\bar{y}_0\Delta\bar{x}_0.$$

Dužinu d izračunat ćemo iz formule

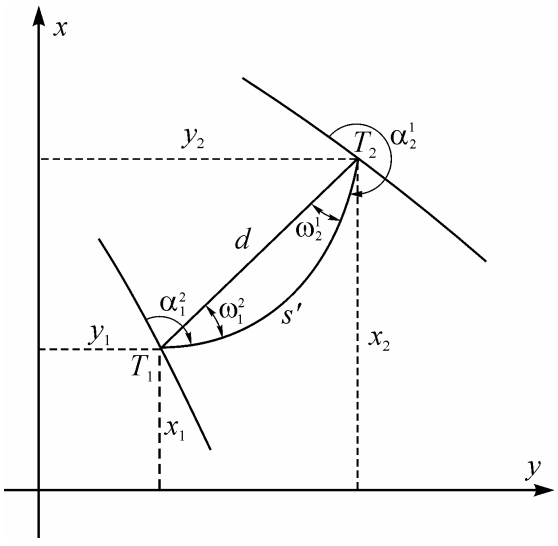
$$\frac{d}{s} = 1 + \frac{(\bar{y}_m)_0^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta\bar{y}_0^2}{24R_m^2}.$$

Time su određene sve potrebne veličine za izračunavanje definitivnih koordinatnih razlika čijim dodavanjem koordinatama točke T_1 dobivamo koordinate točke T_2.

Sve formule i računske operacije u ovom zadatku poznate su iz prethodnih odjeljaka.

15.14. Obrnuti ili drugi geodetski zadatak

U ovom zadatku poznate su pravokutne koordinate y_1, x_1 i y_2, x_2 točaka T_1 i T_2 projekcije geodetske linije, a potrebno je izračunati α_1^2 i α_2^1 i duljinu geodetske linije na elipsoidu (sl. 15.17).



Slika 15.17 Drugi geodetski zadatak

Zadatak se rješava po ovim formulama

$$\Delta\bar{y} = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 ,$$

$$\Delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 ,$$

$$\nu_1^2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta\bar{x}}\right),$$

$$d = \sqrt{\Delta\bar{y}^2 + \Delta\bar{x}^2} .$$

Azimut α_1^2 računamo po formuli

$$\alpha_1^2 = \nu_1^2 + c_1 + \omega_1^2 ,$$

gdje je

$$c_1 = (c_3)\bar{y}_1 + (c_4)\bar{y}_1^3 + (c_5)\bar{y}_1^5 ,$$

$$\omega_1^2 = \psi_1 - \psi_2 .$$

Azimut α_2^1 računamo po formuli

$$\alpha_2^1 = \nu_2^1 + c_2 + \omega_2^1 ,$$

gdje su

$$\nu_2^1 = \nu_1^2 \pm 180° ,$$

$$c_2 = (c_3)\bar{y}_2 + (c_4)\bar{y}_2^3 + (c_5)\bar{y}_2^5 ,$$

$$\omega_2^1 = -(\psi_1 + \psi_2) .$$

Duljina geodetske linije s dobije se iz formule

$$\frac{d}{s} = 1 + \frac{\bar{y}_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta\bar{y}^2}{24R_m^2} ,$$

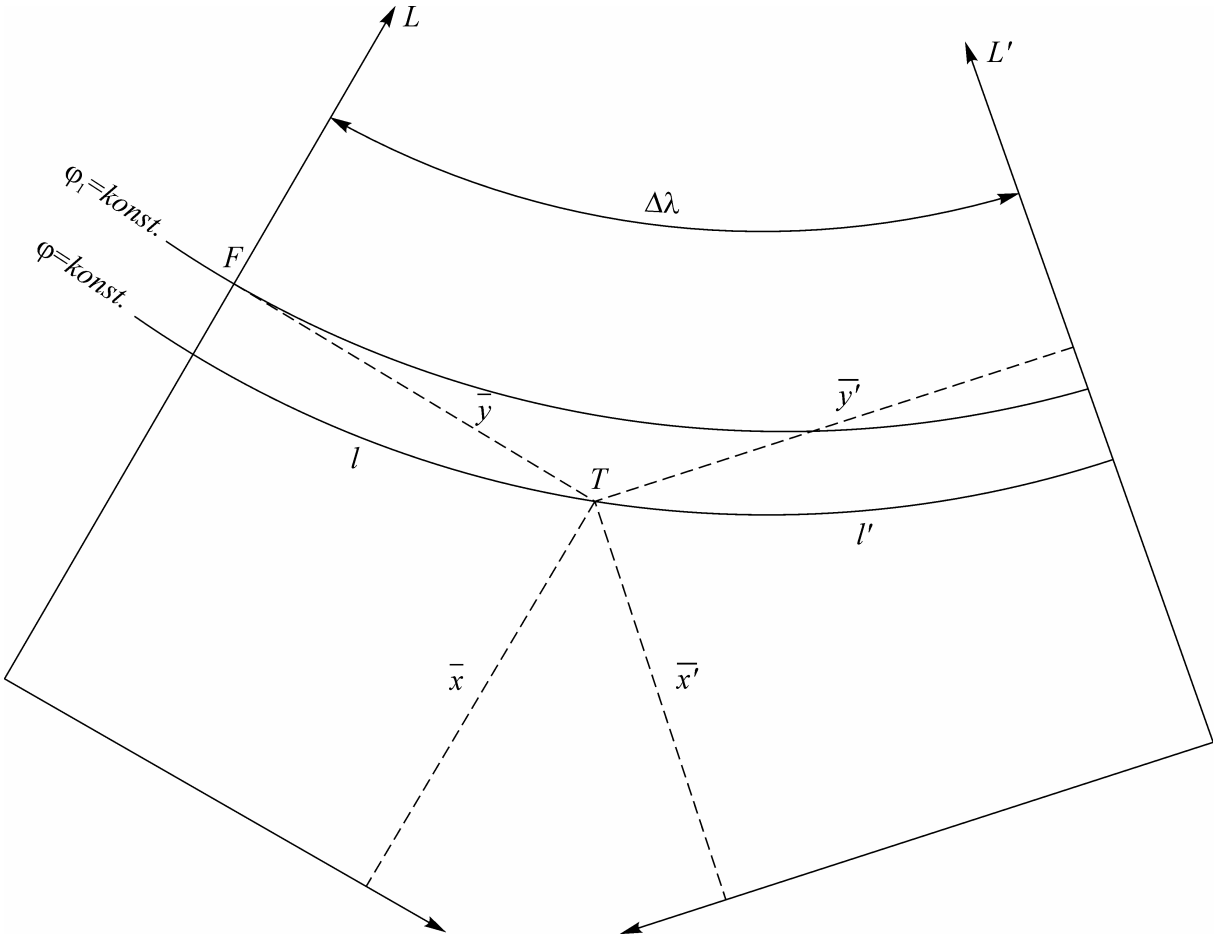
gdje je

$$\bar{y}_m = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} .$$

Sve navedene formule poznate su iz prethodnih odjeljaka.

15.15. Transformacija pravokutnih koordinata na ravnini iz jednog koordinatnog sustava u drugi (susjedni)

Zadane su Gauss-Krügerove koordinate x, y u koordinatnom sustavu, čiji srednji meridijan ima geografsku duljinu L, a traže su Gauss-Krügerove koordinate x', y' u susjednom koordinatnom sustavu čiji srednji meridijan ima geografsku duljinu L' (sl. 15.18). S tim zadatkom susrećemo se u praksi pri izvođenju geodetskih radova na granici dvaju koordinatnih sustava.



Slika 15.18. Susjedni koordinatni sustavi

Zadatak je moguće riješti na nekoliko načina od kojih ovdje navodimo dva koji se najčešće primjenjuju u praksi. To su:

1. transformacija koordinata prelaskom na geografske koordinate,
2. direktna transformacija koordinata.

15.15.1. Transformacija prelaskom na geografske koordinate

Zadatak se rješava na sljedeći način. Iz zadanih pravokutnih koordinata y, x izračuna se po poznatim formulama (v. §15.5) geografske koordinate φ i l. Koordinata l je geografska duljina izračunata od srednjeg meridijana s geografskom duljinom L.

Geografsku duljinu l' sračunatu od srednjeg meridijana susjednog koordinatnog sustava izračunat ćemo po formuli

$$l' = \pm(|L' - L| - |l|),$$

$$l' = (3° - |l|).$$

Predznak od l' uvijek je suprotan predznaku od l.

Sada se iz geografskih koordinata φ i l' računaju pravokutne koordinate y', x' u susjednom koordinatnom susutavu. Koriste se ranije formule (v. §15.4). Tok računanja je prema tome sljedeći:

$$x, y \rightarrow \bar{x}, \bar{y} \rightarrow \varphi, l \rightarrow \varphi, l' \rightarrow \bar{x}', \bar{y}' \rightarrow x', y'.$$

Takav postupak prikladan je za računanje pomoću svih vrsta računala. Ako imamo sastavljene programe za računanje geografskih koordinata φ i l iz Gauss-Krügerovih koordinata i program za računanje Gauss-Krügerovih koordinata iz geografskih koordinata, tada nije potreban poseban program za transformaciju koordinata.

15.15.2. Direktna transformacija

Ako je potrebno transformirati vrlo veliki broj točaka (npr. 100000*) iz jednog koordinatnog sustava u drugi susjedni, tada je, što se kompjutorskog vremena tiče, najekonomičnije primjeniti direktnu transformaciju. Označimo li s L srednji meridijan zapadnog sustava, L' srednji meridijan istočnog sustava, a s $\Delta\lambda$ razliku geografskih duljina tih dvaju meridijana (sl. 15.18), tada formule za transformaciju (Ehlert, 1970) glase:

$$\bar{y}' = z + \frac{1}{6N^2}(1 - t^2 + \eta^2)z^3 + \frac{1}{2N^2}t^2 z\bar{y}^2 + \frac{1}{6N^2}(-1 - t^2 + 2t^4 - \eta^2)\bar{y}^3 +$$

$$+ \frac{1}{120N^4}(5 - 18t^2 + t^4)z^5 + \frac{1}{12N^4}(5t^2 - t^4)z^3\bar{y}^2 + \frac{1}{12N^4}(-1 - t^2 + 2t^4)z^2\bar{y}^3 + \quad (15.49)$$

$$+ \frac{1}{24N^4}(-8t^2 - 3t^4)z\bar{y}^4 + \frac{1}{120N^4}(5 + 18t^2 + 4t^4)\bar{y}^5,$$

* Tako veliki broj točaka pojavit će se pri digitalizaciji sadržaja karte i transformaciji u susjedni sustav.

$$\bar{x}' = \bar{x} + \frac{t}{2N}(z^2 - \bar{y}^2) + \frac{t}{24N^3}(5 - t^2 + 9\eta^2)z^4 + \frac{t}{4N^3}(-1 + t^2 - \eta^2)z^2\bar{y}^2 + \\ + \frac{t}{6N^3}(-1 - 2t^2 - \eta^2)z\bar{y}^3 + \frac{t}{24N^3}(5 + 3t^2 + \eta^2)\,\bar{y}^4. \tag{15.49}$$

U tim formulama pojedine oznake imaju ova značenja:

$\bar{x}$, $\bar{y}$ ... koordinate točke u sustavu iz kojeg se transformiraju točke,

$\bar{x}'$, $\bar{y}'$ ... kordinate točke u sustavu u koji se transformiraju točke,

$z = \bar{y} - N\Delta\lambda \cdot \cos\varphi_1$ (pri prijelazu iz istočnog u zapadni sustav uzima se $\Delta\lambda$ s negativnim predznakom),

φ_1 ... širina točke F koja leži na srednjem meridijanu zadanog sustava i ima apscisu $\bar{x}$,

$t = \operatorname{tg}\varphi_1$, $\eta = e'\cos\varphi_1$,

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi_1}}, \quad e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \quad e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}.$$

Širinu φ_1 odredit ćemo postupkom opisanim u odjeljku 15.5.

16. MATEMATIČKA OSNOVA TOPOGRAFSKIH KARATA HRVATSKE

16.1. Topografske karte izrađene na osnovi prve topografske izmjere bivše Jugoslavije

Vojnogeografski institut iz Beograda izvršio je od 1920. do 1928. u Srbiji, Crnoj Gori i Makedoniji topografsku izmjeru u mjerilu 1:50 000. Za područje Hrvatske, Slovenije i Bosne i Hercegovine koje su bile u sastavu Austro-Ugarske postojala je dobra karta Bečkog vojnogeografskog instituta u mjerilu 1:75 000. Za ta područja izvršena je od 1929. do 1933. godine obnova sadržaja i od originala austrougarske izmjere sastavljeni su originali u mjerilu 1:50 000.

Na osnovi terenskih originala izrađena je Specijalna karta Jugoslavije u mjerilu 1:100 000 u poliedarskoj projekciji. Početni meridijan bio je pariški. Karta je imala 197 listova veličine 30'×30'. Od 1931. ta je karta izdavana i u mjerilu 1:50 000.

Na osnovi topografske izmjere izvršene 1934-1939. izrađeno je 208 listova karte 1:25 000 i to za područje Slovenije 118 listova, za područje Hrvatske 52 lista i 38 listova za područje Srbije. Karta je izrađena u Gauss-Krügerovoj projekciji, ali su format i podjela na listove bili prilagođeni ostalim kartama tadašnjeg Vojnogeografskog instituta, tj. početni meridijan je bio pariški, a dimenzije listova su iznosile 7'30"×7'30".

Od 1945. do 1951. izrađena je topografska karta mjerila 1:200 000. Osnovni izvor za tu kartu bila je Specijalna karta u mjerilu 1:100 000, koja je 1946. reambulirana. I ta je karta izrađena u poliedarskoj projekciji s istom podjelom na listove kao i ostale karte.

Podjela navedenih topografskih karata uzima za osnovu list karte 1:200 000. Svaki list sadrži 4 lista neposredno krupnijeg mjerila (sl.16.1). Osim naziva, prema najpoznatijem naselju ili geografskom objektu na tom listu, topografske karte 1:100 000 i 1:200 000 imaju i svoj broj. Numeracija je izvršena po redovima od sjevera prema jugu, a u pojedinom redu od zapada na istok. List karte 1:50 000 nosi naziv i broj pripadnog lista karte 1:100 000 s dodatnom oznakom 1, 2, 3 ili 4. List karte 1:25 000 ima pored ovih oznaka i dodatnu oznaku a, b, c ili d (sl. 16.1).

16.1.1. Pravokutna koordinatna mreža

Mreža meridijana i paralela obično se ne iscrtava unutar okvira listova topografskih karata. Razloga ima više. Meridijani i paralele preslikavaju se u većini projekcija kao krivulje. Čak i kad preslikane krivulje smijemo zamijeniti pravcima, dobijena figura omeđena s dva meridijana i dvije paralele nema oblik ni pravokutnika ni kvadrata, već u najpovoljnijem slučaju trapeza. Kartiranje točaka ili očitavanje koordinata na osnovi koordinatnih linija takvog oblika nije jednostavno. Da bi se takvi zadaci, koji su u radu s

topografskim kartama česti, olakšali, na sve topografske karte ucrtava se pravokutna koordinatna mreža. To je sustav međusobno okomitih linija na karti, paralelnih koordinatnim osima na izabranim međusobno jednakim udaljenostima. Pravokutna mreža na topografskim kartama omogućuje:

1. jednostavno određivanje pravokutnih koordinata svake točke na karti, u granicama grafičke točnosti,
2. jednostavno kartiranje svake točke na osnovi danih pravokutnih koordinata,
3. laku i jednoznačnu identifikaciju svakog objekta i jednostavno računanje smjernih kutova,
4. jednostavno ocjenjivanje i mjerenje udaljenosti na karti, jer pravokutna mreža predstavlja pogodan mjerni oslonac unutar polja karte (Peterca i dr., 1974).

Slika 16.1. Podjela na listove topografskih karata mjerila 1:25 000, 1:50 000, 1:100 000 i 1:200 000

Budući da u poliedarskoj projekciji svaki list čini cjelinu za sebe, ne postoji jedinstveni projekcijski koordinatni sustav koji sve listove povezuje u cjelinu. To je veliki nedostatak poliedarske projekcije. Stoga je 1931. godine Vojnogeografski institut odlučio na topografske karte u poliedarskoj projekciji nanesti pravokutnu mrežu Gauss-Krügerove projekcije, koja je 1924. godine usvojena za potrebe državne izmjere teritorija Jugoslavije. Postavilo se pritom pitanje koliko će se pravokutna mreža Gauss-Krügerove projekcije preslikana na listove karata u poliedarskoj projekciji deformirati. Ispitivanja su pokazala da su izobličenja linija mreže manja od grafičke točnosti i, prema tome, zanemariva. Stoga je na sve listove karata mjerila 1:50 000 i 1:100 000 nanesena pravokutna mreža Gauss-Krügerove projekcije petog, šestog ili sedmog sustava.

Pravokutnu mrežu Gauss-Krügeorove projekcije moguće je nanijeti na list karte u poliedarskoj projekciji na ovaj način. Na pravokutnu mrežu označenu koordinatama Gauss-Krügerove projekcije kartiramo vrhove listova karte poliedarske projekcije na osnovi Gauss-Krügerovih koordinata tih vrhova izračunatih iz geografskih koordinata. Time je utvrđen položaj pravokutne mreže Gauss-Krügerove projekcije u odnosu na okvir lista karte u poliedarskoj projekciji.

Ako sa topografske karte 1:50 000 ili 1:100 000 na osnovi tako nanesene mreže očitamo Gauss-Krügerove koordinate neke trigonometrijske točke i usporedimo ih s koordinatama iz Spiska trigonometrijskih točaka, dobit ćemo na pojedinim dijelovima neslaganja i do 120 metara. To je znatno više nego što bi se s obzirom na točnost izrade karte i točnost čitanja koordinata moglo očekivati.

Do slične pojave dolazi ako neku točku zadanu Gauss-Krügerovim koordinatama kartiramo pomoću pravokutne mreže na te karte. Točka nanesena na kartu ne pada na mjesto, gdje bi trebala pasti s obzirom na situaciju i reljef.

Uzrok tim neslaganjima je razlika između geodetske osnove na kojoj su izrađene topografske karte 1:50 000 i 1:100 000 i današnje triangulacije. Neslaganja imaju sistematski karakter. Za njihovo uklanjanje izrađeni su specijalni grafikoni (Radošević, 1979).

Gauss-Krügerova mreža na karti mjerila 1:200 000 izrađenoj u poliedarskoj projekciji nije identična s Gauss-Krügerovom mrežom na kartama mjerila 1:50 000 i 1:100 000. Pri izradi te karte odlučeno je, po uzoru na neke druge države, da se na kartu nanese Gauss-Krügerova mreža šesterostupanjskih sustava. Zbog toga su mreže petog i sedmog sustava produžene do meridijana s geografskom duljinom $\lambda = 18°$. Prema tome to je mreža petog i sedmog sustava produžena preko šestog sustava. Mjerilo na srednjem meridijanu ostalo je kao i u trostupanjskim sustavima, $m_0 = 0.9999$. To znači da Gauss-Krügerova mreža na karti 1:200 000 nije identična s Gauss-Krügerovom mrežom na kartama 1:50 000 i 1:100 000 jedino između meridijana s geografskim duljinama $\lambda = 16°30'$ i $\lambda = 19°30'$.

16.2. Topografske karte izrađene na osnovi druge topografske izmjere bivše Jugoslavije

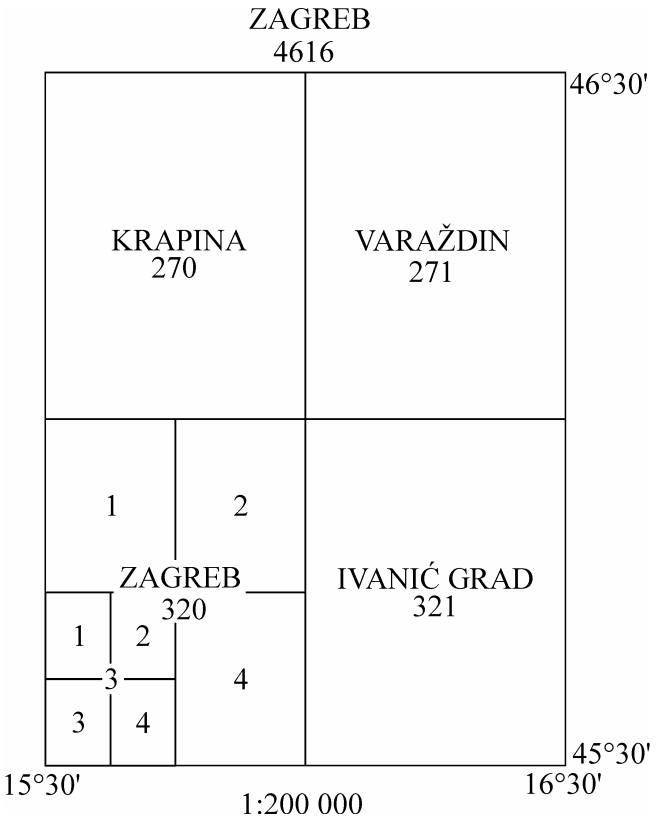
Druga topografska izmjera bivše Jugoslavije provedena je od 1947. do 1976. godine. To je ujedno prva integralna izmjera teritorija Jugoslavije. Na osnovi te izmjere izrađena je osnovna topografska karta Jugoslavije u mjerilu 1:25 000. Karta je izrađena u tri sustava Gauss-Krügerove projekcije na osnovi dimenzija Besselova elipsoida. Geografske koordinate računate su od Greenwicha. Završetkom te karte dobijen je osnovni izvor za sastavljanje topografskih karata sitinijih mjerila, tj. mjerila 1:50 000, 1:100 000 i 1:200 000.

