

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GEODETSKI FAKULTET

Dražen Tutić

STEREOGRAFSKA
I DRUGE KONFORMNE PROJEKCIJE
ZA HRVATSKU

Doktorska disertacija



Zagreb, 2008

I. Autor	
Ime i prezime	Dražen Tutić
Datum i mjesto rođenja:	29. lipnja 1973., Zagreb
Sadašnje zaposlenje:	Znanstveni novak – asistent na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu
II. Doktorska disertacija	
Naslov:	Stereografska i druge konformne projekcije za Hrvatsku
Broj stranica:	112
Broj slika:	34
Broj tablica:	23
Broj bibliografskih podataka:	57
Ustanova i mjesto gdje je rad izrađen:	Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet
Znanstveno područje:	Tehničke znanosti
Znanstveno polje:	Geodezija
Znanstvena grana:	Kartografija
Mentor:	prof. dr. sc. Miljenko Lapaine
Oznaka i redni broj rada:	
III. Ocjena i obrana	
Datum prijave teme:	5. prosinca 2007.
Datum sjednice Fakultetskog vijeća na kojoj je disertacija prihvaćena:	29. siječnja 2009.
Sastav povjerenstva za ocjenu disertacije:	prof. dr. sc. Miljenko Lapaine prof. emeritus Nedjeljko Frančula doc. dr. sc. Dušan Petrovič, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Datum obrane disertacije:	
Sastav povjerenstva za obranu disertacije:	

SADRŽAJ

1. UVOD	11
2. DOSADAŠNJI RADOVI	14
2.1. Konformne projekcije u kartografiji	14
2.2. Konformne projekcije za Hrvatsku	17
2.3. Najpovoljnije konformne kartografske projekcije	22
3. PODRUČJE HRVATSKE	27
3.1. Praktično rješenje za aproksimaciju područja Hrvatske elipsoidnim trapezima	31
4. KRITERIJI ZA PROCJENU I IZBOR PROJEKCIJE	32
4.1. Airy/Jordanov kriterij za konformne projekcije	32
4.2. Kriterij najmanje najveće apsolutne linearne deformacije	33
5. METODOLOGIJA ZA NALAŽENJE OPTIMALNIH VARIJANTI	35
5.1. Primjena <i>MATLAB</i> -a za nalaženje optimalnih varijanti	35
5.2. Praktični postupak za izradu karata deformacija	38
6. MERCATOROVA PROJEKCIJA	43
6.1. Optimalne varijante Mercatorove projekcije	43
6.1.1. Optimalna Mercatorova projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju	44
6.1.2. Optimalna Mercatorova projekcija po kriteriju najmanje 45 najveće apsolutne linearne deformacije	47
7. LAMBERTOVA KONFORMNA KONUSNA PROJEKCIJA	47
7.1. Neke postojeće varijante Lambertove konformne konusne projekcije za prikaz Hrvatske	47
7.2. Optimalne varijante Lambertove konusne konformne projekcije	50
7.2.1. Optimalna Lambertova konformna konusna projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju	52
7.2.2. Optimalna Lambertova konformna konusna projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije	53
8. GAUSS-KRÜGEROVA PROJEKCIJA	55
8.1. Neke postojeće varijante Gauss-Krügerove projekcije za prikaz Hrvatske	55
8.2. Optimalne varijante Gauss-Krügerove projekcije	57
8.2.1. Optimalna Gauss-Krügerova projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju	58

8.2.2. Optimalna Gauss-Krügerova projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije	59
9. STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA ROTACIJSKOG ELIPSOIDA	61
9.1. Optimalne varijante stereografske projekcije rotacijskog elipsoida	61
9.1.1. Optimalna stereografska projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju	62
9.1.2. Optimalna stereografska projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije	63
10. LAGRANGEOVA PROJEKCIJA.....	65
10.1. Optimalne varijante Lagrangeove projekcije.....	65
10.1.1. Optimalna Lagrangeova projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju.....	68
10.1.2. Optimalna Lagrangeova projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije	69
11. KONFORMNE POLINOMNE PROJEKCIJE	71
11.1. Optimalne konformne polinomne projekcije 1. stupnja	72
11.2. Optimalne konformne polinomne projekcije 2. stupnja	73
11.2.1. Optimalna konformna polinomna projekcija 2. stupnja Airy/Jordanovu kriteriju.....	74
11.2.2. Optimalna konformna polinomna projekcija 2. stupnja kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije.....	75
11.3. Optimalne konformne polinomne projekcije 3. stupnja	77
11.3.1. Optimalna konformna polinomna projekcija 3. stupnja Airy/Jordanovu kriteriju.....	77
11.3.2. Optimalna konformna polinomna projekcija 3. stupnja kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije.....	78
11.4. Optimalne konformne polinomne projekcije 4. stupnja	80
11.4.1. Optimalna konformna polinomna projekcija 4. stupnja Airy/Jordanovu kriteriju.....	80
11.4.2. Optimalna konformna polinomna projekcija 4. stupnja kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije.....	82
11.5. Optimalne konformne polinomne projekcije 5. stupnja	83
11.5.1. Optimalna konformna polinomna projekcija 5. stupnja Airy/Jordanovu kriteriju.....	84
11.5.2. Optimalna konformna polinomna projekcija 5. stupnja kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije.....	85

11.6. Optimalne konformne polinomne projekcije 6. stupnja	87
11.6.1. Optimalna konformna polinomna projekcija 6. stupnja Airy/Jordanovu kriteriju.....	88
11.6.2. Optimalna konformna polinomna projekcija 6. stupnja kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije.....	90
11.6.3. Optimalna konformna polinomna projekcija 6. stupnja kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije za kopneno područje Hrvatske	92
11.7. Optimalne konformne polinomne projekcije od 7. do 10. stupnja	95
12. ZAKLJUČAK	100
LITERATURA.....	104
SAŽETAK	108
SUMMARY	110
ŽIVOTOPIS	112

POPIS SLIKA

Slika 3.1. Podaci kojima je definirano područje Hrvatske	28
Slika 3.2. Aproksimacija zadanog područja Hrvatske elipsoidnim trapezima veličine 1° po geografskoj dužini i širini	29
Slika 3.3. Aproksimacija zadanog područja Hrvatske elipsoidnim trapezima veličine $2'$ po geografskoj dužini i širini	30
Slika 6.1. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Mercatorovoj projekciji po Airy/Jordanovu kriteriju. Paralela koja se preslikava bez deformacija $\varphi_0 = 44^\circ 18'$	45
Slika 6.2. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Mercatorovoj projekciji po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Paralela koja se preslikava bez deformacija $\varphi_0 = 44^\circ 14'$	46
Slika 7.1. Raspored i veličina deformacija u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 38^\circ 30'$ i $\varphi_2 = 49^\circ 00'$	48
Slika 7.2. Raspored i veličina deformacija u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 43^\circ 05'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 55'$	49
Slika 7.3. Raspored i veličina deformacija u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 42^\circ 20'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 50'$	50
Slika 7.4. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji po Airy/Jordanovu kriteriju. Standardne paralele $\varphi_1 = 42^\circ 53'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 20'$...	53
Slika 8.1. Raspored i veličina deformacija u dvije zone Gauss-Krügerove projekcije sa srednjim meridijanima $\lambda_0 = 15^\circ$ i $\lambda_0 = 18^\circ$. Linearno mjerilo na srednjem meridijanu $c_0 = 0.9999$	56
Slika 8.2. Raspored i veličina deformacija u Gauss-Krügerovoj projekcije sa srednjim meridijanom $\lambda_0 = 16^\circ 30'$. Linearno mjerilo na srednjem meridijanu $c_0 = 0.9999$	57
Slika 8.3. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Gauss-Krügerovoj projekciji po Airy/Jordanovu kriteriju. Srednji meridijan $\lambda_0 = 16^\circ 04'$ i linearno mjerilo na srednjem meridijanu $c_0 = 0.999841$	59
Slika 8.4. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Gauss-Krügerovoj projekciji po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Srednji meridijan $\lambda_0 = 16^\circ 13'$ i linearno mjerilo na srednjem meridijanu $c_0 = 0.999603$	60
Slika 9.1. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj stereografskoj projekciji po Airy/Jordanovu kriteriju. Pol projekcije na $\varphi_0 = 44^\circ 14'$, $\lambda_0 = 16^\circ 33'$ i linearno mjerilo u polu $c_0 = 0.999797$	63

Slika 9.2. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj stereografskoj projekciji po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Pol projekcije na $\varphi_0 = 43^\circ 58'$, $\lambda_0 = 16^\circ 19'$ i linearno mjerilo u polu $c_0 = 0.999727$.	64
Slika 10.1. Oblici izokola u Lagrangeovoj projekciji u ovisnosti o vrijednosti parametra k uz $\varphi_0 = 45^\circ$, $\lambda_0 = 16^\circ$ i $c_0 = 1$.	67
Slika 10.2. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Lagrangeovoj projekciji po Airy/Jordanovu kriteriju. Središte projekcije na $\varphi_0 = 44^\circ 13'$, $\lambda_0 = 16^\circ 36'$, linearno mjerilo u središtu $c_0 = 0.999795$ i koeficijent $k = 0.990949$.	69
Slika 10.3. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Lagrangeovoj projekciji po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Središte projekcije na $\varphi_0 = 44^\circ 01'$, $\lambda_0 = 16^\circ 14'$, linearno mjerilo u središtu $c_0 = 0.999727$ i koeficijent $k = 1.028226$.	70
Slika 11.1. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 2. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. Koeficijenti $a_1 = 4.59474 \times 10^6$, $a_2 = -1.59788 \times 10^6$ i $b_2 = 2.07707 \times 10^3$.	75
Slika 11.2. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 2. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti $a_1 = 4.59365 \times 10^6$, $a_2 = -1.59604 \times 10^6$ i $b_2 = 4.21594 \times 10^3$.	76
Slika 11.3. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 3. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. Koeficijenti $a_1 = 4.59468 \times 10^6$, $a_2 = -1.60251 \times 10^6$, $b_2 = 9.61478 \times 10^3$, $a_3 = 2.05344 \times 10^5$ i $b_3 = -8.14867 \times 10^4$.	78
Slika 11.4. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 3. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti $a_1 = 4.59457 \times 10^6$, $a_2 = -1.60363 \times 10^6$, $b_2 = 1.31501 \times 10^4$, $a_3 = 2.31432 \times 10^5$ i $b_3 = -9.6598.9 \times 10^4$.	79
Slika 11.5. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 4. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. Koeficijenti $a_1 = 4.59495 \times 10^6$, $a_2 = -1.60233 \times 10^6$, $b_2 = 4.97068 \times 10^3$, $a_3 = 1.30868 \times 10^5$, $b_3 = -8.45032 \times 10^4$, $a_4 = 1.19404 \times 10^6$ i $b_4 = 1.45752 \times 10^6$.	81
Slika 11.6. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 4. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti $a_1 = 4.59479 \times 10^6$, $a_2 = -1.60295 \times 10^6$, $b_2 = 8.12737 \times 10^3$, $a_3 = 1.23727 \times 10^5$, $b_3 = -6.30751 \times 10^4$, $a_4 = 1.08739 \times 10^6$ i $b_4 = 1.26497 \times 10^6$.	83
Slika 11.7. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 5. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. Koeficijenti $a_1 = 4.59496 \times 10^6$,	

$$a_2 = -1.60273 \times 10^6, b_2 = 4.37379 \times 10^3, a_3 = 1.34363 \times 10^5, b_3 = -8.50200 \times 10^4, \\ a_4 = 1.18477 \times 10^6, b_4 = 1.59488 \times 10^6, a_5 = -1.67331 \times 10^6 \text{ i } b_5 = -3.81873 \times 10^6. \dots\dots 85$$

Slika 11.8. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 5. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti

$$a_1 = 4.59478 \times 10^6, a_2 = -1.60171 \times 10^6, b_2 = 8.07938 \times 10^3, a_3 = 1.04915 \times 10^5, \\ b_3 = -9.18204 \times 10^4, a_4 = 1.27829 \times 10^6, b_4 = 1.32636 \times 10^6, a_5 = -3.44667 \times 10^6 \text{ i } \\ b_5 = -3.93009 \times 10^6. \dots\dots\dots 87$$

Slika 11.9. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. Koeficijenti $a_1 = 4.59504 \times 10^6$,

$$a_2 = -1.60038 \times 10^6, b_2 = 1.76780 \times 10^3, a_3 = 6.19324 \times 10^4, b_3 = -4.51810 \times 10^4, \\ a_4 = 1.53766 \times 10^6, b_4 = 9.41033 \times 10^5, a_5 = 7.17668 \times 10^6, b_5 = 1.04285 \times 10^7, \\ a_6 = -2.76147 \times 10^8 \text{ i } b_6 = -1.33392 \times 10^8. \dots\dots\dots 90$$

Slika 11.10. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti

$$a_1 = 4.59494 \times 10^6, a_2 = -1.60169 \times 10^6, b_2 = 3.22059 \times 10^3, a_3 = 1.00654 \times 10^5, \\ b_3 = -5.00156 \times 10^4, a_4 = 1.33864 \times 10^6, b_4 = 8.44430 \times 10^5, a_5 = 8.39268 \times 10^6, \\ b_5 = 8.08407 \times 10^6, a_6 = -2.40452 \times 10^8 \text{ i } b_6 = -1.06635 \times 10^8. \dots\dots\dots 92$$

Slika 11.11. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja samo kopnenog područja Hrvatske po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti $a_1 = 4.59513 \times 10^6$, $a_2 = -1.60219 \times 10^6$,

$$b_2 = 7.61258 \times 10^3, a_3 = 6.08740 \times 10^4, b_3 = -9.90294 \times 10^4, a_4 = 1.22968 \times 10^6, \\ b_4 = 1.36948 \times 10^6, a_5 = 1.32256 \times 10^7, b_5 = -8.88260 \times 10^6, a_6 = -2.46185 \times 10^8 \text{ i } \\ b_6 = 5.87950 \times 10^7. \dots\dots\dots 94$$

Slika 11.12. Vrijednost kriterija u odnosu na stupanj konformne polinomne projekcije..... 95

Slika 11.13. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 10. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. $E = 0.000044$ 97

Slika 11.14. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 10. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. $d_{\max} = 0.000115$ 98

Slika 11.15. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 10. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije za kopneno područje Hrvatske. $d_{\max} = 0.000086$ 99

POPIS TABLICA

Tablica 6.1. Vrijednosti kriterija te paralela koja se preslikava bez deformacija u Mercatorovoj projekciji za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija.....	44
Tablica 6.2. Vrijednosti kriterija te paralela koja se preslikava bez deformacija u Mercatorovoj projekciji za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija	46
Tablica 7.1. Vrijednosti kriterija i standardne paralele Lambertove konformne konusne projekcije za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija.....	52
Tablica 7.2. Vrijednosti kriterija i standardne paralele Lambertove konformne konusne projekcije za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija.....	54
Slika 7.5. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Standardne paralele $\varphi_1 = 42^\circ 21'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 50'$	54
Tablica 8.1. Vrijednosti kriterija, te srednji meridijan i linearno mjerilo na srednjem meridijanu Gauss-Krügerove projekcije za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija.....	58
Tablica 8.2. Vrijednosti kriterija, te srednji meridijan i linearno mjerilo na srednjem meridijanu Gauss-Krügerove projekcije za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija	60
Tablica 9.1. Vrijednosti kriterija, te pol projekcije i linearno mjerilo u polu stereografske projekcije za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija.....	62
Tablica 9.2. Vrijednosti kriterija, te pol projekcije i linearno mjerilo u polu stereografske projekcije za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija.....	64
Tablica 10.1. Vrijednosti eksponenta k u Lagrangeovoj projekciji i opis oblika izokola okolini točke (φ_0, λ_0)	66
Tablica 10.2. Vrijednosti kriterija, te središte projekcije, linearno mjerilo u središtu i koeficijent k Lagrangeove projekcije za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija.....	68
Tablica 10.3. Vrijednosti kriterija, te središte projekcije, linearno mjerilo u središtu i koeficijent k Lagrangeove projekcije za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija	70
Tablica 11.1. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 2. stupnja za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija	74
Tablica 11.2. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 2. stupnja za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija	76

Tablica 11.3. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji	
3. stupnja za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija	77
Tablica 11.4. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji	
3. stupnja za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija	79
Tablica 11.5. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji	
4. stupnja za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija	81
Tablica 11.6. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji	
4. stupnja za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija	82
Tablica 11.7. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji	
5. stupnja za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija	84
Tablica 11.8. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji	
5. stupnja za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija	86
Tablica 11.9. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji	
6. stupnja za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija	89
Tablica 11.10. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji	
6. stupnja za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija	91
Tablica 11.11. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji	
6. stupnja samo kopnenog područja Hrvatske za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija	93
Tablica 11.12. Najmanje vrijednosti kriterija za polinomne projekcije od 7. do 10. stupnja. .	95
Tablica 12.1. Usporedba vrijednosti kriterija za sve istražene projekcije.....	101

1. UVOD

1.1. Hipoteza

Područje Hrvatske definiram kao uniju državnog teritorija (uključujući teritorijalno more) i epikontinentalnog morskog pojasa. Tako definirano područje je nepravilno, te se za potrebe računanja aproksimira pravilnom mrežom elipsoidnih trapeza veličine 2' po geografskoj dužini i širini. Detaljni opis definicije područja nalazi se u trećem poglavlju.

Za ocjenu konformnih projekcija za definirano područje upotrijebit ću dva analitička kriterija, Airy/Jordanov kriterij za konformne projekcije i kriterij najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Optimalnim projekcijama smatrat ću one koje imaju najmanju vrijednost kriterija. Vrijednosti tih kriterija upotrijebit će se za analizu i usporedbu postojećih i novih optimalnih projekcija. Stroga formulacija kriterija nalazi se u četvrtom poglavlju.

Uz navedeno pretpostavljam i pokušat ću dokazati u disertaciji:

1. Za razmatrano područje uspravna Mercatorova projekcija nije povoljna jer ima znatno veće linearne deformacije od ostalih razmatranih projekcija.
2. Lambertova konformna uspravna konusna projekcija može dati prihvatljiv raspored deformacija i vrijednosti deformacija uz pretpostavku odgovarajućeg izbora parametara.
3. Gauss-Krügerova projekcija (Lapaine 2000, NN 2004, 2004a) usporediva je po veličini deformacija s varijantom Lambertove konformne konusne projekcije (Lapaine 2000, NN 2004). Ta varijanta Gauss-Krügerove projekcije bliža je optimalnoj varijanti po Airy/Jordanovu kriteriju nego optimalnoj varijanti po kriteriju najveće apsolutne linearne deformacije.
4. Optimalne varijante stereografske projekcije daju vrlo povoljan raspored deformacija i manji iznos deformacija u odnosu na prethodne projekcije.
5. U Lagrangeovoj projekciji moguće je postići različite rasporede deformacija. Ona u specijalnom slučaju predstavlja Mercatorovu projekciju, Lambertovu konformnu konusnu ili stereografsku projekciju. Može imati raspored deformacija sličan onome u Gauss-Krügerovoj projekciji i još neke druge oblike rasporeda deformacija u kojima su izokole hiperbole. Raspored deformacija je uglavnom simetričan u odnosu na meridijan i paralelu kroz pol Lagrangeove projekcije. Dakle, nalaženjem optimalne varijante Lagrangeove projekcije za neko područje može se dobiti odgovor na pitanje iz koje skupine "standardnih" konformnih projekcija (cilindrične, konusne, stereografske, poprečne cilindrične) se može dobiti povoljna varijanta.
6. Za područje Hrvatske optimalne varijante Lagrangeove projekcije gotovo su jednake optimalnim varijantama stereografske projekcije. Razlika je praktički zanemariva i te dvije projekcije mogu se smatrati jednakima po zadanim kriterijima za područje Hrvatske.

7. Konformne projekcije izražene polinomima geografske dužine i izometrijske širine mogu dati najpovoljniju raspodjelu linearnih deformacija. Sve veći stupanj polinoma dovodi do sve dužih i nezgrapnijih formula za pisanje, iako njihova implementacija u računalu zbog određene pravilnosti ne bi trebala biti poseban problem.

1.2. Tema disertacije

Konformne kartografske projekcije osobito su važne zbog primjene za potrebe državnih izmjera, topografsko i katastarsko kartiranje, navigaciju u pomorstvu i zrakoplovstvu te vojne potrebe. Tako raširena primjena ponajprije je proizašla iz činjenice da u konformnim projekcijama linearno mjerilo u nekoj točki ne ovisi o azimutu za razliku od svih nekonformnih kartografskih projekcija u kojima osim o položaju točke, linearno mjerilo ovisi i o promatranom smjeru (azimutu) u nekoj točki.

Stereografska projekcija sfere otkrivena je i primijenjena u astronomiji vjerojatno još u doba starih Grka i Egipćana. Iako je jedna od najstarijih poznatih kartografskih projekcija, njezino svojstvo konformnosti se pokazuje tek krajem 17. stoljeća. Prekretnicu za upotrebu konformnih projekcija predstavlja otkriće Mercatorove projekcije u 16. stoljeću, koja omogućuje neposredno očitavanje smjera plovidbe s karte.

Danas vjerojatno nema države koja za potrebe službene kartografije ne upotrebljava neku konformnu projekciju. Kartiranje čitave Zemlje u krupnijim mjerilima temelji se na dvije konformne projekcije i to poprečnoj Mercatorovoj i polarnoj stereografskoj projekciji.

Hrvatska, i zemlje kojih je Hrvatska bila sastavnica, upotrebljavale su, a i danas upotrebljavaju nekoliko konformnih projekcija. To je u prvom redu Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona, projekcija koja je izabrana još 1924. godine za područje tadašnje Kraljevine SHS, a poslije II. svjetskog rata i u cijelosti primijenjena za službenu kartografiju tadašnje Jugoslavije. Nakon osamostaljenja 1991. godine Hrvatska je nastavila službenu upotrebu te projekcije, odnosno dviju zapadnih zona. Studijom (Lapaine 2000) predložena, a zakonodavnim aktom (NN 2004, 2004a) prihvaćena, od 2010. godine službena će biti Gauss-Krügerova projekcija s jednim koordinatnim sustavom (vidi poglavlje 8). Druga konformna projekcija koja se upotrebljava za službenu kartografiju je Lambertova konformna konusna projekcija. Ona se upotrebljava za potrebe pregledne službene kartografije (mjerila sitnija od 1:500 000), zrakoplovnu navigaciju i vojne pregledne karte (vidi poglavlje 7). Uspravna cilindrična konformna ili Mercatorova projekcija upotrebljava se za pomorske karte Jadranskoga mora. Upotreba projekcijskog sustava UTM predviđena je u vojsci, kao dio usklađivanja s NATO standardima.

U ovoj disertaciji analiziram neke postojeće i nalazim nove optimalne konformne projekcije za područje Hrvatske. Za sve su projekcije dane potrebne formule, brojčane vrijednosti zadanih kriterija i kartografski prikaz veličine i rasporeda deformacija, tako da je moguća njihova usporedba. Ovo je prvi rad koji na sistematiziran način prikazuje veći broj poznatih i novih konformnih projekcija po jedinstvenim kriterijima za područje Hrvatske. Od postojećih projekcija za Hrvatsku analiziraju se postojeće varijante Lambertove konformne

konusne i Gauss-Krügerove projekcije. Za te dvije projekcije daju se po dvije nove, optimalne varijante prema zadanim kriterijima. Daju se i dvije nove optimalne varijante Mercatorove projekcije.

Od projekcija koje do sada nisu primjenjivane niti analizirane za područje Hrvatske, daju se po dvije optimalne varijante stereografske, Lagrangeove i 9 polinomnih konformnih projekcija od 2. do 10. stupnja. Za 6. i 10. stupanj polinomnih konformnih projekcija daje se i optimalna varijanta za kopneno područje Hrvatske. Sveukupno, definirano je 30 novih konformnih projekcija, te analizirano 5 postojećih.

Naravno, ovaj rad je nastavak na radove brojnih drugih autora. Temelje teorije konformnog preslikavanja dali su Lambert i Gauss. Kriterijima za ocjenu deformacija i optimiranjem kartografskih projekcija bavili su se brojni autori. Nešto je manji broj istraživanja projekcija za Hrvatsku. U drugom poglavlju dan je pregled važnijih dosadašnjih radova iz područja konformnog preslikavanja u kartografiji, zatim radova koji su se bavili kartografskim projekcijama za područje Hrvatske (i zemalja kojih je Hrvatska bila sastavnica). Na kraju je dan pregled radova koji su se bavili optimalnim projekcijama za neko geografsko područje. Na temelju tih istraživanja izabran je pristup nalaženju optimalnih konformnih projekcija za Hrvatsku.

U trećem poglavlju opisuje se područje Hrvatske koje je definirano za nalaženje novih i analizu postojećih projekcija. Za područje od interesa uzet je državni teritorij (kopno i teritorijalno more) te područje epikontinentalnog pojasa na kojemu Hrvatska ima gospodarski interes. S obzirom da je takvo područje jako nepravilno upotrijebljena je aproksimacija mrežom elipsoidnih trapeza veličine 2' po geografskoj dužini i širini.

U četvrtom poglavlju definirani su kriteriji za ocjenu deformacija projekcije. Prvi kriterij je tzv. Airy/Jordanov kriterij za konformne projekcije koji daje ocjenu deformacija na cijelom zadanom području kao minimum sume kvadrata linearne deformacije. Drugi je kriterij najmanje najveće apsolutne linearne deformacije, kriterij uobičajen prilikom izbora kartografske projekcije jer odražava težnju da se neko područje preslika sa što manjim deformacijama.

U petom poglavlju opisana je metodologija za nalaženje novih optimalnih projekcija po zadanim kriterijima. Upotrijebljena je metoda simpleksa koju su predložili Nelder i Mead za nalaženje minimuma funkcije. Upotrijebljeno je okruženje *MATLAB*-a za praktična računanja.

Poglavlja 6. do 11. posvećena su pojedinim projekcijama. Nakon kratkog uvoda o pojedinoj projekciji, daju se neke postojeće varijante te projekcije za područje Hrvatske, ako takve postoje, zatim slijede formule potrebne za nalaženje optimalnih varijanti tih projekcija. Na kraju pojedinog poglavlja daju se nove optimalne varijante tih projekcija po kriteriju Airy/Jordana i po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Za svaku optimalnu projekciju daju se numeričke vrijednosti i karta s veličinom i rasporedom deformacija u toj projekciji. Izuzetak čine polinomne projekcije 7. do 10. stupnja za koje se daje samo vrijednost kriterija, a numeričke vrijednosti se nalaze na CD-u koji je dio ovoga

rada. Za polinomne projekcije 10. stupnja daju se i karte s veličinom i rasporedom linearnih deformacija.

U dvanaestom poglavlju, u zaključku, daje se tablični pregled svih projekcija i vrijednosti kriterija s osvrtom na dobivene rezultate.

Novi rezultati ovoga rada su prvenstveno nove konformne kartografske projekcije za Hrvatsku. U smislu postavljenih kriterija dobivene su bolje konformne projekcije od postojećih. Primjerice, kod nekih optimalnih projekcija najmanje vrijednosti kriterija dostižu samo 20% vrijednosti istih kriterija u postojećim projekcijama. Međutim, kako je to u zaključku navedeno, mogućnosti za nalaženje još optimalnijih konformnih projekcija za Hrvatsku ipak ima.

2. DOSADAŠNJI RADOVI

Radovi iz područja kartografskih projekcija su vrlo brojni. Primjerice, jedna od najopsežnijih bibliografija iz područja kartografskih projekcija (Snyder i Stewart 1997) broji nemalo 3000 bibliografskih jedinica. U ovom pregledu dosadašnjih radova najprije se navode važniji radovi koji se bave općenito konformnim preslikavanjem Zemljinog modela u ravninu, a koji predstavljaju temelje teorije i upotrebe konformnih projekcija. Slijede oni radovi koji su bili dostupni i koji su se na bilo koji način bavili konformnim projekcijama za područje Hrvatske. Područje Hrvatske se u većoj ili manjoj mjeri u prošlosti mijenjalo, te zbog činjenice da je Hrvatska bila dijelom različitih zajednica zemalja, radovi koji su se bavili konformnim projekcijama tih zajednica zemalja također su razmotreni. Na kraju ovog pregleda navedeni su radovi koji se bave optimiranjem, odnosno traženjem najpovoljnijih kartografskih projekcija za neko područje.

2.1. Konformne projekcije u kartografiji

Konformno preslikavanje, tj. preslikavanje koje ima svojstvo da čuva kutove, ne susreće se samo u kartografiji već i u drugim znanstvenim disciplinama, npr. matematici, računalnoj znanosti, medicini, mineralogiji itd. Ovdje se daje pregled važnijih radova iz područja konformnog preslikavanja usredotočen na primjenu u kartografiji.

Jedna od najstarijih poznatih konformnih kartografskih projekcija je stereografska projekcija sfere. Može se dobiti geometrijskim projiciranjem sfere iz točke na sferi na ravninu okomitu na spojnicu projekcijskog središta i središta sfere. Poznavanje te projekcije, zajedno s ortografskom i gnomonskom projekcijom, koje nisu konformne, pripisuje se staroegipatskim i starogrčkim astronomima. Stereografska projekcija sfere je vjerojatno i najstarija poznata konformna projekcija iako je to njezino svojstvo vjerojatno prvi pokazao Edmond Halley tek krajem 17. stoljeća. Osim konformnosti ističe se i svojstvo stereografske projekcije da svaku kružnicu na sferi preslikava u kružnicu u ravnini, a poznavanje tog svojstva pripisuje se već i Ptolomeju (Snyder 1993).

Gotovo svaki udžbenik ili monografija o kartografskim projekcijama prikazuje stereografsku projekciju sfere, primjerice Borčić (1955b), Frančula (2004), Jordan i dr. (1958), Kavrajskij (1960), Snyder i Voxland (1989), Snyder (1993).

Kad se govori o stereografskoj projekciji rotacijskog elipsoida treba reći da njezina definicija nije jedinstvena. Kavrajskij (1960) predlaže da se stereografskom projekcijom rotacijskog elipsoida može smatrati svaka projekcija koja za specijalni slučaj kada rotacijski elipsoid prelazi u sferu, daje poznate zakonitosti stereografske projekcije za sferu.

Stereografska projekcija rotacijskog elipsoida razmatra se početkom 19. stoljeća. U (Leybourn 1819) nalazi se geometrijski dokaz da geometrijska stereografska projekcija iz pola rotacijskog elipsoida svaki presjek ravnine i rotacijskog elipsoida preslikava u kružnicu.

Kavrajaskij (1960) spominje da je isti problem još 1805. godine zadao A.-M. Legendre svojim studentima.

Lagrange (1779) izvodeći svoju projekciju iz uvjeta da se meridijani i paralele rotacijske plohe preslikavaju kao kružnice, odnosno kružni lukovi, pokazuje da je stereografska projekcija samo jedan specijalni slučaj takvog rješenja. Naime, ako se u formule Lagrangeove projekcije za tzv. eksponent projekcije izabere 1 i kao rotacijska ploha uzme sfera dobije se poznata stereografska projekcija sfere. Lagrange utvrđuje da se uzimanjem u obzir spljoštenosti stereografska projekcija sfere s pomoću njegovih formula poopćuje i na rotacijski elipsoid.

Gauss (1828) također analizira stereografsku projekciju elipsoida i to na dva načina. Jedan je u obliku dvostrukog preslikavanja, najprije elipsoida na sferu, a potom sfere u ravninu, a drugi je direktno preslikavanje elipsoida u ravninu. Krüger (1922) na temelju Gaussove ostavštine daje detaljne izvode stereografske projekcije kako je to zamislio Gauss. Kod dvostrukog preslikavanja, za preslikavanje elipsoida na sferu, geografska dužina na elipsoidu i sferi su jednake, a polumjer sfere jednak je polumjeru prvog vertikalna u promatranoj točki u kojoj se poklapaju i paralele na elipsoidu i sferi. Taj je oblik Gauss predložio 1822 (Eggert 1936). Prema Eggertu (1936) Gauss je 1844. predložio i drugi način gdje su geografska dužina na elipsoidu i sferi su proporcionalni, za polumjer sfere uzima se srednji polumjer zakrivljenosti u promatranoj točki, a preostale konstante izvode se iz uvjeta da su linearne deformacije u okolini izabrane točke trećeg reda. Takav način primjenjen je kod stereografske projekcije Nizozemske.

Rousillhe (1922) izvodi svoju varijantu stereografske projekcije. Kreće od zakonitosti preslikavanja meridijana u ravninu kakva je u stereografskoj projekciji sfere. Tu zakonitost razvija u red do članova 5. stupnja. U tom redu umjesto duljine luka meridijana na sferi uvrštava duljinu luka meridijana na rotacijskom elipsoidu. Dodaje uvjet konformnosti i polumjer sfere kao srednji polumjer u izabranoj točki.

Hristow (1937) izvodi nove formule na temelju ideje Rousillha te uočava da redovi koje je izveo Rousillhe nisu strogo konformni.

Kavrajaskij (1960) daje raspravu o stereografskoj projekciji elipsoida. Stereografskom projekcijom elipsoida smatra svako poopćenje koje za specijalni slučaj sfere daje zakonitosti stereografske projekcije sfere. Najprije analizira uspravnu perspektivnu projekciju rotacijskog elipsoida koja ima svojstvo očuvanja kružnica, međutim takvo preslikavanje nije konformno pa ga smatra nezanimljivim za primjenu u kartografiji. Drugi način je onaj koji je predložio Gauss i detaljno analizirao Krüger (1922), ali isto tako i Adams 1919. godine. Kavrajaskij pokazuje da je takvo preslikavanje jednako onome u Lagrangeovoj projekciji kad je tzv. eksponent Lagrangeove projekcije jednak jedinici. Zatim, kao primjer druge varijante navodi preslikavanje kakvo je predložio Rousillhe. Treće stereografsko preslikavanje rotacijskog elipsoida je ono koje je primijenjeno u Nizozemskoj, odnosno kada se elipsoid preslikava na sferu uz uvjet da su deformacije trećeg i višeg reda, a onda se sfera preslikava u ravninu po zakonu stereografske projekcije. Prema Eggertu (1936) takvo preslikavanje predložio je

Gauss 1844. godine. Kavrajskij pokazuje da je takvo preslikavanje jednako onome od Lagrangea samo je sada eksponent Lagrangeove projekcije jednak $\sqrt{1+e'^2 \cos^4 \varphi_0}$. U toj formuli e' je drugi ekscentricitet rotacijskog elipsoida $e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$, φ_0 je geografska širina pola Lagrangeove projekcije, a a i b su velika i mala poluos rotacijskog elipsoida. Osim toga pokazuje da su u tom slučaju izokole krivulje bliske kružnicama. Navodi i dva pristupa koja je predložio Laborde 1932. godine. Prvi pristup ne zadovoljava uvjet da se za sferu dobije stereografska projekcija sfere, a drugi je identičan pristupu kakav je primijenjen u Nizozemskoj.

J. H. Lambert (1772) na suvremen, analitički način postavlja i rješava zadatak preslikavanja jedne plohe na drugu, posebno sfere i elipsoida. On je pronalazač konformne konusne projekcije, kružne projekcije (kasnije je Lagrange poopćio to preslikavanje na bilo koje rotacijske plohe (Snyder 1993)), poprečne cilindrične konformne projekcije za sferu, odnosno poprečne Mercatorove projekcije sfere (poopćenje za elipsoid dao je Gauss), uspravne i poprečne cilindrične ekvivalentne projekcije za sferu, azimutalne ekvivalentne projekcije za sferu i konusne ekvivalentne projekcije (kasnije poopćenje dao je Albers). U svom radu iz 1772. najprije izvodi navedene projekcije za sferu, a zatim razmatra rotacijski elipsoid te u tom dijelu daje i formule Mercatorove projekcije za elipsoid, polarne stereografske projekcije za elipsoid te konformne konusne projekcije za elipsoid. Na kraju predlaže preslikavanje elipsoida u kružnoj projekciji.

Gauss je 1825. objavio rješenje općenitog zadatka konformnog preslikavanja jedne plohe na drugu. U tzv. hannoverskoj izmjeri upotrijebio je preslikavanje elipsoida u ravninu koje se danas naziva Gauss-Krügerova projekcija (Lapaine i Kuveždić 2007). Riječ je o poprečnoj Mercatorovoj projekciji primijenjenoj na rotacijski elipsoid. Krüger je dao formule za praktičnu primjenu tog preslikavanja. Gauss je istraživao i tzv. dvostruka preslikavanja, najprije elipsoida na sferu i potom sfere u ravninu. Konformno preslikavanje elipsoida na sferu kod kojeg se u nekoj točki pojavljuju samo linearne deformacije trećeg i višeg reda nosi naziv po Gaussu (Kavrajski 1960). Gauss-Krügerova projekcija, odnosno poprečna Mercatorova projekcija, danas se primjenjuje za kartiranje cijelog svijeta u obliku sustava UTM-a, a brojne države tu projekciju upotrebljavaju kao službenu.

Od Gaussovih vremena do danas objavljeno je mnogo radova, članaka i monografija o kartografskim projekcijama pa tako i konformnim projekcijama čiji opseg prelazi mogućnosti ovoga pregleda. Temelje konformnog preslikavanja na suvremen način u teoriji kartografskih projekcija postavili su navedeni autori (Tobler 1972).

Tissot (1881) uvodi elipsu deformacija u razmatranja deformacija u kartografskim projekcijama. Tom elipsom omogućena je analiza i vizualizacija promjene mjerila u nekoj točki u različitim smjerovima, a naziva se Tissotovom indikatrismom. U konformnim projekcijama Tissotove indikatriše su kružnice jer linearno mjerilo ne ovisi o smjeru.

Lapaine (1996) u disertaciji *Preslikavanja u teoriji kartografskih projekcija*, između ostalog, bavi se i konformnim preslikavanjima izraženima s pomoću kompleksnih varijabli.

Poopćuje konformnu parametrizaciju plohe te daje poopćenje Cauchy-Riemannovih uvjeta za konformno preslikavanje na bilo koje plohe.

2.2. Konformne projekcije za Hrvatsku

U *Prijedlogu službenih kartografskih projekcija Republike Hrvatske* (Lapaine 2000), prvom radu u suvremenoj Hrvatskoj povijesti nakon osamostaljenja, koji se na opsežan način bavi pregledom i prijedlogom kartografskih projekcija za Hrvatsku, stoji da povijest kartografskih projekcija, pa tako i konformnih projekcija, nije do tada sastavljena. U tom radu, autor studije daje pregled vlastitih istraživanja povijesti kartografskih projekcija za Hrvatsku zajedno sa sažecima izabranih radova i popisom bibliografskih jedinica.

Od tada do danas nije objavljen rad koji bi još sveobuhvatnije prikazao povijest kartografskih projekcija za Hrvatsku, pa će se ovdje dati pregled pojedinačnih dostupnih radova.

U prvom broju *Glasila geometara Kraljevstva Srba, Hrvata i Slovenaca* iz 1919 što ga je izdalo tada osnovano *Društvo Geometara Kraljevine SHS* u prvom članku V. Filkuka, profesor na Geodetskom tečaju u Zagrebu, objavljuje članak u nastavcima *Projekcije zemaljske izmjere u Hrvatskoj i Slavoniji* (Filkuka, 1919). U prvom nastavku, nakon kratkog uvoda o obliku i modelima Zemlje te mjerenjima i svođenjima mjerenja na izabrani Zemljini model, govori o prednostima konformnih projekcija za potrebe izmjere te utvrđuje da su sve tada aktualne hrvatsko-slavonske izmjere u konformnim projekcijama. Slijedi izvod kojim se zadaje konformno preslikavanje plohe na plovu po uzoru na Gaussov rad iz 1822. U drugom nastavku opću formulaciju konformnog preslikavanja primjenjuje na preslikavanje elipsoida na sferu također po Gaussu. Završava postavljanjem uvjeta za konformno preslikavanje sfere u ravninu i spominje dvije takve projekcije u upotrebi, stereografsku i projekciju na valjak (cilindričnu projekciju). U trećem nastavku izvodi stereografsku projekciju sfere, te daje geografsku širinu pola stereografske projekcije u upotrebi, a koji se nalazio na "Gellertovom brijevu". Tom je projekcijom definiran "stari budimpeštanski sustav". Nakon rasprave o primjeni te stereografske projekcije daje formule uspravne i kose Mercatorove projekcije sfere. U upotrebi su bila tri projekcijska sustava temeljena na kosoj Mercatorovoj projekciji uvedena zbog toga da deformacija ne prelazi 1:10 000. Kako se vidi, a i sam V. Filkuka tvrdi, u to se doba pogodnim smatralo dvostruko preslikavanje, najprije elipsoida na sferu, na kojoj su se izvodila izjednačenja triangulacijske mreže, pa sfere u ravninu u kojoj je izvršena detaljna izmjera. Filkuka spominje i direktno preslikavanje elipsoida u ravninu koje je primjenio Gauss za tzv. hannoversku izmjeru.

U *Glasilu geometara* br. 4, 5 i 6., str. 69-72. u *Zapisniku Odborske sjednice održavane dne 22. lipnja 1919. u Zagrebu* stoji da V. Filkuka iznosi prijedlog za rješenje nekih pitanja koja se mogu usvojiti i prije nego li tek osnovano *Društvo geometara Kraljevine SHS* usvoji organizaciju ukupnoga geodetskog rada. U tom prijedlogu pod točkom Ia. stoji: "*Za projekciju zemaljske izmjere ima se upotrijebiti konformna projekcija na valjak sa širinom pojasa od jedan i pol stupnja na zapad i istok od osi X. Pripravne radnje za ovu projekciju*

imao bi obaviti vojni triangularni ured". Filkuka zapravo predlaže uvođenje Gauss-Krugerove projekcije meridijanskih zona.

