SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
GEOFIZIČKI ODSJEK

IVA KAVČIČ

MODELIRANJE ATMOSFERSKIH GRANIČNIH SLOJEVA S DOPRINOSOM TEORIJI SINGULARNO PERTURBIRANIH PROBLEMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

ZAGREB, 2010.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
GEOFIZIČKI ODSJEK

Iva Kavčič

MODELIRANJE ATMOSFERSKIH GRANIČNIH SLOJEVA S DOPRINOSOM TEORIJI SINGULARNO PERTURBIRANIH PROBLEMA

Doktorska disertacija
predložena Geofizičkom odsjeku
Prirodoslovno - matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu
radi stjecanja akademskog stupnja
doktora prirodnih znanosti iz polja fizike

Zagreb, 2010.

Ova je doktorska disertacija izrađena u Zagrebu pod vodstvom prof. dr. sc. Branka Grisogona i prof. dr. sc. Mladena Rogine, u sklopu Sveučilišnoga poslijediplomskog studija pri Geofizičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkoga fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Zahvaljujem svojim mentorima, prof. dr. sc. Branku Grisogonu i prof. dr. sc. Mladenu Rogini na vodstvu i nesebičnom dijeljenju znanja, te naročito na mogućnosti interdisciplinarnog istraživanja. Hvala i ostalim kolegama i kolegicama s Geofizičkog odsjeka na ugodnoj suradnji. Posebna hvala mojoj obitelji i prijateljima na podršci koju su mi pružali na ovom putu.

Potporu izradi ove disertacije dali su i L'OREAL ADRIA i Hrvatsko povjerenstvo za UNESCO pri Ministarstvu kulture kroz nacionalni program stipendiranja "Za žene u znanosti", na čemu im srdačno zahvaljujem.

Sadržaj

1. Uvod

Ova se doktorska disertacija bavi problematikom modeliranja amosferskih graničnih slojeva u svjetlu teorije singularno perturbiranih problema. U uvodnome se dijelu predstavljaju pojmovi i problematika rada. Poglavlje 2. daje formulaciju problema kroz prikaz jednadžbi atmosferskog graničnog sloja te matematičku definiciju singularno perturbiranih problema. U poglavlju 3. predstavljene su analitičke i numeričke metode kojima se rješavaju navedeni problemi. Poglavlje 4. prikazuje rezultate i usporedbu numeričkih metoda za jednostavne singularno perturbirane probleme, a poglavlje 5. rezultate modeliranja katabatičkog strujanja s konstantnim te potom varijabilnim koeficijentom turbulentne difuzije. Zaključci rada, kao i preporuke za daljnja istraživanja, izneseni su u poglavlju 6.

1.1. Granični slojevi i singularne perturbacije

Sloj fluida u neposrednoj blizini granice s čvrstim tijelom ili drugim fluidom naziva se granični sloj (npr. Pedlosky, 1987; Kundu i Cohen, 2002). Pojam graničnog sloja u dinamici fluida uveo je L. Prandtl (Prandtl, 1942) kako bi objasnio eksperimentalne rezultate optjecanja fluida oko tijela. Prandtl je pokazao da su efekti viskoznosti u fluidu dominantni u tzv. graničnom sloju neposredno uz tijelo (zbog čega se u graničnom sloju stvara većina otpora gibanju tijela u fluidu), dok se u tzv. području slobodnog fluida viskoznost može zanemariti bez značajnog utjecaja na rješenje. Brzina na površini tijela se uzima kao zadana vrijednost (najčešće nula) i taj tzv. fiksni rubni uvjet mora biti zadovoljen bez obzira na to koliko je viskoznost mala. Naime, zanemarivanje efekata viskoznosti snižava red Navier–Stokesovih jednadžbi i daje krivi karakter rješenja. Ovakvi problemi, koji se ne mogu aproksimirati zanemarivanjem članova koji sadržavaju male parametre, nazivaju se u teoriji perturbacija singularno perturbirani problemi (Prandtl, 1942; Bender i Orszag, 1978; Pedlosky, 1987; Kundu i Cohen, 2002).

Prandtl je opisao nerotirajući fluid gdje je karakter strujanja određen Reynoldsovim brojem koji predstavlja omjer inercijalnih sila i viskoznosti u fluidu. U geofizičkoj dinamici fluida (atmosfera i more) važni efekti su i nehomogenost fluida te rotacija. Osnovni model za rotirajući fluid dao je V. Ekman, koji je proučavao strujanje u oceanu (npr. Pedlosky, 1987). Ekman je pokazao da je u rotirajućem fluidu dominantna ravnoteža Coriolisove sile, sile gradijenta tlaka i parametrizirane divergencije turbulentnog toka predstavljene pomoću tzv. koeficijenta turbulentne viskoznosti. Ekmanov broj[1], omjer rotacije

[1] $E_k = 2\nu/\left(fH^2\right)$, gdje je ν kinematička viskoznost, f Coriolisov parametar i H karakteristična skala dubine fluida. Horizontalni Ekmanov broj koristi L, karakterističnu horizontalnu skalu, umjesto D.

i viskoznosti, pandan je Reynoldsovom broju u nerotirajućim fluidima.

Granični slojevi u atmosferi i moru se odlikuju brzim promjenama i velikim gradijentima polja strujanja i termodinamičkih varijabli (Prandtl, 1942; Pedlosky, 1987; Stull, 1988). Za rješavanje ovakvog tipa problema se od analitičkih metoda najčešće koriste perturbativne tehnike i asimptotski razvoji, kao vrlo često korištena WKB metoda (npr. Bender i Orszag, 1978; Holmes, 1996). Grisogono (1994) je primijenio i razvio WKB metodu za atmosferske granične slojeve, dok su Grisogono i Oerlemans (2002) pokazali valjanost i ograničenja metode za nagnute stabilno stratificirane atmosferske granične slojeve.

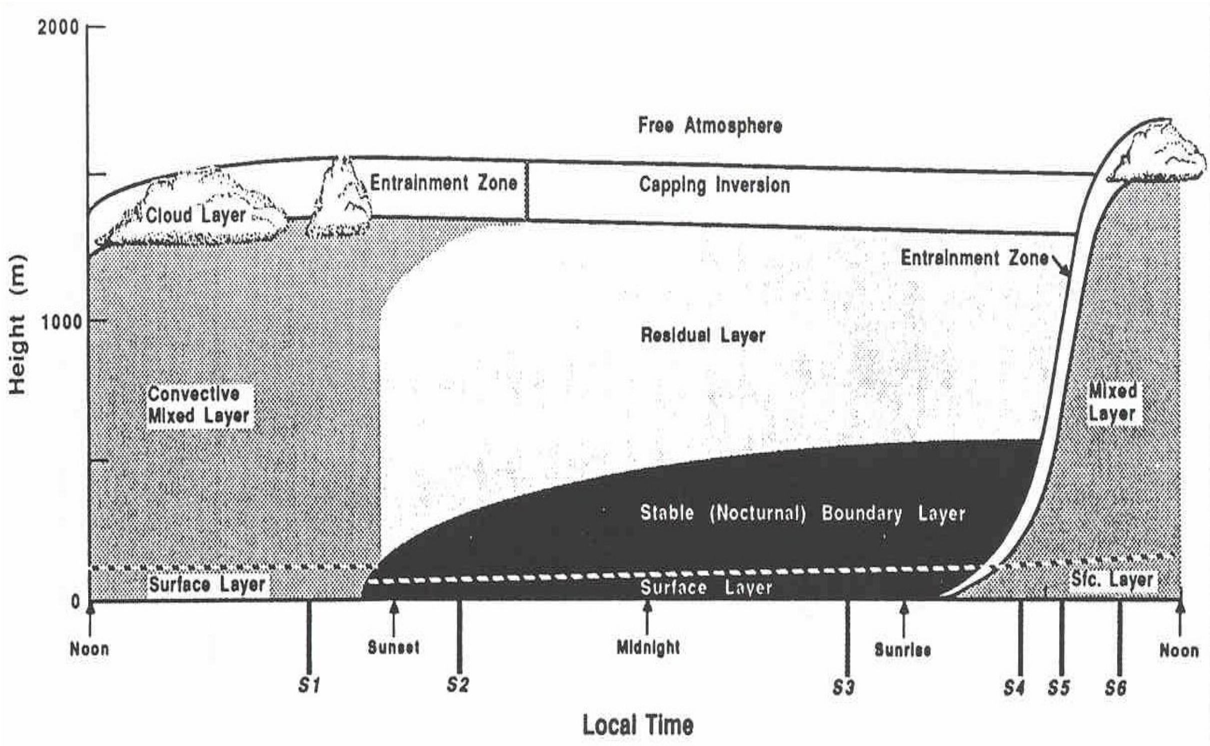
Numeričke metode koje dobro reproduciraju brze promjene u graničnim slojevima teško je konstruirati, kao što je to na primjeru stacionarnih problema pokazao Stynes (2005). Pregled postojećih numeričkih metoda za modeliranje singularno perturbiranih problema dan je u Roos i sur. (2008), dok se u Farrell i sur. (2000) može naći noviji pregled robusnih metoda za modeliranje graničnih slojeva. Odabir prikladnih metoda i modela često ovisi o dominantnim članovima u jednadžbama, pri čemu se za njihov odabir i zanemarivanje koristi tehnika dimenzijske analize (npr. Pedlosky, 1987; Stull, 1988; Kundu i Cohen, 2002).

1.2. Atmosferski granični sloj

Atmosferski granični sloj (engl. *atmospheric boundary layer*, ABL), također zvan planetarni granični sloj (engl. *planetary boundary layer*, PBL) je najniži dio atmosfere, čije je ponašanje pod izravnim utjecajem Zemljine površine (npr. Stull, 1988). U ABL–u su fizikalne veličine poput brzine i smjera strujanja, temperature, vlage i sl. podložne brzim i velikim fluktuacijama (turbulencija). Vertikalno miješanje je jako, a površinska forsiranja su perioda sata ili manje. Iznad ABL–a je područje tzv. *slobodne atmosfere* gdje je strujanje približno geostrofičko (paralelno izobarama), odnosno kvazigeostrofičko. Unutar ABL–a strujanje je pod utjecajem površinskog trenja i termalnih efekata pa skreće i presijeca izobare. U slobodnoj atmosferi turbulencija je mnogo slabija nego u ABL–u.

U ABL–u su dominantni utjecaji rotacije i stratifikacije te mehanički i termodinamički efekti. ABL se okvirno dijeli na nestabilno (konvektivno), neutralno i stabilno stratificirani granični sloj (npr. Stull, 1988). Ukoliko je gustoća česti zraka manja od okoliša, zbog uzgona dolazi do uzlaznog gibanja i konvekcije. Ukoliko je suprotno i čest se nakon pomaka vraća u početno stanje, radi se o stabilno stratificiranom graničnom sloju. U neutralno stratificiranom ABL–u transport zbog uzgona je zanemariv.
Tijekom toplog sunčanog jutra površinsko zagrijavanje snažno destabilizira granični sloj i razvija se konvekcija. Tako npr. u pustinjskim područjima granični sloj može narasti i do nekoliko kilometara visine. Noću se, pak, tlo hladi emitiranjem toplinskog zračenja, i za vrijeme mirne noći bez oblaka visina ABL–a može biti jedva $\approx 50\,\mathrm{m}$. Granični sloj je tada stabilan, sa slabim negativnim uzgonom i turbulentnim tokovima prema površini.

Idealan neutralan ABL se rijetko opaža, no zbog snažnog strujanja efekti uzgona mogu postati zanemarivi. Ovo se npr. češće događa iznad oceana ako vjetar puše duž izolinija površinske temperature mora. Visina nestabilnog ABL–a varira od nekoliko stotina metara do nekoliko kilometara, i teško ju je definirati u područjima s dubokom konvekcijom. Tipičan dnevni razvoj ABL–a prikazan je na Sl. 1.1, preuzetoj iz Stull (1988).



Slika 1.1: Dnevne varijacije atmosferskog graničnog sloja (Stull, 1988; slika 1.7).

Ovisno o uvjetima u atmosferi moguća je tranzicija iz jednog tipa ABL–a u drugi, kao što su npr. Fedorovich i sur. (2001) pokazali za neutralno stratificirane i konvektivne granične slojeve. Utjecaj stabilne stratifikacije graničnog sloja na "slamanje" numeričkih modela atmosfere pokazao je npr. Mahrt (1998), dok su npr. Shapiro i Fedorovich (2007) pokazali utjecaj diferencijalnog zagrijavanja podloge na strujanje u nagnutom, stabilno stratificiranom graničnom sloju.

Zbog složene termodinamike i utjecaja Zemljine površine (npr. granice tlo–zrak, voda–zrak i sl.) procesi u ABL–u su kompleksni (npr. Stull, 1988; Baklanov i Grisogono, 2007) i zbog toga vrlo teški za modeliranje bilo analitičkim ili numeričkim metodama. Laminarne granične slojeve lakše je modelirati, mada i tamo ima problema zbog velikih gradijenata promatranih varijabli. Modeliranje turbulentnih graničnih slojeva teže je zbog vremensko ovisnih svojstava toka. Jedna od najraširenijih tehnika je Reynoldsova dekompozicija toka na srednje stanje i perturbacije, te aproksimacija turbulentnih tokova umnožaka perturbiranih veličina nekim od modela za parametriziranje turbulencije (npr. Stull, 1988; Baklanov i Grisogono, 2007).

Niz referenci, recentnih saznanja i primjena na ekološko modeliranje disperzije po-

lutanata u atmosferi može se naći i u Baklanov i Grisogono (2007). Navedena publikacija predstavlja i ključne probleme kako u pogledu konceptualnog prikaza i shvaćanja ABL–a, tako i u pogledu modeliranja, pa i mjerenja. Primjerice, tradicionalno modeliranje turbulencije koristeći samo turbulentnu kinetičku energiju (TKE) je često nedovoljno u stabilnom ABL–u i uzrokuje velike poteškoće u operativnim modelima zatvaranja turbulentnih tokova. Također, nehomogenost podloge dovodi do različitih karakteristika konvektivnog strujanja nad kopnom i morem, dok termalna heterogenost može uzrokovati tzv. unutrašnje granične slojeve. U urbanom ABL–u živi veliki dio svjetskog stanovništva, i modeliranje disperzije polutanata u urbanom okolišu je izuzetno zahtjevno zbog njegove kompleksne geometrije. Čak i vrlo fina rezolucija numeričkih modela nije dovoljna za detaljan prikaz strukture strujanja na maloj skali, što naglašava potrebu za adekvatnom parametrizacijom procesa u ABL–u. Za dobar prikaz ABL–a potrebna su vrlo detaljna mjerenja. Ukoliko je ABL dobro razvijen, tornjevi s mjernim instrumentima su obično nedovoljno visoki da bi zabilježili njegovu detaljnu strukturu, dok za stabilni ABL prostorna rezolucija mjerenja može biti nedovoljna. Analiza izmjerenih podataka je također relativno složena (npr. odabir prave tehnike prostornog osrednjavanja za računanje turbulentnih tokova).
Doprinos ove disertacije prvenstveno se odnosi na bolje razumijevanje i parametrizaciju stabilnog ABL–a, te razvoj analitičkih i numeričkih metoda za bolji prikaz strujanja u ABL–u. Prikazana saznanja mogu se koristiti u numeričkim prognostičkim i klimatskim modelima, te modelima disperzije polutanata.

1.3. Nagnuti, stabilno stratificirani atmosferski granični sloj i model katabatičkog strujanja

Glavne karakteristike nagnutog, stabilno stratificiranog graničnog sloja atmosfere često su predstavljane linearnim modelom katabatičkog strujanja. Katabatičko strujanje uobičajena je pojava u planinskim područjima (npr. Whiteman, 1990) te nad blago nagnutim površinama poput ledenih površina Grenlanda i Antarktike (npr. Klein i sur., 2001). Strujanje nastaje kada se zrak uz nagnutu površinu hladi brže nego zrak na istoj visini, no podalje od površine. Ovo dovodi do negativnog uzgona koji uzrokuje strujanje niz padinu. Ukoliko je okolna atmosfera stabilno stratificirana i mirna, može se razviti stacionarno katabatičko strujanje.

Učestalost katabatičkog strujanja u područjima poput Antarktike i Grenlanda te manjima poput Islanda te njegovi kumulativni efekti impliciraju da ova strujanja doprinose općoj cirkulaciji atmosfere (Parish i Bromwich, 1991). Štoviše, zbog pojave na obalama različitih mora i oceana (Parmhed i sur., 2004; Renfrew i Anderson, 2006; Söderberg i Parmhed, 2006), mogu međudjelovati s obalnim područjima ocena, kao i s morskim ledom. Smatra se da time čak mogu utjecati i na termohalinu cirkulaciju i konvergenciju vodenih masa kroz formiranje obalnih polinija i povezanog jakog međudjelovanja atmosfera–more (npr. Gordon i Comiso, 1988).

Detaljna struktura katabatičkog strujanja je još uvijek važno modelarsko pitanje (npr. Weng i Taylor, 2003). Stabilno stratificirani granični sloj je obično loše razlučen u mnogim numeričkim prognostičkim i klimatskim modelima (npr. Zilitinkevich i sur., 2006). To jest, modeliranje katabatičkog strujanja je dovoljno uspješno samo ako se primijeni dovoljna vertikalna rezolucija (npr. Renfrew, 2004). Jednostavan model katabatičkog strujanja predstavlja ravnotežu produkcije negativnog uzgona zbog deficita potencijalne temperature na površini te disipacije turbulentnim tokovima (npr. Mahrt, 1982; Egger, 1990). Na dugim ledenjacima u većim zemljopisnim širinama postaje važan i utjecaj Coriolisove sile, koja skreće komponentu strujanja niz kosinu te tako stvara i poprečnu komponentu strujanja (Denby, 1999; van den Broeke i sur., 2002). Stiperski i sur. (2007) su proširili klasičan Prandtlov model uključivanjem Corioliosovog efekt, čime je poboljšano opisivanje pojava na dugim polarnim kosinama (npr. ledenjacima) i s njima povezanim dugo živućim stabilnim ABL–om. Kavčič i Grisogono (2007) su ovaj model poboljšali uvrštavanjem varijabilnog koeficijenta turbulente difuzije, što je dalo realističniju sliku strujanja u atmosferi. Shapiro i Fedorovich (2008) su u svom radu dali detaljan pregled dotadašnjih rezultata, te opisali analitička rješenja kompleksnijeg modela i usporedili ih s numeričkim LES modelom. Axelsen i Van Dop (2009a,b) su prikazali detaljnu usporedbu LES modela katabatičkog strujanja s motrenjima te trodimenzionalnim analitičkim modelom.

Osnovna obilježja čistog katabatičkog strujanja su: 1. izražena niska mlazna struja (engl. *low–level jet*, LLJ) i 2 oštar vertikalni gradijent temperature pri površini (npr. King i sur., 2001; Grisogono i Oerlemans, 2001a,b; van den Broeke i sur., 2002). Renfrew (2004) i Renfrew i Anderson (2006) su pokazali da jaka katabatička strujanja iznad Antarktike često imaju izraženu nisku mlaznu struju i zakretanje visinom. Autori sugeriraju da se to događa zbog smanjivanja forsiranja trenjem s visinom kroz atmosferski granični sloj. Štoviše, Renfrew i Anderson (2006) pokazuju koju vrstu problema mogu imati mjerenja katabatičkog strujanja, npr. doseg visine niske mlazne struje koja se može nalaziti upravo iznad meteorološkog tornja, no još uvijek prenisko za sodar. Ovi autori također ilustriraju da čak i nehidrostatički numerički prognostički modeli s finom rezolucijom imaju problema u modeliranju ovih široko rasprostranjenih strujanja (da bi postav modela razlučio nisku mlaznu struju mora se koristiti fina vertikalna rezolucija), a pogotovo klimatski modeli. Stoga se katabatička strujanja tipično moraju parametrizirati u modelima na velikim skalama (npr. Zilitinkevich i sur., 2006).

2. Formulacija problema

U ovom se poglavlju prvo izvode jednažbe graničnih slojeva u atmosferi, zajedno s uobičajeno primjenjivanim fizikalnim aproksimacijama. Zatim se, kroz linearni model katabatičkog strujanja, prikazuju glavne karakteristike nagnutog, stabilno stratificiranog ABL–a. Naposljetku se matematički definiraju granični slojevi i opisuje ponašanje karakterističnih slučajeva.

2.1. Jednadžbe atmosferskih graničnih slojeva

Navier–Stokesove (N–S) jednadžbe, jednadžba kontinuiteta i termodinamička jednadžba u Kartezijevom koordinatnom sustavu (x, y, z) gdje je z os okomita na Zemljinu površinu su (npr. Pedlosky, 1987; Kundu i Cohen, 2002)

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u, \tag{2.1}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v, \tag{2.2}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\nabla^2 w, \tag{2.3}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa\nabla^2 T + S^T, \tag{2.5}$$

gdje je D/Dt totalna ili materijalna derivacija

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},$$

a t vrijeme, $\vec{v} = (u, v, w)$ vektor brzine, ρ gustoća, p tlak i T temperatura. ν je kinematička viskoznost, κ koeficijent termalne difuzije a $f = 2\Omega\sin\varphi$ Coriolisov parametar (Ω je kutna brzina rotacije Zemlje). S^T u (2.5) označava izvore i ponore topline (npr. Sunčevo zračenje, grijanje od tla i sl.). Članovi $\nu\nabla^2(u, v, w)$ u (2.1, 2.2 i 2.3) te $\kappa\nabla^2 T$ u (2.5) opisuju viskoznu i termalnu disipaciju.

Na primjer, Cullen (2007) je pokazao da je za dobro razlučivanje atmosferskih procesa potrebna rezolucija od $\approx 1\,\mathrm{mm}$, što je izvan mogućnosti današnjih numeričkih prognostičkih modela. Jednadžbe (2.1–2.5) se stoga osrednjuju preko veličine malih vrtloga (npr. Stull, 1988; Garratt, 1994) rastavljanjem varijabli na srednje stanje $\overline{()}$ i perturbacije $()'$ (tzv. Reynoldsovo osrednjavanje)

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad w = W + w',$$
$$p = P + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad T = \overline{T} + T',$$

U ABL–u gustoća zraka malo varira u odnosu na srednje stanje, $\rho \approx \rho_0$, pa se primjenjuje Boussinesqova aproksimacija: promjene gustoće mogu se zanemariti osim u uzgonskom članu ρg u (2.3). Formalna opravdanja i uvjeti kada Boussinesqova aproksimacija vrijedi mogu se naći u Spiegel i Veronis (1960). Jednadžba kontinuiteta (2.4), zbog toga jer je sada $|\rho^{-1}(D\rho/Dt)| << |\nabla \cdot \vec{v}|$, zamjenjuje se svojim inkompresibilnim oblikom (npr. Kundu i Cohen, 2002)

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \tag{2.6}$$

Osrednjavanjem (2.1–2.5), primjenom (2.6) i pretpostavkom hidrostatičke ravnoteže srednjeg stanja atmosfere u (2.3) dobiva se

$$\frac{DU}{Dt} - fV = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\nabla^2 U - \frac{\partial\left(\overline{u'u'}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\overline{u'v'}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\overline{u'w'}\right)}{\partial z}, \tag{2.7}$$

$$\frac{DV}{Dt} + fU = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\nabla^2 V - \frac{\partial\left(\overline{u'v'}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\overline{v'v'}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\overline{v'w'}\right)}{\partial z}, \tag{2.8}$$

$$g = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{2.9}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{V} = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{D\overline{T}}{Dt} = \kappa\nabla^2\overline{T} + S^T - \frac{\partial\left(\overline{u'T'}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\overline{v'T'}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\overline{w'T'}\right)}{\partial z}, \tag{2.11}$$

gdje je $\overrightarrow{V} = (U, V, W)$ a D/Dt sada

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y} + W\frac{\partial}{\partial z}.$$

Članovi oblika $\partial\overline{('')}/\partial x$, $\partial\overline{('')}/\partial y$ i $\partial\overline{('')}/\partial z$ predstavljaju doprinose turbulentnih tokova. Za velike Reynoldsove brojeve

$$Re = \frac{UL}{\nu},$$

(gdje su U i L karakteristične skale brzine i prostora) jednadžbe (2.7–2.11) se mogu pojednostaviti jer je tada viskoznost zanemariva u odnosu na turbulentne procese. Također, u graničnom su sloju x i y skale mnogo veće od z skale, a turbulentno miješanje po vertikali mnogo značajnije od turbulentnog miješanja po x i y, pa se dobiva

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} - fV = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial\left(\overline{u'w'}\right)}{\partial z}, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + fU = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial\left(\overline{v'w'}\right)}{\partial z}, \tag{2.13}$$

$$g = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + U\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + V\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = -\frac{\partial\left(\overline{w'\theta'}\right)}{\partial z}, \tag{2.16}$$

gdje je umjesto temperature uzeta potencijalna temperatura, θ,

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p},$$

gdje je R plinska konstanta za suhu atmosferu, c_p specifični toplinski kapacitet pri konstantnome tlaku a p_0 referentni tlak. U (2.16) zanemareni su i izvori i ponori topline jer promatramo procese u atmosferi koji su adijabatički, pri čemu θ ostaje očuvana.

Turbulentni tokovi $\sim \overline{u'u'}$, $\overline{u'v'}$ i sl. su nepoznati pa se parametriziraju tzv. tehnikama zatvaranja (npr. Stull, 1988; Garratt, 1994):

- Lokalna zatvaranja reda 0.5, 1, 1.5, 2, 3. Npr. zatvaranje prvog reda je: $\overline{u'\xi'} = -K\frac{\partial \xi}{\partial x}$ gdje je K koeficijent turbulentne difuzije, a ξ neka od parametriziranih varijabli poput komponenti vjetra (U, V, W) i temperature (T, θ),
- Parametrizacija pomoću turbulentne kinetičke energije (npr. Mellor i Yamada, 1974),
- Parametrizacija pomoću ukupne turbulentne energije (npr. Mauritsen i sur., 2007; Zilitinkevich i Esau, 2007).

Operativni numerički atmosferski modeli za prognozu vremena i klime uobičajeno koriste neku od gore navedenih tehnika zatvaranja.

2.2. Rotirajući Prandtlov model katabatičkog vjetra

Rotirajući Prandtlov model katabatičkog strujanja opisuje hidrostatičko, jednodimenzionalno, Boussinesqovo strujanje s uključenim efektima Coriolisove sile u nagnutom, stabilno stratificiranom graničnom sloju. Sustav jednadžbi može se izvesti iz Reynolds osrednjenih jednadžbi (potpoglavlje 2.1.), a ovdje se ukratko ponavlja izvod iz Stiperski i sur. (2007).

Neka je (X, Y, Z) desno orijentirani koordinatni sustav, gdje je Z os u smjeru prave vertikale (polje sile teže). Promatra se strujanje niz kosinu zakrenutu od horizontale za negativan kut α oko osi Y (Sl. 2.1a). Uvodimo zakrenut sustav u kojem su x i y horizontalne koordinate uzduž i poprijeko smjera prostiranja kosine ($y = Y$), a z je vertikalna koordinata okomita na kosinu. S (U, V, W) su označene komponente vektora brzine u (x, y, z) sustavu, gdje su U i V horizontalne komponente srednje brzine strujanja u x i y smjeru a W vertikalna komponenta srednje brzine u z smjeru. Nakon transformacije koordinata i s pretpostavkom da je $W = 0$ u $z = 0$, perturbacije konačne amplitude neovisne o x i y za slučaj konstantne turbulentne difuzivnosti, K_c, zadovoljavaju

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K_c \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \gamma \sin(\alpha) U, \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K_c Pr \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + f \cos(\alpha) V + \frac{g \sin(\alpha)}{\theta_0} \theta, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K_c Pr \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - f \cos(\alpha) U. \tag{2.19}$$

Ovdje su $U = U(z)$ i $V = V(z)$, a $\theta = \theta(z)$ je perturbacija potencijalne temperature (ukupna potencijalna temperatura, Θ (Sl. 2.1b), umanjena za zadanu potencijalnu temperaturu okoliša $\theta^* = \theta_0 + \gamma z$). θ_0 je referentna potencijalna temperatura, f Coriolisov parametar, a γ konstantni gradijent potencijalne temperaturu okoliša u pravoj vertikali ($\gamma = d\theta^*/dZ \approx d\theta^*/dz > 0$ u donjoj troposferi za male α). Vrijednosti nagiba kosine, α, za koje je katabatičko strujanje uspješno opisano ovim modelom tipično ne prelaze $10°$, što opravdava pretpostavku korištenja konstantnog gradijenta γ u pravoj vertikali u (2.19). Pr je turbulentni Prandtlov broj, omjer turbulentne difuzivnosti za komponente brzine i potencijalnu temperaturu ($Pr = K_m/K_h$, $K_h = K_c$), također pretpostavljen kao konstanta[1], a g ubrzanje sile teže. Članovi drugog reda s desne strane jednadžbi (2.17)–(2.19) parametriziraju turbulentne tokove impulsa i topline (opisano u potpoglavlju 2.1.).

Ovaj sustav je vrlo sličan onome u Denby (1999), osim što sada $\cos(\alpha)$ množi Coriolisov član u y jednadžbi (2.19). Za blago varirajući $K = K(z)$ sustav analogan (2.17–2.19), opisan u Kavčič i Grisogono (2007), glasi

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \gamma \sin(\alpha) U, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = Pr \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial U}{\partial z}\right) + f \cos(\alpha) V + \frac{g \sin(\alpha)}{\theta_0} \theta, \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = Pr \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial V}{\partial z}\right) - f \cos(\alpha) U, \tag{2.22}$$

[1] Ovdje je $Pr = const.$ pretpostavljeno radi jednostavnosti modela. Inače, Pr se općenito povećava s porastom stabilnosti strujanja (Kim i Mahrt, 1992; Zilitinkevich i sur., 2008; Grisogono i Zovko Rajak, 2009).

pri čemu se u izvodu može koristiti i pristup kao u Grisogono i Oerlemans (2002) za (θ, U). Ukoliko se Coriolisov efekt u sustavu (2.17–2.19) zanemari, dobiva se klasičan Prandtlov sustav

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= K_c \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \gamma \sin(\alpha) U, \\
\frac{\partial U}{\partial t} &= K_c Pr \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{g \sin(\alpha)}{\theta_0} \theta,
\end{aligned}$$

po kojem strujanje nastaje kao posljedica ravnoteže negativnog uzgona i turbulentne difuzije.

Za razliku od prijašnjih izvoda klasičnog Prandtlovog modela (Mahrt, 1982; Egger, 1990; Parmhed i sur., 2004) ovdje se ne zahtijevaju pretpostavke malih amplituda perturbacija ili aproksimacije skaliranjem da bi se došlo do izraza (2.17)–(2.19) i (2.20)–(2.22). Poremećaji konačne amplitude, neovisni o x i y zadovoljavaju (2.17)–(2.19) jer su nelinearni advekcijski članovi u ovim jednadžbama identički nula (Stiperski i sur., 2007). Naime, zbog pretpostavljene homogenosti po x i y nema transporta pomoću komponenti brzine U i V paralelnih s kosinom. Štoviše, Boussinesqova jednadžba kontinuiteta reducira se na

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0. \tag{2.23}$$

Kako je $W = 0$ u $z = 0$, (2.23) implicira da je uvijek $W = 0$, pa su prema tome preostale komponente advektivnog transporta također nula (za detalje izvoda vidi Dodatak u Stiperski i sur. (2007)). Dopuštenost konačnih amplituda u sustavima (2.17–2.19) i (2.20–2.22) može imati korisne posljedice za parametriziranje pripadnih procesa u npr. klimatskim modelima te numeričkim prognostičkim modelima.

Ako je $C < 0$ konstantan površinski deficit potencijalne temperature ($C = \theta(z = 0)$ $= \Theta - \theta_0$), primjenjen na neporemećenu granicu podloge i atmosfere u $t = 0$, tada su donji rubni uvjet vremenski ovisnih sustava (2.17)–(2.19) i (2.20)–(2.22)

$$\theta(z = 0) = C, \quad U(z = 0) = 0, \quad V(z = 0) = 0. \tag{2.24}$$

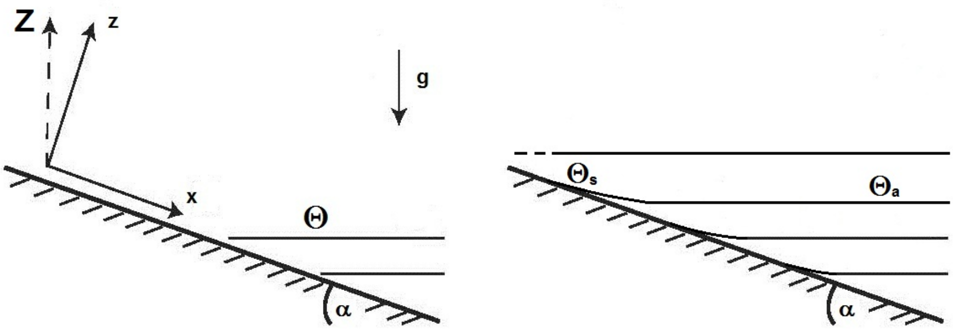
Pošto su sustavi (2.17)–(2.19) i (2.20)–(2.22) difuzivni, zahtjevi na inicijalne uvjete za U, V i Θ ne moraju biti prestrogi. Manje je očito kako odrediti gornji rubni uvjet za (θ, U, V) koji bi dobro opisao rješenje sustava (2.17)–(2.19) i (2.20)–(2.22) u limesu kada $t \to \infty$. Fizikalno je, ipak, razumno zahtijevati da rješenja budu ograničena i da vrijedi:

$$\theta(z \to \infty) \to \theta_\infty < \infty, \quad U(z \to \infty) \to U_\infty < \infty, \quad V(z \to \infty) \to V_\infty < \infty. \tag{2.25}$$

Ukoliko vrijedi

$$\theta(z \to \infty) \to 0, \quad U(z \to \infty) \to 0, \quad V(z \to \infty) \to 0, \tag{2.26}$$

tada jednadžbe (2.17)–(2.19) i (2.20)–(2.22), zajedno s rubnim uvjetima (2.24) i (2.26) opisuju "primarno katabatičko strujanje" po kriterijima u Renfrew i Anderson (2002). To jest, takvo se strujanje razvija u stabilnom atmosferskom graničnom sloju (SABL) gdje površinski balans zračenja odgovara neto hlađenju u okoliš, a mezoskalni gradijent tlaka je malen (inače bi npr. vrijedilo $V_\infty = V_g$, $U_\infty = U_g$, gdje su U_g i V_g komponente geostrofičkog vjetra) pa je i utjecaj vremenskih sustava s veće skale malen. Radijacijsko hlađenje površine očituje se u odnosu ukupne površinske potencijalne temperature, $\Theta_s = \theta_0 + C$, i potencijalne temperature okoliša, $\Theta_a = \theta_0 + \theta + \gamma z$, tj. $\Theta_s < \Theta_a$ (Sl. 2.1b). Takvo "tipično" katabatičko strujanje je plitko, s maksimumima brzina blizu površine i sve manjim vrijednostima kako se visina povećava (npr. Renfrew i Anderson, 2006; Axelsen i Van Dop, 2009a).



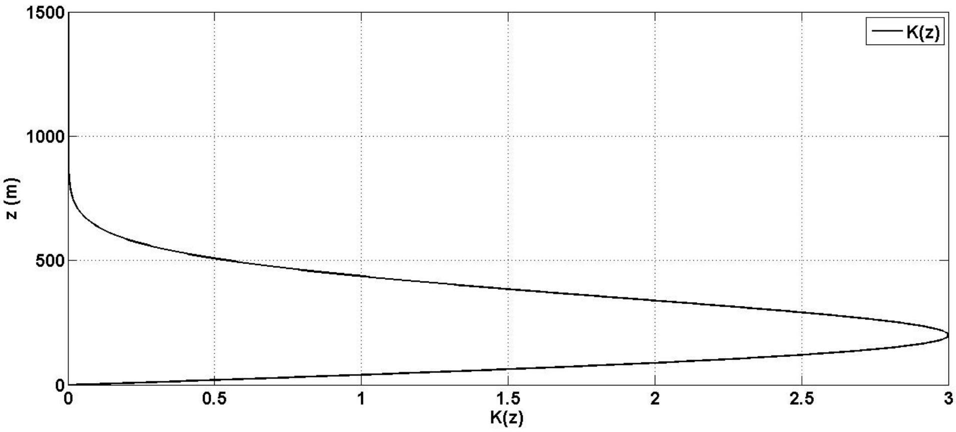
(a) Rotirani koordinatni sustav (x, z) i smjer prave vertikale Z.

(b) Površinska vrijednost potencijalne temperature, Θ_s, i potencijalna temperatura slobodne atmosfere, Θ_a. $\Theta_s < \Theta_a$.

Slika 2.1: Koordinatni sustav analitičkog modela katabatičkog strujanja. g označava smjer gravitacije a Θ ukupnu potencijalnu temperaturu. Na slici 2.1b je $\Theta_s = \theta_0 + \theta\,(z = 0) = \theta_0 + C$, $\Theta_a = \theta_0 + \theta + \gamma z$. Zbog radijacijskog hlađenja površine je $\Theta_s < \Theta_a$.