Pri izradi karte 1:25 000 odlučeno je da se za tu kartu, kao i za karte sitnijih mjerila usvoji podjela na listove, koja za osnovu ima list Međunarodne karte 1:1 000 000. Zbog više nedostataka, a prvenstveno male površine listova karata mjerila 1:300 000 i krupnijih, izvršena je 1965. godine djelomična revizija formata i oznaka listova topografskih karata.

Za osnovu nove podjele na listove uzet je list karte mjerila 1:200 000. Način podjele i veličine listova isti su kao i kod ostalih karata, kod kojih je početni meridijan bio pariški. Različite su jedino oznake listova. Oznaku lista karte 1:200 000 čine geografske koordinate centralne točke lista izražene u stupnjevima. Npr., ako centralna točka lista ima koordinate $\varphi = 45°$, $\lambda = 16°$, onda je njegova oznaka 4516. List karte 1:100 000 ima naziv prema najpoznatijem naseljenom mjestu ili geografskom objektu na tom listu i troznamenkastu oznaku. Listovi karata 1:50 000 i 1:25 000 nose oznaku lista 1:100 000 i dodatne brojeve 1, 2, 3 ili 4. Veličina listova i oznake tog sustava podjele dani su u tablici 16.1. U drugom izdanju karate mjerila 1:25 000 svi listovi te karte imaju i svoje nazive.

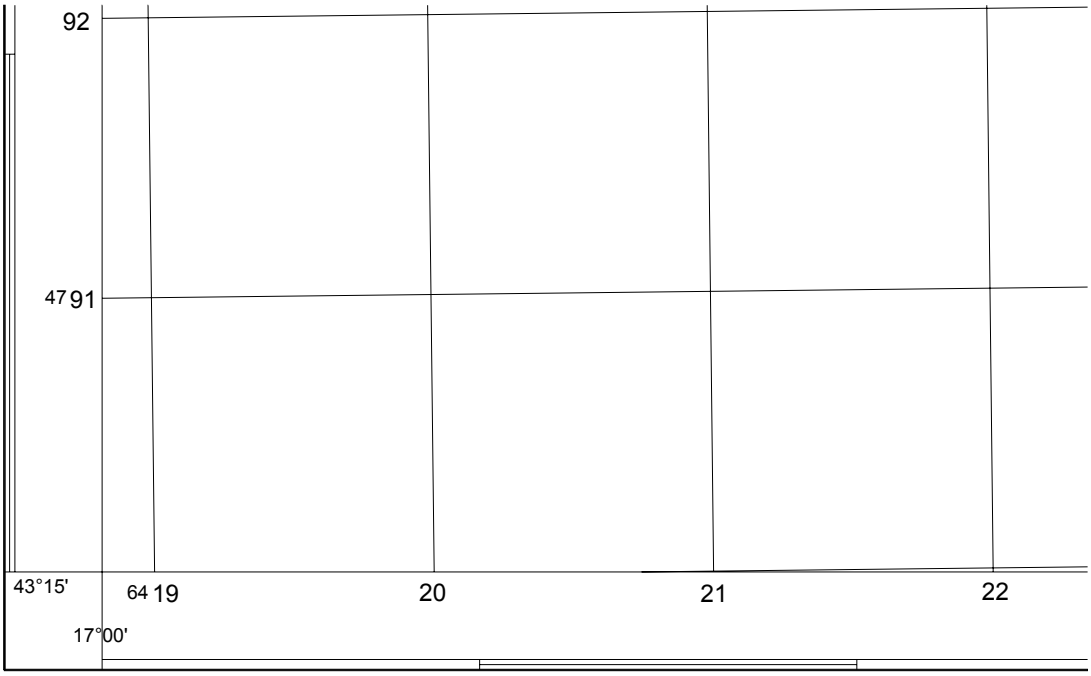
Tablica 16.1. Dimenzije, oznake i broj listova područja Hrvatske

Mjerilo	Dimenzije		Oznaka lista	Dimenzije u cm		Broj listova
	po φ	po λ		po merid.	po paral.	
1:200 000	1°	1°	4616	55.5	40	19
1:100 000	30'	30'	320	55.5	40	59
1:50 000	15'	15'	320-2	55.5	40	180
1:25 000	7'30"	7'30"	320-2-1	55.5	40	600



Slika 16.2. Podjela na listove topografskih karata mjerila 1:25 000, 1:50 000, 1:100 000 i 1:200 000

Na svakom listu iscrtana je pravokutna mreža petog, šestog ili sedmog sustava. Na kartama mjerila 1:25 000 i 1:50 000 mreža je iscrtana svaka četiri centimetra, tj. svakih jedan odnosno dva kilometra (sl. 16.3). Na karti mjerila 1:100 000 razmak između linija mreže iznosi dva centimetra (2 km), a na karti mjerila 1:200 000 pet centimetara (10 km). Uz okvir karte označeni su plavom bojom presjeci linija pravokutne koordinatne mreže susjednog sustava s okvirom karte i upisane njihove koordinate. Na taj način moguće je, ako je potrebno, rekonstruirati na listu pravokutnu koordinatnu mrežu susjednog sustava.



Slika 16.3. Dio okvira karte mjerila 1:25 000

Uprava za graditeljstvo Ministarstva obrane Republike Hrvatske izradila je 1995. novi pregledni list za karte mjerila 1:25 000. Na tom preglednom listu promijenjeni su jedino nazivi pojedinih listova karata mjerila 1:100 000 i 1:25 000 na granici s novim državama. Tako je, npr., Krapina novi naziv lista broj 270 karte mjerila 1:100 000, umjesto dotadašnjeg naziva Ptuj (sl. 16.2). Taj je pregledni list prijelazno rješenje do izrade novog sustava vojnih topografskih karata.

I na topografskim kartama izdanja Državne geodetske uprave Republike Hrvatske promijenjeni su nazivi pojedinih listova na granici s novim državama.

17. IZBOR PROJEKCIJE

17.1. Izbor projekcije za potrebe državne izmjere

Projekcija za potrebe državne izmjere je projekcija u kojoj će se izvršiti izjednačenje trigonometrijske mreže (osim mreže 1. reda) i koja će poslužiti za preračunavanje koordinata trigonometrijskih točaka u ravninu. U toj će projekciji, prema tome, biti određene definitivne pravokutne koordinate trigonometrijskih točaka u ravnini. Izabrana projekcija treba poslužiti i kao matematička osnova za izradu planova i karata najkrupnijih mjerila.

Projekcija za potrebe državne izmjere bira se prema slijedećim zahtjevima:

1) uz zadanu točnost projekcije potrebno je obuhvatiti što je moguće veće područje preslikavanja, odnosno zadano područje obuhvatiti s minimalnim brojem koordinatnih sustava; jednako je važno da dužina granične linije između koordinatnih sustava bude što kraća;
2) računanje i uzimanje u obzir deformacije kutova i dužina i računanje redukcije pravaca i dužina treba biti što jednostavnije;
3) u računanju trigonomatrijske mreže 4. reda i u većini praktičnih geodetskih i topografskih radova trebaju defomacije projekcije biti zanemarive;
4) traži se što je moguće veća jednoobraznost u svim računanjima neovisno o koordinatnim sustavima.

Pri izboru projekcije za potrebe državne izmjere posebno je važno da su na što je moguće većem području preslikavanja deformacije dužina, površina, i kutova u većini praktičnih geodetskih radova zanemarive. Može se reći da su navedene deformacije zanemarive ako iz pravokutnih koordinata u danoj projekciji izračunate dužine, površine i kutove bez ikakvih popravaka možemo smatrati jednakim odgovarajućim elementima na elipsoidu. Ili drugim riječima, ako izmjerene dužine i kutove na terenu bez popravaka zbog deformacija projekcije možemo koristiti za kartiranja i računanja u ravnini po formulama ravne trigonometrije.

Ovdje je potrebno naglasiti sljedeće. Preslikamo li sferni trokut s elipsoida u ravninu, to će se geodetske linije i u konformnim i u nekonformnim projekcijama preslikati kao krivulje. U konformnim će projekcijama kutovi između projekcija geodetskih linija biti jednaki kutovima na elipsoidu. Međutim, ni u konformnim kao ni u nekonformnim projekcijama neće sferni kutovi biti jednaki kutovima između ravnih spojnica preslikanih točaka. Prema tome, i u konformnim i u nekonformnim projekcijama treba odrediti tzv. redukcije pravaca ili popravke uslijed zakrivljenosti geodetske linije, tj. male kutove između tangenata na projekciju geodetske linije i ravnih spojnica preslikanih točaka. Ako su redukcije pravaca manje od točnosti mjerenja kutova, možemo ih zanemariti. U tom slučaju može se smatrati da se geodetske linije preslikavaju kao pravci, pa se u

konformnim projekcijama mjereni kutovi, bez ikakvih popravaka zbog deformacija projekcije mogu koristiti za računanja u ravnini po formulama ravne trigonometrije. To će, očito, biti tako samo u konformnim projekcijama. U nekonformnim projekcijama i kad redukcije pravaca možemo zanemariti neće se mjereni kutovi, zbog deformacija kutova, moći direktno koristiti za računanje u ravnini. Jedino ako je deformacija kutova manja od točnosti mjerenja možemo je zanemariti. Prema tome očito da je u nekonformnim projekcijama ta ukupna popravka (redukcija pravaca plus popravka zbog deformacije kutova), koja treba biti manja od točnosti mjerenja da bi se mogla zanemariti, mnogo veća nego samo redukcija pravaca u konformnim projekcijama. Iz toga slijedi da će uz zadanu točnost projekcije područje preslikavanja u nekonformnim projekcijama biti mnogo manje nego u konformnim projekcijama. Prednost konformnih projekcija u odnosu na nekonformne je u ovom slučaju nedvojbena.

Postavlja se pitanje što je s deformacijama dužina, odnosno, u kojoj mjeri deformacije dužina utječu na veličinu područja preslikavanja u konformnim i nekonformnim projekcijama. Maksimalne deformacije dužina su u konformnim i nekonformnim projekcijama na razmjerno malim područjima preslikavanja približno jednake. Prema tome područje preslikavanja će uz zadanu točnost projekcije biti s obzirom na deformacije dužina i u konformnim i u nekonformnim projekcijama približno jednako.

Da bi se dobila stvarna veličina podučja preslikavanja u pojedinim konformnim i nekonformanim projekcijama treba zadati točnost projekcije. Točnost projekcije mora biti veća od točnosti mjerenja u nižoj geodeziji, odnosno od točnosti poligonske mreže i triangulacijske mreže 4. reda, ako želimo da kod tih i srodnih geodetskih radova ne moramo voditi računa o deformacijama projekcije. U poligonskoj mreži strane se mjere sa srednjom relativnom greškom otprilike 1:3 000. Stoga ako uzmemo da točnost projekcije bude 1:10 000 onda je očito da se takve deformacije mogu prihvatiti, jer su oko tri puta manje od pogrešaka mjerenja u poligonskoj mreži.

Do istog zaključka dolazimo i razmatranjem točnosti mjerenja kutova u triangulacijskoj mreži 4. reda. Prema Pravilniku (1951) (čl. 10) najveće dozvoljene popravke pravaca koje se dobivaju pri izjednačenju ne smiju prijeći 20" u mreži 4. reda što odgovara točnosti 1:10 000. Prema članku 87. istog Pravilnika srednja greška mjerenog pravca u mreži 4. reda ne smije biti veća od 6". Prema tome ako redukcije pravaca u konformnim projekcijama odnosno redukcije pravaca i popravke uslijed deformacije kutova u nekonformnim projekcijama u mreži 4. reda ne prelaze iznos 2-3" mogu se zanemariti. Uz zadanu točnost projekcije 1:10 000, a uz uvjet da se srednji meridijan preslika bez deformacija, širina područja preslikavanja u Gauss-Krügerovoj (konformnoj poprečnoj cilindričnoj) projekciji iznosi 180 km. Uz iste uvjete širina područja preslikavanja u Soldnerovoj ekvidistantnoj projekciji iznosi samo 80 km (Jordan/Eggert/Kneissl, 1959, str. 806). Do sličnih rezultata došlo bi se uspoređivanjem ostalih konformnih i nekonformnih projekcija.

To su razlozi da se danas za potrebe državne izmjere primjenjuju samo konformne projekcije.

U obzir dolaze slijedeće konformne projekcije:

- Gauss-Krügeorova projekcija (u literaturi engleskog jezičnog područja poznata kao Transverse Mercator Projection; ista projekcija čini osnovu Universal Transverse Mercator (UTM) sistema);
- stereografska projekcija
- kosa cilindrična projekcija
- Lambertova konusna projekcija (često se naziva i Lambert-Gaussova projekcija).

Kad se radi o malim državama za koje je dovoljan jedan koordinatni sustav, izbor projekcije može se izvršiti prema obliku i položaju teritorija (vidi 17.3.2.2). Tako će npr. za male države kružnog oblika najpovoljnija biti stereografska projekcija. Prednosti stereografske prema ostalim konformnim projekcijama su u tom slučaju sljedeće:

a) deformacije rastu ravnomjerno od centralne točke u svim smjerovima i

b) pri jednakoj udaljenosti od centralne točke odnosno od srednjeg meridijana deformacije dužina su u stereografskoj projekciji dva puta manje nego npr. u Gauss-Krügerovoj projekciji.

Za mala područja izdužena duž paralela (npr. otok Java) najpovoljnija je Lambertova konusna projekcija. Kosa cilindrična projekcija najpogodnija je za mala područja izdužena u smjeru proizvoljne velike kružnice (npr. Sumatra). Za područja izdužena u smjeru meridijana najbolja je Gauss-Krügerova projekcija.

Kad je potrebno koristiti više koordinatnih sustava, da bi se obuhvatilo zadano područje treba uzeti u obzir sve prije navedene kriterije. Istraživanja i dosadašnja praksa pokazuje da je tada u velikoj većini slučajeva Gauss-Krügerova projekcija najpovoljnija. U Gauss-Krügerovoj projekciji srednji meridijan se preslikava kao pravac kojeg je svaki dio jednak (ili stoji u konstantnom odnosu) prema odgovarajućem dijelu luka glavnog meridijana na elipsoidu. Deformacije ovise pretežno o udaljenosti od srednjeg meridijana pa se područje svakog koordinatnog sustava ograničenog dvama meridijanima proteže od južnog do sjevernog pola. Stoga ni u jednoj drugoj projekciji nije moguće s manjim brojem koordinatnih sustava obuhvatiti čitavu površinu Zemlje negu u Gauss-Krügerovoj projekciji. Uz točnost od 1:2500 može se sa 60 sustava ($\Delta\lambda = 6°$) obuhvatiti čitava Zemlja.

Velika vrijednost Gauss-Krügeorove projekcije je i u potpunoj jednoobraznosti svih računanja nezavisno od koordinatnog sustava. Takva jednoobraznost i mogućnost standardizacije računanja ne postoji niti u jednoj drugoj projekciji. Npr. u Lambertovoj konusnoj projekciji u svakom sustavu omeđenom s dvije paralele konstante projekcije bit će različite. I u stereografskoj projekciji zbog različitih širina ishodišta pojedinih koordinatnih sustava računanja u raznim sustavima neće biti jednoobrazna.

Zbog navedenih vrijednosti Gauss-Krügerove projekcije oko 80% država koristi za potrebe državne izmjere Gauss-Krügerovu projekciju (Colvocoresses, 1969).

17.2. Izbor projekcije za izradu topografskih karata

Topografske karte koriste se za mnoge svrhe. Nijedna grana ljudske djelatnosti nije, međutim, u prošlosti bila toliko vezana za korištenje topografskih karata kao što je to vojna djelatnost. Razvoj topografskih karata bio je stoga prvenstveno uvjetovan vojnim potrebama pa su topografske karte izrađivane često prvo za ona područja gdje su planirane ili izvođene vojne operacije. Od vojnih snaga najveći korisnik topografskih karata je artiljerija, čije su potrebe za topografskim kartama danas još više potencirane povećanjem dometa artiljerijskog oružja. Zbog navedenih razloga, pri izboru projekcije za izradu topografskih karata, treba posebnu pažnju posvetiti tzv. vojnim kriterijima. Ti kriteriji danas su u svijetu opće prihvaćeni i prema njima projekcija za izradu topografskih karata treba odgovarati sljedećim zahtjevima (Colvocoresses, 1969):

a) da je uz zadanu točnost projekcije moguće sa što manjim brojem koordinatnih sustava obuhvatiti zadano područje,

b) da je projekcija pogodna za kontinuirano prostiranje preko velikih dijelova Zemljine površine,

c) točnost projekcije treba biti 1:1000,

d) projekcija treba biti konformna jer točnost gađanja artiljerijskim oružjem mnogo više ovisi o pogrešci u kutu nego o pogrešci u dužini (O'Keefe, 1952),

e) projekcija treba biti pogodna za jedinstveno označavanje pravokutnih koordinata u svim sustavima (zonama).

Tim zahtjevima moguće je dodati još dva dodatna:

f) formule, odnosno tablice, za transformaciju koordinata između koordinatnih sustava trebaju biti neovisne o koordinatnom sustavu,

g) konvergencija meridijana ne smije biti veća od 5°.

Navedeni zahtjevi gotovo su potpuno identični sa zahtjevima koji se postavljaju pri izboru projekcije za izradu topografskih karata za sve ostale, nazovimo ih, civilne potrebe. Jedina razlika je u točnosti projekcije. Dok vojne potrebe zadovoljava točnost 1:1000, za mnoge druge zadatke traži se točnost 1:10 000. Ta razlika u točnosti ne utječe na izbor projekcije, već o njoj ovisi samo moguća veličina područja preslikavanja.

Topografske karte trebaju poslužiti i iza izvođenje preciznih kartometrijskih radova pa je potrebno:

h) da izabrana projekcija omogućuje lako otklanjanje utjecaja deformacija iz rezultata mjerenja na kartama.

Kao što se iz navedenih zahtjeva vidi, potreba za konformnim projekcijama u ovom slučaju još je jače naglašena nego pri izboru projekcije za potrebe državne izmjere. Zahtjev pod (a), kao što je pokazano u prethodnom odjeljku, najbolje je ispunjen u konformnim

projekcijama. Pod (d) izričito se zahtijevaju konformne projekcije. Nadalje, utjecaj defomacija najlakše se može ukloniti iz rezultata mjerenja u konformnim projekcijama (zahtjev (h)). Budući da u konformnim projekcijama mjerilo ne ovisi o smjeru, može se smatrati da se manji dio Zemljine površine preslikava u konstantnom mjerilu. Prema tome, da bi se iz na karti izmjerenih veličina, dobile veličine oslodođene utjecaja deformacija, treba ih samo množiti konstantnim faktorom. To nije moguće ni u jednoj drugoj grupi projekcija.

Od konformnih projekcija navedeni zahtjevi i opet su najbolje ispunjeni u Gauss-Krügerovoj projekciji (zahtjevi (b), (e), (f) i (g)). Budući da je i za potrebe državne izmjere i za izradu topografskih karata u velikoj većini slučajeva najbolja Gauss-Krügerova projekcija, treba Gaus-Krügerovu projekciju koristiti za obje svrhe. Kao što pokazuju podaci Ujedinjenih naroda, veliki broj zemalja svijeta koristi danas Gauss-Krügerovu projekciju za obje svrhe (Brandenberger 1976a,b).

17.3. Izbor projekcije za izradu geografskih karata 1:1 000 000 i sitnijih mjerila

17.3.1. Općenito o izboru projekcije

Izbor projekcije za izradu geografskih karata mjerila 1:1 000 000 i sitnijih mjerila ovisi o mnogo faktora, koje možemo podijeliti u dvije glavne grupe:

a) položaj teritorija, koji želimo prikazati na karti, na Zemljinoj površini i njegove geometrijske karakteristike,

b) vrsta i namjena karte (zadaci zbog kojih se karta sastavlja).

U prvu grupu faktora spada veličina i oblik teritorija, koji želimo prikazati i njegovo pružanje u odnosu na mrežu meridijana i paralela.

U drugu grupu faktora spadaju: sadržaj i namjena karte, način upotrebe karte i razni dodatni uvjeti u vezi s mjerilom, formatom, kompozicijom, odnosom prema drugim srodnim kartama u atlasu i izgledom mreže meridijana i paralela.

Osim tih faktora, u većini slučajeva, na izbor projekcije ima velik utjecaj nastojanje, da deformacije na karti budu što manje. Izabirući kartografsku projekciju, neophodno je ustanoviti karakter deformacija, njihovu veličinu i raspored na pojedinim dijelovima karte.