U (SGU 1953) stoji da je pitanje izbora projekcije i koordinatnih sustava bilo pokrenuto 1921. godine od strane tadašnjeg generalnog direktora katastra S. Radojkovića. Razradu tog pitanja povjerio je A. Faschingu.

A. Fasching (1922) objavljuje članak u *Geodetskom glasniku* pod nazivom *Konformna azimutalna (stereografska) projekcija s podnaslovom jest za kružna područja sa promjerom do 600 km ujedno i projekcija minimalne moguće deformacije*. Fasching je u to doba bio suradnik Generalne direkcije katastra Kraljevine SHS i poznata su njegova zalaganja za upotrebu stereografske projekcije za topografsku izmjeru (SGU 1953). U tom radu tvrdnju navedenu u naslovu i podnaslovu pokazuje na temelju usporedbe linearnih deformacija u Tissotovoj kompenzativnoj projekciji kada granična elipsa prelazi u kružnicu i linearnih deformacija u stereografskoj projekciji sfere. Također uspoređuje deformacije u kružnom području promjera 600 km između stereografske i cilindrične projekcije te utvrđuje da su deformacije u tom slučaju približno dvostruko manje u stereografskoj nego u cilindričnoj projekciji.

Kritički gledano, Fasching potkrepljuje prednost stereografske projekcije na temelju pretpostavke da se preslikava kružno područje. Naime, uzme li se u obzir Čebiševljev teorem za najbolju konformnu projekciju, koji govori da je najbolja konformna projekcija nekog područja ona koja ima na rubu tog područja konstantno linearno mjerilo, te činjenica da su linije jednakih deformacija kod stereografske projekcije sfere kružnice, tada se može zaključiti i bez usporedbe, da je za kružna područja stereografska projekcija najbolja. Dakle, niti jedna druga konformna projekcija strogo kružno područje ne može preslikati s manjim deformacijama od stereografske. Tissotova kompenzativna projekcija će za isto područje imati manje linearne deformacije, ali ona nije konformna projekcija. Dakle, Faschingova tvrdnja za stereografsku projekciju može se preformulirati u *stereografska projekcija jest za strogo kružna područja ujedno i konformna projekcija s najmanjim mogućnim deformacijama*. U tom slučaju promjer kružnog područja nije bitan.

U (SGU 1953) posljednje poglavlje, str. 193-255., posvećeno je tijeku rasprave i donošenja odluke o izboru projekcije koje je započelo 1921. godine, a konačna odluka donesena 1924. U tom poglavlju citirani su brojni arhivski dokumenti i članci iz tog doba. Tu su sadržani i dijelovi referata, rasprava i članaka A. Faschinga o pitanju izbora projekcije. U tim raspravama Fasching daje prikaz do tada već usvojenih kartografskih projekcija u susjednim zemljama. Utvrđuje da se područje Kraljevine SHS ne može preslikati u jedan koordinatni sustav te kolike su najmanje deformacije u tom slučaju. Predlaže upotrebu stereografske projekcije i to u dva ili tri koordinatna sustava. Pri tome za najveću dopuštenu deformaciju zadaje 1:5000. Fasching je 1923. godine tiskao brošuru naziva *Das rationelle Koordinatensystem zur Berechnung grosserer Triangulierungen* (u prijevodu *Racionalni koordinatni sustavi za računanje većih triangulacija*). Tu se ponovo zalaže za upotrebu stereografske projekcije za potrebe računanja triangulacije. Prikazan je i prijedlog Rousillha za upotrebu stereografske projekcije za potrebe triangulacije i izmjere. Rousillhe se zalagao za

najmanji broj koordinatnih sustava, točnije jedan koordinatni sustav za područje Francuske, odnosno kružno područje polumjera 560 km. Detaljna izmjera bi u tom slučaju morala voditi računa o deformacijama projekcije, odnosno mjerenje i određivanje dužina i površina u katastru moralo bi uzimati u obzir deformacije projekcije (u onim područjima gdje je deformacija veća od dopuštene). Roussilhe predlaže i 8 projekcijskih sustava stereografske projekcije za područje Europe. U poglavlju je dan prijevod prijedloga sporazuma između Austrougarske i Njemačke iz prosinca 1917. u kojemu se predlaže uvođenje Gauss-Krügerove projekcije meridijanskih zona širine 3° za te dvije zemlje s namjerom da se nastoji upotrebu te projekcije proširiti i na susjedne zemlje srednje Europe. O prijedlogu se u Njemačkoj ponovo raspravljalo 1922. godine kada je i definitivno usvojen. Austrija je u to doba već uvela Gauss-Krügerovu projekciju. Daje se i prikaz rasprave o izboru projekcije u Čehoslovačkoj gdje se razmatrala dvostruka kosa konformna cilindrična projekcija i Lambertova konformna konusna projekcija u jednoj i dvije zone. U Kraljevini SHS se 1923. godine, nakon smrti S. Radojkovića, direktora Generalne direkcije katastra koji je i pokrenuo pitanje izbora projekcija, te napuštanja službe od strane A. Faschinga (Abakumov i dr., 1928) nastavilo ispitivanje izbora projekcije. Trigonometrijski odsjek direkcije pristupio je detaljnijem ispitivanju sljedećih projekcija: stereografske projekcije kako ju je predložio A. Fasching, stereografske projekcije po prijedlogu Roussilha, dvostruke Gauss-Schreiberove projekcije, Gauss-Krügerove projekcije i kose cilindrične projekcije za Čehoslovačku. Nakon sastavljanja izvještaja za svaku projekciju i praktičnih računanja, posebno redukcija pravaca i dužina, materijale je proučilo povjerenstvo Vojno-geografskog instituta. To je povjerenstvo predložilo Gauss-Krügerovu projekciju. Kosa konformna cilindrična projekcija odbačena je zbog složenosti računanja, a stereografska zbog većeg broja koordinatnih sustava nego što ih zahtjeva Gauss-Krügerova za istu točnost od 1:10 000. Gauss-Schreiberova odbačena je jer se radi o dvostrukom preslikavanju što se smatralo nedostatkom. Na kraju poglavlja dan je nacrt rješenja ministra financija od 17. 11. 1924. u kojem se propisuje uvođenje Gauss-Krügerove projekcije kao službene projekcije. Projekcija je zadana s tri koordinatna sustava, srednji meridijani 15° , 18° i 21° , upotrebljava se Besselov elipsoid, greenwichki početni meridijan, a ravninske koordinate se zapisuju po prijedlogu Baumgartena, odnosno apscise se mjere od ekvatora, a ordinatama se dodaje konstanta 500 000.

U *Geometarskom glasniku* iz 1928. i 1929. objavljen je niz članaka pod naslovom *Projekcija novog katastarskog premera u Kraljevini SHS* (Abakumov i dr. 1928, 1929). Niz započinje kratkim uvodom o nužnosti kartografskih projekcija i zahtjevima koji se na njih postavljaju u katastru. Posebno se ističe zahtjev da se računanje površina na planovima i obrada geodetskih mjerenja u detaljnoj izmjeri može izvesti bez vođenja računa o deformacijama projekcije. Slijedi prikaz usvajanja Gauss-Krügerove projekcije u Njemačkoj, a potom i u Kraljevini SHS. U sljedećim nastavcima daje se izvod osnovnih jednadžbi Gauss-Krügerove projekcije, ispitivanje slike triangulacijske stranice (geodetske linije), konvergencija meridijana i linearno mjerilo. To nije kraj niza, ali u sljedećim brojevima *Geometarskog glasnika* niz se nije nastavio objavljivati.

U časopisu *Hrvatska državna izmjera*, službenog glasnika *Odsjeka za Državnu izmjeru* Nezavisne Države Hrvatske, broj 5 iz 1942. godine, objavljen je članak N. Abakumova pod naslovom *Gauss-Krügerova projekcija u primjeni na područje Nezavisne Države Hrvatske* (Abakumov 1942). U toj kratkoj raspravi, autor postavlja pitanje projekcije za teritorij tadašnje države koji se u smjeru istok-zapad protezao od otprilike $14^{\circ}30'$ do $20^{\circ}30'$. Autor razmatra postojeću varijantu Gauss-Krügerove projekcije s 3 zone i srednjim meridijanima na 15° , 18° i 21° i zaključuje da su za promatrano područje potrebne sve tri zone. Razmatra rješenje da se manji dio, koji spada u najistočniju zonu, prikazuje u srednjoj zoni uz upotrebu zasebnog linearnog modula kako bi se deformacije svele na dopuštene. Zatim daje mogućnost da se izaberu dvije zone sa srednjim meridijanima na 16° i 19° , ali smatra to lošim rješenjem zbog odustajanja od usvojene podjele u drugim državama, posebice u Njemačkoj. Na kraju nešto detaljnije razmatra jednu zonu širine 6° sa srednjim meridijanom na $17^{\circ}25'.9$. Naglašava potrebu uvođenja nekoliko linearnih modula kako bi se deformacije održale ispod 0.0001. Kao mogućnost spominje i uvođenje pomoćnog linearnog modula tako da se srednji meridijan područja koje se mjeri preslikava bez deformacija. Kao prednost naglašava izradu karata u jednom koordinatnom sustavu. Ispituje maksimalne deformacije te utvrđuje da bi one iznosile 0.28 mm u mjerilu karte što smatra manjim od grafičke točnosti karte te time i zanemarivim.

Borčić (1955a) na temelju diplomskog rada K. Stojanoskoga (1955) raspravlja o Tissotovoj kompenzativnoj projekciji za područje FNR Jugoslavije. U tom radu daje pogrešne rezultate kako je to primjetio Lapaine (2000). Borčić smatra Tissotovu kompenzativnu projekciju posebno važnom jer ona, kako on kaže, daje odgovor na pitanje s kojim se najmanjim linearnim deformacijama može preslikati neko područje. Borčić (1955b) daje i približno grafičko određivanje povoljne Lagrangeove projekcije za područje FNR Jugoslavije.

Lapaine (2000) u već spomenutoj studiji *Prijedlog službenih kartografskih projekcija Republike Hrvatske* daje pregled povijesnih istraživanja kartografskih projekcija u svijetu i u Hrvatskoj. Poseban pregled se bavi projekcijama koje se upotrebljavaju u zrakoplovstvu, pomorstvu, vojsci, državnoj izmjeri u Hrvatskoj, ali i drugim europskim zemljama. U posebnom poglavlju bavi se Tissotovom projekcijom za Hrvatsku te zaključuje da ne postoji niti jedna projekcija u kojoj bi se Republika Hrvatska mogla kartirati u jednom koordinatnom sustavu, a da deformacija duljina bude manja od 0.00024, odnosno 2.4 dm/km. U posebnom poglavlju istražuje i predlaže izbor projekcije za topografske, pomorske, zrakoplovne i vojne karte. Za topografske karte ispituje postojeću Gauss-Krügerovu projekciju u dvije zone, zatim tu projekciju u jednom koordinatnom sustavu sa srednjim meridijanom na $16^{\circ}30'$ i tri varijante linearnog mjerila od 0.9999, 0.9997 i 0.9996 te UTM projekciju koja također obuhvaća Hrvatsku u dvije zone. Zatim istražuje Lambertovu konformnu konusnu projekciju u jednoj i dvije zone. Konačno za potrebe topografske i katastarske izmjere i kartiranje, zrakoplovne karte u mjerima krupnijima od 1:300 000 i pomorske karte u mjerilima krupnijim od 1:50 000 predlaže jedan koordinatni sustav Gauss-Krügerove projekcije sa srednjim meridijanom na $16^{\circ}30'$ i linearnim mjerilom na srednjem meridijanu 0.9999. Alternativni prijedlog koji osigurava deformacije manje od 0.0001 je Lambertova konformna konusna projekcija u dvije zone. Za vojnu kartografiju predlaže UTM, a Lambertovu konformnu

konusnu sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 43^\circ 05'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 55'$ za topografske, zrakoplovne i vojne karte mjerila 1:500 000 i sitnija. Studija završava prijedlogom postupnog uvođenja novih projekcija u upotrebu, a priloženi su joj bibliografija, sažeci važnijih radova, prijevod Tissotovog rada o kompenzativnoj projekciji, pregled službenih kartografskih projekcija u europskim zemljama i izbor standardnih paralela za Lambertovu konformnu konusnu projekciju.

Borčić (1955a) i Lapaine (2000) na temelju primjene Tissotove kompenzativne projekcije zaključuju o najmanjim mogućim deformacijama u kojima se područje države može preslikati. Ta je tvrdnja točna za područje granične elipse, a ne stvarnog područja države. Što se područje države može uspješnije aproksimirati elipsom to je ta tvrdnja ispravnija. Za područja koja su nepravilna, a područje Hrvatske je jedan takav primjer, istraživanje Tissotove kompenzativne projekcije daje samo djelomičan odgovor na pitanje o najmanjim mogućim deformacijama.

U (NN 2004, 2004a) definiraju se novi službeni projekcijski koordinatni sustavi. U tom zakonskom aktu usvojene su projekcije predložene u studiji (Lapaine 2000) i to Gauss-Krügerova projekcija sa srednjim meridijanom $16^\circ 30'$ i linearnim mjerilom na srednjem meridijanu od 0.9999 te Lambertova konformna konusna projekcija sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 43^\circ 05'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 55'$. Za vojne potrebe propisuje se projekcijski sustav UTM. Za novi geodetski datum utvrđuje se ETRS89 s elipsoidom GRS80. Predviđeni rok za prelazak na nove projekcije je 2010. godina.

Lapaine (2006), i u skraćenom obliku (Lapaine i Tutić 2007), daju formule za računanja u novoj kartografskoj projekciji za Hrvatsku, odnosno novoj Gauss-Krügerovoj projekciji. Sve formule izvedene su uz zahtjev da je osigurana točnost rezultata na 15 značajnih znamenki. Daju se i primjeri upotrebe nove projekcije u katastru.

Rajaković (2007) istražuje uspravne konusne projekcije i to konformnu, ekvivalentnu i ekvidistantnu s primjenom na područje Hrvatske. Daje rezultate različitih varijanti i to posebno za područje Hrvatske s epikontinentalnim morskim pojasom i bez njega. U tom radu prvi se puta pod područjem Hrvatske razmatra i epikontinentalni pojas.

Rajaković (2008) istražuje najbolju konformnu konusnu projekciju za Hrvatsku uključujući i epikontinentalni morski pojas. Daje 8 različitih varijanti, a novost je da je jedna od njih izvedena na temelju minimuma Airy/Jordanova kriterija za područje elipsoidnog trapeza koji opisuje područje Hrvatske. Upotreba tog kriterija za izbor projekcije za Hrvatsku se tada prvi put susreće u literaturi. U tom radu utvrđuju se i koordinate najjužnije točke Hrvatske na temelju važećih sporazuma. Kao najbolju uspravnu konformnu konusnu projekciju Rajaković predlaže varijantu sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 42^\circ 20'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 50'$.

Tutić i Lapaine (2008) istražuju stereografsku projekciju s primjenom na područje Hrvatske. To je prvi rad koji se bavi stereografskom projekcijom za Hrvatsku. Za područje je uzet državni teritorij (kopno i teritorijalne vode), a kao kriterij za izbor parametara

upotrebljavaju Airy/Jordanov kriterij. Novost u tom radu je da je taj kriterij izračunan za različite aproksimacije područja Hrvatske elipsoidnim trapezima. Rješenje je nađeno numeričkim postupkom primjenom računala. Rezultati tog rada, posebno istraživanje različitih gustoća elipsoidnih trapeza za aproksimaciju područja i njihov utjecaj na vrijednosti parametara projekcije, upotrijebljeni su i u ovoj disertaciji.

2.3. Najpovoljnije konformne kartografske projekcije

Povijest izbora najpovoljnije kartografske projekcije u najopćenitijem smislu započinje sa samim kartografskim projekcijama. Kartografi su uvijek težili zadano područje prikazati u ravnini sa što je moguće manjim deformacijama. Pristupi tom problemu su različiti, od grafičkih metoda, preko analitičkih do numeričkih uz upotrebu računala. Primjerice već je Lagrange (1779) na početku ere analitičkog pristupa kartografskim projekcijama, u radu u kojemu izvodi svoju projekciju, istražio izbor parametara projekcije koji će dati što manju promjenu linearnog mjerila u okolini neke točke. Za te svrhe zadaje uvjet da je linearno mjerilo u izabanoj točki jednako jedinici, a da su prva i druga derivacija linearnog mjerila u toj točki jednake nuli.

Kad se govori o najpovoljnijim konformnim kartografskim projekcijama nezaobilazno je spomenuti teorem Čebiševa (1856) koji govori da za neko područje omeđeno krivuljom koja je zadana dvaput derivabilnom funkcijom, postoji jedna najpovoljnija konformna kartografska projekcija u smislu da ima najmanji odnos najvećeg i najmanjeg linearnog mjerila. Takva projekcija ima svojstvo da je linearno mjerilo na granici tog područja konstantno. Sam Čebišev nije dokazao taj teorem, ali ga je dokazao Grave 1896. Jednostavan dokaz tog teorema daje Milnor (1969). Primjena Čebiševljevog teorema za geografska područja otežana je činjenicom da su granice takvih područja najčešće vrlo složene, pa se primjena uglavnom svodi na pojednostavljeni oblik područja, kao npr. u Frankić (1982).

Monografija *Small-scale Map Projection Design* (Canter 2002) velikim dijelom bavi se optimiranjem kartografskih projekcija za sitna mjerila, uglavnom za karte svijeta i kontinenata. Canter daje i teoretska razmatranja pa tako optimizacije dijeli na modifikacije sa ciljem smanjenja linearnih deformacija i na, kako ih on naziva, transformacije. Međutim, naglašava ta takva podjela nije uvijek stroga. Pod prvim pojmom podrazumijeva izbor vrijednosti parametara projekcije, a pod drugim reprojiciranje već dobivenih ravninskih koordinata u novu ravninu. Kao primjere izbora vrijednosti navodi promjenu rasporeda linearnih deformacija izborom standardnih paralela kod konusnih projekcija, azimutalnih i cilindričnih projekcija. Ističe da je taj postupak kod konformnih projekcija posebno jednostavan jer se svodi na množenje faktorom manjim od jedinice. Sljedeći način optimizacije koji navodi, a koji se prvenstveno odnosi na pseudocilindrične i pseudokonusne projekcije, ali i ostale projekcije, sastoji se od množenja geografskih koordinata brojem manjim od 1, čime se čitava Zemlja preslika u manje područje u ravnini, a zatim se takva ravnina afinom transformacijom poveća u veličinu izvornog mjerila. Takvu metodu predložio je i formulirao Karl Simeon, a poznate su Wagnerove primjene te metode. Canter daje i detaljni prikaz te metode i nekoliko primjera. Zatim navodi metodu nalaženja povoljnih

projekcija iz klase polinomnih projekcija, odnosno projekcija čije su ravninske koordinate polinomne funkcije geografskih koordinata. Navodi ruskog kartografa N. A. Urmayeva kao jednog od prvih koji je razvijao takve projekcije, a Urmayev je vjerojatno i prvi koji je riješio inverzni problem kartografskih projekcija, odnosno na temelju zadanih vrijednosti linearnog mjerila u zadanim točkama, formulirao je jednadžbe kartografske projekcije. Navodi i druge autore koji su se bavili polinomnim projekcijama: Ginzburg, Baetslé, Canters i Laskowski. Bavi se i zadavanjem geometrijskih uvjeta za polinomne projekcije i to uvjetima simetrije, razmakom meridijana i paralela, odnosa mjerila na osima, oblikom meridijana i paralela te duljinom linije u koju se preslikava pol.

Canters (2002) posebno poglavlje posvećuje polinomnim transformacijama ravninskih koordinata u novu ravninu. Navodi da je u posljednjih 20 godina takav pristup često upotrijebljen za smanjivanje linearnih deformacija u standardnim konformnim projekcijama. Manje je istraživanja posvećeno ostalim projekcijama. U dijelu koji se bavi kompleksnim polinomima koji se primjenjuju za modifikaciju konformnih projekcija navodi primjere radova Driencourta i Labordea iz 1932. koji su optimirali projekciju za Madagaskar. Kao početnu projekciju uzeli su Mercatorovu i primijenili polinom 3. stupnja. Miller je 1953. optimirao projekciju za područje Europe i Afrike. Kao polaznu projekciju izabrao je kosu stereografsku i primjenio transformaciju polinomom 3. stupnja. Lee je 1974. godine na isti način odredio povoljniju projekciju za Tihi ocean. Navodi i druge autore, npr. Reillyja (1973) koji je oblikovao povoljnu projekciju za Novi Zeland, krenuvši od Mercatorove projekcije koja je reprojicirana polinomom 6. stupnja ili Snydera koji je kosu stereografsku projekciju reprojicirao polinomom 10. stupnja kako bi dobio povoljnu projekciju za svih 50 država SAD-a. Navodi i primjer atlasa *Oxford Hammond Atlas of the World* iz 1993 u kojemu su sve karte kontinenata izrađene u optimalnim konformnim projekcijama.

Canters u poglavlju gdje se bavi izvedbom projekcija s relativno malim deformacijama upotrebljava za rješavanje zadatka metodu simpleksa koju su razvili Nelder i Mead (1965). Navodi radove Petersa (1975, 1978) koji je još prije njega upotrijebio tu metodu za nalaženje optimalnih projekcija. Metoda Neldera i Meada za nalaženje minimuma funkcije je metoda koja ne zahtijeva računanje derivacije funkcije već samo vrijednosti funkcije. Canters istražuje svojstva te metode za nalaženje povoljnih kartografskih projekcija i utvrđuje sljedeća svojstva: uvođenjem velikih vrijednosti funkcije za nepoželjne slučajeve vrijednosti parametara omogućuje da metoda traži minimum izvan domene za koju se pojavljuju nepoželjni slučajevi; za manji broj parametara preporučuje sustavno pretraživanje domene vrijednosti parametara te primjenu metode simpleksa za one vrijednosti za koje se uoči da daju male vrijednosti funkcije; za veći broj parametara sustavno pretraživanje bilo bi prezahtjevno, a metoda simpleksa će uglavnom dati malu vrijednost kriterija koja nužno ne mora biti i najmanja. Na kraju zaključuje da ta metoda daje nove varijante postojećih projekcija s manjim deformacijama nego su to polazne varijante te da je i "slijepa" (bez dodatnih ispitivanja) upotreba te metode vrlo povoljna za automatizirano iznalaženje povoljnih projekcija. Canters završava poglavlje s čitavim nizom optimiranih projekcija svijeta i kontinenata.

Frančula (1971) se u disertaciji *Najpovoljnije projekcije u atlasnoj kartografiji* bavi izborom i traženjem optimalnih projekcija za karte sitnih mjerila, odnosno karata svijeta. Upotrijebivši kriterije Airyja i Airy/Kavrajskog usporedio je desetak tada primjenjivanih projekcija za karte svijeta. Neke povoljnije od njih je optimirao po zadanim kriterijima. Daje vrijednosti kriterija i parametre projekcija zajedno s kartama deformacija. Također daje preporuke za izbor projekcije za karte svijeta koje govore da treba uzeti uvjetne projekcije koje pol preslikavaju kao dužinu kraću od ekvatora s krivolinijskim meridijanima i paralelama.

Reilly (1973) opisuje postupak iznalaženja povoljne konformne projekcije za Novi Zeland. Najprije analizira maksimalne deformacije u postojećoj poprečnoj Mercatorovoj projekciji koje dostižu 20 dm/km. Umjesto da krene od uvjeta oblika izokola u ravnini, kao što je to izveo Miller (1953), Reilly minimizira linearne deformacije na zadanom području bez uvjetovanja oblika izokola. Zadaje i analizira kompleksne polinome izometrijskih koordinata na elipsoidu, ali se odlučuje za primjenu kompleksnih polinoma ravninskih koordinata dobivenih Mercatorovom projekcijom. Područje Novog Zelanda aproksimira s 228 točaka razmaknutih 0.5° po geografskoj dužini i širini. Zadaje ishodište koje je približno u središtu područja, te uvjet da je konvergencija meridijana u ishodištu jednaka nuli. Upotrebljava Airyev kriterij za računanje karaktera deformacija, a za dijelove površine uzima sferne trapeze kojima su središta u zadanih 228 točaka. Računa polinome od 4. do 12 stupnja, a vrijednosti parametara određuje linearizacijom izraza za mjerilo, deriviranjem Airyevog kriterija kojeg svodi na sustav linearnih jednažbi i primjenjuje rekursivni postupak, tako da je za svaku sljedeću iteraciju početna vrijednost parametara jednaka rješenju iz prethodne iteracije. Tvrdi da polinom 6. stupnja daje povoljan raspored i veličinu deformacija, te da polinomi višeg stupnja svoju složenost ne opravdavaju značajno manjim vrijednostima deformacija. Dobivene maksimalne deformacije ne prelaze 4 dm/km. Reilly ne daje numeričko rješenje, tj. izračunane koeficijente već daje samo kartu s izokolama.

Frankić (1982) istražuje optimalne projekcije za područje Kanade. S obzirom na to da se čitavo područje Kanade može prikazati samo na kartama sitnog mjerila, Frankić kao model Zemlje uzima sferu. Kao kriterij za deformacije upotrebljava Airy/Kavrajškijev kriterij. Područje Kanade aproksimira s oko 75 elipsoidnih trapeza, odnosno točaka u kojima računa vrijednost kriterija kao sumu. Osim parametara pojedine projekcije uvodi i dodatna dva parametra za kosu normalnu kartografsku mrežu. To znači da se za svaku projekciju nalazi i optimalan kosi položaj zajedno s parametrima projekcije. Traženje najmanje vrijednosti kriterija svodi na metodu najmanjih kvadrata nelinearne funkcije koju pak rješava metodom linearizacije i iteracijskim postupkom. Autor navodi da je u više navrata konvergenciju rješenja morao tražiti putem metode pokušaja i pogrešaka, a za taj zadatak napisao je vlastite programe. Traži optimalne vrijednosti konusnih, cilindričnih i azimutalnih konformnih, ekvivalentnih i ekvidistantnih projekcija, te modificiranih ekvivalentnih projekcija. Nalazi i optimalnu konformnu projekciju po Čebiševu, koristeći polinome kao funkcije izometrijskih koordinata. Rješenje nalazi metodom najmanjih kvadrata linearnog sustava jednažbi zadanog u 31 točki na granici područja. Ispituje polinome do 7. stupnja te utvrđuje da se polinomom 6.

stupnja postižu povoljne vrijednosti. Kao optimalnu projekciju za Kanadu predlaže kosu konusnu ekvidistantnu projekciju te daje konačne vrijednosti parametara.

Snyder (1987) u posebnom poglavlju ukratko opisuje tzv. modificirane stereografske konformne projekcije. Daje pregled upotrebe polinoma kompleksne varijable za iznalaženje optimalnih kartografskih projekcija. Spominje Driencourta i Labordea kao prve koji su 1932. godine predložili upotrebu polinoma kompleksne varijable. Zatim navodi Millera i njegovu ovalnu projekciju za Europu i Afriku iz 1953. i Leeja i njegovu projekciju za Tihi ocean iz 1974. Svi ti autori koristili su stupanj polinoma do trećeg. Reilly (1973) i Snyder upotrijebili su polinome 6. i 10. stupnja za svoje optimalne projekcije. Autor daje nekoliko karata s izokolama i koeficijente vlastitih projekcija za područje Aljaske, te 50 i 48 američkih država.

Nestorov (1996) traži optimalne konformne projekcije za područje bivše SFR Jugoslavije. Za kriterije ocjene deformacija koristi niz kriterija u smislu veličine deformacije te Airyjeve i Airy/Kavrajškijev kriterij za ocjenu deformacija unutar cijelog zadanog područja. Postavljeni zadatak rješava aproksimacijom područja sa 134 elipsoidna trapeza veličine 30'. Nove projekcije traži iz klase tzv. simetričnih i nesimetričnih Čebiševljevih projekcija s pomoću polinoma stupnja od 1. do 10. Postavlja između 24 i 60 točaka na rub područja, a zatim računa različite varijante mijenjajući faktor mjerila za neki mali konstantni iznos. Iz tako dobivenog velikog broja parametara sortiranjem po vrijednosti kriterija nalazi najbolju varijantu. Dobiveni rezultati koji se odnose na tzv. nesimetrične projekcije, a koje bi morale biti povoljnije od simetričnih s obzirom na to da je promatrano područje nesimetrično, nisu opravdani. Naime, Nestorov zaključuje da su simetrične bolje od nesimetričnih gdje i sam uviđa kontradiktornost u odnosu na prethodna istraživanja, ali ne ispituje uzrok koji je do takvih pogrešnih rezultata doveo.

González López (1995) upotrebljava polinome kompleksne varijable za nalaženje konformnih projekcija za Čile i Sredozemno more. Nakon izvoda formula i postavljanja zadatka, optimalne projekcije traži na temelju dva kriterija i to Airy/Kavrajškijevog kriterija za cijelo zadano područje i Čebiševljevog kriterija koji zahtijeva konstantnu vrijednost logaritma linearnog mjerila na krivulji koja opisuje područje. Rješenje traži linearizacijom sustava i primjenom metode najmanjih kvadrata. Za područje Čilea kreće od Mercatorove projekcije i primjenjuje transformaciju polinomima 5. stupnja, a za područje Sredozemnog mora kreće od Lambertove konformne konsune projekcije i primjenjuje polinome 8. stupnja. Daje samo karte tih područja u dobivenim projekcijama i karte izokola, bez parametara dobivenih projekcija i bez vrijednosti kriterija. Također, nije opisano na koji je način izvedena aproksimacija područja.

Ovdje je dan pregled radova koji su se uglavnom bavili optimalnim kartografskim projekcijama za određena geografska područja, a upotrebljavali su numerička rješenja. Međutim, optimalnim projekcijama bavili su se i drugi autori, ali na drugi, analitički način. Već je spomenut Lagrange (1779) koji je za svoju projekciju tražio optimalne vrijednosti parametara uz postavljene uvjete u jednoj točki u kojoj deformacije trebaju biti trećeg i višeg reda. Na sličan je način Gauss (1828) postavio uvjete kod preslikavanja rotacijskog elipsoida na sferu, tj. da su linearne deformacije u izabranoj točki trećeg i višeg reda. Tissot (1887)

izvodi svoju tzv. kompenzativnu projekciju uz uvjete da su deformacije kutova trećega reda, a deformacije duljina drugoga reda. La Hire i Parent iznalaze perspektivne azimutalne projekcije koje imaju povoljnije deformacije od uobičajenih perspektivnih projekcija (Snyder 1993). Airy (1861) predlaže azimutalnu projekciju na temelju minimuma kriterija kojeg je on i predložio. Riječ je o kriteriju koji deformacije u točki ocjenjuje kao polovicu sume kvadrata deformacija po glavnim pravcima. Prema Snyderu (1993) Airy je napravio pogrešku u izvodima koju su godinu dana kasnije ispravili James i Clarke. Za standardne projekcije (konusne, cilindrične i azimutalne) izveden je veći broj postupaka i parametara koji za zadano područje daju povoljne linearne deformacije (Kavrajski 1960, Borčić 1955b, Frančula 2004).

3. PODRUČJE HRVATSKE

Optimizacija kartografskih projekcija obavlja se za unaprijed zadano pravilno ili nepravilno područje na Zemljinom elipsoidu ili sferi. To može biti područje čitave Zemlje kao npr. u (Frančula 1971, Canters 2002), kontinenta kao u (Miller 1953) ili područje neke države, npr. (Reilly 1973, Frankić 1982, Snyder 1984, González-López 1995, Tutić i Lapaine 2008).

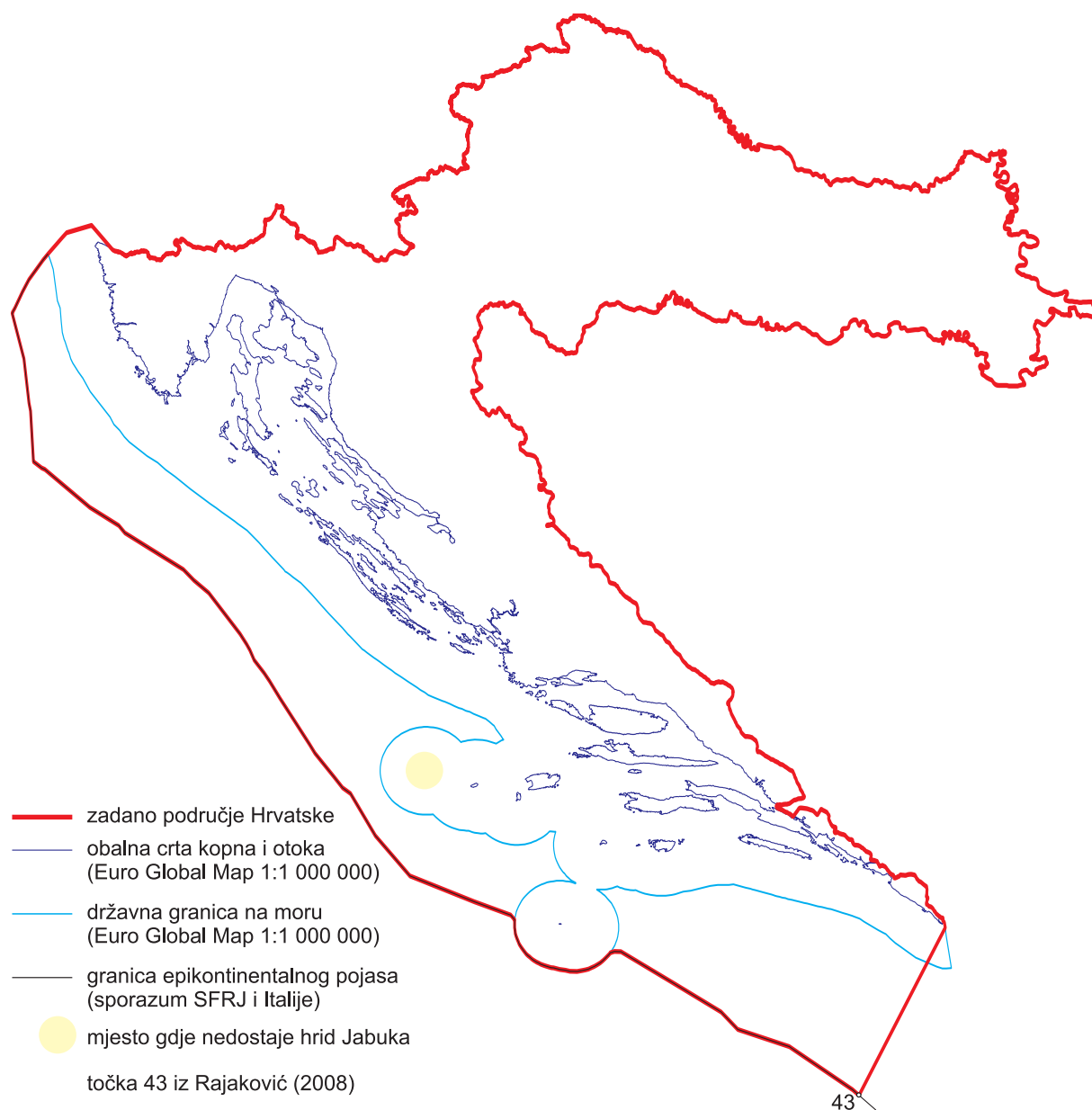
Hrvatska je država koja osim kopnenog dijela kao sastavni dio državnog teritorija ima i teritorijalno more. Osim toga gospodarska prava i interesi Hrvatske prostiru se i na područje epikontinentalnoga morskog pojasa.

Službene podatke o koordinatama graničnih točaka održava i izdaje Državna geodetska uprava Republike Hrvatske. Dijelovi granica, u vrijeme pisanja ovoga rada, još uvijek nisu pravno nedvosmisleno utvrđeni sa susjednim zemljama.

Za potrebe ovoga rada nije nužno imati precizne koordinate svih graničnih točaka. Izbor kartografske projekcije za neko područje ne ovisi u značajnoj mjeri o točnosti koordinata granice tog područja, već ponajprije o obliku i veličini tog područja. Zbog toga je za potrebe ovoga rada državna granica preuzeta iz karte Euro Global Map (EGM) u mjerilu 1:1 000 000 što ju je izdala Državna geodetska uprava. Iz te karte uzeti su i podaci o obalnoj crti kopna i otoka. Karta se izdaje u digitalnom obliku, u formatu programskog paketa ArcInfo (format E00), a koordinate su geografske na elipsoidu GRS80.

Podaci o granici epikontinentalnog pojasa preuzeti su iz Službenog lista SFRJ, Međunarodni ugovori i drugi sporazumi, br. 28/1970. S obzirom na to da su tamo dane geografske koordinate na Besselovu elipsoidu obavljena je transformacija na elipsoid GRS80. Koordinate za točku broj 43 granice epikontinentalnog pojasa umjesto iz tog sporazuma preuzete su iz (Rajaković 2008) gdje su koordinate te točke određene na temelju *Protokola između Vlade Republike Hrvatske i Savezne Vlade Savezne Republike Jugoslavije o privremenom režimu uz južnu granicu između dviju država* iz 2002. godine.

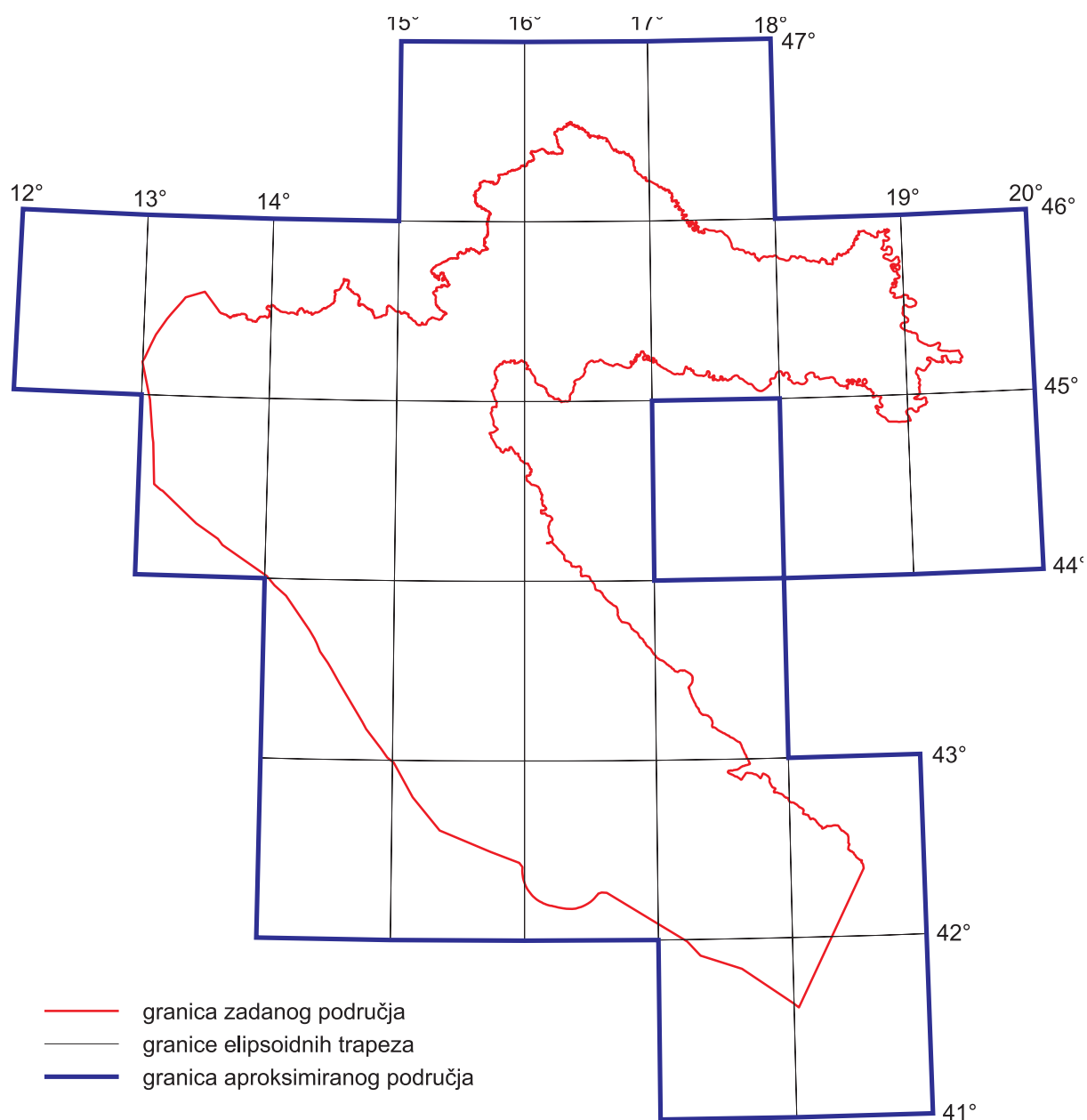
Slika 3.1 prikazuje izabrane podatke koji su uzeti za definiciju područja Hrvatske.