2.2.1. Odabir varijabilnog profila turbulentne difuzivnosti $K\,(z)$

Za modeliranje atmosferskih graničnih slojeva često se koristi analitički $K\,(z)$ profil koji je razvio O'Brien (1970). O'Brienov profil je polinom trećeg stupnja pa su za određivanje potrebna četiri parametra. Također, ovisi o vertikalnoj rezoluciji numeričkog prognostičkog modela pa ga je povoljnije koristiti u nestabilnim uvjetima kada je granični sloj dovoljno visok da obuhvati dovoljan broj nivoa u kojima je računat $K\,(z)$ (vidi npr. Jeričević i Večenaj, 2009). Ipak, često se koristi za modeliranje stabilnih i skoro neutralnih atmosferskih graničnih slojeva (npr. Stull, 1988) tzv. prvim redom zatvaranja parametrizacije.



Slika 2.2: $K(z)$ profil iz (2.27), $K_{max} = 3\,m^2 s^{-1}$, $h = 200\,m$.

Grisogono i Oerlemans (2001a) su generalizirali O'Brienov profil u sporo varirajuću linearno–eksponencijalnu funkciju oblika

$$K(z) = K_{max}\sqrt{e}\frac{z}{h}\exp\left(-\frac{z^2}{2h^2}\right), \tag{2.27}$$

gdje je h visina na kojoj $K(z)$ postiže maksimalnu vrijednost K_{max}. Za razliku od O'Brienovog profila potrebna su samo dva parametra da bi se odredilo ovaj profil. Odabir K_{max} je također diskutiran u Grisogono i Oerlemans (2001a) gdje je pokazano da je razumna pretpostavka

$$K_{max} \approx 3K_c, \tag{2.28}$$

gdje je K_c konstantan koeficijent turbulentne difuzivnosti. Dakako, ovisno o specifičnim slučajevima mogući su i drugi odabiri. Više detalja o procjeni K_{max} i h može se naći u Grisogono i Oerlemans (2002), Parmhed i sur. (2004, 2005), Jeričević i Večenaj (2009) i Jeričević i sur. (2010).

2.3. Matematički model singularnih perturbacija

Linearan rubni problem drugog reda u jednoj dimenziji opisuje se zadaćom

$$-\varepsilon u''(x) + a(x)\,u'(x) + b(x)\,u(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{2.29}$$

$$u(x=0) = \alpha, \quad u(x=1) = \beta, \tag{2.30}$$

gdje je $u' = du/dx$. Po analogiji s parcijalnim diferencijalnim jednadžbama $\varepsilon u''$ se smatra difuzivnim, $a(x)\,u'$ advektivnim a $b(x)\,u$ reaktivnim članom (npr. Farrell i sur., 2000; Stynes, 2005; Roos i sur., 2008). Pripadni koeficijenti uz derivacije od u su tako koeficijent difuzije, ε, koeficijent advekcije, $a(x)$, i koeficijent reakcije $b(x)$. $f(x)$ s desne strane (2.29) smatra se silom, tj. forsiranjem. Posljedično, ovakav se tip problema naziva advektivno–

difuzivno–reaktivni problem.

Ukoliko za ε u (2.29) vrijedi

$$0 < \varepsilon << 1,$$

dolazi do sniženja reda jednadžbe zbog množenja člana s najvišim redom derivacije malim parametrom, pa se tada problem (2.29–2.30) naziva *singularno perturbiranim* (npr. Bender i Orszag, 1978; Stynes, 2005; Kundu i Cohen, 2002) a ε parametrom singularne perturbacije. Jednostavan primjer singularno perturbiranog problema dan je u Stynes (2005); njegova jednadžba (3.1)

$$-\varepsilon u''(x) + u'(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \tag{2.31}$$

$$u(x = 0) = u(x = 1) = 0, \tag{2.32}$$

čije je analitičko rješenje

$$u(x) = x - \frac{e^{-(1-x)/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}}. \tag{2.33}$$

Ovo je ujedno i primjer advekcijsko–difuzijskog problema ($b(x) = 0$). Vezano uz ovaj problem Stynes (2005) je također dao precizniju definiciju singularno perturbiranog problema s obzirom na normu beskonačno (tzv. "max norma") od $u(x)$, tj.

$$\|u\|_\infty = \max_i |u_i|, \quad 0 < x < 1,$$

a to je da postoji $\hat{x} \in [0, 1]$ takav da vrijedi

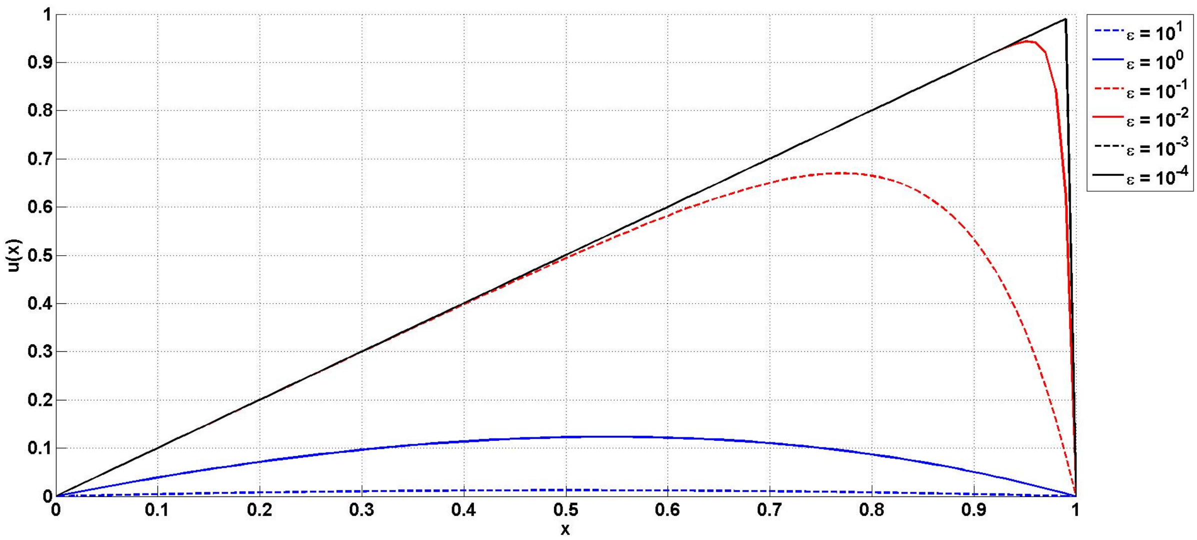
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{x \to \hat{x}} u(x) \neq \lim_{x \to \hat{x}} \lim_{\varepsilon \to 0} u(x). \tag{2.34}$$

Za singularno perturbirani problem (2.31–2.32) $\hat{x} = 1$, a vrijednosti lijeve i desne strane (2.34) za tu vrijednost su

- $\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{x \to 1} u(x) = 0$,
- $\lim_{x \to 1} \lim_{\varepsilon \to 0} u(x) = 1$.

Kaže se da $u(x)$ ima *granični sloj* u $x = 1$: usko područje gdje je $u(x)$ ograničeno, neovisno o ε, ali derivacije od $u(x) \to \infty$ kako $\varepsilon \to 0$ (Stynes, 2005). Derivacijom (2.33) vidi se da je $u'(x) \approx -1/\varepsilon$, $u''(x) \approx -1/\varepsilon^2$, itd. (ocjene na derivacije za 1D problem dane su u Naughton i Stynes, 2009). Ovo se ponašanje može vidjeti iz Sl. 2.3. Kako se vrijednosti ε smanjuju, granični sloj u $x = 1$ postaje sve izrazitiji (uži i rapidniji), a derivacija rješenja sve veća. Širina graničnog sloja, w, se također smanjuje sa smanjivanjem ε, pa je $w \sim \mathrm{O}(\varepsilon)$ za advekcijsko–difuzijski tip problema.

Problemi ovog tipa nisu singularno perturbirani samo uz iznimne kombinacije rubnih uvjeta i forsiranja $f(x)$. Npr. ako je u (2.31) $f(x) = 1$ a umjesto rubnih uvjeta (2.32) se uzme $u(0) = 0$, $u(1) = 1$, rješenje (2.31) postaje $u(x) = x$. Tada uvjet (2.34) nije zadovoljen niti za jedan $\hat{x} \in [0, 1]$ i (2.31) je *regularno perturbirani* problem. Rješenje ovog problema je $u(x) = x$, tj. graničnog sloja u $x = 1$ više nema.



Slika 2.3: Analitičko rješenje (2.33) problema (2.31–2.32) za različite ε. $a(x) > 0$ pa je granični sloj na desnom rubu. Širina graničnog sloja: $w \sim \mathrm{O}(\varepsilon)$.

Drugi primjer singularno perturbiranog problema dan je u Kadalbajoo i Patidar (2002), primjer 2:

$$\varepsilon u'' - [1 + x(1-x)]\, u = f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{2.35}$$

$$u(x = 0) = u(x = 1) = 0, \tag{2.36}$$

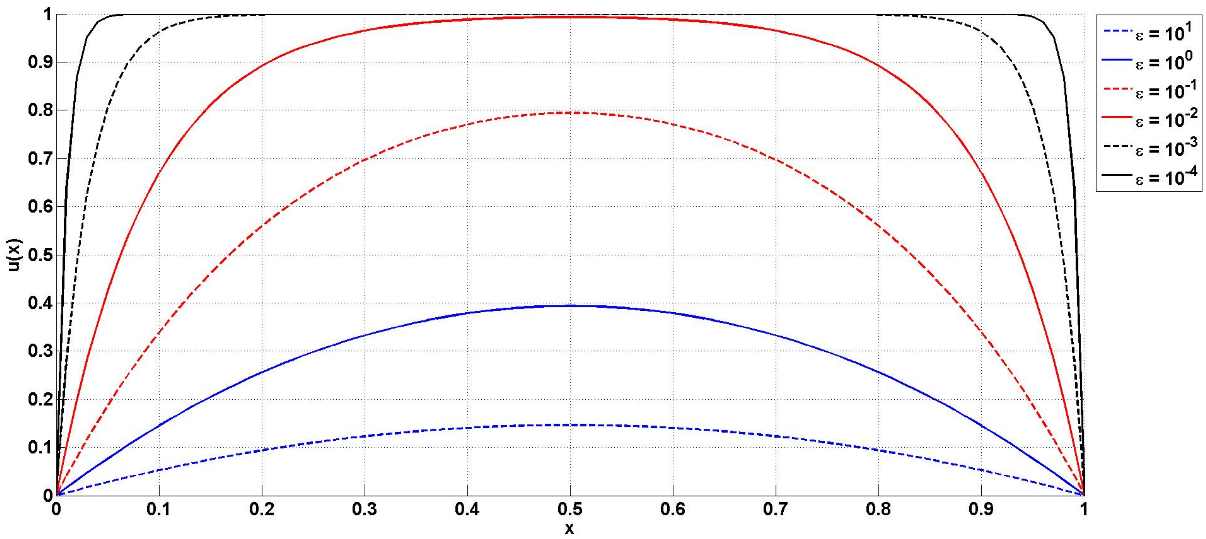
$$\begin{aligned} f(x) = &-e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} \left[2\sqrt{\varepsilon} - x(1-x)^2\right] - \\ &- e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}} \left[2\sqrt{\varepsilon} - x^2(1-x)\right] - 1 - x(1-x), \end{aligned} \tag{2.37}$$

čije je analitičko rješenje

$$u(x) = 1 + (x-1)\, e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} - x e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}. \tag{2.38}$$

Ovdje je $a(x) = 0$ pa je ovo primjer reakcijsko–difuzijskog problema. Ponašanje ovog tipa problema može se vidjeti iz Sl. 2.4. $u(x)$ sada ima dva granična sloja u $x = 0$ i $x = 1$, svaki širine $w \sim \mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Kao i kod advekcijsko–difuzijskog problema granični slojevi postaju sve izrazitiji a derivacija rješenja sve veća kako se vrijednosti ε smanjuju.

Za advekcijsko–difuzijsko–reakcijski tip problema (2.29–2.30) gdje $a(x) \neq 0$ i $b(x) \neq 0$ ponašanje ovisi o samim koeficijentima jednadžbe. Ovisno o advekcijskom članu mogu se pojaviti jedan ili dva granična sloja na rubu intervala, ili tzv. unutarnji granični slojevi unutar intervala. Primjeri ovakvog tipa bit će prikazani i diskutirani u poglavlju 4.



Slika 2.4: Analitičko rješenje (2.38) problema (2.35–2.37) za različite ε. $a(x) = 0$ pa su granični slojevi na oba ruba. Širina graničnih slojeva: $w \sim \mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon})$.

Stacionarni rotirajući Prandtlov model katabatičkog strujanja, proizašao iz (2.20–2.22)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \gamma \sin(\alpha) U = 0, \tag{2.39}$$

$$Pr\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial U}{\partial z}\right) + f\cos(\alpha) V + \frac{g\sin(\alpha)}{\theta_0}\theta = 0, \tag{2.40}$$

$$Pr\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial V}{\partial z}\right) - f\cos(\alpha) U = 0, \tag{2.41}$$

zajedno s rubnim uvjetima (2.24) i (2.26) i varijabilnim koeficijentom turbulentne difuzivnosti $K(z)$ iz (2.27) primjer je singularno perturbiranog problema u ABL–u. Ovo se može vidjeti usporedbom članova uz druge derivacije u (2.39–2.41) i (2.29–2.30). Ulogu ε u (2.29) ovdje igra $K(z)$, no problem je složeniji od (2.29–2.30) jer je ε također funkcija od z. $K(z = 0) = 0$, a vrijedi i $K(z \to \infty) \to 0$ pa članovi s najvišim derivacijama u (2.20–2.22) iščezavaju na donjem rubu i velikim visinama. S druge strane, $K(z)$ profil oko visine maksimuma, h, doseže $K_{max} \sim 3\,\mathrm{m^2 s^{-1}}$ u ovome radu. Singularna perturbiranost sustava (2.39–2.41) može se pokazati primjenom (2.34) iz Stynes (2005) na analitička rješenja, što je provedeno u potp. 5.2.1.

3. Metode

S obzirom na kompleksnost procesa u atmosferi i zahtjevnost modeliranja graničnih slojeva u ovoj se disertaciji primjenjuje nekoliko vrsta analitičkih i numeričkih metoda, opisanih u potpoglavljima koja slijede. U potpoglavlju 3.2.4. se dodatno opisuje primjena numeričkih metoda za singularno perturbirane probleme na model katabatičkog strujanja.

3.1. Analitičke metode

U ovoj disertaciji se za rješavanje jednadžbi graničnih slojeva i singularno perturbiranih problema koriste asimptotski razvoj i WKB metoda opisana u potp. 3.1.1., te matrični eksponent opisan u potp. 3.1.2. Za usporedbu doprinosa pojedinih članova u jednadžbama graničnih slojeva koriste se dimenzijska analiza, a Reynoldsovo osrednjavanje za izvođenje modela turbulentnog graničnog sloja i odgovarajuće tehnike zatvaranja opisane su prije kod izvođenja jednadžbi za ABL u potp. 2.1.

3.1.1. Asimptotski razvoj i WKB metoda

Vrlo često korištena WKB metoda (npr. Bender i Orszag, 1978; Holmes, 1996) daje kvalitativna analitička rješenja singularno perturbiranog problema tipa (2.29–2.30). Općenito, WKB teorija daje globalnu aproksimaciju rješenja diferencijalne jednadžbe čiji je član s najvišom derivacijom pomnožen malim parametrom ε.
Za diferencijalnu jednadžbu

$$\varepsilon \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a\left(x\right) \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + k\left(x\right) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + m\left(x\right) y = 0, \tag{3.1}$$

pretpostavlja se rješenje u obliku eksponencijalnog asimptotskog razvoja u red

$$y\left(x\right) \sim \exp\left[\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n\left(x\right)\right], \quad \delta \to 0, \tag{3.2}$$

u limesu kada $\delta \to 0$. Uvrštavanje (3.2) u običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu (3.1) i poništavanje eksponencijalnih članova daje rješenje s proizvoljnim brojem članova $S_n\left(x\right)$ u razvoju (koji je nerijetko divergentan).

Primjer iz Bender i Orszag (1978)

Promatra se linearna homogena diferencijalna jednadžba drugog reda

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = Q(x)\, y, \quad Q(x) \neq 0. \tag{3.3}$$

Uvrštavanjem (3.2) u (3.3) dobiva se

$$\varepsilon^2 \left[\frac{1}{\delta^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n' \right)^2 + \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n'' \right] = Q(x). \tag{3.4}$$

Jednadžba (3.4) se, do na vodeći član (uz pretpostavku da je red asimptotski konzistentan), može aproksimirati s

$$\frac{\varepsilon^2}{\delta^2} S_0'^2 + \frac{2\varepsilon^2}{\delta} S_0' S_1' + \frac{\varepsilon^2}{\delta} S_0'' = Q(x). \tag{3.5}$$

U limesu kada $\delta \to 0$ dominantna ravnoteža u (3.5) dana je s

$$\frac{\varepsilon^2}{\delta^2} S_0'^2 \sim Q(x),$$

pa je $\delta \propto \varepsilon$. Uzimanjem $\delta = \varepsilon$ i usporedbom potencija dobiva se

$$\varepsilon^0 : \quad S_0'^2 = Q(x),$$

što je zapravo eikonalna jednadžba (npr. Bender i Orszag, 1978) s rješenjem

$$S_0(x) = \pm \int_{x_0}^{x} \sqrt{Q(t)}\, dt.$$

Promatranje potencija od ε prvog reda daje

$$\varepsilon^1 : \quad 2 S_0' S_1' + S_0'' = 0,$$

što je transportna jednadžba (npr. LeVeque, 1992) s rješenjem

$$S_1(x) = \pm \frac{1}{4} \log [Q(x)] + k_1,$$

gdje je k_1 proizvoljna konstanta. Sada imamo par aproksimacija sustava (jer S_0 može imati dva predznaka). WKB aproksimacija prvog reda je linearna kombinacija obje

$$y(x) \approx c_1 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^{x} \sqrt{Q(t)} dt \right] + c_2 Q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^{x} \sqrt{Q(t)} dt \right].$$

Članovi višeg reda mogu se dobiti uzimanjem viših potencija od ε, eksplicitno

$$2S_0'S_n' + S_{n-1}'' + \sum_{j=1}^{n-1} S_j'S_{n-j}' = 0,$$

za $n > 2$.

Preciznost asimptotskog razvoja

Asimptotski razvoj za $y(x)$ obično je divergentan red čiji se opći član $\delta^n S_n(x)$ počinje povećavati nakon određene vrijednosti $n = n_{\max}$. Prema tome, najmanja pogreška WKB metode je u najboljem slučaju reda veličine posljednjeg uključenog člana u razvoju. Za jednadžbu

$$\varepsilon^2 \frac{d^2y}{dx^2} = Q(x)\, y,$$

gdje je $Q(x) < 0$ analitička funkcija, vrijednost $n_{\max}$ i magnitude posljednjeg člana može se procijeniti prema npr. Winitzki (2005) kao

$$n_{\max} \approx 2\varepsilon^{-1} \left| \int_{x_0}^{x_*} \sqrt{-Q(z)} dz \right|,$$

$$\delta^{n_{\max}} S_{n_{\max}}(x_0) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n_{\max}}} \exp\left[-n_{\max}\right],$$

gdje je x_0 točka u kojoj treba izračunati $y(x_0)$ a x_* kompleksna točka (nivo refleksije) gdje je $Q(x_*) = 0$, najbliža $x = x_0$. Broj $n_{\max}$ se može interpretirati kao broj oscilacija između x_0 i najbliže x_*. Ako je $\varepsilon^{-1}Q(x_*)$ sporo varirajuća funkcija vrijedi

$$\varepsilon \left| \frac{dQ}{dx} \right| \ll Q^2,$$

pa će tada $n_{\max}$ biti velik, a minimalna pogreška asimptotskog reda eksponencijalno mala.

Primjene u atmosferskim graničnim slojevima

Grisogono (1994) je primijenio i dalje razvio WKB metodu za stabilno stratificirane atmosferske granične slojeve (SABL) proračunavajući pripadni valni otpor strujanju zbog malih varijacija terena. Grisogono i Oerlemans (2002) su pokazali valjanost i ograničenja metode za nagnute SABL na nerotirajućem Prandtlovom modelu katabatičkog strujanja s varijabilnim $K(z)$ iz (2.27). Ovdje će spomenuta metoda biti upotrijebljena za analitičko rješavanje rotirajućeg Prandtlovog modela opisanog u potp. 2.2. (2.20–2.22).

3.1.2. Matrični eksponent

Matrični eksponent (engl. *matrix exponential*) je matrična funkcija na kvadratnim matricama analogna običnoj eksponencijalnoj funkciji (npr. Wilkinson (1965); Horn i Johnson (1991); Moler i Van Loan (2003)).
Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ili $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Eksponent matrice $\mathbf{A}$ je tada $n \times n$ matrica dana razvojem u red potencija

$$e^{\mathbf{A}} = \exp(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k.$$

Ovaj red uvijek konvergira pa je $\exp(\mathbf{A})$ dobro definiran.
Matrični eksponent se upotrebljava za rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Rješenje homogenog sustava

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}, \tag{3.6}$$

gdje je $\mathbf{A}$ konstantna matrica dano je s

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0}, \tag{3.7}$$

gdje je $\mathbf{x_0}$ vektor početnih uvjeta sustava. Matrični eksponent se također može upotrijebiti za rješavanje nehomogenog sustava

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}.$$

Ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalizibilna može se prikazati kao

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^{-1}, \tag{3.8}$$

gdje je $\mathbf{\Lambda}$ dijagonalna matrica s vlastitim vrijednostima matrice $\mathbf{A}$ na dijagonali, a $\mathbf{E}$ pripadna matrica vlastitih vektora. Tada je

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}t) &= \mathbf{E}\mathbf{E_\Lambda}\mathbf{E}^{-1}, \\ \mathbf{E_\Lambda} &= \exp(\mathbf{\Lambda}t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ukoliko $\mathbf{A}$ nije dijagonalizibilna može se prikazati pomoću svoje Jordanove forme $\mathbf{J}$ i matrice prijelaza $\mathbf{T}$ kao

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}. \tag{3.10}$$

Jordanova forma matrice $\mathbf{A}$ je tada oblik reduciranja najbliži dijagonalnoj matrici vlastitih vrijednosti, a matrica prijelaza $\mathbf{T}$ sastavljena od linearno nezavisnih vlastitih vektora te tzv. glavnih vektora (npr. Wilkinson (1965); Horn i Johnson (1991)). Za dijagonalizibilne matrice su $\mathbf{J} = \mathbf{\Lambda}$ i $\mathbf{T} = \mathbf{E}$. Također vrijedi i

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}t) &= \mathbf{T}\mathbf{E_J}\mathbf{T^{-1}}, \\ \mathbf{E_J} &= \exp(\mathbf{J}t). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Uvrštavanjem (3.8) u (3.7) za dijagonalizibilnu $\mathbf{A}$ te potom množenjem (3.7) s lijeve strane matricom $\mathbf{E^{-1}}$ dobiva se (npr. Wilkinson (1965))

$$\mathbf{y} = \mathbf{E_\Lambda}\mathbf{y_0}, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{y_0} = \mathbf{E^{-1}}\mathbf{x}_0, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{E^{-1}}\mathbf{x}. \tag{3.14}$$

Sustav (3.6) se tako može riješiti sljedećim postupkom:

1. računanje $\mathbf{E}$ i $\mathbf{\Lambda}$,
2. računanje $\mathbf{E_\Lambda}$ pomoću (3.9),
3. transformacija početnog uvjeta $\mathbf{x_0}$ u $\mathbf{y_0}$ pomoću (3.13),
4. računanje $\mathbf{y}$ pomoću (3.12),
5. računanje $\mathbf{x}$ pomoću (3.14) tj. $\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{y}$.

Za nedijagonalizibilnu $\mathbf{A}$ uvrštava se (3.10) u (3.7) te se potom množenjem (3.7) s lijeve strane matricom $\mathbf{T^{-1}}$ dobiva

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{E_J}\mathbf{y_0}, \\ \mathbf{y_0} &= \mathbf{T^{-1}}\mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{T^{-1}}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Postupak rješavanja sustava (3.6) analogan je onome za dijagonalizibilne matrice.

3.2. Numeričke metode

U ovom se potpoglavlju opisuje nekoliko popularnih metoda za rješavanje singularno perturbiranog rubnog problema (2.29–2.30)

$$-\varepsilon u''(x) + a(x)\,u'(x) + b(x)\,u(x) = f(x)\,, \qquad 0 < x < 1 \tag{3.15}$$

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \tag{3.16}$$

gdje se uzima $0 < \varepsilon << 1$, a $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ su dovoljno glatki (ovisno o primjenjenoj numeričkoj metodi). Uobičajene pretpostavke pri konstrukciji numeričkih metoda za ovaj tip problema su $a(x) > a^* > 0$, $\varepsilon << a^*$ i $b(x) \geq 0$. U ovom će se radu promatrati i slučajevi gdje advekcijski koeficijent $a(x)$ mijenja predznak (rezultati u poglavlju 4.). Koeficijent reakcije, $b(x)$, mora biti pozitivan na cijelom promatranom intervalu da bi se osigurala egzistencija i jedinstvenost rješenja rubnog problema (3.15–3.16).

Numeričke metode za rješavanje singularno perturbiranih problema moraju biti robusne, tj. poželjno je da imaju ova svojstva

- dobra reprodukcija naglih promjena u graničnim slojevima,
- primjenjivost na širok raspon ε
- *"ε-uniformno konvergentne"*, tj. ocjena konvergencije ne ovisi o ε.

Iz gore navedenog vidi se da npr. metoda konačnih elemenata nema sva željena svojstva. Naime, zbog konstrukcije i ocjene konvergencije u Soboljevljevoj (kvadratnoj) normi navedena metoda ne razlučuju oštre gradijente u graničnom sloju. Također, kao i kod metoda konačnih razlika parnog reda točnosti bez ugrađene numeričke difuzije, moguće su oscilacije i potreba za dodavanjem numeričke difuzije. S druge strane, metode konačnih razlika neparnog reda točnosti s intrinzičnom numeričkom difuzijom najčešće loše razlučuju granični sloj (npr. Durran, 1999) i ublažavaju karakteristične oštre gradijente rješenja pri rubu intervala prikazane u potp. 2.3.

Numeričke metode za rješavanje singularno perturbiranih problema (3.15–3.16) mogu se zasnivati na nekoliko pristupa

- prilagodba operatora tj. metode, engl. *operator–fitted methods*,
- prilagodba mreže, engl. *mesh–fitted methods*,
- spoj oba pristupa.

Primjer neuniformnih mreža su npr. Shishkinove mreže (npr. Farrell i sur., 2000; Stynes, 2005; Roos i sur., 2008) s većim brojem točaka i posljedično boljom rezolucijom graničnih slojeva. Za konstrukciju takve mreže potrebne su informacije o širini graničnog sloja koje se kod jednostavnijih problema tipa (3.15–3.16) mogu dobiti iz asimptotskih razvoja. Kod realističnih fizikalnih problema potrebno je poznavati i fizikalna svojstva i parametre kako bi se dobro procijenila širina (visina) graničnog sloja i odredila potrebna rezolucija.

U ovom se radu za rješavanje jednostavnog problema (3.15–3.16) prvenstveno koristi prilagodba operatora na uniformnoj mreži pomoću sljedećih metoda:

- metoda konačnih razlika (FDM),
- El–Mistikawy i Werle metoda (EMW),
- Ramoseva modifikacija EMW metode (RAM),

- kolokacija napetim splajnovima.

Operator deriviranja se kod svih navedenih metoda diskretizira na uniformnoj (ekvidistantnoj) mreži

$$
\begin{aligned}
h &= x_{j+1} - x_j = 1/N, \\
x_j &= jh,\ j = 0, \ldots N, \quad 0 \le x \le 1,
\end{aligned}
$$

gdje je h korak mreže i N ukupan broj točaka za FDM, EMW i RAM metodu, tj. čvorova za napete splajnove. Za općenitu mrežu (npr. pri opisu napetih splajnova) vrijedi

$$
\begin{aligned}
h_j &= x_{j+1} - x_j,\ j = 0, \ldots N, \\
\sum_{j=0}^{N-1} h_j &= L, \quad 0 \le x \le L,
\end{aligned}
$$

gdje je h_j varijabilni korak mreže a L ukupna duljina intervala. Numerički model katabatičkog strujanja koji rješava jed. (2.20–2.22) s rubnim uvjetima (2.24) i (2.26) te varijabilnim profilom $K(z)$ (2.27) koristi oba pristupa, tj. prilagodbu operatora i neuniformnu mrežu (opisano u potp. 3.2.4.)

3.2.1. Metoda konačnih razlika

Metoda konačnih razlika (FDM) je ovdje korištena prvenstveno za usporedbu s drugim specijalno konstruiranim metodama poput EMW, RAM i napetih splajnova. Advekcijski član u (3.15) diskretiziran je uzvodnom ("upwind") shemom prvog reda točnosti, ovisno o predznaku $a(x)$

$$
\begin{aligned}
u' &= \frac{du}{dx} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} + \mathrm{O}(h), \quad a(x_j) > 0, \\
u' &= \frac{du}{dx} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} + \mathrm{O}(h), \quad a(x_j) < 0.
\end{aligned}
$$

(ovdje je, uobičajeno, $u_j = u(x_j)$). Difuzijski član diskretiziran je centralnim razlikama drugog reda točnosti.

$$
u'' = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + \mathrm{O}\left(h^2\right).
$$

Obje su navedene sheme široko korištene i mogu se naći u npr. Morton (1996), Durran (1999) i Roos i sur. (2008).

3.2.2. El–Mistikawy i Werle metoda i Ramoseva modifikacija EMW metode

El–Mistikawy i Werle metoda (EMW) se može dobiti iz varijacijske formulacije jed. (3.15). To je u biti projekcija tipa konačnih elemenata na prostor splajnova povezan s dualom operatora $-\varepsilon D^2 + aD$, gdje je $D := d/dx$ (Schumaker, 1981). Od brojnih referenci za EMW metodu novije su u Stynes (2005), Ramos (2005) i Roos i sur. (2008). Pretpostavke na koeficijente EMW metode su $a(x)$, $f(x) \in C^2[0,1]$, $a(x) \geq \alpha > 0$. Kako je prvenstveno konstruirana za advekcijsko–difuzijske procese, reakcijski član se prebacuje na desnu stranu (3.15) uz forsiranje $f(x)$. Numerički se rješava sustav jednadžbi

$$\mathbf{A}U = \frac{h^2}{\varepsilon}\mathbf{Q}F,$$

gdje su trodijagonalne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{Q}$ u kompaktnoj formi

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \text{tridiag}\left[p_1 + b_{j-1}q_1 \quad p_2 + b_j q_2 \quad p_3 + b_{j+1}q_3\right], \\ \mathbf{Q}F &:= \text{tridiag}\left[f_{j-1}q_1 \quad f_j q_2 \quad f_{j+1}q_3\right], \end{aligned}$$

a p_j, q_j, $j = 1, 2, 3$ se konstruiraju pomoću Bernoullijeve funkcije $B(\rho_j)$

$$B(\rho_j) = \frac{\rho_j}{\exp(\rho_j) - 1}, \tag{3.17}$$

$$\rho_j := \frac{\bar{a}_j h}{\varepsilon}, \quad \bar{a}_j := \frac{a(x_{j-1}) + a(x_j)}{2}. \tag{3.18}$$

EMW je mnogo bolja od FDM za čistu advekciju, no jako je nestabilna za čistu reakcijsku jednadžbu zbog pretpostavke $a(x) \geq \alpha > 0$ pri konstrukciji metode. Također, u limesu $\rho_j \to 0$ koristi se razvoj $B(\rho_j)$ po Čebiševljevim polinomima za zadanu točnost od 10^{-15} u dvostrukoj preciznosti kako bi se očuvala numerička stabilnost.

Kako EMW metoda daje lošije rezultate ukoliko problem nije čisto advekcijsko–difuzijskog tipa, Ramos (2005) ju je modificirao redefiniranjem funkcija baze. Umjesto Bernoullijeve funkcije (3.17) u RAM metodi se koriste hiperboličke funkcije $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ varijabli $\kappa_j h$ i $\lambda_j h$

$$\begin{aligned} \lambda_j &:= \frac{\bar{a}_j}{2\varepsilon}, \quad \kappa_j := \left(\lambda_j^2 + \frac{\bar{b}_j}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \\ \bar{b}_j &:= \frac{b(x_{j-1}) + b(x_j)}{2}, \end{aligned}$$

a $\bar{a}_j$ je iz (3.18). Kako $\kappa_j \neq 0$ kada $a(x) = 0$ metoda je superiorna za reakcijsko–difuzijski tip problema (3.15). No, unatoč eksplicitnoj pretpostavci $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq 0$ u Ramos (2005), metoda ne radi kada nema reakcijskog člana ($b(x) = 0$). Ramos (2005) je testirao ovu modifikaciju samo na reakcijsko–difuzijskom problemu. Slično EMW metodi, i ovdje je potrebno redefinirati funkcije baze (zbog pozitivnih eksponencijala u $\sinh(x)$ i $\cosh(x)$) kako bi se očuvala numerička stabilnost. Metoda je dizajnirana za varijabilni korak mreže, h_j. Obje metode su drugog reda točnosti ($\mathrm{O}(h^2)$).

3.2.3. Kolokacija napetim splajnovima

Direktne kolokacijske metode zasnivaju se na projekciji na prostore lokalno razapete polinomima ili kombinacijama eksponencijalnih funkcija i polinoma. U praksi, to su funkcije koje pripadaju $\mathrm{Ker}(D^4)$ ili $\mathrm{Ker}(D^2(D^2 - p^2))$, gdje je $p > 0$ tzv. parametar napetosti (engl. *tension parameter*) koji se *a priori* određuje iz asimptotskih argumenata; npr. $\mathrm{Ker}(D^4)$ je oznaka za jezgru operatora četvrte derivacije, (D^4). Kod kolokacije kombinacijom eksponencijalnih funkcija i potencija (polinoma), za probleme gdje je prisutan reakcijski član pogodna je ona koja projicira na $\mathrm{L}\{1, x, \exp(\pm px)\}$ (Marušić, 2001; Kadalbajoo i Patidar, 2002). Splajnovi pridruženi ovoj kombinaciji funkcija nazivaju se napeti splajnovi (engl. *tension splines*). Ako reakcijski član nije prisutan, bolje je koristiti projekciju na $\mathrm{L}\{1, x, x^2, \exp(px)\} = \mathrm{Ker}(D^4 - pD^3)$ a pridruženi splajnovi nazivaju se advekcijsko–difuzijski (AD–splajnovi). U oba slučaja nepolinomne kolokacije pripadajući prostori splajnova su slabi Čebiševljevi prostori (Rogina i Bosner, 2000), što dozvoljava brzu evaluaciju lokalne baze umetanjem čvorova (Rogina i Bosner, 2003; Bosner i Rogina, 2007; Bosner, 2010). Postoje dvije varijante kolokacije napetim splajnovima, ovisno o globalnoj glatkoći: C^2 (nadalje označeni TC2), gdje su točke kolokacije u čvorovima, i C^1 (nadalje označeni TC1), gdje točke kolokacije moraju biti između čvorova. C^1 varijanta se smatra superiornom jer se (prateći ideje u de Boor i Swartz (1973)) mogu eksplicitno naći optimalne točke kolokacije, tj. one koje daju maksimalni red konvergencije u čvorovima. Analogno je i za AD–splajnove C^1 slučaj označen s ADC1, a C^2 slučaj s ADC2.