Što je teritorij, koji se prikazuje na karti veći, to su i deformacije veće i otežan je izbor projekcije. Postoje tablice deformacija, iz kojih možemo brzo zaključiti kakve deformacije možemo realno očekivati i kakve zahtjeve u odnosu na njih možemo postaviti. Tako su npr. u tablici 1 dane približne vrijednosti deformacija u konusnim i cilindričnim projekcijama, a u tablici 2 u azimutalnim projekcijama za područja različita po veličini preslikavanja (Ginzburg, Salamanova, 1957)

Tablica 17.1. Približne vrijednosti deformacija u konusnim i cilindričnim projekcijama

Širina područja (Δ)		Ekvivalentne projekcije			Ekvidistantne projekcije			Konformne projekcije			
u stupnj. velike kružnice	km	D e f o r m a c i j e									
		dužina u %		kutova u °	duž. i povr. u %		kutova u °.	dužina u %		površ. u %	
		od	do		od	do		od	do	od	do
11-12	1200-1300	-0.25	0.25	0.3	-0.25	0.25	0.1	-0.25	0.25	-0.5	0.5
16-17	1700-1800	-0.5	0.5	0.6	-0.5	0.5	0.3	-0.5	0.5	-1	1
22-23	2400-2500	-1	1	1.2	-1	1	0.6	-1	1	-2	2
31-32	3400-3500	-2	2	2.3	-2	2	1.2	-2	2	-4	4
39-40	4300-4400	-3.1	3.2	3.6	-3	3	1.7	-3	3	-6	6
49-50	5400-5500	-4.8	5.0	5.6	-5	5	2.8	-5	5	-10	10

Primjedba: Deformacije su izračunate za slučaj da su deformacije dužina na rubovima i u sredini područja preslikavanja po apsolutnoj veličini približno jednake.

Tablica 17.2. Približne vrijednosti deformacija u azimutalnim projekcijama

Zenitna udaljenost		Ekvivalentne projekcije		Ekvidistantne projekcije			Konformne projekcije			
u stupnj. velike kružnice	km	D e f o r m a c i j e								
		dužina u %	kutova u °	dužina i površ. u %		kutova u °	dužina u %		površ. u %	
				od	do		od	do	od	do
12	1300	0.5	0.6	-0.4	0.4	0.4	-0.5	0.5	-1	1
14	15500	0.8	0.9	-0.5	0.5	0.5	-0.75	0.75	-1.5	1.5
16	1800	1	1.1	-0.7	0.7	0.8	-1	1	-2	2
20	2200	1.5	1.7	-1	1	1.1	-1.6	1.6	-3.2	3.2
23	2550	2	2.2	-1.4	1.4	1.5	-2	2	-4	4
25	2800	2.4	2.7	-1.5	1.5	1.6	-2.4	2.4	-4.8	4.8
28	3100	3	3.4	-2	2	2.2	-3	3	-6	6
36	4000	4.9	5.7	-3.5	3.5	3.8	-5	5	-10	10

Primjedba: Deformacije su izračunate za slučaj da su deformacije dužina u ekvidistantnim i konformnim projekcijama na rubovima i u sredini područja preslikavanja po apsolutnoj vrijednosti približno jednake. U ekvivalentnim projekcijama nema deformacija u srednjoj točki.

17.3.2. Utjecaj pojedinih činilaca na izbor projekcije

Iako su utjecaji raznih činilaca na izbor projekcije usko međusobno povezani, jednostavnosti i preglednosti radi, razmotrit će se odvojeno utjecaj svakog pojedinog činioca.

17.3.2.1. Veličina područja preslikavanja

Područja koja u većini projekcija možemo prikazati na kartama s deformacijama dužina do 0.5% nazivat ćemo *malim*. Veličine tih područja kreću se od 5-6 milijuna km^2. *Srednjim* ćemo nazivati ona područja, kod kojih deformacije dužina na pojedinim dijelovima imaju veličine 2-3%. To su područja veličine 35-40 milijuna km^2. Ako deformacije dužina nekog područja, u svakom slučaju prelaze 3%, onda ta područja treba smatrati *velikim*. Karte *malih* i *srednjih* područja ubrojit ćemo u jednu grupu. Zajedničko kartama te grupe je to, što je pri izboru projekcije nužno prvenstveno uzeti u obzir geometrijske karakteristike područja, koje se prikazuje, a ne namjenu, način upotrebe i sadržaj karte. Međutim kod karata *malih* područja često nije potrebno uzimati u obzir niti oblik područja, jer se npr. karte *malih* područja u srednjim širinama jednako dobro prikazuju u uspravnim konusnim projekcijama kao i u kosim azimutalnim. Zbog toga se za raznovrsne karte takvih područja primjenjuju već tipizirane uspravne konformne konusne projekcije (v. 17.3.2.5 i 17.3.3.1).

U prijelazu na karte *velikih* područja na izbor projekcije mnogo više utječu karakteristike karte i način upotrebe, nego geometrijska svojstva područja. Izbor projekcije je mnogo kompliciraniji. Te karte ćemo ubrojiti u drugu grupu.

17.3.2.2. Oblik i položaj područja preslikavanja

Pri izboru projekcije za karte *malih* područja nepotrebno je kako smo već prije naveli, razmatrati oblik područja. Za karte *srednjih* i *velikih* područja neophodno je uzeti u obzir oblik i položaj područja i izabrati takvu projekciju, da izokole slijede shematizitani oblik područja. Na taj način smanjuju se deformacije. Stoga se karte polarnih oblasti, koje imaju okrugli oblik, gotovo uvijek sastavljaju u azimutalnim projekcijama. Kružne izokole azimutalnih projekcija u potpunosti odgovaraju za karte polukugli svijeta.

Područja izdužena duž meridijana prikazujemo u Gauss-Krügerovoj projekciji (poprečnoj cilindručnoj), a područja izdužena duž ekvatora u uspravnim cilindričnim projekcijama. Na izbor projekcije utječe položaj područja u ovisnosti o geografskoj širini, a za područja koja su izdužena, pravac u kojem su izduženi. U ovisnosti o obliku Afrike, Australije i Antartika njihove karte se rade u azimutalnim projekcijama. Pri tome uzevši u obzir njihov položaj, kartu Afrike treba raditi u poprečnoj azimutalnoj projekciji, Australije u kosoj, a Antartika u uspravnoj azimutalnoj projekciji.

17.3.2.3. Sadržaj karte

Počnimo razmatranje utjecaja sadržaja karte na izbor projekcije, s vrlo velikom grupom karata, za koju je osobito važno što vjernije prikazivanje površina. U zavisnosti od toga trebaju li karte služiti i za kartometrijske radove ili ne, upotrebljavamo ekvivalentne projekcije ili projekcije s malim deformacijama površina.

Zahtjev za malim deformacijama površina tipičan je, na primjer, za tematske karte na kojima se stanja i pojave prikazuju na što je moguće točnije ograničenim površinama. Iz grupe fizičko-geografskih karata spomenimo ovdje razne geološke i pedološke karte, karte rasporeda kopna i mora, biogeografske karte itd. Od karata stanovništva spomenimo karte naseljenosti i sastava stanovništva.

Druga je grupa karata, za koju je važno točno prikazivanje površina, ali kod kojih treba voditi računa i o deformacijama oblika. To su na primjer, hipsometrijske geomorfološke i tektonske karte. Za ovu grupu karata koriste se uvjetne projekcije u kojima su deformacije površina manje od deformacija kutova. Sljedeća je grupa karata kod kojih su oba faktora, tj. točan prikaz površina i točno prikazivanje oblika jednako važni. Za karte te grupe treba koristiti ekvidistantne projekcije i uvjetne projekcije u kojima su deformacije površina i kutova približno jednake. U tu grupu spadaju prvenstveno opće geografske karte.

Posebna je grupa karata za koje se, bez obzira na velike deformacije površina, koriste konformne projekcije. Ova grupa je razmjerno manja od ostalih. Od pomorskih i zrakoplovnih karata u ovu grupu prvenstveno spadaju navigacijske karte.

17.3.2.4. Način upotrebe karte

Pod načinom upotrebe karte podrazumijevamo:

a) dobivanje informacija s karte mjerenjam,

b) dobivanje informacija s karte neposrednim promatranjem i uspoređivanjem (vizualnom interpretacijom).

Uslijed generalizacije moguće je na kartama mjerila 1:1 000 000 i sitnijim mjerilima dobiti mjerenjem samo približne rezultate. Točnost ovisi o stupnju generalizacije, koji prvenstveno ovisi o mjerilu karte. Zbog toga pri mjerenju dužina i površina na kartama sitnih mjerila treba u većini slučajeva računati s relativnom pogreškom od 3-5%, a pri mjerenju kutova s pogreškom od 2-3°. Prema skali točnosti kartometrijskih radova (tablica 17.3) mjerenja dužina i površina s pogreškom od 3-5% spadaju u grupu *približno točnih* mjerenja, a mjerenja kutova s pogreškom od 2-3° u grupu *srednje točna* i *približno točna* mjerenja.

Tablica 17.3. Točnost kartometrijskih radova

Točnost	Pogreška	
	dužina i površina u %	kutova u stupnjevima
vrlo točno	0.2 – 0.4	0.25 - 0.5
srednje točno	1 – 2	1 – 2
približno	3 – 4	3 – 5
grubo približno	6 – 8	5 – 7

Podaci o točnosti karata sitnih mjerila i veličinama deformacija pokazuju da se pri mjerenju na kartama i tako velikih područja kao što su Europa, Australija i Kina deformacije projekcija mogu zanemariti. Prema tome, u izboru projekcije treba voditi računa o tome da se mjerilo na čitavom području karte mijenja u što je moguće manjim granicama, da bi se mjereći na karti i ne uzimajući u obzir deformacije, što manje pogriješilo. Taj zahtjev najbolje je ispunjem u ekvidistantnim i po vrstama deformacija njima bliskim projekcijama.

Budući da su opće geografski atlasi i većina raznih priručnih karata namijenjeni širokom krugu korisnika, koji većinom na znaju metodiku mjerenja na kartama, to mnogo veći značaj ima vizualna interpretacija kartografskog sadržaja. Stoga je potrebno da kartograf poznaje mogućnosti vizualne interpretacije da bi ih u izradi matematičke osnove karata mogao koristiti.

Ginzburg (1940) je objavio rezultate istraživanja kojima je te podatke ustanovio:

a) Kod krivudavih linija kakvima su na karti prikazane rijeke, obalne linije i različite granice, razlike u duljini do 5% ne mogu se uočiti. Tek razlike od 10% i veće lako je uočiti.
b) Kod površina likova ograničenih krivudavim linijama uočljive postaju razlike tek od 5%. Razlike 10-15% lako su zamjetne.
c) Deformacije oblika nastaju već kod deformacija kutova od 2-3°. Deformacije kutova 4-5° izazivaju lako uočljive deformacije oblika.

17.3.2.5. Zaključci

Kod pružanja u smjeru sjever-jug do približno 3500 km ($\Delta\varphi = 32°$) deformacije dužina u uspravnim konformnim konusnim i cilindričnim projekcijama neće biti veće od $\pm 2\%$ a deformacije površina od $\pm 4\%$ (tablica 17.1). Vizualno to su teško uočljive veličine. Budući da se u konformnim projekcijama ograničeni okoliš dane točke preslikava i po obliku vjerno i da su nadalje pri pružanju teritorija do $\Delta\varphi = 32°$ deformacije dužina i površina vizuelno teško uočljive, može se smatrati da se u konformnim projekcijama čitavo

područje preslikalo i po obliku vjerno. To je razlog zbog kojeg se uspravne konformne konusne projekcije mogu preporučiti za izradu raznovrsnih karata područja između paralela s geografskim širinama $\varphi = 10° - 80°$, a koje u smjeru sjever-jug nemaju veće prostiranje od $\Delta\varphi = 32°$ ili 3500 km. Za teritorije iste veličine u području ekvatora iz istog razloga preporučuje se uspravna konformna cilindrična (Mercatorova) projekcija. Za karte područja navedene veličine nije, prema tome, u većini slučajeva potrebno koristiti kose projekcije u kojima bi deformacije bile još manje. Isto tako za takva područja praktičnog značaja nemaju ni tzv. *najpovoljnije projekcije*, tj. projekcije izvedene uz uvjet minimuma deformacija.

Za područja veća od navedenog ne mogu se više preporučiti konformne projekcije, jer su u njima deformacije dužina i površina već vidljivo zamjetljive.

17.3.3. O izboru projekcije za karte različitih područja

17.3.3.1. Karte država i grupa država

Države i grupe država, u najvećem broju slučajeva, spadaju po veličini u grupe *malih* i *srednjih* područja (v. 17.3.2.1). Spomenimo da ni jedna država Europe nema u pravcu sjever-jug veće pružanje od 1500 km. Nadalje, pružanje npr. Kine od sjevera na jug iznosi (izuzimajući neke manje dijelove) 32°. To znači da se prema zaključcima iz 17.3.2.5 karte gotovo svih država i grupa država mogu izrađivati u uspravnim konformnim konusnim projekcijama. Karte država ekvatorskog područja u širinskom pojasu $\pm 10°$ treba izrađivati u uspravnoj konformnoj cilindričnoj (Mercatorovoj) projekciji.

Nastojeći da umanjimo amplitudu kolebanja deformacija treba rabiti projekcije s dvije standardne paralele, a konstante projekcije treba odrediti tako da deformacije na krajnjim i na srednjoj paraleli budu po apsolutnoj vrijednosti jednake. Ako pružanje po širini ne prelazi 6-7° primjenjuje se konformna konusna projekcija s jednom standardnom paralelom.

Za izradu karata područja koji se po geografskoj duljini ne protežu više od 9° često se upotrebljava i Gauss-Krügerova projekcija.

17.3.3.2. Karte kontinenata

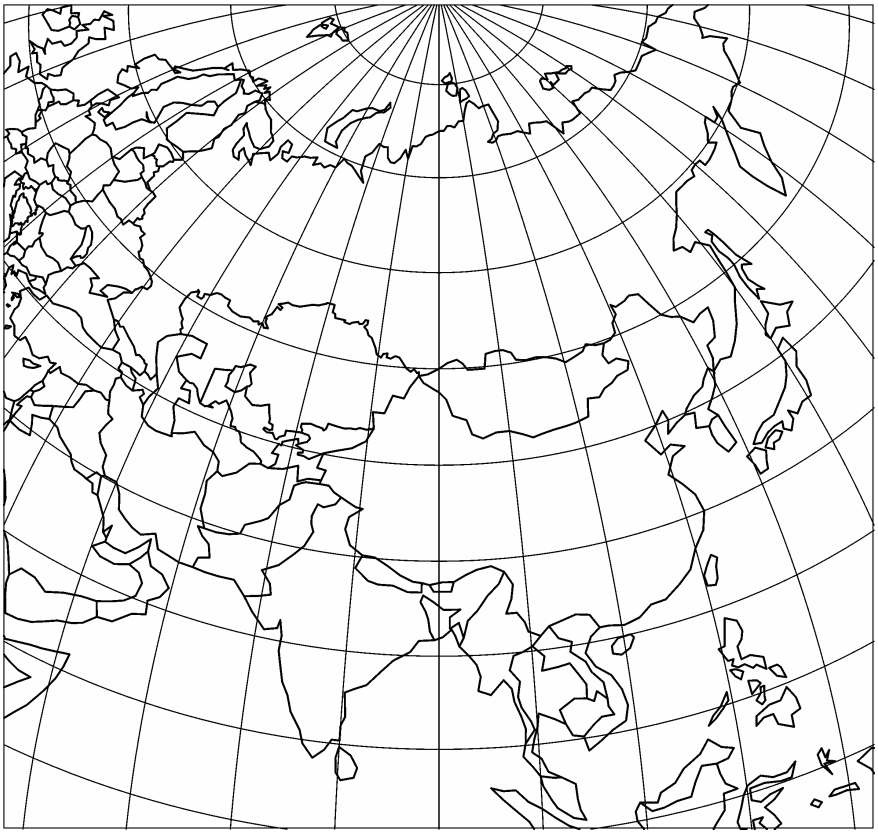
Na kartama Europe i Australije deformacije su razmjerno male čak i u projekcijama raznih klasa s različitim oblikom izokola.

Na kartama najvećeg kontinenta (Europsko-azijskog) deformacije su već vrlo velike. Zbog toga je važno da rubne izokole slijede oblik kontinenta. Budući da europsko-azijski kontinent ima približno okrugli oblik, navedeni zahtjev najbolje ispunjavaju kose azimutalne projekcije. Shematsko ocrtavanje sljedećih po veličini kontinenata - Sjeverno američkog i Afričkog - još je manje okruglo, ali su još uvijek poprečne i kose azimutalne projekcije bolje od ostalih.

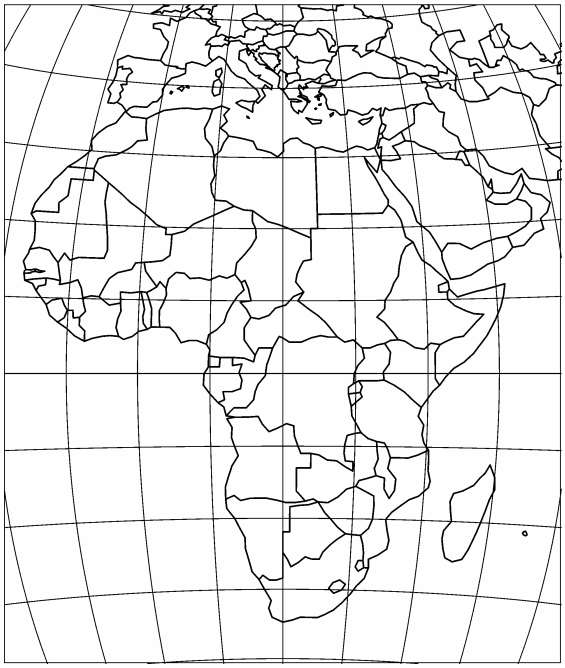
U posljednjim desetljećima većina karata kontinenata izrađuje se u ekvivalentnoj azimutalnoj (Lambertovoj) projekciji. Među ekvivalentnim projekcijama Lambertova projekcija ističe se posebnim svojstvom da su u njoj maksimalne deformacije dužina i kutova svedene na minimum (Tissot, 1887). U tablici 17.4 dane su veličine deformacija dužina i kutova na kartama kontinenata u Lambertovoj azimutalnoj projekciji. Deformacije kutova od 15° na karti Azije izazivaju primjetne deformacije oblika tog kontinenta. Nešto su manje primjetne deformacije oblika na kartama Sjeverne Amerike i Afrike.

Tablica 17.4: Deformacije u Lambertovoj azimutalnoj projekciji izračunate za argument "z". Deformacija nema u centralnoj točki (φ_0, λ_0).

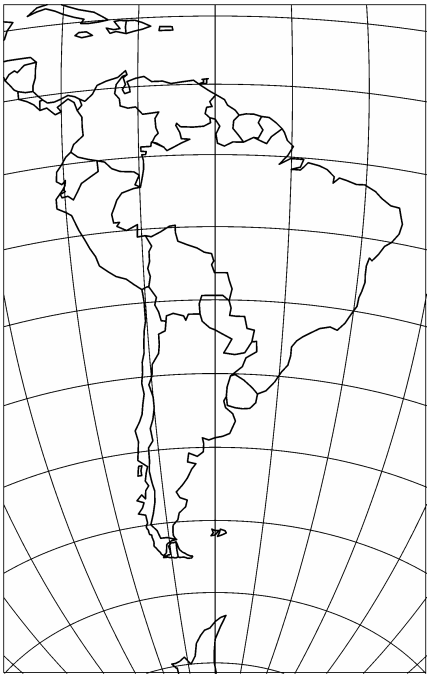
Kontinent	z°	φ_0 °	λ_0 °	deformacije dužina u %		deformacije kutova u stupnjevima
				od	do	
Europa	25	52.5	20	-2.5	2.5	3
Azija	59	40	90	-13	15	15
Afrika	43	0	20	-7	7.5	8
S. Amerika	41	45	-100	-6.5	6.5	7
J. Amerika	36	-20	-60	-5	5	5
Australija	20	-25	-135	-1.5	1.5	2



Slika 17.1. Karta Azije u ekvivalentnoj azimutalnoj projekciji



Slika 17. 2. Karta Afrike u poprečnoj ekvivalentnoj azimutalnoj projekciji



Slika 17.3. Karta Južne Amerike u ekvivalentnoj azimutalnoj projekciji

17.3.3.3. Karte oceana

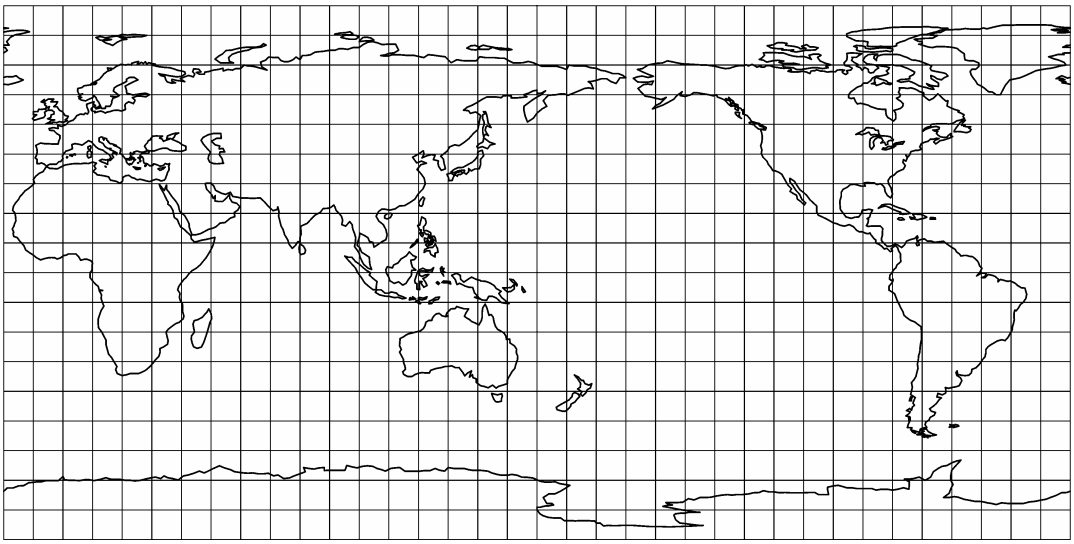
Pri zajedničkom prikazu Tihog i Indijskog oceana opće pružanje po dužini iznosi 280°, a po uključenju Atlantskog oceana 380-400°, dakle više nego na običnim kartama svijeta. Za te karte najbolje odgovaraju uspravne cilindrične i pseudocilindrične projekcije.