Slika 3.1. Podaci kojima je definirano područje Hrvatske

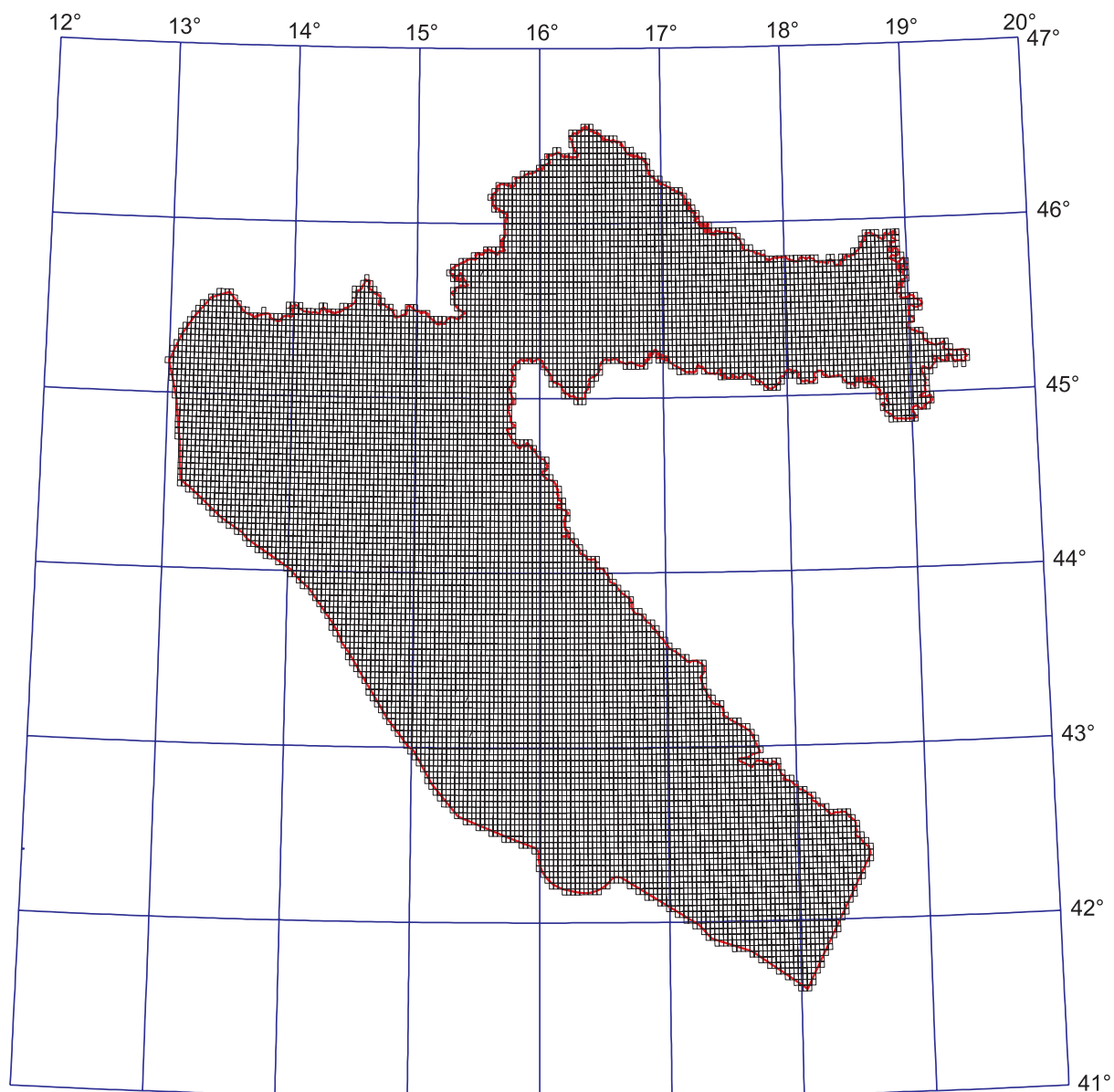
Na taj način definirano područje je vrlo nepravilno. Pojednostavljenje granice područja je moguće izborom manjeg broja karakterističnih ili prijelomnih točaka. Takvo pojednostavljenje je upotrijebio Frankić (1982) za područje Kanade.

Druga mogućnost je aproksimacija područja pravilnom mrežom sfernih ili elipsoidnih trapeza (Reilly 1973, Frankić 1982, Tutić i Lapaine 2008). Postavlja se pitanje koliko gusta treba biti mreža elipsoidnih trapeza? Ako su elipsoidni trapezi relativno veliki aproksimirano područje može se uvelike razlikovati od polaznog područja kao što se vidi na slici 3.2 gdje su za aproksimaciju područja Hrvatske upotrijebljeni elipsoidni trapezi veličine 1° po geografskoj dužini i širini. S druge strane, relativno mala veličina elipsoidnih trapeza dovodi do bolje aproksimacije područja, ali i velikog broja takvih elipsoidnih trapeza što automatski dovodi do znatnog povećanja opsega računanja.



Slika 3.2. Aproksimacija zadanog područja Hrvatske elipsoidnim trapezima veličine 1° po geografskoj dužini i širini

Na temelju istraživanja u (Tutić i Lapaine 2008) može se zaključiti da je veličina elipsoidnih trapeza od 2' optimalna aproksimacija. Parametri projekcija do tražene točnosti dobiveni na temelju takve mreže neznatno se razlikuju od onih dobivenih na temelju mreže definirane veličinom elipsoidnih trapeza od 1' po geografskoj dužini i širini. Slika 3.3 prikazuje zadano područje Hrvatske aproksimirano mrežom elipsoidnih trapeza veličine 2' po geografskoj dužini i širini. U takvoj aproksimaciji ukupno je 11 934 elipsoidna trapeza.



Slika 3.3. Aproximacija zadanog područja Hrvatske elipsoidnim trapezima veličine 2' po geografskoj dužini i širini

Na geografskim širinama oko 45° , gdje se prostire područje Hrvatske elipsoidni trapezi su izduženi u smjeru sjever-jug. Naime polumjer zakrivljenosti paralele na toj širini je približno $R \cos \varphi$, a polumjer zakrivljenosti meridijana približno R (ako elipsoid zamijenimo sferom). To znači da je omjer visine i širine elipsoidnih trapeza približno $\sqrt{2}$.

3.1. Praktično rješenje za aproksimaciju područja Hrvatske elipsoidnim trapezima

Podaci o granicama i obali (u geografskim koordinatama) učitani su AutoCAD Map. Podaci su uređeni tako da područje kopna, teritorijalnog mora i epikontinentalnog pojasa bude prikazano jednim poligonom. Taj je poligon ispisan u formatu ESRI Shape i učitao u GRASS GIS. Taj vektorski sloj nazvan je *podrucje*. Za radno područje u GRASS-u zadane su granice: sjeverna 47°, južna 41°, zapadna 12° i istočna 20°. Za razlučivost radnog područja izabrana je vrijednost od 2'. Naredba u GRASS-u za postavljanje radnog područja glasi:

```
g.region n=47N s=41N w=12E e=20E res=0:02 -p
```

Na taj način radno područje je podijeljeno na 180 redaka i 240 stupaca. Naredbom *v.mkgrid* generirana je pravilna mreža poligona naziva *mreza* jednake razlučivosti kao i razlučivost radnog područja te jednakog protezanja kao i radno područje. Na taj način generirano je 43200 poligona koji predstavljaju elipsoidne trapeze. Naredba kojom se to postiže glasi:

```
v.mkgrid map=mreza grid=180,240 position=region
```

Kako bi izdvojili samo one elipsoidne trapeze koji sijeku područje Hrvatske ili su unutar njega, zadanog unaprijed pripremljenim poligonom, upotrijebljena je naredba *v.select* koja omogućuje upravo takav izbor. Sintaksa te naredbe je sljedeća:

```
v.select ainput=mreza binput=podrucje output=mreza_2minute  
operator=overlap
```

Rezultirajući vektorski sloj *mreza_2minute* (vidi sl. 3.3) ispisan je u tekstualnu datoteku tako da su ispisani centriodi onih poligona koji sijeku područje Hrvatske ili su unutar njega. Sintaksa u GRASS-u za taj zadatak je sljedeća:

```
v.out.ascii input=mreza_2minute output=mreza_2minute.txt  
format=point
```

Tako pripremljena datoteka *mreza_2minute.txt* upotrijebljena je kasnije za sva potrebna računanja po području Hrvatske. Datoteka je priložena ovoj disertaciji na pripadajućem CD-u.

Osim tog područja iznimno je u poglavlju 11. promatrano i samo kopneno područje Republike Hrvatske. Popis centroida dobiven je na isti način s tom razlikom da je u naredbi *v.select* pod *binput* upotrijebljen vektorski sloj koji sadrži poligone kopna i otoka (*kopno*) Hrvatske iz podataka karte Euro Global Map u mjerilu 1:1 000 000. Primjećeno je da na toj karti nije ucrtana hrid Jabuka, pa je taj nedostatak ispravljen dodavanjem točke u popis. Taj popis sastoji se od 6914 točaka.

Svi spomenuti podaci nalaze se na CD-u koji je u prilogu ovoga rada.

4. KRITERIJI ZA PROCJENU I IZBOR PROJEKCIJA

Kriterija za ocjenu svojstava projekcija teoretski ima beskonačno mnogo. Za kriterije po kojima će se optimirati i uspoređivati projekcije u ovom radu izabrani su Airy/Jordanov kriterij i kriterij najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Oba kriterija uobičajena su u kartografskoj praksi (vidi poglavlje 2). Prvi kriterij omogućuje izbor varijante projekcije koja daje povoljan raspored i veličinu linearnih deformacija u odnosu na čitavo područje. Točnije, tim kriterijem moguće je minimizirati sumu kvadrata linearne deformacije na cijelom području. Drugi kriterij omogućuje izbor takve projekcije koja će dati na zadanom području najmanju najveću linearnu deformaciju, uvjet koji se često zadaje kod izbora projekcije.

4.1. Airy/Jordanov kriterij za konformne projekcije

Airyeva ocjena deformacija na nekom području glasi (Frančula 2004):

$$E_A^2 = \frac{1}{A} \int_A \frac{1}{2} [(a-1)^2 + (b-1)^2] dA \text{ gdje su } a \text{ i } b \text{ mjerila u glavnim pravcima, } A \text{ je površina}$$

promatranog područja, a dA diferencijal površine.

Jordanova ocjena deformacija na nekom području glasi (Frančula 2004):

$$E_J^2 = \frac{1}{A} \int_A \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (c-1)^2 d\alpha dA \text{ gdje je } c \text{ mjerilo u točki kao funkcija od azimuta } \alpha \text{ smjera}$$

u kojem se promatra mjerilo te A površina promatranog područja i dA diferencijal površine.

Kako je to pokazano u (Nestorov 1996, Rajaković 2008), u konformnim projekcijama za koje je mjerilo u nekoj točki u svim pravcima jednako te dvije ocjene postaju jednake pa ih se može nazvati Airy/Jordanovom ocjenom za konformne projekcije. Uvrštavanjem $c = a = b$ u

Airyevu ocjenu s jedne strane, odnosno zbog $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (c-1)^2 d\alpha = (c-1)^2$ za $c = konst.$ u

Jordanovoj ocjeni s druge strane, dobije se formula za Airy/Jordanovu ocjenu za konformne projekcije:

$$E^2 = \frac{1}{A} \int_A (c-1)^2 dA.$$

Integral u ovoj formuli za nepravilna područja rijetko je moguće riješiti analitički. Zbog toga će se integral zamijeniti sumom. Tada Airy/Jordanova ocjena glasi (Tutić i Lapaine 2008):

$$E^2 = \frac{1}{\sum_i \Delta A_i} \sum_{i=1}^n (c_i - 1)^2 \Delta A_i, \text{ gdje je } \Delta A_i \text{ jedan (mali) dio područja, a } c_i \text{ linearno}$$

mjerilo u nekoj točki tog dijela područja.

Uzme li se za ΔA_i područje elipsoidnog trapeza kojemu je središte u točki φ_i i λ_i , a veličina po geografskoj dužini mu je $\Delta\lambda$ i po geografskoj širini $\Delta\varphi$ površina takvog područja može se odrediti po formuli (Frančula 2004):

$$\Delta A_i = \frac{b^2 \Delta\lambda}{2} \left(\frac{\sin \varphi_i}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i} + \ln \left(\frac{1 + e \sin \varphi_i}{1 - e \sin \varphi_i} \right)^{\frac{1}{2e}} \right) \bigg|_{\varphi_i - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_i + \frac{\Delta\varphi}{2}},$$

gdje je b mala poluos rotacijskog elipsoida i e prvi ekscentricitet. Linearno mjerilo c_i u tom slučaju neka se računa u točki (φ_i, λ_i) .

Na taj način definirano je određivanje vrijednosti Airy/Jordanove ocjene za konformne projekcije na nekom zadanom području aproksimiranom pravilnom mrežom elipsoidnih trapeza.

Ako se za izabranu projekciju nađe skup vrijednosti parametra te projekcije $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ za koji se postiže najmanja vrijednost Airy/Jordanove ocjene, tj.

$$\min_P E^2 = \min_P \frac{1}{\sum_i \Delta A_i} \sum_{i=1}^n (c_i - 1)^2 \Delta A_i, \quad (4.1)$$

varijantu izabrane projekcije određenu skupom vrijednosti parametara P nazvat ćemo optimalnom projekcijom po Airy/Jordanovu kriteriju.

4.2. Kriterij najmanje najveće apsolutne linearne deformacije za konformne projekcije

Najveća apsolutna linearna deformacija na nekom području A definirana je sljedećom formulom:

$$d_{\max} = \max_A |c - 1|.$$

Za nepravilna područja i projekcije sa složenim rasporedom deformacija strogo nalaženje $\max_A |c - 1|$ nije uvijek moguće. Zbog toga je područje A potrebno aproksimirati konačnim skupom točaka $T = \{(\varphi_i, \lambda_i), i = 1 \dots n\}$ u kojima se računa linearno mjerilo i traži najveća apsolutna linearna deformacija, odnosno:

$$d_{\max} = \max_T |c_i - 1|.$$

Kako je navedeno u 3. poglavlju u ovome radu područje A aproksimira se mrežom elipsoidnih trapeza veličine $2'$. Središta tih trapeza čine skup T u ovome radu.

Ako se za izabranu projekciju nađe skup vrijednosti parametra te projekcije $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ za koji se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, tj.

$$\min_P d_{\max} = \min_P \max_T |c_i - 1| \quad (4.2)$$

varijantu izabrane projekcije određenu skupom vrijednosti parametara P nazvat ćemo optimalnom projekcijom po kriteriju najmanje najveće linearne deformacije.

5. METODOLOGIJA ZA NALAŽENJE OPTIMALNIH VARIJANTI

Za nalaženje optimalnih varijanti izabranih kartografskih projekcija, odnosno nalaženja vrijednosti zadanih formulama (4.1) i (4.2), upotrijebljen je numerički pristup. U radu (Tutić i Lapaine 2008) za isti zadatak upotrijebljena je metoda pretraživanja konstantnim korakom, odnosno za svaki parametar iz skupa P zadana je najmanja i najveća vrijednost i korak, te je iz svih izračunanih vrijednosti izabrana ona najmanja. Takva metoda je računski vrlo zahtjevna, posebno ako se za korak izabere relativno mala vrijednost i ako je broj parametara veći. Moguće je da je broj računanja toliki da ga je i nemoguće riješiti u nekom razumnom roku.

Drugi način koji je testiran sastojao se u upotrebi programskog paketa *Mathematica 5.1*. Njezina funkcija *NMinimize* namijenjena je za rješavanje takvih problema. Problem, odnosno funkciju za koju treba naći minimum najbolje je definirati u eksternoj funkciji napisanoj npr. u programskom jeziku C++. Takva se funkcija s pomoću alata *MathLink* poveže s aktivnim dokumentom u *Mathematici* i upotrijebi unutar funkcije *NMinimize*. Funkcija *NMinimize* daje na izbor nekoliko metoda za pronalaženje minimuma, a između ostalog i metodu po Nelderu i Meadu (1965). Takav pristup je u fazi testiranja davao dobre rezultate, a nedostatak mu je što je za svaku promjenu funkcije za koju se traži minimum potrebno napisati odgovarajući program u C++, prevesti taj kôd u izvršni i povezati s *Mathematicom*. U slučaju kada je potrebno naći minimum za veći broj funkcija takav pristup je dugotrajniji.

Treći način, koji je testiran te konačno i primijenjen za nalaženje optimalnih varijanti u ovoj disertaciji, je upotreba programa *MATLAB*. *MATLAB* omogućuje rješavanje postavljenog zadatka u cijelosti unutar vlastitog okruženja, te se pokazao kao izuzetno fleksibilno i brzo okruženje. Geodetski fakultet posjeduje licence za oba programa *Mathematica* i *MATLAB*.

S obzirom na to da se traži minimum funkcije koja je zadana na nepravilnom geografskom području, te da derivacija funkcije u slučaju kriterija najmanje najveće apsolutne linearne deformacije ne postoji, metoda po Nelderu i Meadu koja omogućuje traženje minimuma funkcije samo na temelju računanja njezine vrijednosti posebno je pogodna. Istu metodu upotrijebio je Canters (2002) i zaključio da je takva metoda dobar izbor. Analogne rezultate pokazala je i primjena u ovome radu.

5.1. Primjena *MATLAB*-a za nalaženje optimalnih varijanti

MATLAB je visoko produktivni jezik za tehnička računanja. Integrira računanje, vizualizaciju i programiranje u jednostavnom okruženju u kojemu se problemi i rješenja izražavaju uobičajenom matematičkim zapisom (MathWorks 2007).

MATLAB ima dobre upute za upotrebu koje je potrebno proučiti prije rada. Osnovni zadaci koje je potrebno riješiti za dobivanje optimalnih kartografskih projekcija su sljedeći.

1. učitati podatke o točkama mreže koje su unutar područja

2. izračunati konstantne veličine
3. definirati funkciju koja računa vrijednost kriterija za ulazne parametre
4. pozvati funkciju za pronalaženje najmanje vrijednosti kriterija

U nastavku dajem pobliži opis rješenja svakog od tih zadataka. Učitavanje podataka koji su u obliku tekstualne tablice dobiveni iz GRASS-a (vidi 3.1) obavlja se sljedećim naredbama:

```
load mreza_2minute_kopno.txt;
mreza=mreza_2minute_kopno.txt;
```

Na taj način dobije se varijabla *mreza* koja je matrica s 3 stupca i 11934 redaka. U prvom stupcu je geografska dužina, u drugom geografska širina, a u trećem identifikacijski broj točke iz GRASS-a koji ovdje nije potreban pa se može izbrisati sljedećom naredbom:

```
mreza(:,3)=[];
```

Drugi dio zadatka je izračunati konstantne veličine. To su prvenstveno izometrijska širina, polumjer paralele, površine elipsoidnih trapeza, konstante elipsoida, geografska dužina i širina u radijanima, a po potrebi i sve ostale veličine koje se pojavljuju u nekoj kartografskoj projekciji. Sljedeći kôd primjer je rješenja tog zadatka u *MATLAB*-u

```
velicina=(2/60)*(pi/180)*0.5; %polovica dimenzije elipsoidnog trapeza
elip_a = 6378137.; %konstante elipsoida
elip_e2=6.694380022903416e-3;
elip_e = 8.181919104283185E-2;
elip_b = 6.356752314140347E6;
elip_ec2=6.739496775481622e-3;

mreza=mreza*pi/180; %pretvaranje geografskih koordinata u radijane
granice=[mreza+velicina mreza-velicina];
f=granice(:,[2 4]); %granice elipsoidnih trapeza po širini
g=sin(f)./(1+elip_e*sin(f)).*(1-elip_e*sin(f))+1/(2*elip_e)*
log((1+elip_e*sin(f))./(1-elip_e*sin(f))); %pomoćna funkcija
trapezi=elip_b*elip_b*0.5.*(granice(:,1)-granice(:,3)).*(g(:,1)-
g(:,2)); %površine elipsoidnih trapeza uz odgovarajuće točke mreže
pov=sum(trapezi); %ukupna površina mreže elipsoidnih trapeza
fi=mreza(:,2); %geografska širina točaka mreže
la=mreza(:,1); %geografska dužina točaka mreže
q=log(tan(pi*0.25+fi*0.5)).*(1-elip_e*sin(fi))./(1+elip_e*sin(fi))
.^(elip_e*0.5); %izometrijska širina točaka mreže
r=elip_a./sqrt(1-elip_e2*sin(fi).*sin(fi)).*cos(fi); %polumjer
paralele u točkama mreže
```

U posebnoj datoteci definira se funkcija koja računa vrijednost kriterija. Primjerice, za računanje vrijednosti Airy/Jordanova kriterija u stereografskoj projekciji funkcija je definirana na sljedeći način (datoteka *stereografska.m* na CD-u):

```
function y = stereografska(x)
global trapezi pov q r la fi elip_e2 elip_a elip_e

%Mjerilo u stereografskoj projekciji
```

```

a0=sqrt(1.+elip_e2/(1.-elip_e2)*(cos(x(1)))^4.);
fic0=asin(sin(x(1))/a0);
K0=(tan(pi/4.0+x(1)/2.0))^a0/tan(pi/4.0+fic0/2.0)*
    ((1-elip_e*sin(x(1)))/(1+elip_e*sin(x(1))))^(a0*elip_e/2.0);
M0=elip_a*(1-elip_e2)/(1.0-elip_e2*sin(x(1))*sin(x(1)))^(1.5);
N0=elip_a/sqrt(1.0-elip_e2*sin(x(1))*sin(x(1)));
R0=sqrt(M0*N0);
fc=2*atan((1/K0)*(tan(pi/4+fi./2)).^a0.*((1-elip_e*sin(fi))
    ./((1+elip_e*sin(fi))))^(a0*elip_e/2.0))-pi/2;
lc=a0*1;
lc0=a0*x(2);
k=1+sin(fic0)*sin(fc)+cos(fic0)*cos(fc).*cos(lc-lc0);
N=elip_a./sqrt(1.0-elip_e2*sin(fi).*sin(fi));
c=(2*x(3)*a0*R0*cos(fc))./(k.*N.*cos(fi));

y = (sqrt(sum((c-1).*(c-1).*trapezi)/pov)); %Airy/Jordanov kriterij
%y=max(abs(c-1)); %najveća deformacija
end

```

U prethodnom kôdu zapravo su implementirane formule za mjerilo u stereografskoj projekciji i formule za računanje vrijednosti kriterija koje su dane u ovom radu. Vektor x u prethodnom kôdu predstavlja vektor s parametrima koji se optimiraju. Kod stereografske projekcije je npr. $x(1)$ geografska širina pola φ_0 , $x(2)$ geografska dužina pola λ_0 i $x(3)$ linearno mjerilo u polu m_0 . U posljednja dva retka su različite vrijednosti koje funkcija može vratiti. Jednom je to vrijednost Airy/Jordanova kriterija, a drugi put najveća deformacija. Ovisno o tome koja se varijanta računa odgovarajući retci se mogu pretvoriti u komentare znakom %. Drugi redak koji započinje riječju *global* zadaje koje će se varijable preuzimati iz glavnog programa.

Posljednji korak je pozivanje funkcije za traženje minimuma. *MATLAB* ima više različitih funkcija u tzv. optimizacijskoj grupi. Funkcija koja implementira metodu za traženje minimuma po Nelderu i Meadu naziva se *fminsearch*.

Funkcija *fminsearch* kao argumente prima pokazivač na funkciju za koju se minimum traži, početne vrijednosti i tzv. kriterije za prekid. To su broj iteracija, broj računanja vrijednosti funkcije, točnost vrijednosti funkcije i točnost određivanja parametara. U ovom radu je funkcija *fminsearch* smještena unutar petlje tako da je za svaki novi poziv te funkcije kao početna vrijednost uzeta posljednja dobivena vrijednost i tako sve dok se dvije uzastopne vrijednosti funkcije razlikuju više od neke zadane tolerancije uz pretpostavku da postupak konvergira. Dio kôda u *MATLAB*-u za traženje minimuma je sljedeći:

```

fid=fopen('stereografska_airy.txt','wt');
format long;

x=[1 1 1];

options=optimset('MaxFunEvals',20000,'MaxIter',2000,'TolFun',
    1e-14,'TolX',1e-14);
[x,funold]=fminsearch(@stereografska,x,options);
[x,fun]=fminsearch(@stereografska,x,options);

```

```

while (abs(funold-fun)>1e-14)
    funold=fun;
    [x, fun]=fminsearch(@stereografika,x,options);
end;
fprintf(fid, 'E = %.16f\nx = ', fun);
fprintf(fid, '%.16f ', x);
fprintf(fid, '\n');
fclose(fid);

```

Nakon provedenih testiranja usvojen je sljedeći način za traženje minimuma. Najprije se odredi najpovoljnija projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju, a tako dobiveno rješenje uzima se kao početna vrijednost za traženje optimalne varijante po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije.

Testiranja su se sastojala od zadavanja različitih početnih vrijednosti i usporedbe dobivenih minimalnih vrijednosti. Za Airy/Jordanov kriterij bez obzira na početnu vrijednost najmanja vrijednost je gotovo uvijek jednaka, osim kod polinoma stupnja većeg od 4. kada te razlike mogu nastati, ali red veličine, odnosno prvih nekoliko značajnih znamenaka bile bi potpuno jednake. Isti postupak je za kriterij najmanje najveće apsolutne linearne deformacije ponekad rezultirao i vrijednostima koje bi se mogle razlikovati i u prvoj značajnoj znamenici.

Na taj način dobiju se male vrijednosti kriterija, ali pogotovo kod složenih funkcija, nema garancije da je to ujedno i najmanja moguća vrijednost.

Sve datoteke za *MATLAB* za sve ispitane projekcije u prilogu su na CD-u koji je sastavni dio ovoga rada.

5.2. Praktični postupak za izradu karata deformacija

Nakon dobivenih vrijednosti kriterija prema postupku opisanom u prethodnom odjeljku potrebno je na karti vizualizirati raspored i veličinu deformacija. Karte su izrađene na sljedeći način. Vektorski podaci o granicama i obali generalizirani za prikaz u odgovarajućem mjerilu zadani u geografskim koordinatama na elipsoidu GRS80 ispisani su iz GRASS-a u njegovu tekstualnom formatu. Pet je takvih vektorskih slojeva i to:

1. *granice* – državne granice
2. *obala* – obalna crta
3. *podrucje* – granica područja za koje se računaju parametri (kopno, teritorijalne vode i epikontinentalni morski pojas)
4. *mreza* – stupanjska geografska mreža
5. *maska* – granica elipsoidnog trapeza s prostiranjem od 41° do 47° po geografskoj širini i od 12° do 20° po geografskoj dužini.

Naredba u GRASS-u za ispis vektorskih podataka je sljedeća:

```
v.out.ascii input=[vektorski_sloj] output=[ime_datoteke]  
format=standard
```

Napisan je vlastiti program *transform.cpp* u programskom jeziku C++ pod operacijskim sustavom Linux za transformaciju geografskih koordinata u sve varijante projekcija određenih i prikazanih u ovome radu. Svaka projekcija implementirana je kao funkcija odgovarajućeg naziva, a u glavnom programu poziva se odgovarajuća funkcija. Za svaku varijantu potrebno je u izvornom kôdu u odgovarajućoj funkciji najprije upisati parametre, a u glavnom programu pozvati odgovarajuću funkciju. Sada se program može prevesti u izvršni kôd naredbom:

```
g++ transform.cpp -o transform
```

Rezultat je izvršna datoteka naziva *transform*.

Sada treba pozvati dobiveni program s nazivom ulazne datoteke u geografskim koordinatama i nazivom izlazne datoteke u odgovarajućoj projekciji, npr:

```
./transform granice lagrange_airy_granice
```

Prethodnom naredbom datoteka *granice* u geografskim koordinatama transformirat će se u optimalnu Lagrangeovu projekciju po Airy/Jordanovu kriteriju. Naravno, prije toga u izvornom kôdu u funkciji naziva *lagrange* potrebno je upisati parametre Lagrangeove projekcije dobivene za minimum Airy/Jordanova kriterija te u glavnom programu kao funkciju za transformaciju koordinata upisati *lagrange*. Na isti način transformiraju se i preostale 4 datoteke. Izlazni format je ponovo GRASS-ov tekstualni format.

Za generiranje podataka o veličini linearnog mjerila napisan je drugi program naziva *deform.cpp*. Taj program kao i prethodni ima odgovarajuću funkciju za svaku projekciju. U glavnom programu ulazne koordinate se ne čitaju iz datoteke već se generiraju dvjema petljama po geografskoj dužini i širini i to za područje od 41° do 47° po geografskoj širini i od 12° do 20° po geografskoj dužini. Korak je jedna stotinka stupnja. Za svaku varijantu potrebno je u izvornom kôdu u odgovarajućoj funkciji najprije upisati parametre, a u glavnom programu pozvati odgovarajuću funkciju. Sada se program može prevesti u izvršni kôd naredbom:

```
g++ deform.cpp -o deform
```

Rezultat je izvršna datoteka naziva *deform*.

Nakon toga treba pozvati dobiveni program s nazivom izlazne datoteke u odgovarajućoj projekciji, npr:

```
./deform >lagrange_airy_deform
```

Program generira za svaku točku transformirane koordinate i linearno mjerilo u toj točki.

Tako dobivenih 6 datoteka služi za izradu karte. Najprije se svi podaci ponovo učitaju u GRASS. Vektorski slojevi s granicama učitavaju se sljedećom naredbom:

```
v.in.ascii input=[ime_datoteke] output=[vektorski_sloj]  
format=standard
```

Podaci o linearnom mjerilu učitavaju se u točkasti trodimenzionalni vektorski sloj sljedećom naredbom:

```
v.in.ascii -z -t -b input=[ime_datoteke] output=mjerilo  
format=point fs=' ' x=1 y=2 z=3
```

Treća koordinata *z* ima vrijednosti linearnog mjerila.

Najprije se zada radno područje i razlučivost tako da odgovara području u ravni koje zahvaćaju podaci naredbom:

```
g.region vect=mreza res=500 -p
```

Razlučivost je postavljena na 500 metara, a granice područja su zatim proširene za otprilike 20 km kako prilikom ispisa sa zadanim debljinama linija ne bi došlo do rezanja tih linija. Vektorski sloj *maska* transformiran je u rasterski sloj *maska* naredbom:

```
v.to.rast input=maska output=maska use=val val=1
```

Tom naredbom dobiven je rasterski sloj *maska* koji unutar slike područja elipsoidnog trapeza ima vrijednost 1, a izvan 0.

Zatim je *maska* upotrijebljena kao maska unutar radnog područja. Time se zapravo sve rasterske operacije unutar radnog područja računaju samo tamo gdje maska ima vrijednost različitu od 0. To se postiže naredbom:

```
r.mask input=maska maskcats=*
```

Slijedi interpolacija rasterskog sloja s vrijednosti linearnog mjerila. Gustoća vektorskih točaka je oko 800 metara, a razlučivost rastera 500 metara tako da je i najjednostavnija metoda interpolacije zadovoljavajuća. Upotrijebljena je tzv. metoda *Inverse Distance Squared Weighting*. Kod te metode interpolirana vrijednost računa se na temelju težinske sredine određenog broja točaka u okolini interpolirane točke, a težine su obrnuto proporcionalne kvadratu udaljenosti. Za potrebe izrade karata deformacija vrijednost u točkama pravilne mreže određena je na temelju samo jedne i to najbliže točke. U tom slučaju ova metoda prelazi u metodu najbližeg susjeda. Vrijednost koja se određuje je koordinata *z* odnosno linearno mjerilo. Naredba je:

```
v.surf.idw input=mjerilo output=mjerilo npoints=1 layer=0
```

Slijedi generiranje izokola u obliku vektorskog sloja na temelju rasterskog sloja *mjerilo*. Ekvidistancija izokola je 0.001 osim na sl. 6.1, 6.2 i 11.15 gdje je ekvidistancija 0.01. To se postiže naredbom:

```
r.contour input=mjerilo output=izokole step=0.001
```

Tako dobivene vektorske linije imaju točku u svakoj rasterskoj ćeliji, što je nepotrebno i dovodi do određene drhtavosti linije, pa su linije generalizirane Douglas-Peuckerovim algoritmom s tolerancijom 1000 metara. Osim toga tako dobivene izokole su dvostruke linije pa je prije generalizacije provedeno čišćenje vektora tako da se linija prekine na mjestima presjeka segmenata. Naredbe glase:

```
v.clean input=izokole output=izokole1 tool=bpol

v.generalize input=izokole1 output=izokole method=douglas
threshold=1000 --overwrite
```

Preostaje još zadati legendu za rasterski sloj. Legenda je definirana u posebnoj datoteci *mjerilo* koja zadaje boje kako je prikazano na slici. Sadržaj te datoteke je sljedeći:

0 220 220 220	
0.99900000001 220 220 220	
0.999 255 0 0	
0.99920000001 255 0 0	
0.9992 255 100 100	
0.99940000001 255 100 100	
0.9994 255 150 150	
0.99960000001 255 150 150	
0.9996 255 200 200	
0.99980000001 255 200 200	
0.9998 255 255 160	
0.99990000001 255 255 160	
0.9999 160 255 160	
1.0001 160 255 160	
1.00010000001 255 255 160	
1.0002 255 255 160	
1.00020000001 255 200 200	
1.0004 255 200 200	
1.00040000001 255 150 150	
1.0006 255 150 150	
1.00060000001 255 100 100	
1.0008 255 100 100	
1.00080000001 255 0 0	
1.001 255 0 0	
1.00100000001 220 220 220	
1000000 220 220 220	
nv white	

Apsolutne
linearne
deformacije
[dm/km]

	< 1
	1 – 2
	2 – 4
	4 – 6
	6 – 8
	8 – 10
	> 10

—— izokole
ekvidistancija
100 dm/km

U svakom retku prvi broj označava vrijednost linearnog mjerila, a zatim slijedi crvena, zelena i plava komponenta za boju. Legenda se rasterskom sloju pridružuje sljedećom naredbom:

```
r.colors map=mjerilo rules=mjerilo
```

Slijedi ispis u format PostScript. Naredba je:

```
ps.map input=karta output=[ime_datoteke]
```

U datoteci *karta* zadano je na koji će se način karta ispisati u formatu PostScript. Njezin sadržaj je sljedeći:

```
scale 1:5500000
border n

vlines granice
color 0 0 0
width 0.2
end

vlines obala
color 0 200 200
width 0.5
end

vlines mreza
color 0 0 200
width 0.5
end

vlines izokole
color 0 0 0
width 0.5
end

vlines podrucje
color 0 0 0
width 0.8
end

raster mjerilo
```

Najprije se zadaje mjerilo karte, dakle sve karte u ovom radu su u mjerilu 1:5 500 000. U drugom retku se zadaje da se ne crta rub karte. Slijedi definicija za svaki sloj koji se ispisuje. Za svaki vektorski sloj zadaje se boja i debljina linije. Kao najdonji sloj iscertava se rasterski sloj *mjerilo*.

Tako dobivena datoteka u formatu PostScript učitana je u CorelDraw gdje su dodane koordinate geografske mreže, označene su izokole vrijednostima i dodana je legenda. Karte su ispisane u formatu Encapsulated PostScript i takve umetnute u tekst.

6. MERCATOROVA PROJEKCIJA

Mercatorova projekcija ili uspravna cilindrična konformna projekcija već je stoljećima u upotrebi, posebno za navigacijske svrhe. U toj projekciji linearno mjerilo ovisi samo o geografskoj širini, a izokole su dužine paralelne sa slikama paralela. U Hrvatskoj se ona upotrebljava za izradu pomorskih navigacijskih karata. Radi cjelovitijeg pregleda konformnih projekcija ovdje dajem i optimalne Mercatorove projekcije po zadanim kriterijima iako se ona ne upotrebljava u praksi za prikaz cijelog područja Hrvatske. S obzirom na to da je predložena metodologija primjenjiva i za druga područja s teoretske strane interesantan zadatak bio bi naći optimalne projekcije po ovim kriterijima za područje Jadranskog mora ili nekog njegovog dijela.

Formule za ravninske koordinate u Mercatorovoj projekciji mogu se naći u gotovo svim udžbenicima kartografskih projekcija, npr. Borčić (1955b), Frančula (2004). Njezinu implementaciju može se naći u programima za GIS, bazama prostornih podataka, GPS uređajima ili programima za kartografske projekcije.

Zanimljivo je da se Mercatorova projekcija često upotrebljavala, a i danas se upotrebljava za općegeografske karte svijeta iako po svojstvima deformacija ne spada u skupinu projekcija koje su pogodne za takve karte.

6.1. Optimalne varijante Mercatorove projekcije

Da bi se predloženim postupkom odredile optimalne varijante prema zadanim kriterijima i za zadano područje potreban je izraz za linearno mjerilo u Mercatorovoj projekciji. U Mercatorovoj projekciji može se zadati proizvoljna paralela na geografskoj širini φ_0 na kojoj nema linearnih deformacija. Izraz za mjerilo glasi (Frančula 2004):

$$c = \frac{N_0 \cos \varphi_0}{N \cos \varphi}, \text{ gdje je}$$

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \text{ i } N_0 = N(\varphi_0)$$

te a velika poluos i e prvi ekscentricitet rotacijskog elipsoida.

Drugi način je da se izraz za mjerilo napiše u obliku:

$$c = \frac{c_0}{N \cos \varphi}, \text{ gdje je } c_0 \text{ proizvoljna konstanta čija se vrijednost određuje na temelju}$$

zadanog kriterija. Veza između c_0 i φ_0 je jednostavna. Za zadani φ_0 konstanta c_0 određena je izrazom

$$c_0 = N_0 \cos \varphi_0,$$

odnosno jednaka je polumjeru paralele na geografskoj širini φ_0 .

Ako je zadan c_0 tada se φ_0 može odrediti iz izraza

$$c_0 = \frac{a \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}.$$

Kvadriranjem tog izraza te upotrebom jednakosti $\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1$ dobije se izraz za φ_0 kao funkcija od c_0 :

$$\varphi_0 = \arcsin \left(\pm \sqrt{\frac{c_0^2 - a^2}{c_0^2 e^2 - a^2}} \right).$$

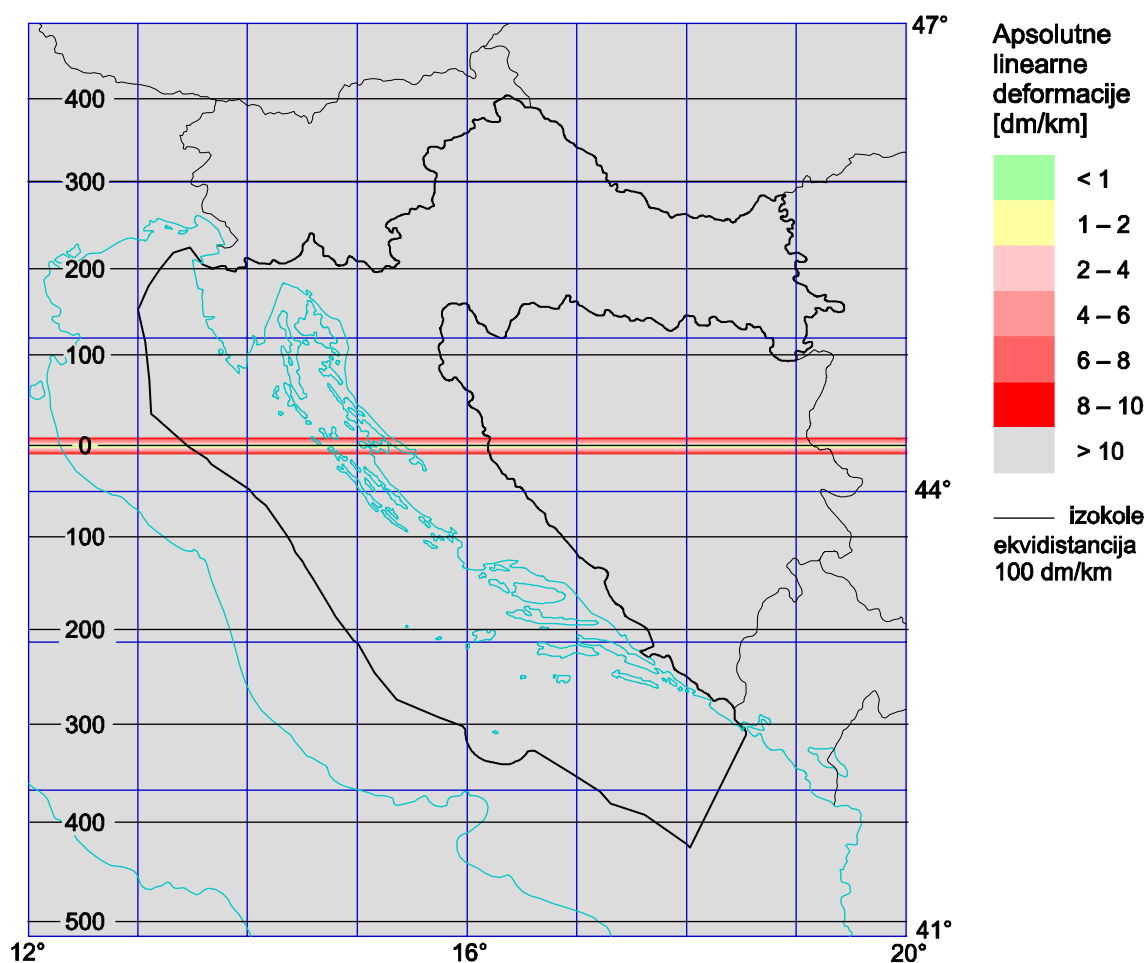
Kako se vidi iz prethodne formule za zadani c_0 postoje dva rješenja za φ_0 u domeni geografskih koordinata koja se razlikuju po predznaku. To znači da ako se za paralelu bez deformacija zada neka paralela na sjevernoj polutki, paralela na geografskoj širini s negativnim predznakom također se preslikava bez deformacija i obratno.