Da bi se razvio stabilan algoritam za računanje s gore navedenim splajnovima, koristi se Čebiševljeva teorija, počevši s tzv. kanonskim kompletnim Čebiševljevim sustavom (engl. *Canonical Complete Chebyshev system*, CCC–sustav). Promatra se interval $[0, 1]$, i radi jednostavnosti pretpostavlja da je parametar napetosti p konstantan na $[0, 1]$ (obično se ovo naziva slučajem s uniformnom napetošću, engl. *uniform tension case*). CCC–sustav pridružen eksponencijalnim napetim splajnovima (koji igraju ulogu potencija u polinomnom slučaju) je:

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= 1, \\
u_2(x) &= \int_0^x d\tau_2 = x, \\
u_3(x) &= \int_0^x d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \cosh(p\tau_3)\, d\tau_3 = \frac{\cosh(px) - 1}{p^2}, \\
u_4(x) &= \int_0^x d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \cosh(p\tau_3)\, d\tau_3 \int_0^{\tau_3} \frac{d\tau_4}{\cosh^2(p\tau_4)} = \frac{\sinh(px) - px}{p^3},
\end{aligned}
$$

gdje su $u_1(x), \ldots, u_4(x)$ funkcije baze nul–potprostora (jezgre) operatora (Marušić, 2001)

$$
D^4 - p^2 D^2 = \left(\frac{1}{\cosh(p\,x)} D\right) \left(\cosh^2(p\,x) D\right) \left(\frac{1}{\cosh(p\,x)} D\right) D.
$$

Granična svojstva prostora napetih splajnova proizlaze iz generalizirane baze potencija, iako se ne mogu očito zaključiti iz $(\{1, x, \exp(\pm px)\})$. Ovo također implicira egzistenciju i konstrukciju lokalne baze B–splajnova (Bosner i Rogina, 2007). Kubični polinomni B–splajnovi zasnivaju se na projekciji na $\mathrm{L}\{1, x, x^2, x^3\}$ (npr. de Boor i Swartz, 1973; Schumaker, 1981). Za eksponencijalne advekcijsko–difuzijske splajnove, funkcije u nul–potprostoru operatora (Bosner, 2010)

$$
D^4 - p\,D^3 = D e^{px} D\, e^{-px} D^2,
$$

impliciraju CCC–sustav $(\{1, x, x^2, \exp(px)\})$:

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= 1, \\
u_2(x) &= \int_0^x d\tau_2 = x, \\
u_3(x) &= \int_0^x d\tau_2 \int_0^{\tau_2} e^{p\tau_3} d\tau_3 = \frac{e^{px} - 1}{p^2} - \frac{x}{p}, \\
u_4(x) &= \int_0^x d\tau_2 \int_0^{\tau_2} e^{p\tau_3} d\tau_3 \int_0^{\tau_3} e^{-p\tau_4} d\tau_4 = \frac{e^{px} - 1}{p^3} - \frac{x}{p^2} - \frac{x^2}{2p}.
\end{aligned}
$$

Neka je

$$
a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_k < x_{k+1} = b
$$

particija intervala $[a, b]$ na $k+1$ podintervala $h_j = [x_j, x_{j+1})$ za $j = 0, \ldots k-1$, $h_k = [x_k, x_{k+1}]$ (npr. Rogina, 1994). Skup $\Delta = \{x_j\}_{j=0}^{k+1}$ je *mreža* a njegovi elementi *čvorovi mreže*. Za dani *vektor multipliciteta* $\mathbf{m} = (n_1, \ldots, n_k)^T$ definiramo *proširenu particiju*

$\tau_1, \ldots, \tau_{2n+k}$ tako da vrijedi:

$$\tau_1 = \ldots = \tau_n = a$$
$$\tau_{n+k+1} = \ldots = \tau_{2n+k} = b$$

$$\tau_{n+1} \leq \ldots \leq \tau_{n+k} = \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k}$$

gdje $n_i \in \mathcal{Z}$ zadovoljavaju uvjet $1 \leq n_i \leq n$. Za dani CCC–sustav i proširenu particiju intervala $[0,1]$, $[x_j, x_{j+1}) \subset [0,1]$ $(h_j := x_{j+1} - x_j)$ prostor splajnova se definira na uobičajen način, kao prostor funkcija koje su po dijelovima u CCC–sustavu i broj kontinuiranih derivacija određen im je multiplicitetom čvora. Prema tome, C^1 splajnovi su pridruženi proširenoj particiji sa svim unutrašnjim čvorovima multipliciteta 2, dok C^2 splajnovi imaju sve unutrašnje čvorove multipliciteta 1. Za naše svrhe, najprikladnija baza Čebiševljevog prostora splajnova su B–splajnovi. Da bi se izračunali splajnovi reprezentirani kao linearna kombinacija B–splajnova, koristi se tehnika umetanja čvorova poput generaliziranog de Boorovog algoritma (za C^1 splajnove), kao i posebne vrste Oslo algoritma (za C^2 splajnove) (vidi Bosner, 2006). Derivacije potrebne za kolokacijsku metodu računate su pomoću formule za generalizirane derivacije iz Rogina (2005), koja izvrednjava derivacije B–splajnova kao linearnu kombinaciju B–splajnova nižeg reda.

TC i AD–splajnovi imaju zanimljivo ponašanje u limesima za jako mali ili jako veliki parametar napetosti, p. Ako $p \to 0$, tada se i TC i AD–splajnovi približavaju kubičnim splajnovima (Slike 3.1a–3.4a; $T_1, \ldots, T_8$ su oznake za splajnove). Za $p \to \infty$ C^1 splajnovi postaju linearni (Sl. 3.1b i 3.3b) a C^2 splajnovi parabolični (Sl. 3.3b i 3.4b). Dokaz ove činjenice za neuniformne parametre napetosti (p_j) nije trivijalan (Grandison, 1997), i vjerojatno može biti proveden na isti način za AD–splajnove (Bosner, 2010).

C^2 kolokacija u čvorovima vodi na trodijagonalnu matricu kao u polinomnom slučaju. Težak dio je prije spomenuta konstrukcija baze B–splajnova. U C^1 slučaju traži se kolokacijski splajn s s kontinuiranim derivacijama u čvorovima koji zadovoljava kolokacijsku jednadžbu

$$-\varepsilon\, s''(\tau_i) + a(\tau_i)\, s'(\tau_i) + b(\tau_i)\, s(\tau_i) = f(\tau_i), \qquad i = 1, 2,$$

na svakom podintervalu particije intervala $[0,1]$, zajedno s rubnim uvjetima $s(0) = \alpha$, $s(1) = \beta$. Izražavanjem s kao linearne kombinacije B–splajnova, matrica sustava postaje blok–dijagonalna. Točke kolokacije τ_1, τ_2 su slobodni parametri, no mogu biti odabrane na optimalan način tako da globalno poboljšaju točnost (smanje pogrešku), a posebice u čvorovima. Ovakvo povećanje točnosti i više nego nadoknađuje dodatan napor uložen u invertiranje matrice sustava. U sličnim se situacijama ovakve kolokacijske točke obično nazivaju generaliziranim Gaussovim točkama. Ako se promatra podinterval $[x_j, x_{j+1}) \subset$

$[0,1]$, s $h_j := x_{j+1} - x_j$, tada su generalizirane Gaussove točke za napete (TC) splajnove

$$\tau_1 := x_j + t_j^*, \qquad \tau_2 := x_{j+1} - t_j^*,$$

gdje su

$$t_j^* := \frac{h_j}{2} - \frac{1}{p}\text{Arccos}\left(\frac{2}{ph_j}\sinh\left(\frac{ph_j}{2}\right)\right).$$

Ove točke se mogu dobiti zahtijevajući ortogonalnost pogreške kolokacije po dijelovima na Greenovu funkciju problema (2.29–2.30), iako je u Marušić (2001) bio korišten drukčiji pristup. Ista ideja (de Boor i Swartz, 1973) vodi na Gaussove točke za AD–splajnove

$$\tau_1 = s_j - h\tau_j, \qquad \tau_2 = s_j + h\tau_j,$$

gdje su

$$\begin{aligned}
s_j &:= x_j + \frac{h_j}{3}\frac{f_2(ph_j)}{f_1(ph_j)}, \\
h\tau_j &:= h_j f_3(ph_j), \\
f_1(x) &:= \frac{2(1-e^{-x}) - x(1+e^{-x})}{x^3}, \\
f_2(x) &:= \frac{6(e^{-x} - 1 + x) - x^2(2+e^{-x})}{x^4}, \\
f_3(x) &:= \frac{\sqrt{e^{-x}\left(1-\frac{72}{x^4}\right) + e^{-2x}\left(\frac{36}{x^4} + \frac{36}{x^3} + \frac{18}{x^2} + \frac{6}{x} + 1\right) + \frac{36}{x^4} - \frac{36}{x^3} + \frac{18}{x^2} - \frac{6}{x} + 1}}{3\left(\frac{2}{x}(e^{-x}-1) + e^{-x} + 1\right)}.
\end{aligned}$$

Važno je napomenuti da u slučajevima kada nema reakcijskog člana, Greenova funkcija nije samo–pridružena (engl. *self–adjoint*), pa se za TC i za AD–splajnove optimalne točke kolokacije moraju ponovno izračunavati na svakom intervalu. Neka je radi jednostavnosti $[x_j, x_{j+1}) = [0,1)$. Tada za TC splajnove vrijedi

$$\lim_{p\to 0} t_j^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \qquad \lim_{p\to\infty} t_j^* = 0,$$

tj. u limesu kada $p \to 0$ optimalne točke su nultočke Legendreove parabole (Marušić, 2001). Za AD–splajnove se dobiva

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0}\tau_{2j+1} &= \frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right), \ \lim_{p\to\infty}\tau_{2j+1} = \frac{1}{3}, \\
\lim_{p\to 0}\tau_{2j+2} &= \frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right), \ \lim_{p\to\infty}\tau_{2j+2} = 1.
\end{aligned}$$

Odabir parametra napetosti, p, ovisi o koeficijentima u diferencijalnoj jednadžbi (3.15) (Marušić i Rogina (1996a) za TC2, i Marušić (2001) za TC1 slučaj). Kod TC–

splajnova koristi se (Marušić, 2001)

$$p_j = \frac{h_j}{\varepsilon}\frac{a_j + \sqrt{a_j^2 + 4b_j\varepsilon}}{2}, \quad p_j > 0, \tag{3.19}$$

gdje je p_j parametar napetosti na podintervalu $[x_j, x_{j+1}] \subset [0,1]$. a_j i b_j se definiraju kao

$$a_j = \max_{[x_j,x_{j+1}]} a(x), \quad b_j = \max_{[x_j,x_{j+1}]} b(x),$$

što se u praksi može uzeti kao vrijednost u $x_j + h_j/2$ ukoliko su a_j i b_j poznate funkcije, ili npr. kao srednjaci vrijednosti u čvorovima ukoliko nisu poznati, ili pak kao npr. $a_j = \max[a(x_j), a(x_{j+1})]$ (mogući su i drugi odabiri). Zbog kombinacije rastuće i padajuće eksponencijalne funkcije u bazi TC1 splajnovi daju dobre rezultate i za negativnu advekciju, no uz redefiniranje p_j u (3.19) kao

$$p_j = \frac{h_j}{\varepsilon}\frac{\operatorname{sign}(a_j)\, a_j + \sqrt{a_j^2 + 4b_j\varepsilon}}{2}. \tag{3.20}$$

p za AD–splajnove je (proširenje rada Bosner (2010), trenutno u razvoju)

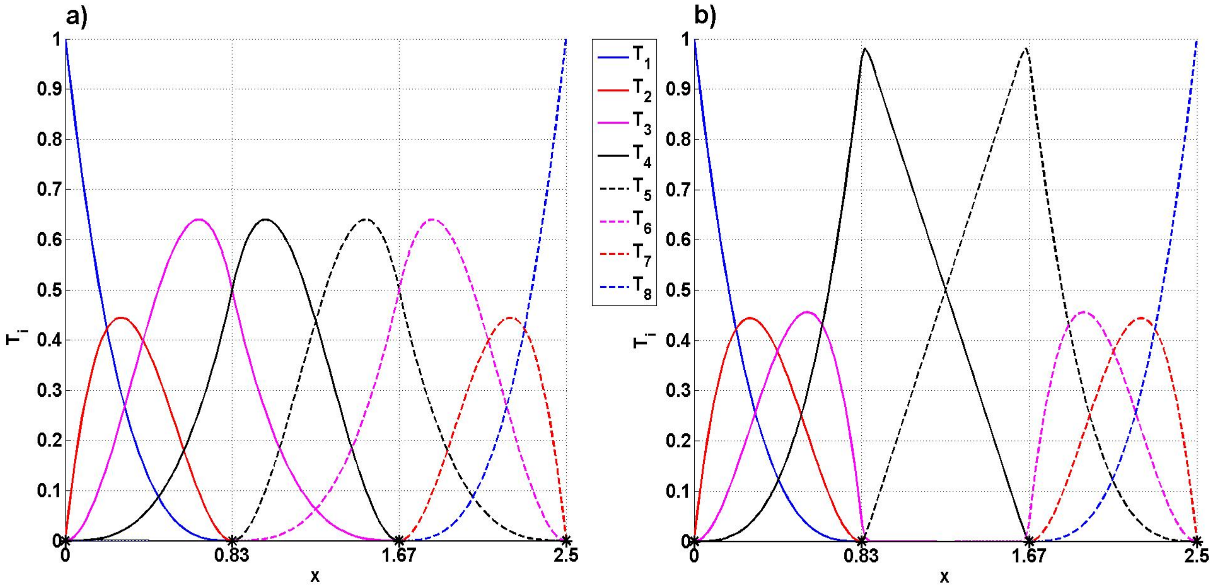
$$p_j = -\frac{a_j h_j}{\varepsilon}, \tag{3.21}$$

gdje je p_j također parametar napetosti na podintervalu $[x_j, x_{j+1}) \subset [0,1]$, s analognom definicijom a_j kao kod TC–splajnova. p može biti različitih predznaka, što je naročito pogodno za čisto advekcijsko–difuzijske probleme kada $a(x)$ mijenja predznak (Sl. 3.3c, 3.3d, 3.4c i 3.4d). AD–splajnovi su razvijeni za advekcijsko–difuzijske probleme, no čini se da funkcioniraju i kada je prisutan reakcijski član, s redefinicijom p analognoj (3.20)

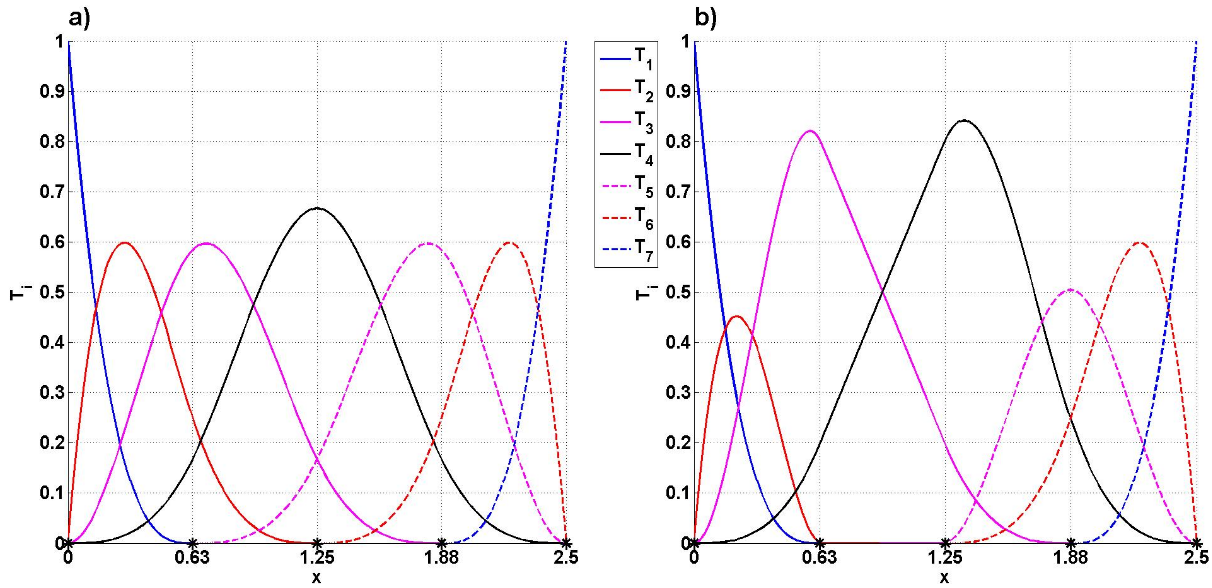
$$p_j = \frac{h_j}{\varepsilon}\frac{-a_j + \sqrt{a_j^2 + 4b_j\varepsilon}}{2}. \tag{3.22}$$

Kod reakcijsko–difuzijskog tipa problema AD–splajnovi ne daju dobre rezultate, što je i očekivano.

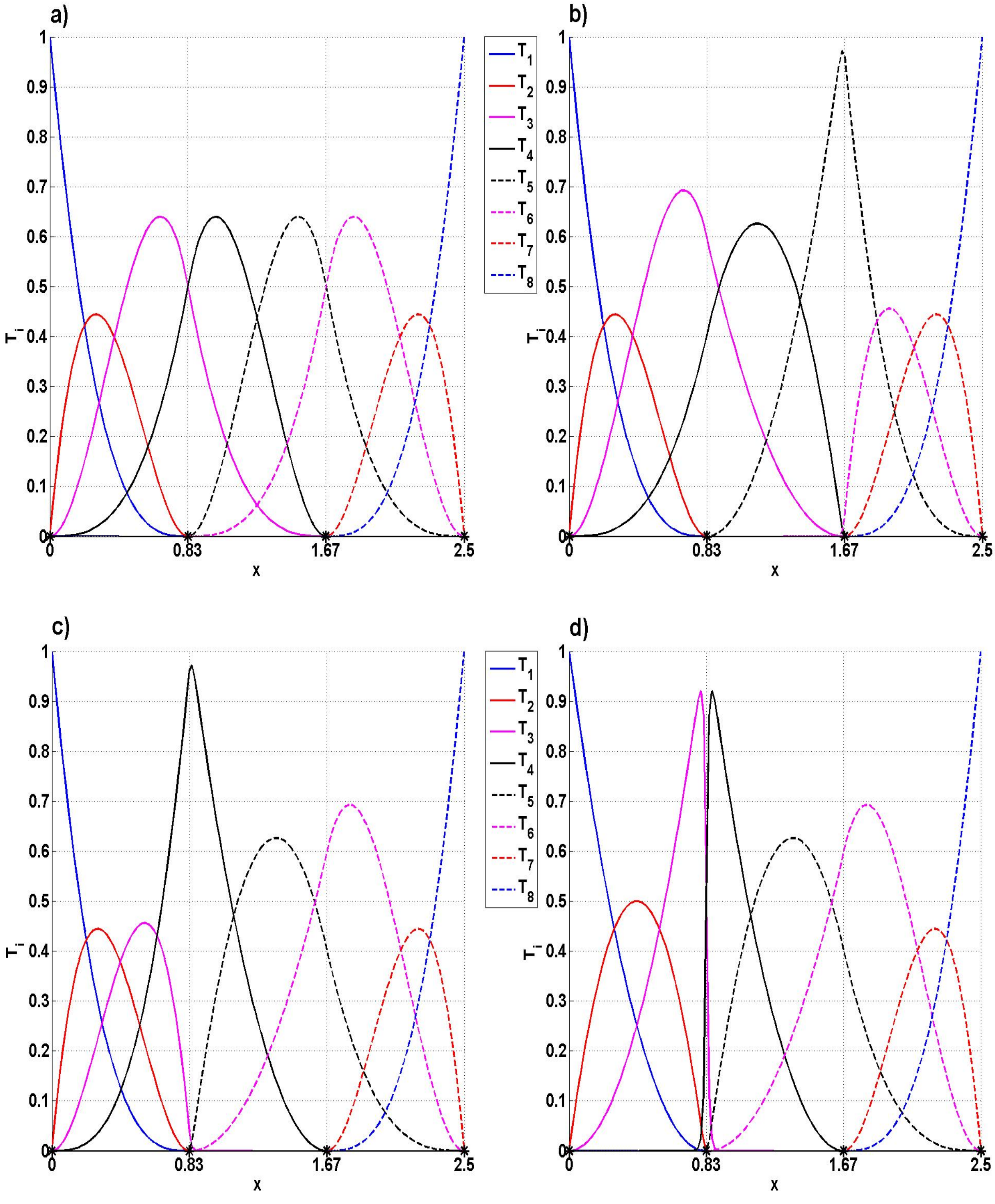
Redovi konvergencije su h^2 (TC2) i variraju između h^2 i h^4 (TC1) u slučaju netrivijalnog reakcijskog člana, dok se inače ocjena pogreške općenito ne može provesti iako metoda numerički daje dobre rezultate. Ako nema reakcijskog člana koristi se isti izbor p kao u TC1 i može se dokazati h^2 red konvergencije. Čini se da ε–uniformna konvergencija (Farrell i sur., 2000; Roos i sur., 2008) vrijedi u svim slučajevima, no nema dokaza za to – vjerovatno zbog nelinearnog načina na koji p ovisi o koeficijentima u (3.15). Pogreške u čvorovima mogu biti ε–uniformno ograničene pa se predlaže ime ε–uniformne superkonvergencije za ovaj fenomen. Red konvergencije je 3 za AD–splajnove (Bosner, 2010).



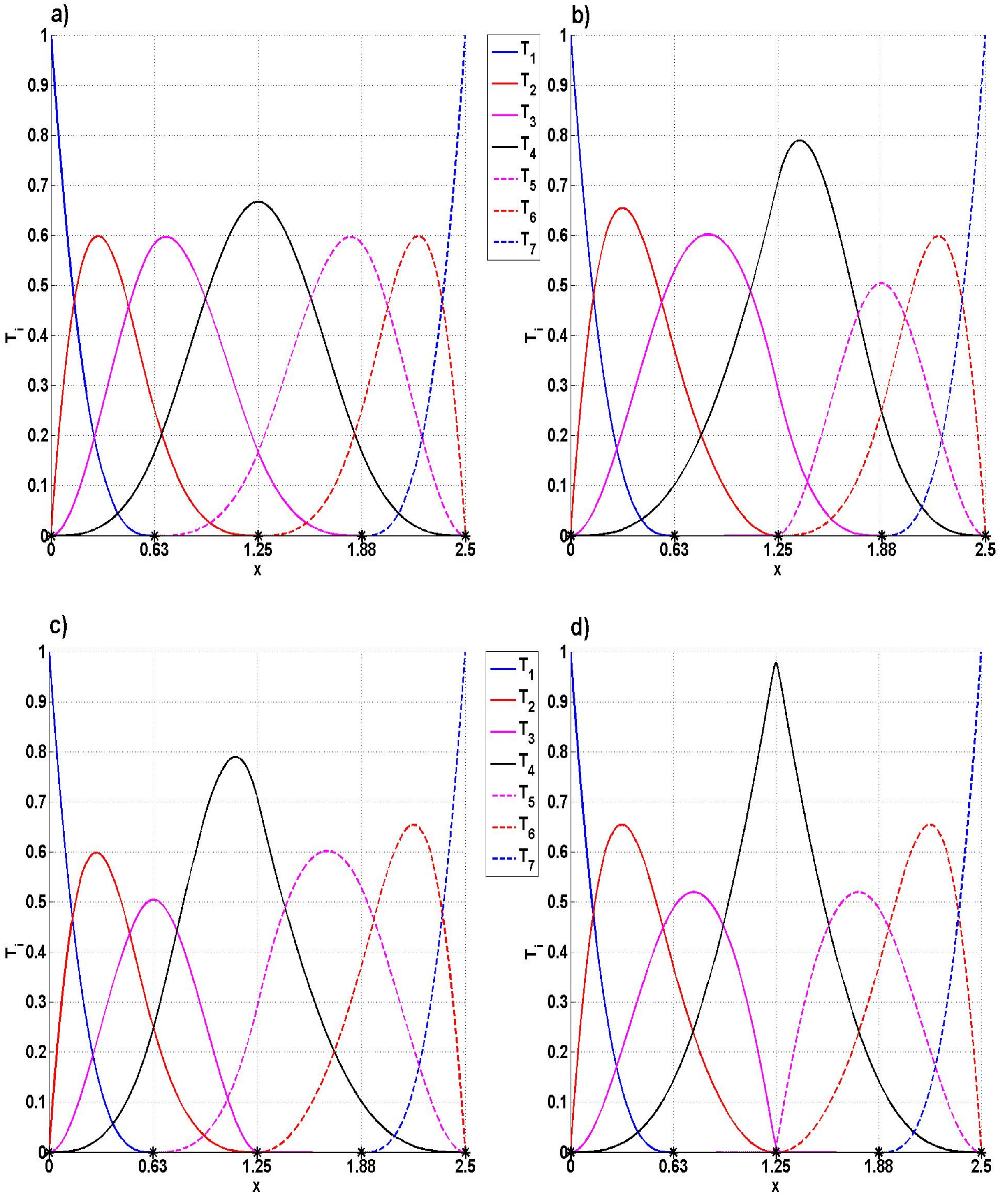
Slika 3.1: TC1–splajnovi: a) Parametar napetosti $p = 0$ na svakom podintervalu i b) $p = 90$ na drugom podintervalu. Crne zvjezdice označavaju položaj čvorova, $T_1, \ldots, T_8$ su oznake za splajnove.



Slika 3.2: TC2–splajnovi: a) Parametar napetosti $p = 0$ na svakom podintervalu i b) $p = 90$ na drugom podintervalu. Ostalo kao na Sl. 3.1.



Slika 3.3: ADC1–splajnovi: a) Parametar napetosti $p = 0$ na svakom podintervalu, b) $p = 90$ na drugom podintervalu, c) $p = -90$ na drugom podintervalu i d) $p = 90$ na prvom a $p = -90$ na drugom podintervalu. Ostalo kao na Sl. 3.1.



Slika 3.4: ADC2–splajnovi: a) Parametar napetosti $p = 0$ na svakom podintervalu, b) $p = 90$ na trećem podintervalu, c) $p = -90$ na trećem podintervalu i d) $p = 90$ na drugom a $p = -90$ na trećem podintervalu. Ostalo kao na Sl. 3.1.

3.2.4. Diskretizacija modela katabatičkog strujanja

Nakon prikaza numeričkih metoda za rješavanje singularno perturbiranog problema (3.15–3.16) ovdje je ilustrirana primjena nekih od njih u numeričkom rješavanju modela katabatičkog vjetra (2.20–2.22) za varijabilan $K = K(z)$ iz (2.27)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \gamma \sin(\alpha) U, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = Pr\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial U}{\partial z}\right) + f\cos(\alpha) V + \frac{g\sin(\alpha)}{\theta_0}\theta, \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = Pr\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial V}{\partial z}\right) - f\cos(\alpha) U, \tag{3.25}$$

s rubnim uvjetima za primarno katabatičko strujanje (2.24) i (2.26)

$$\theta(z=0) = C, \quad U(z=0) = 0, \quad V(z=0) = 0, \tag{3.26}$$

$$\theta(z\to\infty) \to 0, \quad U(z\to\infty) \to 0, \quad V(z\to\infty) \to 0. \tag{3.27}$$

Raspisivanjem vremenski ovisnog sustava (3.23–3.25) dobiva se

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial z} - \gamma\sin(\alpha) U, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = KPr\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + Pr\frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} + f\cos(\alpha) V + \frac{g\sin(\alpha)}{\theta_0}\theta, \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = KPr\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + Pr\frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} - f\cos(\alpha) U, \tag{3.30}$$

čija je diskretizacija opisana dalje u ovom potpoglavlju.

Diskretizacija konačnim razlikama

Grisogono (2003) je diskretizirao prostorni dio nerotirajuće varijante ($f = 0$) sustava (3.23–3.27) centralnim konačnim razlikama drugog reda točnosti na ekvidistantnoj mreži (npr. Durran, 1999)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta z} + \mathrm{O}\left(\Delta z^2\right), \quad j = 1, \dots N-1,$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_j^n = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta z^2} + \mathrm{O}\left(\Delta z^2\right), \quad j = 1, \dots N-1,$$

$$\Delta z = z_{j+1} - z_j = H/N, \quad j = 0, \dots N-1,$$

gdje je H visina numeričkog modela na kojoj se uzima gornji rubni uvjet (3.27), koji sada postaje

$$\theta\left(z=H\right)=0,\quad U\left(z=H\right)=0,\quad V\left(z=H\right)=0.$$

Vremenski dio integriran je Adams–Bashforthovom metodom 3. reda točnosti

$$\begin{aligned}
U_j^{n+1} &= U_j^n + \Delta t f\left(t^n, U_j^n\right) + \mathrm{O}\left(\Delta t\right),\\
U_j^{n+2} &= U_j^{n+1} + \Delta t\left[\frac{3}{2} f\left(t^{n+1}, U_j^{n+1}\right) - \frac{1}{2} f\left(t^n, U_j^n\right)\right] + \mathrm{O}\left(\Delta t^2\right),\\
U_j^{n+3} &= U_j^{n+2} + \Delta t\left[\frac{23}{12} f\left(t^{n+2}, U_j^{n+2}\right) - \frac{4}{3} f\left(t^{n+1}, U_j^{n+1}\right) + \frac{5}{12} f\left(t^n, U_j^n\right)\right]\\
&\quad + \mathrm{O}\left(\Delta t^3\right),
\end{aligned}$$

gdje je

$$t^n = n\Delta t,\quad n\geq 1.$$

Početni uvjeti numeričkog modela, rješavanog ovom metodom reda točnosti $\mathrm{O}\left(\Delta t^3, \Delta x^2\right)$, su

$$\theta\left(z,t=0\right)=U\left(z,t=0\right)=V\left(z,t=0\right)=0. \tag{3.31}$$

Diskretizacija metodama za singularno perturbirane probleme

Kako bi se za rješavanje vremenski ovisnog sustava (3.28–3.30) mogle primijeniti prije opisane numeričke metode za rješavanje singularno perturbiranih problema, sustav se mora svesti na rubni problem oblika (2.29–2.30). Jednadžbe (3.28–3.30) se mogu napisati i kao

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - K\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\gamma\sin\left(\alpha\right)U, \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - KPr\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - Pr\frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} = f\cos\left(\alpha\right)V + \frac{g\sin\left(\alpha\right)}{\theta_0}\theta, \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - KPr\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - Pr\frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} = -f\cos\left(\alpha\right)U, \tag{3.34}$$

gdje sada desne strane jednadžbi imaju ulogu forsiranja $f\left(x\right)$ u (2.29).

Da bi se sustav sveo na formu rubnog problema (2.29) potrebno je uvesti vremensku derivaciju implicitnim konačnim razlikama. Ovdje se koristi Eulerova metoda unatrag (engl. *backward Euler*, npr. u Durran (1999)) gdje su:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_j^n \approx \frac{\theta_j^{n+1}-\theta_j^n}{\Delta t} + \mathrm{O}\left(\Delta t\right),$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_j^n \approx \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} + \mathrm{O}\left(\Delta t\right),$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_j^n \approx \frac{V_j^{n+1}-V_j^n}{\Delta t} + \mathrm{O}\left(\Delta t\right).$$

Vrijednosti prostornih derivacija s lijeve strane sustava (3.32–3.34) uzimaju se u $n+1$ vremenskom koraku, a forsiranja s desne strane u n-tom. Dodatno, zbog prilagođavanja formi rubnih uvjeta (2.30), uvodi se reskaliranje prostorne varijable $z \in [0, H]$ kao

$$\tilde{z} = z/H, \quad \tilde{z} \in [0, 1].$$

Sustav (3.32–3.34) se tako, nakon množenja s Δt, može napisati u numeričkoj formi za rješavanje rubnog problema (2.29–2.30) kao:

$$-K_j \frac{\Delta t}{H^2}\left(\theta''\right)_j^{n+1} - \left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{z}}\right)_j \frac{\Delta t}{H^2}\left(\theta'\right)_j^{n+1} + \left(\theta\right)_j^{n+1} = -\gamma \Delta t \sin\left(\alpha\right)\left(U\right)_j^n + \left(\theta\right)_j^n, \tag{3.35}$$

$$-K_j Pr \frac{\Delta t}{H^2}\left(U''\right)_j^{n+1} - \left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{z}}\right)_j Pr \frac{\Delta t}{H^2}\left(U'\right)_j^{n+1} + \left(U\right)_j^{n+1} = f\cos\left(\alpha\right)\Delta t\left(V\right)_j^n + \frac{g\sin\left(\alpha\right)}{\theta_0}\Delta t\left(\theta\right)_j^n + \left(U\right)_j^n, \tag{3.36}$$

$$-K_j Pr \frac{\Delta t}{H^2}\left(V''\right)_j^{n+1} - \left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{z}}\right)_j Pr \frac{\Delta t}{H^2}\left(V'\right)_j^{n+1} + \left(V\right)_j^{n+1} = -f\cos\left(\alpha\right)\Delta t\left(U\right)_j^n + \left(V\right)_j^n, \tag{3.37}$$

$$\theta_0^n = C, \quad \theta_N^n = 0, \tag{3.38}$$

$$U_0^n = 0, \quad U_N^n = 0, \tag{3.39}$$

$$V_0^n = 0, \quad V_N^n = 0, \tag{3.40}$$

za $j = 1, \ldots N-1$, gdje su

$$\theta'' = \frac{d^2\theta}{dz^2}, \; \theta' = \frac{d\theta}{dz},$$

i analogno vrijedi i za U i V.

Vidi se da svaka od jednadžbi sustava (3.35-3.37) odgovara formi (2.29–2.30), pa su odgovarajući koeficijenti

$$\varepsilon_\theta\left(\tilde{z}_j\right)=\frac{K_j\Delta t}{H^2},\quad \varepsilon_{UV}\left(\tilde{z}_j\right)=\frac{K_jPr\Delta t}{H^2}, \tag{3.41}$$

$$a_\theta\left(\tilde{z}_j\right)=-\left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{z}_j}\right)_j\frac{\Delta t}{H^2},\quad a_{UV}\left(\tilde{z}_j\right)=-\left(\frac{\partial K}{\partial \tilde{z}}\right)_j Pr\frac{\Delta t}{H^2}, \tag{3.42}$$

$$b_\theta\left(\tilde{z}_j\right)=b_{UV}\left(\tilde{z}_j\right)=1, \tag{3.43}$$

dok su desne strane numeričkog modela (3.35–3.37) vremenski ovisne (mijenjaju se u svakom koraku):

$$\begin{aligned}
f_\theta\left(\tilde{z}_j\right)&=-\gamma\Delta t\sin\left(\alpha\right)\left(U\right)_j^n+\left(\theta\right)_j^{n+1},\\
f_U\left(\tilde{z}_j\right)&=f\cos\left(\alpha\right)\Delta t\left(V\right)_i^n+\frac{g\sin\left(\alpha\right)}{\theta_0}\Delta t\left(\theta\right)_j^n+\left(U\right)_j^n,\\
f_V\left(\tilde{z}_j\right)&=-f\cos\left(\alpha\right)\Delta t\left(U\right)_j^n+\left(V\right)_j^n.
\end{aligned}$$

Gore navedenim postupkom je sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (3.32–3.34) preveden Eulerovom metodom unatrag u sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (3.35–3.40). Od metoda za rješavanje singularno perturbiranih problema, opisanih u potpoglavljima 3.2.1.–3.2.3., za rješavanje sustava (3.35–3.40) upotrijebljeni su TC1 i TC2–splajnovi (potp. 3.2.3.), koji su se pokazali kao najprimjenjiviji za širok raspon problema (opisano u poglavlju 4.). Korištene su dvije vrste mreža:

- uniformna mreža sa svih N ekvidistantno raspoređenih čvorova $\tilde{z}_j \in [0,1]$,
- profinjena mreža s $N/2$ čvorova $\tilde{z}_j \in [0, 2h/H]$ i $N/2$ čvorova $\tilde{z}_j \in [2h/H, 1]$, gdje je h visina maksimuma $K(z)$ profila u (2.27).

Primjena napetih splajnova na katabatičko strujanje s varijabilnim $K(z)$ je jedan od glavnih znanstvenih doprinosa ove disertacije.

4. Modeliranje singularnih perturbacija

U ovom poglavlju se na primjerima singularno perturbirane jednadžbe advekcije–difuzije–reakcije opisuje ponašanje numeričkih metoda opisanih u potpoglavlju 3.2. Glavnina primjera opisana je u Kavčič i sur. (2010). Ovdje su dodani rezultati za AD–splajnove s negativnim parametrom napetosti, p (potp. 3.2.3.), te su opisani i neki zanimljivi slučajevi kada advekcijski član u (2.29–2.30) mijenja predznak.

4.1. Numerički primjeri

Promatra se nekoliko primjera singularno perturbiranog rubnog problema (2.29–2.30), s pripadnim analitičkim rješenjima:

- **Primjer 1** (npr. u Bosner (2010))

$$\varepsilon u''(x) - u(x)' = \exp(x), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

s analitičkim rješenjem

$$u^{\text{exact}}(x) = \frac{e^{x/\varepsilon}(1-e) + e^x\left(e^{1/\varepsilon} - 1\right) + e - e^{1/\varepsilon}}{\left(e^{1/\varepsilon} - 1\right)(\varepsilon - 1)}.$$

- **Primjer 2**

$$-\varepsilon u''(x) + u(x) = 1, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

s analitičkim rješenjem

$$u^{\text{exact}}(x) = \frac{\sinh[A(x-1)] - \sinh(Ax)}{\sinh(A)} + 1, \quad A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

- **Primjer 3** (npr. primjer 5 u Kadalbajoo i Patidar (2002))

$$-\varepsilon u'' + u' + (1+\varepsilon)u = 0, \quad u(0) = 1 + e^{-(1+\varepsilon)/\varepsilon},\ u(1) = 1 + e^{-1},$$

s analitičkim rješenjem

$$u^{\text{exact}}(x) = e^{(1+\varepsilon)(x-1)/\varepsilon} + e^{-x}.$$

- **Primjer 4**

$$-\varepsilon u'' + (x+1)u' = x + 1, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

s analitičkim rješenjem

$$u^{\text{exact}}(x) = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{A}{2}\right) - \operatorname{erf}\left[\frac{A}{2}(x+1)\right]}{\operatorname{erf}(A) - \operatorname{erf}\left(\frac{A}{2}\right)} + x, \quad A = \sqrt{-\frac{2}{\varepsilon}}.$$

- **Primjer 5** (npr. primjer 2 u Kadalbajoo i Patidar (2002))

$$\begin{aligned} &-\varepsilon u'' + [1 + x(1-x)]\, u = f(x), \qquad u(0) = u(1) = 0, \\ &f(x) = e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} \left[2\sqrt{\varepsilon} - x(1-x)^2\right] + \\ &+ e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}} \left[2\sqrt{\varepsilon} - x^2(1-x)\right] + 1 + x(1-x). \end{aligned}$$

s analitičkim rješenjem

$$u^{\text{exact}}(x) = 1 + (x-1)\, e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} - x e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}.$$

- **Primjer 6** (npr. jednadžba (5.2) u Küther (1997))

$$\begin{aligned} &-\varepsilon u'' + (x+1)\, u' + 2u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0, \\ &f(x) = \exp\left[-3/(2\varepsilon)\right](3x-1) - 6x - 2. \end{aligned}$$

s analitičkim rješenjem

$$\begin{aligned} u^{\text{exact}}(x) = {} & 2 - 2\exp\left[-3/(2\varepsilon)\right] + \\ & + (x+1)\left\{\exp\left[-3/(2\varepsilon)\right] + \exp\left[\left(x^2 + 2x - 3\right)/(2\varepsilon)\right] - 2\right\}. \end{aligned}$$

- **Primjer 7**

$$-\varepsilon u'' - (2x-1)\, u' = 2x - 1, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

s analitičkim rješenjem

$$u^{\text{exact}}(x) = \frac{\operatorname{erf}\left[A(2x-1)\right]}{2\operatorname{erf}(A)} - \frac{1}{2}(2x-1), \quad A = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

- **Primjer 8** (npr. primjer 4.1 u Surla i Uzelac (1990))

$$-\varepsilon u'' - u' = -x, \qquad u(x=0) = u(x=1) = 0,$$

s analitičkim rješenjem

$$u^{\text{exact}}(x) = \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) \frac{1 - \exp(-x/\varepsilon)}{1 - \exp(-1/\varepsilon)} - \varepsilon x + \frac{x^2}{2}.$$

Primjeri (1–3) su tipični advekcijsko–difuzijski (nadalje AD; primjer 1), reakcijsko–difuzijski (nadalje RD; primjer 2) i advekcijsko–difuzijsko–reakcijski (nadalje ADR; primjer 3) problemi, s konstantnim koeficijentima i pretpostavkama $a(x) = a^* > 0$ i/ili $b(x) = b^* > 0$. Primjeri 4–6 također predstavljaju probleme AD, RD i ADR tipa, sada s varijabilnim koeficijentima ali ipak podložnima pretpostavkama $a(x) > 0$ i/ili $b(x) > 0$. Primjeri 1 do 6 se mogu smatrati "klasičnim" singularno perturbiranim problemima u smislu širine graničnog sloja, w. Zbog pozitivnog advekcijskog člana AD primjeri 1 i 4, kao i ADR primjeri 3 i 6, imaju jedan granični sloj širine $w = \mathcal{O}(\varepsilon)$ u $x = 1$. RD primjeri 2 i 5 imaju dva granična sloja širine $w = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ na oba kraja intervala ($x = 0$ i $x = 1$).

