Izotomične točke trokuta

Helena Halas[1] *i Mea Bombardelli*[2], *Zagreb*

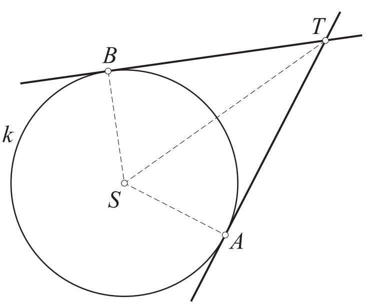
Vjerujemo da su čitatelji upoznati s četiri karakteristične točke trokuta: središtem opisane i upisane kružnice, težištem i ortocentrom. Možda neki od vas misle da su to sve, da drugih nema. Međutim, to je daleko od istine. Clark Kimberling u svojoj enciklopediji [1] opisuje čak 3587 različitih karakterističnih točaka trokuta, a popis se redovito dopunjuje.

U ovom članku upoznat ćemo dvije karakteristične točke trokuta: Gergonneovu i Nagelovu točku. Nakon toga definirat ćemo pojam izotomičnih točaka i dokazati još nekoliko teorema.

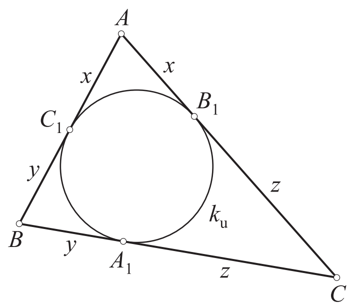
Dirališta upisane i pripisanih kružnica

Vjerujemo da je čitateljima poznata sljedeća tvrdnja:

Lema 1. *Odsječci tangenata povučenih iz neke točke na kružnicu su jednaki, tj. uz oznake kao na slici 1 vrijedi* $|TA| = |TB|$.



Slika 1.



Slika 2.

Izračunajmo sada udaljenosti dirališta upisane kružnice od vrhova trokuta. Označimo vrhove i dirališta upisane kružnice k_u sa stranicama trokuta kao na slici 2.

Uočimo da su stranice trokuta tangente upisane kružnice. Prema lemi 1 udaljenosti pojedinog vrha od dvaju dirališta na stranicama koje sadrže taj vrh međusobno su jednake. Stoga uvedimo oznake $x = |AB_1| = |AC_1|$, $y = |BA_1| = |BC_1|$ i $z = |CA_1| = |CB_1|$. Sada je lako vidjeti da vrijedi $y + z = a$, $x + z = b$ i $x + y = c$, gdje su a, b, c duljine stranica trokuta. Rješavanjem tog sustava dobije se

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a), \quad y = \frac{1}{2}(a + c - b), \quad z = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Uvedemo li još oznaku $s = \frac{a+b+c}{2}$ dobivamo sljedeću lemu:

---

[1] Asistentica na Građevinskom fakultetu u Zagrebu, e-mail: `hhalas@gmail.com`

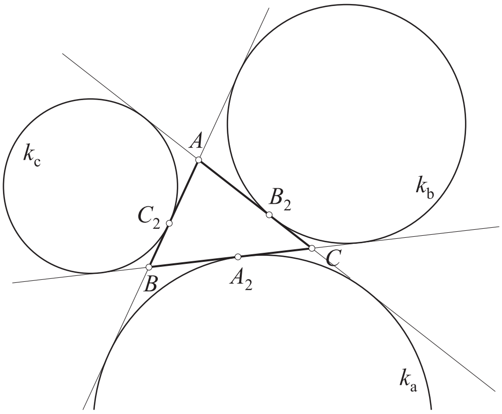
[2] Docentica na Matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu, e-mail: `bombarde@math.hr`

Lema 2. *Neka su A_1, B_1 i C_1 dirališta upisane kružnice k_u trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Tada je*

$$|AB_1| = |AC_1| = s - a, \quad |BA_1| = |BC_1| = s - b, \quad |CA_1| = |CB_1| = s - c.$$

Podsjetimo se što je pripisana kružnica trokuta:

Kružnicu koja dira jednu stranicu danog trokuta s njegove vanjske strane i produžetke preostalih dviju stranica zovemo **pripisanom kružnicom** trokuta.



