

Jedinstveni transformacijski model i novi model geoida Republike Hrvatske

Tomislav BAŠIĆ¹

Sažetak. U radu se donose preliminarni rezultati za novi GRID model transformacije između nasljeđenog lokalnog (HDKS) i novog službenog globalnog geocentričkog (HTRS96) datuma, temeljeni na u trenutku pisanja raspoloživim identičnim točkama u obadva sustava (oko 2000) kao i rezultati za novu plohu geoida Republike Hrvatske (HRG2009), koji zajedno čine jedinstveni model transformacije T7D (komjutorski program) za službenu transformaciju starih prostornih podataka u novi položajni i visinski referentni sustav Republike Hrvatske. Očekivana je točnost trodimenzionalne transformacije bolja od ± 5 cm na najvećem dijelu teritorija Hrvatske.

Ključne riječi: geodetski datum, geodetski referentni sustav, transformacija, distorzija, geoid, kolokacija po najmanjim kvadratima.

1. Uvod

Široka upotreba satelitskih tehnika pozicioniranja stvorila je potrebu za boljim razumijevanjem složenijih geodetskih problema kao što su definicija i realizacija geodetskog datuma, odnos između geoida i referentnog elipsoida te naročito transformacija između povijesnih i modernih geodetskih referentnih sustava. Primjena GNSS mjerenja u geodeziji omogućila je, ali i nametnula obnovu postojećih odnosno uspostavu novih državnih referentnih okvira, što je i kod nas rezultiralo usvajanjem novih službenih geodetskih datuma i kartografskih projekcija Republike Hrvatske (N.N. 110/2004, Bašić 2007, Bašić i dr. 2003).

Uvođenje novog geodetskog datuma pruža značajne dugoročne koristi (Brockmann i dr. 2001), no složeni problemi i zapreke povezane s usvajanjem tog datuma su vrlo velike. Svakako jedan od većih tehničkih izazova pritom je pružanje korisnicima prostornih podataka mogućnosti učinkovitog rješavanja među-datumskih transformacija. Stoga je 2006. godine, u okviru projekta “Izrada jedinstvenog transformacijskog modela - HTRS96/HDKS”, koji je Zavod za geomatiku Geodetskog fakulteta realizirao za Državnu geodetsku upravu, razvijeno za potrebe položajne transformacije tzv. rješenje povećane točnosti – GRID transformacija (Bašić i dr. 2006a, 2006b). Jednako tako, već 2000. godine je radi omogućavanja transformacije visina iz elipsoidnih u geoidne određena u okviru projekta “Detaljni model geoida Republike Hrvatske” službena ploha geoida za cjelokupni teritorij države – HRG2000 (Bašić 2001, Bašić 2002).

Zbog činjenica da se HTRS/HDKS transformacijski model temelji na relativno malo preko teritorija RH neravnomjerno raspoređenih identičnih točaka (≈ 2000) koje ponegdje pokazuju i lošu kvalitetu samih podataka, zatim da je model geoida HRG2000 izračunan na temelju ograničenog broja mjerenih podataka (pogotovo u graničnom području sa susjednim državama) i da se odnosi na stari visinski datum (“Trst”), a nedostaje i nezavisna procjena kvalitete te plohe u apsolutnom smislu, potpisan je između Državne geodetske uprave i Geodetskog fakulteta krajem listopada 2008. godine Ugovor o izvođenju razvojno-istraživačkog projekta “Novi model geoida Republike Hrvatske i

¹ prof. dr. sc. Tomislav Bašić, Hrvatski geodetski institut i Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: tomislav.basic@cgi.hr, tomislav.basic@geof.hr.

poboljšanje T7D modela transformacije”. Do sada ostvareni rezultati na projektu prezentirani su u ovom radu.

2. Hrvatska GRID transformacija

U (Bašić i dr. 2006a i 2006b) analizirana su strana iskustava po pitanju rješavanja transformacije između nasljeđenih, u pravilu lokalnih geodetskih datuma, i modernih, u pravilu geocentričkih datuma. Metode koje se razvijaju za potrebe korisnika s različitim zahtjevima na točnost transformacije temelje se najčešće na četiri metode međudatunskih transformacija koje se između ostaloga razlikuju po točnosti, tablica 1 (ICSM, 2000).

Tablica 1. Metode transformacije koordinata

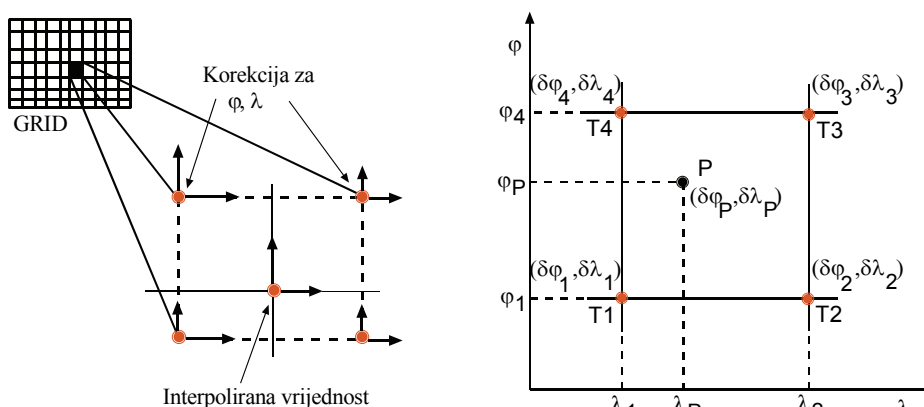
Metoda transformacije		≈ točnost
1	GRID metoda	0.1–0.3 m
2	3D slična, 7-parametarska transformacija	1 m
3	5-parametarska transformacija Molodenskog	5 m
4	Jednostavni pomak bloka («Simple Block Shift»)	10 m

Kao i u većini država svijeta, zbog povećane točnosti transformacije te jednostavnosti i učinkovitosti primjene, kao optimalno rješenje se je i kod nas nametnula metoda GRID transformacije, koja se temelji na konformnom pomaku datuma i korištenju distorzijskog modela (više u Bašić i dr. 2006a). GRID metoda koristi se za računanje transformacijskih parametara u traženoj točki, gdje se nepoznati transformacijski parametri u točki P računaju iz poznatih transformacijskih parametara u najbližim točkama GRID-a primjenom metode bi-linearne interpolacije (slika 1). Izrazi (1) i (2) predstavljaju model za računanje transformacije po geodetskoj širini ($\delta\varphi_P$) i duljini ($\delta\lambda_P$) točke P:

$$\delta\varphi_P = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3XY \quad ; \quad \delta\lambda_P = b_0 + b_1X + b_2Y + b_3XY \quad (1)$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} a_0 &= \delta\varphi_1, & a_1 &= \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1, & a_2 &= \delta\varphi_4 - \delta\varphi_1, & a_3 &= \delta\varphi_1 + \delta\varphi_3 - \delta\varphi_2 - \delta\varphi_4, \\ b_0 &= \delta\lambda_1, & b_1 &= \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1, & b_2 &= \delta\lambda_4 - \delta\lambda_1, & b_3 &= \delta\lambda_1 + \delta\lambda_3 - \delta\lambda_2 - \delta\lambda_4, \\ X &= (\lambda_P - \lambda_1) / (\lambda_2 - \lambda_1), & Y &= (\varphi_P - \varphi_1) / (\varphi_4 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (2)$$

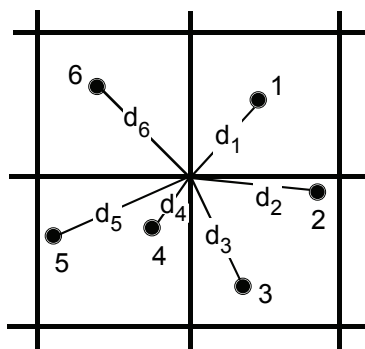


Slika 1. GRID transformacija

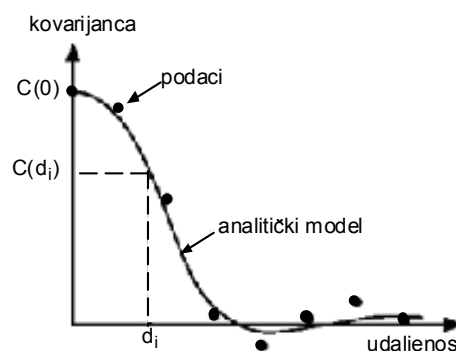
Primjena konformne transformacije radi realizacije pomaka datuma iz staroga u novi bez distorzijskog modela zanemarila bi utjecaj distorzije u transformiranim koordinatama u

iznosu od nekoliko metara. U praksi se za modeliranje distorzije obično koriste sljedeće metode: Ploha minimalne zakrivljenosti (Minimum Curvature Surfaces), Višestruka regresija (Multiple Regression) i Kolokacija po najmanjim kvadratima (Least Squares Collocation), (ICSM, 2000).