Primjer 7, također AD problem, je neuobičajen zbog nultočke u advekcijskom članu u $x = 1/2$. On ima unutarnji granični sloj (engl. *interior layer*) širine $w = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ u $x = 1/2$ (Sl. 4.1). Primjer 8 je AD problem s negativnom advekcijom na cijelom intervalu ($a(x) = a^* < 0$), i time ipak lakši za modeliranje od primjera 7 za AD–splajnove gdje p može mijenjati predznak (jednadžba (3.21), metodu trenutno razvijaju T. Bosner i M. Rogina). Ovaj primjer (kao i AD primjeri 1, 4, te ADR primjeri 3, 6) ima jedan granični sloj širine $w = \mathcal{O}(\varepsilon)$ no na lijevom kraju intervala, $x = 0$, zbog negativnog advekcijskog člana.

Svi navedeni primjeri su numerički testirani na uniformnoj mreži s korakom $h = 1/n$. Ovdje je n broj točaka za EMW i RAM metode, te broj čvorova za TC–splajnove i AD–splajnove. Parametri ε i n su mijenjani kao:

$$\varepsilon = 2^{-k},\ k = 2, 3, \dots, 14, \qquad n = 2^m,\ m = 4, 5, \dots, 12, \tag{4.1}$$

a apsolutne pogreške između numeričkih i analitičkih rješenja su računate kao

$$e_i = u_i^{\text{num}} - u_i^{\text{exact}}, \quad i = 0, \dots, n, \tag{4.2}$$

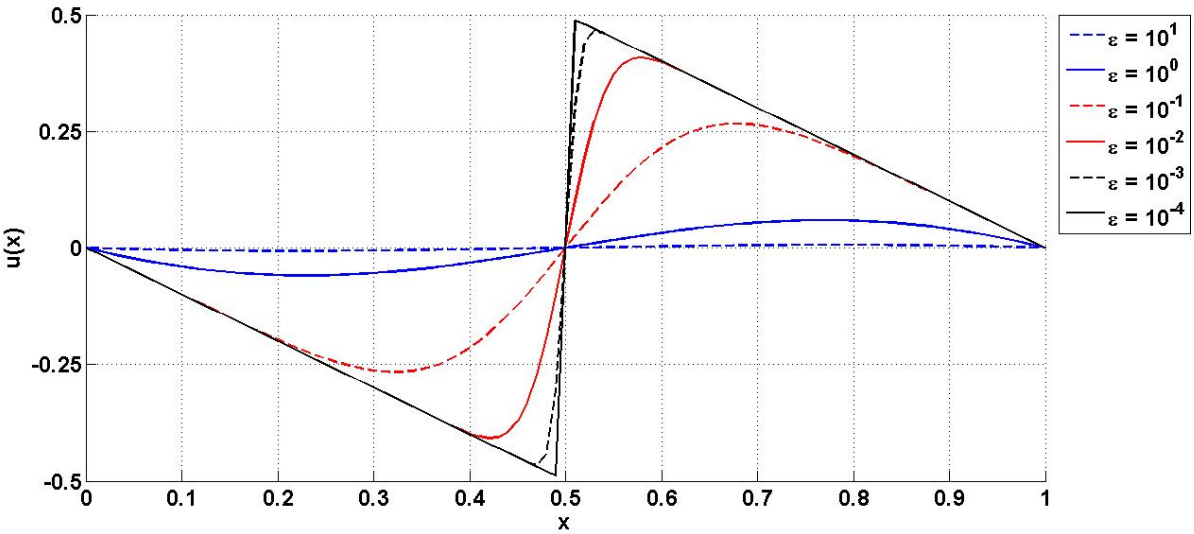
$$E_a = e_l, \quad |e_l| = \max_i |e_i|. \tag{4.3}$$

Za RAM metodu se tijekom konstrukcije primjera i testiranja pokazalo da se ne može primijeniti na AD primjere 1, 4, 7 i 8 gdje je reakcijski koeficijent $b(x) = 0$, unatoč eksplicitno zadanom uvjetu $b(x) \geq 0$ u Ramos (2005) (ovdje je $-b(x) \geq 0$ zbog malo drukčije definicije rubnog problema (2.29)). U Ramos (2005) je $b(x)$ u nazivniku jednadžbe (31), odvojeno od ostalih parametara, te se ne može postići konačan limes kada $b(x) \to 0$. Također, zbog hiperboličnih funkcija upotrijebljenih u (31) metodu je bilo potrebno reformulirati da ne bi došlo do dijeljenja s nulom te, posljedično, iznimaka u operacijama s pomičnom točkom (engl. *floating–point exceptions*) za male ε.

Također, za C^2 slučaj napetih splajnova (TC2 i ADC2–splajnovi) izvršena su dodatna numerička testiranja gdje su se ε i n mijenjali kao:

$$\varepsilon = 10^{-k},\ k = 1, 2, \dots, 15, \qquad n = 2^m,\ m = 4, 5, \dots, 12. \tag{4.4}$$

Naime, pokazalo se da i TC2 i ADC2–splajnovi vrlo dobro reproduciraju unutarnji granični sloj u primjeru 7, naročito za mali broj čvorova i vrlo male vrijednosti ε. Za ε računate po izrazu (4.1) ovo ponašanje ne dolazi do izražaja zbog prevelikih vrijednosti ε. Naime, najmanja vrijednost ε u (4.1) je $\varepsilon = 2^{-14} \approx 6.10 \cdot 10^{-5}$, a u (4.4) je $\varepsilon = 10^{-15}$. Kod ADC2–splajnova uvaženo je mijenjanje predznaka u definiciji p (3.21).



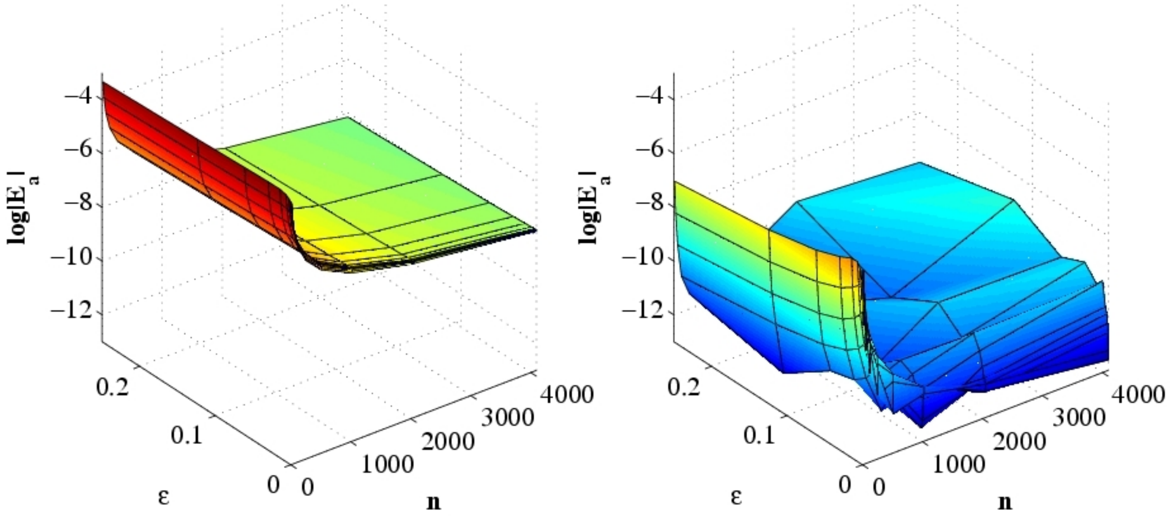
Slika 4.1: Analitičko rješenje primjera 7 za različite ε. $a(x)$ mijenja predznak u $x = 1/2$ pa je unutarnji granični sloj širine $w = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ oko $x = 1/2$.

4.2. Rezultati i diskusija

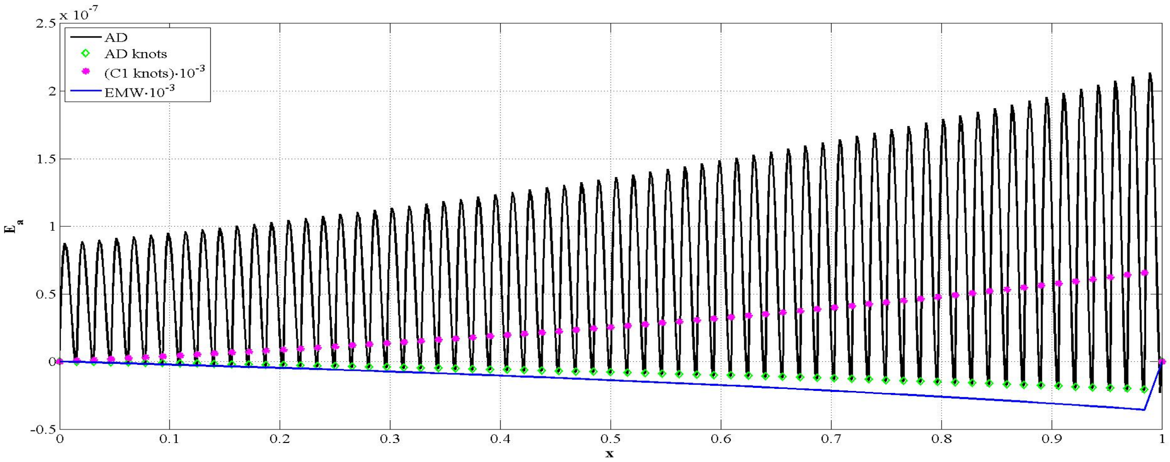
Numerički testovi su otkrili da ponašanje promatranih metoda ne ovisi samo o tipu problema nego i o varijabilnosti koeficijenata $a(x)$ i $b(x)$ u (2.29). Prvo se diskutiraju "klasični" AD, RD i ADR problemi (primjeri 1–6), a nakon toga specifično ponašanje primjera 7 i 8. Da bi se bolje opisale osobine primjenjenih metoda, umjesto numeričkih i analitičkih rješenja prikazane su apsolutne pogreške, E_a (4.3), na log–skali.

EMW metoda i ADC1–splajnovi su se pokazali najboljima u AD slučajevima, primjeri 1 i 4. Za konstantan $a(x)$ usporedba EMW i ADC1–splajnova ide u korist ADC1–splajnova, ne samo u smislu reda točnosti nego i ponašanja za male ε (Sl. 4.2). Štoviše, kao što se vidi iz Sl. 4.3, ADC1–splajnovi su bolji i od klasičnih TC1–splajnova i EMW metode u slučaju konstantne advekcije. Sl. 4.3 također prikazuje tipično oscilatorno ponašanje apsolutnih pogrešaka splajn interpolanta između čvorova (za prikaz globalne apsolutne pogreške uzeto je $n_{sub} = 10$ točaka po podintervalu $[x_j, x_{j+1}) \subset [0, 1]$). Kada $a(x)$ varira, EMW daje bolje rezultate (Sl. 4.4), naročito za manje ε i n. Ovdje se ipak mora ponoviti da su ADC1–splajnovi još uvijek u razvoju s obzirom na optimalan izbor parametra napetosti p. Pogreške za TC2–splajnove su veće nego za TC1–splajnove; a

RAM metoda se ovdje, kao što je objašnjeno u potpoglavlju 4.1., ne može primijeniti.

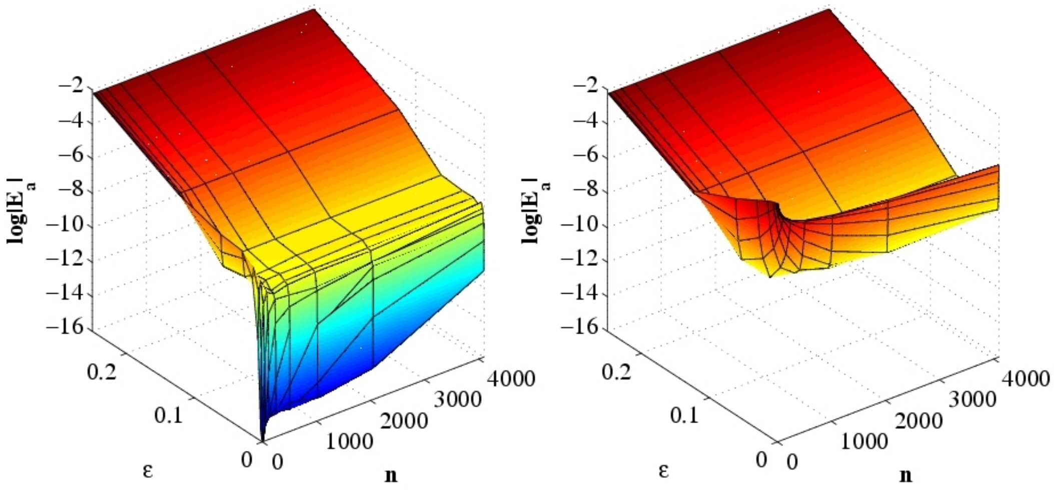


Slika 4.2: $\log|E_a|$ za EMW metodu (lijevo) i ADC1–splajnove (pogreške u čvorovima, desno), AD primjer 1; ε i n su iz (4.1), E_a iz (4.3).

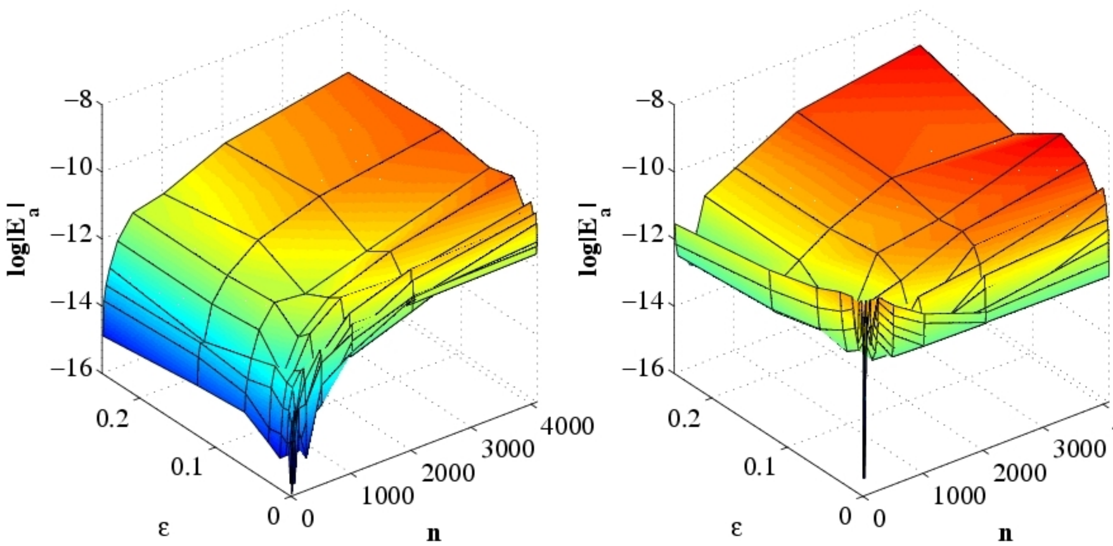


Slika 4.3: E_a za ADC1 i TC1–splajnove te EMW metodu, AD primjer 1. Ovdje su $\varepsilon = 2^{-13}$, $n = 64$; za prikaz globalne apsolutne pogreške ADC1–splajnova uzeto je $n_{sub} = 10$ točaka po podintervalu (puna crna linija). Pogreške u čvorovima za TC1–splajnove i EMW metodu skalirane su množenjem s $\cdot 10^{-3}$. Ostalo je kao na Sl. 4.2.

Kod RD problema, primjeri 2 i 5, ADC1–splajnovi ne reproduciraju dobro lijevi rubni uvjet, što se može i očekivati s obzirom na asimetriju u funkcijama baze ($\{1, x, x^2, \exp(px)\}$, potpoglavlje 3.2.). RAM i TC1–splajnovi su ovdje mnogo bolji (Sl. 4.5 i 4.6). Slično kao i za ADC1–splajnove kod AD problema, RAM metoda je bolja od TC1–splajnova za konstantan $b(x)$ (naročito kada su i ε i n mali, Sl. 4.5), ali lošija za varijabilni reakcijski član (Sl. 4.6). TC2–splajnovi pokazuju malo lošije ponašanje nego



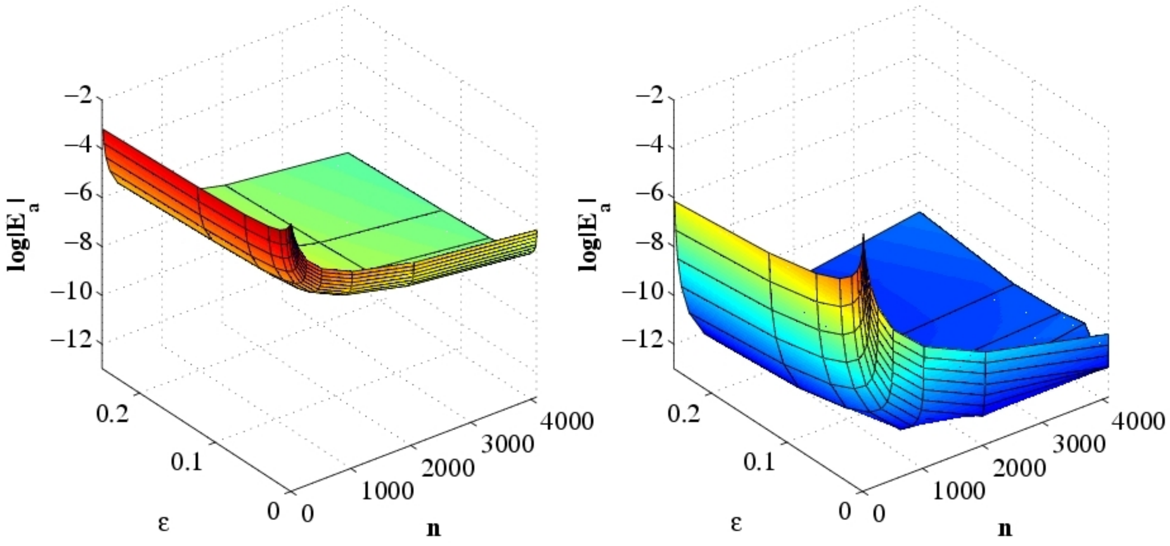
Slika 4.4: $\log |E_a|$ za EMW metodu (lijevo) i ADC1–splajnove (pogreške u čvorovima, desno), AD primjer 4. Ostalo je kao na Sl. 4.2.



Slika 4.5: $\log |E_a|$ za RAM metodu (lijevo) i TC1–splajnove (pogreške u čvorovima, desno), RD primjer 2. Ostalo je kao na Sl. 4.2.

TC1–splajnovi. EMW metoda, razvijena za advekcijsko–reakcijske probleme, također ne uspijeva reproducirati oba rubna uvjeta.

Rezultati za ADR primjere 3 i 6 su prikazani u Tablici 4.1 (konstantni koeficijenti) i Tablici 4.2 (varijabilni koeficijenti). Sve navedene metode su općenito bolje za konstantne koeficijente u (2.29), kao što se može vidjeti usporedbom vrijednosti pogrešaka u Tablicama 4.1 i 4.2. Također, kod svih metoda vrijednosti pogrešaka opadaju kako n raste. Kod primjera 3 odskače RAM metoda. I ovdje se može uočiti prethodno diskutirana osobina RAM metode: male pogreške (gotovo strojna preciznost, ovdje $\epsilon \sim 10^{-15}$



Slika 4.6: $\log|E_a|$ za RAM metodu (lijevo) i TC1–splajnove (globalna pogreška s $n_{sub} = 10$ točaka po podintervalu, desno), RD primjer 5. Ostalo je kao na Sl. 4.2.

za dvostruku preciznost kod prikaza realnih brojeva) za primjer 3 s konstantnim koeficijentima (Tablica 4.1), te značajno pogoršanje točnosti metode za primjer 6 (Tablica 4.2). TC2 i ADC2–splajnovi su najbolji za primjer 6, s pogreškama gotovo reda strojne preciznosti za male ε. No, mora se napomenuti da je definicija p (3.22) za AD–splajnove kada je reakcijski član prisutan dobivena prvenstveno po analogiji za TC–splajnove (3.19 i 3.20) i nije izvedena iz svojstava diferencijalnog operatora. Kada se uzmu u obzir magnitude pogrešaka u Tablicama 4.1 i 4.2, čini se da su AD i TC–splajnovi najprimjenjiviji za ovaj općeniti tip problema.

Naposljetku su prikazani rezultati za AD primjer 7 u kojem koeficijent advekcije mijenja predznak u $x = 1/2$ i AD primjer 8 s negativnim advekcijskim članom. Kao što je rečeno u potpoglavlju 4.1., AD primjer 7 ima unutarnji granični sloj oko $x = 1/2$. Ovaj tip graničnog sloja je posebno teško modelirati, kao što se vidi usporedbom vrijednosti pogrešaka u Tablici 4.3 s onima u Tablicama 4.1 i 4.2. Za vrijednosti ε iz (4.1) u Tablici 4.3 EMW metoda i ADC1–splajnovi daju bolje rezultate od ostalih (definicija p iz izraza 3.21).

No, slika se mijenja za mali broj čvorova i vrlo male vrijednosti ε definirane u (4.4), za koje TC2 i ADC2–splajnovi dolaze do izražaja. Slike 4.7 i 4.8 prikazuju apsolutne pogreške na logaritamskoj skali, i na njima se može vidjeti naglo smanjivanje pogrešaka ADC2 (Sl. 4.7, lijevo) i TC2–splajnova (Sl. 4.8, lijevo) za kombinaciju malih ε i n. C^2 splajnovi su ovdje superiorni analognom C^1 slučaju (ADC1–splajnovi, Sl. 4.7, desno; i TC1–splajnovi, Sl. 4.8, desno) te uvjerljivo bolji od ostalih metoda.

Kod AD primjera 8 s negativnim advekcijskim članom primjetna je superiornost AD–splajnova (Sl. 4.9) u odnosu na TC–splajnove (Sl. 4.10), naročito za male vrijednosti

Tablica 4.1: Maksimalne apsolutne pogreške E_a (4.3) za svaku metodu i odabrane parametre n i ε, ADR primjer 3. Za splajnove su prikazane pogreške u čvorovima.

	$n \backslash \varepsilon$	6.25E-02	1.56E-02	3.91E-03	9.77E-04	2.44E-04	6.10E-05
FDM	32	7.52E-02	1.96E-01	1.12E-01	3.49E-02	1.31E-02	7.54E-03
	256	1.10E-02	4.15E-02	1.32E-01	1.82E-01	5.93E-02	1.60E-02
EMW	32	-1.01E-03	-3.47E-03	-1.96E-03	-5.16E-04	-1.52E-04	-6.03E-05
	256	-1.56E-05	-6.07E-05	-2.53E-04	-4.17E-04	-1.22E-04	-3.10E-05
RAM	32	4.22E-15	1.67E-15	2.22E-15	-7.77E-16	-1.44E-15	9.99E-16
	256	-1.84E-13	-1.00E-13	4.87E-14	4.19E-14	-9.27E-15	1.77E-14
TC1	32	7.62E-08	1.28E-06	1.43E-05	3.88E-05	5.15E-05	5.62E-05
	256	1.84E-11	3.15E-10	5.15E-09	7.53E-08	4.40E-07	7.42E-07
TC2	32	4.52E-04	1.78E-03	4.26E-03	5.32E-03	5.58E-03	5.65E-03
	256	7.10E-06	2.97E-05	1.18E-04	3.86E-04	6.28E-04	6.95E-04
ADC1	32	-7.38E-09	-3.01E-08	-9.01E-08	-1.36E-07	-1.50E-07	1.53E-07
	256	-1.84E-12	-7.40E-12	-3.02E-11	-1.10E-10	-2.34E-10	-2.86E-10
ADC2	32	-2.84E-05	-2.97E-05	-2.99E-05	-2.99E-05	-2.99E-05	-2.99E-05
	256	-4.44E-07	-4.65E-07	-4.67E-07	-4.67E-07	-4.67E-07	-4.67E-07

Tablica 4.2: Maksimalne apsolutne pogreške E_a (4.3) za svaku metodu i odabrane parametre n i ε, ADR primjer 6. Ostalo kao u Tablici 4.1.

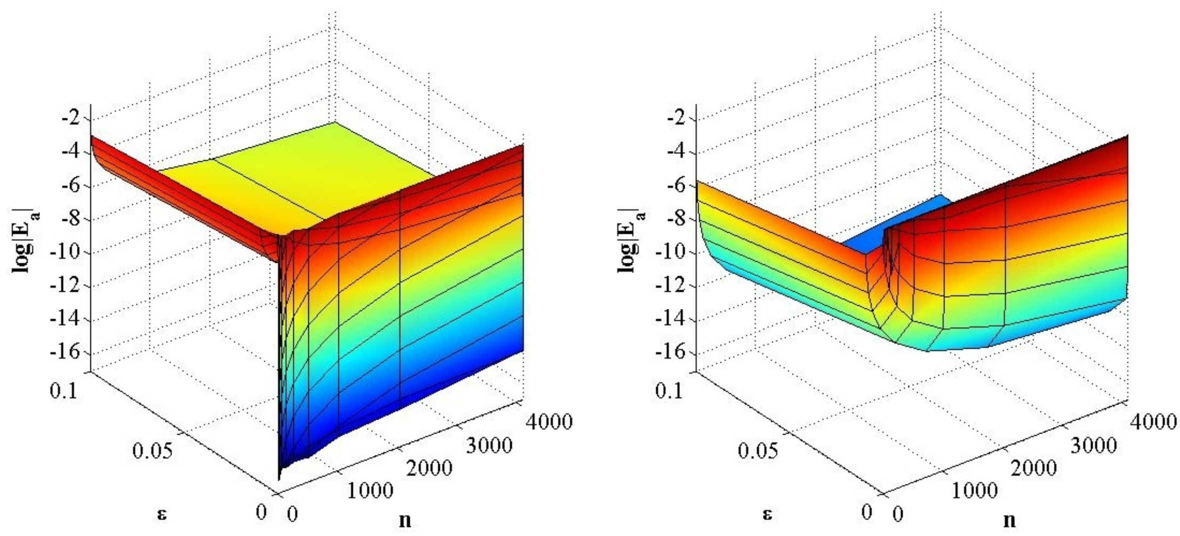
	$n \backslash \varepsilon$	6.25E-02	1.56E-02	3.91E-03	9.77E-04	2.44E-04	6.10E-05
FDM	32	2.54E-01	3.57E-01	1.16E-01	3.03E-02	7.67E-03	1.92E-03
	256	4.20E-02	1.52E-01	3.95E-01	2.21E-01	6.04E-02	1.55E-02
EMW	32	-3.99E-03	-6.72E-03	-1.98E-03	-4.96E-04	-1.24E-04	-3.10E-05
	256	-5.90E-05	-2.42E-04	-8.60E-04	-4.86E-04	-1.22E-04	-3.06E-05
RAM	32	2.86E-06	3.61E-05	1.19E-04	1.52E-04	1.60E-04	1.62E-04
	256	5.67E-10	1.22E-08	1.81E-07	1.27E-06	2.21E-06	2.46E-06
TC1	32	1.65E-05	-3.90E-04	-1.50E-03	-7.77E-04	-2.85E-04	-9.26E-05
	256	6.86E-09	3.77E-07	2.98E-06	-1.68E-04	-1.48E-04	-6.13E-05
TC2	32	-2.07E-03	-8.64E-04	-2.77E-08	1.11E-15	-6.66E-16	2.18E-15
	256	-4.20E-05	-1.52E-04	-3.00E-04	-4.60E-06	3.33E-15	9.23E-15
ADC1	32	1.75E-05	-2.66E-05	-2.80E-04	-8.53E-05	-2.22E-05	-5.60E-06
	256	5.81E-09	3.44E-07	8.57E-06	-4.11E-05	-2.02E-05	-5.48E-06
ADC2	32	-1.47E-03	-7.12E-04	-2.62E-08	1.26E-15	4.44E-16	1.60E-15
	256	-2.81E-05	-1.05E-04	-2.28E-04	-4.10E-06	-5.77E-15	7.15E-15

Tablica 4.3: Maksimalne apsolutne pogreške E_a (4.3) za svaku metodu i odabrane parametre n i ε, ADR primjer 7. Ostalo kao u Tablici 4.1.

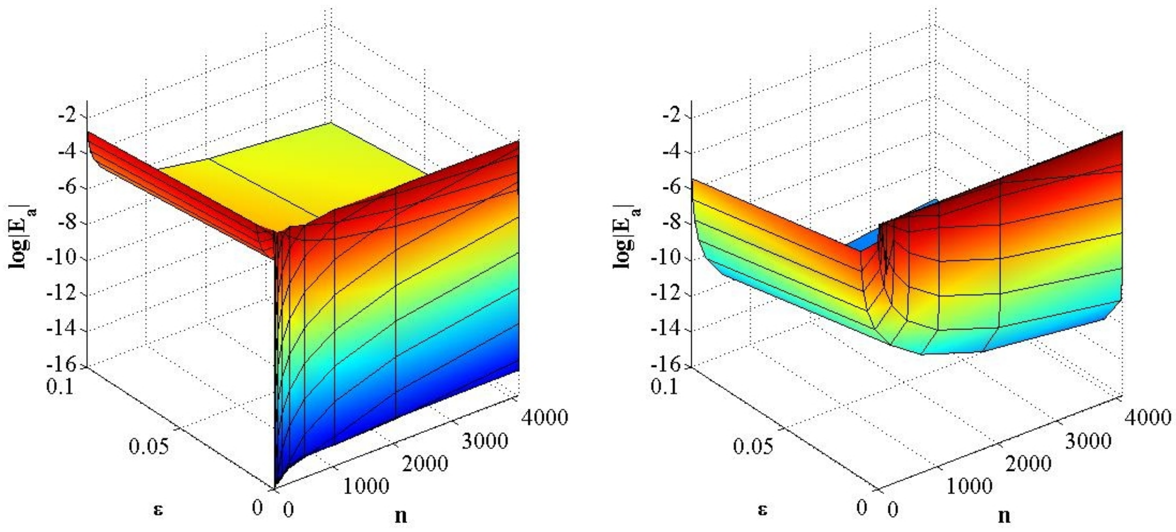
	$n \backslash \varepsilon$	6.25E-02	1.56E-02	3.91E-03	9.77E-04	2.44E-04	6.10E-05
FDM	32	1.14E-02	-2.39E-02	4.16E-02	-6.69E-02	-5.04E-02	-1.49E-02
	256	1.58E-03	-3.49E-03	-6.83E-03	-1.31E-02	-2.39E-02	-4.16E-02
EMW	32	-3.09E-07	5.27E-06	-7.91E-05	-1.22E-03	-7.51E-04	-1.10E-08
	256	-7.58E-11	1.28E-09	-2.05E-08	-3.28E-07	-5.27E-06	7.91E-05
TC1	32	-8.63E-07	-1.73E-05	-3.09E-04	-5.17E-03	-5.91E-02	-1.90E-01
	256	-2.04E-10	-3.84E-09	-6.23E-08	-1.03E-06	-1.73E-05	-3.09E-04
TC2	32	9.88E-04	4.64E-03	2.05E-02	9.12E-02	1.52E-01	1.52E-01
	256	1.42E-05	6.08E-05	2.50E-04	1.05E-03	4.64E-03	2.17E-02
ADC1	32	-5.43E-07	-9.85E-06	1.50E-04	2.23E-03	6.06E-03	-2.63E-02
	256	-1.31E-10	2.50E-09	-3.99E-08	6.36E-07	9.85E-06	1.50E-04
ADC2	32	5.82E-04	-2.39-03	8.30E-03	-2.48E-02	-1.41E-02	-1.33E-03
	256	9.30E-06	3.92E-05	1.56E-04	-6.14E-04	2.39E-03	-8.30E-03

ε i n. TC2–splajnovi su ovdje najlošiji (Sl. 4.10, lijevo) i mnogo lošiji od ADC2–splajnova (Sl. 4.9, lijevo).
Ovakvo ponašanje TC2–splajnova je ovdje očekivano (za dokaz konvergencije TC–splajnova potreban je reakcijski član, vidi Marušić (2001)), no ostaje pitanje zašto se u primjeru 7 ponašaju tako dobro. Moguće je da kombinacija $\exp(\pm px)$ u funkcijama baze TC–splajnova favorizira određenu simetriju u primjeru 7 (unutarnji granični sloj kao kombinacija dva granična sloja oko $x = 1/2$), u odnosu na nesimetričan primjer 8 (jedan granični sloj u $x = 0$).

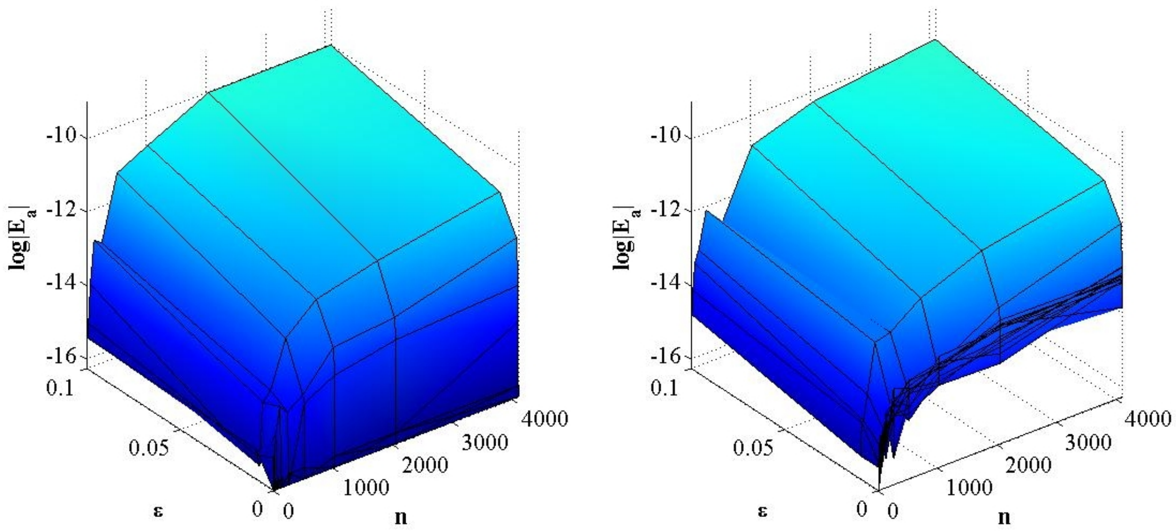
Ovisno o prisutnosti advekcijskog i/ili reakcijskog člana, čini se da se nema jednoznačnog odgovora na pitanje koja je metoda najbolja. Napeti splajnovi, ovisno o izboru funkcija baze i parametra p, se ipak pokazuju kao najprimjenjiviji u većini slučajeva. Kolokacija klasičnim Čebiševljevim splajnovima (posebice TC–splajnovima) se može preporučiti kao najopćenitija od svih navedenih metoda. AD–splajnovi su vrlo pogodni za advekcijsko–difuzijske probleme, posebice one gdje advekcijski član mijenja predznak.