6.1.1. Optimalna Mercatorova projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju

Minimum po Airy/Jordanovu kriteriju za Mercatorovu projekciju postiže se kada je paralela koja se preslikava bez deformacija (zaokruženo na 1') $\varphi_0 = 44^\circ 18'$. Tada je vrijednost Airy/Jordanova kriterija $E = 0.020573$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.042536$. U tablici 6.1 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 6.1 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 6.1. Vrijednosti kriterija te paralela koja se preslikava bez deformacija u Mercatorovoj projekciji za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija

Najmanja vrijednost Airy/Jordanova kriterija, $\min E$	$2.057248387 \times 10^{-2}$
Paralela preslikana bez deformacija, φ_0 u radijanima	0.7732838796
Najveća apsolutna linearna deformacija, $d_{\max}$	$4.263173133 \times 10^{-2}$



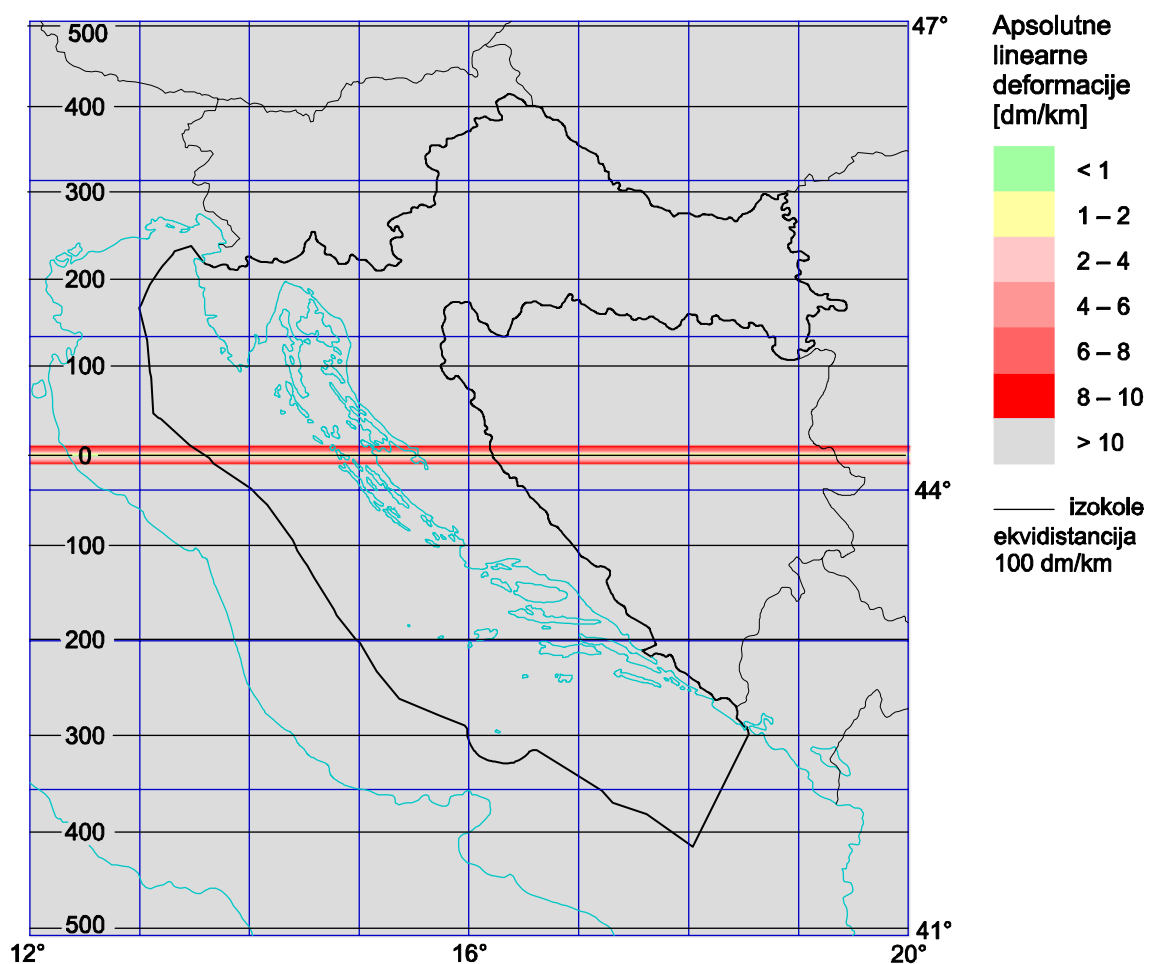
Slika 6.1. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Mercatorovoj projekciji po Airy/Jordanovu kriteriju. Paralela koja se preslikava bez deformacija $\varphi_0 = 44^\circ 18'$.

6.1.2. Optimalna Mercatorova projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za Mercatorovu projekciju postiže se kada je paralela koja se preslikava bez deformacija (zaokruženo na 1') $\varphi_0 = 44^\circ 14'$. Najveća apsolutna linearna deformacija u tom slučaju iznosi $d_{\max} = 0.041712$, a vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.020609$. U tablici 6.2 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 6.2 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 6.2. Vrijednosti kriterija te paralela koja se preslikava bez deformacija u Mercatorovoj projekciji za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$	$4.157719736 \times 10^{-2}$
Paralela preslikana bez deformacija, φ_0 u radijanima	0.7721508116
Vrijednost Airy/Jordanova kriterija, E	$2.060193820 \times 10^{-2}$



Slika 6.2. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Mercatorovoj projekciji po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Paralela koja se preslikava bez deformacija $\varphi_0 = 44^\circ 14'$.

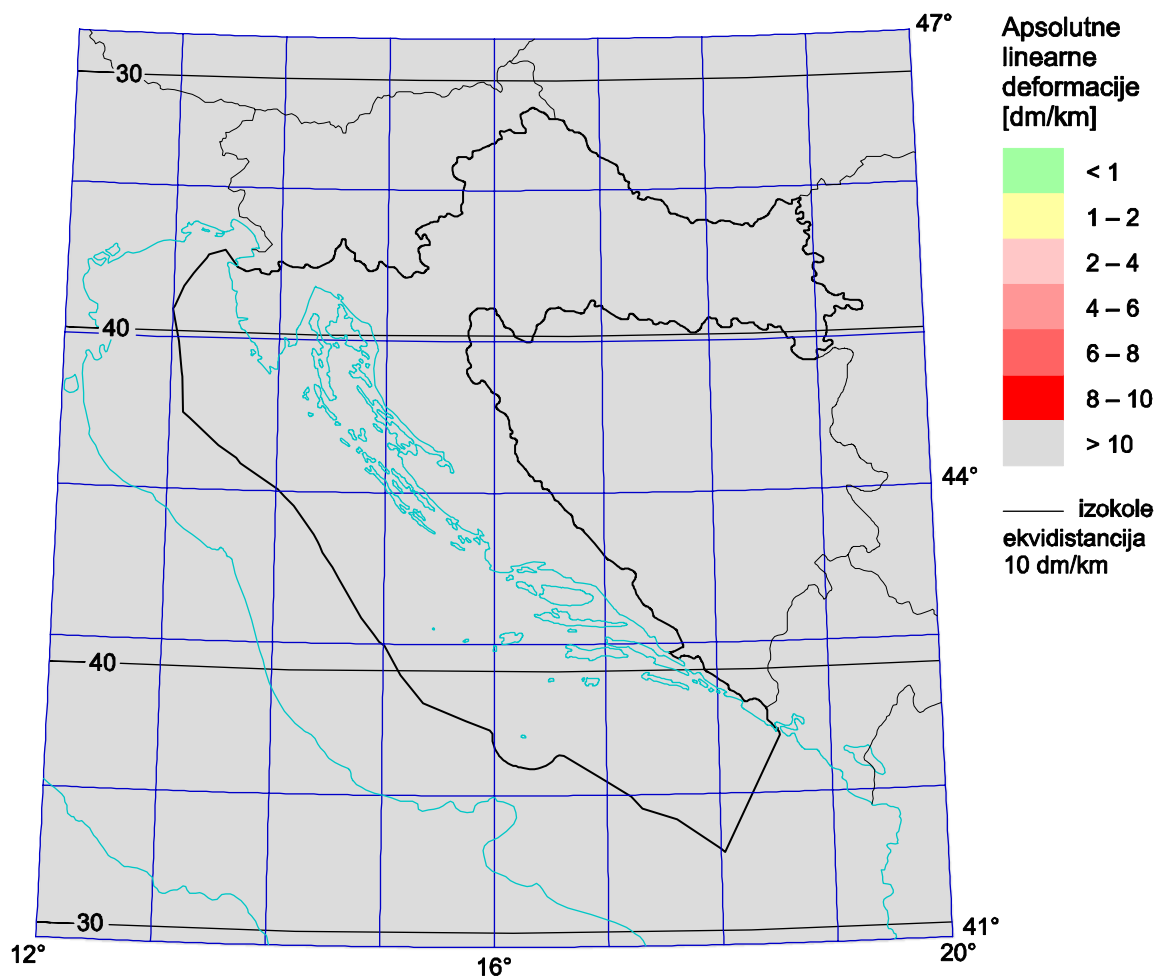
7. LAMBERTOVA KONFORMNA KONUSNA PROJEKCIJA

Lambertova konformna konusna projekcija u prošlosti se upotrebljavala za prikaz Hrvatske na nekim službenim i drugim kartama. Predviđena je i njezina daljnja upotreba za potrebe službene kartografije (NN 2004). U toj projekciji linearno mjerilo mijenja se samo po geografskoj širini, a izokole su kružnice koncentrične sa slikama paralela (Frančula 2004). Formule za ravninske koordinate mogu se naći npr. u Borčić (1955b) ili Frančula (2004). Implementaciju te projekcije moguće je pronaći u gotovo svim programima za GIS, bazama prostornih podataka, GPS uređajima ili programima za kartografske projekcije.

7.1. Neke postojeće varijante Lambertove konformne konusne projekcije za prikaz Hrvatske

Vojnogeografski institut u Beogradu je krajem 1970-ih za izradu preglednotopografske karte u mjerilu 1:500 000 izabrao Lambertovu konformnu konusnu projekciju Besselovog elipsoida sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 38^\circ 30'$ i $\varphi_2 = 49^\circ 00'$. Standardne paralele izabrane su na temelju područja koje se protezalo od $35^\circ 15'$ do $51^\circ 15'$ sjeverne geografske širine (Rešidbegović 1981, Peterca i Čolović 1987). U toj su projekciji osim službene preglednotopografske karte 1:500 000 iz razdoblja 1979-83. izrađene i karte u Geografskom atlasu Jugoslavije (SNL 1988). Ministarstvo obrane Republike Hrvatske je 1999. godine izdalo *Pregledni topografski zemljovid 1:500 000*, zidnu kartu Hrvatske izrađenu u istoj toj projekciji (Lapaine 2002b).

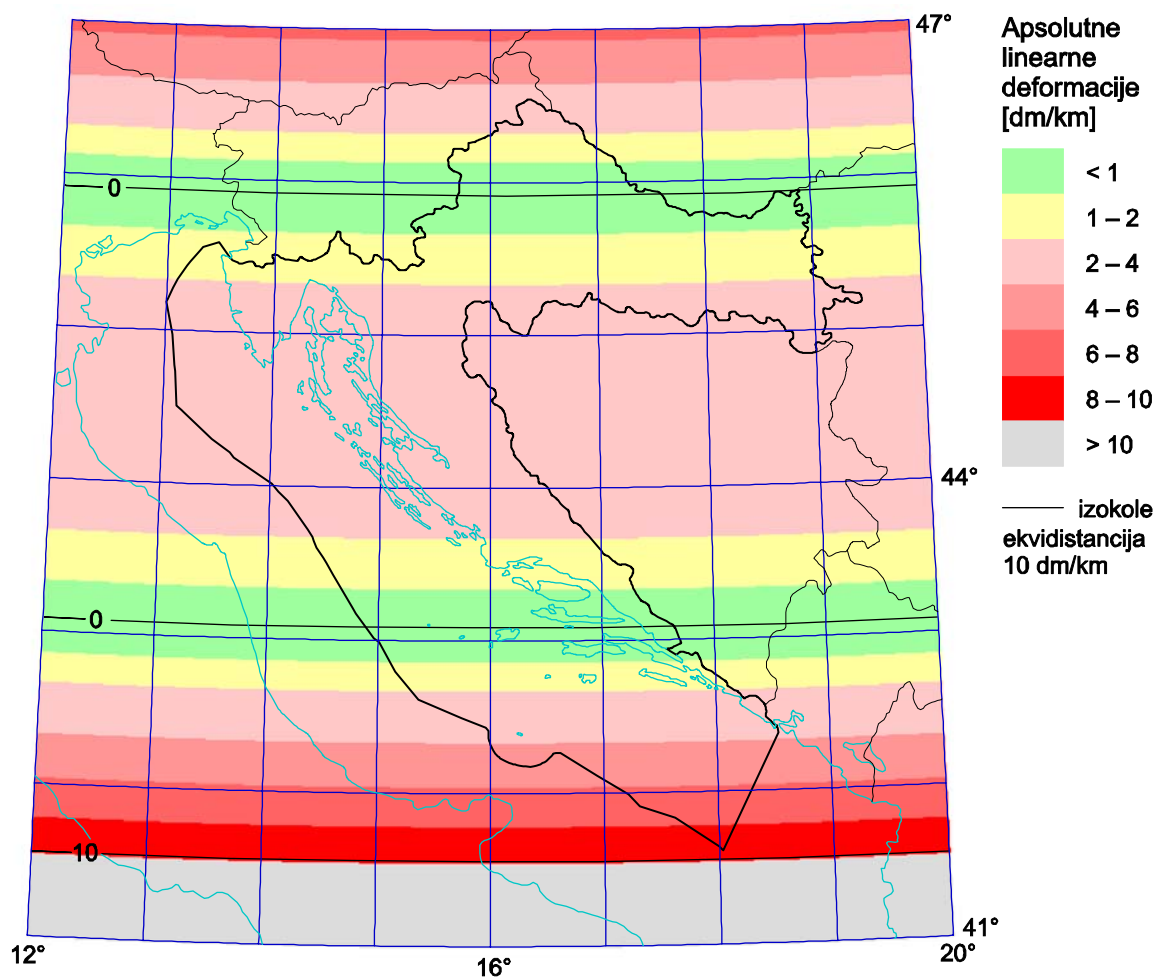
Takva varijanta za zadano područje Hrvatske daje vrijednost Airy/Jordanova kriterija $E = 0.003937$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.004184$. Raspored i veličina deformacija prikazani su na slici 7.1.



Slika 7.1. Raspored i veličina deformacija u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 38^\circ 30'$ i $\varphi_2 = 49^\circ 00'$

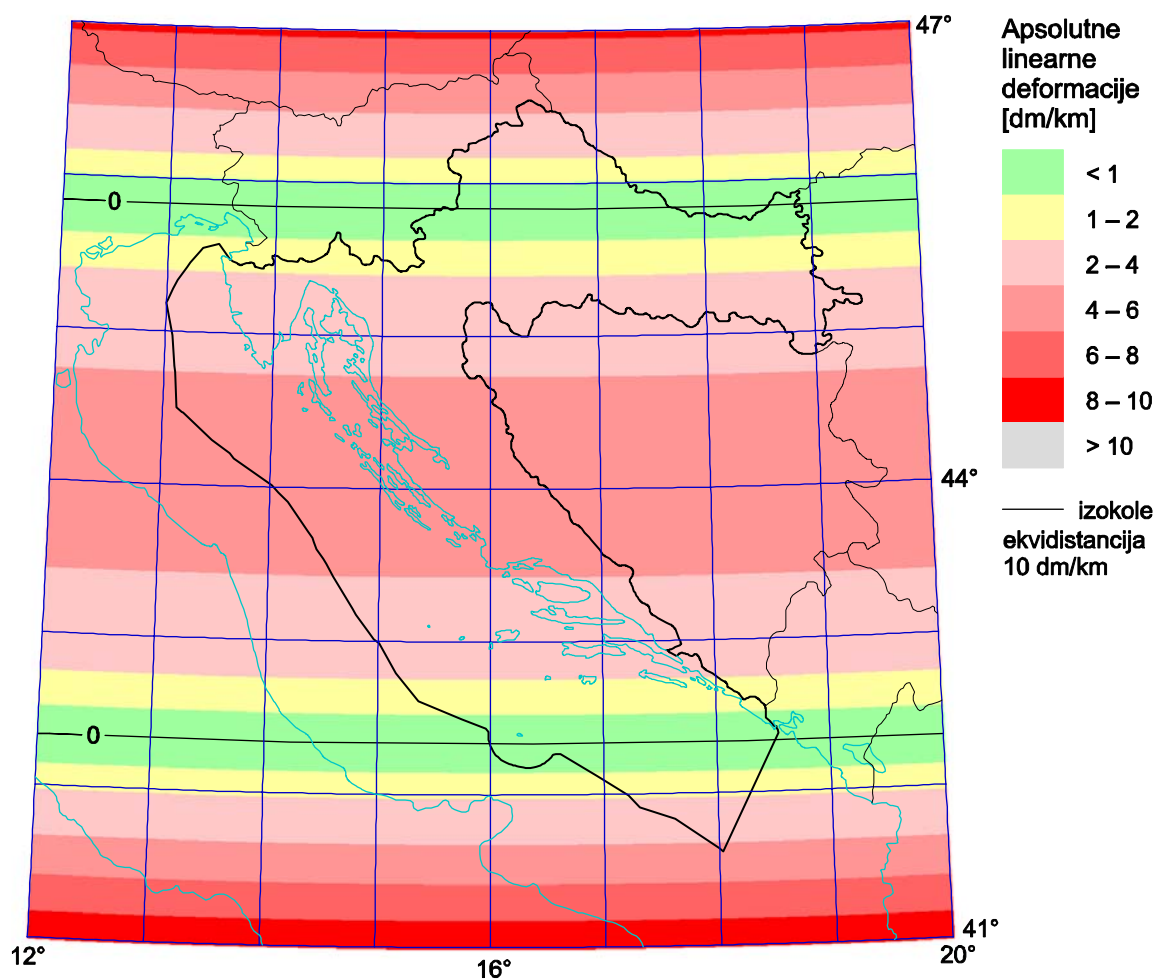
U (NN 2004) propisano je da se koordinatni sustav uspravne Lambertove konformne konusne projekcije - skraćeno HTRS96/LCC, sa standardnim paralelama $43^\circ 05'$ i $45^\circ 55'$ određuje projekcijskim koordinatnim sustavom Republike Hrvatske za područje pregledne državne kartografije.

Takva varijanta za zadano područje Hrvatske daje vrijednost Airy/Jordanova kriterija $E = 0.000257$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000943$. Raspored i veličina deformacija prikazani su na slici 7.2.



Slika 7.2. Raspored i veličina deformacija u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 43^\circ 05'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 55'$

Rajaković (2008) predlaže kao najbolju Lambertovu konformnu konusnu projekciju za Hrvatsku (u obzir uzima kopno, teritorijalno more i epikontinentalni pojas) varijantu sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 42^\circ 20'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 50'$. Takva varijanta za zadano područje Hrvatske daje vrijednost Airy/Jordanova kriterija $E = 0.000309$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000466$. Raspored i veličina deformacija prikazani su na slici 7.3.



Slika 7.3. Raspored i veličina deformacija u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji sa standardnim paralelama $\varphi_1 = 42^\circ 20'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 50'$

7.2. Optimalne varijante Lambertove konusne konformne projekcije

Da bi se predloženim postupkom odredile optimalne varijante prema zadanim kriterijima i za zadano područje potreban je izraz za linearno mjerilo u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji. Zadržavam se samo na obliku formula kada su zadane dvije proizvoljne standardne paralele φ_1 i φ_2 , odnosno paralele na kojima je linearno mjerilo jednako jedinici. Takav oblik je i najopćenitiji oblik Lambertove konformne konusne projekcije.

Linearno mjerilo c u Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji s dvije standardne paralele φ_1 i φ_2 određeno je izrazima (Frančula 2004):

$$c = \frac{kK}{rU^k}, \text{ gdje su}$$

$$k = \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln U_1 - \ln U_2}, \quad K = \frac{r_1 U_1^k}{k} = \frac{r_2 U_2^k}{k},$$

$$r(\varphi) = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad r_1 = r(\varphi_1), \quad r_2 = r(\varphi_2), \quad (7.1)$$

$$U(\varphi) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}\right)^{\frac{e}{2}}, \quad U_1 = U(\varphi_1), \quad U_2 = U(\varphi_2),$$

te a velika poluos i e prvi numerički ekscentricitet rotacijskog elipsoida.

Optimalne varijante mogu se pronaći i tako da je zadana paralela s najmanjim linearnim mjerilom φ_0 i iznosom mjerila na toj paraleli c_0 . U tom slučaju linearno mjerilo c je određeno izrazima:

$$c = \frac{kK}{rU^k}, \quad \text{gdje su}$$

$$k = \sin \varphi_0, \quad K = \frac{r_0 c_0 U_0^k}{k},$$

$$r(\varphi) = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad r_0 = r(\varphi_0), \quad (7.2)$$

$$U(\varphi) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}\right)^{\frac{e}{2}}, \quad U_0 = U(\varphi_0).$$

Veza između φ_1 i φ_2 s jedne strane i φ_0 i c_0 određena je sljedećim formulama. Neka je najprije zadano φ_1 i φ_2 , a želi se odrediti φ_0 i c_0 . Iz (7.1) imamo

$$k = \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln U_1 - \ln U_2}, \quad \text{a iz (7.2) } k = \sin \varphi_0. \quad \text{Iz te dvije jednačbe izjednačavanjem po } k \text{ dobije se}$$

φ_0 kao funkcija od φ_1 i φ_2 :

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln U_1 - \ln U_2}\right), \quad \text{gdje su } r_1, r_2, U_1 \text{ i } U_2 \text{ određeni kao u (7.1).}$$

Mjerilo c_0 je mjerilo na paraleli s geografskom širinom φ_0 , odnosno:

$$c_0 = \frac{kK}{r_0 U_0^k}, \quad \text{gdje su } k \text{ i } K \text{ određeni kao u (7.1), a } r_0 \text{ i } U_0 \text{ određeni kao u (7.2).}$$

O obrnutom slučaju kada je zadano φ_0 i c_0 , a želi se odrediti φ_1 i φ_2 to je moguće na sljedeći način. Iz (7.2) imamo

$k = \sin \varphi_0$ i $K = \frac{r_0 c_0 U_0^k}{k}$, a iz (7.1) $K = \frac{r_1 U_1^k}{k} = \frac{r_2 U_2^k}{k}$. Iz tih jednažbi, nakon izjednačavanja po K i uvrštavanjem k , φ_1 i φ_2 se mogu izraziti u obliku nelinearnih jednažbi od φ_0 i c_0 tako da imamo:

$$r_1 U_1^{\sin \varphi_0} = r_0 c_0 U_0^{\sin \varphi_0}, \text{ nelinearnu funkciju od } \varphi_1 \text{ i}$$

$$r_2 U_2^{\sin \varphi_0} = r_0 c_0 U_0^{\sin \varphi_0}, \text{ nelinearnu funkciju od } \varphi_2.$$

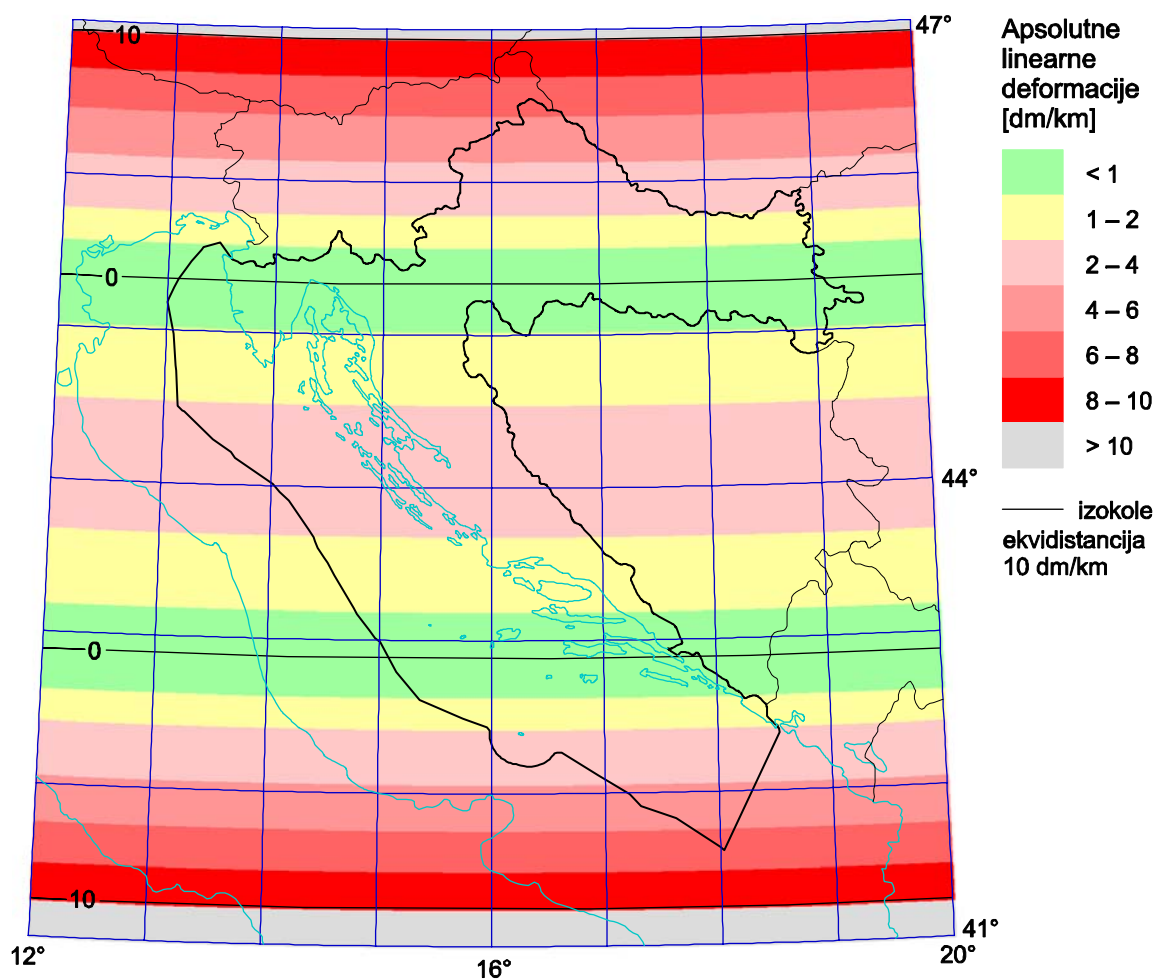
U prethodnim jednažbama r_1 , r_2 , U_1 i U_2 određeni su kao u (7.1), a r_0 i U_0 kao u (7.2).

7.2.1. Optimalna Lambertova konformna konusna projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju

Minimum po Airy/Jordanovu kriteriju za Lambertovu konformnu konusnu projekciju s dvije standardne paralele postiže se za vrijednosti standardnih paralela (zaokruženo na 1') $\varphi_1 = 42^\circ 53'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 20'$. Za te vrijednosti standardnih paralela vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000201$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000705$. U tablici 7.1 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenki, a na slici 7.4 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 7.1. Vrijednosti kriterija i standardne paralele Lambertove konformne konusne projekcije za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija

Najmanja vrijednost Airy/Jordanova kriterija, $\min E$	$2.007514267 \times 10^{-4}$
Prva standardna paralela, φ_1 u radijanima	0.7483619657
Druga standardna paralela, φ_2 u radijanima	0.7912936459
Najveća apsolutna linearna deformacija, $d_{\max}$	$7.030869493 \times 10^{-4}$



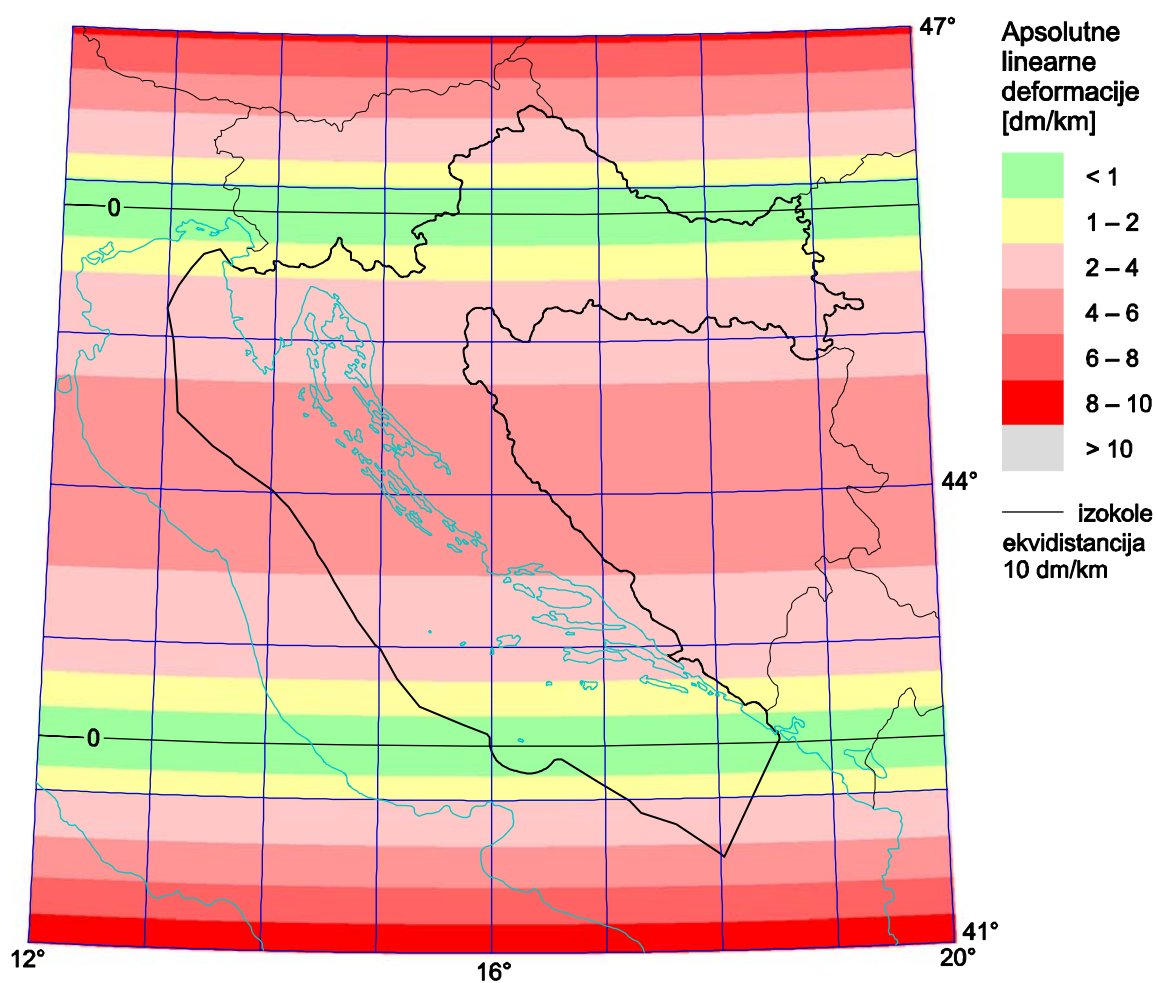
Slika 7.4. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji po Airy/Jordanovu kriteriju. Standardne paralele $\varphi_1 = 42^\circ 53'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 20'$

7.2.2. Optimalna Lambertova konformna konusna projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za Lambertovu konformnu konusnu projekciju s dvije standardne paralele postiže se za vrijednosti standardnih paralela (zaokruženo na 1') $\varphi_1 = 42^\circ 21'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 50'$. Za te vrijednosti standardnih paralela najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000464$, a vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000306$. U tablici 7.2 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenki, a na slici 7.5 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 7.2. Vrijednosti kriterija i standardne paralele Lambertove konformne konusne projekcije za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$	$4.619633348 \times 10^{-4}$
Prva standardna paralela, φ_1 u radijanima	0.7391012187
Druga standardna paralela, φ_2 u radijanima	0.8000010664
Vrijednost Airy/Jordanova kriterija, E	$3.067834489 \times 10^{-4}$



Slika 7.5. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Lambertovoj konformnoj konusnoj projekciji po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Standardne paralele $\varphi_1 = 42^\circ 21'$ i $\varphi_2 = 45^\circ 50'$

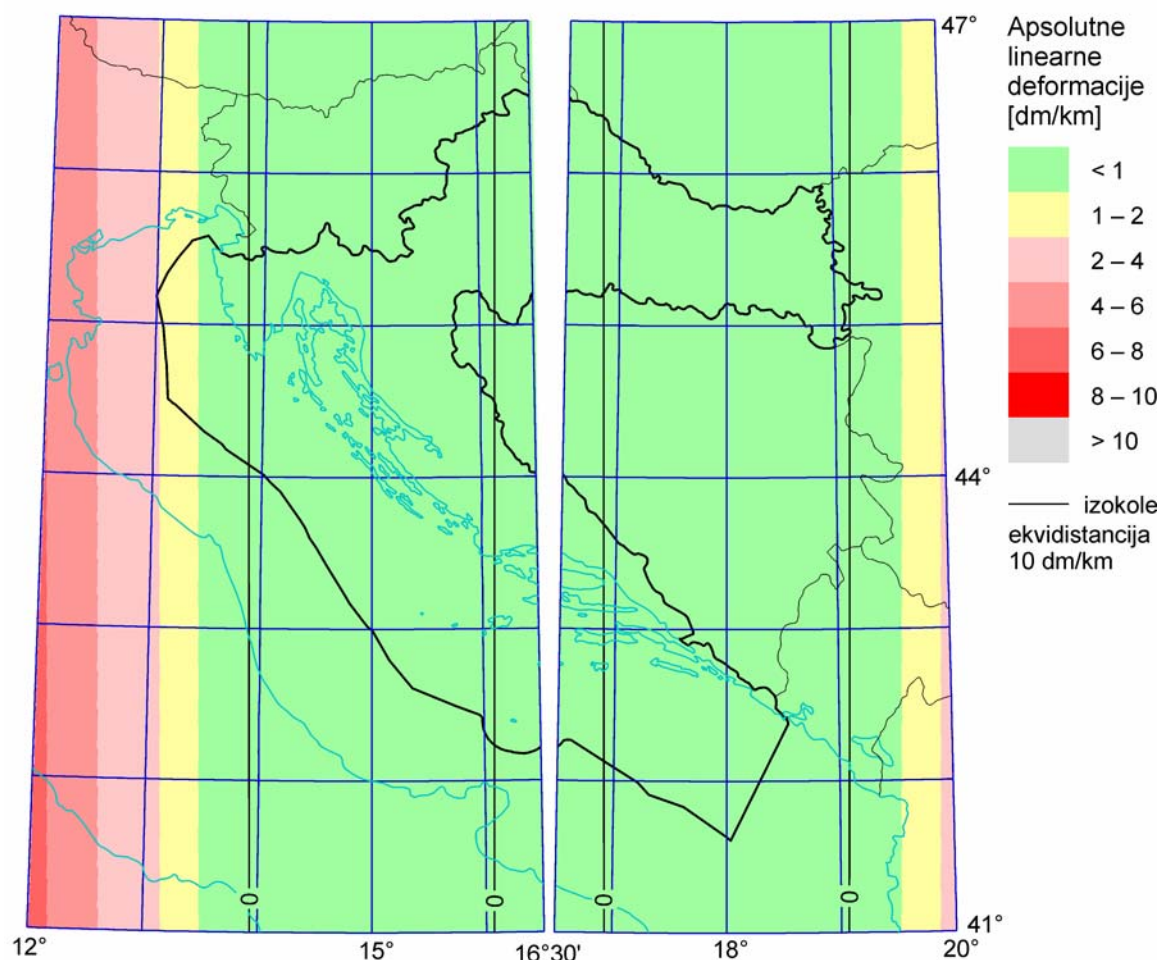
8. GAUSS-KRÜGEROVA PROJEKCIJA

Gauss-Krügerova projekcija kontinuirano se upotrebljava kao temelj za koordinatne sustave službene topografske i katastarske izmjere u Hrvatskoj nakon II. svjetskog rata. Predviđena je i njezina daljnja upotreba za potrebe službene kartografije (NN 2004, 2004a). U toj projekciji linearno mjerilo ovisi o geografskoj dužini i širini, a izokole su krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan. Formule za ravninske koordinate daju se u obliku razvoja u redove i mogu se naći npr. u Hristow (1955), Borčić (1976), Frančula (2004) ili Lapaine (2006). Implementaciju te projekcije moguće je pronaći u gotovo svim programima za GIS, bazama prostornih podataka, GPS uređajima ili programima za kartografske projekcije. Naime, ta projekcija, poznatija pod nazivom poprečna Mercatorova (eng. Transverse Mercator) služi i kao osnova sustava Univerzalne poprečne Mercatorove projekcije koji je namijenjen kartiranju čitave Zemlje bez polarnih područja.

8.1. Neke postojeće varijante Gauss-Krügerove projekcije za prikaz Hrvatske

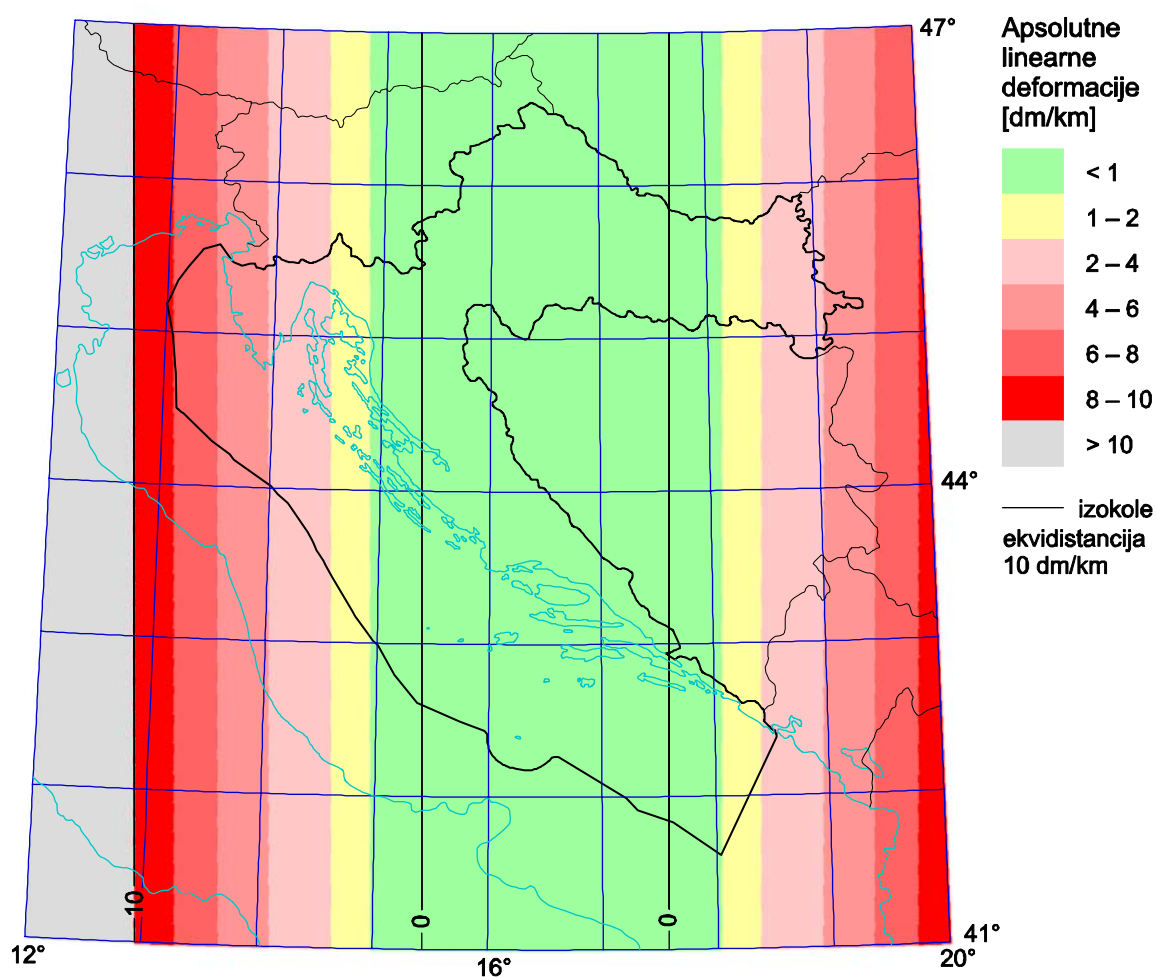
Gauss-Krügerova projekcija izabrana je 1924. godine za službenu kartografsku projekciju za područje tadašnje Kraljevine Srba, Hrvata i Slovenaca. U (SGU 1953) dan je opširan prikaz rasprave i istraživanja koja su prethodila toj odluci. Za područje tadašnje Kraljevine Srba, Hrvata i Slovenaca izabrana je Gauss-Krügerova projekcija triju meridijanskih zona širine 3° sa srednjim meridijanima na 15° , 18° i 21° geografske dužine. Linearno mjerilo na srednjem meridijanu iznosi 0.9999, a upotrijebljen je Besselov elipsoid.