Pri razmatranju pojedinih grupa projekcija i njihovoj primjeni za karte oceana počnimo s uspravnim cilindričnim projekcijama. Najveći i neotklonjiv im je nedostatak

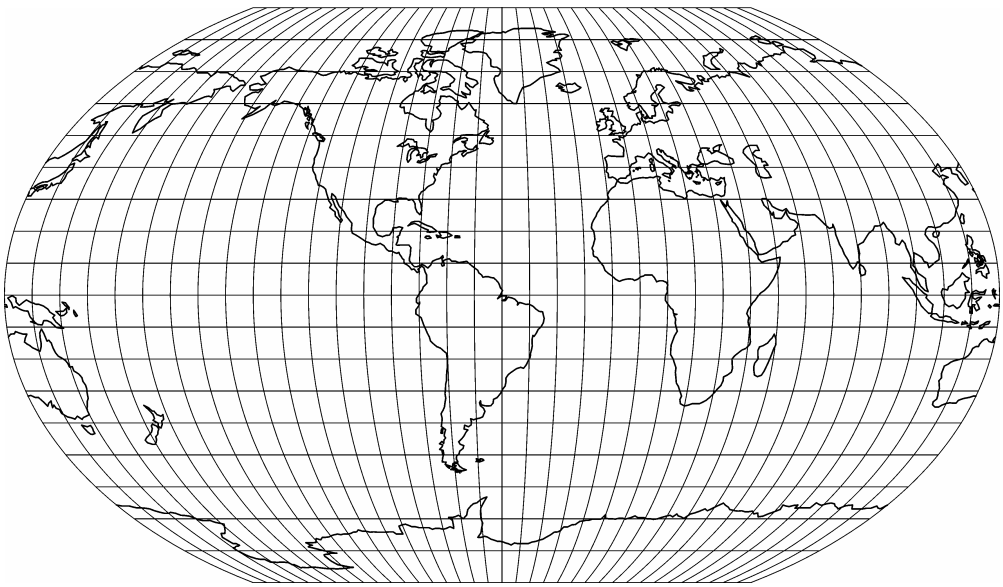
nezadovoljavajući prikaz krajnjih sjevernih i južnih dijelova Tihog i Atlantskog oceana i krajnjeg južnog dijela Indijskog oceana.

Spomenuti nedostatak cilindričnih projekcija nešto je umanjen u pseudocilindričnim projekcijama. U skladu s oblikom izokola te se projekcije uspješno mogu primjenjivati za karte Atlantskog oceana bez krajnjih sjevernih i južnih dijelova. Pseudocilindrične projekcije, kao što je već rečeno, pogodne su i za izradu karata Tihog oceana, a također i za karte grupa oceana pri povećanom pružanju duž ekvatora.

Za oblik Indijskog oceana, Indijskog oceana s Antartikom može se reći da je približno okrugao. Prema tome za karte tih oceana prikladne su azimutalne projekcije.



Slika 17.4. Karta Tihog i Indijskog oceana u ekvidistantnoj cilindričnoj projekciji, $\varphi_0 = 0°,\ \lambda_0 = 160°$



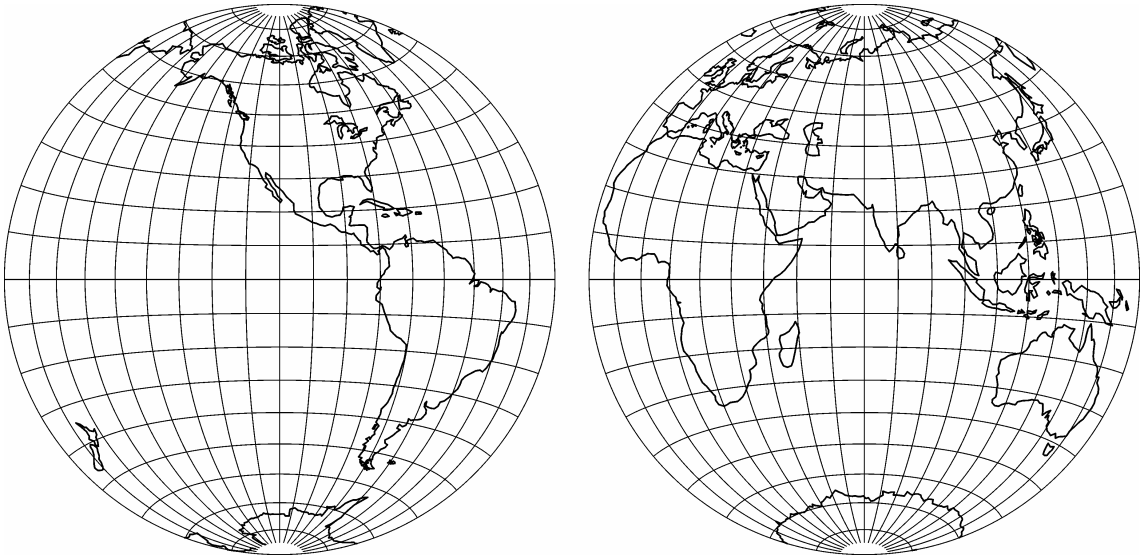
Slika 17.5. Karta Tihog, Atlantskog i Indijskog oceana u eliptičkoj pseudocilindričnoj projekciji Kavrajskog

17.3.3.4. Karte polukugli

Od karata polukugli najveći značaj imaju karte: zapadne, istočne, sjeverne i južne polukugle te karte oceanskih i kopnenih polukugli. Prikaz zapadne i istočne polukugle čini, tzv. kartu svijeta na polukuglama. Na većini karata polukugli najveću važnost ima prikaz kopna.

Bez obzira na velike razlike u kompoziciji karata polukugli, oblik područja koji se na tim kartama prikazuje je takav da preodređuje za njihovu izradu azimutalne projekcije. Na kartama polukugli u tim projekcijama deformacije su manje nego u drugim projekcijama.

U geografskim atlasima, isključujući školske, kate polukugli, npr. fizičko-geografske, često su jedine karte prikladne da se na njima uspoređuju veličine pojedinih kontinenata i oceana. U tim slučajevima za karte polukugli treba koristiti azimutalne projekcije s malim deformacijama površina ili ekvivalentnu Lambertovu projekciju (sl. 17.6).



Slika 17.6. Karta svijeta na zapadnoj i istočnoj polukugli u ekvivalentnoj azimutalnoj projekciji

17.3.3.5. Karte svijeta

Na kartama svijeta sastavljenim u cilindričnim projekcijama dobro se prikazuju vremenske zone. Mercatorova (konformna) projekcija je pogodna za prikaz vjetrova i morskih struja. U drugim slučajevima uspravne cilindrične projekcije imaju za karte svijeta ograničenu primjenu, osobito zbog toga, što se kod tih projekcija vrlo deformirano prikazuju polarna područja.

Od pseudocilindričnih projekcija za karte svijeta više se koriste projekcije u kojima se pol preslikava kao linija od projekcija u kojima je pol točka. Ako je, međutim, iz opravdanih razloga potrebno da pol bude točka, tada se može preporučiti ekvivalentna Mollweideova projekcija. Od pseudocilindričnih ekvivalentnih projekcija s polom linijom mogu se preporučiti dvije Eckertove projekcije, tzv. Eckertova IV (eliptična) i Eckertova

VI (sinusoidalna) te sinusoidalna projekcija prof. Kavrajskog. Od pseudocilindričnih uvjetnih projekcija treba preporučiti eliptičnu projekciju prof. Kavrajskog i Eckertovu V (sinusoidalnu) projekciju.

Od projekcija s polom točkom i krivolinijskim paralelama koriste se za karte svijeta ekvivalentna Hammer-Aitovljeva i uvjetna Aitovljeva projekcija. Najveću primjenu za izradu karata svijeta imaju projekcije s krivolinijskim meridijanima i pralalama i polom linijom. Ispitivanja su pokazala da su u tim projekcijama srednje kvadratne deformacije na čitavom području preslikavanja manje nego u cilindričnim i pseudocilindričnim projekcijama te projekcijama s polom točkom i krivolinijskim paralelama. Duljina linije pola prema duljini ekvatora treba se odnosti kao 1:2-3.5. Ispitivanja su, nadalje, pokazala da su srednje kvadratne deformacije manje u uvjetnim projekcijama nego u ekvivalentnim i konformnim projekcijama (Frančula, 1971).

Od projekcija iz te grupe u zapadnim zemljama najviše se za izradu karata svijeta upotrebljava Winkelova (trostruka) projekcija. Paralele su u toj projekciji blago zakrivljene linije, a raspored deformacija površina i kutova između ekvatora i polarnih područja je vrlo povoljan. Prema tome, može se reći, da je Winkelova projekcija s pravom našla široku primjenu za izradu karata svijeta. To se, međutim, ne bi moglo reći i za Van den Grintenovu projekciju, koja se također mnogo upotrebljava za izradu karata svijeta, pogotovo u našoj zemlji. Vrlo velike deformacije površina u područjima sjeverno i južno od paralela sa širinama $\varphi = 50°$ čine tu projekciju neprikladnom za izradu većine karata svijeta.

18. PRIMJENA RAČUNALA

Primjenu računala ilustrirat ćemo na dva primjera. Prvi se odnosi na primjenu računala u projektiranju matematičke osnove geografskih karata i atlasa, a drugi na računanja u Gauss-Krügerovoj projekciji. U tu svrhu poslužit će transformacija koordinata između susjednih sustava.

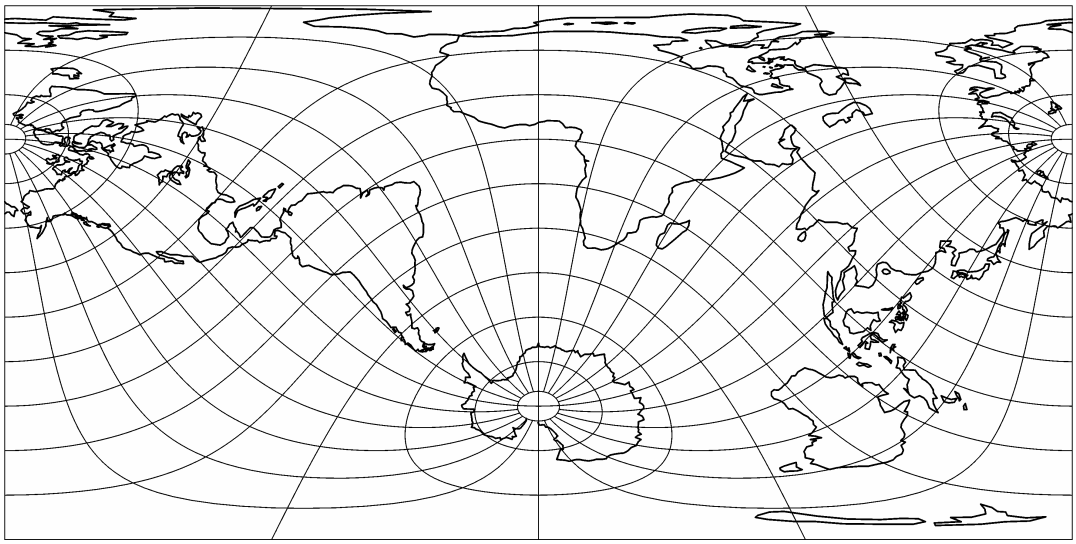
18.1. Projektiranje matematičke osnove geografskih karata i atlasa

Upotreba računala, plotera i digitalizatora znatno je unaprijedila rad na projektiranju matematičke osnove geografskih karata i atlasa. Raznovrsna mikroračunala, dostupna danas većini kartografa, uspješno se mogu primijeniti u projektiranju.

18.1.1. Projektiranje matematičke osnove geografskih karata sitnih mjerila

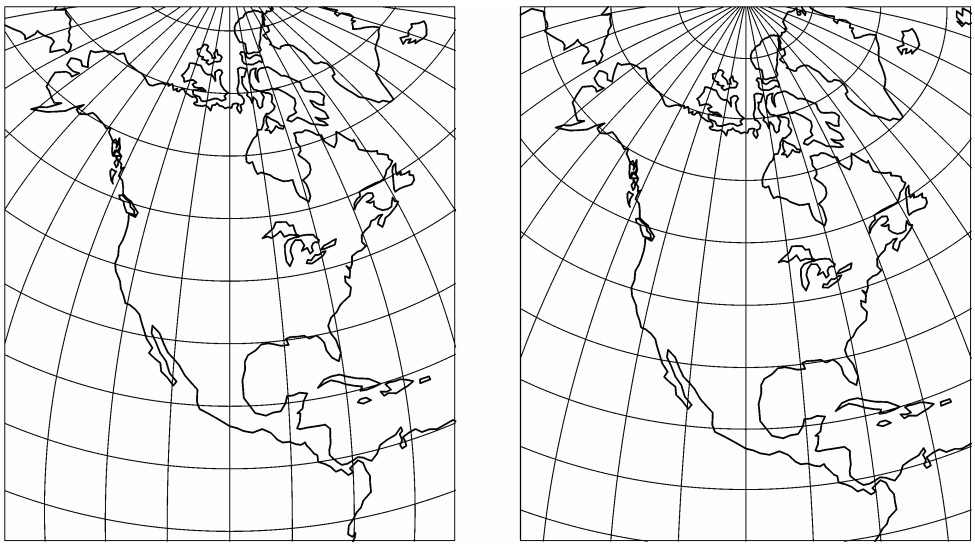
U izradi projekata matematičke osnove karte sitnog mjerila treba odrediti mjerilo karte, izabrati projekciju, oblikovati kartografsku mrežu i riješiti kompoziciju karte.

Izabirući kartografsku projekciju neophodno je ustanoviti karakter deformacija, njihovu veličinu i raspored na pojedinim dijelovima karte. Da bismo to mogli treba imati programe za crtanje mreža meridijana i paralela, kontura kontinenata i granica država u većem broju kartografskih projekcija. Pri ocjeni deformacija na pojedinim dijelovima karte dovoljno je nacrtati mrežu meridijana i paralela i konture područja preslikavanja. To se prvenstveno odnosi na karte svijeta (sl. 18.1.). Deformacije su lako uočljive i na kartama većih dijelova Zemljine kugle, a često i na kartama kontinenata.



Slika 18.1. Kosa ekvidistantna cilindrična projekcija

Na sl. 18.2. prikazana je Sjeverna Amerika u Bonneovoj i azimutalnoj projekciji. Obje projekcije su ekvivalentne, pa pri izboru povoljnije od njih odlučujuće su deformacije kutova i s njima povezane deformacije oblika. Velike deformacije kutova na pojedinim dijelovima karte u Bonneovoj projekciji lako su uočljive po kutovima pod kojima se sijeku meridijani i paralele.



a) *b)*

Slika 18.2. a) Bonneova projekcija, b) ekvivalentna azimutalna projekcija

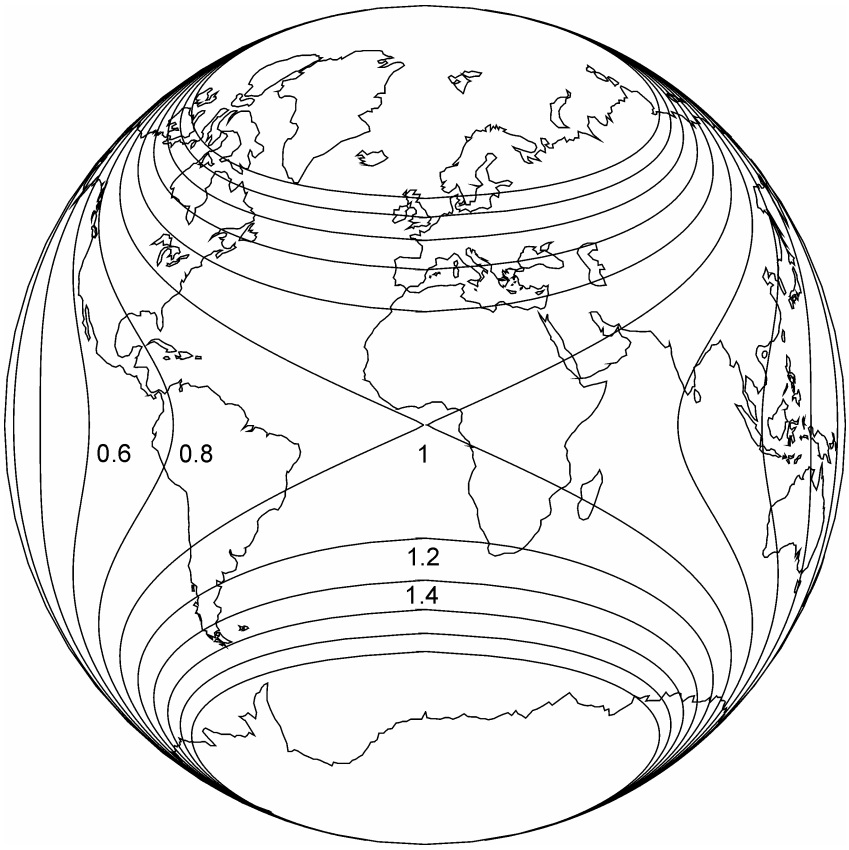
U izradi projekta matematičke osnove karte potrebno je često imati egzaktan prikaz veličine i rasporeda deformacija. Takav prikaz omogućuju izokole, tj. linije jednakih deformacija, ili elipse deformacija. Stoga je poželjno da softver omogućuje i njihov prikaz na ekranu monitora zajedno s mrežom meridijana i paralela i konturama područja preslikavanja (sl. 18.3.) (Lapaine, Frančula 1993a).

Iscrtana mreža meridijana i paralela s konturama područja preslikavanja i izokolama ili elipsama deformacija znatno olakšava izbor projekcije (sl. 18.3.). Ako pojedina projekcija ne zadovoljava sve postavljene zahtjeve, korisno je da softver omogućuje modifikaciju pojedine projekcije, tj. dobivanje novih varijanata. Jedan od takvih postupaka sastoji se u tome da se u nekoj postojećoj kartografskoj mreži prenumerira mreža meridijana i paralela tj. da se meridijanima i paralelama dadu nove vrijednosti. To su zapravo transformacije kartografskih mreža u kojima meridijani i paralele ishodišne mreže prelaze u meridijane i paralele nove mreže (Wagner 1962, Frančula 1974).

Kompozicija karte uključuje određivanje granica područja preslikavanja i smještaj područja unutar okvira karte te razmještaj naziva karte, mjerila, legende i ako je potrebno dopunskih karata. Kompoziciju karte može se definirati kao racionalnu organizaciju prostora karte (Sališčev 1987, str.49). Rješavajući kompoziciju karte u većini slučajeva prirodno je da se kartografski prikaz orijentira tako da srednji pravolinijski meridijan bude

paralelan bočnim okvirnim linijama. To je tzv. obična orijentacija. U pojedinim slučajevima opća konfiguracija prikazane teritorije je takva da je pri običnoj orijentaciji površina karte znatno veća nego pri kosoj orijentaciji. U takvim slučajevima često je opravdana primjena kose orijentacije.

Na kartama kontinenata, oceana i pogotovo čitavog svijeta veličina karte zavisi ne samo od glavnog mjerila i obuhvaćene teritorije već i od osobitosti projekcije. Stoga da bi se odredila optimalna kompozicija često treba usporediti nekoliko varijanata. Analiza prikaza na monitoru može biti od velike pomoći. Projekt kompozicije završava se izradom makete kompozicije, koja se s ekrana monitora prenosi pomoću plotera na papir u točnom mjerilu karte.

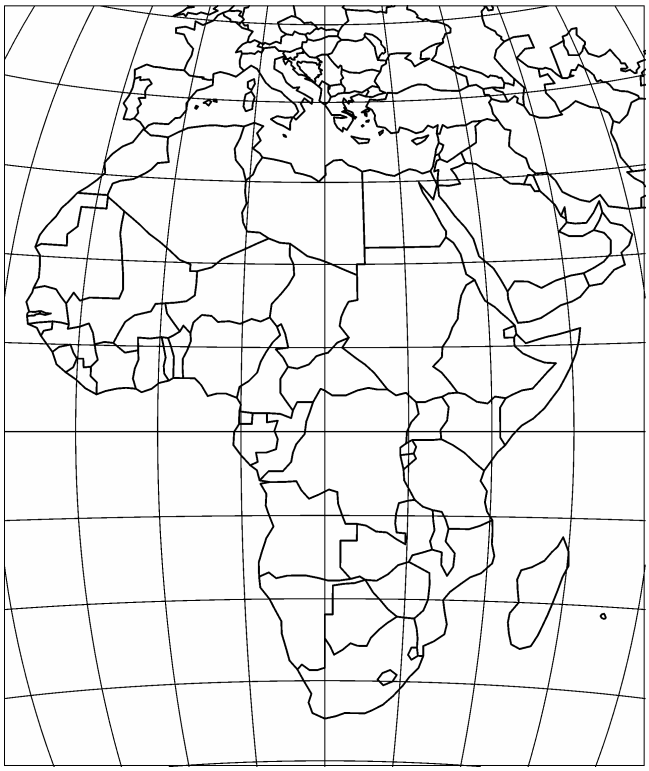


Slika 18.3. Linije konstantnih mjerila površina u Gilbertovoj projekciji

18.1.2. Projektiranje matematičke osnove geografskih atlasa

Izrada projekata atlasa počinje sastavljanjem spiska svih karata atlasa. Pri sastavljanju spiska određuje se približno mjerilo svake karte vodeći računa da se sve karte moraju uklopiti u format atlasa. Nadalje treba imati u vidu da se u atlasu karte ne rade u proizvoljnom mjerilu, već u zaokruženom mjerilu, te da mjerila treba da budu u međusobno jednostavnim odnosima.