Slika 3.

Svaki trokut ima tri pripisane kružnice (vidi sliku 3). Slično lemi 2 možemo dokazati sljedeće:

Lema 3. *Neka su A_2, B_2 i C_2 redom dirališta pripisanih kružnica k_a, k_b i k_c trokuta ABC sa stranicama $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Tada je*

$$|BC_2| = |CB_2| = s - a, \quad |AC_2| = |CA_2| = s - b, \quad |AB_2| = |BA_2| = s - c.$$

Gergonneova i Nagelova točka trokuta

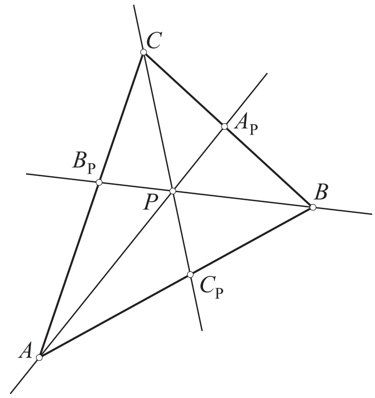
Uz upisanu i pripisane kružnice vezane su dvije manje poznate karakteristične točke trokuta. U nastavku ćemo pokazati njihovu konstrukciju i egzistenciju. No prije toga uočimo da su ortocentar, težište i središte upisane kružnice trokuta zapravo sjecišta po triju pravaca od kojih svaki prolazi kroz jedan vrh trokuta. O takvim trojkama pravaca govori sljedeći važan teorem:

Lema 4. (Ceva[3]) *Neka su A_P, B_P, C_P točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC. Pravci AA_P, BB_P, CC_P prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_P|}{|C_PB|} \cdot \frac{|BA_P|}{|A_PC|} \cdot \frac{|CB_P|}{|B_PA|} = 1.$$

[3] Giovanni Ceva (1647.–1734.) talijanski matematičar

Ova činjenica poznata je pod imenom **Cevin teorem**, a njen dokaz može se naći u [2]–[6]. Tri pravca koja prolaze vrhovima danog trokuta ABC i sijeku se u jednoj točki zovemo **Cevinim pravcima**. Primijetili smo da su takvi pravci težišnice, simetrale kutova i pravci na kojima leže visine trokuta, što znači da postojanje težišta, središta upisane kružnice i ortocentra možemo dokazati pomoću Cevinog teorema ([2], [3]). Primijenimo sada taj teorem na dirališta upisane odnosno pripisanih kružnica trokuta.



Slika 4.

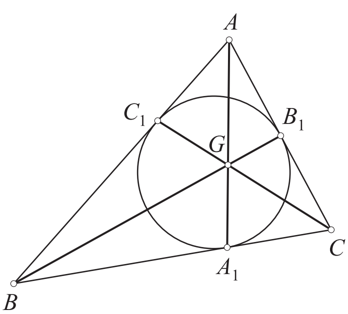
Teorem 1. (Gergonne[4]) *Neka su A_1, B_1, C_1 dirališta upisane kružnice trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta. Tada se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u jednoj točki.*

Dokaz. Po lemi 1 vrijedi

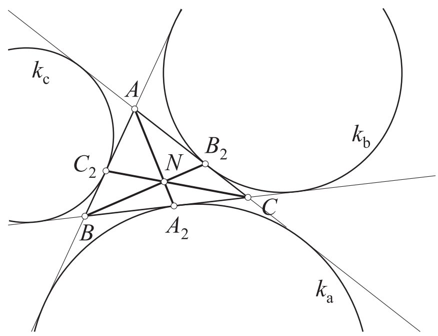
$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=\frac{s-a}{s-c}\cdot\frac{s-b}{s-a}\cdot\frac{s-c}{s-b}=1,$$

pa tvrdnja slijedi prema Cevinom teoremu. □

Točka u kojoj se sijeku pravci AA_1, BB_1, CC_1 iz teorema 1 zove se **Gergonneova točka**.