Nakon osamostaljenja Republike Hrvatske upotreba te projekcije, odnosno meridijanskih zona sa srednjim meridijanima na 15° i 18° je nastavljena i u upotrebi je i do danas. Granični meridijan dviju zona je na $16^\circ 30'$. Preslika li se dio zadanog područja Hrvatske koji je zapadno od geografske dužine $16^\circ 30'$ u Gauss-Krügerovu projekciju sa srednjim meridijanom $\lambda_0 = 15^\circ$ vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000073$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000209$. Preslika li se dio zadanog područja Hrvatske koji je istočno od geografske dužine $16^\circ 30'$ u Gauss-Krügerovu projekciju sa srednjim meridijanom $\lambda_0 = 18^\circ$ vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000068$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000100$. U oba slučaja linearno mjerilo na srednjem meridijanu je $c_0 = 0.9999$. Slika 8.1 prikazuje veličinu i raspored deformacija u obje zone. Dakle, cijelo područje Hrvatske u ta dva koordinatna sustava (zone) preslikava se s najvećom apsolutnom deformacijom $d_{\max} = 0.000209$. Zbrojimo li vrijednosti za Airy/Jordanov kriterij za obje zone, za zadano područje Hrvatske preslikano na ovaj način vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000141$.



Slika 8.1. Raspored i veličina deformacija u dvije zone Gauss-Krügerove projekcije sa srednjim meridijanima $\lambda_0 = 15^\circ$ i $\lambda_0 = 18^\circ$. Linearno mjerilo na srednjem meridijanu $c_0 = 0.9999$.

U (NN 2004, 2004a) propisano je da se koordinatni sustav poprečne Mercatorove (Gauss-Krügerove) projekcije, sa srednjim meridijanom $\lambda_0 = 16^\circ 30'$ i linearnim mjerilom na srednjem meridijanu $c_0 = 0.9999$ određuje projekcijskim koordinatnim sustavom Republike Hrvatske za područje katastra i detaljne državne topografske kartografije. Predviđeno je njezino postupno uvođenje u službenu upotrebu, a u trenutku pisanja ovog rada upotreba te projekcije nije još u potpunosti zaživjela i zamijenila dva koordinatna sustava opisana u prethodnom odlomku. U toj projekciji za zadano područje Hrvatske vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000216$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000839$. Slika 8.2 prikazuje raspored i veličinu deformacija u toj projekciji.



Slika 8.2. Raspored i veličina deformacija u Gauss-Krügerovoj projekciji sa srednjim meridijanom $\lambda_0 = 16^\circ 30'$. Linearno mjerilo na srednjem meridijanu $c_0 = 0.9999$.

8.2. Optimalne varijante Gauss-Krügerove projekcije

Za određivanje optimalnih varijanti Gauss-Krügerove projekcije prema zadanim kriterijima potreban je izraz za linearno mjerilo u Gauss-Krügerovoj projekciji. U (Lapaine 2006), između ostalog, dani su i izrazi za računanje linearnog mjerila iz geografskih koordinata koji osiguravaju točnost na 15 značajnih znamenki. Formula za linearno mjerilo kada se srednji meridijan preslikava bez deformacija, tj. $c_0 = 1$ glasi:

$$c = 1 + h_2 l^2 + h_4 l^4 + h_6 l^6 + h_8 l^8, \text{ gdje su}$$

$$l = \lambda - \lambda_0, \quad t = \tan \varphi, \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi \text{ i}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2)$$

$$h_4 = \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (5 + 14\eta^2 + 13\eta^4 + 4\eta^6 - 4t^2 - 28\eta^2 t^2 - 48\eta^4 t^2 - 24\eta^6 t^2)$$

$$h_6 = \frac{1}{720} \cos^6 \varphi \left(61 + 331\eta^2 + 715\eta^4 + 769\eta^6 - 148t^2 - 1648\eta^2 t^2 - 5660\eta^4 t^2 - \right. \\ \left. - 8600\eta^6 t^2 + 16t^4 + 496\eta^2 t^4 + 2880\eta^4 t^4 + 6240\eta^6 t^4 \right)$$

$$h_8 = \frac{1}{40320} \cos^8 \varphi \left(1385 + 12284\eta^2 + 45318\eta^4 - 6744t^2 - 109560\eta^2 t^2 - 599592\eta^4 t^2 \right. \\ \left. + 2832t^4 + 90528\eta^2 t^4 + 751632\eta^4 t^4 - 64t^6 - 8128\eta^2 t^6 - 123648\eta^4 t^6 \right)$$

Za određivanje optimalnih varijanti osim nalaženja vrijednosti od λ_0 , tj. položaja srednjeg meridijana određuje se i mjerilo na srednjem meridijanu c_0 pa izraz za linearno mjerilo glasi:

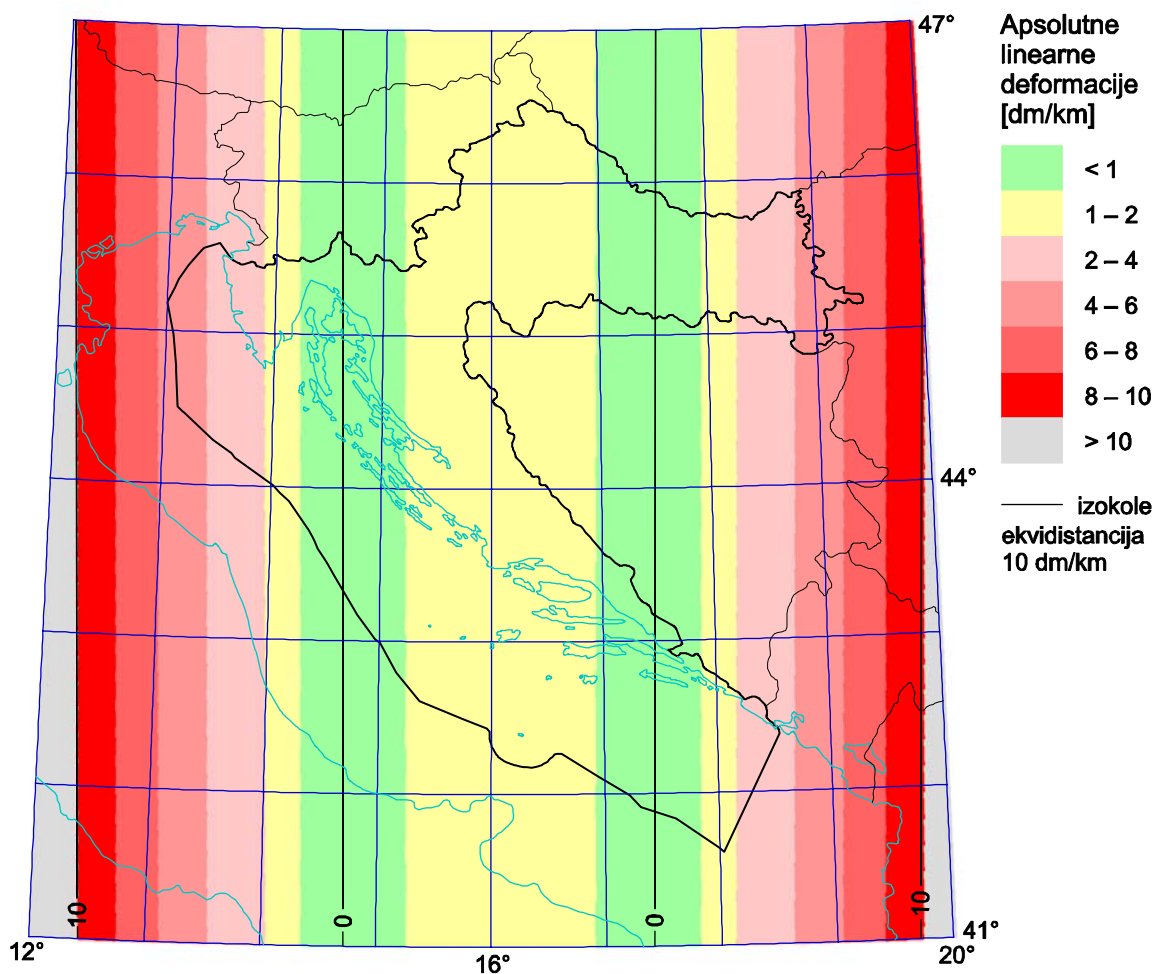
$$c = c_0 \left(1 + h_2 l^2 + h_4 l^4 + h_6 l^6 + h_8 l^8 \right) \text{ uz ostale veličine kao u prethodnim formulama.}$$

8.2.1. Optimalna Gauss-Krügerova projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju

Minimum po Airy/Jordanovu kriteriju za Gauss-Krügerovu projekciju postiže se za vrijednost srednjeg meridijana (zaokruženo na 1') $\lambda_0 = 16^\circ 04'$ i linearno mjerilo na srednjem meridijanu (zaokruženo na 6 decimalnih mjesta) $c_0 = 0.999841$. Za te vrijednosti vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000179$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000710$. U tablici 8.1 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 8.3 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 8.1. Vrijednosti kriterija, te srednji meridijan i linearno mjerilo na srednjem meridijanu Gauss-Krügerove projekcije za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija

Najmanja vrijednost Airy/Jordanova kriterija, $\min E$	$1.793347280 \times 10^{-4}$
Srednji meridijan, λ_0 u radijanima	0.2805258253
Linearno mjerilo na srednjem meridijanu, c_0	0.9998414836
Najveća apsolutna linearna deformacija, $d_{\max}$	$7.072907342 \times 10^{-4}$



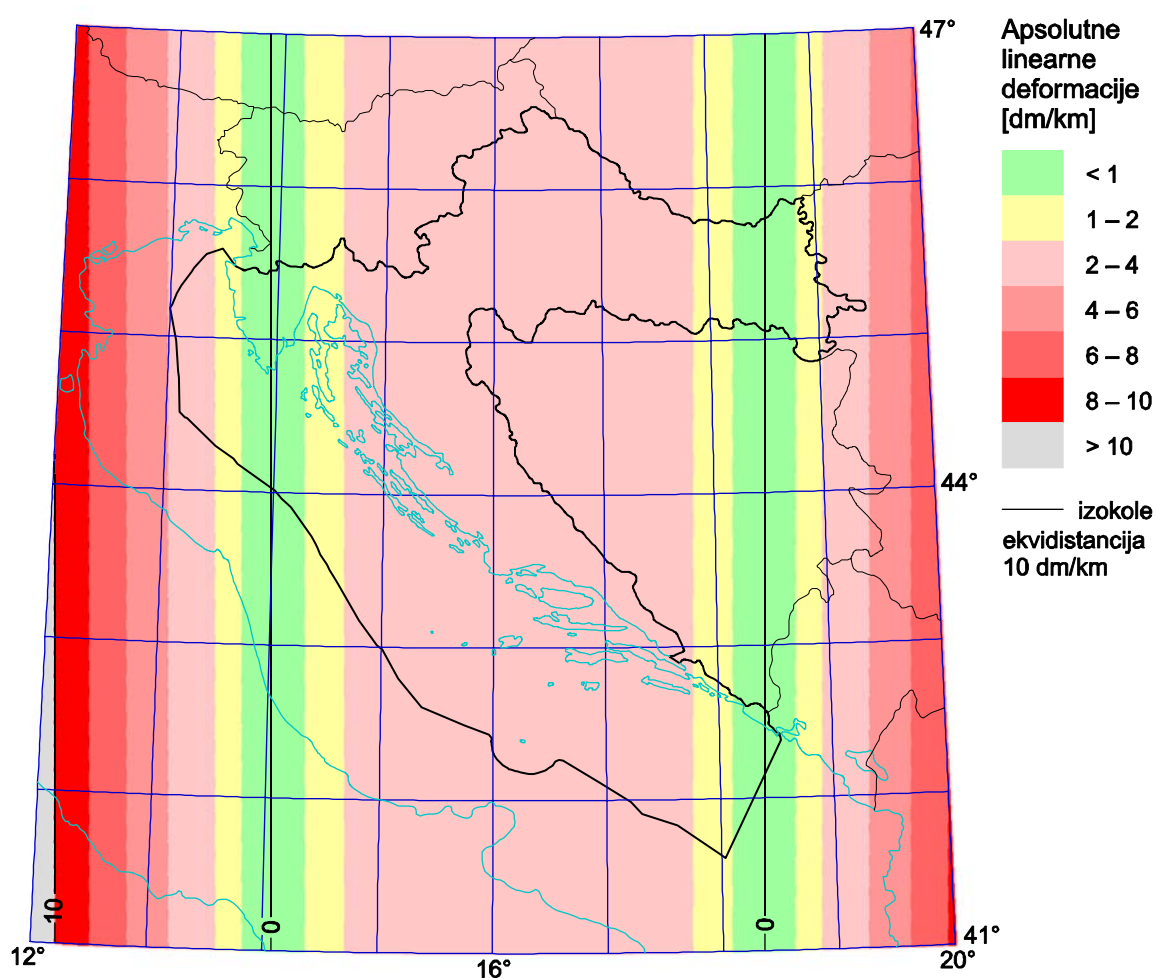
Slika 8.3. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Gauss-Krügerovoj projekciji po Airy/Jordanovu kriteriju. Srednji meridijan $\lambda_0 = 16^\circ 04'$ i linearno mjerilo na srednjem meridijanu $c_0 = 0.999841$.

8.2.2. Optimalna Gauss-Krügerova projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za Gauss-Krügerovu projekciju postiže se za vrijednost srednjeg meridijana (zaokruženo na 1') $\lambda_0 = 16^\circ 13'$ i linearno mjerilo na srednjem meridijanu (zaokruženo na 6 decimalnih mjesta) $c_0 = 0.999603$. Za te vrijednosti najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000397$, a vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000299$. U tablici 8.2 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 8.4 prikazan je raspored i veličina deformacija.

Tablica 8.2. Vrijednosti kriterija, te srednji meridijan i linearno mjerilo na srednjem meridijanu Gauss-Krügerove projekcije za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$	$3.967418123 \times 10^{-4}$
Srednji meridijan, λ_0 u radijanima	0.2830342270
Linearno mjerilo na srednjem meridijanu, c_0	0.9996032582
Vrijednost Airy/Jordanova kriterija, E	$2.985357994 \times 10^{-4}$



Slika 8.4. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Gauss-Krügerovoj projekciji po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Srednji meridijan $\lambda_0 = 16^\circ 13'$ i linearno mjerilo na srednjem meridijanu $c_0 = 0.999603$.

9. STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA ROTACIJSKOG ELIPSOIDA

Kako je već u poglavlju o prethodnim radovima navedeno stereografska projekcija rotacijskog elipsoida nije definirana na jedinstven način. Prema Kavrajskom (1960) svaka projekcija koja za specijalni slučaj kada se rotacijski elipsoid zamijeni sferom ($e = 0$) daje poznatu stereografsku projekciju sfere, može se smatrati stereografskom projekcijom rotacijskog elipsoida. Od poznatih poopćenja, stereografska projekcija dobivena dvostrukim konformnim preslikavanjem, najprije rotacijskog elipsoida na sferu po Gaussu s deformacijama trećeg i višeg reda, a potom sfere u ravninu, prema Kavrajskome, predstavlja jednu od boljih varijanti zbog zatvorenih i jednostavnih formula. Zbog toga ovdje će se upotrijebiti ta varijanta. U takvoj stereografskoj projekciji izokole su krivulje bliske kružnicama koncentrične oko jedne točke, tzv. pola projekcije.

Primjenom stereografske projekcije za područje Hrvatske do sada su se bavili Tutić i Lapaine (2008). U tom radu za područje Hrvatske izabrana je državna granica, tj. kopno i teritorijalno more, a od kriterija istražen je samo Airy/Jordanov. Metodologija za traženje optimalnih varijanti koristila je metodu konstantnog koraka, tj. optimalni parametri pronađeni su ispitivanjem svih mogućih vrijednosti parametara s određenim malim korakom unutar pretpostavljene domene. Prije toga poznati su radovi A. Faschinga koji se 1920-ih godina zalagao za primjenu stereografske projekcije za područje tadašnje Kraljevine Srba, Hrvata i Slovenaca (SGU 1953).

Stereografska projekcija zbog svoje primjene za detaljno kartiranje polarnih područja i upotrebu za navigacijske svrhe u tim područjima ima svoju važnost. Ona služi kao temelj za Univerzalni Polarni Stereografski sustav (UPS), skup koordinatnih sustava za kartiranje polarnih područja (za širine veće od 80°). Zbog toga se njezina implementacija nalazi u većini programa za GIS, bazama prostornih podataka, GPS uređajima ili programima za kartografske projekcije.

9.1. Optimalne varijante stereografske projekcije rotacijskog elipsoida

Za određivanje optimalnih varijanti stereografske projekcije prema zadanim kriterijima potreban je izraz za linearno mjerilo u toj projekciji. U (Tutić i Lapaine 2008), dani su i izrazi za računanje linearnog mjerila iz geografskih koordinata:

$$c = \frac{2c_0\alpha_0 R_0 \cos \varphi'}{kN \cos \varphi} \text{ gdje su}$$

$$\alpha_0 = \sqrt{1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^4 \varphi_0}, \quad \varphi'_0 = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi_0}{\alpha_0}\right), \quad K_0 = \frac{\tan^{\alpha_0}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'_0}{2}\right)} \left(\frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0}\right)^{\frac{\alpha_0 e}{2}},$$

$$M_0 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_0)^{3/2}}, \quad N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad N_0 = N(\varphi_0), \quad R_0 = \sqrt{M_0 N_0},$$

$$\lambda' = \alpha_0 \lambda, \quad \varphi' = 2 \arctan \left(\frac{1}{K_0} \tan^{\alpha_0} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{\alpha_0 e}{2}} \right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda'_0 = \alpha_0 \lambda_0, \quad k = 1 + \sin \varphi'_0 \sin \varphi' + \cos \varphi'_0 \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda'_0).$$

U tim izrazima veličine φ_0 , λ_0 i c_0 su konstante čije se vrijednosti određuju prema zadanim kriterijima, te a velika poluos rotacijskog elipsoida i e prvi ekscentricitet.

Pravokutne koordinate u ravnini računaju se po formulama (Tutić i Lapaine 2008):

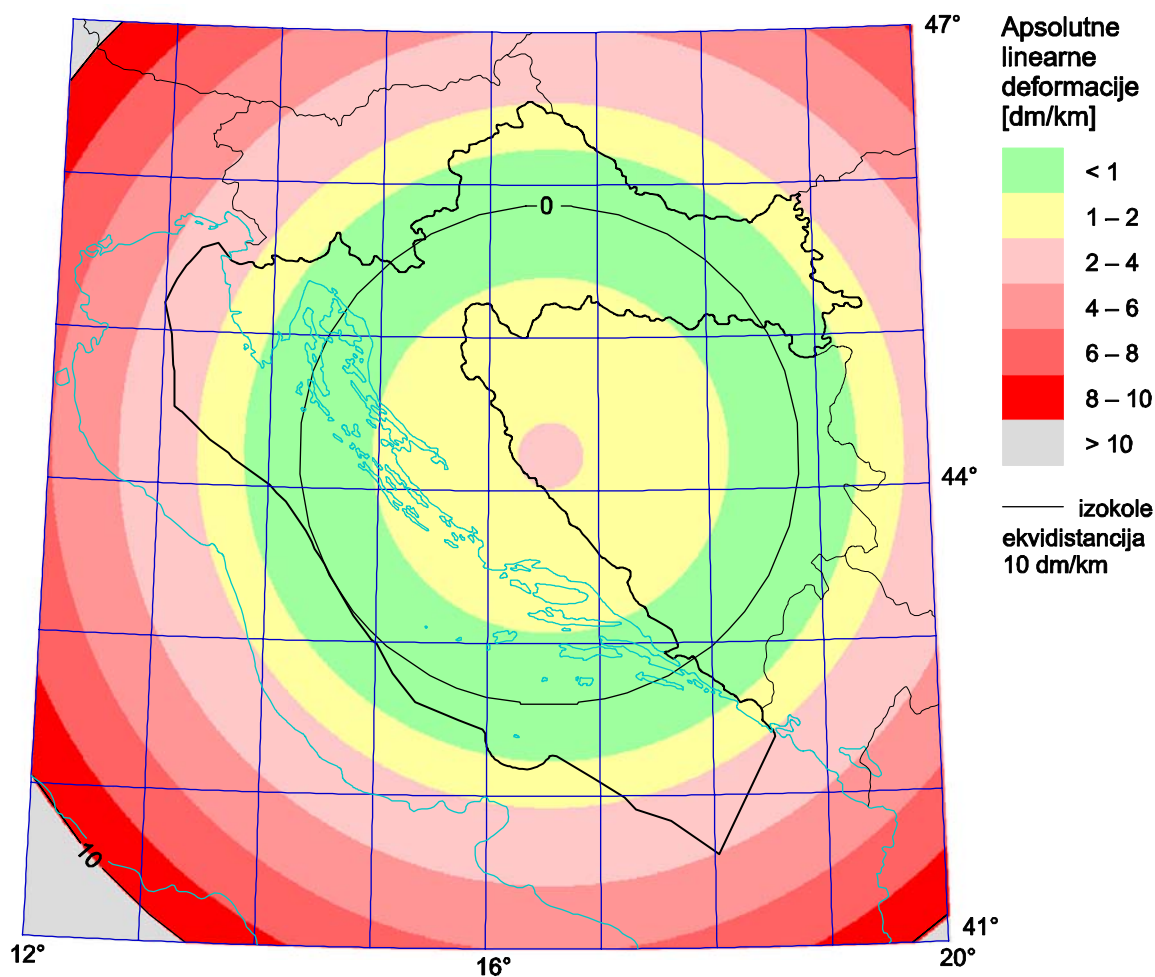
$$x = \frac{2c_0 R_0}{k} (\sin \varphi' \cos \varphi'_0 - \sin \varphi'_0 \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda'_0)), \quad y = \frac{2c_0 R_0}{k} \sin(\lambda' - \lambda'_0) \cos \varphi'.$$

9.1.1. Optimalna stereografska projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju

Minimum po Airy/Jordanovu kriteriju za stereografsku projekciju postiže se za vrijednosti pola projekcije (zaokruženo na 1') $\varphi_0 = 44^\circ 14'$, $\lambda_0 = 16^\circ 33'$ i linearno mjerilo u polu projekcije (zaokruženo na 6 decimalnih mjesta) $c_0 = 0.999797$. Za te vrijednosti vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000121$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000409$. U tablici 9.1 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 9.1 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 9.1. Vrijednosti kriterija, te pol projekcije i linearno mjerilo u polu stereografske projekcije za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija

Najmanja vrijednost Airy/Jordanova kriterija, $\min E$	$1.213460875 \times 10^{-4}$
Geografska širina pola, φ_0 u radijanima	0.7719329191
Geografska dužina pola, λ_0 u radijanima	0.2889734970
Linearno mjerilo u polu projekcije, c_0	0.9997974394
Najveća apsolutna linearna deformacija, $d_{\max}$	$4.065144482 \times 10^{-4}$



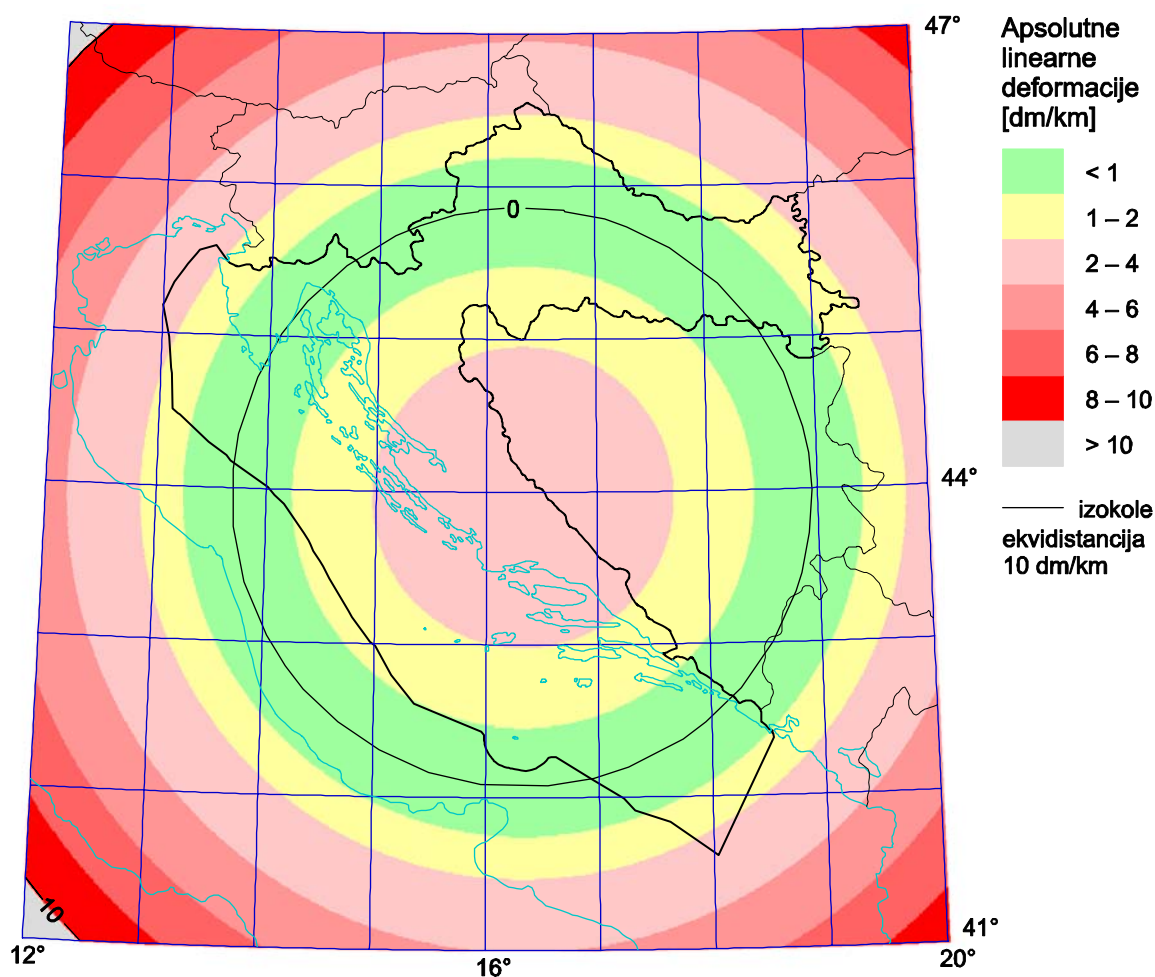
Slika 9.1. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj stereografskoj projekciji po Airy/Jordanovu kriteriju. Pol projekcije na $\varphi_0 = 44^\circ 14'$, $\lambda_0 = 16^\circ 33'$ i linearno mjerilo u polu $c_0 = 0.999797$.

9.1.2. Optimalna stereografska projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za stereografsku projekciju postiže se za vrijednost pola projekcije (zaokruženo na 1') $\varphi_0 = 43^\circ 58'$, $\lambda_0 = 16^\circ 19'$ i linearno mjerilo u polu (zaokruženo na 6 decimalnih mjesta) $c_0 = 0.999727$. Za te vrijednosti najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000276$, a vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000150$. U tablici 9.2 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 9.2 prikazan je raspored i veličina deformacija.

Tablica 9.2. Vrijednosti kriterija, te pol projekcije i linearno mjerilo u polu stereografske projekcije za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$	$2.731258203 \times 10^{-4}$
Geografska širina pola, φ_0 u radijanima	0.7674967161
Geografska dužina pola, λ_0 u radijanima	0.2846751849
Linearno mjerilo u polu projekcije, c_0	0.9997268666
Vrijednost Airy/Jordanova kriterija, E	$1.498627429 \times 10^{-4}$



Slika 9.2. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj stereografskoj projekciji po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Pol projekcije na $\varphi_0 = 43^\circ 58'$, $\lambda_0 = 16^\circ 19'$ i linearno mjerilo u polu $c_0 = 0.999727$.

10. LAGRANGEOVA PROJEKCIJA

Istraživanjem primjene Lagrangeove projekcije za područje Hrvatske do sada se nije nitko bavio. Borčić (1955b) daje primjer izbora te projekcije za područje SFR Jugoslavije, međutim riječ je o grafičkom određivanju parametara projekcije koje se sastoji od aproksimacije područja povoljnom elipsom čije su glavne osi paralelne s koordinatnim osima.

Lagrangeova projekcija nema široku upotrebu iako ima neka zanimljiva svojstva. Jedno od njih je da su slike meridijana i paralela kružnice, odnosno kružni lukovi. Iz tog uvjeta i uvjeta konformnosti projekciju je izveo Lagrange (1779) pa je po njemu dobila ime. Drugo svojstvo je da se u Lagrangeovoj projekciji mogu postići različiti rasporedi deformacija, a specijalni slučajevi te projekcije su neke druge poznate projekcije.

10.1. Optimalne varijante Lagrangeove projekcije

Za određivanje optimalnih varijanti Lagrangeove projekcije prema zadanim kriterijima potreban je izraz za linearno mjerilo u toj projekciji. Kavrajskij (1960) i Borčić (1955) daju sljedeći izraz za linearno mjerilo:

$$c = \frac{Kk \cos \delta}{N \cos \varphi (1 + \cos k(\lambda - \lambda_0) \cos \delta)}$$

gdje su

$$U(\varphi) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}\right)^{\frac{e}{2}}, \quad U_0 = U(\varphi_0),$$

$$r(\varphi) = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad r_0 = r(\varphi_0),$$

$$\delta_0 = 2 \arctan\left(\frac{\sin \varphi_0}{k}\right), \quad C = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta_0}{2}\right) U_0^{-k}, \quad K = \frac{c_0 r_0}{k} \left(1 + \frac{1}{\cos \delta_0}\right) \text{ i}$$

$$\delta = 2 \arctan(CU^k) - \frac{\pi}{2}.$$

U tim izrazima veličine φ_0 , λ_0 , c_0 i k su konstante čije se vrijednosti određuju prema zadanim kriterijima, te a velika poluos rotacijskog elipsoida i e prvi ekscentricitet.

Pravokutne koordinate u ravnini računaju se po formulama (Kavrajskij 1960, Borčić 1955):

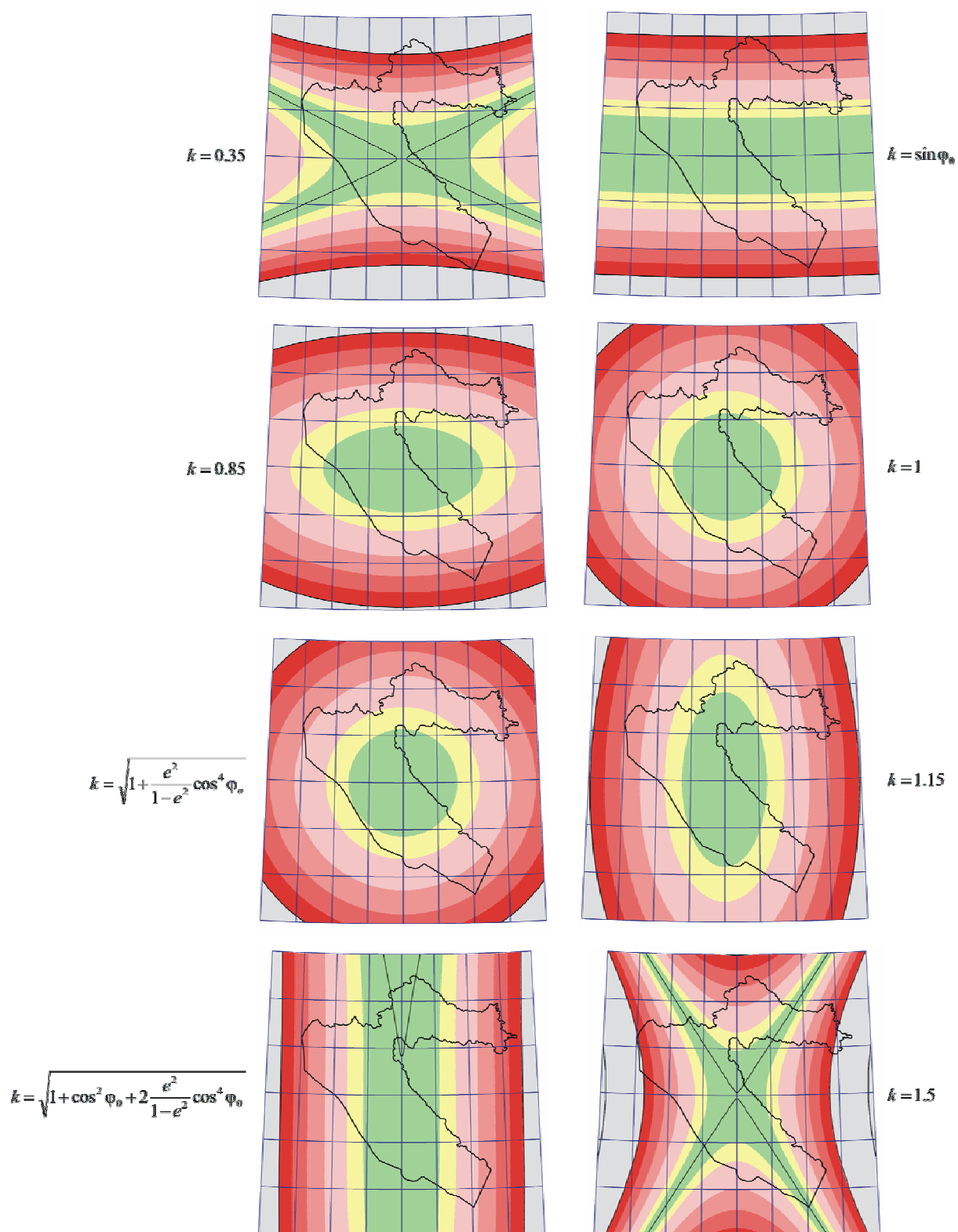
$$x = \frac{K \sin \delta}{1 + \cos k(\lambda - \lambda_0) \cos \delta}, \quad y = \frac{K \sin k(\lambda - \lambda_0) \cos \delta}{1 + \cos k(\lambda - \lambda_0) \cos \delta}.$$

Veličine φ_0 i λ_0 su geografske koordinate središta projekcije, c_0 je linearno mjerilo u središtu projekcije te k parametar kojeg Lagrange naziva eksponent projekcije. Jednim dijelom Lagrange (1779), zatim Čebišev (1856), a vrlo detaljno Kavrajskij (1960), analiziraju projekciju i oblik izokola u odnosu na vrijednost od k . Lagrange pokazuje da za vrijednost $k = 0$ projekcija prelazi u uspravnu cilindričnu konformnu, odnosno Mercatorovu projekciju (vidi pog. 2). Kod Kavrajskog (1960) mogu se naći ostali slučajevi. U tablici 10.1 prikazane su vrijednosti eksponenta k u Lagrangeovoj projekciji i opis oblika izokola okolini točke (φ_0, λ_0) . U tablici 10.1. uvedene su oznake:

$$F(\varphi_0) = \sqrt{1 + \frac{e^2}{1-e^2} \cos^4 \varphi_0} \text{ i } G(\varphi_0) = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0 + 2 \frac{e^2}{1-e^2} \cos^4 \varphi_0}.$$

Tablica 10.1. Vrijednosti eksponenta k u Lagrangeovoj projekciji i opis oblika izokola okolini točke (φ_0, λ_0)

Vrijednost eksponenta k	Specijalni slučaj Lagrangeove projekcije ili oblik izokola u okolini točke (φ_0, λ_0)
$k = 0$	Mercatorova projekcija
$0 < k < \sin \varphi_0$	izokole su krivulje bliske hiperbolama izdužene u smjeru srednje paralele
$k = \sin \varphi_0$	Lambertova konformna konusna projekcija
$\sin \varphi_0 < k < F(\varphi_0)$	izokole su krivulje bliske elipsama izdužene u smjeru srednje paralele
$k = 1$	varijanta stereografske projekcije po Krügeru i Adamsu u kojoj su izokole još uvijek bliske elipsama, blago izdužene u smjeru srednje paralele
$k = F(\varphi_0)$	stereografska projekcija, varijanta opisana u prethodnom poglavlju s izokolama koje su bliske kružnicama
$F(\varphi_0) < k < G(\varphi_0)$	izokole su krivulje bliske elipsama izdužene u smjeru srednjeg meridijana
$k = G(\varphi_0)$	izokole su krivulje bliske parabolama izdužene u smjeru srednjeg meridijana (tu je varijantu bez posljednjeg člana predložio Lagrange kao najbolju)
$k > G(\varphi_0)$	izokole su krivulje bliske hiperbolama izdužene u smjeru srednjeg meridijana



Slika 10.1. Oblici izokola u Lagrangeovoj projekciji u ovisnosti o vrijednosti parametra k uz $\varphi_0 = 45^\circ$, $\lambda_0 = 16^\circ$ i $c_0 = 1$

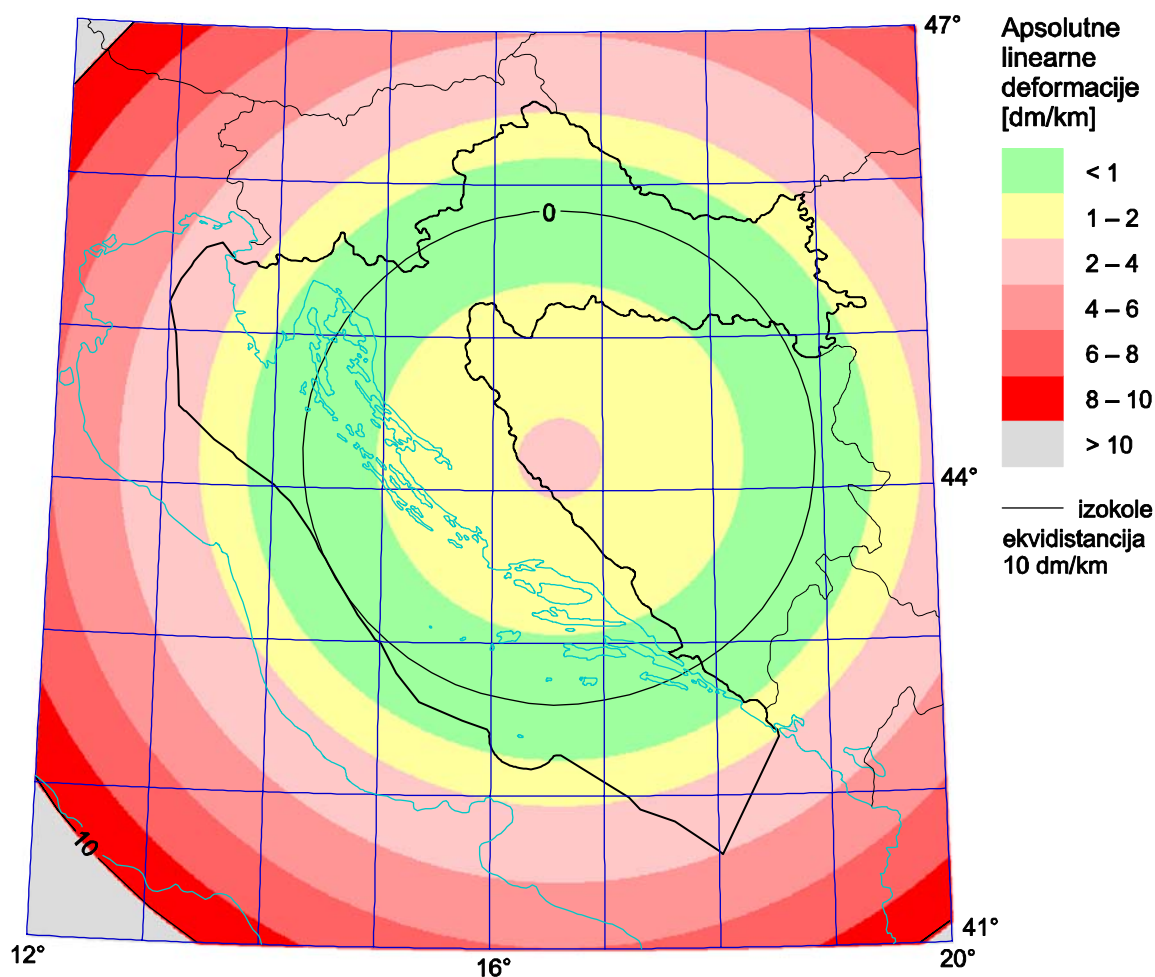
Kavrajский pokazuje da osim točke (φ_0, λ_0) postoji još jedna centralna točka $(\varphi_0, \lambda_0 + \frac{180^\circ}{k})$ te pokazuje kakav je oblik izokola i u toj točki. Svi ti slučajevi za vrijednosti od k , osim $k = 0$ uz ostale parametre $\varphi_0 = 45^\circ$, $\lambda_0 = 16^\circ$ i $c_0 = 0$ oko točke (φ_0, λ_0) na području Hrvatske prikazani su na slici 10.1.