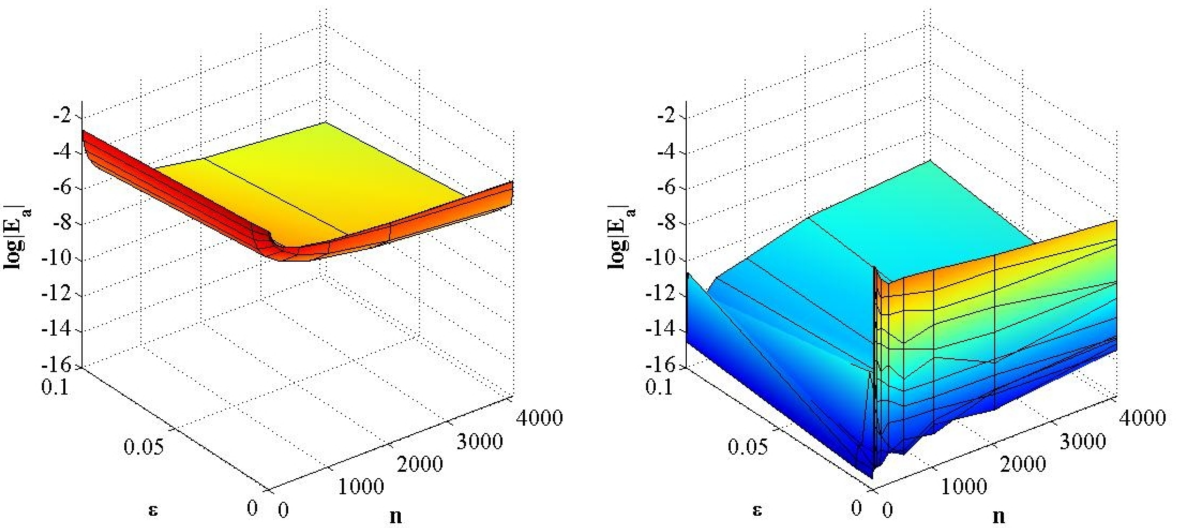
Slika 4.7: $\log |E_a|$ za ADC2 (lijevo) i ADC1–splajnove (pogreške u čvorovima, desno), AD primjer 7. Ostalo je kao na Sl. 4.2.



Slika 4.8: $\log|E_a|$ za TC2 (lijevo) i TC1–splajnove (pogreške u čvorovima, desno), AD primjer 7. Ostalo je kao na Sl. 4.2.



Slika 4.9: $\log|E_a|$ za ADC2 (lijevo) i ADC1–splajnove (pogreške u čvorovima, desno), AD primjer 8. Ostalo je kao na Sl. 4.2.



Slika 4.10: $\log|E_a|$ za TC2 (lijevo) i TC1–splajnove (pogreške u čvorovima, desno), AD primjer 8. Ostalo je kao na Sl. 4.2.

5. Modeliranje katabatičkog strujanja

Ovo poglavlje prikazuje glavne rezultate analitičkog i numeričkog modeliranja jednodimenzionalnog katabatičkog strujanja za konstantan K (Stiperski i sur., 2007) i varijabilan $K(z)$ (Kavčič i Grisogono, 2007). Na sustavu jednadžbi (2.17–2.19) za konstantan K provedena je i matrična analiza sustava opisana u potp. 3.1.2., koja daje potpuniji uvid u samu strukturu linearnog operatora sustava, kao i mogućnost zadovoljavanja rubnih uvjeta iz potp. 3.1.2. Provedena matrična analiza, zajedno s rezultatima iz Stiperski i sur. (2007), opravdava aproksimacije uvedene u početan sustav.

Analitička rješenja su potom uspoređena s rješenjima jednostavnog, vremenski ovisnog numeričkog modela opisanog u potp. 3.2.4. Također, za varijabilan $K(z)$ prikazana je i usporedba s mezoskalnim MIUU modelom te mjerenjima s postaje Coats Land na Antarktici.

5.1. Rotirajući Prandtlov model za konstantan K

Po uzoru na klasičan Prandtlov model ($f = 0$), u ovom se potpoglavlju diskutiraju stacionarna rješenja sustava (2.17–2.19) iz Stiperski i sur. (2007), izvedenog u potp. 2.2. Stacionaran sustav je analiziran i matričnom analizom opisanom u potp. 3.1.2., a analitička rješenja uspoređena su s rješenjima jednostavnog numeričkog modela opisanog u potp. 3.2.4.

5.1.1. Analitička rješenja stacionarnog sustava

Razmatraju se stacionarna rješenja sustava (2.17–2.19), koji sada glasi

$$K_c \frac{d^2\theta}{dz^2} - \gamma \sin(\alpha) U = 0, \tag{5.1}$$

$$K_c Pr \frac{d^2U}{dz^2} + f \cos(\alpha) V + \frac{g \sin(\alpha)}{\theta_0} \theta = 0, \tag{5.2}$$

$$K_c Pr \frac{d^2V}{dz^2} - f \cos(\alpha) U = 0. \tag{5.3}$$

s rubnim uvjetima (2.24–2.25)

$$\theta(z = 0) = C, \quad U(z = 0) = 0, \quad V(z = 0) = 0. \tag{5.4}$$

$$\theta(z \to \infty) \to \theta_\infty < \infty, \quad U(z \to \infty) \to U_\infty < \infty, \quad V(z \to \infty) \to V_\infty < \infty. \tag{5.5}$$

Međusobnom zamjenom varijabli u (5.1–5.3) dobiva se jednadžba šestog reda po $F = (\theta, U, V)$ s konstantnim koeficijentima

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{d^4F}{dz^4} + \sigma^4 F\right) = 0, \tag{5.6}$$

$$\sigma^4 = \frac{N^2 \sin^2(\alpha)}{K_c^2 Pr^2}(1+\Delta), \ \Delta = \frac{f^2 \mathrm{ctg}^2(\alpha)}{N^2 Pr}, \ N^2 = \frac{g\gamma}{\theta_0}, \tag{5.7}$$

gdje je N uzgonska (Brunt–Väisälä) frekvencija (npr. Pedlosky (1987), Stull (1988)). Rubne uvjete za više derivacije od F dobiva se iz sustava (5.1–5.3). Npr. za $F = \theta$ iz (5.1) i (5.4) proizlazi $d^2\theta\,(z=0)\,/dz^2 = \gamma \sin(\alpha)\,/K_c U\,(z=0) = 0$, a iz (5.1–5.3) i (5.4) može se dobiti $d^4\theta\,(z=0)\,/dz^4 \propto d^2\theta\,(z=0)\,/dz^2 = 0$. Isti postupak provodi se i za gornje rubne uvjete kada $z \to \infty$. Dvostrukom integracijom (5.6) po z dobiva se

$$\frac{d^4F}{dz^4} + \sigma^4 F = Az + B, \tag{5.8}$$

Rješenje mora ostati konačno kada $z \to \infty$ pa je $A = 0$. Ukoliko se zahtijeva i da je $B = 0$ (po uzoru na klasičan Prandtlov model, npr. Grisogono, 1995) karakteristična jednadžba i opće rješenje su

$$k^4 + \sigma^4 = 0, \quad F = \sum_{j=1}^{4} D_j \exp k_j z,$$

gdje su (uz definiciju Prandtlove visine $h_p = \sqrt{2}/\sigma$)

$$k_1 = \frac{1+i}{h_p}, \quad k_2 = -\frac{1-i}{h_p}, \quad k_3 = \frac{1-i}{h_p}, \quad k_4 = -\frac{1+i}{h_p}. \tag{5.9}$$

Za razliku od klasičnog nerotirajućeg Prandtlovog modela, kao što će biti prikazano u potpoglavljima 5.1.2. i 5.1.3., ovdje nije moguće dobiti rješenje za (5.6) koje zadovoljava gornje rubne uvjete (2.26). Uz $B \neq 0$ i $\tilde{C} = C/(1+\Delta)$ rješenje (5.6) koje zadovoljava donje rubne uvjete (5.4) i ostaje ograničeno kako $z \to \infty$ je

$$\theta_{fs} = \tilde{C}\left[e^{-z/h_p}\cos\left(\frac{z}{h_p}\right) + \Delta\right], \tag{5.10}$$

$$U_{fs} = \frac{\tilde{C}K\sigma^2}{\gamma \sin(\alpha)} e^{-z/h_p} \sin\left(\frac{z}{h_p}\right), \tag{5.11}$$

$$V_{fs} = \frac{\tilde{C} f \mathrm{ctg}(\alpha)}{Pr\gamma}\left[e^{-z/h_p}\cos\left(\frac{z}{h_p}\right) - 1\right]. \tag{5.12}$$

Rješenja (5.10–5.12) imaju naizgled paradoksalno svojstvo da niti θ_{fs} niti V_{fs} ne idu u nulu kako $z \to \infty$, no u Stiperski i sur. (2005) pokazano je da su za bilo koji konačan z izrazi (5.10–5.12) rješenja rubnog problema (5.1–5.3), tj. asimptotski idu u nulu za $\Delta \to 0$ (analiza skala za Δ prikazana je u potp. 5.1.4.).

5.1.2. Matrična analiza klasičnog Prandtlovog modela

Ukoliko je u jednadžbama (2.17–2.19) Coriolisov parametar $f = 0$ dobiva se vremenski ovisan sustav

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K_c \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \gamma \sin(\alpha) U, \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K_c Pr \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{g \sin(\alpha)}{\theta_0} \theta. \tag{5.14}$$

I ovdje se razmatraju stacionarna rješenja sustava (5.13–5.14), koji se sada svodi na klasičan Prantdlov sustav (npr. u Mahrt (1981))

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{\gamma \sin(\alpha)}{K_c} U = 0, \tag{5.15}$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{g \sin(\alpha)}{K_c Pr \theta_0} \theta = 0, \tag{5.16}$$

s rubnim uvjetima (2.24) i (2.26)

$$\theta(z = 0) = C, \quad U(z = 0) = 0, \tag{5.17}$$

$$\theta(z \to \infty) \to 0, \quad U(z \to \infty) \to 0. \tag{5.18}$$

Međusobnom zamjenom varijabli u (5.15–5.16) dobiva se jednadžba četvrtog reda po $F = (\theta, U)$ s konstantnim koeficijentima

$$\frac{d^4 F}{dz^4} + \sigma^4 F = 0, \tag{5.19}$$

$$\sigma^4 = \frac{N^2 \sin^2(\alpha)}{K^2 Pr}, \quad N^2 = \frac{g\gamma}{\theta_0}. \tag{5.20}$$

Karakteristična jednadžba i opće rješenje za (5.19) su

$$k^4 + \sigma^4 = 0, \quad F = \sum_{j=1}^{4} D_j \exp k_j z,$$

gdje su za Prandtlovu visinu $h_p = \sqrt{2}/\sigma$ (bez doprinosa Coriolisovog parametra, f)

$$k_1 = \frac{1+i}{h_p}, \quad k_2 = -\frac{1-i}{h_p}, \quad k_3 = \frac{1-i}{h_p}, \quad k_4 = -\frac{1+i}{h_p}. \tag{5.21}$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta (5.17–5.18) dobivaju se analitička rješenja (npr. Egger (1990) ili Grisogono i Oerlemans (2001a))

$$\theta_s = Ce^{-\frac{z}{h_p}} \cos\left(\frac{z}{h_p}\right), \tag{5.22}$$

$$U_s = \frac{CK_c\sigma^2}{\gamma \sin(\alpha)} e^{-\frac{z}{h_p}} \sin\left(\frac{z}{h_p}\right), \tag{5.23}$$

što su upravo rješenja (5.6) za $\Delta = 0$ (Stiperski i sur., 2007).

Da bi se otkrila fundamentalna svojstva klasičnog Prandtlovog sustava jednadžbe (5.15–5.16) su rješavane postupkom opisanim u potp. 3.1.2., tj. računanjem matričnog eksponenta sustava i uvrštavanjem donjeg rubnog uvjeta (5.17). Kako za matričnu analizu moraju biti iste jedinice u (5.15–5.16), varijable θ, U, K i z se bezdimenzionaliziraju njihovim karakterističnim skalama kao

$$z = \tilde{z}H, \quad K_c = \tilde{K}K_0, \quad \theta = \tilde{\theta}\theta_0, \quad U = \tilde{U}U_0, \tag{5.24}$$

pa sustav (5.15–5.16) sada izgleda

$$\tilde{K}\frac{d^2\tilde{\theta}}{d\tilde{z}^2} - \frac{\gamma \sin(\alpha) U_0 H^2}{K_0\theta_0}\tilde{U} = 0, \tag{5.25}$$

$$\tilde{K}\frac{d^2\tilde{U}}{dz^2} + \frac{g \sin(\alpha) H^2}{K_0 Pr U_0}\tilde{\theta} = 0. \tag{5.26}$$

Pretpostavimo da je $\tilde{K} = 1$ (inače se sustav može reskalirati pomoću $\tilde{z}' = \sqrt{\tilde{K}}\tilde{z}$). Također, uvode se oznake

$$a = \frac{g \sin(\alpha) H^2}{K_0 Pr U_0},$$
$$c = \frac{\gamma \sin(\alpha) U_0 H^2}{K_0\theta_0},$$
$$\tilde{\sigma}^4 = ca = \frac{N^2 \sin^2(\alpha)}{K_0^2 Pr} H^4 = \sigma^4 H^4,$$

pa sustav (5.25–5.26) postaje

$$\frac{d^2\tilde{\theta}}{d\tilde{z}^2} - c\tilde{U} = 0, \tag{5.27}$$

$$\frac{d^2\tilde{U}}{d\tilde{z}^2} + a\tilde{\theta} = 0. \tag{5.28}$$

Bezdimenzionaliziranje pomoću (5.24) analogno je postupku primjenjenom u Shapiro i Fedorovich (2008), samo s malo drukčijim koeficijentima (u njihovom radu koristi se uzgon, b, umjesto potencijalne temperature, θ). Npr. karakteristična skala visine H je analogna

l_s iz Shapiro i Fedorovich (2008) i može se prikazati kao

$$H = \left[\frac{K_c}{N \sin(\alpha)}\right]^{1/2}.$$

U_0 je analogno $u_s = b_s/N$ ($b_s = b_0 = b\,(z = 0)$) itd., pa se koeficijente a i c može izraziti pomoću skaliranja u Shapiro i Fedorovich (2008).

Stacionaran sustav (5.27–5.28) može se analizirati svođenjem na sustav jednadžbi prvog reda

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{z}} = \tilde{\theta}_1, \tag{5.29}$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_1}{d\tilde{z}} = c\tilde{U}, \tag{5.30}$$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{z}} = \tilde{U}_1, \tag{5.31}$$

$$\frac{d\tilde{U}_1}{d\tilde{z}} = -a\tilde{\theta}, \tag{5.32}$$

te zapisivanjem u matričnom obliku

$$\frac{d\mathbf{u}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{u},$$

gdje su

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{U} \\ \tilde{U}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.33}$$

Opće rješenje sustava se tada može dobiti pomoću matričnog eksponenta (potp. 3.1.2.) kao

$$\mathbf{u} = \exp(\mathbf{A}z)\mathbf{u_0}, \quad \mathbf{u_0} = \mathbf{u}\,(z = 0)\,,$$

tj. ovdje

$$\mathbf{u_0} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}\,(\tilde{z} = 0) \\ \tilde{\theta}_1\,(\tilde{z} = 0) \\ \tilde{U}\,(\tilde{z} = 0) \\ \tilde{U}_1\,(\tilde{z} = 0) \end{bmatrix}.$$

Također, uvodi se bezdimenzijska Prandtlova visina $\tilde{h}_p = \sqrt{2}/\tilde{\sigma}$. Radi lakšeg praćenja u daljnjem tekstu bezdimenzijske varijable $\widetilde{()}$ označavaju se kao $()$.

Matrica sustava (5.29–5.32), $\mathbf{A}$, je regularna, a njezina determinanta te karakteristični i minimalni polinomi su

$$\det \mathbf{A} = \sigma^4,$$
$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^4 + \sigma^4,$$
$$m_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{A}}(\lambda).$$

Vlastite vrijednosti i vektori od $\mathbf{A}$ su

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\frac{(1+i)ch_p^3}{4} & \frac{(1-i)ch_p^3}{4} & -\frac{(1-i)ch_p^3}{4} & \frac{(1+i)ch_p^3}{4} \\ -\frac{ich_p^2}{2} & \frac{ich_p^2}{2} & \frac{ich_p^2}{2} & -\frac{ich_p^2}{2} \\ \frac{(1-i)h_p}{2} & -\frac{(1+i)h_p}{2} & \frac{(1+i)h_p}{2} & -\frac{(1-i)h_p}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje su $k_1, \ldots, k_4$ bezdimenzijski analogoni vrijednosti iz (5.21). Determinanta i inverz matrice $\mathbf{E}$ su

$$\det \mathbf{E} = 16\,\frac{c^2}{\sigma^6} = 2c^2h_p^6, \quad \mathbf{E^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{1-i}{2ch_p^3} & \frac{ia}{2h_p^2} & \frac{1+i}{4h_p} & \frac{1}{4} \\ \frac{1+i}{2ch_p^3} & -\frac{ia}{2h_p^2} & -\frac{1-i}{4h_p} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1+i}{2ch_p^3} & -\frac{ia}{2h_p^2} & \frac{1-i}{4h_p} & \frac{1}{4} \\ \frac{1-i}{2ch_p^3} & \frac{ia}{2h_p^2} & -\frac{1+i}{4h_p} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Matrični eksponent matrice $\boldsymbol{\Lambda}$, po (3.9) je

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\Lambda}} = \exp(\boldsymbol{\Lambda} z) = \begin{bmatrix} e^{k_1 z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{k_2 z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{k_3 z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{k_4 z} \end{bmatrix}, \tag{5.34}$$

i iz njega se vidi da se rješenje originalnog sustava (5.15–5.16) sastoji od funkcija trigonometrijsko–eksponencijalnog oblika, kao što je prije dobiveno međusobnim uvrštavanjem i rješavanjem (5.19).

Postupkom opisanim u potp. 3.1.2. se sada pomoću bezdimenzionaliziranih (5.22) i (5.23) provjerava zadovoljavanje rubnih uvjeta (5.17–5.18) i računa rješenje sustava. Vektor početnih uvjeta za $K = 1$ je

$$\mathbf{u_0} = \begin{bmatrix} C \\ \theta_{z0} \\ 0 \\ U_{z0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ -\frac{\theta_0 \sigma}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{C\sigma^2}{\gamma \sin(\alpha)} \end{bmatrix},$$

te se postupkom

$$\mathbf{y_0} = \mathbf{E^{-1}u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1+i}{4} Cah_p \\ 0 \\ \frac{1-i}{4} Cah_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{E_\Lambda y_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1+i}{4} Cah_p e^{-\frac{(1-i)z}{h_p}} \\ 0 \\ \frac{1-i}{4} Cah_p e^{-\frac{(1+i)z}{h_p}} \end{bmatrix},$$

nalaze rješenja

$$\mathbf{u} = \mathbf{Ey} = \begin{bmatrix} \theta_0 e^{-z/h_p} \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \\ -\frac{\theta_0}{h_p} e^{-z/h_p} \left[\sin\left(\frac{z}{h_p}\right) + \cos\left(\frac{z}{h_p}\right)\right] \\ U_0 e^{-z/h_p} \sin\left(\frac{\sigma z}{\sqrt{2}}\right) \\ -\frac{U_0}{h_p} e^{-z/h_p} \left(\sin\left(\frac{z}{h_p}\right) - \cos\left(\frac{z}{h_p}\right)\right) \end{bmatrix}.$$

Nakon vraćanja dimenzija vidi se da su ovo upravo rješenja originalnog sustava dobivena tehnikom međusobnog uvrštavanja i očito je da zadovoljavaju i gornje rubne uvjete (5.18).

5.1.3. Matrična analiza rotirajućeg Prandtlovog modela

Ovdje se provodi matrična analiza rotirajućeg Prandtlovog modela (5.1–5.3), analogno potp. 5.1.2. i diskutira se zadovoljavanje rubnih uvjeta sustava.

Bezdimenzionaliziranjem θ, U, K i z pomoću (5.24), pretpostavkom $\tilde{K} = 1$ i uvođenjem oznaka

$$a = \frac{g \sin(\alpha) H^2}{K_0 Pr U_0},$$
$$b = \frac{f \cos(\alpha) H^2}{K_0 Pr},$$
$$c = \frac{\gamma \sin(\alpha) U_0 H^2}{K_0 \theta_0},$$
$$\tilde{\sigma}^4 = ca + b^2 = \sigma^4 H^4,$$

gdje je sada σ^4 iz (5.7), sustav (5.1–5.3) postaje

$$\frac{d^2\tilde{\theta}}{d\tilde{z}^2} - c\tilde{U} = 0, \tag{5.35}$$

$$\frac{d^2\tilde{U}}{d\tilde{z}^2} + b\tilde{V} + a\tilde{\theta} = 0, \tag{5.36}$$

$$\frac{d^2\tilde{V}}{d\tilde{z}^2} - b\tilde{U} = 0. \tag{5.37}$$

Stacionaran sustav (5.35–5.37) se analizira svođenjem na sustav jednadžbi prvog reda

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{z}} = \tilde{\theta}_1, \tag{5.38}$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_1}{d\tilde{z}} = c\tilde{U}, \tag{5.39}$$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{z}} = \tilde{U}_1, \tag{5.40}$$

$$\frac{d\tilde{U}_1}{d\tilde{z}} = -b\tilde{V} - a\tilde{\theta}, \tag{5.41}$$

$$\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{z}} = \tilde{V}_1, \tag{5.42}$$

$$\frac{d\tilde{V}_1}{d\tilde{z}} = b\tilde{U}, \tag{5.43}$$

te zapisivanjem u matričnom obliku

$$\frac{d\mathbf{u}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{u},$$

gdje su

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{U} \\ \tilde{U}_1 \\ \tilde{V} \\ \tilde{V}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opće rješenje sustava se tada može dobiti pomoću matričnog eksponenta (potp. 3.1.2.) kao

$$\mathbf{u} = \exp\left(\mathbf{A}z\right)\mathbf{u_0}, \quad \mathbf{u_0} = \mathbf{u}\left(z = 0\right),$$

tj. ovdje

$$
\mathbf{u_0} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}\left(\tilde{z}=0\right) \\ \tilde{\theta}_1\left(\tilde{z}=0\right) \\ \tilde{U}\left(\tilde{z}=0\right) \\ \tilde{U}_1\left(\tilde{z}=0\right) \\ \tilde{V}\left(\tilde{z}=0\right) \\ \tilde{V}_1\left(\tilde{z}=0\right) \end{bmatrix}.
$$

Također, i ovdje se uvodi bezdimenzijska Prandtlova visina $\tilde{h}_p = \sqrt{2}/\tilde{\sigma}$ te se u daljnjem tekstu bezdimenzijske varijable $\widetilde{(\,)}$ označavaju kao $(\,)$.
Matrica sustava (5.38–5.43) $\mathbf{A}$ je singularna, a njezina determinanta te karakteristični i minimalni polinomi su

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= 0, \\
p_{\mathbf{A}}\left(\lambda\right) &= \lambda^2\left(\lambda^4 + \sigma^4\right), \\
m_{\mathbf{A}}\left(\lambda\right) &= p_{\mathbf{A}}\left(\lambda\right).
\end{aligned}
$$

Skup vlastitih vrijednosti od $\mathbf{A}$ je

$$
\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = k_1,\ \lambda_4 = k_2,\ \lambda_5 = k_3,\ \lambda_6 = k_4,
$$

gdje su $k_1, \ldots, k_4$ bezdimenzijska rješenja od (5.8) za $A = B = 0$, analogna (5.9). Dvostrukoj vlastitoj vrijednosti nula matrice $\mathbf{A}$ pripada samo jedan linearno nezavisan vlastiti vektor, što ih ukupno daje pet:

$$
\mathbf{E} = \begin{bmatrix}
-\frac{b}{a} & 0 & \frac{(1-i)}{2}\frac{ch_p}{b} & -\frac{(1+i)}{2}\frac{ch_p}{b} & \frac{(1+i)}{2}\frac{ch_p}{b} & -\frac{(1-i)}{2}\frac{ch_p}{b} \\
0 & 0 & \frac{c}{b} & \frac{c}{b} & \frac{c}{b} & \frac{c}{b} \\
0 & 0 & \frac{(1+i)}{2}\frac{h_p}{b} & -\frac{(1-i)}{2}\frac{h_p}{b} & \frac{(1-i)}{2}\frac{h_p}{b} & -\frac{(1+i)}{2}\frac{h_p}{b} \\
0 & 0 & \frac{2i}{bh_p^2} & -\frac{2i}{bh_p^2} & -\frac{2i}{bh_p^2} & \frac{2i}{bh_p^2} \\
1 & 0 & \frac{(1-i)h_p}{2} & -\frac{(1+i)h_p}{2} & \frac{(1+i)h_p}{2} & -\frac{(1-i)h_p}{2} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}.
$$

Rješenje sustava (5.38–5.43) se sada računa pomoću Jordanove forme, $\mathbf{J}$, i matrice prijelaza, $\mathbf{T}$ (potp. 3.1.2.). Matrica prijelaza konstruira se od linearno nezavisnih vlastitih vektora i tzv. glavnih vektora (Wilkinson, 1965). Glavni vektor mora rješavati jednadžbu

$$
\mathbf{A^2 x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = \left[x_1,\, \ldots,\, x_6\right]^T,
$$

iz čega se dobiva

$$\mathbf{A^2x} = \begin{bmatrix} cx_3 \\ cx_4 \\ -ax_1 - bx_5 \\ -ax_2 - bx_6 \\ bx_3 \\ bx_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Odabirom $x_5 = 0$ i $x_6 = 1$ (npr. $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ vodi na prvi vlastiti vektor) glavni vektor $\mathbf{x}$ postaje

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{b}{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Glavni vektor $\mathbf{x}$ vektor je nejedinstven zbog slobodnog odabira x_5 i x_6. Matrica prijelaza je

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} & 0 & \frac{(1-i)}{2}\frac{ch_p}{b} & -\frac{(1+i)}{2}\frac{ch_p}{b} & \frac{(1+i)}{2}\frac{ch_p}{b} & -\frac{(1-i)}{2}\frac{ch_p}{b} \\ 0 & -\frac{b}{a} & \frac{c}{b} & \frac{c}{b} & \frac{c}{b} & \frac{c}{b} \\ 0 & 0 & \frac{(1+i)}{2}\frac{h_p}{b} & -\frac{(1-i)}{2}\frac{h_p}{b} & \frac{(1-i)}{2}\frac{h_p}{b} & -\frac{(1+i)}{2}\frac{h_p}{b} \\ 0 & 0 & \frac{2i}{bh_p^2} & -\frac{2i}{bh_p^2} & -\frac{2i}{bh_p^2} & \frac{2i}{bh_p^2} \\ 1 & 0 & \frac{(1-i)h_p}{2} & -\frac{(1+i)h_p}{2} & \frac{(1+i)h_p}{2} & -\frac{(1-i)h_p}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a determinanta i inverz matrice prijelaza $\mathbf{T}$ su

$$\det \mathbf{T} = \frac{2^9}{h_p^{10}b^4a^2}, \quad \mathbf{T^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{abh_p^4}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{ach_p^4}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{abh_p^4}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{ach_p^4}{4} \\ \frac{(1+i)abh_p^3}{16} & \frac{abh_p^4}{16} & \frac{(1-i)bh_p}{8} & -\frac{ibh_p^2}{8} & \frac{(1+i)b^2h_p^3}{16} & \frac{b^2h_p^4}{16} \\ -\frac{(1-i)abh_p^3}{16} & \frac{abh_p^4}{16} & -\frac{(1+i)bh_p}{8} & \frac{ibh_p^2}{8} & -\frac{(1-i)b^2h_p^3}{16} & \frac{b^2h_p^4}{16} \\ \frac{(1+i)abh_p^3}{16} & \frac{abh_p^4}{16} & \frac{(1-i)bh_p}{8} & \frac{ibh_p^2}{8} & \frac{(1+i)b^2h_p^3}{16} & \frac{b^2h_p^4}{16} \\ -\frac{(1+i)abh_p^3}{16} & \frac{abh_p^4}{16} & -\frac{(1-i)bh_p}{8} & -\frac{ibh_p^2}{8} & -\frac{(1+i)b^2h_p^3}{16} & \frac{b^2h_p^4}{16} \end{bmatrix}$$

Jordanova forma matrice $\mathbf{A}$ ($\mathbf{J} = \mathbf{T^{-1}AT}$) je

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix},$$

i ima nilpotentan blok. Matrični eksponent matrice $\mathbf{J}$, po (3.11) je

$$\mathbf{E_J} = \exp\left(\mathbf{J}z\right) = \begin{bmatrix} 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{k_1 z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{k_2 z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{k_3 z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{k_4 z} \end{bmatrix}$$

i iz njega se vidi da rješenje originalnog sustava (5.1–5.3), osim funkcija trigonometrijsko–eksponencijalnog oblika kao u klasičnom Prandtlovom modelu, sadrži i linearnu funkciju po z, kao što je prije dobiveno međusobnim uvrštavanjem i rješavanjem (5.6). Ovim se postupkom, međutim, umjesto jednostavnog postavljanja $A = 0$ u (5.8) dobivaju precizni uvjeti koje rješenje mora zadovoljavati da u sebi ne sadrži linearan rast i time narušavanje rubnih uvjeta (5.5) u $z \to \infty$.
Transformirani vektor početnih uvjeta, $\mathbf{y_0}$, može se pisati kao

$$\mathbf{Y_0} = \mathbf{T^{-1}U_0} = \mathbf{T^{-1}} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}\left(z=0\right) \\ \tilde{\theta}_1\left(z=0\right) \\ \tilde{U}\left(z=0\right) \\ \tilde{U}_1\left(z=0\right) \\ \tilde{V}\left(z=0\right) \\ \tilde{V}_1\left(z=0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_y \\ \theta_{y1} \\ U_y \\ U_{y1} \\ V_y \\ V_{y1} \end{bmatrix},$$

te se iz njega računa transformirano rješenje sustava

$$\mathbf{y} = \mathbf{E_J}\mathbf{y_0} = \begin{bmatrix} \theta_y + z\theta_{y1} \\ \theta_{y1} \\ \mathrm{e}^{k_1 z} U_y \\ \mathrm{e}^{k_2 z} U_{y1} \\ \mathrm{e}^{k_3 z} V_y \\ \mathrm{e}^{k_4 z} V_{y1} \end{bmatrix}. \tag{5.44}$$

Budući da niti matrica prijelaza niti njen inverz nisu funkcije od z, uvjet da konačno rješenje $\mathbf{u}$ ne sadrži linearnu funkciju je

$$\theta_{y1} = a\tilde{z}\left(b\tilde{\theta}_1 - c\tilde{V}_1\right) = 0,$$

tj. kada se izračuna $\mathbf{y}$

$$a = 0 \quad \text{ili} \tag{5.45}$$

$$\left(\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{z}}\right)_{z=0} = \frac{b}{c}\left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{z}}\right)_{\tilde{z}=0}. \tag{5.46}$$

Vraćanjem dimenzija u izraze (5.45) i (5.46) dobivaju se uvjeti

$$\alpha = 0, \quad \text{ili} \tag{5.47}$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)_{z=0} = \frac{f\,\mathrm{ctg}\,(\alpha)}{Pr\gamma}\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=0}. \tag{5.48}$$

Uvjet (5.47) nije fizikalno opravdan (s obzirom na postavke modela), a uvjet (5.48) stacionarna rješenja θ_{fs} (5.10) i V_{fs} (5.12) zadovoljavaju. Međutim, ostaje konstanta u transformiranom članu θ_y koja onemogućava postizanje gornjeg rubnog uvjeta (2.26) analognog klasičnom Prandtlovom modelu

$$\theta\,(z \to \infty) \to 0, \quad U\,(z \to \infty) \to 0, \quad V\,(z \to \infty) \to 0, \tag{5.49}$$

Uvjet da u rješenju nema niti konstantnog člana je

$$\theta_y = a\left(b\tilde{\theta} - c\tilde{V}\right) = 0, \tag{5.50}$$

tj. kada se vrate dimenzije u (5.50) dobivaju se izrazi

$$\alpha = 0, \quad \text{ili} \tag{5.51}$$

$$V(z=0) = \frac{Cf\mathrm{ctg}(\alpha)}{Pr\gamma}\theta(z=0). \tag{5.52}$$

Uvjet (5.52) se kosi s donjim rubnim uvjetom $V(z=0) = 0$, a nije fizikalno zahtijevati $V(z=0) \neq 0$.

Diskusija linearnog sustava katabatičkog strujanja s konstantnim K

Shapiro i Fedorovich (2008) su u svom radu objedinili složenije numeričko i analitičko modeliranje katabatičkog strujanja. Svojstva općenitog, 3D, nelinearng sustava (njihove jednadžbe (1.1–1.5)) prikazana su pomoću LES (engl. *large eddy simulation*) modela za slučajeve laminarnog i turbulentnog strujanja. Analitički je rješavan pojednostavljeni, 2D lineran model (njihove jednadžbe (5.1–5.5)) pomoću Fourierove transformacije i prije prikazanog međusobnog uvrštavanja varijabli. Ovdje će se kratko prikazati njihov sustav, te pokazati sličnost struktura kompleksnijeg 2D sustava s 1D sustavom (5.1–5.3) s obzirom na rješenja po visini.

Linearizacijom sustava i bezdimenzionaliziranjem varijabli i koordinata Shapiro i Fedorovich (2008) dobili su 2D, stacionaran sustav

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} - W\mathrm{ctg}(\alpha) + \mathrm{U} = 0, \tag{5.53}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + \frac{1}{\sqrt{Bu}}V - B = 0, \tag{5.54}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} - \frac{1}{\sqrt{Bu}}U - \frac{\partial \Pi}{\partial Y}\mathrm{ctg}(\alpha) = 0, \tag{5.55}$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial Z} + B = 0, \tag{5.56}$$

$$\frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0, \tag{5.57}$$

gdje B predstavlja uzgon, Π tzv. Exnerov tlak a U,V i W komponente brzine. $Bu = N^2 \sin^2(\alpha)/f^2$ je tzv. Burgersov broj nagiba i predstavlja omjer uzgona i Coriolisovog člana. X, Y i Z su bezdimenzijske koordinate. Sustav (5.53–5.57) rješavan je prikazom V i W kao derivacija strujne funkcije Ψ ($V = \partial\Psi/\partial Z$, $W = -\partial\Psi/\partial Y$) te potom Fourierovom transformacijom po Y. Međusobno uvrštavanje varijabli ovdje daje jednadžbu osmog reda, analognu (5.6), sa šest netrivijalnih korijena. Shapiro i Fedorovich (2008) su također proveli integraciju po Z i zanemarili konstantu uz Z, a konstantni član analogan B u (5.8) prebacili na desnu stranu jed. (5.13) za Ψ, te dobili nehomogen sustav

$$\frac{d^2\hat{B}}{dZ^2} + \hat{U} + iK\mathrm{ctg}\,(\alpha)\,\hat{\Psi} = 0,$$
$$\frac{d^2\hat{U}}{dZ^2} + \frac{1}{\sqrt{Bu}}\frac{d\hat{\Psi}}{dZ} - \hat{B} = 0,$$
$$\frac{d^2\hat{\Psi}}{dZ^2} + \frac{1}{\sqrt{Bu}}\frac{d\hat{B}}{dZ} - iK\mathrm{ctg}\,(\alpha)\,\hat{\mathrm{U}} = \hat{C},$$

gdje K označava valni broj po Y. Rješenje sustava je suma partikularnog i homogenog rješenja

$$\hat{U} = \hat{U}_p + \sum \tilde{U}\exp\left(MZ\right),$$
$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}_p + \sum \tilde{\Psi}\exp\left(MZ\right),$$
$$\hat{B} = \sum \tilde{B}\exp\left(MZ\right).$$

Konstante M_i, $i = 1, \ldots, 6$ su rješenja polinoma šestog stupnja

$$M^6 + (1 + 1/Bu)\,M^2 - K^2\mathrm{ctg}^2\,(\alpha) = 0, \tag{5.58}$$

dalje opisana u navedenom radu.

Ukoliko se provede Fourierova analiza originalnog sustava (5.53–5.57) dobiva se

$$\frac{d^2\hat{B}}{dZ^2} - \hat{W}\mathrm{ctg}\,(\alpha) + \hat{\mathrm{U}} = 0, \tag{5.59}$$
$$\frac{d^2\hat{U}}{dZ^2} + \frac{1}{\sqrt{Bu}}\hat{V} - \hat{B} = 0, \tag{5.60}$$
$$\frac{d^2\hat{V}}{dZ^2} - \frac{1}{\sqrt{Bu}}\hat{U} - iK\mathrm{ctg}\,(\alpha)\,\hat{\Pi} = 0, \tag{5.61}$$
$$-\frac{d\hat{\Pi}}{dZ} + \hat{B} = 0, \tag{5.62}$$
$$iK\hat{V} + \frac{d\hat{W}}{dZ} = 0. \tag{5.63}$$

Uvođenjem zamjena $a = 1/\sqrt{Bu}$ i $c = \mathrm{ctg}\,(\alpha)$ te matričnim prikazom (5.59–5.63) kao u (5.33) dobiva se

$$\frac{d\mathbf{u}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{u},$$

gdje su

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\hat{B}\\ \hat{B}_1\\ \hat{U}\\ \hat{U}_1\\ \hat{V}\\ \hat{V}_1\\ \hat{W}\\ \hat{\Pi}\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&c&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&-a&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&a&0&0&0&0&iK\,c\\ 0&0&0&0&-iK&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

gdje su $\hat{B}_1=d\hat{B}/dZ$, $\hat{U}_1=d\hat{U}/dZ$ i $\hat{V}_1=d\hat{V}/dZ$.

Matrica ovog sustava također je singularna, a njezina determinanta te karakteristični i minimalni polinomi su

$$\begin{aligned}\det\mathbf{A}&=0,\\ p_{\mathbf{A}}(\lambda)&=\lambda^2\left[\lambda^6+\left(1+a^2\right)\lambda^2-c^2K^2\right],\\ m_{\mathbf{A}}(\lambda)&=p_{\mathbf{A}}(\lambda),\end{aligned}$$

iz čega se vidi da su vlastite vrijednosti od $\mathbf{A}$ korijeni polinoma (5.58), uz još dvostruku nultočku zbog $\lambda^2=0$.