Slika 5.



Slika 6.

Teorem 2. (Nagel[5]) *Neka su A_2, B_2, C_2 dirališta pripisanih kružnica trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Tada se pravci AA_2, BB_2, CC_2 sijeku u jednoj točki.*

Dokaz je analogan prethodnom, te ga prepuštamo čitatelju.

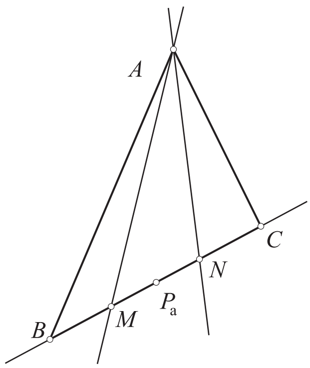
Točka u kojoj se sijeku pravci AA_2, BB_2, CC_2 iz teorema 2 zove se **Nagelova točka**.

[4] Josef Diaz Gergonne (1771.–1859. g.) francuski astronom i matematičar

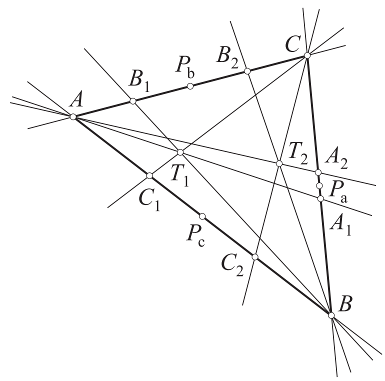
[5] Christian August Nagel (1821.–1903. g.) njemački geodet i matematičar

Neka je dan trokut ABC, te neka su M i N točke na pravcu BC, simetrične u odnosu na polovište P_a dužine $\overline{BC}$. Tada kažemo da su pravci AM i AN **izotomični**.

Iz definicije imamo dva zaključka. Prvo, promatrajući sliku 7 možemo uočiti da simetričnost točaka M i N u odnosu na polovište P_a povlači $|BM| = |CN|$ i $|BN| = |CM|$. I drugo, svakom vrhu trokuta možemo pridružiti beskonačno mnogo parova izotomičnih pravaca. Za izotomične pravce vrijedi sljedeći teorem:



Slika 7.



Slika 8.

Teorem 3. *Neka su A_1, B_1 i C_1 redom točke na pravcima BC, AC i AB takve da se tri pravca AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki. Tada se njima izotomični pravci AA_2, BB_2 i CC_2 također sijeku u jednoj točki (v. sl. 8).*

Dokaz. Kako se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u jednoj točki (T_1) vrijedi

$$\frac{|AB_1|}{|CB_1|} \cdot \frac{|CA_1|}{|BA_1|} \cdot \frac{|BC_1|}{|AC_1|} = 1.$$

Neka su A_2, B_2 i C_2 točke na stranicama trokuta (ubuduće to nećemo posebno naglašavati) takve da su pravci AA_2, BB_2, CC_2 izotomični pravcima AA_1, BB_1, CC_1 redom. Prema definiciji vrijedi:

$$\begin{aligned} |AB_1| &= |CB_2|, \qquad & |CB_1| &= |AB_2|, \\ |CA_1| &= |BA_2|, \qquad & |BA_1| &= |CA_2|, \\ |BC_1| &= |AC_2|, \qquad & |AC_1| &= |BC_2|. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\frac{|CB_2|}{|AB_2|} \cdot \frac{|BA_2|}{|CA_2|} \cdot \frac{|AC_2|}{|BC_2|} = 1,$$

te se prema Cevinom teoremu pravci AA_2, BB_2, CC_2 sijeku u jednoj točki (T_2). □

Uočimo da teorem 3 možemo preoblikovati na sljedeći način:

Pravci izotomični Cevinim pravcima trokuta ABC, koji su pridruženi bilo kojoj točki T_1 ravnine trokuta, prolaze jednom točkom T_2.