10.1.1. Optimalna Lagrangeova projekcija po Airy/Jordanovu kriteriju

Minimum po Airy/Jordanovu kriteriju za Lagrangeovu projekciju postiže se za vrijednosti središta projekcije (zaokruženo na 1') $\varphi_0 = 44^\circ 13'$, $\lambda_0 = 16^\circ 36'$, linearno mjerilo u središtu projekcije (zaokruženo na 6 decimalnih mjesta) $c_0 = 0.999795$ i koeficijent (zaokružen na 6 decimalnih mjesta) $k = 0.990949$. Za te vrijednosti vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000121$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000410$. U tablici 10.1 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 10.2 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 10.2. Vrijednosti kriterija, te središte projekcije, linearno mjerilo u središtu i koeficijent k Lagrangeove projekcije za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija

Najmanja vrijednost Airy/Jordanova kriterija, $\min E$	$1.212474579 \times 10^{-4}$
Geografska širina središta, φ_0 u radijanima	0.7718342514
Geografska dužina središta, λ_0 u radijanima	0.2896208033
Linearno mjerilo u središtu projekcije, c_0	0.9997950603
Koeficijent k	0.9909488563
Najveća apsolutna linearna deformacija, $d_{\max}$	$4.133340182 \times 10^{-4}$



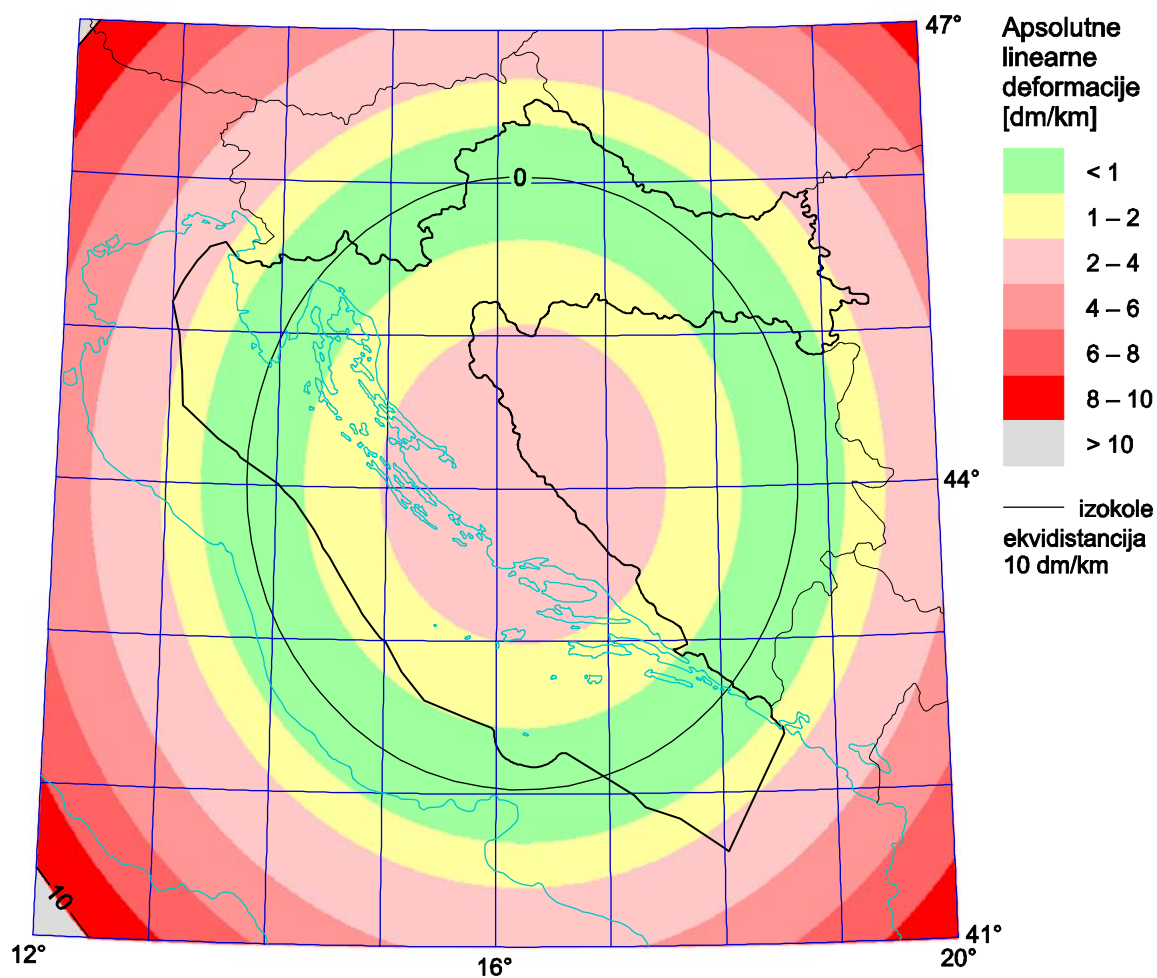
Slika 10.2. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Lagrangeovoj projekciji po Airy/Jordanovu kriteriju. Središte projekcije na $\varphi_0 = 44^\circ 13'$, $\lambda_0 = 16^\circ 36'$, linearno mjerilo u središtu $c_0 = 0.999795$ i koeficijent $k = 0.990949$.

10.1.2. Optimalna Lagrangeova projekcija po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za Lagrangeovu projekciju postiže se za vrijednost središta projekcije (zaokruženo na 1') $\varphi_0 = 44^\circ 01'$, $\lambda_0 = 16^\circ 14'$, linearno mjerilo u središtu (zaokruženo na 6 decimalnih mjesta) $c_0 = 0.999727$ i koeficijent (zaokružen na 6 decimalnih mjesta) $k = 1.028226$. Za te vrijednosti najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000276$, a vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000152$. U tablici 10.2 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 10.3 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 10.3. Vrijednosti kriterija, te središte projekcije, linearno mjerilo u središtu i koeficijent k Lagrangeove projekcije za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$	$2.724940501 \times 10^{-4}$
Geografska širina središta, φ_0 u radijanima	0.7684408085
Geografska dužina središta, λ_0 u radijanima	0.2833854090
Linearno mjerilo u središtu projekcije, c_0	0.9997274890
Koeficijent k	1.028226635
Vrijednost Airy/Jordanova kriterija, E	$1.516124079 \times 10^{-4}$



Slika 10.3. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj Lagrangeovoj projekciji po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Središte projekcije na $\varphi_0 = 44^\circ 01'$, $\lambda_0 = 16^\circ 14'$, linearno mjerilo u središtu $c_0 = 0.999727$ i koeficijent $k = 1.028226$.

11. KONFORMNE POLINOMNE PROJEKCIJE

Konformne polinomne projekcije do sada nisu istraživane i primjenjivane za područje Hrvatske. Pod pojmom konformnih polinomnih projekcija smatrat će se transformacije u ravninu izražene polinomima kompleksne varijable. Da bi preslikavanje bilo konformno kompleksne varijable moraju biti sastavljene od izometrijskih koordinata na obje plohe, tj. takvih koordinata koje za jednaki prirast koordinata daju jednake priraste udaljenosti na plohi (Frančula 2004). U ravnini su Kartezijeve pravokutne koordinate izometrijske, a na plohi rotacijskog elipsoida to su izometrijska širina i geografska dužina (vidi npr. Frančula 2004). Prema Cantersu (2002) još su 1932. godine Driencourt i Laborde predložili polinome kompleksne varijable sa ciljem iznalaženja povoljnijih projekcija s obzirom na oblik područja. Polinomi kompleksne varijable mogu se upotrijebiti za konformno preslikavanje bilo koje plohe na neku drugu plohu sve dok su ispunjeni uvjeti da su koordinate na obje plohe izometrijske. Za preslikavanje rotacijskog elipsoida u ravninu polinomi se mogu zapisati na sljedeći način:

$$\omega = \sum_{j=0}^n C_j z^j \text{ gdje su}$$

$$\omega = x + iy, C_j = a_j + ib_j \text{ i } z = q + i\lambda \text{ te}$$

$$q = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right) \text{ izometrijska širina na rotacijskom elipsoidu.}$$

U ravnini se definira lijevi pravokutni koordinatni sustav s pozitivnim dijelom osi x usmjerenim prema gore.

Slobodni članovi a_0 i b_0 predstavljaju translaciju ravnine i mogu se izabrati po volji, a u ovim istraživanjima uzet će se da je $a_0 = b_0 = 0$.

Ishodište izometrijskih koordinata na rotacijskom elipsoidu postaviti će se približno u središte promatranog područja, tj. u točku s geografskim koordinatama $\varphi_0 = 44^\circ$ i $\lambda_0 = 16^\circ$. Dakle, u prethodnim formulama q i λ su zadani kao:

$$q = q - q_0, \text{ gdje su}$$

$$q_0 = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0} \right)^{\frac{e}{2}} \right) \text{ i } \varphi_0 = 44^\circ \text{ te}$$

$$\lambda = \lambda - \lambda_0, \text{ gdje je } \lambda_0 = 16^\circ.$$

Dakle, točka s koordinatama $\varphi_0 = 44^\circ$ i $\lambda_0 = 16^\circ$ preslikat će se u ishodište koordinatnog sustava u ravnini.

Preostaje još definirati smjer i orijentaciju koordinatnih osi u ravnini. Zadat će se da u ishodištu os y ima smjer tangente na sliku paralele. Zbog konformnosti tada će os x biti u smjeru tangente na sliku meridijana. Analitički taj se uvjet definira kao

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_0 = 0.$$

Orijentaciju zadajemo tako da koordinata y raste s λ u ishodištu, odnosno

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_0 > 0$$

Ravninske koordinate u takvim projekcijama dobiju se iz izraza:

$x = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^n C_j z^j\right)$ i $y = \operatorname{Im}\left(\sum_{j=1}^n C_j z^j\right)$, odnosno razdvajanjem funkcije na realni i imaginarni dio.

Linearno mjerilo preslikavanja dobije se iz općih izraza za mjerilo u konformnim projekcijama (Frančula 2004):

$$c = \frac{\sqrt{E}}{M} = \frac{\sqrt{G}}{N \cos \varphi}, \text{ gdje su } E \text{ i } G \text{ Gaussove veličine definirane kao:}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \text{ i } G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2.$$

Lako se primjeti da je računanje mjerila prema izrazu $c = \frac{\sqrt{G}}{N \cos \varphi}$ jednostavnije jer se izbjegava derivacija složene funkcije oblika $f(q(\varphi))$.

11.1. Optimalne konformne polinomne projekcije 1. stupnja

Konformna polinomna projekcija 1. stupnja zadana je formulom:

$$x + iy = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(q + i\lambda).$$

Rastavljanjem na realni i imaginarni dio dobiju se jednadžbe ravninskih koordinata:

$$x = a_0 + a_1 q - b_1 \lambda \text{ i } y = b_0 + b_1 q + a_1 \lambda.$$

Uvrstimo naprijed definirane uvjete $a_0 = b_0 = 0$, $\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_0 = 0$ i $\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_0 > 0$. Iz uvjeta

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_0 = 0 \text{ dobije se } \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_0 = -b_1 = 0, \text{ a uvjet } \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_0 > 0 \text{ bit će zadovoljen kada je}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_0 = a_1 > 0.$$

Konačne formule glase:

$$x = a_1 q \text{ i } y = a_1 \lambda.$$

Da bismo dobili izraz za mjerilo treba najprije izračunati parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0 \text{ i } \frac{\partial y}{\partial \lambda} = a_1. \text{ Gaussova veličina } G \text{ sada iznosi:}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 = a_1^2, \text{ a linearno mjerilo određuje se prema izrazu:}$$

$$c = \frac{\sqrt{G}}{N \cos \varphi} = \frac{a_1}{N \cos \varphi}.$$

Ovdje treba primjetiti da je tim izrazima zadana Mercatorova projekcija (vidi pog. 6) ako se uzme $a_1 = c_0 = N_0 \cos \varphi_0$. Zbog toga su razmatranja konformne polinomne projekcije 1. stupnja jednaka onima Mercatorove projekcije.

11.2. Optimalne konformne polinomne projekcije 2. stupnja

Konformna polinomna projekcija 2. stupnja zadana je formulama:

$$x + iy = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(q + i\lambda) + (a_2 + ib_2)(q + i\lambda)^2.$$

Nakon razvijanja i razdvajanja realnog i imaginarnog dijela jednadžbe dobije se:

$$x = a_0 - b_1 \lambda + a_1 q - a_2 \lambda^2 - 2b_2 \lambda q + a_2 q^2 \text{ i}$$

$$y = b_0 + a_1 \lambda + b_1 q - b_2 \lambda^2 + 2a_2 \lambda q + b_2 q^2.$$

$$\text{Iz uvjeta } \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)_0 = 0 \text{ dobije se } \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)_0 = -b_1 - 2a_2 \lambda - 2b_2 q = 0, \text{ odnosno ponovo } b_1 = 0$$

jer su u ishodištu $q = 0$ i $\lambda = 0$. Uvjet $\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)_0 > 0$ bit će zadovoljen kada je

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)_0 = a_1 - 2b_2 \lambda + 2a_2 q > 0, \text{ odnosno ponovo } a_1 > 0 \text{ zbog } q = 0 \text{ i } \lambda = 0. \text{ Ovi uvjeti bit će}$$

jednaki i za polinome viših stupnjeva jer njihove derivacije ne sadrže dodatne slobodne članove.

Konačne formule glase:

$$x = a_1 q - a_2 \lambda^2 - 2b_2 \lambda q + a_2 q^2 \text{ i}$$

$$y = a_1 \lambda - b_2 \lambda^2 + 2a_2 \lambda q + b_2 q^2.$$

Da bismo izračunali linearno mjerilo treba najprije izračunati parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -2a_2\lambda - 2b_2q \text{ i } \frac{\partial y}{\partial \lambda} = a_1 - 2b_2\lambda + 2a_2q.$$

Gaussova veličina G računa se po formuli:

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2, \text{ a linearno mjerilo određuje se prema izrazu:}$$

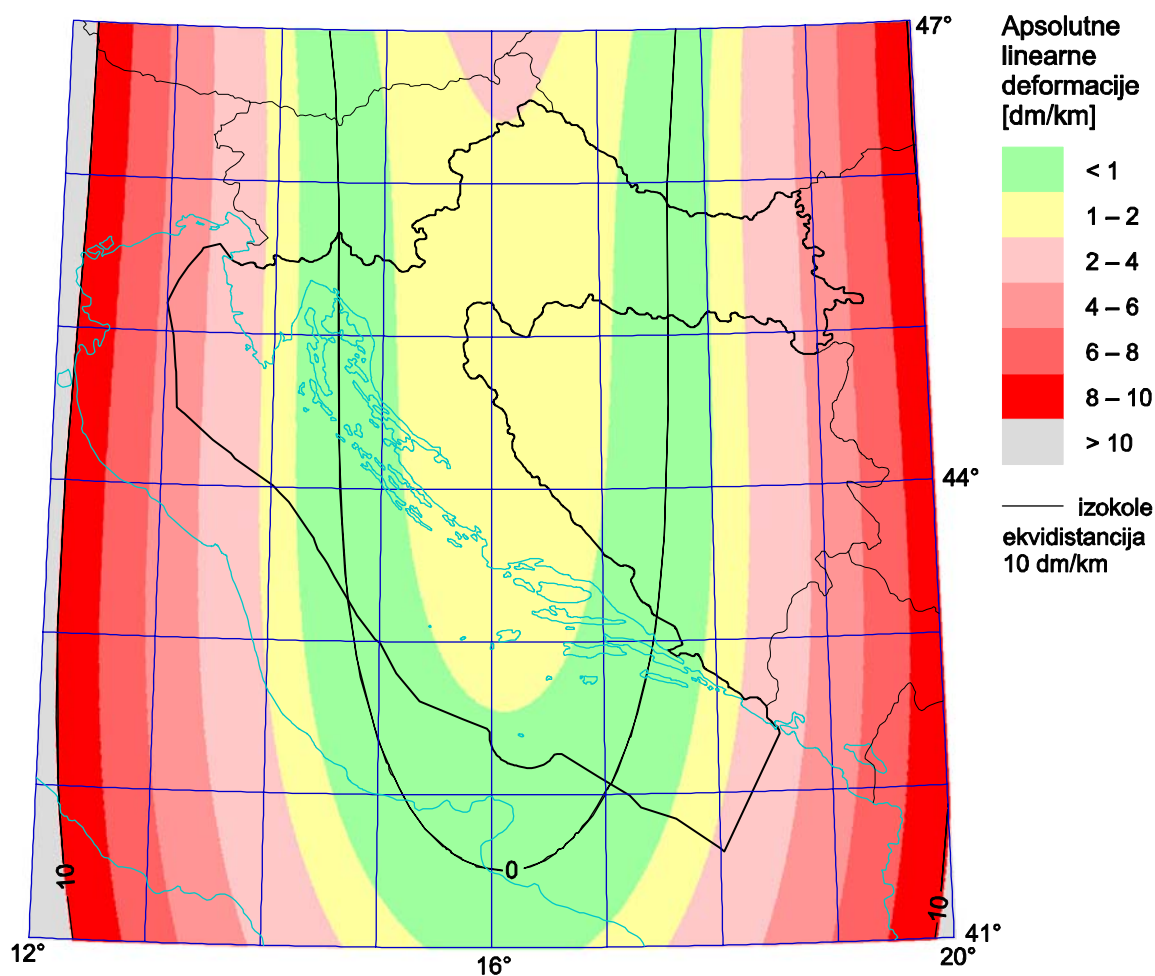
$$c = \frac{\sqrt{G}}{N \cos \varphi}.$$

11.2.1. Optimalna konformna polinomna projekcija 2. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju

Minimum po Airy/Jordanovu kriteriju za konformnu polinomnu projekciju 2. stupnja postiže se za vrijednosti koeficijenata (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59474 \times 10^6$, $a_2 = -1.59788 \times 10^6$ i $b_2 = 2.07707 \times 10^3$. Za te vrijednosti vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000176$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000680$. U tablici 11.1 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.1 prikazan je raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.1. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 2. stupnja za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija

Najmanja vrijednost Airy/Jordanova kriterija, $\min E$				$1.761938115 \times 10^{-4}$
Koeficijenti				
a_1	4.594739120×10^6			
a_2	-1.597877041×10^6	b_2	2.077066386×10^3	
Najveća apsolutna linearna deformacija, $d_{\max}$				$6.804724057 \times 10^{-4}$



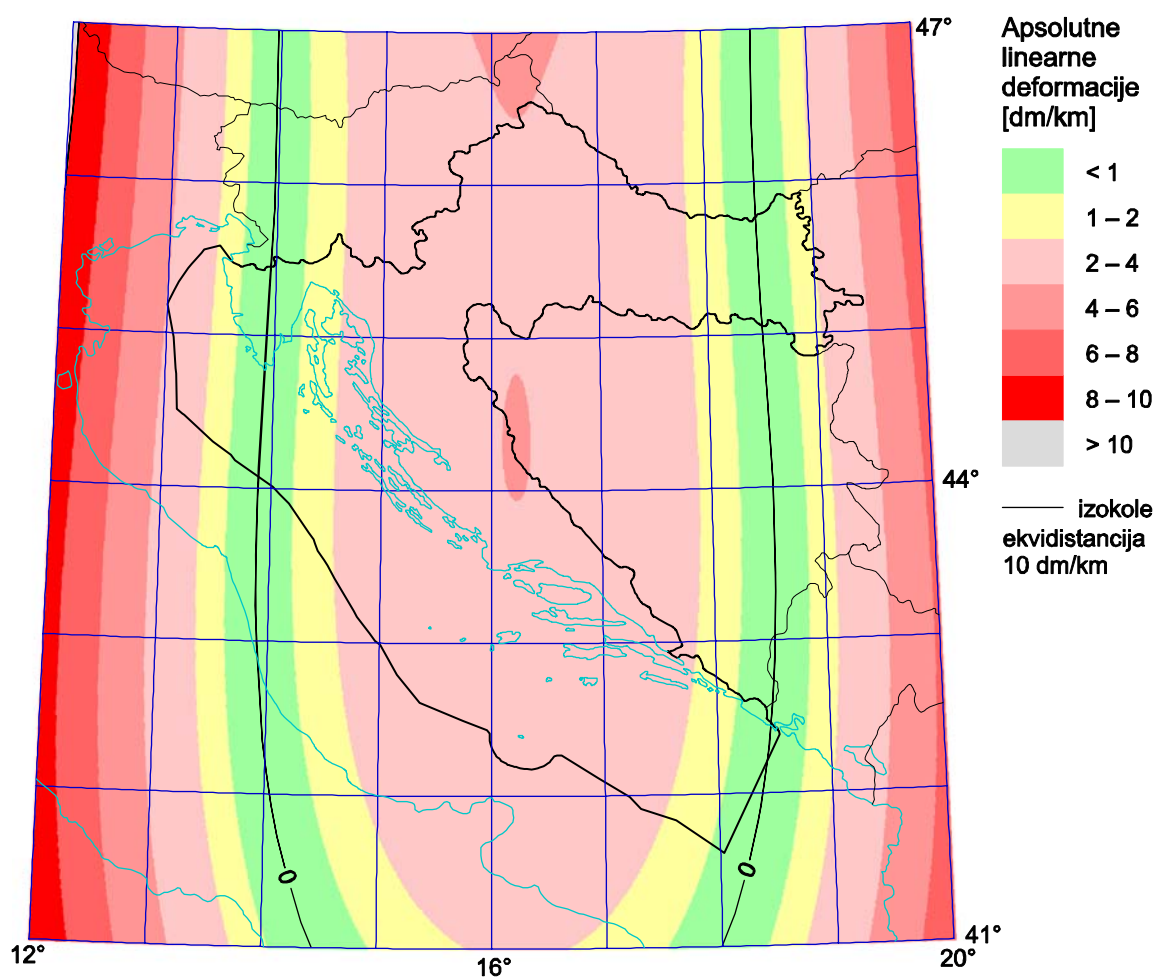
Slika 11.1. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 2. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. Koeficijenti $a_1 = 4.59474 \times 10^6$, $a_2 = -1.59788 \times 10^6$ i $b_2 = 2.07707 \times 10^3$

11.2.2. Optimalna konformna polinomna projekcija 2. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za konformnu polinomnu projekciju 2. stupnja postiže se za vrijednost koeficijenta (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59365 \times 10^6$, $a_2 = -1.59604 \times 10^6$ i $b_2 = 4.21594 \times 10^3$. Za te vrijednosti najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000402$, a vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000295$. U tablici 11.2 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.2 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.2. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 2. stupnja za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$			$4.021148825 \times 10^{-4}$
Koeficijenti			
a_1	4.593648335×10^6		
a_2	-1.596037724×10^6	b_2	4.215937581×10^3
Vrijednost Airy/Jordanova kriterija, E			$2.947943938 \times 10^{-4}$



Slika 11.2. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 2. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti

$$a_1 = 4.59365 \times 10^6, a_2 = -1.59604 \times 10^6 \text{ i } b_2 = 4.21594 \times 10^3$$

11.3. Optimalne konformne polinomne projekcije 3. stupnja

Konformna polinomna projekcija 3. stupnja zadana je formulom:

$$x + iy = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(q + i\lambda) + (a_2 + ib_2)(q + i\lambda)^2 + (a_3 + ib_3)(q + i\lambda)^3.$$

Raspisivanjem i rastavljanjem na realni i imaginarni dio dobiju se jednadžbe ravninskih koordinata, te uvođenjem zadanih uvjeta konačne formule za ravninske koordinate glase:

$$x = a_1 q - a_2 \lambda^2 - 2b_2 \lambda q + a_2 q^2 + b_3 \lambda^3 - 3a_3 \lambda^2 q - 3b_3 \lambda q^2 + a_3 q^3 \text{ i}$$

$$y = a_1 \lambda - b_2 \lambda^2 + 2a_2 \lambda q + b_2 q^2 - a_3 \lambda^3 - 3b_3 \lambda^2 q + 3a_3 \lambda q^2 + b_3 q^3.$$

Parcijalne derivacije potrebne za računanje linearnog mjerila glase:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -2a_2 \lambda - 2b_2 q + 3b_3 \lambda^2 - 6a_3 \lambda q - 3b_3 q^2 \text{ i}$$

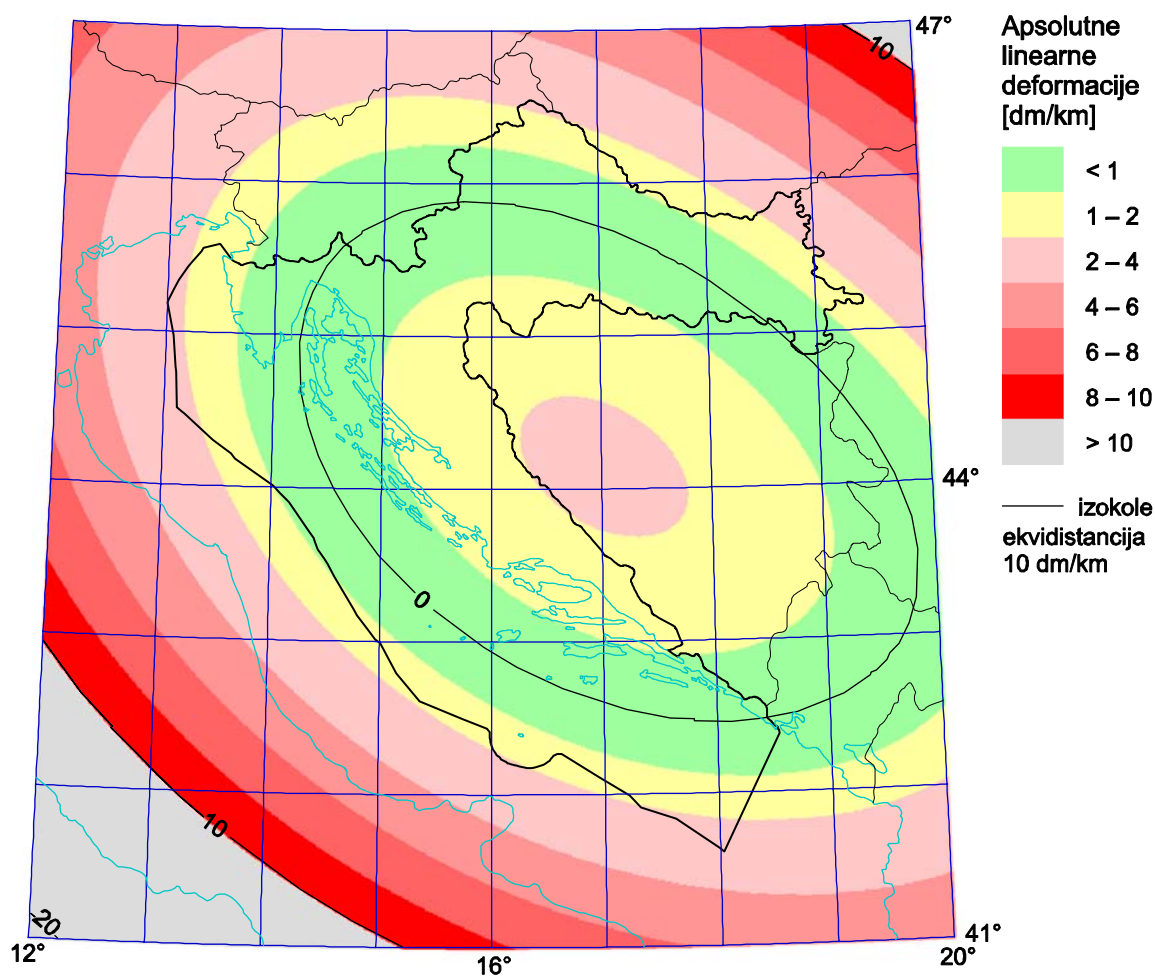
$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = a_1 - 2b_2 \lambda + 2a_2 q - 3a_3 \lambda^2 - 6b_3 \lambda q + 3a_3 q^2.$$

11.3.1. Optimalna konformna polinomna projekcija 3. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju

Minimum po Airy/Jordanovu kriteriju za konformnu polinomnu projekciju 3. stupnja postiže se za vrijednosti koeficijenata (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59468 \times 10^6$, $a_2 = -1.60251 \times 10^6$, $b_2 = 9.61478 \times 10^3$, $a_3 = 2.05344 \times 10^5$ i $b_3 = -8.14867 \times 10^4$. Za te vrijednosti vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000109$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000336$. U tablici 11.3 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.3 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.3. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 3. stupnja za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija

Najmanja vrijednost Airy/Jordanova kriterija, $\min E$				$1.089262082 \times 10^{-4}$
Koeficijenti				
a_1	4.594683272×10^6			
a_2	-1.602513790×10^6	b_2	9.614777197×10^3	
a_3	2.053440610×10^5	b_3	-8.148668558×10^5	
Najveća apsolutna linearna deformacija, $d_{\max}$				$3.363026671 \times 10^{-4}$



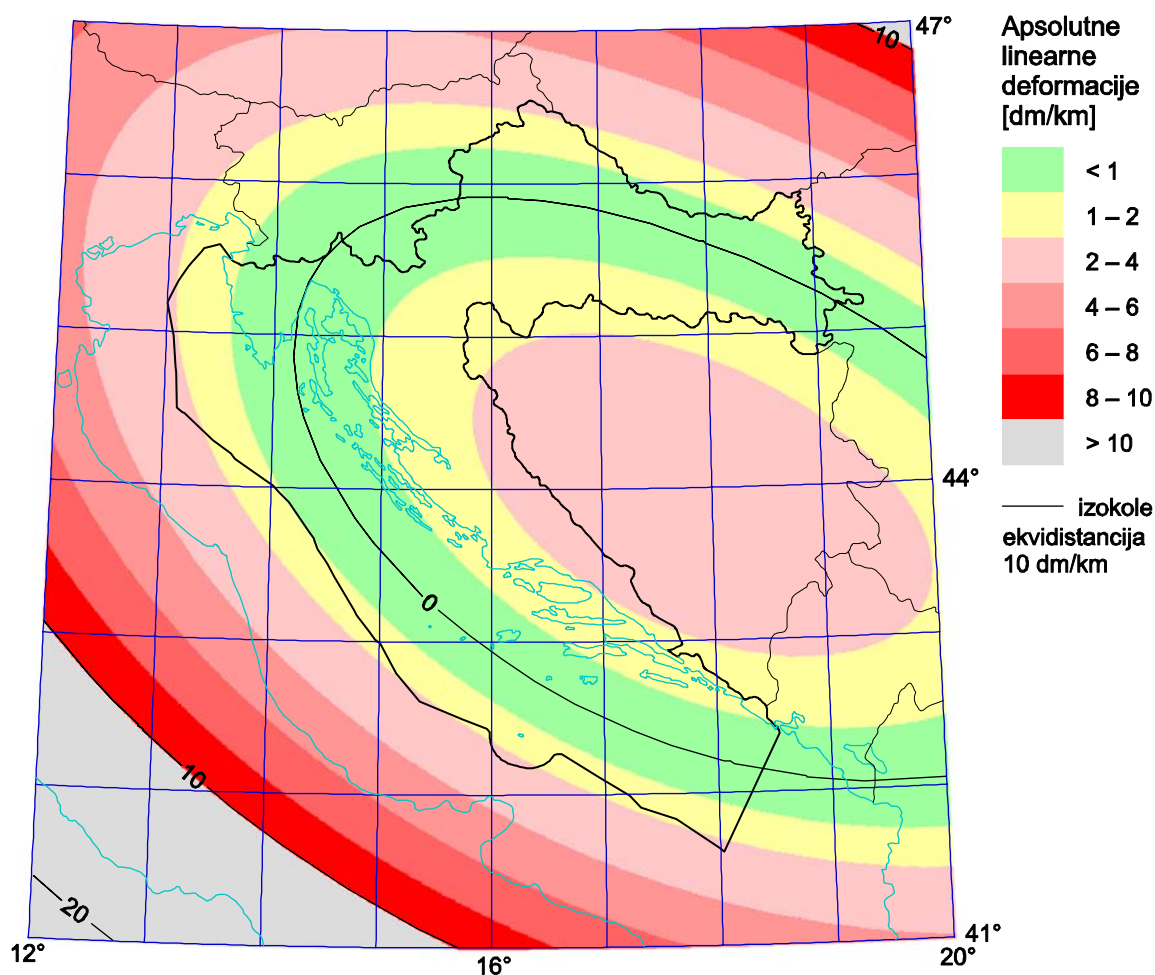
Slika 11.3. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 3. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. Koeficijenti $a_1 = 4.59468 \times 10^6$, $a_2 = -1.60251 \times 10^6$, $b_2 = 9.61478 \times 10^3$, $a_3 = 2.05344 \times 10^5$ i $b_3 = -8.14867 \times 10^4$

11.3.2. Optimalna konformna polinomna projekcija 3. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za konformnu polinomnu projekciju 3. stupnja postiže se za vrijednost koeficijenta (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59457 \times 10^6$, $a_2 = -1.60363 \times 10^6$, $b_2 = 1.31501 \times 10^4$, $a_3 = 2.31432 \times 10^5$ i $b_3 = -9.6598.9 \times 10^4$. Za te vrijednosti najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000245$, a vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000117$. U tablici 11.4 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.4 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.4. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 3. stupnja za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$			$2.445578134 \times 10^{-4}$
Koeficijenti			
a_1	4.594574161×10^6		
a_2	-1.603634591×10^6	b_2	1.315014427×10^4
a_3	2.314317428×10^5	b_3	-9.659892145×10^4
Vrijednost Airy/Jordanova kriterija, E			$1.163059028 \times 10^{-4}$



Slika 11.4. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 3. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti

$$a_1 = 4.59457 \times 10^6, \quad a_2 = -1.60363 \times 10^6, \quad b_2 = 1.31501 \times 10^4, \quad a_3 = 2.31432 \times 10^5 \text{ i} \\ b_3 = -9.6598.9 \times 10^4$$

11.4. Optimalne konformne polinomne projekcije 4. stupnja

Konformna polinomna projekcija 4. stupnja zadana je formulama:

$$x + iy = \sum_{j=0}^4 (a_j + ib_j)(q + i\lambda)^j.$$

Nakon raspisivanja, rastavljanja na realni i imaginarni dio i primjene početnih uvjeta formule za ravninske koordinate glase:

$$x = a_1 q - a_2 \lambda^2 - 2b_2 \lambda q + a_2 q^2 + b_3 \lambda^3 - 3a_3 \lambda^2 q - 3b_3 \lambda q^2 + a_3 q^3 + i \\ + a_4 \lambda^4 + 4b_4 \lambda^3 q - 6a_4 \lambda^2 q^2 - 4b_4 \lambda q^3 + a_4 q^4$$

$$y = a_1 \lambda - b_2 \lambda^2 + 2a_2 \lambda q + b_2 q^2 - a_3 \lambda^3 - 3b_3 \lambda^2 q + 3a_3 \lambda q^2 + b_3 q^3 + \\ + b_4 \lambda^4 - 4a_4 \lambda^3 q - 6b_4 \lambda^2 q^2 + 4a_4 \lambda q^3 + b_4 q^4.$$

Parcijalne derivacije potrebne za računanje linearnog mjerila glase:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -2a_2 \lambda - 2b_2 q + 3b_3 \lambda^2 - 6a_3 \lambda q - 3b_3 q^2 + 4a_4 \lambda^3 + 12b_4 \lambda^2 q - 12a_4 \lambda q^2 - 4b_4 q^3 \text{ i}$$

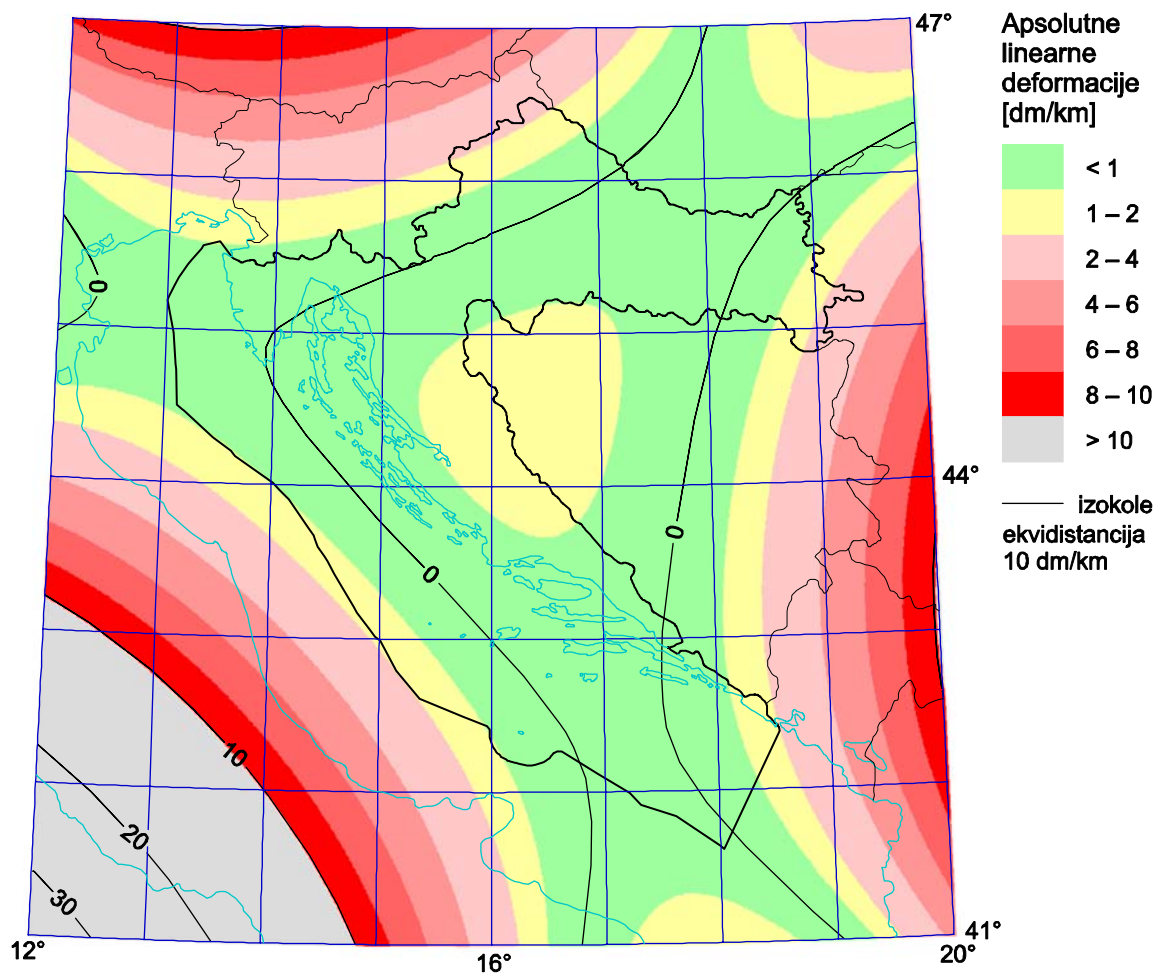
$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = a_1 - 2b_2 \lambda + 2a_2 q - 3a_3 \lambda^2 - 6b_3 \lambda q + 3a_3 q^2 + 4b_4 \lambda^3 - 12a_4 \lambda^2 q - 12b_4 \lambda q^2 + 4a_4 q^3.$$

11.4.1. Optimalna konformna polinomna projekcija 4. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju

Minimum po Airy/Jordanovu kriteriju za konformnu polinomnu projekciju 4. stupnja postiže se za vrijednosti koeficijenata (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59495 \times 10^6$, $a_2 = -1.60233 \times 10^6$, $b_2 = 4.97068 \times 10^3$, $a_3 = 1.30868 \times 10^5$, $b_3 = -8.45032 \times 10^4$, $a_4 = 1.19404 \times 10^6$ i $b_4 = 1.45752 \times 10^6$. Za te vrijednosti vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000076$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000327$. U tablici 11.5 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.5 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.5. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 4. stupnja za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija

Najmanja vrijednost Airy/Jordanova kriterija, $E_{\min}$			$7.605566019 \times 10^{-4}$
Koeficijenti			
a_1	4.594952256×10^6		
a_2	-1.602329871×10^6	b_2	4.970683053×10^3
a_3	1.308677274×10^5	b_3	-8.450319913×10^4
a_4	1.194041983×10^6	b_4	1.457516936×10^6
Najveća apsolutna linearna deformacija, $d_{\max}$			$3.279725331 \times 10^{-4}$