Ovaj sustav također ima degeneriranu matricu vlastitih vektora i nilpotentan blok u Jordanovoj formi što vodi na pojavljivanje linearne funkcije po Z i konstante u $\mathbf{E_J}$ i transformiranom rješenju sustava $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y}=\mathbf{E_J}\mathbf{y_0}=\begin{bmatrix}\hat{B}_y+Z\hat{B}_{y1}\\ \hat{B}_y\\ \mathrm{e}^{M_1Z}\hat{U}_y\\ \mathrm{e}^{M_2Z}U_{y1}\\ \mathrm{e}^{M_3Z}\hat{V}_y\\ \mathrm{e}^{M_4Z}\hat{V}_{y1}\\ \mathrm{e}^{M_5Z}\hat{W}_y\\ \mathrm{e}^{M_6Z}\hat{\Pi}_y\end{bmatrix}, \tag{5.64}$$

analogno (5.44). Kao i u (5.1–5.3), i ovdje je linearna funkcija intrinzično svojstvo sustava. Zbog složenosti korijena M_1, ..., M_6 ovdje nije do kraja provedena analiza koja daje uvjete za $\hat{B}_{y1} = 0$ da bi iščeznula linearna funkcija po Z kada $Z \to \infty$, slične uvjetima (5.47–5.48). Shapiro i Fedorovich (2008) također zbog istog razloga nisu do kraja izračunali analitička rješenja, nego su gledali granične slučajeve vrlo velikih i vrlo malih valnih brojeva K.

Međusobnom zamjenom varijabli i svođenjem sustava diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima na jednadžbu višeg reda mogu se izgubiti važne informacije ukoliko Jordanova forma ima u sebi nilpotentan blok. Kao što je dobiveno i matričnom analizom sustava (5.1–5.3), Shapiro i Fedorovich (2008) su zaključili da u 1D modelu V komponenta stacionarnog rješenja ima neku konačnu vrijednost kako $z \to \infty$ (vidi njihov izraz (2.2) za b_∞ i v_∞, što je u dodatku diskutirano i za varijabilan $K(z)$). Pitanje je, međutim, vrijedi li to i za 2D slučaj prikazan u njihovom radu. Moguće je, naime, da $\hat{B}_y = 0$ u (5.64) ne dovodi do nefizikalnih donjih rubnih uvjeta kao u uvjetu (5.52).

5.1.4. Vremenski ovisna asimptotska rješenja i usporedba s numeričkim modelom

Analiza u potp. 5.1.3. pokazala je da stacionarni rotirajući Prandtlov sustav (5.1–5.3) u sebi ne sadrži rješenja koja mogu postići gornji rubni uvjet (5.49) analogan klasičnom Prandtlovom modelu, no njegova rješenja (5.10–5.12) ostaju ograničena kako $z \to \infty$ (5.5). Ovi rezultati opravdavaju daljnju analizu osobina vremenski ovisnog sustava (2.17–2.19)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K_c \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \gamma \sin(\alpha) U, \tag{5.65}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K_c Pr \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + f \cos(\alpha) V + \frac{g \sin(\alpha)}{\theta_0} \theta, \tag{5.66}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K_c Pr \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - f \cos(\alpha) U, \tag{5.67}$$

koju su proveli Stiperski i sur. (2007), a u ovom se potpoglavlju iznose najvažniji rezultati te analize.

U i θ su s V povezani samo Coriolisovim članom u (5.66), čiji je omjer s uzgonskim članom za mali α jednak $V f \theta_0 / (\alpha g \theta)$. Karakteristične skale za te parametre kod tipičnog katabatičkog strujanja su $\alpha = 5^\circ \sim 0.1\,\mathrm{rad}$, $\theta/\theta_0 \sim 0.01$ i $V \sim 1\,\mathrm{ms}^{-1}$ što daje $V f \theta_0 / (\alpha g \theta) \sim \mathrm{O}(10^{-2})$. Zanemarivanjem Coriolisovog člana u (5.66) se stoga mogu dobiti razumne aproksimacije za θ i U, tj. stacionarna rješenja (5.22) i (5.23) kao u klasičnom Prandtlovom modelu, no sada s $\Delta = 0$ u (5.7).
Za tipično katabatičko strujanje su $N \sim 0.01\,\mathrm{s}^{-1}$ i $Pr \sim 1$ što daje $\Delta \sim \mathrm{O}(10^{-2})$. Prema tome, čak i kada je Coriolisov član prisutan rješenja θ_s i U_s ostaju bliske aproksimacije stacionarnim rješenjima rotirajućeg sustava, θ_{fs} (5.10) i U_{fs} (5.11).

Za analizu vremenski ovisnog sustava (5.65–5.67) korišten je numerički model iz Grisogono (2003), modificiran za $f \neq 0$. Model je baziran na Adams–Bashforth metodi za vremensku integraciju i centralnim razlikama za prostorne derivacije, $\mathrm{O}\left(\Delta \mathrm{t}^3, \Delta \mathrm{x}^2\right)$, i opisan je u potp. 3.2.4.. Grisogono (2003) je pokazao da se u nerotirajućem slučaju θ i U u (5.65–5.66) asimptotski približavaju stacionarnim vrijednostima nakon karakterističnog vremenskog perioda $T = 2\pi / \left[N \sin\left(\alpha\right)\right]$. Za $\alpha \sim 1 - 6°$ i srednje brzine $2 - 5\,\mathrm{ms^{-1}}$, katabatičkom strujanju je potrebno $1 - 7\,\mathrm{h}$ tj. manje od jednog inercijalnog perioda da postane stacionarno. Numerički model sustava (5.65–5.67) integriran je s početnim uvjetom (3.31), a rezultati se promatraju nakon vremena kada θ i U postanu kvazi–stacionarni. Integracija modela je zaustavljena prije nego što se počne narušavati Boussinesqova aproksimacija ili dobivati fizikalno nerealna rješenja (npr. ukupni vertikalni pomaci niz kosinu moraju biti mnogo manji od karakteristične dubine troposfere).

Slika 5.1 prikazuje strukturu strujanja uz prisustvo rotacije u vremenima T i $4T$. U modelu se koriste parametri
$(f, \alpha, \gamma, K_c, Pr, C) = \left(1.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}, -4\,°, 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km^{-1}}, 1\,\mathrm{m^2s^{-1}}, 1.1, -8\,°\mathrm{C}\right)$. Kao što se vidi iz Sl. 5.1, i ovdje su θ i U gotovo stacionarni nakon vremena $t = T$, a V propagira uvis kroz sloj debeo nekoliko stotina metara. Ipak, promjene u V ne utječu značajno na θ i U (Sl. 5.2), koji ostaju vrlo bliski stacionarnim rješenjima θ_s (5.22) i U_s (5.23), što je u skladu s prijašnjom analizom skala. Također, idealizirane 48 h simulacije katabatičkog strujanja niz orografski presjek područja oko postaje Coats Land na Antarktici (Renfrew, 2004) pokazuju da se poprečna komponenta brzine, V, pojačava s vremenom dok visina i struktura mlazne struje u U komponenti ostaju konstantne, s profilima kvalitativno sličnima onima na Sl. 5.1b i 5.1c. Ovaj je rezultat također u skladu s pregledom 1D sustava iznesenom u Shapiro i Fedorovich (2008) i Axelsen i Van Dop (2009a,b).

I numeričke simulacije i analiza skala pokazuju da su θ_s i U_s dobre aproksimacije vremenski ovisnih numeričkih rješenja θ i U za $t > T$. Jednadžba (5.67) se za vremenski ovisnu V komponentu stoga može aproksimirati s

$$\frac{\partial V_f}{\partial t} - K_c Pr \frac{\partial^2 V_f}{\partial z^2} = -f \cos\left(\alpha\right) U_s, \quad t > T. \tag{5.68}$$

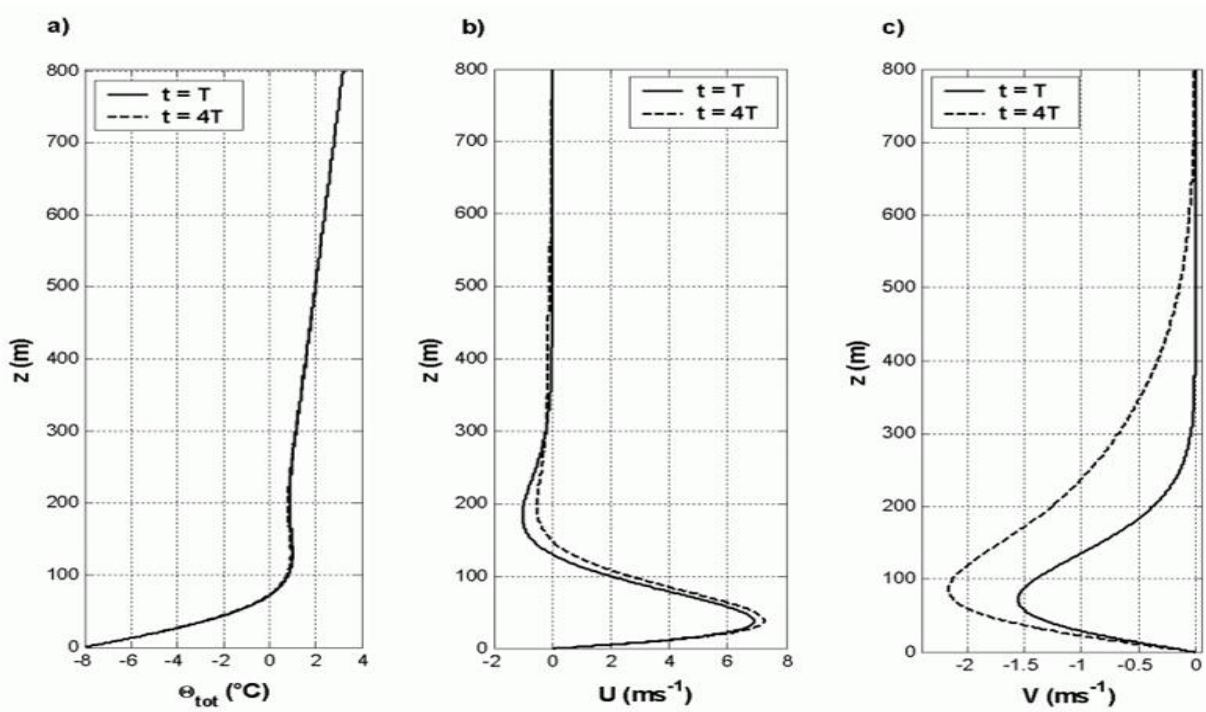
Rješenje koje zadovoljava donji rubni uvjet (5.4) je tada

$$V_f\left(z,t\right) = \frac{Cf \mathrm{ctg}\left(\alpha\right)}{Pr\gamma} \left[e^{-z/h_p} \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{tK_c Pr}}\right) - 1\right], \quad t > T. \tag{5.69}$$

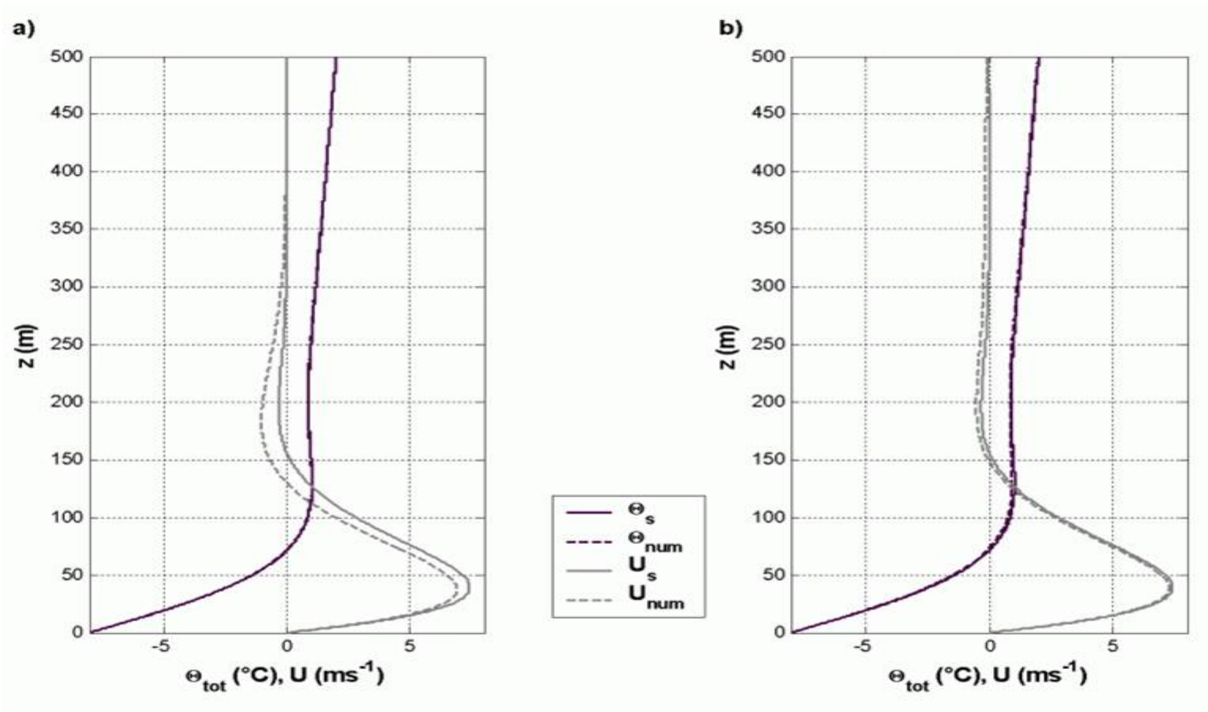
Kako je $\mathrm{erf}\left(\infty\right) = 1$, za bilo koje konačno vrijeme t_0 će $V_f\left(z, t_0\right) \to 0$ kako $z \to \infty$, tj. V_f se u konačnom vremenu ne može proširiti beskonačno visoko. Također, budući da je $\mathrm{erf}\left(0\right) = 0$, $V_f\left(z_0, t\right)$ se približava $V_{fs}\left(z_0\right)$ za bilo koju konačnu visinu z_0 kako $t \to \infty$, osim za male relativne pogreške proporcionalne $\Delta \sim \mathrm{O}\left(10^{-2}\right)$.

Iz Sl. 5.3 se vidi da V_f vrlo dobro aproksimira vremenski ovisno rješenje V za $t > T$. Turbulentno miješanje polako difuzira katabatički forsiranu V komponentu iz graničnog sloja gore prema višim slojevima pa V ne postiže pravo stacionarno stanje.

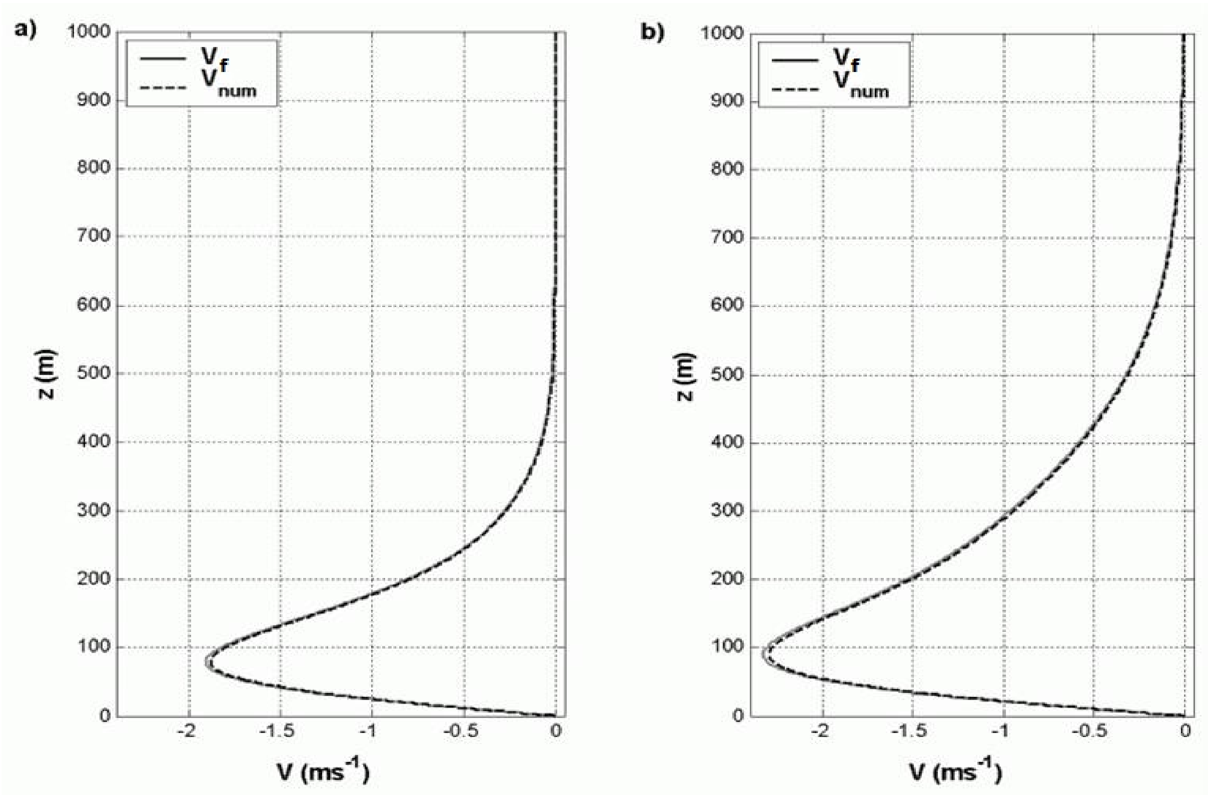
Stoga, rješenja (5.22), (5.23) i (5.69) daju dobru aproksimaciju kojom se relativno jednostavno mogu procijeniti vertikalni turbulentni tokovi (Grisogono i Oerlemans, 2001b) za većinu atmosferskih primjena. Rješenje za V, (5.69), također implicira da V može utjecati na cirkumpolarni stratosferski vrtlog nakon nekoliko mjeseci polarne noći, kao što je sugerirano u van den Broeke i van Lipzig (2003). No, zbog osnosimetričnosti osnovne geometrije Antarktike i djelovanja geostrofičkog strujanja u visini potreban je kompleksniji model kojim bi se opravdala ova hipoteza, kao što su to diskutirali Shapiro i Fedorovich (2008).



Slika 5.1: Numerička rješenja rotirajućeg Prandtlovog modela (a) $\theta_{num}^{tot} = \theta_{num} + \gamma z$, (b) U_{num} i (c) V_{num}. Parametri numeričkog modela su $(f, \alpha, \gamma, K_c, Pr, C) = \left(1.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}, -4\,^{\circ}, 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km}^{-1}, 1\,\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}, 1.1, -8\,^{\circ}\mathrm{C}\right)$. Rješenja su prikazana u $t = T$ (puna linija) i $t = 4T$ (crtkana linija), $T = 2\pi/\left[N \sin\left(\alpha\right)\right] \approx 2.1\,h$. Vrh numeričkog modela je na $H = 2000\,m$.



Slika 5.2: Numerička θ_{num}^{tot} i U_{num} (crtkano) i aproksimativna stacionarna θ_s^{tot} i U_s (puna linija, jed. 5.22 i 5.23) rješenja rotirajućeg Prandtlovog modela u (a) $t = T$ i (b) $t = 4T$. Ostalo je kao na slici 5.1.



Slika 5.3: Numerička V_{num} (crtkano) i vremenski ovisna asimptotska V_f (puna linija, jed. 5.69) rješenja rotirajućeg Prandtlovog modela u (a) $t = 2T$ i (b) $t = 6T$. Ostalo je kao na slici 5.1.

5.2. Rotirajući Prandtlov model za varijabilan $K(z)$

U ovom su potpoglavlju prikazana i diskutirana rješenja sustava jednadžbi izvedenog u potpoglavlju 2.2. (2.20–2.22) (iz Kavčič i Grisogono, 2007) za varijabilan $K = K(z)$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \gamma \sin(\alpha) U, \tag{5.70}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = Pr \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial U}{\partial z}\right) + f \cos(\alpha) V + \frac{g \sin(\alpha)}{\Theta_0}\theta, \tag{5.71}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = Pr \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial V}{\partial z}\right) - f \cos(\alpha) U, \tag{5.72}$$

s rubnim uvjetima za primarno katabatičko strujanje (2.24) i (2.26)

$$\theta(z=0) = C, \quad U(z=0) = 0, \quad V(z=0) = 0, \tag{5.73}$$

$$\theta(z \to \infty) \to 0, \quad U(z \to \infty) \to 0, \quad V(z \to \infty) \to 0. \tag{5.74}$$

Sustav (5.70–5.72) daje, zbog varijabilnog koeficijenta turbulentne difuzivnosti $K = K(z)$ iz npr. (2.27), realističniju sliku strujanja. Ovo se prvenstveno odnosi na jače prizemne gradijente promatranih varijabli za $K = K(z)$, što se bolje slaže s mjerenjima. Analitička rješenja stacionarnog sustava (2.39–2.41) proizašlog iz (5.70–5.72) su zatim uspoređena s rezultatima jednostavnog numeričkog modela (potp. 3.2.4., analogno slučaju za konstantan $K = K_c$). Nadalje, dana je usporedba s mezoskalnim numeričkim modelom te mjerenjima. Naposljetku, diskutirana je primjena napetih splajnova za numeričko rješavanje ovog problema (potp. 3.2.4.).

5.2.1. Analitičko rješenje

Analitička rješenja stacionarnog sustava (2.39–2.41) za varijabilan $K = K(z)$ se mogu izvesti koristeći WKB metodu opisanu u potpoglavlju 3.1.1. Više se o matematičkoj pozadini metode može naći u npr. Bender i Orszag (1978). Metodu su koristili Grisogono (1995) i Grisogono i Oerlemans (2001a,b) za izvođenje analitičkih rješenja profila brzina i potencijalne temperature u Ekmanovom sloju i slučaju katabatičkog vjetra bez Coriolisovog efekta (θ, U). Štoviše, upotreba metode za primarno katabatičko strujanje potkrijepljena je u Grisogono i Oerlemans (2002) i Parmhed i sur. (2004). Ovdje se primjenjuje WKB metoda nultog reda za dobivanje rješenja za θ i U. Ovaj pristup zadržava ravnotežu članova s najvećom amplitudom u izrazu (5.6), modificiranom za varijabilan $K(z)$. Eksplicitne derivacije $K(z)$ su ovdje zanemarene, a dopuštene su samo njegove varijacije u σ (5.7). Dostatnost WKB metode već nultog (najnižeg) reda temelji se na činjenici da postoji malo kvalitetnih mjerenja katabatičkog strujanja i da osnovne pretpostavke Prandtlovog modela često nisu u potpunosti ostvarene (zbog npr. kompleksnosti terena, postojanja horizontalnog gradijenta tlaka i sl.). Mora se naglasiti da $K(z)$ profil mora biti ili konstantan ili sporo varirajući s obzirom na vertikalnu skalu varijacija analitičkog rješenja da bi metoda bila valjana. Ovo drugo znači ne samo da $K(z)$ mora sam po sebi biti sporo varirajuća funkcija (Grisogono i Oerlemans, 2001a), nego i da visina maksimuma u $K(z)$ profilu mora biti iznad visine niske mlazne struje u U komponenti strujanja (engl. *low level jet height*) opažene u analitičkim i numeričkim modelima te mjerenjima. Ovdje se stoga koristi sporo varirajući profil $K(z)$ sličan onome iz Grisogono (1995); točnije kao u Grisogono i Oerlemans (2001a,b) i Parmhed i sur. (2004), čija su svojstva opisana u potp. 2.2.1.

$$K(z) = K_{max}\sqrt{e}\frac{z}{h}\exp\left(-\frac{z^2}{2h^2}\right), \tag{5.75}$$

gdje je h visina maksimalne vrijednosti $K(z)$ profila, označena s K_{max}.

Visina maksimuma, h, se ovdje može procijeniti iz činjenice da će WKB rješenje za U iz nerotirajućeg slučaja uvijek dati visinu niske mlazne struje u U ispod one izračunate koristeći konstantan K_c (Grisogono i Oerlemans, 2001a,b, 2002). Štoviše, položaj niske mlazne struje u rješenju za V komponentu iz konstantnog–K slučaja, V_f (5.69), je uvijek viši nego u U_s (5.23), i također polako raste s vremenom postižući $\approx 100\,\mathrm{m}$ (Stiperski i sur., 2007). Istovremeno, vrijednost h je ograničena visinom strogo stabilnog atmosferskog graničnog sloja (Grisogono i Oerlemans, 2002). Ovi uvjeti, zajedno s već navedenim uvjetima primjenjivosti WKB metode daju razumnu procjenu visine $h = 200\,\mathrm{m}$ za $K(z)$ profil u (5.75).

Najbolji izbori vrijednosti K_{max} i konstantne vrijednosti K_c te njihovi omjeri diskutirani su u Grisogono i Oerlemans (2001a). Ovdje se koristi procjena $K_c = 30\,\%\,K_{max}$ kao u (2.28). Dakako, opravdani su i drugi izbori, ovisno o promatranom slučaju. Detaljnije o procjeni K_{max} i h može se naći u Grisogono i Oerlemans (2002), Parmhed i sur. (2004, 2005), te Jeričević i Večenaj (2009) i Jeričević i sur. (2010).

Kao što proizlazi iz analize skala u Stiperski i sur. (2007) i potp. 5.1.4., ovdje se zanemaruje Coriolisov član u (5.71). Ova aproksimacija omogućava izravno korištenje WKB metode nultog reda na modificirani vektor strujanja $F = (\theta, U)$:

$$F_0 \propto \exp\left[-\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}\sigma_0 I(z)\right] \tag{5.76}$$

gdje su

$$I(z) = \int_0^z K(z')^{-1/2}\, dz', \tag{5.77}$$

$$\sigma_0^4 = \frac{N^2 Pr \sin^2(\alpha) + f^2 \cos^2(\alpha)}{Pr^2}. \tag{5.78}$$

Uvode se definicije $\sigma_{WKB}(z)$, te analogona Prandtlove visine za varijabilan $K(z)$

$$\sigma_{WKB}(z) := \sigma_0 I(z), \quad h_{p,WKB}(z) = \sqrt{2}/\sigma_{WKB}(z),$$

što, zajedno s rubnim uvjetima (5.73-5.74), daje rješenja za θ i U:

$$\theta_{WKB}(z) = C \exp\left[-\frac{1}{h_{p,WKB}(z)}\right] \cos\left[\frac{1}{h_{p,WKB}(z)}\right], \tag{5.79}$$

$$U_{WKB}(z) = \frac{C\sigma_0^2}{\gamma \sin(\alpha)} \exp\left[-\frac{1}{h_{p,WKB}(z)}\right] \sin\left[\frac{1}{h_{p,WKB}(z)}\right]. \tag{5.80}$$

Iz prijašnjih radova (Grisogono, 1995; Grisogono i Oerlemans, 2001a,b, 2002) se vidi da su WKB rješenja strukturno slična slučaju za konstantan K, što se pokazuje i ovdje. Ovdje je $I(z)$ u (5.77) izračunat numerički, pažljivo uzimajući u obzir njegovu divergentnu prirodu koju ipak vrlo dobro kontrolira padajuća eksponencijalna funkcija u (5.76), te potom u (5.79) i (5.80). Uz ista se ograničenja $I(z)$ može se računati i analitički, što je dodatna prednost korištenog $K(z)$.

Štoviše, WKB rješenja (5.79) i (5.80) se približavaju rješenjima za konstantan K_c (5.22) i (5.23) kako $K(z) \to K_c$. Tada $I(z)$ u (5.77) postaje $K_c^{-1/2} z$, a $1/h_{p,WKB}(z)$ u (5.79) i (5.80) postaje z/h_p (izrazi 5.22 i 5.23). Sve navedeno daje razumnu pretpostavku da se i V_f može smatrati asimptotskom (graničnom) vrijednošću odgovarajućeg WKB rješenja i implicira proširenje argumenta *error* funkcije u (5.69) za slučaj varijabilnog $K(z)$. To jest, $zK_c^{-1/2} \to I(z)$ u (5.69) što daje rješenje za $V(z,t)$:

$$V_{WKB}(z,t) \approx \frac{Cf\mathrm{ctg}(\alpha)}{Pr\gamma}\left[\exp\left(-\frac{1}{h_{p,WKB}(z)}\right)\cos\left(\frac{1}{h_{p,WKB}(z)}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{\mathrm{I(z)}}{2\sqrt{\mathrm{tPr}}}\right) - 1\right], \tag{5.81}$$

$$t > T$$

I ovdje, kao i u (5.69) rješenje $V_{WKB}(z,t)$ je razumno promatrati nakon jednog karakterističnog perioda $T = 2\pi/[N\sin(\alpha)]$ (prema Kavčič i Grisogono, 2007). Stacionarno rješenje za V dobiva se iz (5.81) za $t \to \infty$

$$V_{WKB,s}(z) \approx \frac{Cf\mathrm{ctg}(\alpha)}{Pr\gamma}\left[\exp\left(-\frac{1}{h_{p,WKB}(z)}\right)\cos\left(\frac{1}{h_{p,WKB}(z)}\right) - 1\right]. \tag{5.82}$$

Kao što je navedeno u potpoglavlju 2.3., sustav (2.39–2.41) je singularno perturbiran s graničnim slojem u $z = \hat{z} = 0$ gdje je $K(\hat{z}) = 0$, što se vidi promatranjem limesa analitičkih rješenja po uzoru na (2.34)

$$\lim_{K(z)\to K(\hat{z})} \lim_{z\to\hat{z}} G(z) \neq \lim_{z\to\hat{z}} \lim_{K(z)\to K(\hat{z})} G(z)\,, \tag{5.83}$$

gdje je $G = (\theta_{WKB}(z), U_{WKB}(z), V_{WKB,s}(z))$. Limesi računati po definiciji (5.83) za θ_{WKB} i $V_{WKB,s}$ su

$$\lim_{K(z)\to K(\hat{z})} \lim_{z\to\hat{z}} \theta_{WKB}(z) = C, \quad \lim_{z\to\hat{z}} \lim_{K(z)\to K(\hat{z})} \theta_{WKB}(z) = 0,$$
$$\lim_{K(z)\to K(\hat{z})} \lim_{z\to\hat{z}} V_{WKB,s}(z) = 0, \quad \lim_{z\to\hat{z}} \lim_{K(z)\to K(\hat{z})} V_{WKB,s}(z) = -\frac{Cf\mathrm{ctg}(\alpha)}{Pr\gamma},$$

a za U_{WKB}

$$\lim_{K(z)\to K(\hat{z})} \lim_{z\to\hat{z}} U(z) = \lim_{z\to\hat{z}} \lim_{K(z)\to K(\hat{z})} U(z) = 0,$$

tj. singularna perturbacija je prisutna u rješenjima za θ i V, dok je rješenje za U regularno. Ukoliko se ovaj postupak primijeni na vremenski ovisno rješenje za V, tj. $V_{WKB}(z,t)$, dobiva se

$$\lim_{K(z)\to K(\hat{z})} \lim_{z\to\hat{z}} V_{WKB}(z,t) = \lim_{z\to\hat{z}} \lim_{K(z)\to K(\hat{z})} V_{WKB,s}(z,t) = 0,$$

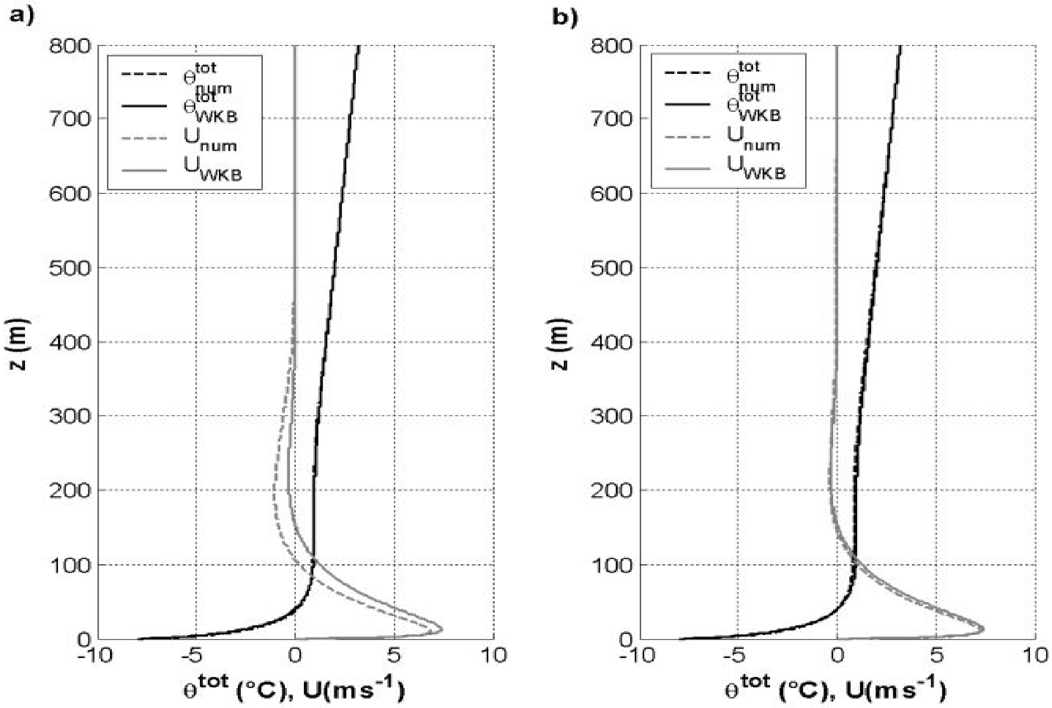
iz čega se vidi da uvažavanjem vremenskog razvoja V komponente perturbacija u analitičkom rješenju za V postaje regularna.

5.2.2. Usporedba s numeričkim modelom

U ovom je potpoglavlju dana usporedba analitičkih i numeričkih rješenja za varijabilan $K(z)$, te također usporedba s rješenjima za konstantan K_c. Kao i u Stiperski i sur. (2007), analitička rješenja su verificirana kao asimptotička rješenja vremenski ovisnog numeričkog rješenja sustava (5.70–5.72) pomoću prije spomenutog modela iz Grisogono (2003). Numerička i WKB rješenja za U i $\theta^{tot} = \theta + \gamma z$ uspoređena su za slučaj s fizikalnim parametrima $(f, \alpha, \gamma, Pr, C) = \left(1.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}, -4\,°, 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km}^{-1}, 1.1, -8\,°\mathrm{C}\right)$, i $K(z)$ profilom (5.75). Kao i za slučaj konstantnog K_c u potp. 5.1.4., i ovdje je θ^{tot} izračunata i prikazana bez referentne potencijalne temperature θ_0 (tj. konstanta θ_0 je već oduzeta od θ^{tot}).

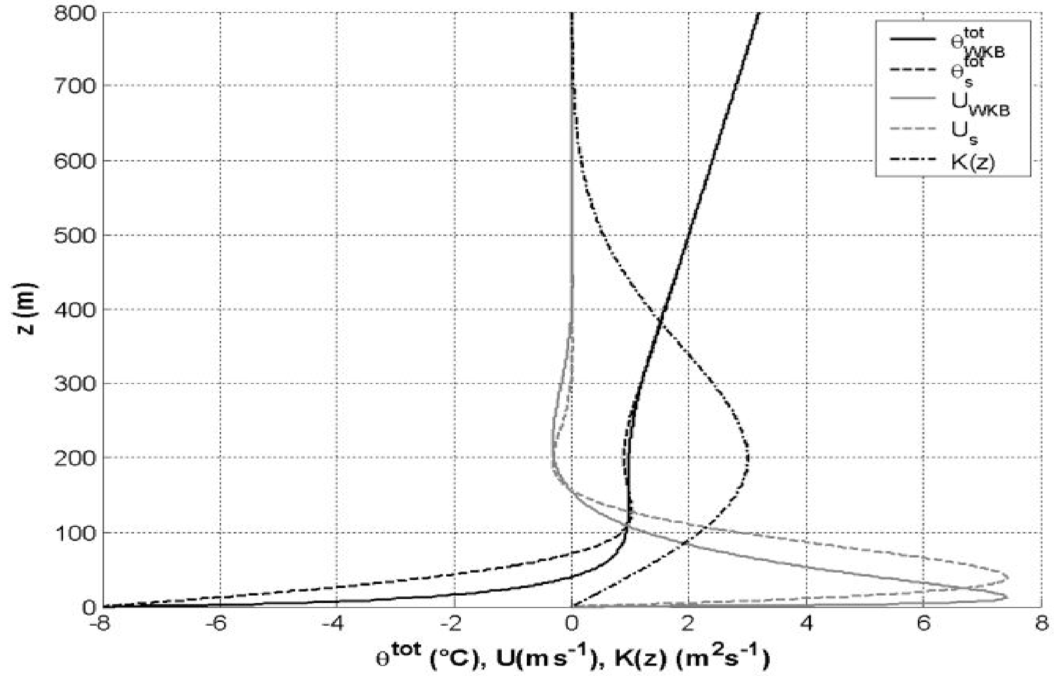
Iz Slike 5.4 može se vidjeti da se numerička rješenja (crtkano) za U i θ^{tot}_{num} vrlo dobro slažu s analitičkim stacionarnim rješenjima (5.79) i (5.80) za $t > T$ (puna linija). Takvo je slaganje očekivano s obzirom na rezultate iz slučaja za konstantan K_c, opisane u Stiperski i sur. (2007), (njihova Sl. 2, ovdje Sl. 5.2).
Slika 5.5 prikazuje WKB rješenja, (5.79) i (5.80), te rješenja za konstantan K_c, (5.22) i (5.23), za U i θ^{tot}. Vidi se poboljšanje u reprodukciji često opaženih oštrih vertikalnih

gradijenata tenperature i vjetra blizu tla (Defant, 1949; Munro, 1989; Egger, 1990; Oerlemans, 1998; Parmhed i sur., 2004). Ovi se rezultati također slažu s analizom iz Grisogono i Oerlemans (2001a,b) za nerotirajući model, i daju bolju procjenu ne samo visine niske mlazne struje nego i površinskih turbulentnih tokova topline i impulsa. Još je jedna razlika primjetna između U_{WKB} i U_s: oba profila imaju povratan tok oko $z \approx 200\,\mathrm{m}$ slične amplitude, no taj je sloj deblji za odabir varijabilnog $K\,(z)$.