U projektiranju matematičke osnove karata atlasa svijeta posebnu pažnju treba posvetiti usklađivanju matematičke osnove srodnih karata. To znači da se matematička osnova svake pojedine karte ne može rješavati samostalno, već se mora voditi računa o njenom odnosu prema srodnim kartama. Srodne karte u atlasu treba da imaju i srodnu matematičku osnovu.



Slika 18.4. Ekvivalentna azimutalna projekcija

U usklađivanju matematičke osnove srodnih karata (npr. karata kontinenata) posebno je važno uskladiti mjerila. Najbolje je rješenje ako se sve srodne karte mogu izraditi u istom mjerilu. U onim slučajevima kada to nije moguće, treba težiti da mjerila budu u jednostavnim brojčanim odnosima. Uskladiti mjerila svih karata atlasa svijeta nije lak zadatak. Da bi se to postiglo treba usporediti veći broj varijanata izrađenih u različitim kompozicijama. Kad se radi o kartama većih područja (kontinenti, oceani, svijet), mogu se varirati i parametri projekcije pa i izabrati neka druga projekcija. Poseban problem predstavlja i točno određeni format svake pojedine karte uvjetovan formatom atlasa. Na ekranu monitora mogu se studirati različite varijante.

Projektiranje matematičke osnove atlasa završava izradom makete atlasa koja pokazuje razmještaj karata i teksta, kompoziciju svih karata, a daje također opću predodžbu o vanjskom izgledu atlasa i njegovim dimenzijama (Bašlavin, Vojnova 1957). Pri izradi makete atlasa definitivno se utvrđuje mjerilo svake karte, a prijedlog kompozicije karte iscrtava se pomoću priključenog plotera (sl. 18.4.).

18.1.3. Računalni program "Kartografske projekcije"

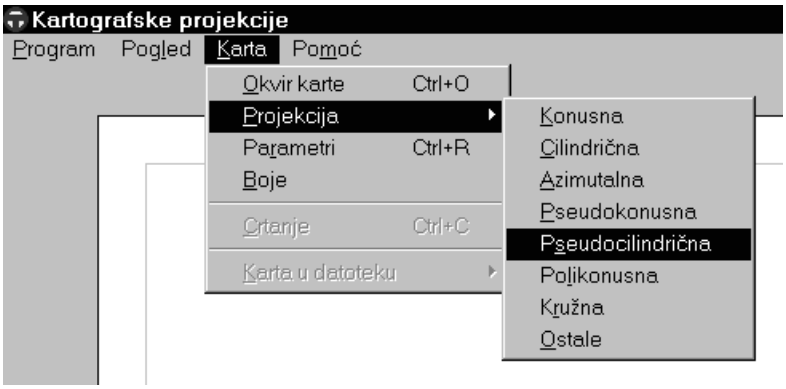
U Zavodu za kartografiju Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu sastavljen je računalni program "Kartografske projekcije" napisan u Borland Delphiju za operativni sustav Windows na osobnim računalima, koji uvelike olakšava rad na projektiranju matematičke osnove karata i atlasa (Tutić 1998). Program uključuje 85 projekcija Zemljine sfere, od kojih svaka, uz nekoliko iznimaka, može biti uspravna, poprečna i kosa. Omogućuje crtanje mreže meridijana, paralela i sadržaja zadanog u datoteci (konture kontinenata, granice država, rijeke itd.). Područje preslikavanja može se ograničiti mrežom meridijana i paralela, pravokutnim okvirom i u azimutalnim projekcijama kružnicom. Slika sa zaslona monitora može se prenijeti u koji od programa za crtanje ili na papir u točno određenom mjerilu s pomoću priključenog pisača.

Program je pisan za operacijski sustav Windows, prema tome sučelje (sl. 18.5) koje se pojavljuje pred korisnikom upotrebljava sve osobine ostalih programa pisanih za taj operacijski sustav. Prvo što će korisnik primjetiti jest da su izbornici, dijalozi i poruke na hrvatskom jeziku osim opcija i dijaloga koji pripadaju operacijskom sustavu (dijalog za otvaranje datoteke, dijalog za ispis na pisač i za izbor pisača, izbornici u datoteci za pomoć). Čini se da je to optimalno rješenje za program te vrste jer prevoditi standardne dijaloge nije baš uputno (problem bi se riješio hrvatskom inačicom operacijskog sustava Windows) pogotovo zato što nije usvojena neka norma za nazive koji u engleskom jeziku imaju već ustaljeno značenje u računalstvu. S druge strane, prevoditi sav ostali sadržaj programa na engleski jezik značilo bi umnogome otežati rad korisnicima koji ne poznaju dovoljno engleski jezik, s obzirom da je to program specifične namjene.

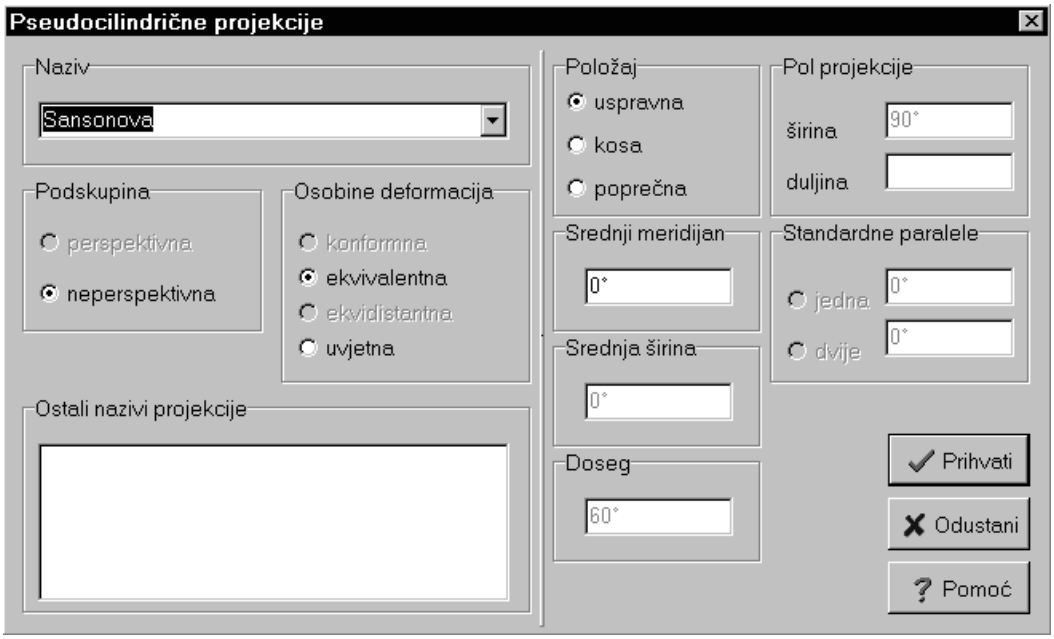
Slika 18.5. Početni izgled grafičkog sučelja programa

Kad se program pokrene pojavi se uobičajen prozor s nazivom programa, izbornikom i crtežom lista papira u koji je ucrtan okvir karte. Iz tog se već vidi da se karta crta unutar nekog okvira koji se nalazi na određenom formatu papira (sl. 18.5).Veličinu i oblik lista papira i okvira karte možemo mijenjati. Najveća dozvoljena širina i visina papira je 150 cm.

Izbor jedne od 85 ponuđenih projekcije odvija se preko izbornika **Karta,** potom **Projekcija**. Kad izaberemo izbornik **Projekcija,** pojavljuje se podizbornik u kojemu su navedene skupine projekcija (sl. 18.6). Tek nakon izbora skupine pojavljuje se dijalog u kojemu možemo izabrati sve implementirane projekcije koje pripadaju toj skupini (sl. 18.7).

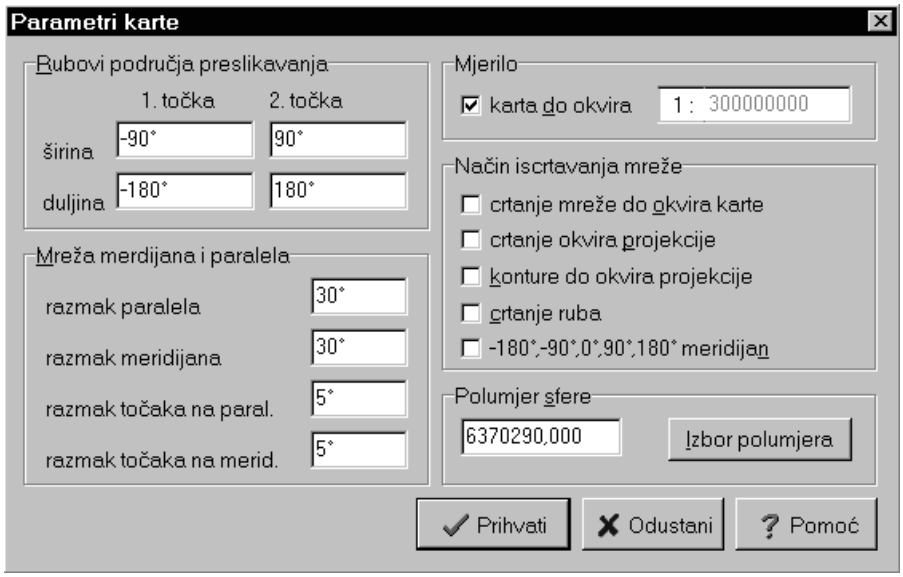


Slika 18.6. Skupine projekcija u izborniku programa



Slika 18.7. Dijalog za izbor projekcije i postavljanje njezinih parametara

Parametri karte određuju koji će dio Zemljine sfere biti iscrtan, s kojom gustoćom mreže meridijana i paralela i s kojom gustoćom točaka po meridijanima i paralelama. U parametre karte uključeni su još i mjerilo, polumjer Zemljine sfere i još neke dodatne opcije koje će u nastavku biti objašnjene. Dijalog za zadavanje parametara karte prikazan je na sl. 18.8, a do njega dolazimo preko izbornika **Karta** i **Parametri.**



Slika 18.8. Dijalog za postavljanje parametara karte

Rubovi područja preslikavanja (sl. 18.8) zadaju se pomoću dvije točke na sferi. Prva točka mora imati južniju geografsku širinu i zapadniju geografsku duljinu od druge točke. U početku su te vrijednosti postavljene tako da se preslika cijela Zemlja. Mjerilo karte možemo zadati ili ga program određuje ovisno o veličini zadanog okvira. Ako zadamo takvo mjerilo da područje preslikavanja više ne stane u okvir karte, pojavit će se poruka koja na to upozorava. Promjenom mjerila karta se povećava ili smanjuje oko središnje točke okvira karte. Polumjer sfere možemo upisati ili izabrati. Možemo izabrati takav polumjer da sfera ima isti volumen ili oplošje kao neki elipsoid ili da je jednak srednjem polumjeru zakrivljenosti u nekoj točki na elipsoidu. Označavanjem kvadratića pored teksta u donjem desnom dijelu izabiru se opcije koje omogućuju različite prikaze mreže meridijana i paralela.

Preostaje još samo kartu iscrtati na zaslon monitora. To ćemo učiniti pozivom izbornika **Karta** i onda **Crtanje**.

Računalnim programom "Kartografske projekcije" nacrtane su u ovoj monografiji sve slike mreža meridijana, paralela i kontura kontinenata u različitim kartografskim projekcijama.

18.2. Transformacija koordinata između susjednih sustava Gauss-Krügerove projekcije na području Hrvatske

18.2.1. Uvod

Formule za direktnu transformaciju koordinata između susjednih sustava Gauss-Krügerove projekcije objavio je Ehlert (1970). O primjeni tih formula već je pisano u Geodetskom listu (Frančula, 1973). Taj algoritam uvršten je i u poznati udžbenik prof. Borčića (1976), a zajedno s drugim algoritmima za računanja u Gauss-Krügerovoj projekciji i u monografiju (Frančula, 1980). Preko tih radova doživio je vrlo široku primjenu u našoj geodetskoj praksi.

18.2.2. Algoritam

U odnosu na algoritam iz 1973. Vučetić i dr. (1990) objavili su više poboljšanja i skraćenja. Oba algoritma predviđena su za računanje samo na području bivše Jugoslavije, dakle pretpostavlja se Besselov referentni elipsoid, pa su ulazni podaci samo ime i koordinate y, x zadane točke.

18.2.2.1. Određivanje sustava u kojem se nalazi zadana točka i sustava u koji je treba transformirati

Bivša Jugoslavija bila je pokrivena petim, šestim i sedmim Gauss-Krügerovim koordinatnim sustavom, prema tome postoje dva preklopna područja na kojima se ovaj algoritam želi primjenjivati.

U radu (Frančula, 1973) broj sustava u kojem se nalazi točka (5, 6, ili 7), kao i u koji sustav treba izvršiti transformaciju, utvrđuje se pomoću nekoliko "uvjetnih skokova" (IF...THEN...).

U algoritmu iz 1990. to određivanje znatno je pojednostavljeno. Poznato je da prva znamenka ordinate y označava broj sustava. Dakle, da bi se iz ordinate y odredio sustav u kojem se dotična točka nalazi, potrebno je izdvojiti prvu znamenku. Ako se y pomnoži s 0.000001, te odbace znamenke iza decimalnog zareza, dobit će se broj sustava. Budući da je y uvijek pozitivan, to odbacivanje znamenaka može se uraditi pomoću funkcije "najveći cijeli broj sadržan u zadanom broju", koja postoji u većini programskih jezika, obično pod imenom INT. Množenjem broja sustava s 1000000 i dodavanjem 500000 dobiva se ordinata (*YK*) osi x pripadnog sustava.

Na primjer, ako je

$$y = 5502123.56,$$

tada je

$$\mathrm{INT}(y \cdot 0.000001) = 5,$$

a

$$YK = \mathrm{INT}(y \cdot 0.000001) \cdot 1000000 + 500000 = 5500000.$$

Ordinatu osi x (*YKC*) susjednog sustava u koji treba transformirati zadanu točku određujemo pomoću izraza

$$YKC = YK + PR \cdot 1000000,$$

gdje je $PR = \mathrm{sgn}(y - YK)$. Varijabla *PR* poprima vrijednost

$$PR = \begin{cases} -1 \text{ za } (y - YK) < 0 \\ 0 \text{ za } (y - YK) = 0. \\ 1 \text{ za } (y - YK) > 0 \end{cases}$$

Ukoliko se točka nalazi istočno od osi x sustava u kojem je zadana, vrijednost varijable *PR* bit će jednaka 1, ordinati *YK* dodat će se 1000000, te će se za *YKC* dobiti ordinata osi x sustava koji leži istočno od polaznoga. Analogno tome, za zadanu točku koja se nalazi zapadno od osi x vrijednost *PR* bit će jednaka –1, a za *YKC* dobit će se ordinata od osi x sustava koji leži zapadno od zadanoga. Za $y = YK$ dobije se $PR = 0$ i točka se ne transformira ni u jedan susjedni sustav, ali na takve točke se ovaj algoritam ionako ne primjenjuje.

18.2.2.2. Računanje širine φ_1

Treba odrediti širinu φ_1 točke *T* tako da duljina luka meridijana od ekvatora do točke *T* bude jednaka zadanoj apscisi *x*. Ovaj problem formulirao je i riješio Helmert (1880). Njegovo je rješenje izraz za širinu φ_1 u obliku (prvih nekoliko članova) beskonačnog reda sinusa višestrukih kutova, s time da su i odgovarajući koeficijenti napisani u obliku (prvih nekoliko članova) beskonačnog reda potencija parametra *n* (treća spljoštenost). Helmertove izraze za koeficijente napisali su kasnije s većim brojem članova Krüger (1912), te König i Weise (1951), a mogu se naći i u novijoj literaturi (vidi npr. Vincenty 1971, s jednom, vrlo vjerojatno, štamparskom pogreškom, ili Ehlert 1982).

Spomenuti problem određivanja širine φ_1 pojavljuje se redovito u vezi s računanjima u Gauss-Krügerovoj projekciji. Da bi se olakšala računanja, preporučala se primjena za tu svrhu sastavljanih tablica (vidi npr. Borčić 1976, Schödlbauer 1982). Da je u današnje vrijeme upotreba tablica nepotrebna, ne treba posebno dokazivati.

Razvojem računala postale su popularne razne numeričke iterativne metode zbog relativne jednostavnosti za programiranje. Tako su se neke od njih primjenjivale i za određivanje širine φ_1 (Frančula 1973, 1980, Borčić 1976). Međutim, lako se može pokazati da je pri primjeni iterativnih metoda (koje se pojavljuju u navedenoj literaturi potreban mnogo veći broj računskih operacija nego što je to pri primjeni Helmertove formule, samo napisane u drugom obliku. Tako je Vincenty (1971) predložio da se umjesto kosinusa višestrukih kutova koriste potencije kosinusa jednostrukog kuta (vidi također Frančula 1979). Sljedeće poboljšanje je također razvijanje u red, ali po potencijama kosinusa dvostrukog kuta:

$$\varphi_1 = g + \sin(2g)(k_0 + k_1 \cos(2g) + k_2 \cos^2(2g) + ...) =$$

$$= g + \sin(2g)(k_0 + \cos(2g)(k_1 + \cos(2g)(k_2 + ...))),$$

vidi npr. (Wolfrum 1987). Prednosti ove formule pred razvojem po potencijama kosinusa jednostrukog kuta mogu se izvesti analogno kao što je to učinio Lapaine (1990) u vezi s računanjem duljine luka meridijana. U gornjoj formuli je $g = \bar{x}/A$, gdje je $\bar{x}$ nereducirana apscisa zadane točke, A polumjer sfere čiji su meridijani jednake duljine kao meridijani promatranog referentnog elipsoida, u našem slučaju Besselova, a $k_0, k_1, k_2, \ldots$ odgovarajuće konstante. Uočimo da je, bez obzira na to koliko članova reda trebamo za postizanje tražene točnosti, dovoljno izračunati samo jedan sinus i samo jedan kosinus za pojedinu točku, a sve ostale operacije su zbrajanja i množenja.

18.2.2.3. Određivanje nužnih članova u formulama i nužnog broja znamenaka u konstantama

S obzirom na polazne pretpostavke Vučetić i dr. (1990) utvrdili su nužne članove u izrazu za φ_1, kao i u Ehlertovim formulama za direktnu transformaciju, te nužni broj znamenaka u svim konstantama. U tu svrhu provedeno je ispitivanje duž graničnih meridijana sustava, u pojasu širokom 1° (0.5° istočno i zapadno od tih meridijana). U tim područjima generirane su točke u pravilnom rasteru međusobno udaljene 1 km, ukupno oko 180 000 točaka.

Da bi se moglo provesti testiranje, najprije su bile potrebne takve formule koje daju točnost bitno veću od one koja nam treba. Istraživanje je pokazalo da u tu svrhu mogu poslužiti Ehlertove "dugačke" formule s članovima do na osmu potenciju (Ehlert 1970) uz računanje širine φ_1 pomoću razvoja do $\cos^4(2g)$ i uzimanje svih konstanti na onoliko znamenaka koliko se može prikazati na računalu u dvostrukoj točnosti. Rezultati takvog računanja uzimani su kao "bespogrešni" i s njima uspoređivani rezultati koje daje predloženi algoritam.

Ispitivanjem je utvrđeno da se uz polazne pretpostavke može na 1° širokim preklopima zona iz Ehlertovih "kratkih" formula (objavljenih u Ehlert 1970, Frančula 1973, Borčić 1976) izostaviti jedan član u izrazu za $\bar{y}'$, pa preostaje:

$$\bar{y}' = z + \frac{1}{6N^2}(1 - t^2 + \eta^2)z^3 + \frac{1}{2N^2}t^2 z\bar{y}^2 + \frac{1}{6N^2}(-1 - 2t^2 - \eta^2)\bar{y}^3 + \frac{1}{120N^4}(5 - 18t^2)z^5 +$$

$$+ \frac{1}{12N^4}(5t^2 - t^4)z^3\bar{y}^2 + \frac{1}{12N^4}(-1 - t^2 + 2t^4)z^2\bar{y}^3 +$$

$$+ \frac{1}{24N^4}(-8t^2 - 3t^4)z\bar{y}^4 + \frac{1}{120N^4}(5 + 18t^2 + 4t^4)\bar{y}^5,$$

$$\bar{x}' = \bar{x} + \frac{t}{2N}z^2 - \frac{t}{2N}\bar{y}^2 + \frac{t}{24N^3}(5 - t^2 + 9\eta^2)z^4 + \frac{t}{4N^3}(-1 + t^2 - \eta^2)z^2\bar{y}^2 +$$

$$+ \frac{t}{6N^3}(-1 - 2t^2 - \eta^2)z\bar{y}^3 + \frac{t}{24N^3}(5 + 3t^2 + \eta^2)\bar{y}^4.$$

U tim je formulama:

$$z = \bar{y} - PR \cdot L \cdot N \cdot \cos\varphi_1,$$

PR - predznak (vidi odjeljak 18.2.2.1.),

$\bar{y}, \bar{x}$ - nereducirane koordinate točke,

$\bar{y}', \bar{x}'$ - transformirane nereducirane koordinate točke,

$$N = \frac{c}{(1+\eta^2)^{1/2}},$$

$$\eta^2 = \frac{e'^2}{1+t^2},$$

$$t = \mathrm{tg}(\varphi_1),$$

uz zadane konstante:

e'^2 - kvadrat drugog numeričkog ekscentriciteta,

c - polumjer zakrivljenosti na polovima

L - razlika geografskih duljina srednjih meridijana susjednih sustava u radijanima.