Konačni odabir najprikladnije metode modeliranja distorzije uvjetovan je razvojem GRID-a prema dostupnosti novih podataka. Stoga je zbog povoljnih statističkih pokazatelja i mogućnosti naknadnog dodavanja podataka najinteresantnija zapravo “Kolokacija po najmanjim kvadratima” – LSC (Bašić i dr. 2006a). LSC je tehnika koja u promatranoj točki uzima u obzir utjecaj distorzije susjednih točaka ovisno o udaljenosti od promatrane točke. Kod računanja distorzijskog GRID-a cilj je koristiti slučajno raspoređene podatke da bi se procijenile komponente distorzije ($\delta\phi$, $\delta\lambda$) u svakom čvorištu GRID-a. Na slici 2 prikazan je princip procjene komponenti distorzije u centralnom čvorištu GRID-a iz poznatih distorzija okolnih točaka, pri čemu su udaljenosti između svake točke i čvorišta GRID-a poznate. Za opisivanje prostornog utjecaja distorzije kao funkcije udaljenosti koristi se funkcija kovarijance, koja se najprije računa empirijski iz podataka, a potom aproksimira prikladnim analitičkim modelom (slika 3).



Slika 2. Računanje komponenti distorzije



Slika 3. Funkcija kovarijance

Linearna jednadžba za predikciju distorzije po teoriji najmanjih kvadrata glasi:

$$\hat{\delta} = C_l C_D^{-1} \mathbf{l} \quad (3)$$

gdje se elementi vektora C_l (jednadžba 4) računaju iz analitičke funkcije kovarijance u ovisnosti o udaljenosti između poznatih točaka i promatrane točke ($d_1, d_2, d_3, \dots, d_6$). Slično se u jednadžbi (5) elementi matrice C_D računaju iz analitičke funkcije kovarijance u ovisnosti o udaljenostima između svih kombinacija točaka (d_{ij} je udaljenost između točaka i i j). Vektor \mathbf{l} (izraz 6) sadrži distorziju u svakoj točki.

$$C_l = [C(d_1) \ C(d_2) \ C(d_3) \ C(d_4) \ C(d_5) \ C(d_6)] \quad (4)$$

$$C_D = \begin{bmatrix} C(0) & C(d_{12}) & C(d_{13}) & C(d_{14}) & C(d_{15}) & C(d_{16}) \\ C(d_{21}) & C(0) & C(d_{23}) & C(d_{24}) & C(d_{25}) & C(d_{26}) \\ C(d_{31}) & C(d_{32}) & C(0) & C(d_{34}) & C(d_{35}) & C(d_{36}) \\ C(d_{41}) & C(d_{42}) & C(d_{43}) & C(0) & C(d_{44}) & C(d_{45}) \\ C(d_{51}) & C(d_{52}) & C(d_{53}) & C(d_{54}) & C(0) & C(d_{56}) \\ C(d_{61}) & C(d_{62}) & C(d_{63}) & C(d_{64}) & C(d_{65}) & C(0) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{l} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6]^T \quad (6)$$

Procjena uz pomoć izraza za predikciju po najmanjim kvadratima je relativno jednostavan proces, no prostorna distribucija podataka može uzrokovati singularnost matrice kovarijance, što ponekad može dovesti do nestabilnosti matematičkog procesa. Komponenta pomaka datuma može se utvrditi u potpunosti 7-parametarskom transformacijom, koja translata, rotira i korigira za promjenu mjerila, tako da objekt kroz transformaciju zadržava svoj izvorni oblik. Razvoj i nastanak GRID-a i njegovih komponenti je složen proces koji uključuje obradu velike količine podataka, a potrebni slijed radnji može se optimirati, ali ipak zahtjeva primjenu iteracijskog postupka.

U nastavku sljedi primjer definiranja parametara hrvatske GRID transformacije na temelju raspoloživih identičnih točaka 2006. godine, a to su EUREF i CRODYN točke, trigonometri 1. reda te raspoloživi trigonometri 2. i nižih redova. Same točke preuzete su iz baze stalnih geodetskih točaka DGU, dijelom su one koje stoje na raspolaganju u Zavodu za geomatiku, a dijelom su preuzete od većih geodetskih tvrtki. Računanje 7 parametara Helmertove transformacije obavljeno je s vlastitim kompjutorskim programom T7.

Nakon eliminiranja kolinearnih i nepouzdanih točaka (detalji tog postupka mogu se naći u Bašić i dr. 2006a), na koncu su za Hrvatsku dobiveni jedinstveni transformacijski parametri i njihova ocjena točnosti (tablica 2 i slika 4).

Tablica 2. Set 7-parametarske transformacije dobiven na temelju 1780 točaka

```

Direction: HTRS (ETRS89) ==> HDKS (BESSEL)
=====
s0 = +/- .740 m
DX = -550.4985 m sDX = +/- .914 m
DY = -164.1161 m sDY = +/- 1.149 m
DZ = -475.1416 m sDZ = +/- .891 m
EX = 5.80967190 " sEX = +/- .031976 "
EY = 2.07901633 " sEY = +/- .032383 "
EZ = -11.62385702 " sEZ = +/- .032014 "
DM = 5.54176398 ppm sDM = +/- .119520 ppm
( 1.00000554) (+/- .00000012)

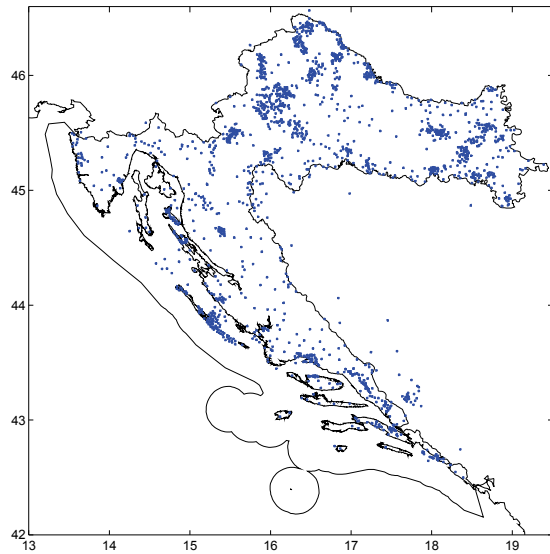
Rms misfit in X-direction: +/- .402 m ... in NS-direction: +/- .489 m
Rms misfit in Y-direction: +/- .489 m ... in EW-direction: +/- .517 m
Rms misfit in Z-direction: +/- .382 m ... in H -direction: +/- .199 m

Horizontal rms misfit in (NS-EW): +/- .712 m
Spatial rms misfit in (NS-EW-H): +/- .739 m

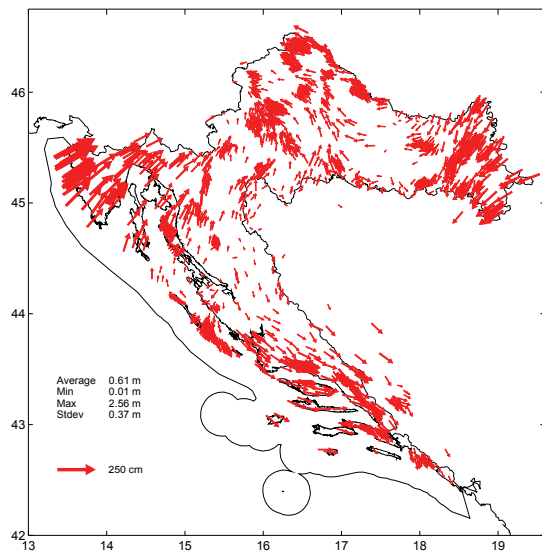
```

Kao što se vidi iz ostvarene unutarnje ocjene točnosti, izračunani jedinstveni transformacijski parametri osiguravaju na području Hrvatske položajnu (2D) transformaciju s točnošću od ± 0.712 m i prostornu (3D) transformaciju s točnošću od ± 0.739 m (uz korištenje HRG2000 geoida). Temeljem dobivenih nesuglasica u identičnim točkama nakon provedene transformacije s gore iznađenim parametrima, i to nesuglasica u smjeru sjever-jug i zapad-istok, dobiveni su grafički prikazi na slikama 5, 6 i 7, iz kojih se vide značajne nehomogenosti trigonometrijeke mreže u karakterističnim horizontalnim smjerovima. Apsolutno neslaganje preko cijelog teritorija iznosi po x-osi preko 2.0 m, a po y-osi čak preko 3.0 m. Slika 5 potvrđuje otprije poznatu koreliranost vektora položajnih reziduala sa 7 blokova austro-ugarske triangulacije, unutar kojih je bila izjednačena tadašnja trigonometrijska mreža 1. reda po uvjetnim opažanjima (Bašić i Šljivarić 2003).