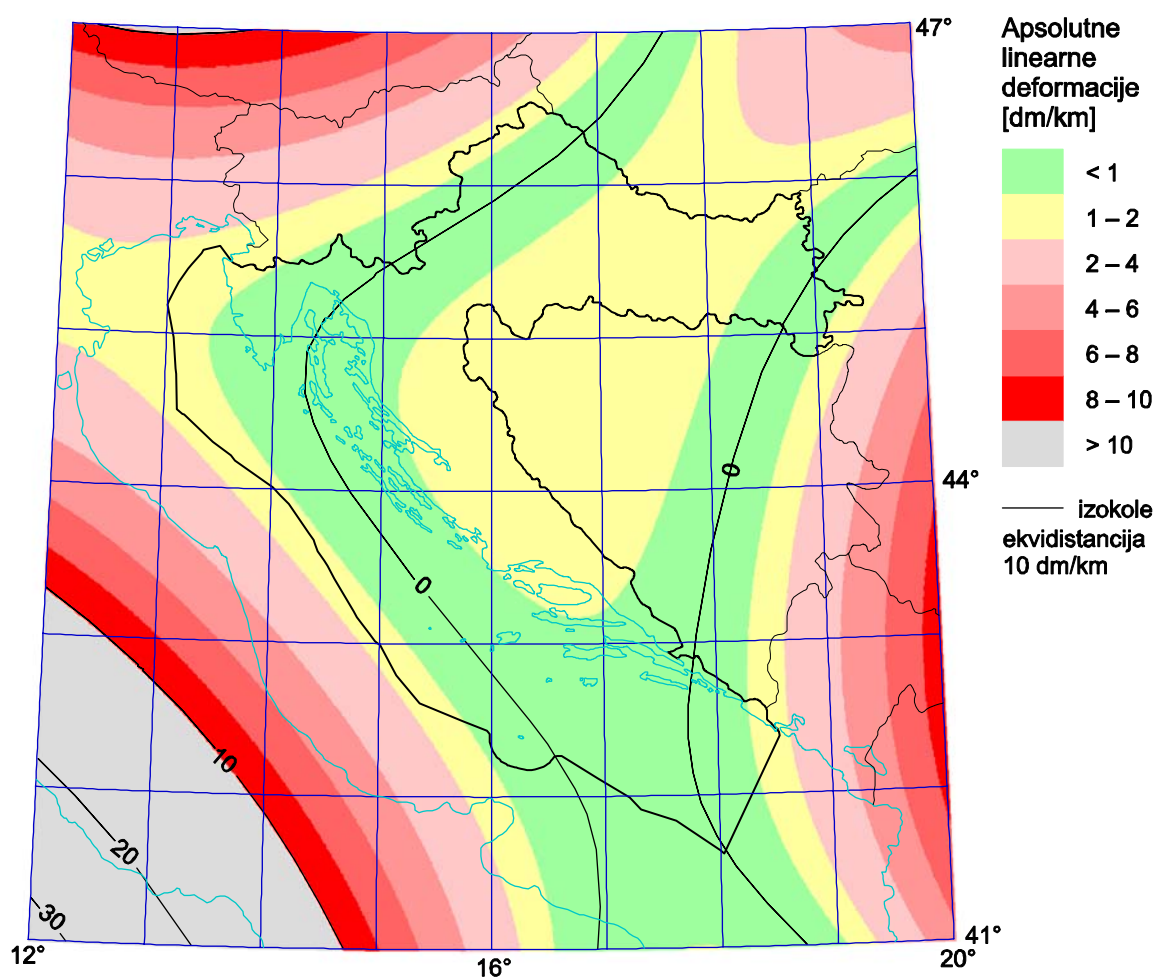
Slika 11.5. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 4. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. Koeficijenti $a_1 = 4.59495 \times 10^6$, $a_2 = -1.60233 \times 10^6$, $b_2 = 4.97068 \times 10^3$, $a_3 = 1.30868 \times 10^5$, $b_3 = -8.45032 \times 10^4$, $a_4 = 1.19404 \times 10^6$ i $b_4 = 1.45752 \times 10^6$

11.4.2. Optimalna konformna polinomna projekcija 4. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za konformnu polinomnu projekciju 4. stupnja postiže se za vrijednost koeficijenta (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59479 \times 10^6$, $a_2 = -1.60295 \times 10^6$, $b_2 = 8.12737 \times 10^3$, $a_3 = 1.23727 \times 10^5$, $b_3 = -6.30751 \times 10^4$, $a_4 = 1.08739 \times 10^6$ i $b_4 = 1.26497 \times 10^6$. Za te vrijednosti najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000178$, a vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000095$. U tablici 11.6 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.6 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.6. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 4. stupnja za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$			$1.781801680 \times 10^{-4}$
Koeficijenti			
a_1	4.594789543×10^6		
a_2	-1.602946528×10^6	b_2	8.127374021×10^3
a_3	1.237273800×10^5	b_3	-6.307514648×10^4
a_4	1.087386823×10^6	b_4	1.264966663×10^6
Vrijednost Airy/Jordanova kriterija, E			$9.539916279 \times 10^{-4}$



Slika 11.6. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 4. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti

$$a_1 = 4.59479 \times 10^6, \quad a_2 = -1.60295 \times 10^6, \quad b_2 = 8.12737 \times 10^3, \quad a_3 = 1.23727 \times 10^5, \\ b_3 = -6.30751 \times 10^4, \quad a_4 = 1.08739 \times 10^6 \text{ i } b_4 = 1.26497 \times 10^6$$

11.5. Optimalne konformne polinomne projekcije 5. stupnja

Konformna polinomna projekcija 5. stupnja zadana je formulama:

$$x + iy = \sum_{j=0}^5 (a_j + ib_j)(q + i\lambda)^j.$$

Nakon raspisivanja, rastavljanja na realni i imaginarni dio i primjene početnih uvjeta formule za ravninske koordinate glase:

$$x = a_1 q - a_2 \lambda^2 - 2b_2 \lambda q + a_2 q^2 + b_3 \lambda^3 - 3a_3 \lambda^2 q - 3b_3 \lambda q^2 + a_3 q^3 + \\ + a_4 \lambda^4 + 4b_4 \lambda^3 q - 6a_4 \lambda^2 q^2 - 4b_4 \lambda q^3 + a_4 q^4 + \\ - b_5 \lambda^5 + 5a_5 \lambda^4 q + 10b_5 \lambda^3 q^2 - 10a_5 \lambda^2 q^3 - 5b_5 \lambda q^4 + a_5 q^5$$

$$y = a_1\lambda - b_2\lambda^2 + 2a_2\lambda q + b_2q^2 - a_3\lambda^3 - 3b_3\lambda^2q + 3a_3\lambda q^2 + b_3q^3 + \\ + b_4\lambda^4 - 4a_4\lambda^3q - 6b_4\lambda^2q^2 + 4a_4\lambda q^3 + b_4q^4 + \\ + a_5\lambda^5 + 5b_5\lambda^4q - 10a_5\lambda^3q^2 - 10b_5\lambda^2q^3 + 5a_5\lambda q^4 + b_5q^5$$

Parcijalne derivacije potrebne za računanje linearnog mjerila glase:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -2a_2\lambda - 2b_2q + 3b_3\lambda^2 - 6a_3\lambda q - 3b_3q^2 + 4a_4\lambda^3 + 12b_4\lambda^2q - 12a_4\lambda q^2 - 4b_4q^3 - \\ - 5b_5\lambda^4 + 20a_5\lambda^3q + 30b_5\lambda^2q^2 - 20a_5\lambda q^3 - 5b_5q^4$$

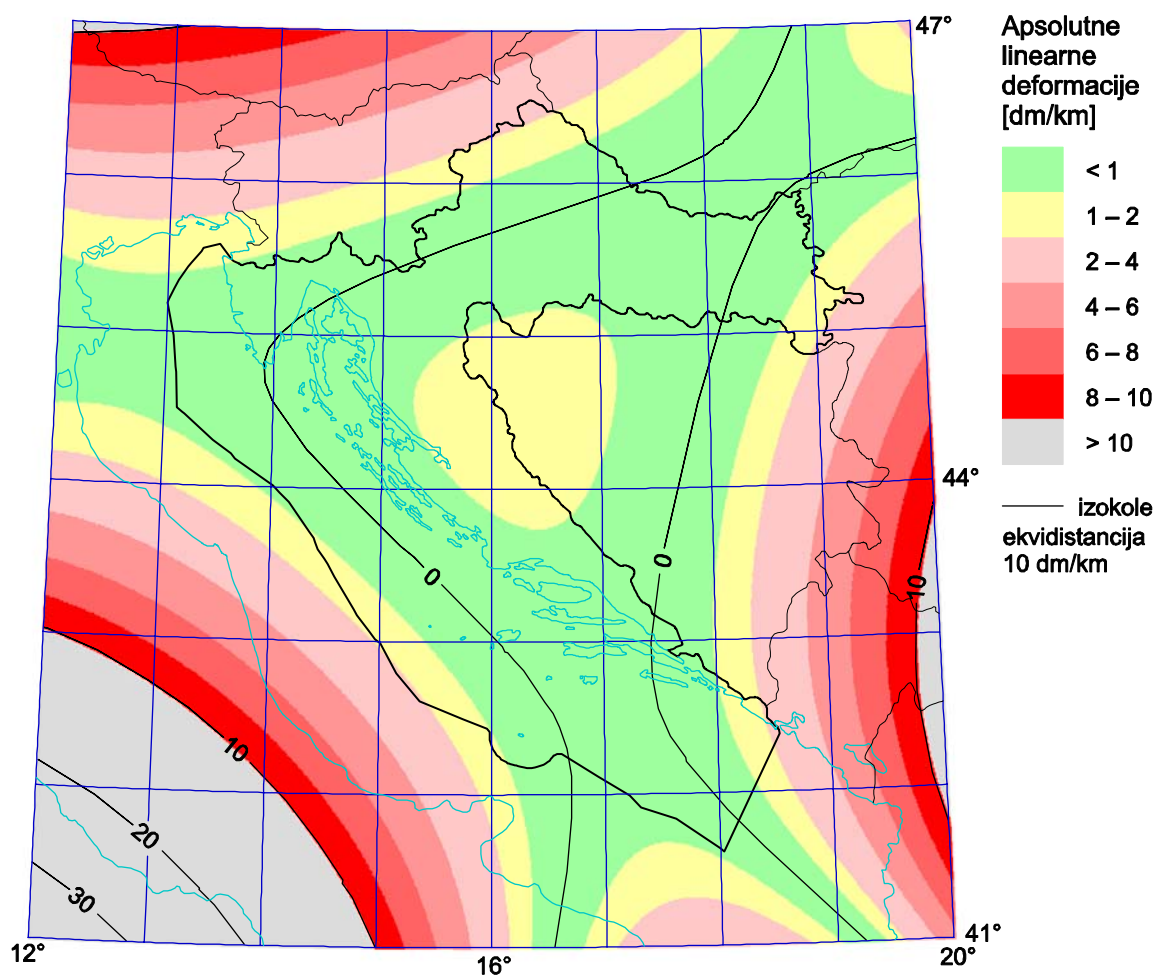
$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = a_1 - 2b_2\lambda + 2a_2q - 3a_3\lambda^2 - 6b_3\lambda q + 3a_3q^2 + 4b_4\lambda^3 - 12a_4\lambda^2q - 12b_4\lambda q^2 + 4a_4q^3 + \\ + 5a_5\lambda^4 + 20b_5\lambda^3q - 30a_5\lambda^2q^2 - 20b_5\lambda q^3 + 5a_5q^4$$

11.5.1. Optimalna konformna polinomna projekcija 5. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju

Minimum po Airy/Jordanovu kriteriju za konformnu polinomnu projekciju 5. stupnja postiže se za vrijednosti koeficijenata (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59496 \times 10^6$, $a_2 = -1.60273 \times 10^6$, $b_2 = 4.37379 \times 10^3$, $a_3 = 1.34363 \times 10^5$, $b_3 = -8.50200 \times 10^4$, $a_4 = 1.18477 \times 10^6$, $b_4 = 1.59488 \times 10^6$, $a_5 = -1.67331 \times 10^6$ i $b_5 = -3.81873 \times 10^6$. Za te vrijednosti vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000075$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000272$. U tablici 11.7 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.7 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.7. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 5. stupnja za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija

Najmanja vrijednost Airy/Jordanova kriterija, min E				$7.520523702 \times 10^{-5}$
Koeficijenti				
a_1	4.594959410×10^6			
a_2	-1.602732691×10^6	b_2	4.373791245×10^3	
a_3	1.343626142×10^5	b_3	-8.502000276×10^4	
a_4	1.184766790×10^6	b_4	1.594875532×10^6	
a_5	-1.673309956×10^6	b_5	-3.818732734×10^6	
Najveća apsolutna linearna deformacija, $d_{\max}$				$2.714911703 \times 10^{-4}$



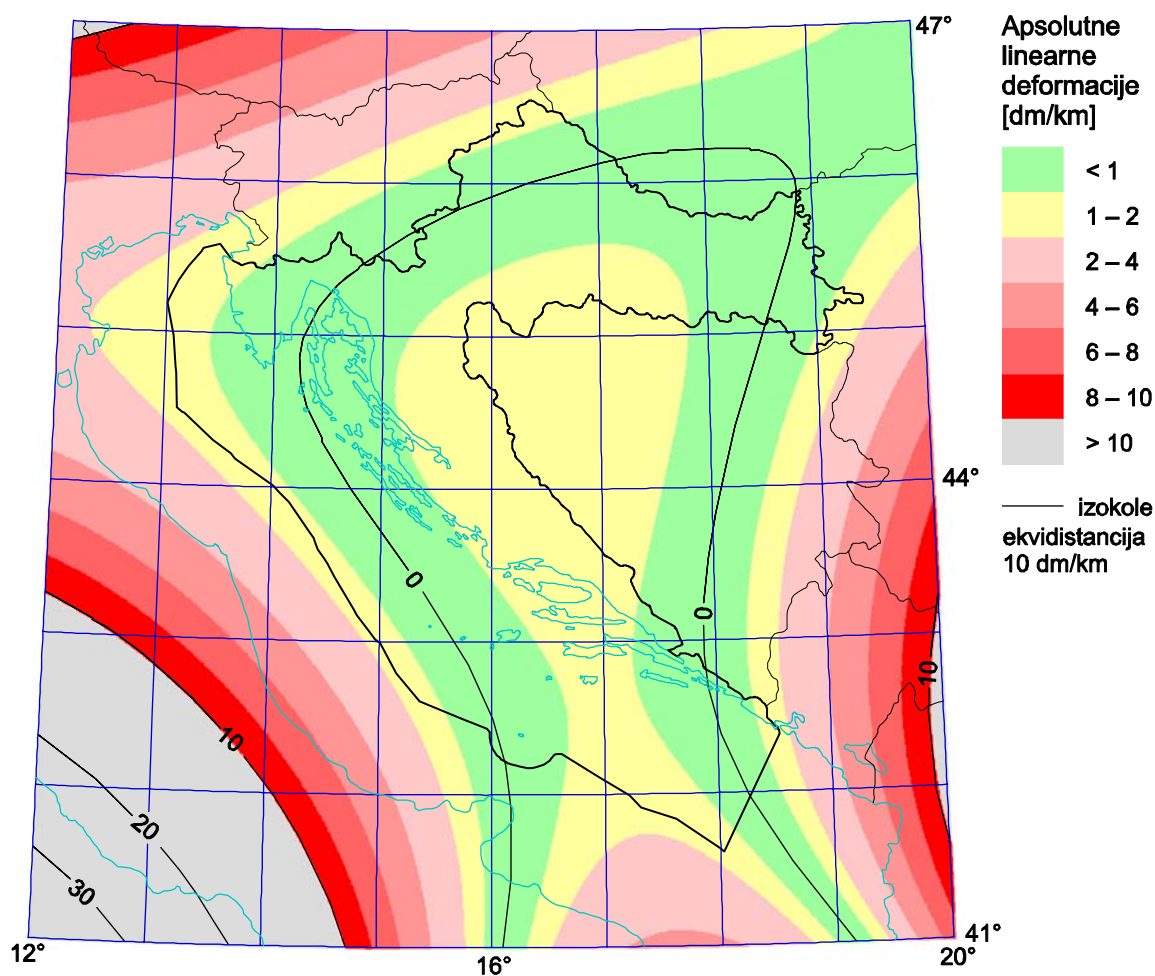
Slika 11.7. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 5. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. Koeficijenti $a_1 = 4.59496 \times 10^6$, $a_2 = -1.60273 \times 10^6$, $b_2 = 4.37379 \times 10^3$, $a_3 = 1.34363 \times 10^5$, $b_3 = -8.50200 \times 10^4$, $a_4 = 1.18477 \times 10^6$, $b_4 = 1.59488 \times 10^6$, $a_5 = -1.67331 \times 10^6$ i $b_5 = -3.81873 \times 10^6$

11.5.2. Optimalna konformna polinomna projekcija 5. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za konformnu polinomnu projekciju 5. stupnja postiže se za vrijednost koeficijenta (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59478 \times 10^6$, $a_2 = -1.60171 \times 10^6$, $b_2 = 8.07938 \times 10^3$, $a_3 = 1.04915 \times 10^5$, $b_3 = -9.18204 \times 10^4$, $a_4 = 1.27829 \times 10^6$, $b_4 = 1.32636 \times 10^6$, $a_5 = -3.44667 \times 10^6$ i $b_5 = -3.93009 \times 10^6$. Za te vrijednosti najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000177$, a vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000094$. U tablici 11.8 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.8 prikazan je raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.8. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 5. stupnja za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$			$1.755315422 \times 10^{-4}$
Koeficijenti			
a_1	4.594775815×10^6	b_1	
a_2	-1.601712613×10^6	b_2	8.079378703×10^3
a_3	1.049151923×10^5	b_3	-9.182038466×10^4
a_4	1.278292137×10^6	b_4	1.326357965×10^6
a_5	-3.446668338×10^6	b_5	-3.930086375×10^6
Vrijednost Airy/Jordanova kriterija, E			$9.452320587 \times 10^{-5}$



Slika 11.8. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 5. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti

$$a_1 = 4.59478 \times 10^6, \quad a_2 = -1.60171 \times 10^6, \quad b_2 = 8.07938 \times 10^3, \quad a_3 = 1.04915 \times 10^5, \\ b_3 = -9.18204 \times 10^4, \quad a_4 = 1.27829 \times 10^6, \quad b_4 = 1.32636 \times 10^6, \quad a_5 = -3.44667 \times 10^6, \quad i \\ b_5 = -3.93009 \times 10^6$$

11.6. Optimalne konformne polinomne projekcije 6. stupnja

Konformna polinomna projekcija 6. stupnja zadana je formulama:

$$x + iy = \sum_{j=0}^6 (a_j + ib_j)(q + i\lambda)^j.$$

Nakon raspisivanja, rastavljanja na realni i imaginarni dio i primjene početnih uvjeta formule za ravninske koordinate glase:

$$\begin{aligned}
x = & a_1q - a_2\lambda^2 - 2b_2\lambda q + a_2q^2 + b_3\lambda^3 - 3a_3\lambda^2q - 3b_3\lambda q^2 + a_3q^3 + \\
& + a_4\lambda^4 + 4b_4\lambda^3q - 6a_4\lambda^2q^2 - 4b_4\lambda q^3 + a_4q^4 + \\
& - b_5\lambda^5 + 5a_5\lambda^4q + 10b_5\lambda^3q^2 - 10a_5\lambda^2q^3 - 5b_5\lambda q^4 + a_5q^5 - \\
& - a_6\lambda^6 - 6b_6\lambda^5q + 15a_6\lambda^4q^2 + 20b_6\lambda^3q^3 - 15a_6\lambda^2q^4 - 6b_6\lambda q^5 + a_6q^6
\end{aligned} \quad i$$

$$\begin{aligned}
y = & a_1\lambda - b_2\lambda^2 + 2a_2\lambda q + b_2q^2 - a_3\lambda^3 - 3b_3\lambda^2q + 3a_3\lambda q^2 + b_3q^3 + \\
& + b_4\lambda^4 - 4a_4\lambda^3q - 6b_4\lambda^2q^2 + 4a_4\lambda q^3 + b_4q^4 + \\
& + a_5\lambda^5 + 5b_5\lambda^4q - 10a_5\lambda^3q^2 - 10b_5\lambda^2q^3 + 5a_5\lambda q^4 + b_5q^5 - \\
& - b_6\lambda^6 + 6a_6\lambda^5q + 15b_6\lambda^4q^2 - 20a_6\lambda^3q^3 - 15b_6\lambda^2q^4 + 6a_6\lambda q^5 + b_6q^6
\end{aligned}$$

Parcijalne derivacije potrebne za računanje linearnog mjerila glase:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \lambda} = & -2a_2\lambda - 2b_2q + 3b_3\lambda^2 - 6a_3\lambda q - 3b_3q^2 + 4a_4\lambda^3 + 12b_4\lambda^2q - 12a_4\lambda q^2 - 4b_4q^3 - \\
& - 5b_5\lambda^4 + 20a_5\lambda^3q + 30b_5\lambda^2q^2 - 20a_5\lambda q^3 - 5b_5q^4 - \\
& - 6a_6\lambda^5 - 30b_6\lambda^4q + 60a_6\lambda^3q^2 + 60b_6\lambda^2q^3 - 30a_6\lambda q^4 - 6b_6q^5
\end{aligned} \quad i$$

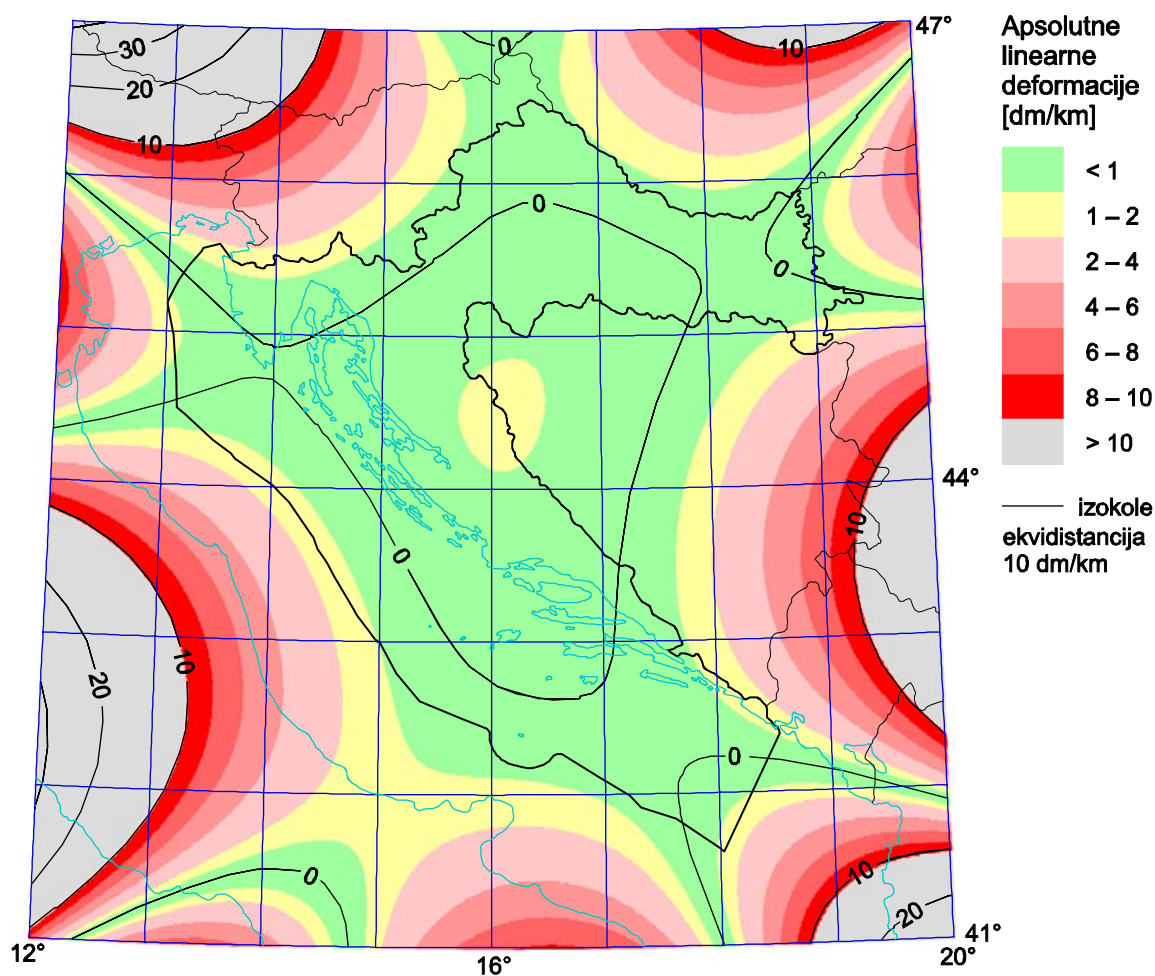
$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial \lambda} = & a_1 - 2b_2\lambda + 2a_2q - 3a_3\lambda^2 - 6b_3\lambda q + 3a_3q^2 + 4b_4\lambda^3 - 12a_4\lambda^2q - 12b_4\lambda q^2 + 4a_4q^3 + \\
& + 5a_5\lambda^4 + 20b_5\lambda^3q - 30a_5\lambda^2q^2 - 20b_5\lambda q^3 + 5a_5q^4 - \\
& - 6b_6\lambda^5 + 30a_6\lambda^4q + 60b_6\lambda^3q^2 - 60a_6\lambda^2q^3 - 30b_6\lambda q^4 + 6a_6q^5
\end{aligned}$$

11.6.1. Optimalna konformna polinomna projekcija 6. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju

Minimum po Airy/Jordanovu kriteriju za konformnu polinomnu projekciju 6. stupnja postiže se za vrijednosti koeficijenata (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59504 \times 10^6$, $a_2 = -1.60038 \times 10^6$, $b_2 = 1.76780 \times 10^3$, $a_3 = 6.19324 \times 10^4$, $b_3 = -4.51810 \times 10^4$, $a_4 = 1.53766 \times 10^6$, $b_4 = 9.41033 \times 10^5$, $a_5 = 7.17668 \times 10^6$, $b_5 = 1.04285 \times 10^7$, $a_6 = -2.76147 \times 10^8$ i $b_6 = -1.33392 \times 10^8$. Za te vrijednosti vrijednost Airy/Jordanova kriterija iznosi $E = 0.000058$, a najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000231$. U tablici 11.9 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.9 prikazan je raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.9. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja za koju se postiže minimum Airy/Jordanova kriterija

Najmanja vrijednost Airy/Jordanova kriterija, $\min E$			$5.766825318 \times 10^{-5}$
Koeficijenti			
a_1	4.595040908×10^6		
a_2	-1.600377190×10^6	b_2	1.767796596×10^3
a_3	6.193235884×10^4	b_3	-4.518101074×10^4
a_4	1.537661720×10^6	b_4	9.410328394×10^5
a_5	7.176679177×10^7	b_5	1.042849125×10^7
a_6	-2.761470798×10^8	b_6	-1.333917938×10^8
Najveća apsolutna linearna deformacija, $d_{\max}$			$2.315531654 \times 10^{-4}$



Slika 11.9. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. Koeficijenti $a_1 = 4.59504 \times 10^6$, $a_2 = -1.60038 \times 10^6$,

$$b_2 = 1.76780 \times 10^3, \quad a_3 = 6.19324 \times 10^4, \quad b_3 = -4.51810 \times 10^4, \quad a_4 = 1.53766 \times 10^6,$$

$$b_4 = 9.41033 \times 10^5, \quad a_5 = 7.17668 \times 10^6, \quad b_5 = 1.04285 \times 10^7, \quad a_6 = -2.76147 \times 10^8 \text{ i}$$

$$b_6 = -1.33392 \times 10^8$$

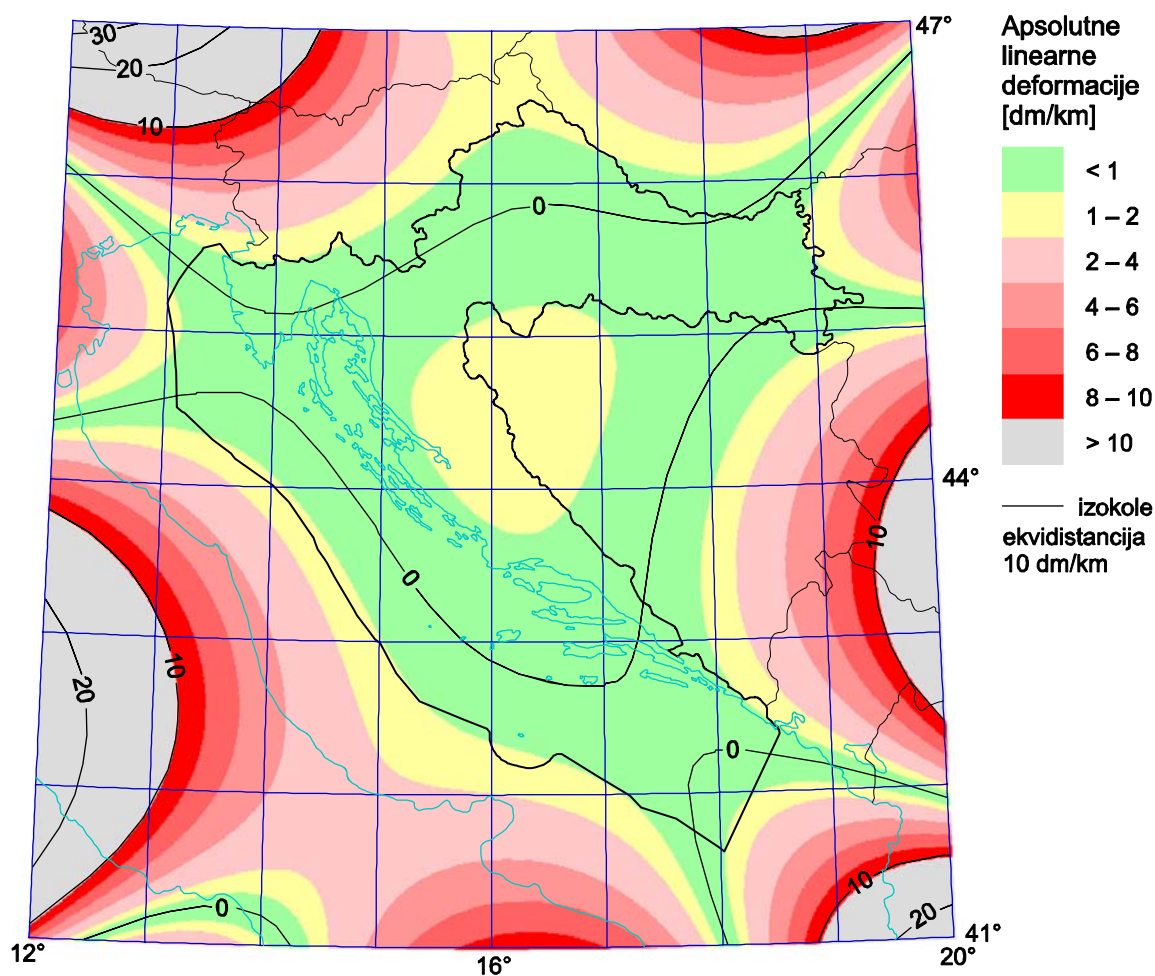
11.6.2. Optimalna konformna polinomna projekcija 6. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za konformnu polinomnu projekciju 6. stupnja postiže se za vrijednosti koeficijenta (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59494 \times 10^6$, $a_2 = -1.60169 \times 10^6$, $b_2 = 3.22059 \times 10^3$, $a_3 = 1.00654 \times 10^5$, $b_3 = -5.00156 \times 10^4$, $a_4 = 1.33864 \times 10^6$, $b_4 = 8.44430 \times 10^5$, $a_5 = 8.39268 \times 10^6$, $b_5 = 8.08407 \times 10^6$, $a_6 = -2.40452 \times 10^8$ i $b_6 = -1.06635 \times 10^8$. Za te vrijednosti najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000137$, a vrijednost Airy/Jordanova kriterija

iznosi $E = 0.000064$. U tablici 11.10 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.10 prikazan je raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.10. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$				$1.356577146 \times 10^{-4}$
Koeficijenti				
a_1	4.594935340×10^6	b_1		
a_2	-1.601690575×10^6	b_2	3.220591587×10^3	
a_3	1.006537870×10^5	b_3	-5.001557173×10^4	
a_4	1.338635850×10^6	b_4	8.444301568×10^5	
a_5	8.392676430×10^6	b_5	8.084066738×10^6	
a_6	-2.404518456×10^8	b_6	-1.066353728×10^8	
Vrijednost Airy/Jordanova kriterija, E				$6.411598672 \times 10^{-5}$



Slika 11.10. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti

$$a_1 = 4.59494 \times 10^6, \quad a_2 = -1.60169 \times 10^6, \quad b_2 = 3.22059 \times 10^3, \quad a_3 = 1.00654 \times 10^5, \\ b_3 = -5.00156 \times 10^4, \quad a_4 = 1.33864 \times 10^6, \quad b_4 = 8.44430 \times 10^5, \quad a_5 = 8.39268 \times 10^6, \\ b_5 = 8.08407 \times 10^6, \quad a_6 = -2.40452 \times 10^8 \text{ i } b_6 = -1.06635 \times 10^8$$

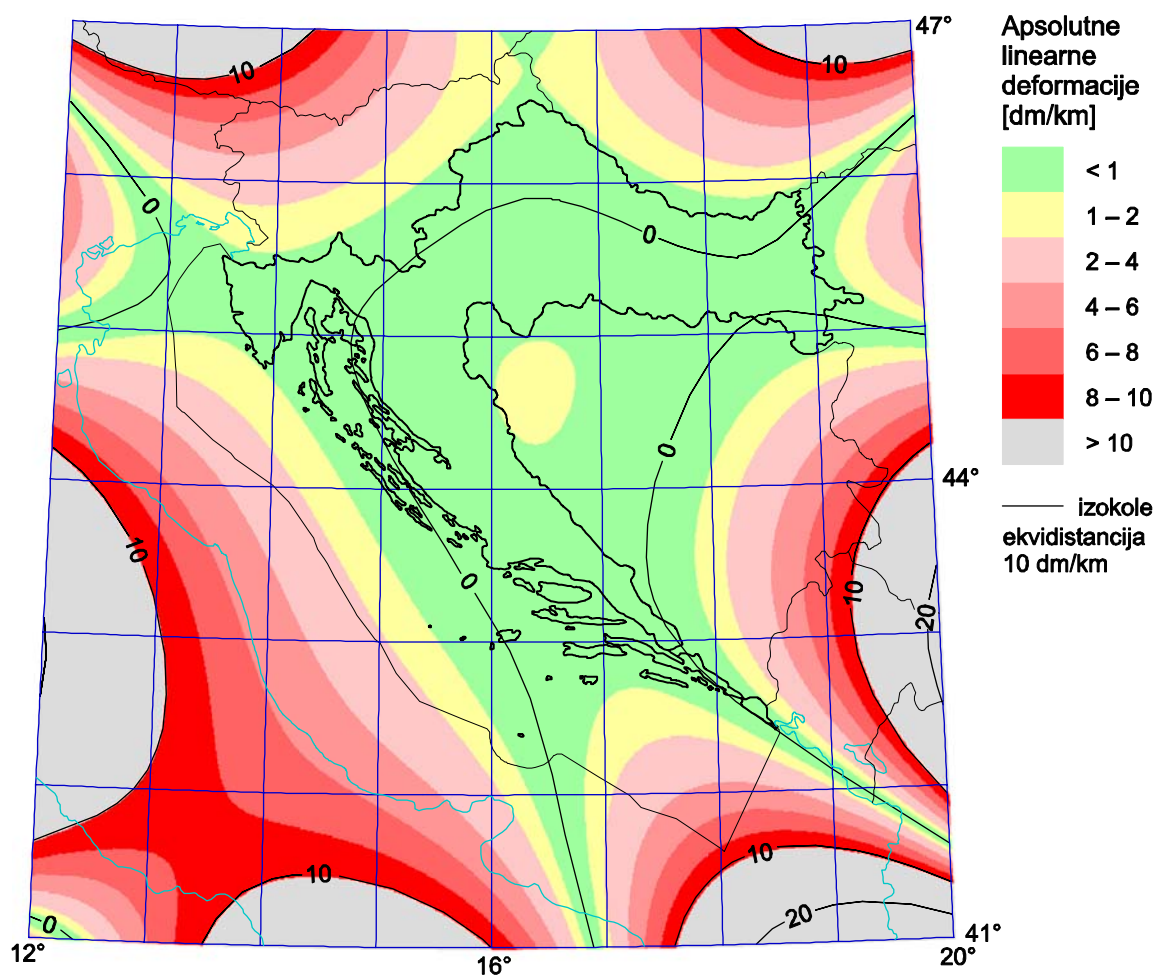
11.6.3. Optimalna konformna polinomna projekcija 6. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije za kopneno područje Hrvatske

Uzme li se kao područje od interesa samo kopneno područje Hrvatske tada je moguće čitavo to područje u konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja preslikati s linearnim deformacijama koje su gotovo na čitavom takvom području manje od 0.0001. Dakle takva projekcija u jednom koordinatnom sustavu zadovoljava kriterij maksimalne apsolutne linearne deformacije koji je Gauss-Krügerova projekcija zadovoljavala u dva koordinatna sustava (zone).

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija za konformnu polinomnu projekciju 6. stupnja kopnenog područja Hrvatske postiže se za vrijednosti koeficijenta (zaokruženih na 6 značajnih znamenaka) $a_1 = 4.59513 \times 10^6$, $a_2 = -1.60219 \times 10^6$, $b_2 = 7.61258 \times 10^3$, $a_3 = 6.08740 \times 10^4$, $b_3 = -9.90294 \times 10^4$, $a_4 = 1.22968 \times 10^6$, $b_4 = 1.36948 \times 10^6$, $a_5 = 1.32256 \times 10^7$, $b_5 = -8.88260 \times 10^6$, $a_6 = -2.46185 \times 10^8$ i $b_6 = 5.87950 \times 10^7$. Za te vrijednosti najveća apsolutna linearna deformacija iznosi $d_{\max} = 0.000102$. U tablici 11.11 ispisane su dobivene vrijednosti na 10 značajnih znamenaka, a na slici 11.11 prikazani su raspored i veličina deformacija.

Tablica 11.11. Vrijednosti kriterija i koeficijenata u konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja samo kopnenog područja Hrvatske za koju se postiže najmanja najveća apsolutna linearna deformacija

Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija, $\min d_{\max}$			$1.018987684 \times 10^{-4}$
Koeficijenti			
a_1	4.595132048×10^6		
a_2	-1.602191143×10^6	b_2	7.612577055×10^3
a_3	6.087398813×10^4	b_3	-9.902941023×10^4
a_4	1.229680494×10^6	b_4	1.369480748×10^6
a_5	1.322555779×10^6	b_5	-8.882603406×10^6
a_6	-2.461846663×10^8	b_6	5.879500823×10^7



Slika 11.11. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 6. stupnja samo kopnenog područja Hrvatske po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Koeficijenti $a_1 = 4.59513 \times 10^6$, $a_2 = -1.60219 \times 10^6$, $b_2 = 7.61258 \times 10^3$, $a_3 = 6.08740 \times 10^4$, $b_3 = -9.90294 \times 10^4$, $a_4 = 1.22968 \times 10^6$, $b_4 = 1.36948 \times 10^6$, $a_5 = 1.32256 \times 10^7$, $b_5 = -8.88260 \times 10^6$, $a_6 = -2.46185 \times 10^8$ i $b_6 = 5.87950 \times 10^7$

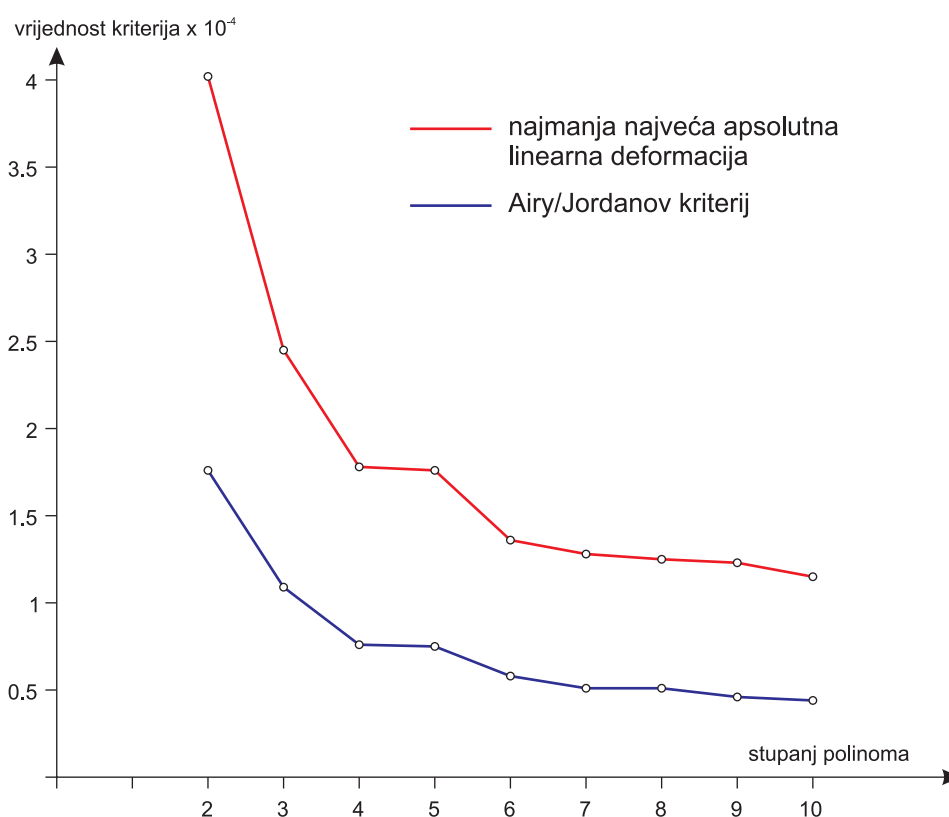
11.7. Optimalne konformne polinomne projekcije od 7. do 10. stupnja

Na isti način kao i za konformne polinomne projekcije do 6. stupnja izračunane su optimalne konformne polinomne projekcije od 7. do 10. stupnja. U tablici 11.12 prikazane su dobivene minimalne vrijednosti kriterija.

Tablica 11.12. Najmanje vrijednosti kriterija za polinomne projekcije od 7. do 10. stupnja.