Pri tome se širina φ_1 može računati pomoću

$$\varphi_1 = g + \sin(2g)(k_0 + k_1\cos(2g)),$$

gdje je $g = \bar{x}/A.$

Vrijednosti svih konstanti su (ovdje dane na onoliko znamenaka koliko je potrebno za postizanje željene točnosti):

$$c = 6398786.85$$

$$A = 6366742.52$$

$$e'^2 = 0.00671922$$

$$L = 0.0523598776$$

$$k_0 = 0.002511266$$

$$k_1 = 0.000007359,$$

pri čemu su vrijednosti za c, A, e'^2 izračunane iz pretpostavke da je referentni elipsoid Besselov, čije su poluosi a i b zadane pomoću

$$\log a = 6.8046434637$$

$$\log b = 6.8031892839,$$

a iznos od L predstavlja 3° izražena u radijanima.

Iako je navedena formula za računanje φ_1 tako jednostavna, ona ipak omogućava postizanje zahtjevane točnosti transformiranih koordinata zahvaljujući tome što su konstante k_0 i k_1 odabrane baš tako da budu optimalne za promatrano područje.

18.2.3. Dijagram toka

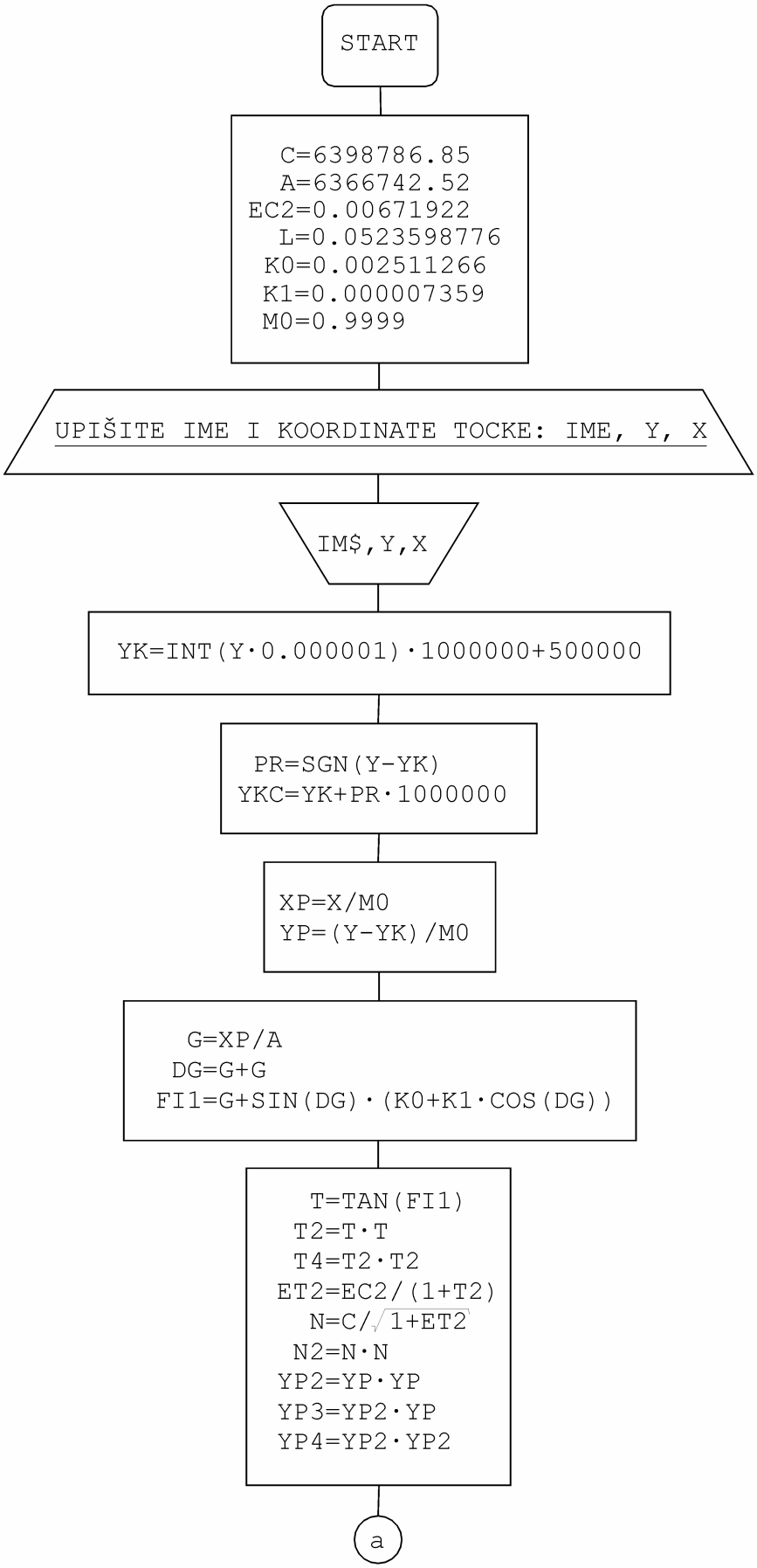
Kompletno računanje prikazano je u priloženom dijagramu toka. Naglasak je na poboljšanju i standardizaciji algoritma. Budući da se osim toga želi istaknuti i neka dobra programerska rješenja, nije se u izradi dijagrama toka držalo uobičajenog zapisa formula, već je zapis bliži zapisu u programskim jezicima. Time je ujedno omogućeno da se iz dijagrama toka lako napiše program u nekom od programskih jezika, naročito u BASIC-u ili FORTRAN-u. Pri tome treba paziti da se odabere takav tip varijabli i konstanti koji će osigurati dovoljnu točnost. Iz navedenih konstanti vidljivo je da u standardnom FORTRAN-u ili MICROSOFT-ovu BASIC-u taj zahtjev zadovoljava dvostruka točnost (DOUBLE PRECISION). Tada će zaista biti garantirano da položajna odstupanja transformiranih točaka (u navedenim područjima) budu manja od 1 mm (zapravo manja od 0.6 mm, što je utvrđeno testiranjem).

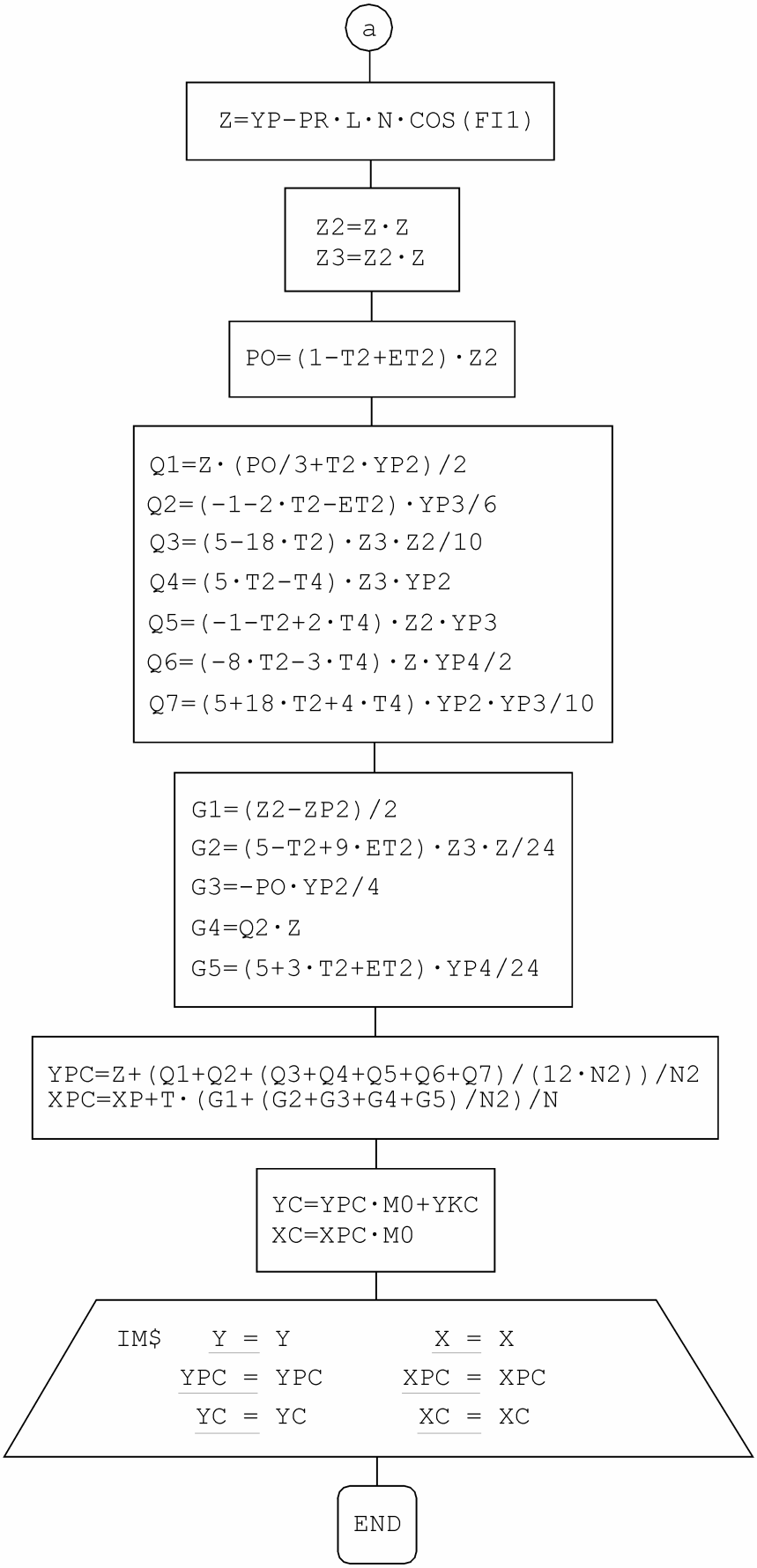
18.2.4. Primjer računanja

Da bi se potencijalnim korisnicima olakšalo implementiranje ovog algoritma, navodi se i primjer računanja:

TRANSFORMACIJA PRAVOKUTNIH KOORDINATA IZ JEDNOG KOORDINATNOG SUSTAVA U SUSJEDNI SUSTAV

1a	Y= 5611230.423	X= 5066532.532
	YPC= -122229.016	XPC= 5067245.274
	YC= 6377783.207	XC= 5066738.549
1b	Y= 6377783.207	X= 5066738.549
	YPC= 111241.547	XPC= 5067039.236
	YC= 5611230.423	XC= 5066532.532
2a	Y= 6613943.811	X= 4995286.930
	YPC= -122173.955	XPC= 4995938.936
	YC= 7377838.262	XC= 4995439.342
2b	Y= 7377838.262	X= 4995439.342
	YPC= 113955.207	XPC= 4995786.509
	YC= 6613943.811	XC= 4995286.930


START
C=6398786.85
A=6366742.52
EC2=0.00671922
L=0.0523598776
K0=0.002511266
K1=0.000007359
M0=0.9999
UPIŠITE IME I KOORDINATE TOCKE: IME, Y, X
IM$,Y,X
YK=INT(Y·0.000001)·1000000+500000
PR=SGN(Y-YK)
YKC=YK+PR·1000000
XP=X/M0
YP=(Y-YK)/M0
G=XP/A
DG=G+G
FI1=G+SIN(DG)·(K0+K1·COS(DG))
T=TAN(FI1)
T2=T·T
T4=T2·T2
ET2=EC2/(1+T2)
N=C/√1+ET2
N2=N·N
YP2=YP·YP
YP3=YP2·YP
YP4=YP2·YP2
a


a
Z=YP-PR·L·N·COS(FI1)
Z2=Z·Z
Z3=Z2·Z
PO=(1-T2+ET2)·Z2
Q1=Z·(PO/3+T2·YP2)/2
Q2=(-1-2·T2-ET2)·YP3/6
Q3=(5-18·T2)·Z3·Z2/10
Q4=(5·T2-T4)·Z3·YP2
Q5=(-1-T2+2·T4)·Z2·YP3
Q6=(-8·T2-3·T4)·Z·YP4/2
Q7=(5+18·T2+4·T4)·YP2·YP3/10
G1=(Z2-ZP2)/2
G2=(5-T2+9·ET2)·Z3·Z/24
G3=-PO·YP2/4
G4=Q2·Z
G5=(5+3·T2+ET2)·YP4/24
YPC=Z+(Q1+Q2+(Q3+Q4+Q5+Q6+Q7)/(12·N2))/N2
XPC=XP+T·(G1+(G2+G3+G4+G5)/N2)/N
YC=YPC·M0+YKC
XC=XPC·M0
IM$ Y = Y X = X
YPC = YPC XPC = XPC
YC = YC XC = XC
END

19. RJEČNIK

Svi termini složeni su u rječniku po abecedi. Kada se termin sastoji od dvije ili više riječi, prva je uvijek imenica. Na primjer *azimutalna projekcija* uvrštena je u rječnik kao *projekcija, azimutalna*. Zarez znači da je uobičajeni redoslijed riječi obrnut. Na isti način upisani su u rječnik i termini na stranim jezicima. Ako u nekom jeziku postoje sinonimi, odvojeni su točkom sa zarezom (;). Sinonim terminu u hrvatskom jeziku označen je s *također*. Prednost se daje prvom navedenom terminu. S *vidi* upućuje se na termine koji su poslužili u definiciji određenog termina ili su u uskoj vezi s njima. Rječnik je preuzet iz članka (Frančula, Lapaine 2003).

almukantarat
Mala kružnica na Zemljinoj kugli uzduž koje su sve točke jednako udaljene od bilo koje točke kugle koja se smatra polom određenoga koordinatnog sustava.
Napomena: U astronomiji, kružnice na nebeskoj sferi paralelne s horizontom.
En. almucantar; parallel of altitude
Fr. parallèle de hauteur
Nj. Netzbreite; Höhenkreise

dužina, geografska
(1) Generički (opći) pojam za geodetsku ili astronomsku dužinu. (2) Kut od ravnine početnog meridijana do ravnine meridijana zadane točke, istočno se smatra pozitivnom. Oznaka λ.
En. longitude, geographic
Fr. longitude géographique
Nj. Länge, geographische

ekvator
Najveća paralela.
Vidi: paralela
En. equator
Fr. équator
Nj. Äquator

linija, geodetska
Geometrijski interpretirano najkraća spojnica na plohi dviju točaka nekog ne suviše velikog područja te plohe.
Vidi: ortodroma
En. geodesic, line; geodesic
Fr. ligne géodésique
Nj. Linie, geodätische

loksodroma
Linija na rotaciojskoj plohi koja sve meridijane siječe pod istim kutom.
Napomena: Brod plovi po loksodromi kad na putu između dviju pozicija plovi stalno u istom kursu.
Vidi: meridijan
En. line, rhumb; line of constant bearing; loxodrome
Fr. loxodromie
Nj. Loxodrome

meridijan
(1) Generički (opći) pojam za astronomski i geodetski meridijan. (2) Linija na Zemljinoj sferi dobivena presjekom te sfere poluravninom čiji se rubni pravac podudara s obrtnom osi te sfere.
Vidi: dužina, geografska
En. meridian
Fr. méridien
Nj. Meridian

mjerilo dužina
Također: linearno mjerilo
Odnos diferencijala duljine luka u projekciji prema odgovorajućem diferencijalu luka na plohi elipsoida ili kugle kojima se aproksimiraju Zemlja, ostala nebeska tijela i nebeski svod.
Napomena: Linearno mjerilo mijenja se na karti od točke do točke, a u danoj točki mijenja se promjenom azimuta, pa se razlikuju: mjerilo po meridijanima, mjerilo po paralelama, mjerilo po glavnim pravcima. Ako u nekoj točki u određenom pravcu nema deformacija, mjerilo dužina jednako je jedinici.
Vidi: pravci, glavni

En. scale, particular
Fr. échelle locale
Nj. Sondermaßstab

mreža, kartografska
Predodžba (slika) koordinatnih linija u ravnini u nekoj kartografskoj projekciji.
Napomena: Kartografska mreža predočena slikama meridijana i paralela naziva se osnovna kartografska mreža.
En. graticule
Nj. Kartennetz

mreža, normalna kartografska
Kartografska mreža koja je u danoj projekciji po obliku linija jednostavnija od bilo koje druge kartografske mreže.
Napomena: Normalnu kartografsku mrežu na sferi čini sustav vertikala i almukantarata. Pol se tog sustava s obzirom na prostiranje područja preslikavanja podudara s geografskim polom, nalazi se na ekvatoru ili zauzima bilo koji položaj između geografskog pola i ekvatora.
Vidi: mreža, kartografska; vertikal; almukantarat
En. graticule, normal

ortodroma
Geodetska linija na sferi.
Napomena: Na sferi su ortodrome lukovi velikih kružnica.
Vidi: linija, geodetska
E. orthodrome
Fr. orthodrome
Nj. Orthodrome

paralela
(1) Generički (opći) pojam za astronomsku i geodetsku paralelu. (2) Linija na Zemljinoj sferi dobivena presjekom te sfere ravninom okomitom na obrtnu os te sfere.
Napomena: Analogno se definira paralela na Zemljinu elipsoidu.
Vidi: širina, geografska
En. parallel, geographic
Fr. parallèle de latitude
Nj. Breitenkreis; Parallelkreis

ploha, pomoćna
Ploha koja se dade razviti u ravninu (plašt stošca i valjka), a na koju se kod perspektivnih konusnih i cilindričnih projekcija projiciraju točke s plohe kugle ili elipsoida.
Vidi: projekcija, perspektivna
En. surface, developable
Fr. surface auxiliaire de projection
Nj. Hilfsabbildungsfläche

pravci, glavni
Dva međusobno okomita pravca u bilo kojoj točki na plohi elipsoida ili kugle i njima odgovarajući međusobno okomiti pravci u projekciji uzduž kojih mjerilo dužina ima najveću i najmanju vrijednost.
Vidi: mjerilo dužina
En. directions, principal
Fr. directions principales
Nj. Hauptverzerrungsrichtungen

projekcija, azimutalna
Kartografska projekcija kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao pravci koji se sijeku u jednoj točki, pod kutovima jednakim odgovarajućim razlikama geografskih dužina, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem u presjeku meridijana.
Napomena: Perspektivna azimutalna projekcija – posebna vrsta azimutalne projekcije kod koje se Zemlju smatra kuglom, a točke s plohe kugle projiciraju se po zakonima linearne perspektive iz točke promatranja na projekcijsku ravninu. Ravnina projekcije okomita je na pravac koji spaja točku promatranja sa središtem kugle.
Vidi: projekcija, kartografska; projekcija, uspravna; meridijan; paralela
En. projection, azimutal; projection, zenithal
Fr. projection azimutale
Nj. Azimutalabbildung

projekcija, centralna
Također: gnomonska projekcija
Perspektivna azimutalna projekcija kod

koje se točka promatranja nalazi u središtu kugle.
Napomena: U ovoj projekciji ortodrome se preslikavaju kao pravci.
Vidi: projekcija, azimutalna; ortodroma
En. projection, gnomonic
Fr. projection gnomonique
Nj. Zentralprojektion; Abbildung, gnomonische

projekcija, cilindrična
Također: valjkasta projekcija
Kartografska projekcija kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao pravci među sobom paralelni na razmaku proporcionalnom odgovarajućim razlikama geografskih dužina, a paralele također kao pravci okomiti na meridijane, i to na udaljenostima koje ovise o uvjetu preslikavanja.
Napomena: Perspektivna cilindrična projekcija – perspektivna projekcija kod koje se za pomoćnu plohu upotrebljava plašt valjka.
Vidi: projekcija, kartografska; projekcija, uspravna; meridijan; paralela
En. projection, cylindrical
Fr. projection cylindrique
Nj. Zylinderabbildung

projekcija, ekvidistantna
Kartografska projekcija koja čuva duljine u određenom smjeru.
Napomena: Kod ekvidistantnih projekcija je u svakoj točki mjerilo dužina uzduž jednoga glavnog pravca jednako jedinici, odnosno u svakoj točki postoji smjer uzduž kojega nema deformacije dužina
Vidi: projekcija, kartografska; mjerilo dužina; pravci, glavni
En. projection, equidistant
Fr. projection équidistante
Nj. Abbildung, abstandstreue

projekcija, ekvivalentna
Kartografska projekcija koja čuva površine.
Napomena: Kod ekvivalentnih projekcija je u svakoj točki mjerilo površina jednako jedinici, odnosno u niti jednoj točki nema deformacije površina.
Vidi: projekcija, kartografska
En. projection, equivalent; projection, equal-area; projection, authalic
Fr. projection équivalente
Nj. Abbildung, flächentreue

projekcija, Gauss-Krügerova
Konformna poprečna cilindrična projekcija kod koje se srednji meridijan zadanog područja preslikava kao pravac i služi kao os x pravokutnoga koordinatnog sustava u ravnini; srednji meridijan područja preslikava se u pravoj dužini, tj. bez linearnih deformacija ili je linearno mjerilo uzduž njega konstantno.
Napomena: U engleskom govornom području projekcija je poznatija pod nazivom Transverse Mercator projection.
Vidi: projekcija, konformna; projekcija, poprečna; projekcija, cilindrična
En. projection, Transverse Mercator; projection, Gauss-Krüger
Fr. projection de Gauss-Krüger
Nj. Gauss-Krüger-Abbildung

projekcija, kartografska
Način preslikavanja plohe elipsoida ili kugle kojima se u kartografiji aproksimira ploha Zemlje, ostalih nebeskih tijela i nebeskog svoda u ravninu. Najčešće se zadaje analitički, tj. osnovnim kartografskim jednadžbama $x = f_1(\varphi,\lambda)$, $y = f_2(\varphi,\lambda)$, gdje su φ, λ geografske koordinate na elipsoidu ili sferi, a x, y koordinate u ravnini projekcije. Može se zadati i tablicom koordinata ili opisom konstrukcije mreže meridijana i paralela. Po svojstvima preslikavanja dijele se u konformne, ekvivalentne, ekvidistantne i uvjetne projekcije. Po položaju pola normalne kartografske mreže dijele se na uspravne, poprečne i kose projekcije. Po obliku mreže meridijana i paralela uspravnih projekcija dijele se na konusne, cilindrične, azimutalne, pseudokonusne, pseudocilindrične, polikonusne, i ostale projekcije. Često nose ime svog autora, npr. Mercatorova, Sansonova, Robinsonova. Kao posebna skupina kartografskih projekcija često se izdvajaju geodetske projekcije, tj.