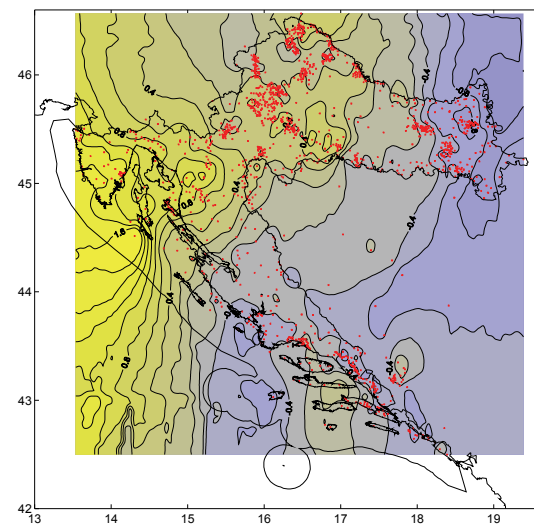
Preostale nesuglasice dobivene nakon konformne transformacije datuma - distorzija po x-osi (sjever-jug) i y-osi (zapad-istok) predmet su daljnjeg modeliranja. Na slici 8 prikazane su dobivene empirijske i analitičke funkcije kovarijanci za komponente položajne distorzije, s pripadnim statističkim pokazateljima za takove funkcije: vrijednosti varijance C_0 (vrijednost kovarijance na udaljenosti nula) i korelacijske udaljenosti KU (udaljenost koja odgovara vrijednosti kovarijance od $C_0/2$). Te su funkcije potom korištene za primjenu metode kolokacije po najmanjim kvadratima odnosno predikcije distorzije (izrazi 3 do 6) u pravilnom gridu preko cjelokupnog teritorija.



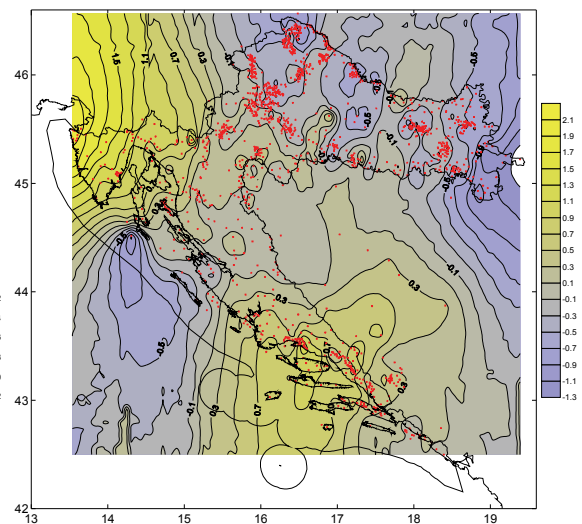
Slika 4. 1780 točaka za transformaciju



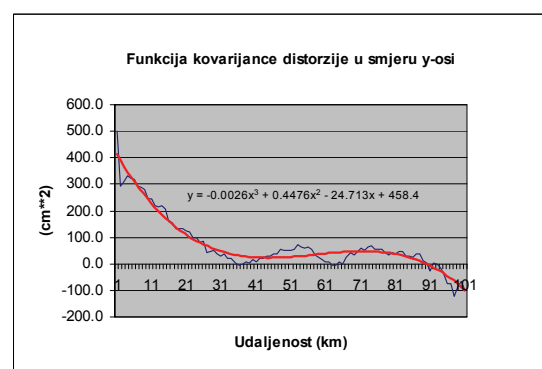
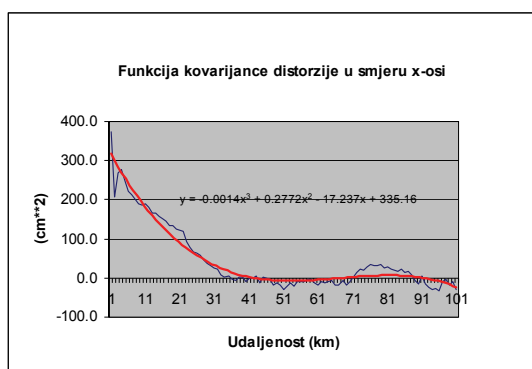
Slika 5. Položajna distorzija, rms= $\pm 0,71$ m



Slika 6. Neslaganje po x-u, rms= $\pm 0,49$ m



Slika 7. Neslaganje po y-u, rms= $\pm 0,54$ m



Slika 8. Funkcija kovarijance po x-osi ($C_0=391,33 \text{ cm}^2$, $KU=19,7 \text{ km}$) i po y-osi ($C_0=521,98 \text{ cm}^2$, $KU=14,1 \text{ km}$)

Na taj je način kreirana posebna datoteka, koja u svakoj točki grida sadrži podatke o vrijednosti HRG2000 geoida (u m), vrijednostima položajne distorzije po obadva smjera (u cm), te dodatno i vrijednosti razlike visina Trst–HVRS71 (u cm), zajedno s pripadnim standardnim devijacijama proizašlim iz kolokacije. Isječak iz te datoteke može se vidjeti u tablici 3. Za potrebe praktične realizacije ove metode transformacije kao jedinstvenog modela za cjelokupni teritorij Republike Hrvatske, razvijen je posebni kompjutorski program T7D (Bašić i dr. 2006a), koji primjenom bilinearne interpolacije omogućava definiranje bilo kojeg od navedenih podataka u svakoj točki na području Hrvatske (zapravo i nešto šire).

Tablica 3. Ispis dijela datoteke s podacima hrvatskog grida

CHRG2	sN	dx	sdx	dy	sdy (Trst–HVRS71)		sdH
C (m)	(m)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)
C*****							
44.16	.01	15.23	6.97	-7.09	9.45	17.58	.57
44.13	.01	19.51	5.02	.82	6.81	17.75	.48
44.10	.01	24.83	5.44	10.64	7.40	17.85	.50
44.06	.02	29.82	2.79	20.92	3.71	17.96	.38
44.04	.02	25.22	6.18	19.09	8.39	18.02	.56
44.01	.02	20.38	7.24	16.16	9.83	18.07	.49
43.98	.02	16.15	6.97	13.61	9.45	18.09	.57
43.96	.02	12.46	7.04	12.45	9.52	18.14	.77

Unutarnja ocjena točnosti nove grid transformacije, temeljem preostalih nesuglasica u 1780 identičnih točaka nakon provedene T7D transformacije nalazi se u tablici 4. Usporedimo li te vrijednosti s onima koji su proizašli temeljem samo 7-parametarske transformacije (tablica 2), može se ustvrditi drastično poboljšanje T7D u odnosu na uobičajenu Helmertovu 7-parametarsku transformaciju. Nova transformacija rezultirala je na području Republike Hrvatske položajnom (2D) transformacijom točnosti $\pm 5,0$ cm i prostornom (3D) transformacijom točnosti $\pm 7,1$ cm. Jednako bitan rezultat ove grid transformacije je taj da više nema problema u područjima dodira dvije lokalne mreže odnosno na dodiru dviju županija ili dvaju područja nekadašnjih blokova austro-ugarske triangulacije. Ovdje se zaista radi o jednom jedinstvenom modelu za cijelu državu.