Stupanj konformne polinomne projekcije	Najmanja dobivena vrijednost Airy/Jordanova kriterija	Najmanja najveća apsolutna linearna deformacija
7.	0.000051	0.000128
8.	0.000051	0.000125
9.	0.000046	0.000123
10.	0.000044	0.000115

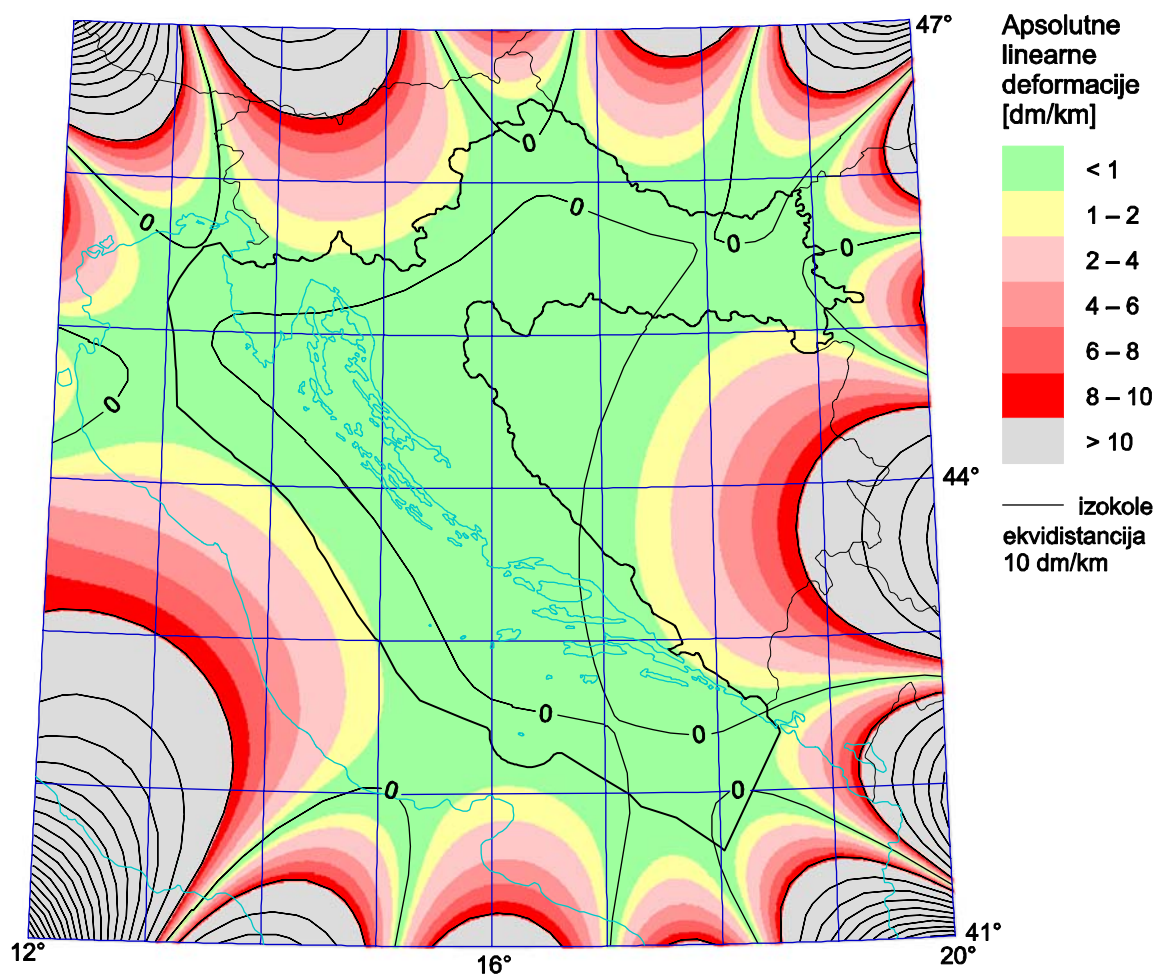
Kako se vidi daljnjim povećanjem stupnja polinoma dobivaju se još manje vrijednosti za kriterije, ali je promjena manja. Na slici 11.12 prikazan je trend vrijednosti kriterija u odnosu na stupanj polinoma (od drugog do desetog). Kako se vidi sa slike 11.12. vrijednosti kriterija brzo se smanjuju do 4. stupnja, a zatim se još jedan skok uočava s petog na šesti stupanj.



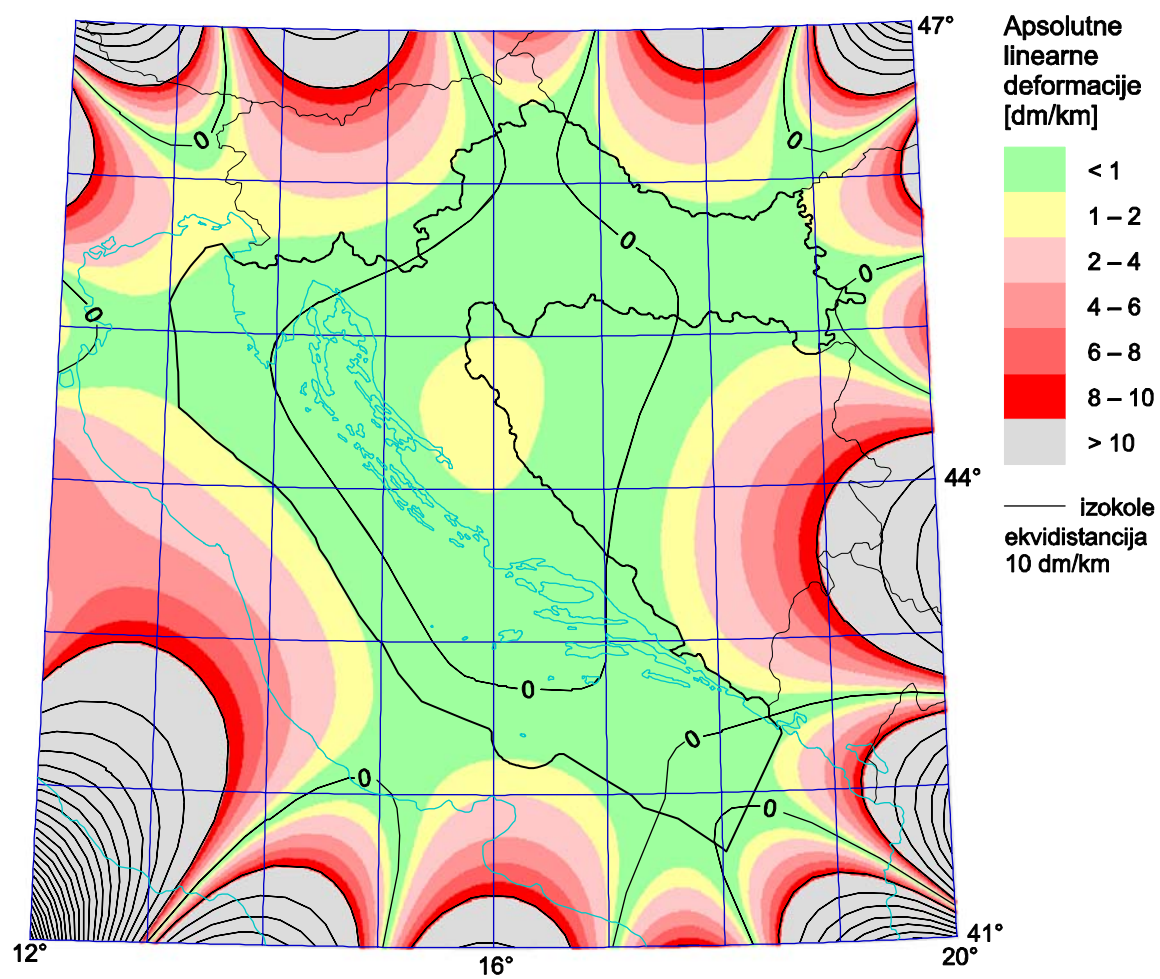
Slika 11.12. Vrijednost kriterija u odnosu na stupanj konformne polinomne projekcije

Radi ilustracije daju se i karte rasporeda i veličine deformacija u konformnoj polinomnoj projekciji 10. stupnja i to po oba kriterija. Daje se i varijanta za kopno po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Vrijednosti koeficijenata za konformne polinomne projekcije od 7. do 10. stupnja priložene su na CD-u koji je sastavni dio ovog rada. Na temelju rasporeda i veličine deformacija na ovim posljednjim slikama može se pokušati donijeti i procjena o najmanjim mogućim linearnim deformacijama u konformnim projekcijama za Hrvatsku. Naime, kako se vidi sa slika 11.13 i 11.14 za područje Hrvatske s epikontinentalnim pojasom teško je očekivati projekciju koja bi imala deformacije manje od 0.0001, odnosno ta je deformacija po svoj prilici vjerojatno i granična. Naravno, to je samo procjena. Za kopneno područje procjena za najmanje deformacije mogla bi biti oko 0.00008.

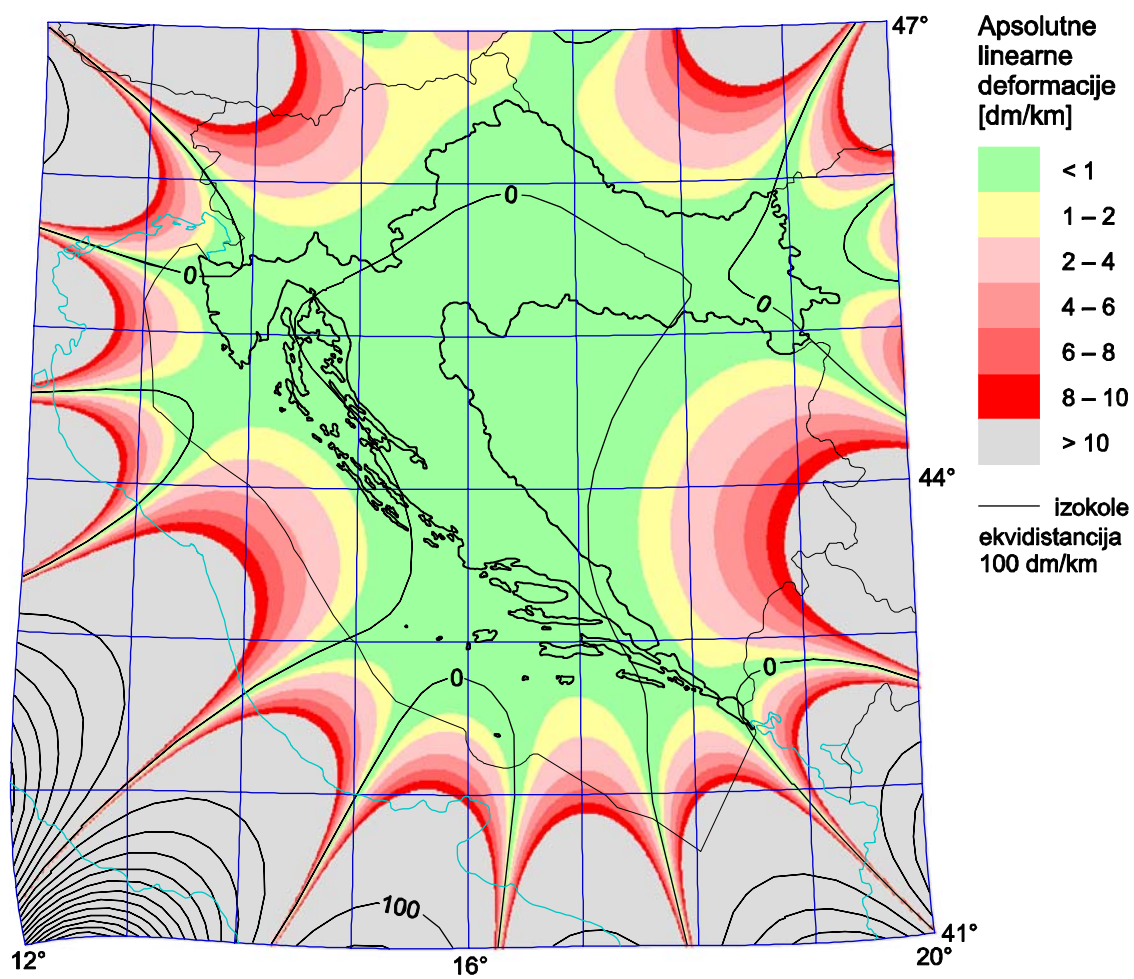
Drugi zaključak koji se može donijeti na temelju primjene polinoma kompleksne varijable za konformno preslikavanje područja Hrvatske, da niti jedna ispitana, pa niti ova posljednja projekcija ne daje oblik izokola koji bi se u većoj mjeri približio obliku granice područja. Dakle, niti jedna projekcija se ne može uzeti kao dobra aproksimacija Čebiševljeve konformne projekcije. Vjerojatni razlog leži u obliku područja koje je vrlo nepravilno i sadrži izražene konkavnosti. Dakle, polinomi kompleksne varijable nisu najpogodnija familija funkcija kojom bi se pronašla projekcija područja Hrvatske u smislu Čebiševljevog teorema.



Slika 11.13. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 10. stupnja po Airy/Jordanovu kriteriju. $E = 0.000044$.



Slika 11.14. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 10. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. $d_{\max} = 0.000115$.



Slika 11.15. Raspored i veličina deformacija u optimalnoj konformnoj polinomnoj projekciji 10. stupnja po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije za kopneno područje Hrvatske. $d_{\max} = 0.000086$.

12. ZAKLJUČAK

Na temelju rezultata ovdje prikazanih istraživanja, a sistematiziranih u tablici 12.1, mogu se donijeti sljedeći zaključci.

Predložena metodologija uspješno je primijenjena na postavljeni zadatak analize postojećih i pronalaženja novih optimalnih konformnih kartografskih projekcija za područje Hrvatske. Za ocjenu deformacija u postojećim varijantama i za nalaženje novih optimalnih projekcija upotrijebljena su dva kriterija. Prvi upotrebljava Airy/Jordanovu ocjenu deformacija na nekom području, a druga ocjena je najveća apsolutna linearna deformacija. Optimalne varijante projekcija su one koje imaju najmanje vrijednosti (odnosno male) vrijednosti tih ocjena.

Mercatorova projekcija (i polinomna projekcija 1. stupnja) ima 100-tinjak puta veće vrijednosti kriterija nego ostale projekcije.

Varijanta Lambertove konformne konusne projekcija kako je određena nakon II. svjetskog rata (Rešidbegović 1981, Peterca i Čolović 1987) i koja se u prošlosti upotrebljavala i za prikaz Hrvatske je nepovoljna po postavljenim kriterijima. To ne treba čuditi jer je ta varijanta izabrana za puno veće područje od Hrvatske. Varijanta (Lapaine 2000, NN 2004) ima relativno povoljnu vrijednost Airy/Jordanova kriterija koja je za 27% veća od vrijednosti u optimalnoj varijanti po tom kriteriju. Ta je projekcija bila izabrana za državni teritorij bez epikontinentalnog pojasa. Varijanta (Rajaković 2008) gotovo je identična optimalnoj varijanti po kriteriju najmanje najveće apsolutne linearne deformacije. Rajaković (2008) je do te varijante došla uzevši u obzir i epikontinentalni pojas i na temelju sličnog kriterija, ali rješenje nalazi drugom metodologijom. Lambertova konformna konusna projekcija iako nešto većih vrijednosti kriterija od nekih drugih istraženih projekcija, daje povoljne vrijednosti kriterija.

Varijanta Gauss-Krügerove projekcije u dvije zone (Abakumov i dr. 1928) ima vrlo povoljne vrijednosti kriterija, ali ne i najpovoljnije od svih, iako je riječ o dvije zone. Činjenica da se područje Hrvatske preslikava u dvije zone na neki način tu projekciju izdvaja od ostalih koje područje Hrvatske preslikavaju u jedan koordinatni sustav. Varijanta (Lapaine 2000, NN 2004, 2004a) usporediva je s varijantom Lambertove konformne konusne projekcije (Lapaine 2000, NN 2004). Ipak ta varijanta Gauss-Krügerove projekcije daje manje vrijednosti kriterija od navedene Lambertove, i to vrijednost Airy/Jordanova kriterija za 22%, a najveću linearnu deformaciju za 11%. Također, ta je varijanta nešto bliža optimalnoj varijanti po Airy/Jordanovu kriteriju nego optimalnoj varijanti po kriteriju najveće apsolutne linearne deformacije. Optimalne varijante Gauss-Krügerove projekcije imaju manje vrijednosti kriterija od optimalnih varijanti Lambertove konformne konusne projekcije i to vrijednost Airy/Jordanova kriterija za 11%, a vrijednost najveće linearne deformacije za 14%.

Tablica 12.1. Usporedba vrijednosti kriterija za sve istražene projekcije

Projekcija		Vrijednost Airy/Jordanova kriterija	Najveća apsolutna lin. def.
Mercatorova	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.020572	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.041577
Lambertova konformna konusna	(Rešidbegović 1981, Peterca i Čolović 1987)	0.003937	0.004184
	(Lapaine 2000, NN 2004)	0.000257	0.000943
	(Rajaković 2008)	0.000303	0.000466
	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000201	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000462
Gauss-Krügerova	(Abakumov i dr. 1928) – dvije zone	0.000141	0.000209
	(Lapaine 2000, NN 2004, 2004a)	0.000216	0.000839
	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000179	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000397
Stereografska	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000121	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000273
Lagrangeova	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000121	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000272
Polinomna 2. stupnja	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000176	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000402
Polinomna 3. stupnja	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000109	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000245
Polinomna 4. stupnja	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000076	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000178
Polinomna 5. stupnja	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000075	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000176
Polinomna 6. stupnja	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000058	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000136
	Najmanja defor. za kopno		0.000102
Polinomna 7. stupnja	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000051	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000128
Polinomna 8. stupnja	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000051	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000125
Polinomna 9. stupnja	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000046	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000123
Polinomna 10. stupnja	Optimalna po Airy/Jordan. kr.	0.000044	
	Optimalna po kr. najmanje def.		0.000115
	Najmanja defor. za kopno		0.000086

Iako je područje Hrvatske nepravilno, na temelju vrijednosti kriterija u Lambertovoj konformnoj konusnoj i Gauss-Krügerovoj projekciji moglo bi se zaključiti da je Hrvatska ipak malo "izduženija" u smjeru sjever-jug nego u smjeru istok-zapad.

Optimalne varijante stereografske projekcije daju vrlo povoljne vrijednosti kriterija u odnosu na prethodne projekcije. U odnosu na najbolju prethodnu projekciju po Airy/Jordanovu kriteriju, a to je Gauss-Krügerova projekcija u dvije zone (Rešidbegović 1981, Peterca i Čolović 1987), vrijednost je manja za 14%. Za vrijednost kriterija najveće apsolutne linearne deformacije ova projekcija još uvijek je nepovoljnija od spomenute Gauss-Krügerove projekcije u dvije zone, ali je ta vrijednost značajno manja od ostalih prethodnih projekcija. Primjerice, ta je vrijednost kriterija za 31% manja od optimalne Gauss-Krügerove projekcije po istom kriteriju.

Dakle, područje Hrvatske je više "okruglo" nego što je "izduženo" u smjeru sjever-jug ili istok-zapad.

Rezultati za optimalne varijante Lagrangeove projekcije su posebno zanimljivi. Naime kako je to prikazano u poglavlju 10. u Lagrangeovoj projekciji moguće je postići različite rasporede deformacija. Ona u specijalnom slučaju predstavlja Mercatorovu projekciju, Lambertovu konformnu konusnu ili stereografsku projekciju. Može imati raspored deformacija sličan onome u Gauss-Krügerovoj projekciji i još neke druge oblike rasporeda deformacija u kojima su izokole hiperbole. Raspored deformacija je uglavnom simetričan u odnosu na meridijan i paralelu kroz pol Lagrangeove projekcije. Dakle, nalaženjem optimalne varijante Lagrangeove projekcije za neko područje može se dobiti odgovor na pitanje iz koje skupine "standardnih" konformnih projekcija (cilindrične, konusne, stereografske, poprečne cilindrične) se može dobiti povoljna varijanta.

Za područje Hrvatske optimalne varijante Lagrangeove projekcije gotovo su jednake optimalnim varijantama stereografske projekcije. Razlika je praktički zanemariva i te dvije projekcije mogu se smatrati jednakima po zadanim kriterijima za područje Hrvatske.

Posljednja skupina konformnih projekcija jesu konformne projekcije izražene polinomima geografske dužine i izometrijske širine. Polinom prvog stupnja prelazi u Mercatorovu projekciju, pa su za tu projekciju vrijednosti kriterija jednake.

Optimalne varijante polinomne projekcije 2. stupnja usporedive su s optimalnim varijantama Gauss-Krügerove projekcije. Vrlo je mala razlika u vrijednostima kriterija.

Optimalne varijante polinomne projekcije 3. stupnja usporedive su s optimalnim varijantama stereografske i Lagrangeove projekcije, čak daju i manje vrijednosti za oba kriterija za 10%. S obzirom na to da se u ovoj projekciji može postići oblik izokola u obliku elipse čije se glavne osi ne podudaraju sa smjerovima meridijana i paralela, tu se projekciju može na neki način usporediti s Tissotovom kompenzativnom projekcijom, s tom razlikom da je prva konformna.

Optimalne varijante polinomnih projekcija od 4. do 10. stupnja nastavljaju trend sve manjih vrijednosti kriterija, što je i prirodno očekivati. U suprotnom, tj. u slučaju da se za

polinom višeg reda dobiju nepovoljnije vrijednosti kriterija nego s polinomom nižeg reda, to bi bio pokazatelj da pronađena najmanja vrijednost nije dovoljno dobra. To proizlazi iz činjenice da je polinom nižeg reda specijalni slučaj polinoma višeg reda. S druge strane sve veći stupanj polinoma dovodi do sve dužih i nezgrapnijih formula za pisanje, iako njihova implementacija u računalu zbog određene pravilnosti ne predstavlja poseban problem.

Optimalne varijante polinomne projekcije 10. stupnja zaista daju i najmanje vrijednosti kriterija od svih prethodnih projekcija. U odnosu na optimalne varijante stereografske projekcije, vrijednost Airy/Jordanova kriterija je ovdje 64% manja, dakle gotovo 3 puta manja, a najveća apsolutna linearna deformacija manja je za 58%, dakle više od 2 puta.

Ravnotežu između složenosti koja proizlazi iz polinoma visokog stupnja i vrijednosti kriterija predstavljaju optimalne polinomne projekcije 6. stupnja.

Zanimljivo je da ako se promatra samo kopneno područje Hrvatske, polinomna projekcija 6. stupnja omogućuje preslikavanje tog područja s najvećom apsolutnom linearnom deformacijom od 0.000102, odnosno s deformacijom koja je bila postavljena na Gauss-Krügerovu projekciju u dvije zone. Isto to područje u konformnoj polinomnoj projekciji 10. stupnja može se preslikati s još manjom najvećom linearnom deformacijom od 0.000086.

Kako je već rečeno na kraju 11. poglavlja niti jedna od prikazanih projekcija nije dobra aproksimacija konformne projekcije po Čebiševu. Niti jedna projekcija nema oblik izokola koji bi se u većoj mjeri približio obliku područja. Razlog zašto je tome tako vjerojatno leži u samom obliku područja koje je izrazito konkavno. S druge strane ta činjenica upućuje na to da je moguće naći još bolje konformne projekcije po zadanim kriterijima.

Na kraju, nameće se ideja da se procjena najmanjih deformacija koje se mogu postići za ovako nepravilna i konkavna područja ne izvodi iz Tissotove kompenzativne projekcije kako je to do sada rađeno. Naime, primjena Tissotove kompenzativne projekcije daje dobar odgovor na pitanje kolike se najmanje deformacije mogu očekivati u "standardnim" projekcijama (azimutalne, konusne i cilindrične), ali kako pokazuju ovdje provedena istraživanja ta procjena se ne može proširiti i na tzv. adaptabilne projekcije. Za ove potonje projekcije možda bi se bolja procjena mogla dobiti analizom deformacija na najvećem upisanom konveksnom području unutar zadanog područja, npr. području omeđenom najvećom upisanom kružnicom. Potvrda ili odbacivanje takvog pristupa te nalaženje novih optimalnih konformnih projekcija za Hrvatsku ostaju za buduća istraživanja.

LITERATURA

- Airy, G. B. (1861): Explanation of a projection by balance of errors for maps applying to a very large extent of the Earth's surface, and comparison of this projection with other projections. London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine, 4th ser. No. 22, 409-421.
- Abakumov, N. P. (1942): Gauss-Krügerova projekcija u primjeni na područje Nezavisne Države Hrvatske, Hrvatska državna izmjera, br. 5, 70-74.
- Abakumov, N. P., Dražić, M., Svečnikov, N., Svišćev, I. (1928, 1929): Projekcija novog katastarskog premera u Kraljevini SHS. Geometarski glasnik, 1928, br. 3, 53-61, br. 4, 101-109, br. 5, 165-170; 1929, br. 1, 16-25, br. 2, 80-87, br. 3, 130-135.
- Adams, O. S. (1919): A study of Map Projections in General. U.S. Coast and Geodetic Survey Special Publication 57. Reprinted 1934.
- Canter, F. (2002): Small-scale Map Projection Design. Taylor & Francis, London and New York.
- Čebišev, P. L. (1856): Sur la Construction des Cartes Géographiques. Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des sciences de St.-Petersbourg, Tome XIV, p. 257-261.
- Borčić, B. (1955a): Elementi Tissotove granične elipse za FNR Jugoslaviju. Geodetski list, br. 11-12, 343-352.
- Borčić, B. (1955b): Matematička kartografija. Tehnička knjiga, Zagreb.
- Borčić, B. (1976): Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona. Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Eggert, O. (1936): Die stereographische Abbildung des Erdellipsoids. Zeitschrift für Vermessungswesen, Vol. 65, 153-164.
- Fasching, A. (1922): Konformna azimutalna (stereografska) projekcija, Geodetski glasnik, br. 1 i 2, 1-10.
- Filkuka, V. (1919): Projekcije zemaljske izmjere u Hrvatskoj i Slavoniji. Glasilo geometara, br.1 i 2, 2-5; br.4, 5 i 6, 49-54; br. 7 i 8, 81-90.
- Filkuka, V. (ur.) (1919): Zapisnik Odborske sjednice održane dne 22. lipnja 1919 u Zagrebu, Glasilo geometara, br. 4, 5 i 6, 69-72.
- Frančula, N. (1971): Die vorteilhaftesten Abbildungen in der Atlaskartographie. Dissertation, Institut für Kartographie und Topographie, Bonn.
- Frančula, N. (2004): Kartografske projekcije. Skripta, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

- Frankić, K. (1982): Optimization of Geographic Map Projections for Canadian Territory. Dissertation, Simon Fraser University, Burnaby.
- Gauss, C. F. (1828): Werke. Band IX, Reprint iz 1903, Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, In Commision bei B. G. Teubner in Leipzig.
- González López, S. (1995): Conformal map projections by least squares adjustment with conditions between parameters, u Proceedings of the 17th International Cartographic Conference, Barcelona, str. 776-780.
- Hristow, W. (1937): Potenzreihen zwischen den stereographischen und den geographischen Koordinaten und umgekehrt. Zeitschrift für Vermessungswesen, Vol. 66, 84-89.
- Hristow, W. (1955): Die Gaußschen und geographischen koordinaten auf dem Ellipsoid von Krassowsky. Veb Verlag Technik, Berlin.
- Jordan, W., Eggert, O., Kneissel, M. (1958): Handbuch der Vermessungskunde, Band IV, Zweite Hälfte, (10. izdanje), J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.
- Kavrajiskij, V. V. (1960): Izbrannye trudy, Tom II, Matematičeskaja kartografija, Vypusk 3, Perspektivnye, krugovye i drugie važnejšie proekcii. Navigacionnye zadači. Izdanie Upravljenija načal'nika Hidrografičeskoj služby VMF.
- Krüger, L. (1922): Zur stereographischen projektion. Veröff. d. Preuß. Geod. Inst. N. F. 89, Berlin.
- Lagrange, J. L. de (1779): Sur la construction des cartes géographiques. Nouveaux Mémoires de l'Academie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.
- Lambert, J. H. (1772): Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen, Dritter Theil, im Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin. U prijevodu na engleski s uvodom W. R. Toblera pod naslovom: Notes and Comments on the Composition of Terrestrial and Celestial Maps, Michigan Geographical Publication No.8, Department of Geography, University of Michigan, Ann Arbor, 1972.
- Lapaine, M (1996): Preslikavanja u teoriji kartografskih projekcija. Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Lapaine, M. (2000): Prijedlog službenih kartografskih projekcija Republike Hrvatske, Državna geodetska uprava, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.
- Lapaine, M. (2002b): Hrvatska vojna kartografija, rukopis, Zavod za kartografiju Geodetskog fakulteta.
- Lapaine, M. (2006): Nova kartografska projekcija Republike Hrvatske – HTRS96/TM – upute za praktičnu primjenu, I. dio, Računanja, Državna geodetska uprava, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Lapaine, M. i Kuveždić, A. (2007): O razvoju kartografskih projekcija. Kartografija i geoinformacije, izv. broj, 110-147.

- Lapaine, M. i Tutić, D. (2007): O novoj službenoj kartografskoj projekciji Hrvatske – HTRS96/TM. Kartografija i geoinformacije, izv. br., 34-53.
- Leybourn, T. (1819): New Series of the Mathematical Repository, Vol IV., London.
- Miller, O. M. (1953): A new conformal projection for Europe and Asia [treba pisati Afica], Geographical Review, No. 43, 405-409.
- Milnor, J. (1969): A Problem in Cartography. The American Mathematical Monthly, Vol. 76, No. 10, p. 1101-1112.
- Nelder, J. A. i Mead, R., (1965): A Simplex Method for Function Minimization. The Computer Journal, No.7, 308-313; doi:10.1093/comjnl/7.4.308.
- Nestorov, I. (1996): Nove optimalne kartografske projekcije. Zadužbina Andrejević, Beograd.
- NN (2004): Odluka o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i kartografskih projekcija Republike Hrvatske, Narodne novine, br.110/04.
- NN (2004a): Ispravak Odluke o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i ravninskih kartografskih projekcija Republike Hrvatske, Narodne novine, br. 117/04.
- Peterca, M. i Čolović, G. (1987): Geodetska služba JNA, Vojnoizdavački i novinski centar, Beograd.
- Peters, A. (1975): Wie man unsere Weltkarten der Erde ähnlicher machen kann. Kartographische Nachrichten, Vol. 25, No. 5., 173-183.
- Peters, A. (1978): Über Weltkartenverzerrungen und Weltkartenmittelpunkte. Kartographische Nachrichten, Vol 28, No.3, 106-113.
- Rajaković, M. (2007): Konusne projekcije za Hrvatsku. Studentski rad nagrađen Nagradom dekana, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Rajaković, M. (2008): Najbolja konformna konusna projekcija za Hrvatsku. Studentski rad za Dekanovu nagradu, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Reilly, W. I. (1973): A Conformal Mapping Projection with Minimum Scale Error. Survey Review, Vol. 22, No. 168, 57-71.
- Rešidbegović, R. (1981): Istraživačko-redakcijski radovi na preglednotopografskoj karti razmera 1:500 000, u Zborniku radova Vojnogeografskog instituta, 1981, Beograd, str. 71-82.
- Roussilhe M. H. (1922): Emploi des coordonnées rectangulaires stéréographiques pour le calcul de la triangulation dans un rayon de 560 km autour de l'origine, Paris, Imprimerie Nationale.
- SGU (1953): Osnovni geodetski radovi u F. N. R. Jugoslaviji. Savezna geodetska uprava, Beograd.
- Snyder, J. P. (1987): Map Projections: A Working Manual. U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, Washington.

- Snyder, J. P. (1993): *Flattening the Earth, Two Thousand Years of Map Projections*. The University of Chicago Press, Chicago, London.
- Snyder, J. P., Stewart, H (1997): *Bibliography of Map Projections*, USGS Bulletin 1856.
- Snyder, J. P., Voxland, P. M. (1989): *An Album of Map Projections*. USGS Professional Paper 1453.
- SNL (1988): *Geografski atlas Jugoslavije*, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb.
- Stojanoski, K. (1955?): *Tossot-ovata kompenzativna projekcija za područje na FNR Jugoslavija*. Diplomski rad, Skopje.
- Tissot, A. (1881): *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*. Gauthier-Villars, Paris.
- Tissot, A. (1887): *Die Netzentwürfe geographischer Karten (Autorisierte Deutsche bearbeitung mit einigen Zusätze besorgt von E. Hammer)*. J. B. Metzlersche Buchhandlung, Stuttgart.
- Tobler, W. R. (1972): *Notes and Comments on the Composition of Terrestrial and Celestial Maps*, Michigan Geographical Publication No. 8, Department of Geography, University of Michigan, Ann Arbor, 1972.
- Tutić, D. i Lapaine, M. (2008): *Stereographic map projection for Croatia*. u Gunter, W. (ur.) ICGG 2008 Proceedings, ISGG and Technische Universität Dresden, 2008, CD-izdanje, ISBN 978-3-86780-042-6.

SAŽETAK

U ovoj disertaciji istražujem konformne kartografske projekcije za područje Hrvatske. Područjem Hrvatske smatrat će se unija državnog teritorija i epikontinentalnoga morskog pojasa, a izuzetno se razmatra i samo kopneno područje Hrvatske.

Dodatna svojstva, osim zadanog svojstva konformnosti, istražujem na temelju dva analitička kriterija, Airy/Jordanova kriterija i kriterija najmanje najveće apsolutne linearne deformacije.

Airy/Jordanov kriterij do sada nije upotrebljavan za područje Hrvatske pri analizi ili izboru kartografske projekcije.

Analizirane su konformne kartografske projekcije koje su se do sada ili se još uvijek upotrebljavaju za prikaz područja Hrvatske. Dan je njihov opis, formule i kratka analiza. Izabrani kriteriji izračunani su za svaku takvu projekciju i varijantu, a na kraju je dana i optimalna varijanta po oba kriterija. Pod optimalnom varijantom podrazumijeva se ona za koju je vrijednost izabranih kriterija najmanja. U toj, prvoj skupini, istražene su sljedeće projekcije:

1. Mercatorova (uspravna konformna cilindrična) projekcija,
2. Lambertova konformna konusna projekcija i
3. Gauss-Krügerova (poprečna konformna cilindrična) projekcija.

Istražene su i neke druge konformne projekcije koje se do sada nisu analizirale ili primjenjivale za područje Hrvatske. Dan je njihov opis i formule. Dane su optimalne varijante tih projekcija za područje Hrvatske i izabrane kriterije. Međutim, ovdje se pod optimalnim varijantama smatraju one koje imaju malu (po mogućnosti najmanju) vrijednost izabranih kriterija. Razlog ovome ograničenju je složeniji raspored deformacija zbog kojeg nije uvijek moguće tvrditi da je pronađena mala vrijednost kriterija ujedno i najmanja moguća. Projekcije koje do sada nisu ispitivane za prikaz područja Hrvatske (druga skupina) su:

1. stereografska projekcija rotacijskog elipsoida,
2. Largangeova projekcija i
3. konformne polinomne projekcije.

Predložen je i uspješno upotrijebljen numerički pristup nalaženju optimalnih varijanti projekcija.

Rezultati pokazuju da Mercatorova (i polinomna projekcija 1. stupnja) imaju 100-tinjak puta veće vrijednosti kriterija od ostalih istraženih projekcija. Optimalne varijante Lambertove konformne konusne i Gauss-Krügerove projekcije daju podjednake vrijednosti kriterija. Optimalne varijante stereografske projekcije su povoljnije u smislu zadanih kriterija od prethodnih triju. Optimalne varijante Lagrangeove projekcije gotovo su identične

optimalnim varijantama stereografske projekcije. Optimalne varijante konformnih polinomnih projekcija 2. stupnja usporedive su po vrijednostima kriterija s optimalnim varijantama Lambertove konformne konusne i Gauss-Krügerove projekcije. Optimalne varijante konformnih polinomnih projekcija 3. stupnja usporedive su po vrijednostima kriterija s optimalnim varijantama stereografske i Lagrangeove projekcije. Konformne polinomne projekcije viših stupnjeva vode do još manjih vrijednosti kriterija, a najviši istraženi stupanj polinoma je 10. Ravnotežu između kompleksnosti formula i vrijednosti kriterija pružaju konformne polinomne projekcije 6. stupnja.

Sljedeći zaključak koji se može donijeti iz dobivenih rezultata da niti jedna od prikazanih projekcija nije dobra aproksimacija konformne projekcije po Čebiševu. Niti jedna projekcija nema oblik izokola koji bi se u većoj mjeri približio obliku područja. S druge strane ta činjenica upućuje na to da je moguće naći još bolje konformne projekcije po zadanim kriterijima.

SUMMARY

In this dissertation the conformal map projections for the Croatia are investigated. The region of Croatia is defined as the union of the state territory and epicontinental zone. Specially, only the land area of Croatia is used as region of the interest.

Besides the imposed property of angle preserving (conformality), the properties of map projections are investigated by two analytical criteria, the Airy/Jordan criterion and the criterion of the minimal maximal absolute linear distortion.

Airy/Jordan criterion was not used before in analysis or selection of the map projections for the region of Croatia.

The conformal map projections which has been used or are still in use for representation of Croatia on maps are analysed. The description, necessary equations and short analysis for each of them is given. The values of criteria are calculated for each such map projection and its version. The new optimal map projections are those which have minimal value of selected criteria. In this first group following map projections are investigated:

1. Mercator projection,
2. Lambert's conformal conic projection and
3. Gauss-Krüger (transverse Mercator) projection.

Additional conformal map projections are investigated, which have not been analysed or applied for Croatia. The description and equations are given. The optimal versions for each such projection is calculated and presented according to the two defined criteria. Here, the optimal versions are considered those which have small (possibly the smallest) value of selected criteria. The reason for this limitation is complex form of distortions over a complex form of the region. The conformal map projections which were not analysed for the region of Croatia are:

1. stereographic projection of rotational ellipsoid,
2. Lagrange projection and
3. conformal polynomial projections.

The numerical approach for finding the optimal map projections is proposed and used.

The results shows that the Mercator projection (and conformal polynomial projection of the 1st degree) has around 100 times bigger linear distortions than other investigated map projections. The optimal versions of the Lambert's conformal conic and the Gauss-Krüger projection have similar values of the criteria. The optimal variants of the stereographic map projection are better than the previous three projections according to the criteria. The optimal versions of the Lagrange map projection are almost identical to the optimal versions of the stereographic projection. The optimal version of the conformal polynomial projection of the 2nd degree can be compared with the optimal versions of the Lambert conformal conic and the Gauss-Krüger projection. The optimal versions of the conformal polynomial projection of the

3rd degree can be compared with the optimal versions of the stereographic and Lagrange projection. The conformal polynomial projections of higher degrees give even smaller values of the criteria in optimal variants. The highest applied degree is 10. The balance between the complexity of the equations and the values of the criteria gives the 6th degree of the conformal polynomial projections.

Based on the results it can be concluded that the neither one presented conformal map projection is good approximation of the Chebishev projection. Neither one has the shape of the lines of constant scale which follows the border of the region. This fact means that even better conformal map projections can be found for Croatia based on selected criteria.

ŽIVOTOPIS

Rođen sam 29. lipnja 1973. godine u Zagrebu. Osnovnu školu pohađao sam u Kloštar Ivaniću, a maturirao na srednjoj školi "Ruđer Bošković" u Zagrebu, elektronički smjer. Nakon mature, u razdoblju 1991.-1993., studirao sam na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu.

Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu upisao sam 1993. i diplomirao 1998. godine s temom *Računalni program "Kartografske projekcije"*. Od 1998. radim u Zavodu za kartografiju Geodetskog fakulteta, najprije kao stručni suradnik, a od 2001. kao znanstveni novak-asistent. Poslijediplomski magistarski studij geodezije, smjer Kartografija, upisao sam 1998. godine i završio ga 2004. godine obranom rada pod nazivom *"Poboljšanje upravljačkog programa za DeSkan Express 5.0"*. Poslijediplomski doktorski studij upisao sam 2005. godine.

Kao suradnik sudjelovao sam na znanstvenom projektu MZOŠ-a *Hrvatski kartografi - znanstvene osnove*, a trenutno sam suradnik na znanstvenom projektu MZOŠ-a *Kartografija i nove tehnologije*. Surađivao sam i na znanstveno-stručnim projektima *Prijedlog službenih kartografskih projekcija Republike Hrvatske* i *Hrvatski geodetski rječnik*. Osim znanstvenih i znanstveno-stručnih, sudjelovao sam i na više stručnih projekata Zavoda za kartografiju i fotogrametriju Geodetskog fakulteta.

U nastavi sam sudjelovao i sudjelujem kao asistent iz predmeta *Digitalna kartografija I*, *Digitalna kartografija II*, *Kartografska generalizacija*, *Kartografske projekcije*, *Kartografija i GIS*, *Multimedijska kartografija*, *Rukovanje geoinformacijama* i *Osnove geoinformatike* te *Uvod u GIS* za studente geografije Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Sudjelujem u nastavi i kao predavač iz predmeta *Kartografske projekcije*.

Posebni su mi interesi primjena računala u kartografiji, geoinformacijski sustavi te kartografija na internetu. Objavio sam preko 50 radova i napisao nekoliko računalnih programa u sklopu stručnih projekata. Bio sam suradnik za prikaz reljefa na većem broju karata. Sudjelovao sam na 15-tak domaćih i stranih znanstvenih i stručnih skupova.

Član sam *Hrvatskoga kartografskog društva*, *Hrvatskoga geodetskog društva*, *Hrvatskog društva za geometriju i grafiku*, *Međunarodnoga društva za geometriju i grafiku*, te suradnik *Povjerenstva za kartografiju planina Međunarodnoga kartografskog društva*. Obnašao sam dužnost tajnika Hrvatskoga kartografskog društva od njegovog osnutka 2001. do 2007. godine. Bio sam član organizacijskog odbora nekoliko skupova u organizaciji Hrvatskoga kartografskog društva.

Na četvrtoj godini studija dobio sam državnu stipendiju Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske. Godine 1997. dobio sam Rektorovu nagradu za studentski rad pod naslovom *"Elementi kvalitete prostornih podataka"*.