projekcije za potrebe državne izmjere.
Vidi: mreža, normalna kartografska; projekcija, uspravna
En. projection, map
Fr. projection cartographique
Nj. Abbildung, kartographische

projekcija, konformna
Kartografska projekcija koja čuva kutove.
Napomena: Kod konformnih projekcija nema deformacija kutova. U konformnim je projekcijama mjerilo dužina u svakoj točki jednako u svim smjerovima pa je u tim projekcijama sačuvana sličnost beskonačno malih likova.
Vidi: projekcija, kartografska; mjerilo dužina
En. projection, conformal; projection, orthomorphic
Fr. projection conforme
Nj. Abbildung, konforme; Abbildung, winkeltreue

projekcija, konusna
Također: stožasta projekcija
Kartografska projekcija kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao pravci koji se sijeku u jednoj točki, pod kutovima proporcionalnim odgovarajućim razlikama geografskih dužina, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem u presjeku slika meridijana.
Napomena: Perspektivna konusna projekcija – perspektivna projekcija kod koje se za pomoćnu plohu upotrebljava plašt stošca.
Vidi: projekcija, kartografska; projekcija, uspravna; meridijan; paralela
En. projection, conic
Fr. projection conique
Nj. Kegelabbildung

projekcija, kosa
Kartografska projekcija kod koje se pol normalne kartografske mreže nalazi u bilo kojoj točki između geografskog pola i ekvatora.
Napomena: U skupini perspektivnih projekcija to su projekcije kod kojih os pomoćne plohe ili okomica na projekcijsku ravninu pada na Zemljinu plohu u bilo kojoj točki između geografskog pola i ekvatora.
Vidi: projekcija, kartografska; mreža, normalna kartografska
En. aspect, oblique; case, oblique; aspect, skew (of map projection)
Fr. projection, oblique
Nj. Abbildung, schiefachsige

projekcija, Mercatorova
Konformna cilindrična projekcija.
Napomena: Uspravna ima posebnu važnost u navigaciji, jer se loksodrome preslikavaju u toj projekciji kao pravci. Poprečna je u upotrebi u mnogim zemaljama za službenu kartografiju. Univerzalna poprečna (UTM) je u vojnoj upotrebi (NATO).
Vidi: projekcija, cilindrična; loksodroma; UTM
En. projection, Mercator's
Fr. projection de Mercator
Nj. Mercatorabbildung

projekcija, ortografska
Perspekivna azimutalna projekcija kod koje se točka promatranja nalazi u beskonačnosti, pa su projekcijske zrake međusobno paralelne.
Vidi: projekcija, azimutalna
En. projection, ortographic
Fr. projection orthographique
Nj. Abbildung, orthographische; Parallelprojektion

projekcija, perspektivna
Kartografska projekcija kod koje se točke s plohe elipsoida ili kugle projiciraju po zakonima linearne perspektive iz točke promatranja na projekcijsku ravninu ili pomoćnu plohu.
Napomena: Od perspektivnih projekcija najveću primjenu u praksi imaju perspektivne azimutalne projekcije, pa se terminom perspektivne projekcije često označava samo ta skupina projekcija.
Vidi: projekcija, kartografska; ravnina, projekcijska; ploha, pomoćna
En. projection, perspective
Fr. projection perspective
Nj. Projection

projekcija, poliedarska
Kartografska projekcija kod koje se zamišlja da je čitava Zemljina ploha podijeljena meridijanima i paralelama u elipsoidne trapeze; svaki se takav trapez posebno preslikava na ravninu uz uvjet da se njegove stranice preslikavaju kao dijelovi pravaca čije su dužine jednake dužinama lukova odgovarajućih meridijana i paralela.
Vidi: projekcija, kartografska; meridijan; paralela
En. projection, polyhedric
Fr. projection polyedrique
Nj. Polyederabbildung

projekcija, polikonusna
Kartografska projekcija kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac, a paralele kao lukovi ekscentričnih kružnica sa središtima na srednjem meridijanu.
Vidi: projekcija, kartografska; projekcija, uspravna; meridijan; paralela
En. projection, polyconic
Fr. projection policonique
Nj. Abbildung, polykonische

projekcija, poprečna
Kartografska projekcija kod koje se pol normalne kartografske mreže nalazi na ekvatoru.
Napomena: U skupini perspektivnih projekcija to su projekcije kod kojih se os pomoćne plohe ili okomica na projekcijsku ravninu nalazi u ravnini ekvatora.
Vidi: projekcija, kartografska; mreža, normalna kartografska
En. aspect, transverse
Fr. projection transverse
Nj. Abbildung, querachsige

projekcija, poprečna Mercatorova
(1) Kartografska projekcija koja je poprečna i Mercatorova. (2) Na engleskom jezičnom području ime za Gauss-Krügerovu projekciju.
Vidi: projekcija, poprečna; projekcija, Mercatorova; projekcija, Gauss-Krügerova
En. projection, transverse Mercator
Fr. projection transverse de Mercator
Nj. transversale Mercatorabbildung

projekcija, pseudocilindrična
Kartografska projekcija kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac, a paralele kao međusobno paralelni pravci okomiti na srednji meridijan.
Vidi: projekcija, uspravna
En. projection, pseudocylindrical
Fr. projection méricylindrique
Nj. Abbildung, unechtzylindrische

projekcija, pseudokonusna
Kartografska projekcija kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem na srednjem meridijanu.
Vidi: projekcija, uspravna
En. projection, pseudoconical
Fr. projection mériconique
Nj. Abbildung, unechtkonische

projekcija, stožasta
Vidi: projekcija, konusna

projekcija, univerzalna poprečna Mercatorova
Vidi: UTM

projekcija, uspravna
Kartografska projekcija kod koje se pol normalne kartografske mreže podudara s geografskim polom.
Napomena: To je projekcija kod koje je normalna kartografska mreža istodobno i osnovna kartografska mreža. U skupini perspektivnih projekcija to su projekcije kod kojih se os pomoćne plohe ili okomica na projekcijsku ravninu podudara s

obrtnom osi sfere ili elipsoida.
Vidi: projekcija, kartografska; mreža, normalna kartografska; mreža, kartografska
En. aspect, normal; case, normal; aspect, direct (of a map projection)
Fr. projection directe
Nj. Abbildung, normalachsige

projekcija, uvjetna
Kartografska projekcija koja nije ni ekvivalentna, ni konformna, ni ekvidistantna. Kod te projekcije sfera ili elipsoid preslikava se u ravninu pod nekim posebnim uvjetima.
Vidi: projekcija, kartografska; projekcija, konformna; projekcija ekvivalentna; projekcije ekvidistantna
En. projection, arbitrary
Fr. projection aphylactique
Nj. Abbildung, vermittelnde

projekcija, valjkasta
Vidi: projekcija, cilindrična

ravnina, ekvatorska
Ravnina koja sadrži ekvator.
Vidi: ekvator
En. plane, equatorial
Fr. plan d'équateur
Nj. Äquatorebene

ravnina, projekcijska
Ravnina na koju se preslikava (projicira) ploha kugle ili elipsoida kojima se u kartografiji aproksimira Zemlja, ostala nebeska tijela i nebeski svod.
En. plane of projection
Fr. plan de projection
Nj. Abbildungsebene

širina, geografska
(1) Generički (opći) pojam za geodetsku i astronomsku širinu. (2) Kut od ekvatorske ravnine do smjera normale na Zemljinu sferu kroz danu točku. Vrijednost toga kuta u smjeru sjevera smatra se pozitivnom. Oznaka φ.
Napomena: Analogno se definira geografska širina za elipsoid.
En. latitude, geographic
Fr. latitude géographique
Nj. Breite, geographische

UTM
Šezdeset sustava poprečne Mercatorove projekcije od kojih svaki pokriva područje (zonu) od šest stupnjeva geografske dužine. Ishodište u svakom sustavu u presjeku je slike srednjeg meridijana s geografskom dužinom 3^o, 9^o, 15^o itd. i slike ekvatora. Linearno mjerilo na srednjem meridijanu iznosi 0,9996.
Vidi: projekcija, poprečna Mercatorova
En. UTM (Universal Transverse Mercator)
Fr. projection UTM
Nj. UTM-Abbildung

vertikal
Svaka velika kružnica na sferi koja prolazi kroz pol usvojenog koordinatnog sustava.
Napomena: U astronomiji velike kružnice na nebeskoj sferi koje prolaze zenitom.
En. vertical circle
Fr. cercle vertical
Nj. Netzmeridian; Vertikalkreis

LITERATURA:

Albinus, H.-J. (1979): Lokale und globale Aspekte bei Verzerrungsfunktionen kartographischer Netzentwürfe. Kartographische Nachrichten 3, 90-93.

Airy, G., B. (1861): Explanation of a projection by balance of errors for maps applaying to a very large extent of the Earth's; and comparision of this projection with other projections. Philosophical Magazine and Journal of Science, Ser. 4, Vol. 22, 409-421.

Bašlavin, V., A., Vojnova, V., V. (1957): Redakcionaja podgotovka spravočnyh opščegeografičeskih atlasov. Trudy CNIIGAIK-a, No 115, Moskva.

Bilajbegović, A., Podunavac, B. (1994): Istraživanje krivulja za prelazak iz WGS84 koordinatnog sustava u državni koordinatni sustav. Geodetski list 2, 111-117.

Borčić, B. (1955a): Matematička kartografija; Kartografske projekcije. Tehnička knjiga, Zagreb.

Borčić, B. (1955b): Gauss-Krügerova projekcija, Teorija i primena u državnom premeru. GI JNA, Beograd.

Borčić, B. (1976): Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona. Liber, Zagreb.

Brandenberger, A.-J. (1976a): Status of world mapping. U: World cartography, Vol. XIV, United Nations, New York, 3-70.

Brandenberger, A.-J. (1976b): Study on the status of world cartography. U: World cartography, Vol. XIV, United Nations, New York, 71-96.

Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A. (1975): Matematički priručnik za inženjere i studente. Tehnička knjiga, Zagreb.

Bugayevskiy, L. M., Snyder, J. P. (1995): Map projections – A reference mannual, Taylor & Francis, London, Bristol.

Canters, F. (1989): New projections for world maps, a quantitative-perspective approach. Cartographica 2, 53-71.

Canters, F. (2002): Small-scale map projection design, Taylor & Francis, London and New York.

Colvocoresses, A. P. (1969): Unified plane co-ordinate reference system. World cartography, Volume IX, United Nations, New York, 9-65.

Čubranić, N. (1974a): Viša geodezija, I dio. Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.

Čubranić, N. (1974b): Viša geodezija, II dio. Tehnička knjiga, Zagreb.

Čubranić, N. (1979): Geodezija. Tehnička enciklopedija, VI svezak, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb, 71-75.

Dahlberg, R. E. (1962): Evolution of interrupted map projections. Internationales Jahrbuch für Kartographie, 36-54.

De Lucia, A. A., Snyder, J. P. (1986): An innovative world map projection, Technical note, The American Cartographer, Vol. 13, No. 2, 165-167.

Ehlert, D: (1970): Die direkte Umformung Gaußscher Koordinaten in den benachbarten Meridianstreifen. Professor Dr.-Ing. Helmut Wolf zum 60. Geburtstag, Institut für Kartographie und Topographie der Universität Bonn, 26-31.

Ehlert, D. (1982): Zur direkten Berechnung der geographischen Breite aus der Meridianbogenlänge auf Rotationsellipsoiden. AVN 11-12, 460-461.

Fiala, F. (1957): Mathematische Kartographie. VEB Verlag Technik, Berlin.

Frančula, N. (1968): Eckertove pseudocilindrične projekcije. Neobjavljeni rukopis, Zagreb.

Frančula, N. (1971): Die vorteilhaftesten Abbildungen in der Atlaskartographie. Dissertation, Institut für Kartographie und Topographie der Universität Bonn.

Frančula, N. (1973): Direktna transformacija koordinata pomoću elektroničkih računala između susjednih sustava Gauss-Krügerove projekcije. Geodetski list 10-12, 211-216.

Frančula, N. (1974a): Prenumeracija kartografskih mreža elektroničkim računalima i crtačima. Geodetski list 1-3, 13-17.

Frančula, N. (1974b): Izbor projekcije. Geodetski fakultet, Zagreb.

Frančula, N. (1979): Primjena džepnih računala u rješavanju zadataka Gauss-Krügerove projekcije. Geodetski list 4-6, 95-102.

Frančula, N. (1980): Kompjutorski program za računanja u Gauss-Krügerovoj projekciji. Zbornik radova, Niz A, sv. br.23. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Frančula, N., Jovičić, D., Žarinac-Frančula, B., Lapaine, M. (1992): Konformno preslikavanje rotacijskog elipsoida na sferu i obratno primjenom trigonometrijskih redova. Geodetski list 2, 181-189. Ispravak, Geodetski list 4, 537.

Frančula, N., Lapaine (2003): Mali rječnik kartografskih projekcija; Glosssary of map projections. Kartografija i geoinformacije 2003, 2, 206-215.

Gilbert, E. N. (1974): Distortions in maps. Society for Industrial and Applied Mathematics Review 1, 47-62.

Ginzburg, G., A. (1940): Zritelnaja ocenka kartografičeskih izobraženij. Učeni zapiski Hark'v'skogo deržavnogo univesitetu im. O. M. Gorkogo 18, 67-81.

Ginzburg, G., A., Salmanova, T., D. (1957): Atlas dlja vybora kartografičeskih projekcij. Trudy CNIIGAIK, Bd. 110, Moskva.

Glavna geodetska uprava pri vladi FNRJ (1951): Pravilnik za državni premer, I deo, Triangulacija, knjiga prva, Beograd.

Graur, A. V. (1956): Matematičeskaja kartografija. Izdatel'stvo Leningradskogo universiteta, Leningrad.

Großmann, W. (1976): Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.

Helmert, F: R. (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorien. B. G. Teubner, Leipzig.

Hristov, V., Daskalova, M. J. (1970): Matematičeskaja kartografija. Tehnika, Sofija.

Jordan, W. (1896): Der mittlere Verzerrungsfehler. ZfV 249-252.

Jordan/Eggert/Kneissl (1958): Handbuch der Vermessungskunde, Band IV, Erste Hälfte, (10. izdanje) J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.

Jordan/Eggert/Kneissl (1959): Handbuch der Vermessungskunde. 10. Ausgabe, Band IV – Mathematische Geodäsie (Landesvermessung), Sttuttgart.

Jovanović, V. (1983): Matematička kartografija. Vojnogeografski institut, Beograd.

Kavrajskij, V. V: (1958): Izabranie trudy, Tom II: Matematičeskaja kartografija, Bd. 1. Obščaja teorija kartografičeskih projekcij. Izdanie načalnika upravlenija Gidrografičeskoj službi Voeno-morskoj akademii.

König, R., Weise, K. H. (1951): Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie. Erster Band, Springer Verlag, Berlin.

Krüger, L. (1912): Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene. Potsdam: Veröffentlichungen des Königlich Preuszischen Geodätischen Institutes, Neue Folge No 52, B. G. Teubner, Leipzig.

Lambert, J. H. (1772): Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen, Dritter Theil, im Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin. U prijevodu na engleski s uvodom W. R. Toblera pod naslovom: Notes and Comments on the Composition of Terrestrial and Celestial Maps, Michigan Geographical Publication No. 8, Department of Geography, University of Michigan, Ann Arbor, 1972.

Lapaine, M. (1990): Duljina luka meridijana. Geodetski list 4-6, 97-108.

Lapaine, M. (1994): Osnovni geodetski zadaci uzduž meridijana i paralele na rotacijskom elipsoidu. Geodetski list 1, 43-52.

Lapaine, M., Frančula, N. (1992): Modificirana Gilbertova projekcija. Kompjutor u obnovi Hrvatske, CAD FORUM '92, CAD Sekcija Saveza društava arhitekata Hrvatske, Zagreb, 13.-15. 5. 1992. Zbornik radova, 159-164.

Lapaine, M., Frančula, N. (1993): Gilbert two-world projection. Proceedings of the 16th International Cartographic Conference, Cologne/Köln 3-9 May 1993, Vol. 1, Bielefeld 1993, 66-82.

Lapaine, Milj., Lapaine, Mir. (1991): Površina elipsoidnog trapeza. Geodetski list 10-12, 367-373.

Lapaine, Milj., Lapaine, Mir., Frančula, N., Vučetić, N. (1992): Numerical Values of Geodetic Constants of the Bessel's Ellipsoid. Proceedings of the 37th International Annual Gathering KoREMA, 14th Symposium on Measurement, Faculty of Electrical Engineering, University of Zagreb 26.-29. 4. 1992., 273-277.

Lapaine, M., Žarinac-Frančula, B. Frančula, N. i Jovičić, D. (1993): Ekvivalentno preslikavanje rotacijskog elipsoida na sferu i obratno primjenom trigonometrijskih redova. Geodetski list 4, 315-324.

Lapaine, M., Žarinac-Frančula, B., Jovičić, D. i Frančula, N. (1994): Ekvidistantno preslikavanje po meridijanima rotacijskog elipsoida na sferu i obratno primjenom trigonometrijskih redova. Geodetski list 4, 351-359.

Laskowski, P. (1997): The distortion spectrum. Cartographica 3 , Monograph 50, 1-96.

Leighly, J. B. (1955): Aitoff and Hammer; An attempt at clarification. Geographical Review 246-249.

Meščerjakov, G. A: (1968): Teoretičeskie osnovy matematičeskoj kartografii. Nedra, Moskva.

Milnor, J. (1969): A problem in cartography. The American Mathematical Monthly 10, 1101-1112.

Mittermayer, E. (1964): Die numerischen Werte der Besselschen Erdkonstanten. Zeitschrift für Vermessungswesen, 12, 469-470.

Moritz, H. (1980): Das Geodätische Bezugssystem 1980. Festschrift zur Emeritierung von o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Hubeny, Mitt. der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 35, Graz, 153-159.

Muminagić, A. (1987): Viša geodezija II, Građevinski fakultet u Sarajevu, Naučna knjiga, Beograd.

Nestorov, I. G. (1997): CAMPREL: A new adaptive conformal cartographic projection. Cartography and Geographic Information Systems 4, 221-227.

O'Keefe, J. A. (1952): The Universal Transverse Mercator grid and projection. Preofessional Geographer 5, 1924.

O'Keefe, J., A., Greenberg, A. (1977): A note on the van der Grinten projection of the whole Earth onto a circular disk. The American Cartographer 2, 127-132.

Peters, A. B. (1975): Wie man unsere Weltkarten der Erde ähnlicher machen kann. Kartographische Nachrichten 5, 173-183.

Peters, A. B. (1984): Distance-related maps. The American Cartographer 2, 119-131.

Pravilnik (1951): Pravilnik za državni premer, I deo, Triangulacija, Knjiga prva. Glavna geodetska uprava pri vladi FNRJ, Beograd.

Radošević, N. (1979): Predratna vojna karta 1:100 000 (1:50 000) i današnja triangulacija. Zbornik radova, Vojnogeografski institut, Beograd, 129-148.

Różycki, J. (1973): Kartografia matematyczna. Panstwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa.

Sališčev, K. A. (1987): Proektirovanie i sostavlenije kart. Moskovskij universitet, Moskva.

Savezna geodetska uprava (1953): Osnovni geodetski radovi u F. N. R. Jugoslaviji. Beograd.

Schödlbauer, A. (1982): Rechernformeln und Rechenbeispiele zur Landesvermessung. Teil 2, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.

Seeger, H. (1993): EUREF Aufbau eines neuen geodätischen Bezugssystems in Europa. 31. DVW Seminar, Dresden, 22.-24. 3. 1993., 1-14.

Snyder, J. P. (1979): Projection notes. The American Cartographer 1, 81.