Tablica 4. Unutarnja ocjena točnosti hrvatske GRID transformacije

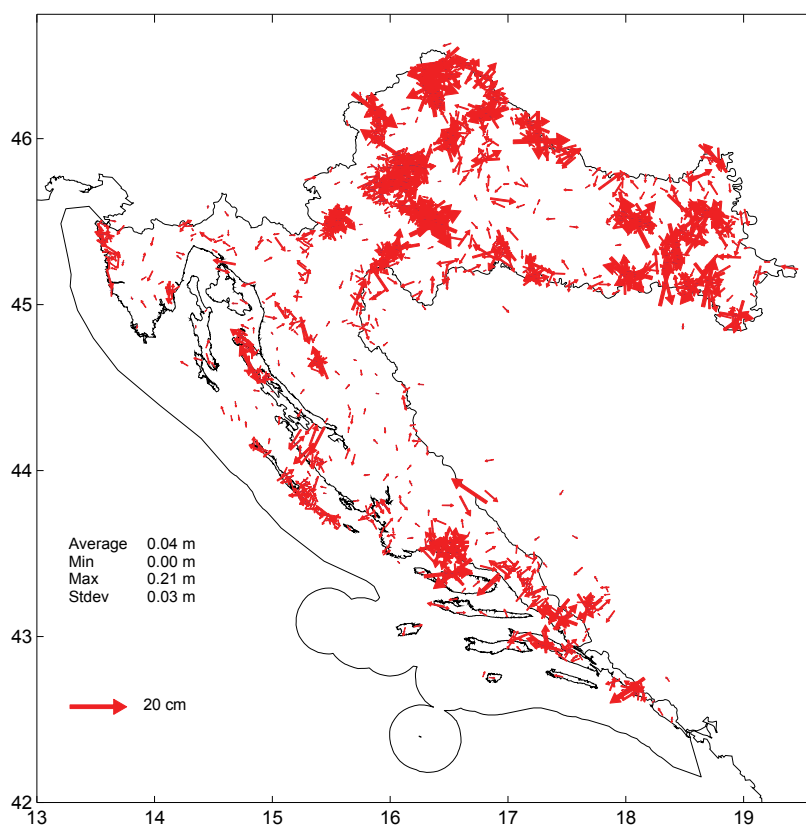
```

Rms misfit in NS-direction: +/- .035 m
Rms misfit in EW-direction: +/- .035 m
Rms misfit in H -direction: +/- .050 m

Horizontal rms misfit in (NS-EW): +/- .050 m
Spatial rms misfit in (NS-EW-H): +/- .071 m

```

Položajne nesuglasice preostale nakon T7D transformacije u vektorskom obliku prikazane su na slici 9. Uočava se da su do sada poznate nehomogenosti trigonometrije mreže na temelju samo 7-parametarske transformacije bitno smanjene u karakterističnim horizontalnim smjerovima i izrazito slučajnog karaktera. Apsolutno neslaganje preko cjelokupnog teritorija iznosi po x-osi i y-osi nekoliko centimetara i ono je sasvim slučajnog karaktera (očita je varijabilnost po smjeru), pri čemu se više uopće ne može detektirati poznata korelacija s blokovima austro-ugarske triangulacije, tako jasno uočljiva ranije. Ovdje je važno podsjetiti da iako je ovom metodom moguća i transformacija visina, zbog nepouzdanosti visina korištenih trigonometara direktna transformacija visina korištenjem modela geoida svakako je puno točnija i jednostavnija. Zbog toga je i odlučeno poduzeti novo računanje plohe geoida za Hrvatsku.



Slika 9. Preostale položajne nesuglasice nakon T7D transformacije

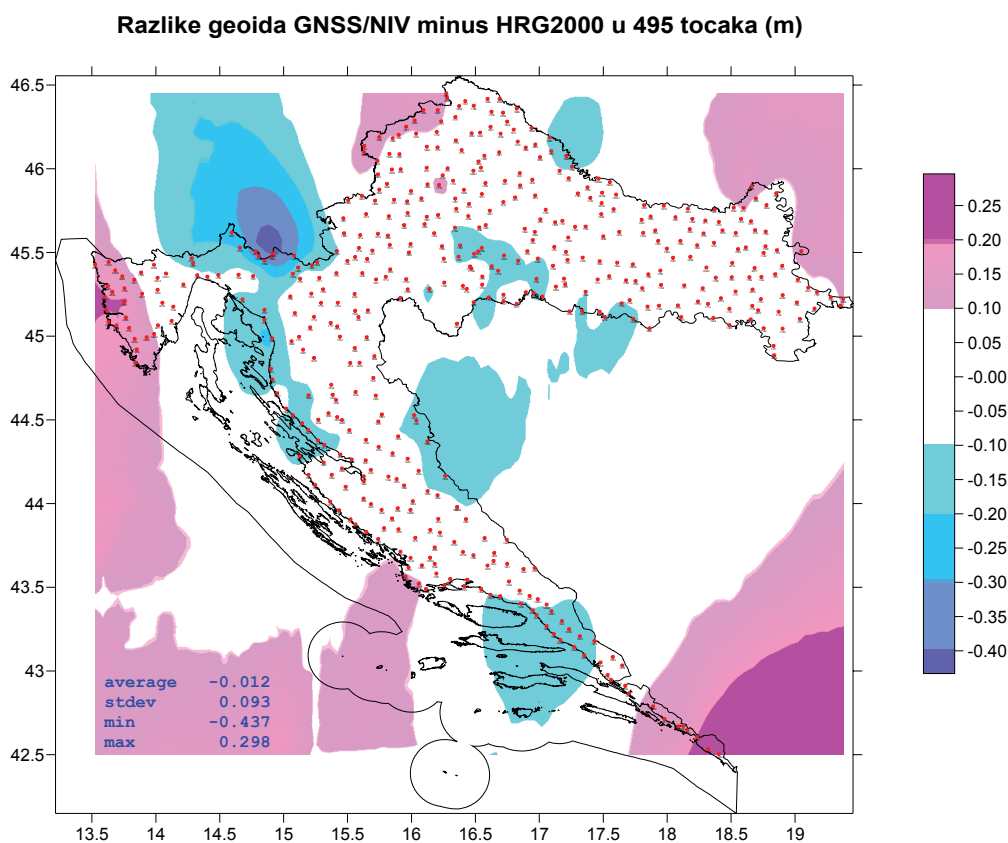
3. Novi model geoida HRG2009

Prilikom prezentacije HRG2000 modela geoida (Bašić 2001) konstatirano je bilo da je to najbolje moguće rješenje tog trena, da prava ocjena kvalitete predstoji (u praksi), te da neko buduće, bitnije poboljšano rješenje (HRG2???) nije moguće bez novih, boljih i gušćih mjerenja (GGM, g, GPS/Niv, ...). S obzirom da je taj trenutak u međuvremenu nastupio iz više razloga, u nastavku slijedi kratki prikaz određivanja nove plohe geoida HRG2009, ali i ocjena kvalitete dosadašnjeg HRG2000 modela.

U okviru pripreme za računanje novog geoida sprovedena su sljedeća istraživanja:

- analiza recentnih globalnih geopotencijalnih modela (GGM) baziranih na CHAMP i GRACE misijama (Hećimović i Bašić 2005a, 2005b, Liker i dr. 2008), priprema za dolazeću misiju GOCE (Hećimović i Bašić 2005c), te posebno ispitivanje i testiranje najnovijeg EGM2008 rješenja (Pavlis i dr. 2008),
- prikupljanje i kontrola kvalitete znatno većeg broja podataka za silu težu (Bašić i Hećimović 2006),
- kreiranje i provjera 3"x3" DMR-a iz podataka Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) za potrebe računanja topografskih efekata Zemljina polja sile teže (Bašić i Buble 2007),
- uspostava Osnovne gravimetrijske mreže, EUVN i EUVN_DA (Bašić i dr. 2006c, Grgić i dr. 2007), čiji će se podaci koristiti za potrebe nezavisne kontrole,
- analiza razlika visina između starog i novog visinskog datuma (Bašić i dr. 2006a, 2006b),
- uspostava preko 500 novih GNSS/Nivelmanskih točaka diljem RH u 2009. godini za potrebe bolje apsolutne orijentacije novog geoida, ali i nezavisne ocjene kvalitete HRG2000 modela geoida.