Bilo kojoj po volji odabranoj točki T_1 ravnine može se na ovaj način pridružiti točka T_2. Očito je točki T_2 na isti način pridružena točka T_1. Točke T_1 i T_2 iz teorema 3 zovemo **izotomičnim točkama** trokuta ili **izotomično konjugiranim točkama** trokuta ABC.

Dakle, postoji beskonačno mnogo parova točaka izotomičnih u odnosu na promatrani trokut. Dakako, ako možemo promatrati što je izotomična točka bilo koje točke ravnine, onda je i zanimljivo pogledati što su izotomične točke poznatih karakterističnih točaka trokuta, te jesu li i one karakteristične točke trokuta.

Teorem 4. *Težište T danog trokuta ABC je jedina točka ravnine trokuta koja je sama sebi izotomična točka.*

Teorem trivijalno proizlazi iz činjenice da je težišnica sama sebi izotomični pravac.

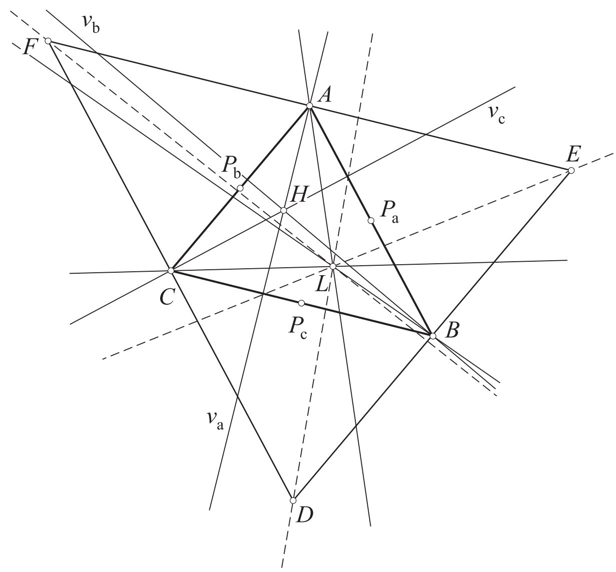
Teorem 5. *Gergonneova i Nagelova točka su međusobno izotomične točke.*

Dokaz. Iz leme 2 i leme 3 slijedi

$$|AC_1| = |BC_2| = s - a,$$
$$|BA_1| = |CA_2| = s - b,$$
$$|CB_1| = |AB_2| = s - c.$$

Sada tvrdnja slijedi iz teorema 3. $\square$

Zanimljivo je pitanje koja je točka izotomična ortocentru trokuta.



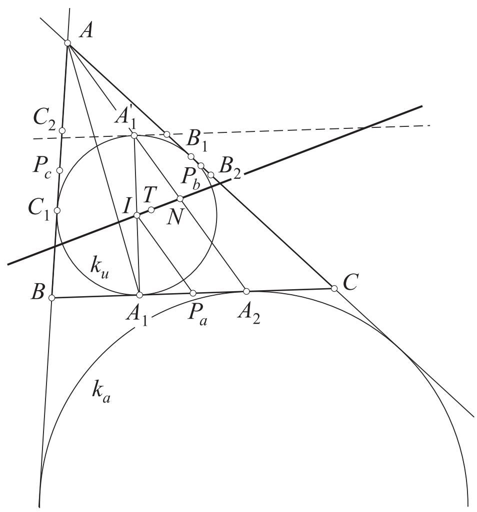
Slika 9.