Snyder, J. P. (1984): Minimum-error map projections bounded by polygons. Cartographic Journal 2, 112-120.

Snyder, J. P. (1985): Computer-assisted map projection research.. U. S. Geological Survey Bulletin, No. 1629, United States Government Printing Office, Washington.

Snyder, J. P. (1993): Flattening the earth; Two thousand years of map projections. The University of Chicago Press, Chicago and London.

Solov'ev, M. D. (1969): Matematičeskaja kartografija. Nedra, Moskva.

Svečnikov, N. S. (1953): Viša geodezija, prva knjiga. Savezna geodetska uprava, Beograd.

Tissot, A. (1887): Netzentwürfe geographischer Karten. Autorisierte deutsche Bearbeitung mit einigen Zusätzen von E. Hammer. Stuttgart.

Tolstova, T. I. (1969): Kriterij Eiri v primenenii k azimutal'nym projekcijam. Izvestija vysših učebnih zavedenij Geodezija i aerofotos'emka 6, 115-118.

Tutić, D. (1998): Računalni program "Kartografske projekcije". Diplomski rad, Geodetski fakultet, Zagreb.

Vahrameeva, L., A., Bugaevskij, L., M., Kazakova, Z. L. (1986): Matematičeskaja kartografija. Nedra, Moskva.

Vincenty, T. (1971): The meridionaal distance problem for desk computers. Survey Review No 161, 136-140.

Vučetić, N., Petrović, S., Žic-Nejašmić, M., Frančula, N., Lapaine, M. (1990): Poboljšanja algoritma za transformaciju koordinata između susjednih sustava Gauss-Krügerove projekcije na području Jugoslavije. Geodetski list 10-12, 361-371.

Wagner, K.-H. (1962): Kartographische Netzentwürfe. Bibliographisches Institut, Mannheim.

Winkel, O. (1921): Neue Gradnetzkombinationen. Petermans Mitteilungen, 248-252.

Wolfrum, O. (1987): Die Berechnung der Meridianbogenlänge und der Fußpunktbreite mittels der dritten Abplattung. AVN 7, 249-256.

Živković, A. (1972): Viša geodezija. Građevinska knjiga, Beograd.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

1. UVOD 3

2. KOORDINATE 5

2.1. Kartezijev sustav koordinata 5

2.2. Krivolinijske koordinate 10

2.3. Polarne koordinate 12

2.4. Sferne koordinate 14

2.5. Geografske koordinate na sferi 15

2.6. Geografske koordinate na rotacijskom elipsoidu 16

2.7. Izometrijska širina 17

3. OBLIK I VELIČINA ZEMLJE 19

3.1. Elementi Zemljina elipsoida 19

3.1.1. Besselov elipsoid 21

3.1.2. Opći Zemljin elipsoid 22

3.1.3. Koordinatni sustav WGS 84 23

3.1.4. Referentni sustav EUREF 24

3.2. Jednadžba rotacijskog elipsoida 24

3.3. Polumjeri zakrivljenosti Zemljina elipsoida 26

3.4. Duljina luka meridijana i luka paralele na Zemljinom elipsoidu 30

3.5. Površina elipsoidnog trapeza 33

3.6. Elementi Zemljine sfere 33

3.7. Preslikavanje elipsoida na elipsoid 36

3.8. Preslikavanje elipsoida na sferu 36

3.9. Preslikavanje sfere na sferu, Gilbertov globus 38

4. OPĆA TEORIJA KARTOGRAFSKIH PROJEKCIJA 41

4.1. Osnovni pojmovi i jednadžbe 41

4.2. Mjerila i deformacije 42

4.2.1. Linearne deformacije 44

4.2.2. Elipsa deformacije 46

4.2.3. Deformacija površina 49

4.2.4. Deformacije kutova 50

4.3. Kriteriji za ocjenu kartografskih projekcija na osnovi veličina deformacija 52

5. PODJELA KARTOGRAFSKIH PROJEKCIJA 55

5.1. Podjela kartografskih projekcija prema vrstama deformacija 55

5.1.1. Konformne ili istokutne projekcije 55

5.1.2. Ekvivalentne ili istopovršinske projekcije 56

5.1.3. Ekvidistantne ili istodužinske projekcije 56

5.1.4. Uvjetne projekcije 57

5.2. Podjela kartografskih projekcija prema položaju pola normalne kartografske mreže 57

5.3. Podjela kartografskih projekcija prema obliku normalne kartografske mreže 57

5.4. Veza između uspravnih poprečnih i kosih projekcija 62

5.4.1. Određivanje geografskih koordinata pola u kosim poprečnim projekcijama 63

5.4.2. Veze između geografskih koordinata φ i λ i koordinata φ' i λ' poprečnog ili kosog sustava 64

6. KONUSNE PROJEKCIJE 65

6.1. Uspravne konformne konusne projekcije 67

6.2. Uspravne ekvivalentne konusne projekcije 72

6.3. Uspravne ekvidistantne konusne projekcije 76

6.4. Perspektivne konusne projekcije 79

7. AZIMUTALNE PROJEKCIJE 81

7.1. Uspravne konformne azimutalne projekcije 83

7.2. Uspravne ekvivalentne azimutalne projekcije 85

7.3. Uspravne ekvidistantne azimutalne projekcije 87

7.4. Kose i poprečne azimutalne projekcije 89

7.5. Perspektivne azimutalne projekcije 90

7.5.1. Uspravna ortografska projekcija 92

7.5.2. Uspravna stereografska projekcija 93

7.5.3. Uspravna centralna projekcija 94

7.5.4. Vanjske projekcije 95

7.6. Modifikacija azimutalnih projekcija 96

7.6.1. Aitovljeva projekcija 96

7.6.2. Hammer-Aitovljeva projekcija 97

8. CILINDRIČNE PROJEKCIJE 98

8.1. Uspravne konformne cilindrične projekcije 99

8.2. Uspravne ekvivalentne cilindrične projekcije 103

8.3. Uspravne ekvidistantne cilindrične projekcije 105
8.4. Kose i poprečne cilindrične projekcije 107
8.5. Perspektivne cilindrične projekcije 109

9. PSEUDOKONUSNE PROJEKCIJE 111
9.1. Bonneova projekcija 112

10. PSEUDOCILINDRIČNE PROJEKCIJE 115
10.1. Sansonnova projekcija 115
10.2. Mollweideova projekcija 117
10.3. Eckertove projekcije 120
10.3.1. Eckertova projekcija III 121
10.3.2. Eckertova projekcija IV 122
10.3.3. Eckertova projekcija V 123
10.3.4. Eckertova projekcija VI 124
10.4. Pseudocilindrične projekcije Kavrajskog 125
10.4.1. Ekvivalentna sinusoidalna pseudocilindrična projekcija Kavrajskog 125
10.4.2. Eliptična pseudocilindrična projekcija Kavrajskog 126
10.5. Goodeove modifikacije pseudocilindričnih projekcija 127

11. POLIKONUSNE PROJEKCIJE 129
11.1. Jednostavna (američka) polikonusna projekcija 129

12. KRUŽNE PROJEKCIJE 131
12.1. Van der Grintenova projekcija 131

13. MJEŠOVITE PROJEKCIJE 133
13.1. Winkelova projekcija 133

14. POLIEDARSKA PROJEKCIJA 135

15. GAUSS-KRÜGEROVA PROJEKCIJA 138
15.1. Uvod 138
15.2. Svojstva Gauss-Krügerove projekcije 139
15.3. Konformno preslikavanje pomoću analitičkih funkcija 140
15.3.1. Izometrijske koordinate 141
15.4. Računanje pravokutnih koordinata y, x (Gauss-Krügerovih koordinata) iz geografskih koordinata φ i λ 143
15.5. Računanje geografskih koordinata φ i λ iz pravokutnih koordinata y i x 146
15.6. Konvergencija (zbližavanje) meridijana u ravnini Gauss-Krügerove projekcije 150

15.6.1. Računanje konvergencije meridijana u ravnini kad su zadane geografske koordinate φ i λ ... 151
15.6.2. Računanje konvergencije meridijana u ravnini iz pravokutnih koordinata y i x ... 152
15.7. Mjerila i deformacije ... 154
15.7.1. Računanje mjerila iz geografskih koordinata φ i λ ... 154
15.7.2. Računanje mjerila m iz pravokutnih koordinata y i x ... 154
15.8. Uvođenje linearne deformacije na srednjem meridijanu i praktično značenje tog postupka ... 156
15.9. Sustavi Gauss-Krügerove projekcije u Hrvatskoj ... 158
15.10. Redukcija duljina ... 160
15.11. Redukcija pravaca ... 162
15.12. Projekcija (slika) geodetske linije ... 164
15.13. Osnovni ili prvi geodetski zadatak ... 166
15.14. Obrnuti ili drugi geodetski zadatak ... 168
15.15. Transformacija pravokutnih koordinata na ravnini iz jednog kordinatnog sustava u drugi (susjedni) ... 170
15.15.1. Transformacija prelaskom na geografske koordinate ... 171
15.15.2. Direktna transformacija ... 171

16. MATEMATIČKA OSNOVA TOPOGRAFSKIH KARATA HRVATSKE ... 173
16.1. Topografske karte izrađene na osnovi prve topografske izmjere bivše Jugoslavije ... 173
16.1.1. Pravokutna koordinatna mreža ... 173
16.2. Topografske karte izrađene na osnovi druge topografske izmjere bivše Jugoslavije ... 175

17. IZBOR PROJEKCIJE ... 178
17.1. Izbor projekcije za potrebe državne izmjere ... 178
17.2. Izbor projekcije za izradu topografskih karata ... 181
17.3. Izbor projekcije za izradu geografskih karata 1:1 000 000 i sitnijih mjerila ... 182
17.3.1. Općenito o izboru projekcije ... 182
17.3.2. Utjecaj pojedinih činilaca na izbor projekcije ... 184
17.3.2.1. Veličina područja preslikavanja ... 184
17.3.2.2. Oblik i položaj područja preslikavanja ... 184
17.3.2.3. Sadržaj karte ... 185
17.3.2.4. Način upotrebe karte ... 185
17.3.2.5. Zaključci ... 186

17.3.3. O izboru projekcije za karte različitih područja 187
17.3.3.1. Karte država i grupa država 187
17.3.3.2. Karte kontinenata 187
17.3.3.3. Karte oceana 189
17.3.3.4. Karte polukugli 191
17.3.3.5. Karte svijeta 191
18. PRIMJENA RAČUNALA 193
18.1. Projektiranje matematičke osnove geografskih karata i atlasa 193
18.1.1.Projektiranje matematičke osnove geografskih karata sitnih mjerila 193
18.1.2. Projektiranje matematičke osnove geografskih atlasa 195
18.1.3. Računalni program "Kartografske projekcije" 197
1 ˛8.2. Transformacija koordinata između susjednih sustava Gauss-Krügerove projekcije na području Hrvatske 200
18.2.1. Uvod 200
18.2.2. Algoritam 200
18.2.2.1. Određivanje sustava u kojem se nalazi zadana točka i sustava u koji je treba transformirati 200
18.2.2.2. Računanje širine φ_1 201
18.2.2.3. Određivanje nužnih članova u formulama i nužnog broja znamenaka u konstantama 202
18.2.3. Dijagram toka 204
18.2.4. Primjer računanja 204
19. RJEČNIK 207
LITERATURA 213
SADRŽAJ 219
KAZALO 225

KAZALO

Airy 53-54
algoritam 200, 204
almukantarat 207
apscisa 5, 8
azimut 45
BASIC 204
Bernouli, J. 12
Bonne, R. 112
Borland Delphi 197
Bosna i Hercegovina 173
Cartesius 5
CERCO 24
Crna Gora 173
deformacija
    kuta 50
    kuta, maksimalna 52, 55
    površina 49
deformacija, linearna 44
deformacije, srednje kvadratne 53
Descartes, R 5
diferencijal
    duljine luka 43
    površine 43
dijagram toka 204
dimenzije Zemljina elipsoida 20
Dinostrat 13
duljina luka
    meridijana 30-32
    paralele 30, 33
dužina, geografska 15-16, 207
Eckert, M. 120
Ehlert 202
elementi Zemljina elipsoida 19-20, 25
elementi Zemljine sfere 33
elipsa deformacija 46-48, 51
ekscentritet,
    prvi numerički 19
    drugi numerički 19
ekvator 15, 24, 207
elipsoid,
    Besselov 20-22, 36, 175, 200
    Clarkeov 20
    Everestov 20
    GRS 1967 20
    GRS 1980 20, 23
    Hayfordov 20
    Internacionalni 20
    Krasovskog 20
    opći Zemljin 22-23
    referentni 23, 36
    rotacijski 3, 16, 24-25
    Zemljin 19-20, 30, 41
    WGS 72 20
    WGS 84 20, 23-24
Euler, J. A. 9
EUREF 24
formula, Simpsonova 161
FORTRAN 204
funkcija, analitička 140, 143
funkcije, sferoidne 26
Gauss, C. F. 12, 138
geoid 3, 24
geometrija, diferencijalna 44, 48
globus, Gilbertov 38, 40
Goode, P. 127
GPS 4
Greenwich 175
GRS 1967
GRS 1980
Helmert 21
Hiparh 3
Hrvatska 4, 36, 158-159, 173, 176-177, 200
Hudde, J. 9
IAG 23
indikatrisa,
    Dupinova 29
    Tissotova 48
institut, Vojnogeografski 173-174
ishodište 5, 10
IUGG 24
izbor projekcije 178, 181-182, 184, 187
izokole 66, 67
izmjera,
    druga topografska 175
    državna 178-180
    prva topografska 173
jednadžba elipse 47
jednadžba rotacijskog elipsoida 24
jednadžbe kartografskih projekcija,
    osnovne 41
Jordan 53-54
Jugoslavija 137, 173-175, 200
karta
    Afrike 188-189
    Atlantskog oceana 190
    Australije 187
    Europe 187
    Europsko-Azijskog kontinenta 187
    Indijskog oceana 190
    Južne Amerike 189
    Sjeverne Amerike 188
    Tihog oceana 190

karta, topografska 173-178, 181
karte
    država 187
    kontinenata 187
    oceana 189
    polukugli 191
    svijeta 191
Kavrajski 125
konvergencija meridijana 150-152, 181
koordinate 5-10
    astronomske 5
    Gauss-Krügerove 143, 175
    geodetske 25
    geografske 15-16, 25, 41, 43
    izometrijske 141-142
    krivolinijske 10-12
    nereducirane 157-158, 203
    ortogonalne krivolinijske 11-12
    polarne 12-14
    reducirane 157-158, 203
    sferne 14
kriterij
    Airya 54
    Jordana 54
Krüger, L. 138
kružnica,
    ekscentrična 61
    elementarna 46
    koncentrična 58, 59, 60, 65, 81
La Hire, Ph. de 10
Lamme, G. 12
Leibnitz, G. W. 12
linija, geodetska 160, 162-166, 207
loksodroma 101-102, 207
Makedonija 173
Maxwell, J. C. 10
meridijan 15, 24, 207
meridijan,
    nulti 15
    početni 15
mjerila po glavnim pravcima 46, 52
mjerilo 42
    dužina 43, 207
    karte 42
    površina 43, 49
    u pravcu meridijana 46
    upravcu paralele 46
mjerilo,
    glavno 42-43
    linearno 43-45
    mjestimično 42-43
    površinsko 43
mreža,
    Gauss-Krügerova 175
    geografska 24, 34
    kartografska 41, 208
    koordinatna 10
    osnovna kartografska 41
    normalna (kartografska) 41, 57, 62, 208
    pravokutna koordinatna 173
    pravokutna 177
    trigonometrijska 178
mreža meridijana i paralela 34
način upotrebe karte 185
Newton, I. 13
oblik normalne (kartografske) mreže 57
oblik područja preslikavanja 184
ordinata 5, 8
Oresme, N. 5
ortodroma 95, 208
os rotacijskog elipsoida 16
os Zemlje 19
paralela 15, 24, 208
paralela, standardna 69, 70, 71
parametrizacija,
    geodetska 26
    geografska 25-26
ploha, pomoćna 208
podjela kartografskih projekcija 55, 57
podnevnik 15
područje preslikavanja 157, 184
pol,
    geografski 64
    Južni 16
    Sjeverni 16
pol kosog sustava 63
pol normalne (kartografske) mreže 57, 62
položaj područja preslikavanja 184
polumjer rektificirajuće sfere 34
polumjer zakrivljenosti
    meridijana 28
    presjeka po prvom vertikalu 28
    srednji 30
    Zemljina elipsoida 26
polumjer Zemljine sfere 34
poluos,
    mala 19
    velika 19, 24
polutke 16
polusfere 16
površina elipsoidnog trapeza 33, 73
pravci, glavni 46-48, 66, 208
presjeci, normalni 27

preslikavanje,
ekvivalentno 56
konformno 140
preslikavanje
elipsoida na elispoid 36
elipsoida na sferu 36
sfere na sferu 38
program, računalni 197
projekcija,
Aitovljeva 96, 133, 134, 192
azimutalna 57, 59, 81, 83, 85, 87, 89, 183, 208
Bonneova 112-114, 194
centralna 91, 94, 208
cilindrična 57, 59, 98-99, 103-105, 107-109, 183, 188, 190, 209
Eckertova III 121
Eckertova IV 122, 191
Eckertova V 123
Eckertova VI 124, 191-192
ekvidistantna 55-56, 209
ekvidistantna azimutalna 87, 97
ekvidistantna cilindrična 105, 107, 133, 193
ekvidistantna konusna 76
ekvivalentna 55-56, 209
ekvivalentna azimutalna 85, 188, 189, 191, 194
ekvivalentna cilindrična 103-105, 107, 133, 193
ekvivalentna konusna 72-73
Gallova 110
Gauss-Krügerova 4, 22, 138-139, 143, 150, 156, 158, 162, 164-165, 173-175, 180, 182, 184, 200-201, 209
Gilbertova 40, 195
gnomonska 94
Hammer-Aitovljeva 96-97, 192
istodužinska 55-56
istokutna 55
istopovršinska 55-56
jednostavna (američka) 129
jednostavna polikonusna 129-130
kartografska 41, 209
konformna 55, 210
konformna azimutalna 83
konformna cilindrična 99
konformna konusna 67-68
konusna 57-58, 65, 67-68, 72, 76, 79, 183, 210
kosa 57, 62-63, 80, 210
kosa azimutalna 89
kosa cilindrična 108
kružna 57, 61, 131
kvadratična 106
Lambert-Gaussova 180
Lambertova azimutalna 188
Lambertova konusna 180
Mercatorova 101-102, 187, 191, 210
mješovita 133
Mollweideova 117-118, 120, 127, 191
ortografska 3, 91-92, 210
perspektivna 210
perspektivna azimutalna 90
perspektivna cilindrična 109
perspektivna konusna 79
poliedarska 135-137, 173-175, 211
polikonusna 57, 61, 129, 211
poprečna 57, 62-63, 80, 211
poprečna azimutalna 89
poprečna cilindrična 108, 139
poprečna Mercatorova 211
pseudocilindrična 57, 60, 115, 117, 125, 189, 191, 211
pseudocilindrična Kavrajskog 125-126, 190
pseudokonusna 57, 60, 111, 211
Sansonova 115, 117, 127-128
stereografska 3, 91-92
stožasta 210, 211
univerzalna poprečna Mercatorova 211
uspravna 57, 62-63, 80, 211-212
uvjetna 55, 57, 212
valjkasta 209, 212
Van der Grintenova 131-132, 192
vanjska 91, 95
Winkelova 133-134, 192
projekcija geodetske linije 164-165
projiciranje na konus 79
računalo, osobno 197
radovi, kartometrijski 185-186
ravnina, ekvatorska 15, 212
ravnina, projekcijska 212
red,
ciklometrijski 151
Taylorov 144, 146
redukcija
duljina 160
pravaca 162-163
sadržaj karte 185
sfera srednjeg polumjera 34
sfera, Zemljina 15, 33-35
sferoid 20
Slovenija 173

spljoštenost 19
druga 19
treća 19
Srbija 173
sustav,
desni 6-10
državni koordinatni 36
lijevi 6-10
geografski koordinatni 15, 17
kosi 64
negativno orijentiran 6
polarni koordinatni 13
poprečni 64
pozitivno orijentiran 6
pravokutni koordinatni 6, 8, 81
sustav EUREF, referentni 24
sustav koordinata,
Kartezijev 5-10
pravolinijski 5
sustav WGS 84, koordinatni 23, 36
sustav Windows, operacijski 197
sustavi Gauss-Krügerove projekcije 158-159
širina,
geografska 15-16, 212
izometrijska 17-18, 142-143
Tales iz Mileta 3
teoremi, Apolonijevi 48
točke, singularne 25, 28
točnost kartometrijskih radova 185-186
točnost projekcije 157, 181
transformacija, direktna 170, 171
transformacija
koordinata 200
pravokutnih koordinata 170
prelaskom na geografske koordinate 171
trokut, sferni 64
uprava, Državna geodetska 177
UTM 212
Van der Grinten, P. 131
veličine drugog reda,
Gaussove fundamentalne 27
veličine prvog reda, Gaussove osnovne 44
vertikal 212
WGS 72 20
WGS 84 20, 36
Winkel, O. 133
zadatak,
drugi geodetski 168
obrnuti geodetski 168
osnovni geodetski 166
prvi geodetski 166-167
zakrivljenost
elipsoida, normalna 27
meridijana 28
presjeka po prvom vertikalu 28
zakrivljenost, ekstremna 27