Izmjera preko 500 GNSS/Niveliranih točaka diljem kopnenog dijela RH, od kojih je na koncu upotrebljeno 495 (nakon provjere kvalitete; slika 10) omogućila je ne samo ispitivanje valjanosti raspoloživih GGM modela na našem području nego konačno i nezavisnu provjeru kvalitete HRG2000 geoida. Kako se vidi iz tablice 5, bitan napredak napravljen je u računanju globalnih geopotencijalnih modela, jer je pouzdanost od EGM96 modela (čine ga koeficijenti razvoja do maksimalnog stupnja i reda 360, što odgovara 55 km valnim duljinama), korištenog pri računanju HRG2000 geoida, drastično porasla kod sada raspoloživog EGM2008 modela (čine ga koeficijenti razvoja do maksimalnog stupnja i reda 2190, što odgovara 9 km valnim duljinama; Pavlis i dr. 2008). Iskazano vrijednostima standardnog odstupanja, ono se je smanjilo sa 0.250 m na svega 0.048 m, jednako kao i ukupno područje varijacije sa 1.932 m na svega 0.361 m. Nezavisna ocjena kvalitete HRG2000 geoida pokazuje da je ona zapravo bolja od očekivane, jer je standardno odstupanje 0.093 m i proteže se preko daleko najvećeg dijela teritorija, s izuzetkom nekoliko problematičnih, uglavnom rubnih područja (vidi sliku 10), koja su očigledno posljedica lošijih GPS/Niv. i prerijetkih Δg , GPS/Niv. podataka, raspoloživih 2000. godine.



Slika 10. Usporedba HRG2000 geoida s GNSS/Niveliranim točkama

Tablica 5: Statistika razlika između 495 GPS/Niveliranih i EGM96, EGM2008 odnosno HRG2000 undulacija (m)

Br.	Model geoida	Minimum	Maksimum	Sredina	Standardno odstupanje
1	EGM96 (360x360)	-1.868	0.064	-1.177	0.250
2	EGM2008 (2160x2160)	-1.073	-0.712	-0.890	0.048
3	HRG2000	-0.437	0.298	-0.012	0.093

Moderna strategija određivanja Zemljina polja ubrzanja sile teže u lokalnom području sastoji se u upotrebi tri vrste informacija: dugovalne strukture Zemljinog polja sile teže se preuzimaju iz raspoloživog globalnog geopotencijalnog modela, srednjevalni dio spektra potječe od korištenih diskretnih terestričkih podataka kao što su: anomalije slobodnog zraka, otkloni vertikale, uz pomoć satelitske altimetrije ili GPS/Nivelmana iznađene geoidne undulacije, i dr., te konačno kratkovalni i ultrakratkovalni dio se modelira uz pomoć visoko-razlučivog digitalnog modela reljefa. Kod toga se u “*remove*” dijelu postupka definiraju reducirana (rezidualna) mjerenja, koja se uključujući i pogreške mjerenja (šum) mogu prikazati kao linearni funkcionali poremećajnog potencijala T na slijedeći način (Bašić 2001):

$$x_i = L_i(T') + n_i = L_i(T) - L_i(T_{EGM}) - L_i(T_{RTM}) + n_i \quad (7)$$

Primjena metode kolokacije po najmanjim kvadratima rezultira s aproksimacijom poremećajnog potencijala \tilde{T}' od T' :

$$\tilde{T}'(P) = \mathbf{C}_P^T (\mathbf{C} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{x} , \quad (8)$$

gdje matrica \mathbf{C} sadrži (auto)kovarijance signala između opažanih veličina, matrica \mathbf{D} njegove pogreške, a matrica \mathbf{C}_P kovarijance između opažanih veličina i predicanog signala \tilde{T}' u točki P . Vrlo važan moment kod primjene metode kolokacije je definiranje varijanci i kovarijanci, i to kako između mjerenih tako i između mjerenih i predicanih signalnih veličina.

Da se dobije konačni rezultat, nužno je efekte anomalnih topografskih masa i upotrebljenog geopotencijalnog modela vratiti natrag kroz “*restore*” postupak:

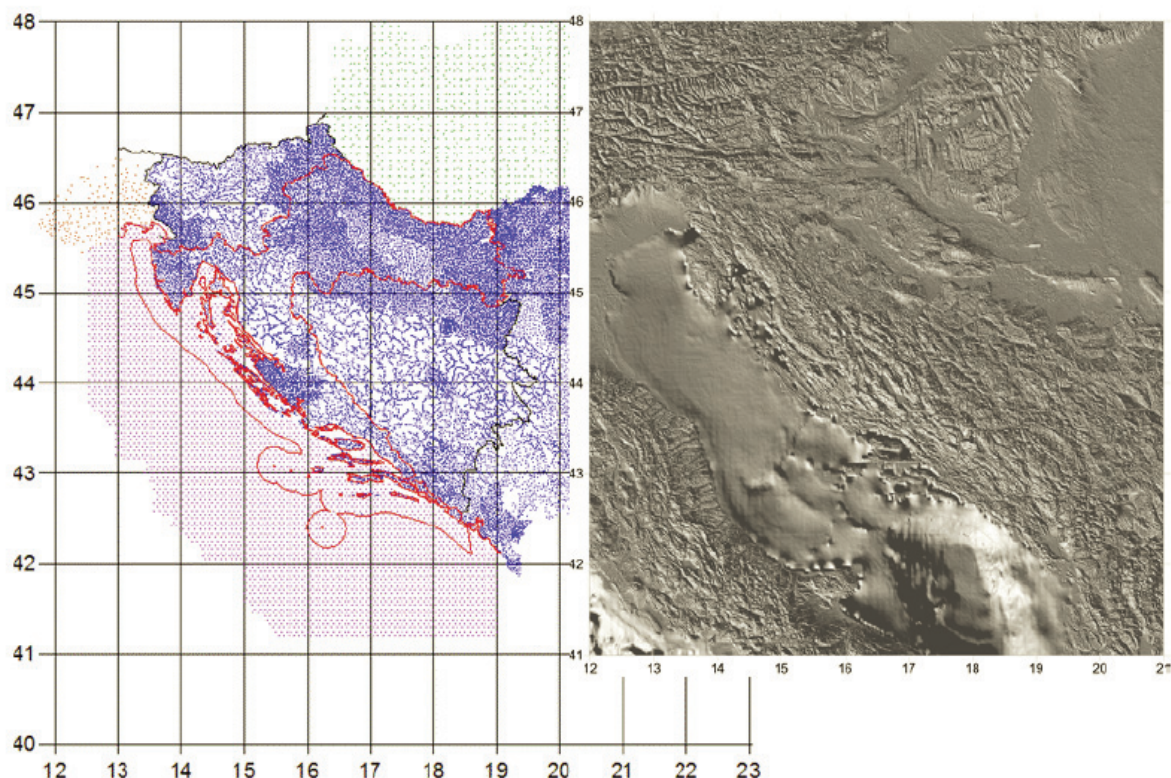
$$L_j(\tilde{T}) = L_j(\tilde{T}') + L_j(T_{EGM}) + L_j(T_{RTM}) \quad (9)$$

Kratkovalne strukture gravitacijskog polja obuhvaćene su rezidualnim modeliranjem topografije, za što su iskorištene informacije o Zemljinim masama sadržane u slijedećim digitalnim modelima reljefa: detaljniji ili fini 4"x5" DMR dobiven iz 3"x3" Shuttle Radar Topography Mission - SRTM (Bašić i Buble 2007) na području između 40⁰ i 48⁰ po geografskoj širini te između 10⁰ i 22⁰ po geografskoj duljini (vidi desni dio slike 11), zatim grubi 1'x1' DMR, koji pokriva veće područje između 36⁰ i 52⁰ po geografskoj širini te 5⁰ i 27⁰ po geografskoj duljini, jednako kao i 5'x5' referentni DMR za rezidualno modeliranje.

Za računanje anomalija slobodnog zraka iskorišteni su točkasti podaci o sili teži na kopnenom dijelu Hrvatske, Slovenije, Bosne i Hercegovine, Srbije i Crne Gore, a dodatno su uključeni i relativno rijetki točkasti podaci za silu težu na području Mađarske i Italije. Na Jadranu su u računanjima korišteni podaci satelitske altimetrije (Bašić i Rapp 1992) i digitalizirani terestrički podaci o sili teži (Morelli i dr. 1969). Svi su podaci adekvatno transformirani u GRS80 sustav, te je na taj način pripremljena datoteka od oko 30000 podataka za anomalije ubrzanja sile teže (slika 11 lijevo).