Slika 5.4: Numerička θ^{tot}_{num} i U_{num} (crtkana linija) i analitička WKB θ^{tot}_{WKB} i U_{WKB} rješenja rotirajućeg Prandtlovog modela (puna linija), jed. (5.79) i (5.80) u (a) $t = T$ i (b) $t = 10T$, $T = 2\pi/\left[N \sin(\alpha)\right] \approx 2.1\,h$. $K\,(z)$ profil je iz (5.75), s $K_{max} = 3\,m^2 s^{-1}$ u $h = 200\,m$. Ostali parametri su $(f, \alpha, \gamma, Pr, C) = \left(1.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}, -4\,°, 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km}^{-1}, 1.1, -8\,°\mathrm{C}\right)$, a vrh numeričkog modela je na $H = 2000\,m$.

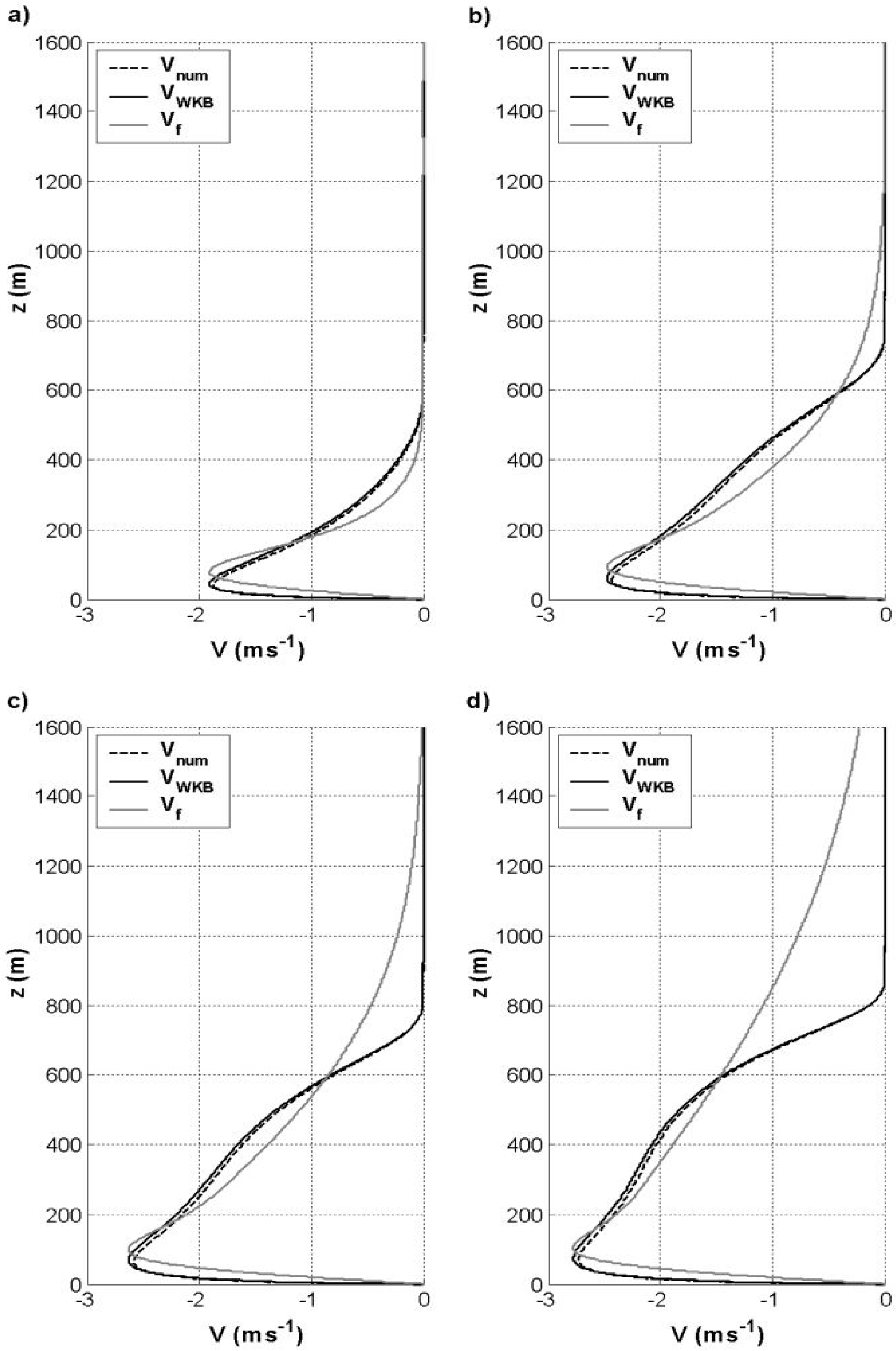
Oštar prizemni gradijent i niža visina niske mlazne struje su također primjetni i u poprečnoj komponenti vjetra, V, kada je primjenjen $K\,(z)$, Sl. 5.6. V_{num} još uvijek difundira uvis no, kao što je očekivano, ta je propagacija sada usporena zbog malih vrijednosti $K\,(z)$ ($z \approx 800\,\mathrm{m}$, Sl. 5.5). Druga značajna razlika je prisutnost sekundarnog maksimuma u V iznad visine K_{max} na $z \approx 400\,\mathrm{m}$ ili $500\,\mathrm{m}$. Kako vrijeme integracije raste ovaj maksimum jača i širi se visinom, no ipak uz ograničenje nametnuto $K\,(z)$ profilom. Ovaj se maksimum u $V\,(z,t)$ događa zbog dva suprotna efekta. I V_{num} i V_{WKB} pokušavaju difuzirati uvis kao u prvom Stokesovom problemu, kao što je to lijepo reproducirano u Stiperski i sur. (2007). Međutim, na progresivno višim nivoima sve su manje vrijednosti $K\,(z)$, koje su potrebne za propagaciju V komponente uvis. Prema tome, iako $V\,(z,t)$ još uvijek difuzira uvis, sada ima na raspolaganju sve manje prikladnog medija s dovoljno velikim vrijednostima $K\,(z)$ za propagaciju i više se skuplja ispod razine $K(z) \to 0$ (Sl. 5.6, puna crna linija). Nasuprot tome, duboki i neopadajući konstantan K_c podržava snažniju vertikalnu difuziju $V_f(z,t)$ (jed. (5.69); Sl. 5.6, puna siva linija).



Slika 5.5: Zadani $K(z)$ profil iz (5.75) (točka–crta) i analitička rješenja rotirajućeg Prandtlovog modela za slučaj varijabilnog (puna linija) i konstantnog K (crtkano). $K_{max} = 3\,m^2 s^{-1}$, $h = 200\,m$, $K_c = 1\,m^2 s^{-1}$ a θ_s^{tot} i U_s su iz (5.22–5.23). Ostalo je kao na slici 5.4.

Cjelokupno ponašanje V_{num} je vrlo dobro opisano aproksimativnim WKB rješenjem V_{WKB} iz (5.81), samo malo precjenjujući maksimalnu amplitudu. WKB aproksimacija nultog reda daje dobre rezultate zbog sporo varirajućeg profila $K(z)$, jer je pogreška WKB metode reda veličine posljednjeg uključenog člana u razvoju (potp. 3.1.1.), što je ovdje $\approx [dK(z)/dz]/K(z)$. Ovo ponašanje analitičkog rješenja je analogno onome za slučaj konstantnog K_c za V_f (5.69; Stiperski i sur. (2007)). Detaljan račun za $V(z,t)$ predstavljen ovdje također objašnjava ponašanje V komponente u Denby (1999), koje ovdje nije komentirano (pogledati njegove Sl. 2e i 5).

Dodatne informacije i primjedbe o tome kako računati parametre za ovaj model Ekman–Prandtlovog tipa s $K(z)$ može se naći u Parmhed i sur. (2004, 2005). Analitička rješenja $(\theta, U, V,)_{WKB}$, (5.79), (5.80) i (5.81) nisu nazvana "asimptotička" kao što se uobičajeno nazivaju WKB rješenja. Naime, zbog slabog razdvajanja θ i U od V komponente zanemarivanjem Coriolisovog člana u (5.71), V_{WKB} više nema povratan efekt na originalan sustav (5.70–5.72). Numerički rezultati pokazuju da je, kao i u Stiperski i sur. (2007), V efekt na katabatičko strujanje zanemariv. Ipak, inducirani $V(z,t)$ utječe na smjer vjetra i horizontalni tok impulsa.



Slika 5.6: Analitička (puna linija) i numerička rješenja za V u (crtkana linija) u (a) $t = T$, (b) $t = 10T$, (c) $t = 10T$ i (d) $t = 20T$. WKB rješenje V_{WKB} je iz (5.81); rješenje za konstantan K, V_f, je dano u (5.69). Ostalo je kao na slici 5.4.

5.2.3. Usporedba s mezoskalnim MIUU modelom

U ovom potpoglavlju se uspoređuju analitička rješenja za katabatičko strujanje za varijabilan $K(z)$ iz Kavčič i Grisogono (2007) i odgovarajuća 1D rješenja jednostavnog numeričkog modela iz Grisogono (2003) s numeričkim mezoskalnim modelom MIUU (npr. Andrén, 1990; Enger, 1990; Grisogono i Enger, 2004). Prikazani rezultati su proširenje rezultata iz Kavčič i sur. (2007a), a naglasak je stavljen na vremenski razvoj glavnih komponenti rotirajućeg Prandtlovog modela, θ, U i V. Ovdje je potvrđena hipoteza da skaliranje vezano uz visinu niske mlazne struje iz Prandtlovog modela može biti alternativa uobičajeno upotrebljavanoj duljini miješanja kod stabilnih graničnih slojeva (npr. Grisogono i Oerlemans, 2001a; Munro, 2004), što je kasnije i objavljeno u Grisogono i Belušić (2008).

Karakteristike MIUU modela

Mezoskalni numerički MIUU model je nelinearni, 3D, hidrostatički model na konstantnoj f–ravnini s parametrizacijom turbulentnih tokova pomoću tzv. 2.5–nivoa zatvaranja, što pripada u tzv. 1.5 red zatvaranja parametrizacije turbulencije (Andrén, 1990; Enger, 1990; Tjernström i Grisogono, 2000; Grisogono i Enger, 2004). Model rješava pet prognostičkih (i mnogo dijagnostičkih) jednadžbi u svakom vremenskom koraku za dvije horizontalne komponente vjetra (U, V), potencijalnu temperaturu (Θ), specifičnu vlažnost (q) i turbulentnu kinetičku energiju (TKE).
Postavke modela u prikazanim simulacijama su: $1\,\mathrm{m} < \Delta \mathrm{z} < 29.5\,\mathrm{m}$ (razmaknuta vertikalna mreža, uzimajući u obzir teren, engl. *stagered, terrain influenced*), $\Delta x \approx 1.9\,\mathrm{km}$ s polaganim smanjivanjem rezolucije prema lateralnim granicama ($\Delta x \leq 28\,\mathrm{km}$), te s ukupnim brojem točaka $211 \times 7 \times 201$ i bez varijacija u y smjeru. Vremenski korak je $\Delta t = 13\,\mathrm{s}$ a vrh modela je na $z_{TOP} = 5.6\,\mathrm{km}$ sa spužvastim slojem (engl. *sponge layer*) koji počinje na $z = 4.4\,\mathrm{km}$. Pet prvih i posljednjih lateralnih točaka mreže koriste disipativnu uzvodnu advekcijsku shemu prvog reda točnosti na koju je primijenjen uvjet "konstantnog pritjecanja–postupnog otjecanja" (engl. *constant inflow–gradient outflow*, npr. Grisogono i Enger, 2004). Nadalje, upotrijebljena je i dodatna slaba lateralna difuzija. U gornjem dijelu spužvastog sloja upotrijebljena je ista disipativna advekcijska shema prvog reda, zbog minimiziranja umjetnih refleksija, umjesto osnovne zadane sheme reda $O\left[(\Delta x)^3, (\Delta t)^3\right]$ (Enger i Grisogono, 1998). Donji nivoi modela po z slijede teren, razmičući se po visini, tako da je najfinija rezolucija u prizemnom sloju. Model je naglo inicijaliziran sa zadanim nagibom i idealiziranim atmosferskim profilima, te parametrima

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \gamma = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km}^{-1},$$

a duljina miješanja je (prikazana na Sl. 5.10b)

$$L_{STAB}(z,t) = \min\left(2A\frac{TKE^{1/2}}{N}, A\frac{TKE^{1/2}}{S}\right), \tag{5.84}$$

gdje je $A = 0.2685$ kako bi se izbjeglo precjenjivanje ukupnog miješanja i time visine inverzije. N je uzgonska frekvencija a S ukupno apsolutno horizontalno smicanje vjetra (Grisogono i Belušić, 2008).

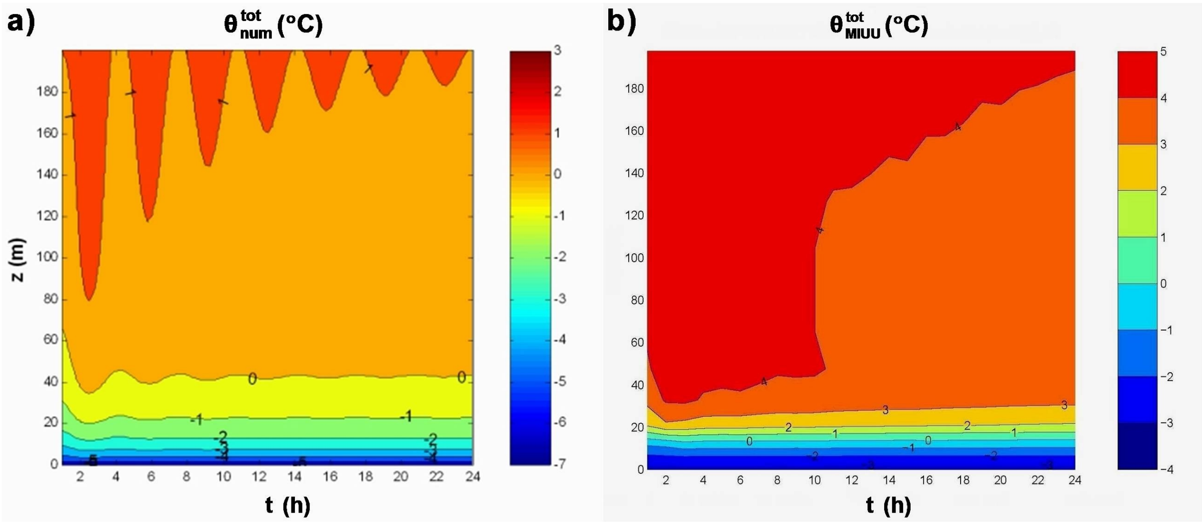
Rezultati

U prijašnjem radu pokazano je da analitička WKB rješenja (5.79), (5.80) i (5.81) daju vrlo dobru usporedbu s vremenski ovisnim 1D rješenjima jednostavnog numeričkog modela ($\theta_{num}^{tot}, U_{num}, V_{num}$) nakon $t \approx T$ (također i Sl. 5.9a i 5.10a). Ovdje su numerička rješenja stoga uspoređena s rješenjima MIUU modela nakon $t \approx T = 3.39\,\mathrm{h}$. Postavke jednostavnog numeričkog modela prilagođene su parametrima korištenima u MIUU modelu, tj. $(f, \alpha, \gamma, Pr, C) = \left(1.03 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}, -2.2\,°, 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km}^{-1}, 1.1, -6.5\,°\mathrm{C}\right)$. Ovdje je $t \approx T = 3.39\,\mathrm{h}$, $h = 200\,\mathrm{m}$ a $K_{max} = 2\,\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$.

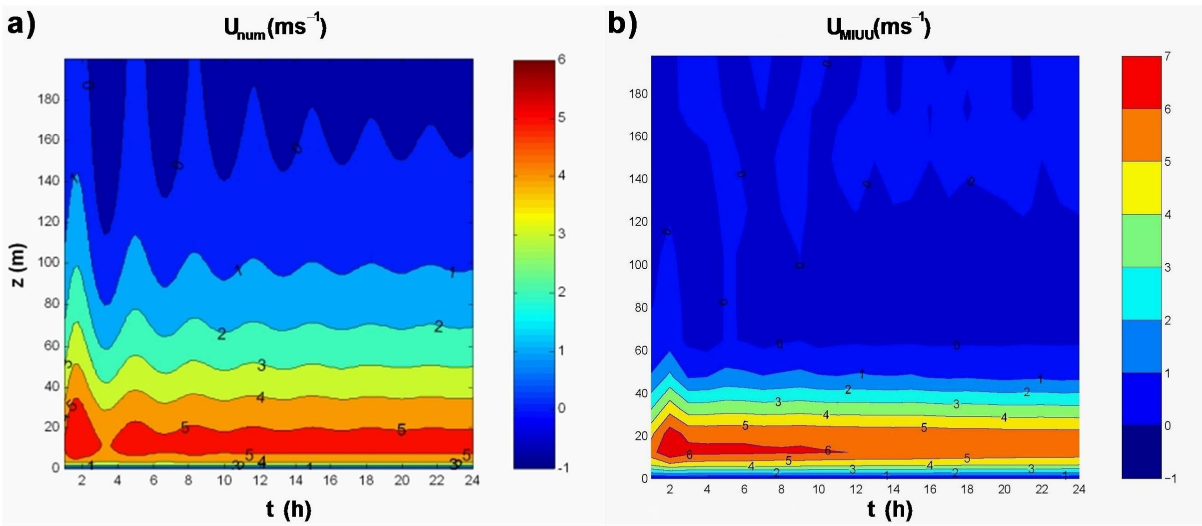
Usporedbom U na Sl. 5.8a i 5.8b vidi se da U_{num} (koja odgovara U_{WKB} nakon $t \approx T$) lagano potcjenjuje vrijednost maksimuma brzine i sam gradijent brzine s visinom, no daje vrlo dobru procjenu visine maksimuma kao i dobar opis vremenske evolucije U_{MIUU}. Slično je i ponašanje θ_{num}^{tot} (koje odgovara θ_{WKB}^{tot} nakon $t \approx T$) u odnosu na θ_{MIUU}^{tot}. θ_{num}^{tot} (Sl. 5.7a) također lagano potcjenjuje vrijednosti i vertikalne gradijente θ_{WKB}^{tot} (Sl. 5.7b), no daje jako dobar vremenski opis razvoja. Sve gore navedeno za U vrijedi i za V komponentu (Sl. 5.9a i 5.9b). Štoviše, MIUU model potvrđuje vertikalnu propagaciju V komponente brzine s vremenom. U sva tri jednostavna numerička rješenja (θ_{num}, Sl. 5.8a; U_{num}, Sl. 5.8a; V_{num}, Sl. 5.9a) primjetne su pojačane oscilacije na početku vremenskog integriranja te blizu gornjeg ruba, što je najvjerojatnije osobina primjenjene numeričke sheme (AB3–CD2, opisana u potp. 3.2.4.) u prikazanom Prandtlovom modelu.

S obzirom na kompleksnost MIUU modela u usporedbi s WKB rješenjima (5.79), (5.80) i (5.81) i jednostavnim numeričkim modelom temeljenim na vremenski ovisnom sustavu (5.70–5.72) slaganje je i više nego zadovoljavajuće. Jačina jake prizemne temperaturne inverzije je podjednaka u oba modela. Nadalje, intenzitet i položaj niske mlazne struje gotovo je isti u modificiranom rotirajućem Prandtlovom i MIUU modelu. Ovo se prvenstveno može zahvaliti novoj parametrizaciji duljine miješanja $L_{STAB}(z,t)$ (5.84), za koju je kasnije u Grisogono i Belušić (2008) te Grisogono (2010) pokazano da daje mnogo bolje procjene turbulentnog miješanja u stabilnim graničnim slojevima. Uobičajeno upotrebljavane parametrizacije u numeričkim prognostičkim modelima su općenito previše difuzivne u stabilnoj i jako stabilnoj stratifikaciji, a ova parametrizacija $L_{STAB}(z,t)$ uspješno uklanja taj problem. Spomenuta metoda parametrizacije karakteristične duljine miješanja u meteorološkim modelima za vrlo SABL je "glatko" generalizirana u Grisogono

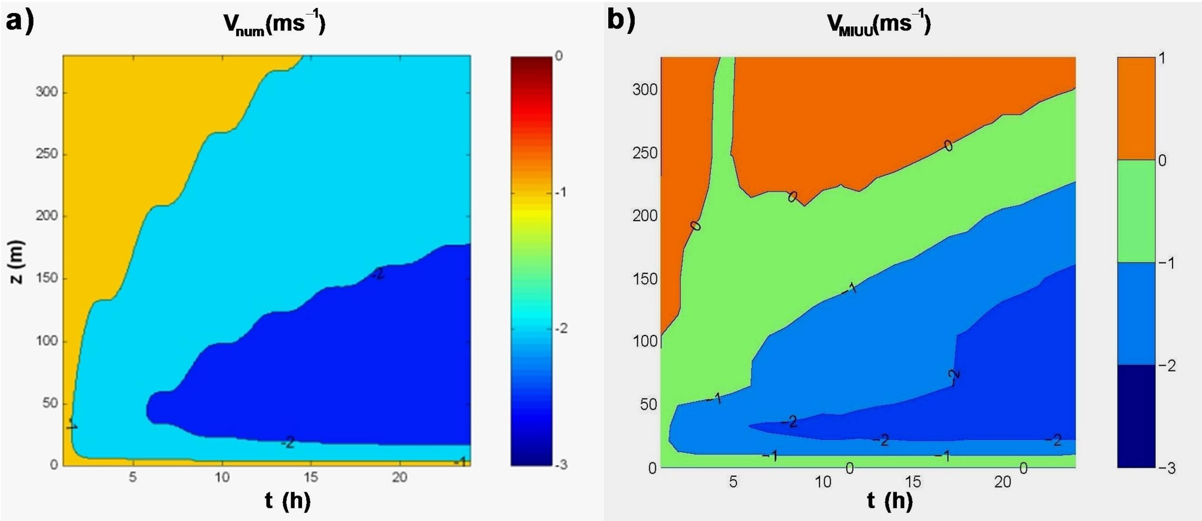
(2010) za $0 \leq Ri < \infty$, $Ri = (N/S)^2$, a ova je disertacija pridonijela tom generaliziranom pristupu renormalizacije L_{STAB}.



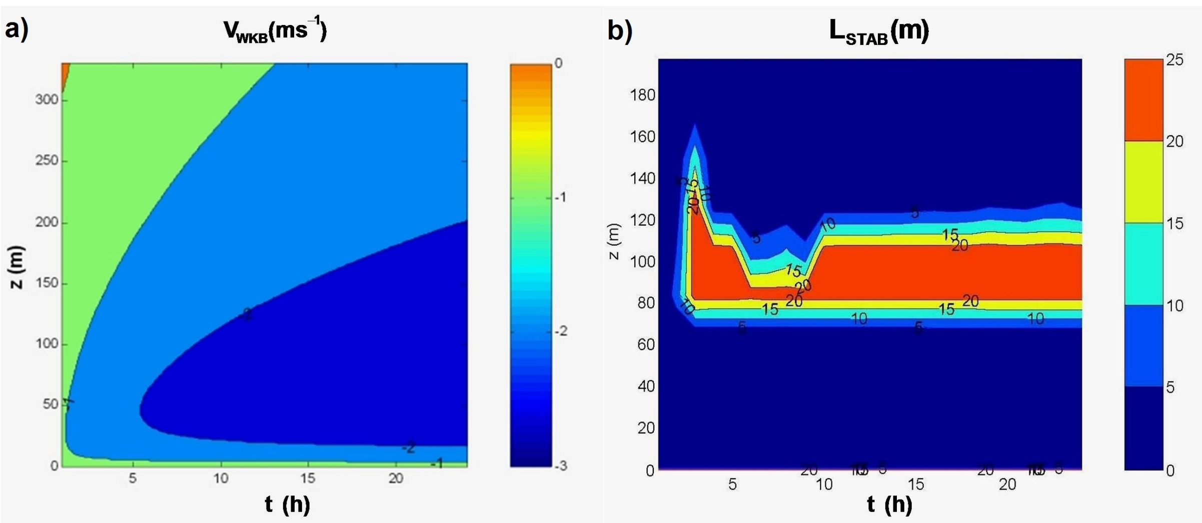
Slika 5.7: $\theta^{tot}(z,t)$ vertikalni presjeci iz jednostavnog numeričkog (5.70–5.72) (a), i MIUU modela (b). Parametri modela su: $(f, \alpha, \gamma, Pr, C) = \left(1.03 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}, -2.2\,^{\circ}, 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km}^{-1}, 1.1, -6.5\,^{\circ}\mathrm{C}\right)$. Ovdje je $t \approx T = 3.39\,\mathrm{h}$; $h = 200\,\mathrm{m}$, $K_{max} = 2\,\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$. Vrh jednostavnog numeričkog modela je na $H = 2000\,\mathrm{m}$.



Slika 5.8: $U(z,t)$ vertikalni presjeci iz jednostavnog numeričkog (5.70–5.72) (a), i MIUU modela (b). Ostalo kao na Sl. 5.7.



Slika 5.9: $V\,(z,t)$ vertikalni presjeci iz jednostavnog numeričkog (5.70–5.72) (a), i MIUU modela (b). Ostalo kao na Sl. 5.7.



Slika 5.10: (a) $V_{WKB}\,(z,t)$ presjek iz (5.81). U_{WKB} iz (5.80) i $\theta_{WKB}^{tot} = \theta_{WKB} + \gamma z$, θ_{WKB} iz (5.79) su stacionarni pa ovdje nisu prikazani. WKB rješenja vrijede nakon $t \approx T = 3.39\,\mathrm{h}$. (b) $L_{STAB}\,(z,t)$ vertikalni presjek iz MIUU modela (5.84). Važno je uočiti da je $L_{STAB}\,(z,t) < 5\,\mathrm{m}$ za primarni katabatički sloj, $z \lesssim 65\,\mathrm{m}$.

5.2.4. Usporedba s mjerenjima

Analitička rješenja za katabatičko strujanje uz varijabilan $K(z)$ iz Kavčič i Grisogono (2007) se u ovom potpoglavlju uspoređuju s motrenjima na postaji Coats Land, Antarktika. Za usporedbu su upotrijebljeni 15–minutni srednjaci profila vjetra dobivenih Doppler sodarom (detaljan opis sustava dan je u Anderson i sur., 2005) te radiosondažni podaci. Promatra se zimsko razdoblje na Antarktici, a pretpostavke analitičkog modela i odabranih epizoda odnose se na primarno katabatička strujanja gdje je utjecaj s većih skala zanemariv (Renfrew, 2004; Renfrew i Anderson, 2002), također u potp. 2.2. Prikazani rezultati su proširenje rezultata iz Kavčič i sur. (2007b), a podrobnije se promatra jačina i visina niske mlazne struje.

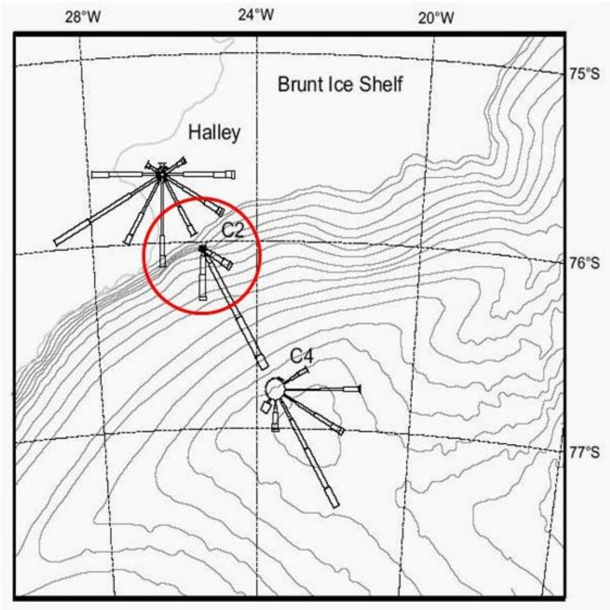
Doppler sodar i AWS podaci

Prikazani podaci su skupljeni tijekom intenzivnog razdoblja motrenja vertikalne strukture katabatičkog strujanja iznad postaje Coats Land na Antarktici tijekom 2002. i 2003. god. (Renfrew, 2004; Renfrew i Anderson, 2006). Za usporedbu s analitičkim WKB rješenjima korištena su:

- Doppler sodar motrenja tijekom 2002. i 2003. god. (15–min srednjaci profila vjetra na postaji C2, Sl. 5.11),
- In situ AWS motrenja (1996.–2003. god.) na istraživačkoj postaji Halley (RS) i automatskim meteorološkim (AWS) postajama C1–C4 (Sl. 5.11),
- Radiosondažna motrenja na postaji Halley (RS, Sl. 5.11).

Profili vjetra (15–min srednjaci) su dobiveni iz autonomnog Doppler sodar sustava postavljenog na terenu umjerenog nagiba (najviše $5\,^{\circ}$) otprilike $50\,\mathrm{km}$ južno od istraživačke postaje Halley (engl. *Halley Research Station*, vidi Anderson i sur. (2005)). Koristile su se dvije postavke sodara: visoka vertikalna rezolucija s frekvencijom $= 502\,\mathrm{Hz}$, intervalom mjerenja $\sim 10-70\,\mathrm{m}$ i rasponom visina $\sim 20-500\,\mathrm{m}$; te standardna vertikalna rezolucija s frekvencijom $= 506\,\mathrm{Hz}$, intervalom mjerenja $\sim 20-60\,\mathrm{m}$ i rasponom visina $\sim 20-500\,\mathrm{m}$.

Vrijednost površinskog deficita potencijalne temperature, C, određena je iz *in situ* meteoroloških podataka s automatske postaje C2 ($C = \Theta - \theta_0$, $\Theta = \theta_0 + \theta^{tot}$). Referentna potencijalna temperatura, θ_0, je aproksimirana iz AWS podataka na $2\,\mathrm{m}$ visine. Vertikalni gradijent potencijalne temperature, γ, i potencijalna temperatura slobodne atmosfere, Θ, dobiveni su iz radiosondaža na postaji Halley (Renfrew i Anderson, 2006). Nagib terena na postaji C2 je $\alpha = -3.14\,^{\circ}$, a Coriolisov parametar f je negativan (Renfrew i Anderson, 2006). Na temelju kriterija za primarno katabatičko strujanje iz Renfrew i Anderson (2002) odabran je skup od 16 epizoda (805 profila vjetra).



Slika 5.11: Fig. 1. iz Renfrew (2004): topografski prikaz Coats Land, Antarktika, s izolinijama svakih 100 m. Prikazan je položaj istraživačke postaje Halley, a položaji četiri automatske meteorološke postaje (AWS) označeni su s C1 do C4. Autonomni Doppler sodar sustav je bio postavljen na postaji C2 tijekom 2002. i 2003. god.

Rezultati

WKB rješenja za U (5.80) i V (5.81) te rješenja prije spomenutog jednostavnog numeričkog modela (vrh modela je na $H = 2000\,\mathrm{m}$, $Pr = 1.1$) su uspoređena s podacima s postaje C2 (Renfrew, 2004; Renfrew i Anderson, 2006). Slike 5.12, 5.13 i 5.14 prikazuju tri od ukupno 16 promatranih epizoda primarnog katabatičkog strujanja, odabranih kao svojevrsne granične epizode po pitanju statičke stabilnosti slobodne atmosfere opisane s γ. Odabrane epizode i pripadne vrijednosti C i γ ovih epizoda su:

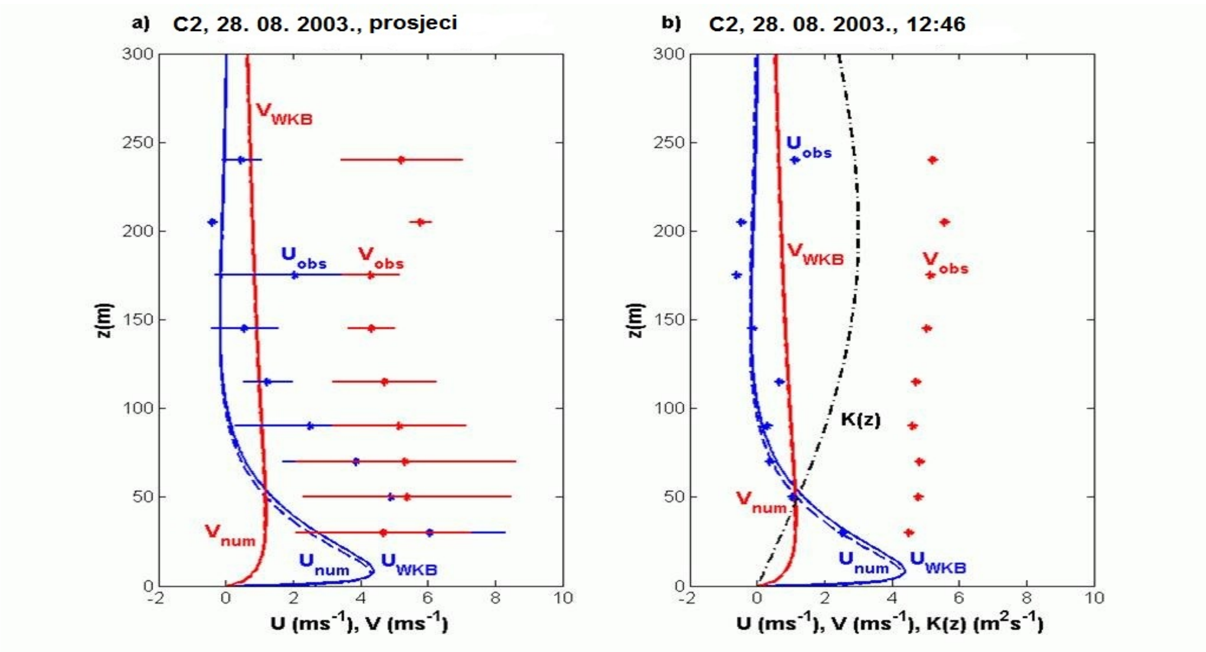
- 28. 08. 2003. god. od 12 h do 21 h po lokalnom vremenu, oko 1 h 40 min iza UTC. Površinski deficit potencijalne temperature i stabilnost su: $C = -9.3\,^\circ$, $\gamma = 16 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km}^{-1}$.
- 08. 09. 2003. god. od 10 h do 15 h po lokalnom vremenu, oko 1 h 40 min iza UTC. $C = -4.6\,^\circ$, $\gamma = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km}^{-1}$.
- 01. 12. 2003. god. od 00 h do 12 h po lokalnom vremenu, oko 1 h 40 min iza UTC. $C = -5.9\,^\circ$, $\gamma = 6 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km}^{-1}$.