Postupkom opisanim u teoremu 3 moguće je za bilo koju točku konstruirati njoj izotomičnu točku obzirom na dani trokut. Na slici 9 točka H je ortocentar trokuta ABC, a točka L njoj izotomična točka u odnosu na trokut ABC. Može se pokazati da je točka L Lemoineova točka trokuta DEF čije su stranice paralelne stranicama danog trokuta ABC, a prolaze njegovim vrhovima. Općenito, Lemoineova točka trokuta je sjecište pravaca osnosimetričnih težišnicama trokuta u odnosu na odgovarajuće simetrale kuta (takvi pravci nazivaju se simedijane trokuta). Dokaz postojanja Lemoineove točke možete pronaći u [4], a činjenicu o izotomičnoj točki ortocentra trokuta u [7].

Nagelov pravac

Mnogi čitatelji zasigurno su čuli za Eulerov[6] pravac na kojem leže središte opisane kružnice, težište i ortocentar (vidi [4] ili [8]). No, nisu to jedine tri kolinearne karakteristične točke trokuta. Ovdje ćemo pokazati da Nagelova točka leži na pravcu kroz središte upisane kružnice i težište.

Teorem 6. *Neka je dan trokut ABC, te neka su T njegovo težište, I središte upisane kružnice i N Nagelova točka. Tada te tri točke leže na jednom pravcu i vrijedi* $|TN| = 2 \cdot |TI|$.



Slika 10.

Dokaz. Označimo trokutu upisanu i pripisane kružnice s njihovim diralištima kao ranije, te još označimo polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom s P_a, P_b i P_c. Ako istaknemo elemente kao na slici 10, možemo uočiti da su upisana kružnica k_u i pripisana kružnica k_a trokuta ABC upisane u kut $\sphericalangle BAC$, stoga postoji homotetija s centrom u točki A koja preslikava jednu kružnicu u drugu.

Nadalje, neka je A_1' dijametralno suprotna točka točki A_1 na kružnici k_u, te vrijedi $|A_1I| = |IA_1'|$. Zbog spomenute homotetije točke A, A_1' i A_2 su kolinearne. Kako znamo da su AA_1 i AA_2 izotomični pravci, vrijedi $|A_1P_a| = |A_2P_a|$. Sada možemo zaključiti da je $\overline{IP_a}$ srednjica trokuta $A_1A_2A_1'$, pa je pravac IP_a paralelan pravcu A_2A_1'.

Neka je h homotetija s centrom u točki T i koeficijentom -2. Budući da težište dijeli težišnicu $\overline{AP_a}$ u omjeru $2:1$, računajući od vrha trokuta, homotetija h preslikava točku P_a u točku A. Poznato je da svaka homotetija preslikava pravac u njemu paralelan

[6] Leonhard Euler (1707.–1783. g.) švicarski matematičar, fizičar i astronom

pravac. Homotetijom h pravac IP_a preslikava se u njemu paralelan pravac koji prolazi točkom A, a to je pravac AA_2. Analogno se pravac IP_b preslikava u pravac BB_2. To znači da se točka I pri homotetiji h preslikava u sjecište pravaca AA_2 i BB_2, tj. u Nagelovu točku N. Time smo pokazali $|NT| = 2 \cdot |IT|$. $\square$

Pravac koji prolazi kroz središte upisane kružnice trokuta, težište i Nagelovu točku nazivamo ***Nagelovim pravcem***.

Napomena. Slično se dokazuje kolinearnost točaka na Eulerovom pravcu (vidi [8]).

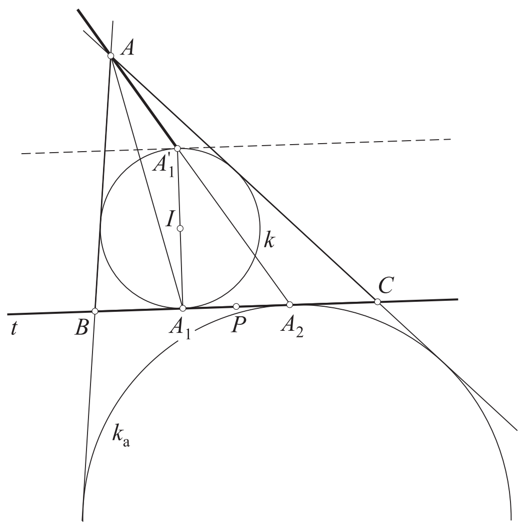
Zadaci s natjecanja

Za kraj navedimo dva zadatka.