Primjenom „*remove*” postupka dobivanja rezidualnog polja ubrzanja sile teže kroz redukciju za efekte globalnog geopotencijalnog modela i rezidualnog modeliranja topografije dobiveni su više nego zadovoljavajući rezultati. Navodimo pokazatelje za primijenjene anomalije slobodnog zraka (slika 11) kao i za GNSS/Nivelirane točke (slika 10) koje su upotrebljene kod računanja HRG20009 geoida. Tablice 6 i 7 sadrže bitne statističke pokazatelje, gdje se pored ukupnog redukcijskog efekta iskazanog u vrijednosti standardne devijacije reziduala, i to sa standardnog odstupanja mjerenih anomalija od 29.20 mgala (1mgal=10⁻⁵ms⁻²) na svega 5.49 mgala kod rezidualnih anomalija odnosno sa standardnog odstupanja GNSS/Niveliranih undulacija od 1.100 m na svega 0.062 m kod reziduala, uočava i dobro centriranje anomalija ($\Delta_{\text{GREZ}}=0.276$ mgala) te iznos srednje vrijednosti GNSS/Niveliranih reziduala od $N_{\text{rez}}=-1.024$ m, koji najviše potječe iz

neslaganja našeg novog visinskog datuma HVRS71 i vertikalnog datuma EGM2008 modela (-0.890 m).



Slika 11. Gravimetrijski podaci i SRTM digitalni model reljefa

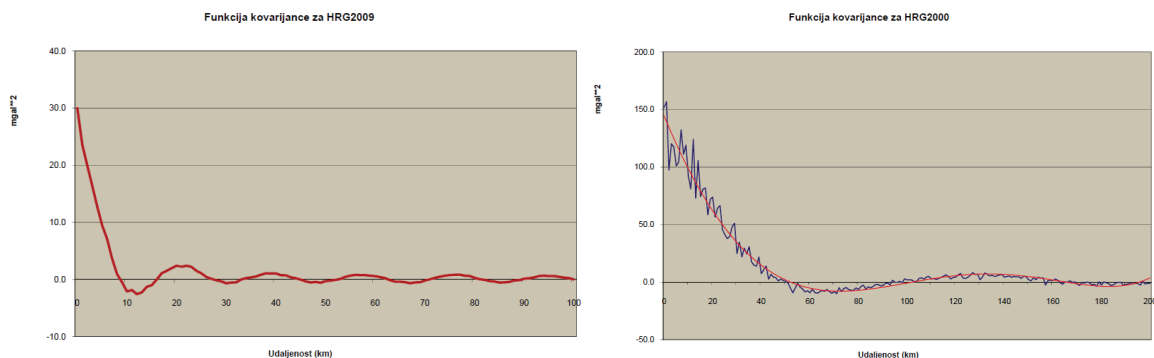
Tablica 6: Statistički podaci redukcije 29330 anomalija slobodnog zraka (10^{-5}ms^{-2})

	Δg_{GRS80}	$\Delta g_{\text{EGM2008}}$	Δg_{RTM}	Δg_{REZ}
Sredina	11.58	15.45	-4.14	0.276
Standardno odstupanje	29.20	28.55	13.18	5.491
Minimum	-130.71	-102.79	-142.69	-14.994
Maksimum	166.47	163.12	62.58	14.996

Tablica 7: Statistički podaci redukcije 495 GNSS/Niveliranih točaka (m)

	$N_{\text{GNSS/NIV}}$	N_{EGM2008}	N_{RTM}	N_{REZ}
Sredina	44.548	45.438	0.134	-1.024
Standardno odstupanje	1.100	1.081	0.030	0.062
Minimum	40.414	41.429	0.089	-1.271
Maksimum	46.666	45.517	0.247	-0.899

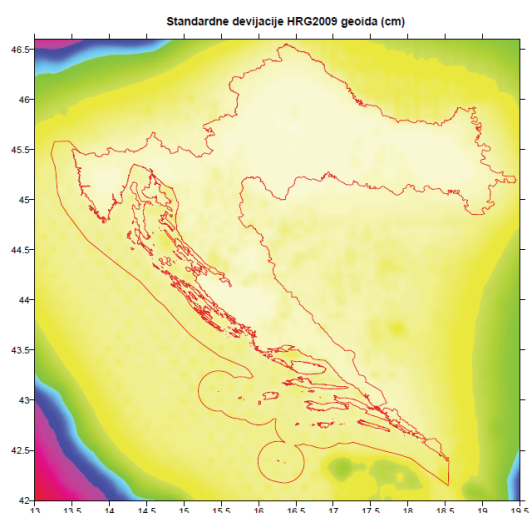
Kod primjene metode kolokacije po najmanjim kvadratima od presudnog je značaja računanje kovarijanci između mjerenih i/ili predičiranih veličina Zemljinog polja sile teže. Najbolji se rezultati postižu u slučaju kada se koristi empirijski određena funkcija kovarijance (slika 12 lijevo), koja najbolje opisuje statistička svojstva tog polja na području od interesa. Stoga je za Hrvatsku izračunana empirijska funkcija kovarijance na temelju 29330 reziduala anomalija slobodnog zraka, koja ima varijancu od svega 30.03 mgal^2 i prvu nul-vrijednost već nakon 9 km (!), što su izuzetno povoljne osobine za primjenu u kolokaciji. Ta funkcija pokazuje istovremeno puno bolje statističke karakteristike od one iznađene s znatno manje podataka (≈ 6000) korištenih prilikom računanja HRG2000 geoida (slika 12 desno).



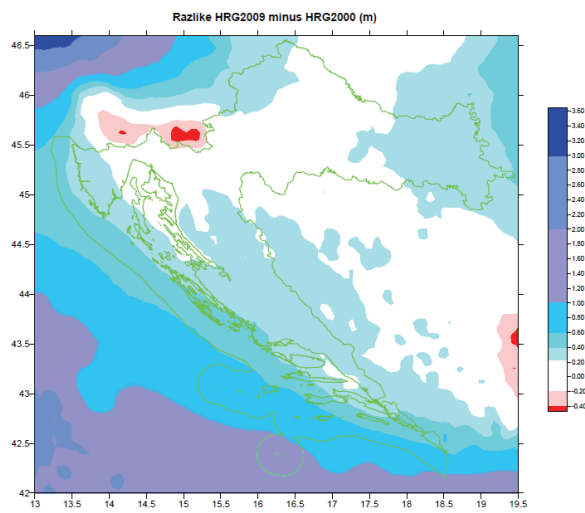
Slika 12. Empirijski iznađene funkcije kovarijanci 2009. i 2000. godine

Područje računanja izabrano je tako da potpuno pokriva teritorij Hrvatske i jednako je onom koje je korišteno 2000. godine, a to znači između 42.0° i 46.6° po geografskoj širini odnosno 13.0° i 19.5° po geografskoj duljini. Pravilni raspored točaka u kojima je obavljeno prediciranje reziduala geoida je odabran u rasteru $30'' \times 45''$ ($\sim 1 \times 1$ km), što predstavlja četiri puta bolju detaljnost računanja nego je to bio slučaj kod HRG2000 geoida (Bašić 2001). To znači da je broj točaka računanja sa 72 297 narastao na 288113.

Dobivena unutarnja ocjena točnosti prediciranih vrijednosti HRG2000 geoida (standardna odstupanja) predočena je na slici 13 i iznosi manje od 2 cm na kompletnom području Hrvatske. Da bismo dobili kompletne iznose geoidnih undulacija, bilo je još potrebno u točkama predikcije vratiti natrag pripadne efekte rezidualnog modeliranja topografije i globalnog geopotencijalnog modela. U tablici 8 nalazi se najvažnija statistika prediciranih vrijednosti HRG2009 geoida na temelju 72297 podataka računanja (rezolucija HRG2000), kao i numerička usporedba s HRG2000 geoidom. Grafički prikaz razlika između HRG2009 i HRG2000 geoida prikazan je na slici 14. Vidljivo je da su najveće razlike na rubovima područja računanja (posljedica ponajviše načina računanja i upotrebe različitih podataka), dok se preko teritorija Hrvatske pojavljuju razlike do 40-tak cm na kopnu te do 100-njak cm na Jadranu (Palagruža). Kao konačni proizvod definiran je posebno “selektirani HRG2009 geoid” (slika 15), kojega čini ukupno 153628 vrijednosti geoidnih undulacija s pripadajućim standardnim odstupanjima.



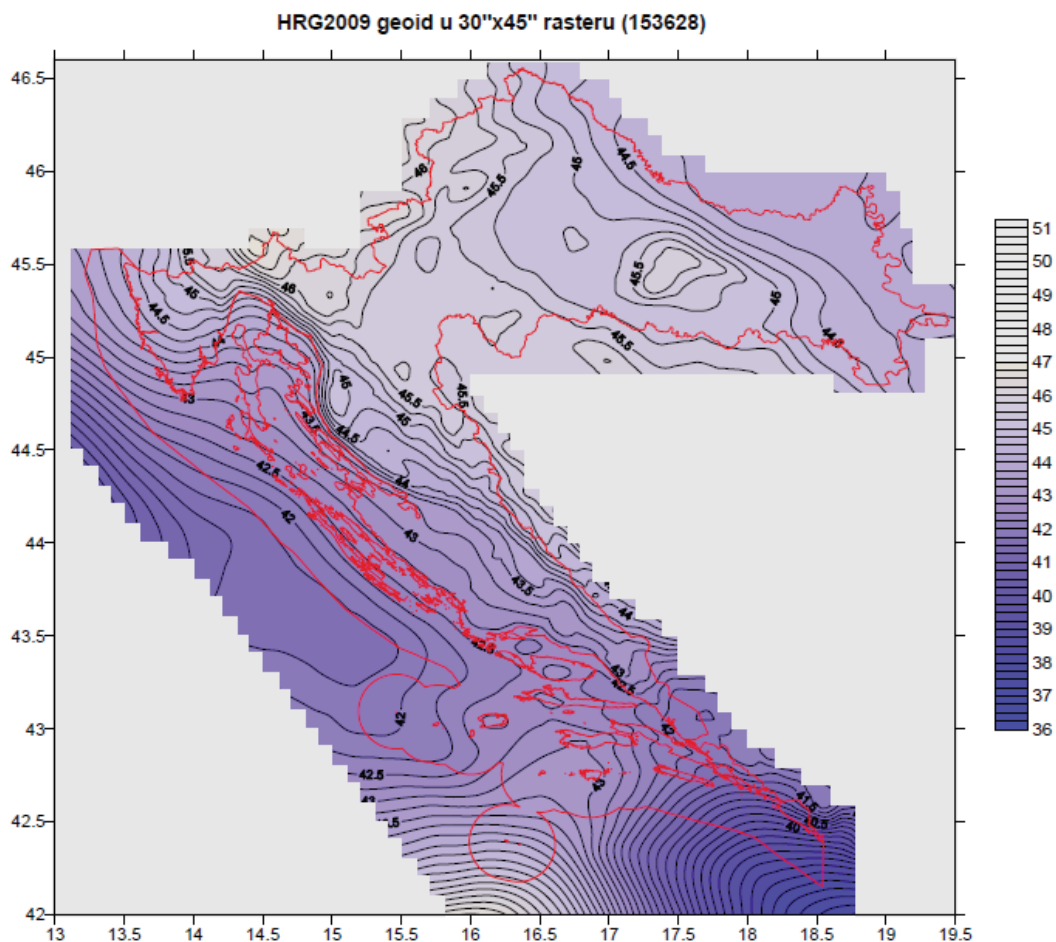
Slika 13. Točnost HRG2009 geoida (cm)



Slika 14. HRG2009 minus HRG2000 (cm)

Tablica 8: Statistički podaci usporedbe HRG2009 i HRG2000 geoida (72297 podataka, m)

	$N_{HRG2009}$	$N_{HRG2000}$	$N_{HRG2009}-N_{HRG2000}$
Sredina	44.151	43.618	0.533
Standardno odstupanje	2.060	2.115	0.537
Minimum	36.807	35.030	-0.483
Maksimum	50.262	47.130	3.660



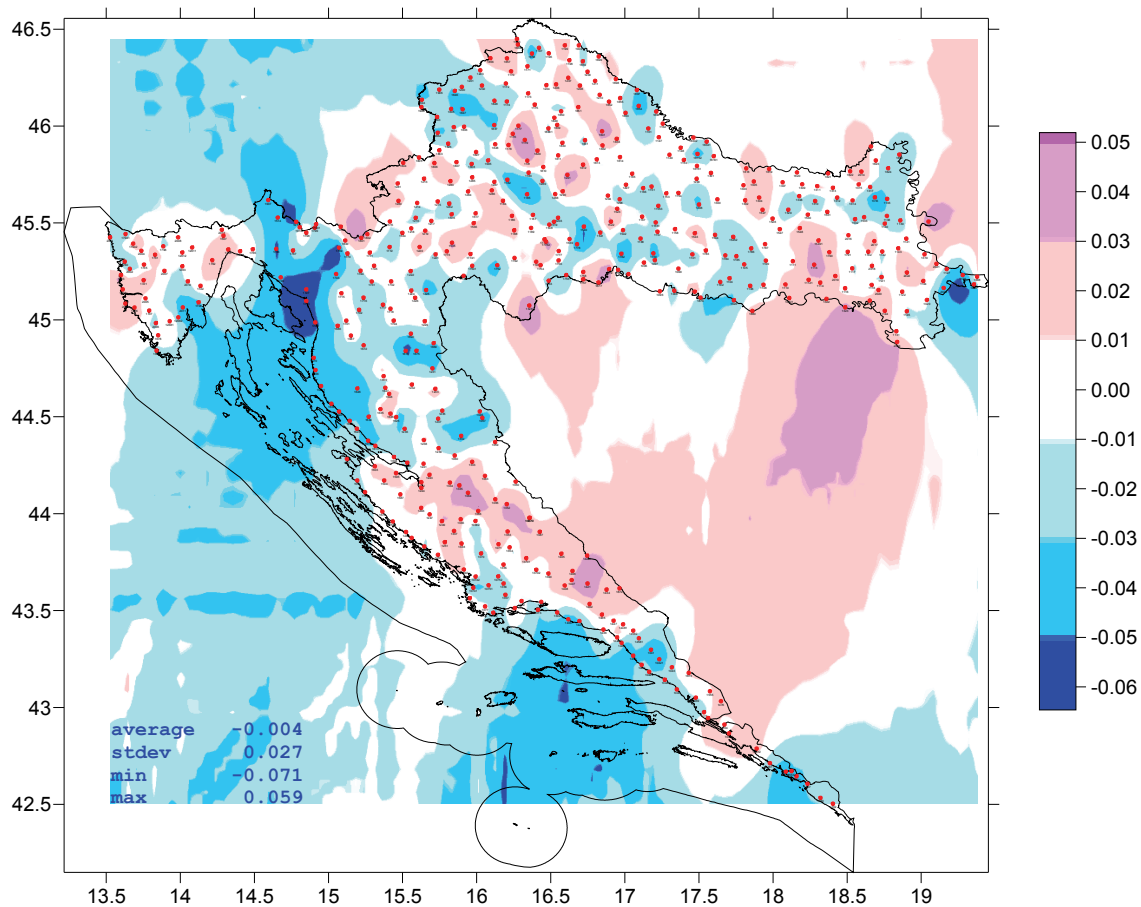
Slika 15. Selektirani novi model geoida Republike Hrvatske HRG2009 (m)

Tablica 9: Statistika razlika između 495 GPS/Niveliranih i HRG2009 undulacija (m)

Model geoida	Minimum	Maksimum	Sredina	Standardno odstupanje
HRG2009	-0.071	0.059	-0.004	0.027

Dodatna procjena kvalitete HRG2009 geoida pokazuje kako se dobro slaže konačno rješenje HRG2009 s undulacijama u 495 GNSS/Niveliranih točaka. To slaganje je izvanredno visoko (tablica 9 i slika 16), jer je standardno odstupanje svega 0.027 m (uz srednju razliku gotovo nula) ukazujući prije svega na dobro odabranu metodologiju i realizaciju računanja, ali i na visoku pouzdanost novog rješenja geoida od 2-3 cm preko najvećeg dijela hrvatskog kopna.