Zadatak 1. Kružnica k i njezina tangenta t nalaze se u jednoj ravnini, a točka P je na t. Pronađi geometrijsko mjesto točaka A za koje vrijedi: postoje dvije točke B i C na t tako da je P polovište dužine $\overline{BC}$, a kružnica k je upisana u trokut ABC.

(33. IMO 1992., Moskva, vidi [9])

Rješenje. Neka je A_1 točka u kojoj tangenta t dodiruje kružnicu k čije je središte I, a točka A_1' dijametralno suprotna točki A_1 na kružnici k. Uzmimo sada točku A i odgovarajuće točke B i C na tangenti t tako da je kružnica k upisana trokutu ABC, kao na slici 11.



Slika 11.

Nadalje, neka je A_2 točka na BC takva da je pravac AA_2 izotomičan pravcu AA_1. Obzirom da je A_1 diralište upisane kružnice trokuta ABC i stranice $\overline{BC}$, po teoremu 5 je točka A_2 diralište pripisane kružnice trokuta ABC i stranice $\overline{BC}$, a ta kružnica je kružnica s dosadašnjom oznakom k_a. Prema definiciji izotomičnih pravaca znamo da je udaljenost dirališta A_1 od vrha B jednaka udaljenosti dirališta A_2 od vrha C. Ranije smo spomenuli da postoji homotetija s centrom u točki A koja preslikava upisanu kružnicu k_u trokuta ABC u pripisanu kružnicu k_a tog trokuta, pa su točke A, A_1' i A_2 kolinearne. Nadalje, lako je vidjeti da za svaku točku A na pravcu $A_1'A_2$ takvu da je A_1' između A i A_2, postoji trokut ABC koji zadovoljava uvjet zadatka.

Dakle, ako s A_1 označimo dirališe kružnice k i pravca t, s A_2 točku simetričnu diralištu A_1 u odnosu na točku P, te s A_1' točku na kružnici k dijametralno suprotnu točki A_1, onda je traženo geometrijsko mjesto točaka A dio pravca $A_1'A_2$, i to polupravac s vrhom A_1' koji ne sadrži točku A_2.

Ideje koje smo vidjeli u članku mogu se primijeniti u sljedećem zadatku koji prepuštamo čitatelju.

Zadatak 2. Neka je ABC trokut s kutovima α, β, γ i upisanom kružnicom k_u. Spojnica dirališta pripisane kružnice i stranice $\overline{BC}$ s vrhom A siječe kružnicu k_u u dvije točke; neka je A_1 sjecište bliže vrhu A. Analogno se definiraju točke B_1 i C_1. Odredi kutove trokuta $A_1B_1C_1$.

(Izborno natjecanje za MEMO, 2008.)

Literatura

[1] CLARK KIMBERLING, *Encyclopedia of Triangle Centers*, `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`

[2] B. DAKIĆ, *Cevin poučak i neke osobite točke trokuta*, Matematika i škola, broj 21, Zagreb, 2003, str. 31–33.

[3] D. VELJAN, *Cevin teorem i "osobite" točke trokuta*, Matematičko-fizički list, broj 174, 1993, str. 65–71.

[4] D. PALMAN, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[5] A. MARIĆ, *Poučci elementarne matematike*, Element, Zagreb, 2006.

[6] Y. SORTAIS, *La géométrie du triangle*, Hermann, Èditeurs des sciences et des arts, Pariz, 1997.

[7] `http://mathworld.wolfram.com/IsotomicConjugate.html`

[8] D. BAKOŠ, Z. KOLAR-BEGOVIĆ, *Eulerova kružnica*, Matematičko-fizički list, broj 237, 2009, str. 23–28.

[9] Ž. HANJŠ, *Međunarodne matematičke olimpijade*, Element, Zagreb, 2009.

⋆ ⋆ ⋆