Razlike geoida GNSS/NIV minus HRG2009 u 495 tocaka (m)



Slika 16. Usporedba HRG2009 geoida s GNSS/Niveliranim točkama

4. Zaključak

U okviru projekta “*Novi model geoida Republike Hrvatske i poboljšanje T7D modela transformacije*” definiran je vrlo pouzdani novi model geoida Republike Hrvatske HRG2009 kao i jedinstveni HDKS/HTRS96 GRID model transformacije koordinata između iz doba austro-ugarske monarhije nasljeđenog i novog službenog položajnog datuma (preostala je još implementacija od strane DGU zadnjih mjeseci određenih novih točaka za transformaciju, koja je u tijeku). U (Rožić 2009) definiran je za potrebe DGU model transformacije visina Trst/HVRS71. Temeljem toga može se zaključiti:

- Razvojem i konačnim definiranjem rješenja za transformaciju prostornih podataka T7D (modela i kompjutorskog programa) na temelju bitno gušćeg i bolje raspoređenog polja identičnih točaka ($\approx 2000+3000$), koje radi točnije transformacije visina uključuje i najnoviju verziju geoida HRG2009, biti će vrlo skoro na raspolaganju izuzetno pouzdan jedinstveni model transformacije između HDKS i HTRS96 (ETRS89) položajnih referentnih sustava u trodimenzionalnom smislu, kao i između Trst i HVRS71 visinskih referentnih sustava (datuma) za kompletni teritorij Republike Hrvatske. Očekivana je položajna i visinska točnost transformacije bolja od ± 5 cm za kopneni dio odnosno ± 10 cm za područje Jadrana (otoci).
- Pritom je važno naglasiti da je jedini ispravni smisao odnosno smjer primjene kod položajne transformacije s T7D softverom HDKS => HTRS96, što znači za

transformaciju “starih” podataka u novi položajni referentni sustav Republike Hrvatske.

- U tom kontekstu je i za optimalnu primjenu CROPOS sustava izuzetno bitno reći da je nužno sve vrste novih izmjera raditi u HTRS96 sustavu, jer jedino tada nema potrebe za transformacijom odnosno “kvarenjem” podataka u HDKS, već se čuva izvorna točnost koordinata koju omogućuje primjena modernog geodetskog instrumentarija i tehnologije u novim geodetskim referentnim sustavima Republike Hrvatske.

Zahvala. Autor se najljepše zahvaljuje Državnoj geodetskoj upravi Republike Hrvatske na financiranju znanstveno-stručnog projekta u okviru kojega je nastao ovaj rad, kao i svim suradnicima na projektu, posebno iz Sektora za državnu izmjeru DGU, Odjela za osnovne geodetske radove Hrvatskog geodetskog instituta i Katedre za državnu izmjeru Geodetskog fakulteta.

5. Literatura

- Bašić, T. (2001): Detaljni model geoida Republike Hrvatske HRG2000. Izvješća Državne geodetske uprave republike Hrvatske o znanstveno-stručnim projektima iz 2000. godine, urednik I. Landek, 11-22, Zagreb.
- Bašić, T. (2002): Istraživanje Zemljinog polja sile teže na Geodetskom fakultetu. Zbornik Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu povodom 40. obljetnice samostalnog djelovanja (1962.-2002.), urednik T. Bašić, 169-179, Zagreb.
- Bašić, T. (2007): Introduction and Implementation of ESRS in Croatia, Strokovni posvet “S koordinatami v Evropi”, 37. Geodetski dan Zveze geodetov Slovenije, 16-17.11.2007., Nova Gorica, *Geodetski vestnik*, ISSN: 0351-0271, Volume 51, Issue 4, p. 751-762, UDK:528.236 (497.5), Ljubljana.
- Bašić, T., Rapp, R. H. (1992): Oceanwide Prediction of Gravity Anomalies and Sea Surface Heights Using Geos-3, Seasat and Geosat Altimeter Data and Etopo5u Bathymetric Data. Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Report No. 416, 1-89, Columbus/Ohio.
- Bašić, T., Šljivarić, M. (2003): Uslužni programi za korištenje podataka službenog hrvatskog geoida i transformaciju koordinata između HDKS-a i ETRS-a. Izvješća Državne geodetske uprave Republike Hrvatske o znanstveno-stručnim projektima iz 2001. godine, urednik I. Landek, 21-32, Zagreb 2003.
- Bašić T., Markovinović D., Rezo M., Bosiljevac M. (2003): Izrada dokumentacije neophodne za usvajanje službenog položajnog i gravimetrijskog datuma Republike Hrvatske. Elaborat za DGU RH, 1-62, Zagreb.
- Bašić, T., Hećimović, Ž. (2006): Latest Geoid Determinations for the Republic of Croatia. IAG International Symposium Gravity, Geoid and Space Missions GGSM2004, Session 3: Regional geoid modeling, Porto, Portugal, 30.8.-3.9. 2004., oral presentation, CD-Proceedings, Porto. Paper published in Bureau Gravimétrique International (BGI) and International Geoid Service (IGeS) Joint Bulletin: *Newton's Bulletin*, ISSN 1810-8547, Issue n° 3, 83-92, R. Barzaghi, F. Sanso, R. Biancale, B. Langellier (Eds.), 2006.
- Bašić, T., Šljivarić, M., Buble, G. (2006a): Izrada jedinstvenog transformacijskog modela HTRS96/HDKS. Elaborat za Državnu geodetsku upravu Republike Hrvatske, 1-133, Zagreb.
- Bašić, T., Šljivarić, M., Buble, G. (2006b): Jedinstveni transformacijski model HTRS96/HDKS. Državna geodetska uprava Republike Hrvatske: Izvješća o znanstveno-stručnim projektima 2004./2005. godina, urednik M. Bosiljevac, 121-135, Zagreb.
- Bašić, T., Markovinović, D., Rezo, M. (2006c): Osnovna gravimetrijska mreža Republike Hrvatske. *Geodetski list* 60 (83), 2, 73-91, Zagreb.
- Bašić, T., Buble, G. (2007): Usporedba globalnog modela visina SRTM3 s postojećim digitalnim modelima reljefa na području Hrvatske. *Geodetski list* 61 (84), 2, 93-111, Zagreb.

- Brockmann E., Harsson B.-G., Ihde J. (2001): Geodetic Reference System of the Republic of Croatia - Consultants Final Report on Horizontal and Vertical Datum Definition, Map Projection and Basic Networks, 1-35, Zürich – Oslo - Frankfurt.
- Hećimović, Ž., Bašić, T. (2005a): Satelitska misija CHALLENGING Minisatellite Payload (CHAMP). *Geodetski list* 59 (82), 2, 129-147, Zagreb.
- Hećimović, Ž., Bašić, T. (2005b): Satelitska misija Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE). *Geodetski list* 59 (82), 3, 181-197, Zagreb.
- Hećimović, Ž., Bašić, T. (2005c): Satelitska misija Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer (GOCE). *Geodetski list* 59 (82), 4, 253-265, Zagreb.
- Grgić, I., Barišić, B., Bašić, T., Lučić, M., Repanić, M., Liker, M. (2007): Fundamental Gravity Network of the Republic of Croatia in the Function of Control and Improving of National and European Geoid Model. IAG Symposium Commission 1 - Reference Frames, Sub-commission for Europe (EUREF), Session 8: Other EUREF-related contributions, June 5-9, 2007, London, England.
- ICSM (2000): GDA Grid Transformation Using Distortion Modelling – Info Sheet, Intergovernmental Committee on Surveying and Mapping, Canberra.
- Liker, M., Lučić, M., Barišić, B., Bašić, T., Repanić, M., Grgić, I. (2008): How most recent global geopotential models fit the Croatian territory? IAG International Symposium: Gravity, Geoid and Earth Observation 2008, presented poster, 23.-27.06.2008., Chania, Crete, Grčka,
- Morelli C., Carozzo M. T., Ceccherini P., Finetti I., Gantar C., Pisani M., Schmidt di Friedberg P. (1969): Regional Geophysical Study of the Adriatic Sea, *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, Vol. XI, N. 41-42, Trieste.
- Narodne novine (110/2004): Odluka o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i ravninskih kartografskih projekcija Republika Hrvatske. Službeni list Republike Hrvatske, br. 110, Zagreb.
- Pavlis, N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. (2008): An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008; presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, April 13-18, 2008, Vienna, Austria.
- Rožić, N (2009): Implementacija novog visinskog referentnog sustava Republike Hrvatske, 1-17, ovaj Zbornik, DGU, Zagreb.

Unique transformation model and new geoid model of the Republic of Croatia

Abstract. *The paper made the preliminary results for the new GRID model of transformation between the inherited local (HDKS) and the new official global geocentric (HTRS96) datum, based on the time of writing available identical points in both systems (around 2000) as well as results of a new geoid surface for Croatia (HRG2009), which together constitute a unique model of transformation T7D (computer program) for the official transformation of the old spatial data in a new positional and vertical reference system of the Republic of Croatia. Expected accuracy for the three-dimensional transformation is better than ± 5 cm in largest part of Croatian territory.*

Keywords: *geodetic datum, geodetic reference system, transformation, distortion, geoid, least squares collocation.*