Sa slika 5.12–5.14 se vidi dobro kvalitativno slaganje WKB rješenja (puna linija) s odgovarajućim vremenski ovisnim numeričkim rješenjima za U i V. Slaganje je bolje za jaču stabilnost (veći γ, Sl. 5.12 i 5.14; epizode 28. 08. 2003. i 01. 12. 2003.). Pri jačoj stabilnosti bolje je i slaganje sodarskih podataka U komponente (plave zvjezdice) te WKB rješenja (5.80), naročito u procjeni visine niske mlazne struje (Sl. 5.12 i 5.14). Jačina niske mlazne struje je u prosjeku epizode potcijenjena (Sl. 5.12a i 5.14a), no vrlo je dobro opisana za određen vremenski trenutak (Sl. 5.12b, 12:46, i 5.14b, 08:46). Međutim, V_{WKB} (jed. 5.80) dosta potcjenjuje magnitudu izmjerene poprečne komponente (Sl. 5.12

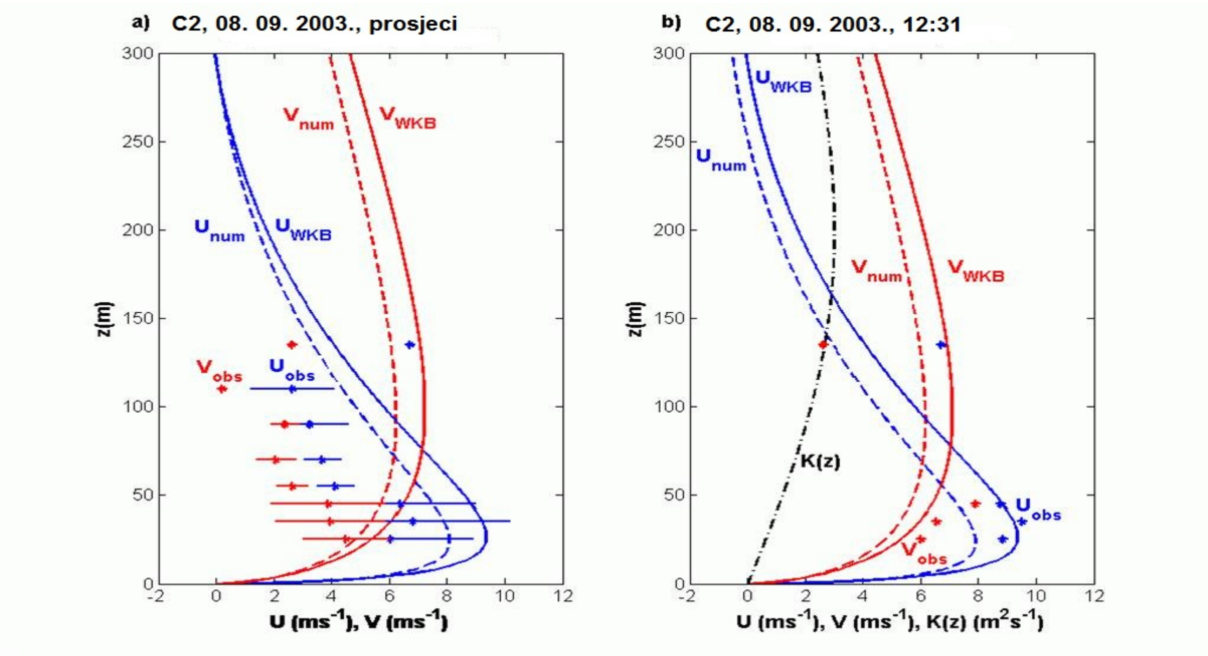
i 5.14, crvene zvjezdice), iako kvalitativno opisuje njezin oblik. Ovaj rezultat sugerira da su za V komponentu odgovorni i drugi mehanizmi koji nisu opisani jednostavnim niti rotirajućim Prandtlovim modelom (npr. 3D mezoskalni efekti).

Čini se da smanjena stabilnost (druga epizoda, 08. 09. 2003., Sl. 5.13) ima veći utjecaj na visinu maksimuma u WKB i jednostavnim numeričkim rješenjima za V nego U. WKB rješenja (5.80) i (5.81) općenito precjenjuju U i V komponente strujanja u odnosu na izmjerene vrijednosti (Sl. 5.13, plave i crvene zvjezdice) u ovoj epizodi. Visina niske mlazne struje od U je ipak reproducirana sa zadovoljavajućom točnošću (odstupanje u visini maksimuma od $\approx 5\,\text{m}$. No, u ovoj epizodi je izmjereni V maksimum bliži izmjerenom U maksimumu, što dovodi do precjenjivanja visine V maksimuma WKB rješenjem (5.81), Sl. 5.13.

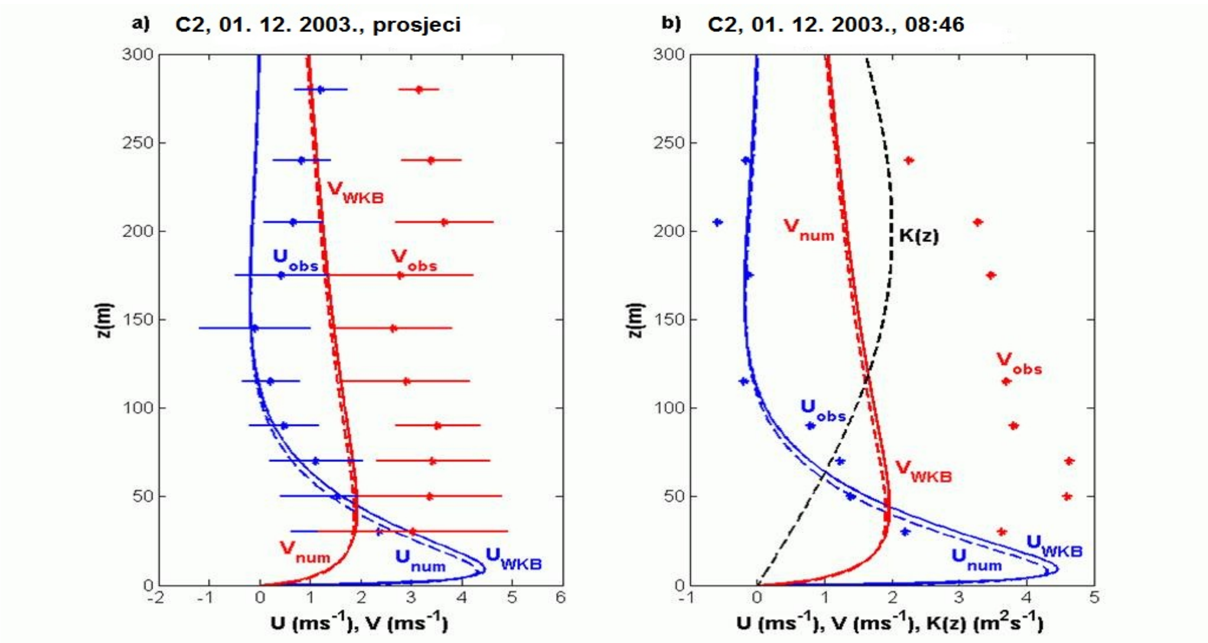
Ukratko, WKB rješenja (5.80) i (5.81) se mogu primijeniti za kvalitativan opis karakteristika mjerenja u slučaju primarnog katabatičkog strujanja. Slaganje je generalno bolje za U nego za V komponentu (očito je dinamika V komponente složenija, vidi npr. Shapiro i Fedorovich (2007, 2008)).



Slika 5.12: Usporedba numeričkih (crtkano) i analitičkih WKB rješenja (puna linija) za U (plavo, jed. 5.80) i V (crveno, jed. 5.81) komponente strujanja, s Doppler sodar podacima (odgovarajuće plave i crvene zvjezdice s granicama pogreške) za (a) prosjek epizode i (b) $t = 12:46\,\text{h}$ po lokalnom vremenu (oko 1 h 40 min iza UTC). WKB rješenja vrijede nakon $T = 2\pi/(N\sin(\alpha)) \approx 1.3\,\text{h}$. $K(z)$ profil je iz (5.75), s $K_{max} = 3\,\text{m}^2\text{s}^{-1}$ na $h = 200\,\text{m}$ (crno, točka–crta). Drugi parametri su $(f, \alpha, \gamma, Pr, C) = \left(-1.4\times10^{-4}\,\text{s}^{-1}, -3.14\,°, 16\times10^{-3}\,\text{Km}^{-1}, 1.1, -9.3\,°\text{C}\right)$. Vrh jednostavnog numeričkog modela je na $H = 2000\,\text{m}$.



Slika 5.13: Usporedba numeričkih (crtkano) i analitičkih WKB rješenja (puna linija) za U (plavo, jed. 5.80) i V (crveno, jed. 5.81) komponente strujanja, s Doppler sodar podacima (odgovarajuće plave i crvene zvjezdice s granicama pogreške) za (a) prosjek epizode i (b) $t = 12:31\,\text{h}$ po lokalnom vremenu (oko 1 h 40 min iza UTC). WKB rješenja vrijede nakon $T \approx 5.2\,\text{h}$. Drugi parametri su $(f, \alpha, \gamma, Pr, C) = \left(-1.4 \times 10^{-4}\,\text{s}^{-1}, -3.14\,°, 1 \times 10^{-3}\,\text{Km}^{-1}, 1.1, -4.6\,°\text{C}\right)$. Ostalo je kao na Sl. 5.12.



Slika 5.14: Usporedba numeričkih (crtkano) i analitičkih WKB rješenja (puna linija) za U (plavo, jed. 5.80) i V (crveno, jed. 5.81) komponente strujanja, s Doppler sodar podacima (odgovarajuće plave i crvene zvjezdice s granicama pogreške) za (a) prosjek epizode i (b) $t = 08:46\,\text{h}$ po lokalnom vremenu (oko 1 h 40 min iza UTC). WKB rješenja vrijede nakon $T \approx 2.2\,\text{h}$. Drugi parametri su $(f, \alpha, \gamma, Pr, C) = \left(-1.4 \times 10^{-4}\,\text{s}^{-1}, -3.14\,°, 6 \times 10^{-3}\,\text{Km}^{-1}, 1.1, -5.9\,°\text{C}\right)$. Ostalo je kao na Sl. 5.12.

5.2.5. Primjena napetih splajnova na rotirajući Prandtlov model s varijabilnim $K(z)$

Ovdje se prikazuju rezultati prilagodbe numeričkih metoda za rješavanje singularno perturbiranih problema na model katabatičkog strujanja za varijabilan $K(z)$, opisane u potp. 3.2.4. Numerička metoda za vremenski ovisan sustav, zajedno s rubnim uvjetima (3.23–3.27), dana je izrazima (3.35–3.40) s koeficijentima metode (3.41–3.43).

Za razliku od jednostavnih problema diskutiranih u poglavlju 4., koeficijenti $\varepsilon_\theta(\tilde{z}_j)$ i $\varepsilon_{UV}(\tilde{z}_j)$ nisu konstantni i vrijednosti im se kreću u rasponu 10^{-28}–10^{-8} u dvostrukoj preciznosti (vrh numeričkog modela je na $H = 2000\,\mathrm{m}$ kao u potp. 5.2.2.). Također, zbog $K(z=0) = 0$ su $\varepsilon_\theta(\tilde{z}=0) = \varepsilon_{UV}(\tilde{z}=0) = 0$. Ovo ipak ne predstavlja dodatnu numeričku poteškoću jer se ova nultočka ne koristi u računu zbog uzimanja vrijednosti donjih rubnih uvjeta u $z = 0$ (no može se npr. postaviti $\varepsilon_\theta(\tilde{z}=0) = \varepsilon_{UV}(\tilde{z}=0) = 10^{-15}$ za dvostruku preciznost).

Vrijednosti $\partial K/\partial\tilde{z}$, $\tilde{z} = \tilde{z}_j$, mijenjaju predznak, što vodi na mijenjanje predznaka advekcijskih koeficijenata $a_\theta(\tilde{z}_j)$ i $a_{UV}(\tilde{z}_j)$. Oni također imaju veliki raspon vrijednosti -10^{-26}–10^{-7} u dvostrukoj preciznosti. I difuzijski i advekcijski koeficijenti su mali u usporedbi s reakcijskim koeficijentima $b_\theta(\tilde{z}_j) = b_{UV}(\tilde{z}_j) = 1$, a za ovaj su se tip problema TC–splajnovi pokazali vrlo dobrima (posebice TC2–splajnovi za mijenjanje predznaka advekcijskog člana; rezultati za primjer 7 u potpoglavlju 4.2.).

Parametri numeričkih simulacija su analogni onima iz potp. 5.2.2. gdje su prikazani rezultati AB3–CD2 metode konačnih razlika, tj.

- $K_{max} = 3\,\mathrm{m^2s^{-1}}$, $h = 200\,\mathrm{m}$,
- $(f, \alpha, \gamma, Pr, C) = \left(1.1\times10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}, -4\,^\circ, 4\times10^{-3}\,\mathrm{Km^{-1}}, 1.1, -8\,^\circ\mathrm{C}\right)$,
- Vrh numeričkog modela na $H = 2000\,\mathrm{m}$,
- Karakteristični period $T = 2\pi/[N\sin(\alpha)] \approx 2.1\,\mathrm{h}$.

No, ovdje je upotrijebljen mnogo veći vremenski korak, što je moguće zbog implicitne vremenske diskretizacije. Model je testiran za $\Delta t_1 = 1\,\mathrm{s}$ i $\Delta t_2 = 5\,\mathrm{s}$ (AB3–CD2 metoda je računata s $\Delta t = 9\times10^{-3}\,\mathrm{s}$ zbog numeričke stabilnosti). Također, za derivaciju $K(z)$ uzet je analitički oblik, iako se pokazalo da niti aproksimacija konačnim razlikama kao u AB3–CD2 metodi ne daje drukčije rezultate.

Kolokacija napetim splajnovima reproducira diferencijalni operator, pa je ideja da se ne mora uzeti puno točaka za dobru rezoluciju rješenja. Stoga je model testiran s $N_1 = 500$, $N_2 = 1000$ i $N_3 = 2000$ čvorova. Ovo na ekvidistantnoj mreži, koja se tijekom testiranja pokazala boljom, daje vertikalne rezolucije od $\Delta z_1 = 4\,\mathrm{m}$, $\Delta z_2 = 2\,\mathrm{m}$ i $\Delta z_3 = 1\,\mathrm{m}$ (kod AB3–CD2 sheme bilo je $N = 4000$ točaka, tj. $\Delta z = 0.5\,\mathrm{m}$). Kako se sustav rješava na reskaliranoj mreži $\tilde{z}_j \in [0,1]$, efektivne rezolucije modela su $\Delta\tilde{z}_1 = 2 \times 10^{-3}$, $\Delta\tilde{z}_2 = 1 \times 10^{-3}$ i $\Delta\tilde{z}_3 = 5 \times 10^{-4}$.

Parametar napetosti, $p_j \in [\tilde{z}_j, \tilde{z}_{j+1}] \subset [0,1]$, računat je po izrazu (3.19), s različitim odabirima koeficijenata $\bar{a}_j$ i $\bar{b}_j$ analogno diskusiji u potp. 3.2.3. Kako se metoda pokazala dosta robusna s obzirom na različite odabire, najpraktičniji za fizikalnu primjenu se pokazao odabir $\bar{a}_j$ i $\bar{b}_j$ kao

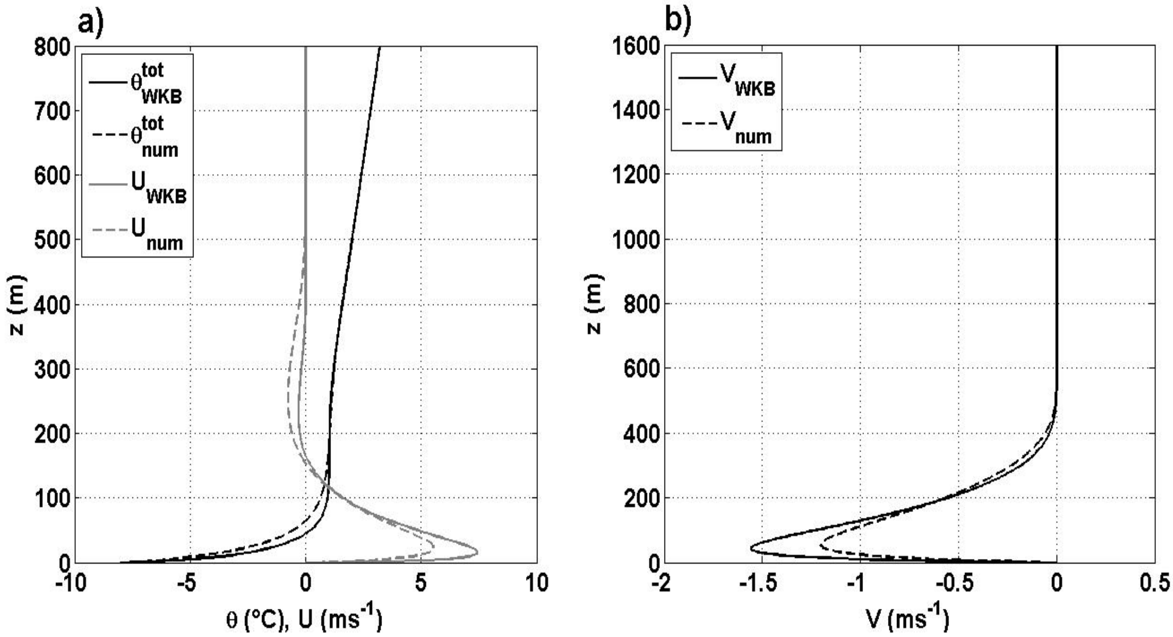
$$\bar{a}_j = \frac{\operatorname{sign}(a_j)\, a_j + \operatorname{sign}(a_{j+1})\, a_{j+1}}{2},$$
$$\bar{b}_j = \frac{b_j + b_{j+1}}{2},$$

Prikazana je usporedba analitičkih WKB rješenja i numeričkih rješenja dobivenih primjenom TC2–splajnova, koji su se pokazali mnogo boljima od TC1–splajnova. Moguće je da točke kolokacije TC1–splajnova (potp. 3.2.3.), testiranih u poglavlju 4. na jednostavnim 1D rubnim problemima gdje koeficijenti nisu toliko promjenjljivi, nisu optimalne i za realističnije fizikalne slučajeve.

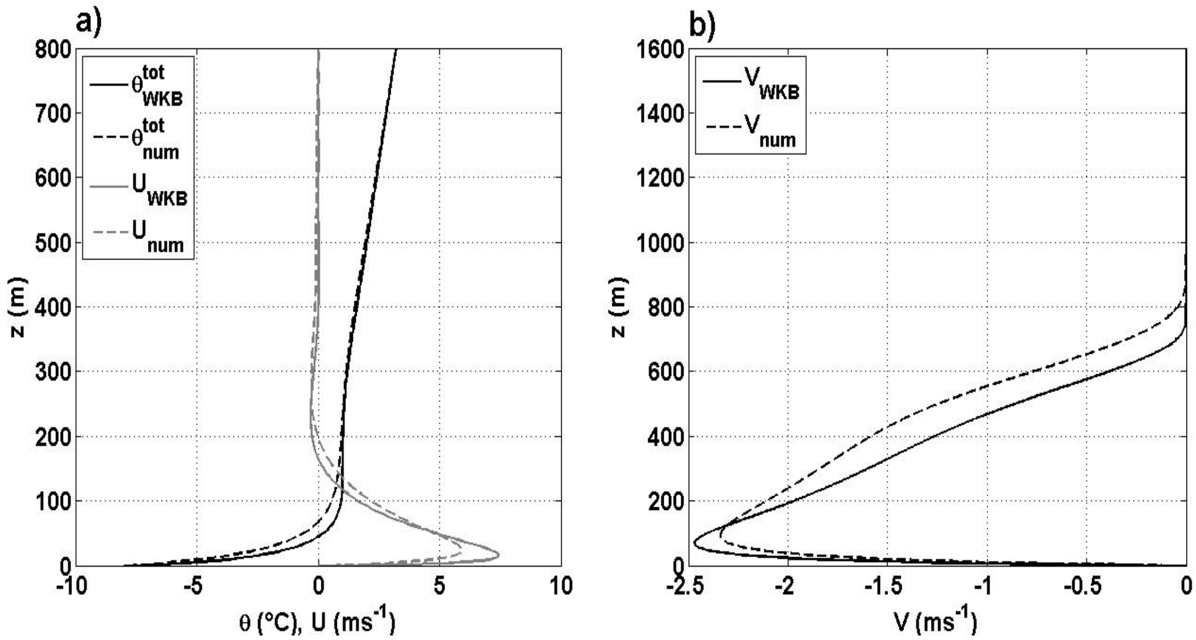
Slike 5.15 i 5.16 prikazuju vremenski razvoj numeričkih (crtkane linije) i analitičkih rješenja (pune linije) za θ, U i V u $t = T$ (Sl. 5.15) i $t = 10T$ (Sl. 5.16) za $N = 1000$ čvorova i $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$. Numerička rješenja dobivena primjenom TC2–splajnova potcjenjuju maksimume u profilima WKB rješenja (5.79), (5.80) i (5.81), no dobro reproduciraju visine niskih mlaznih struja u U i V komponenti (usporedi sa slikama 5.4, U komponenta, i 5.6a i 5.6b, V komponenta). U komponenta (puna siva linija, Sl. 5.15a i 5.16a) je jače potcijenjena od V (puna crna linija, Sl. 5.15b i 5.16b). Za razliku od profila dobivenih AB3–CD2 metodom (Sl. 5.4b), profil U komponente ostaje potcijenjen i u $t = 10T$, kada je već odavno postignuto stacionarno stanje opisano WKB rješenjem (5.79).

Povećavanjem broja čvorova na $N = 2000$ (Sl. 5.17) dobiva se bolje slaganje za povratno strujanje u U komponenti (između $\approx 180\,\mathrm{m} - 320\,\mathrm{m}$; Sl. 5.17a, sive linije) te propagaciju uvis V komponente (Sl. 5.17b, crne linije), no potcjenjivanje maksimuma je pojačano. Slična je i situacija za veći vremenski korak, $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$, na Sl. 5.18. Implicitne metode općenito imaju veću numeričku difuziju (npr. LeVeque (1992), Morton (1996), Durran (1999)) pa se time može djelomično objasniti potcjenjivanje profila za veći Δt. U svim prikazanim slučajevima najbolje je, kao i kod AB3–CD2 metode (Sl. 5.4), procijenjena θ (Sl. 5.15a–5.18a) s laganim potcjenjivanjem vrijednosti u odnosu na WKB rješenje.

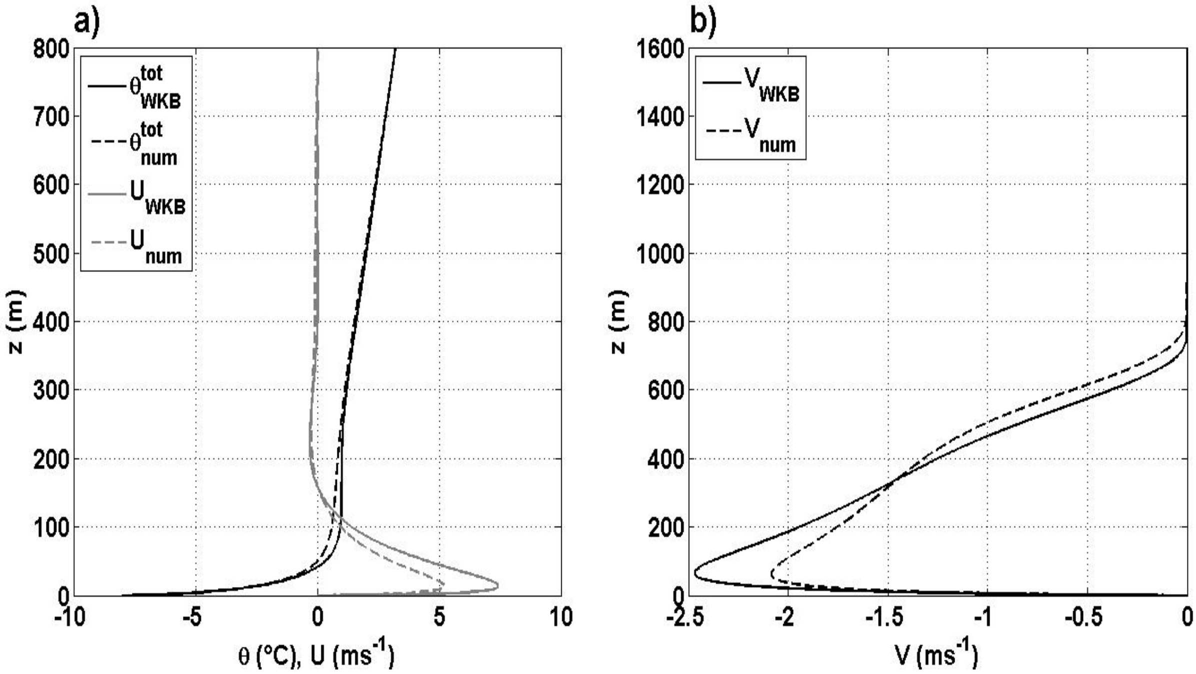
TC2–splajnovi daju lošije procjene rješenja od AB3–CD2 metode. Ipak, kada se uzmu u obzir manji broj točaka (1000 u odnosu na 4000) i mnogo veći vremenski korak nego za AB3–CD2 metodu (maksimalni $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$ u odnosu na $\Delta t = 9 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$), kao i robusnost za velike raspone u koeficijentima u odnosu na jednostavne 1D primjere u poglavlju 4., TC2–splajnovi u kombinaciji s implicitnom Eulerovom vremenskom diskretizacijom daju obećavajuće rezultate. Razvoj metode može ići prema primjeni vremenske integracije višeg reda točnosti (npr. neka od implicitnih Runge–Kutta metoda), kao i daljnjem povezivanju parametra napetosti p s fizikalnim veličinama.



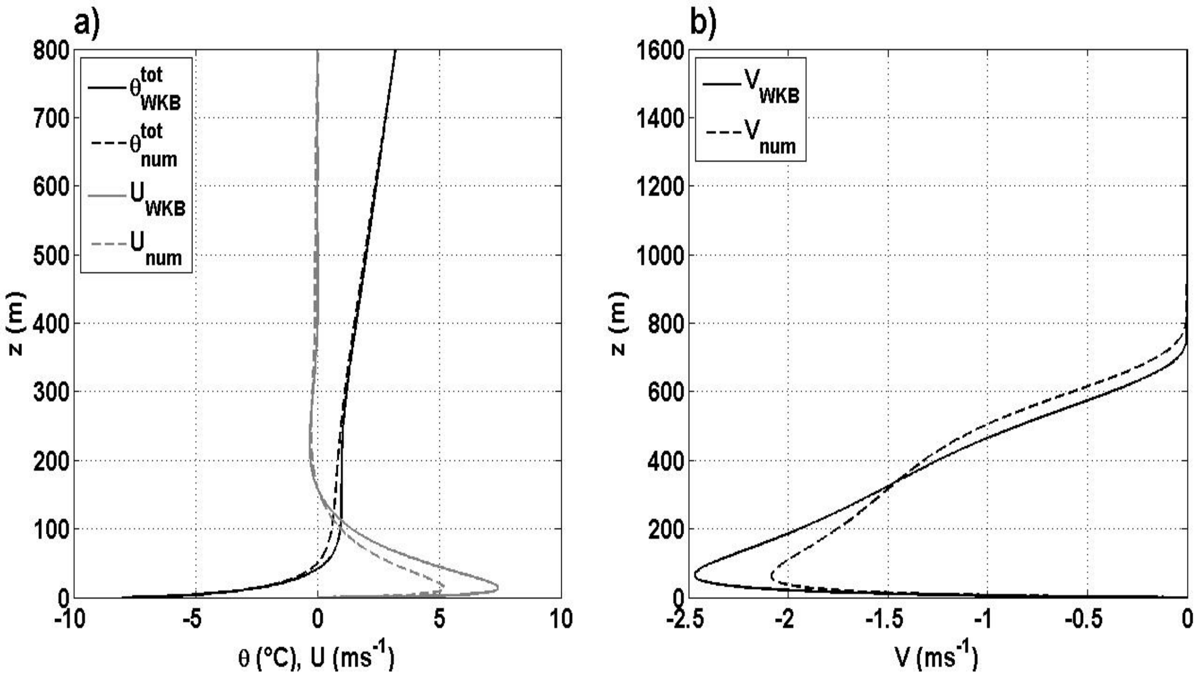
Slika 5.15: Numerička (crtkana linija) i analitička WKB rješenja rotirajućeg Prandtlovog modela (puna linija) za TC2–splajnove u $t = T$: (a) θ_{num}^{tot}, U_{num}, θ_{WKB}^{tot} (5.79) i U_{WKB} (5.80) i (b) V_{num} i V_{WKB} (5.81). $N = 1000$, $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$, $T = 2\pi/[N \sin(\alpha)] \approx 2.1\,h$. $K(z)$ profil je iz (5.75), s $K_{max} = 3\,m^2 s^{-1}$ u $h = 200\,m$. Ostali parametri su $(f, \alpha, \gamma, Pr, C) = \left(1.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}, -4\,°, 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{Km}^{-1}, 1.1, -8\,°\mathrm{C}\right)$, a vrh numeričkog modela je na $H = 2000\,m$.



Slika 5.16: Numerička (crtkana linija) i analitička WKB rješenja rotirajućeg Prandtlovog modela (puna linija) za TC2–splajnove u $t = 10T$: (a) θ_{num}^{tot}, U_{num}, θ_{WKB}^{tot} (5.79) i U_{WKB} (5.80) i (b) V_{num} i V_{WKB} (5.81). Ostalo je kao na Sl 5.15.



Slika 5.17: Numerička (crtkana linija) i analitička WKB rješenja rotirajućeg Prandtlovog modela (puna linija) za TC2–splajnove u $t = 10T$: (a) θ^{tot}_{num}, U_{num}, θ^{tot}_{WKB} (5.79) i U_{WKB} (5.80) i (b) V_{num} i V_{WKB} (5.81). $N = 2000$, $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$, a ostali parametri su kao na Sl 5.15.



Slika 5.18: Numerička (crtkana linija) i analitička WKB rješenja rotirajućeg Prandtlovog modela (puna linija) za TC2–splajnove u $t = 10T$: (a) θ^{tot}_{num}, U_{num}, θ^{tot}_{WKB} (5.79) i U_{WKB} (5.80) i (b) V_{num} i V_{WKB} (5.81). $N = 1000$, $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$, a ostali parametri su kao na Sl 5.15.

6. Zaključci

Modeliranje atmosferskih graničnih slojeva složen je problem čija se saznanja svakodnevno koriste u raznim primjenama (numerički modeli za prognozu vremena i promjene klime, modeliranje kvalitete zraka, energetika, itd.). Ovdje se nastojalo pobliže objasniti svojstva nagnutog, stabilno stratificiranog atmosferskog graničnog sloja kroz rješenja pojednostavljenih analitičkih modela i povezivanje fizikalnih veličina i parametara numeričkih metoda. Glavne karakteristike ovakvog graničnog sloja atmosfere često su predstavljane linearnim analitičkim modelom katabatičkog strujanja. Ukoliko se koristi varijabilan koeficijent turbulentne difuzije sa skoro iščezavajućim vrijednostima u profilu, navedeni analitički model predstavlja singularno perturbirani problem. U disertaciji su predstavljene analitičke i numeričke metode za rješavanje ovakvog tipa problema, te je pokazana i usporedba analitičkih rješenja s mezoskalnim numeričkim modelom i motrenjima.

Numeričke metode posebno razvijene za singularno perturbirane probleme, poput El–Mistikawy i Werle (EMW) metode i Ramoseve modifikacije EMW metode (RAM) te kolokacije napetim splajnovima, mnogo bolje reproduciraju granične slojeve od široko upotrebljavane metode konačnih razlika (FDM). Ovo je naročito vidljivo za male vrijednosti ε (poglavlje 4.). Nadalje, numeričkim testiranjem pokazano je da ponašanje promatranih metoda ne ovisi samo o tipu problema nego i o varijabilnosti koeficijenata $a(x)$ i $b(x)$. Za advekcijsko–difuzijske probleme najboljima su se pokazali AD–splajnovi (posebice ADC1) i EMW metoda. Advekcijsko–difuzijski problem je, s jednim graničnim slojem na početku ili kraju intervala, nesimetričan. Ova nesimetrija izražena je i u konstrukciji AD–splajnova projekcijom na potprostor lokalno razapet s $\{1, x, x^2, \exp(px)\}$. U difuzijsko–reakcijskim te advekcijsko–difuzijsko–reakcijskim problemima s dva granična sloja bolja je projekcija na $\{1, x, \exp(\pm px)\}$, kao kod klasičnih TC–splajnova. RAM metoda se ovdje također pokazala mnogo boljom, isto zbog simetrije u funkcijama baze. Općeniti advekcijsko–difuzijsko–reakcijski (ADR) problem je ipak jako ovisan o koeficijentima jednadžbe i pokazuje različita ponašanja za razne tipove problema. Ipak, kao najprimjenjiviji pokazali su se TC–splajnovi.
Pokazalo se i da C^2 varijante splajnova (TC2 i ADC2–splajnovi) vrlo dobro reproduciraju unutarnji granični sloj koji se pojavljuje kada $a(x)$ mijenja predznak (primjer 7 u potp. 4.2.). Ovo je ponašanje naročito izraženo za kombinaciju malog broja čvorova i vrlo malih vrijednosti ε. AD–splajnovi su, zbog mogućnosti mijenjanja predznaka u definiciji p (3.21), općenito vrlo pogodni za advekcijsko–difuzijske probleme.

U drugom dijelu rada se diskutiraju analitičke i numeričke metode rješavanja linearnog modela katabatičkog strujanja za konstantan (potp. 5.1.) i varijabilan profil turbulentne difuzivnosti K (potp. 5.2.). U potp. 5.1. za $K = K_c$ pokazano je da uobičajeno

korišteno svođenje sustava jednadžbi na jednadžbu višeg reda može dovesti do zanemarivanja strukturnih članova rješenja ukoliko se analiza sustava ne provodi pažljivo. Svođenjem na sustav jednadžbi prvog reda i promatranjem strukture matrice linearnog operatora (vlastite vrijednosti i vektori te Jordanova forma) dobiva se opće rješenje analitičkog modela, iz kojega se može vidjeti koje rubne uvjete model može zadovoljiti. Matrična analiza rotirajućeg 1D Prandtlovog (Stiperski i sur., 2007) i složenijeg 2D modela (Shapiro i Fedorovich, 2008) pokazala je da stacionaran sustav jednadžbi u sebi sadrži linearan rast visinom. Za rotirajući 1D Prandtlov model su u potp. 5.1.3. iz generaliziranog rješenja nađeni uvjeti za uklanjanje ovog rasta, tj. $(dV/dz)_{z=0} = f\mathrm{ctg}\left(\alpha\right) / \left(\mathrm{Pr}\gamma\right) \left(\mathrm{d}\theta/\mathrm{dz}\right)_{z=0}$. Ti su uvjeti, zajedno s rješenjima jednostavnog vremenski ovisnog numeričkog modela opravdali aproksimaciju o stacionarnosti θ i U nakon tipičnog perioda za jednostavno katabatičko strujanje ($T \approx 2\pi / \left[N \sin\left(\alpha\right)\right]$). V komponenta je vremenski ovisna i propagira uvis, kao što je pokazano i u prethodnim radovima (npr. pregled u Shapiro i Fedorovich (2008); Axelsen i Van Dop (2009a,b)).
Realnija slika strujanja se ipak postiže uvrštavanjem varirajuće turbulentne difuzivnosti $K\left(z\right)$ (potp. 5.2.). Analitička i numerička rješenja za $\left(\theta, U, V\right)$ ovisna o $\left(z, t\right)$ strukturno su slična konstantnom–K slučaju. I U i θ postižu stacionarno stanje nakon $t \approx T$. V i dalje difundira uvis u vremenu bez dobro definirane vremenske skale, no ta je propagacija uvis slabija i ograničena vertikalno smanjujućim vrijednostima $K\left(z\right)$. WKB metoda nultog reda se može uspješno primijeniti za nalaženje aproksimativnih analitičkih rješenja svih komponenti u modelu. Predložena analitička rješenja za $\left(\theta, U, V\right)$ se mogu koristiti za proučavanje katabatičkih strujanja nad dugim nagibima. Ovo je pokazano i usporedbom analitičkih WKB rješenja i mezoskalnog MIUU modela u potp. 5.2.3.
Napeti splajnovi (naročito TC2–splajnovi, potp. 5.2.5.) su se pokazali kao obećavajuća metoda za numeričko modeliranje ABL–a s iščezavajućim vrijednostima $K\left(z\right)$, zbog robusnosti metode na velike promjene redova veličina u koeficijentima te broj čvorova i vremenski korak. Daljnje istraživanje može ići npr. u smjeru podrobnije analize parametara ostalih ovdje prikazanih numeričkih metoda za singularno perturbirane probleme pomoću fizikalne interpretacije koeficijenata u jednadžbama.

Zajedno s uvođenjem profila varijabilne turbulentne difuzivnosti, predložena rješenja daju realističniji opis parametrizacija površinskih tokova za nagnute granične slojeve u klimatskim modelima i analizi podataka. Skaliranje vezano uz visinu niske mlazne struje i rješenja rotirajućeg Prandtlovog modela s varijabilnim $K\left(z\right)$ može biti alternativa uobičajeno upotrebljavanoj duljini miješanja kod stabilnih graničnih slojeva. Ovo je postignuto novom parametrizacijom $L_{STAB}\left(z, t\right)$ u MIUU modelu, za koju su kasnije Grisogono i Belušić (2008) i Grisogono (2010) pokazali da daje mnogo bolje procjene turbulentnog miješanja u stabilnim graničnim slojevima. Također, rezultati ovog rada su izravno utjecali i na bolju parametrizaciju vertikalne difuzije u atmosferskom modelu za praćenje disperzije polutanata EMEP4HR (Jeričević i sur., 2010).

Literatura

Anderson, P. S., Ladkin, R. S., Renfrew, I. A., 2005. An autonomous Doppler sodar wind profiling system. *J. Atmos. Ocean. Tech.* 22, 1309–1325.

Andrén, A., 1990. Evaluation of a turbulence closure scheme suitable for air–pollution applications. *J. Appl. Meteorol.* 29, 224–239.

Axelsen, S. L., Van Dop, H., 2009a. Large–eddy simulation of katabatic winds. Part 1: Comparison with observations. *Acta Geoph.* 57(4), 803–836.

Axelsen, S. L., Van Dop, H., 2009b. Large–eddy simulation of katabatic winds. Part 2: Sensitivity study and comparison with analytical models. *Acta Geoph.* 57(4), 837–856.

Baklanov, A., Grisogono, B. (Eds.), 2007. *Atmospheric Boundary Layers: Nature, Theory and Applications to Environmental Modelling and Security*. Springer, New York, 241 pp.

Bender, C. M., Orszag, S. A., 1978. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. Mc Graw–Hill, Inc., SAD, 593 pp.

Bosner, T., 2006. *Knot Insertion Algorithms for Chebyshev Splines*. Disertacija, Matematički odjel, Prirodoslovno - matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu.

Bosner, T., 2010. Basis of splines associated with singularly perturbed advection–diffusion problems. *Math. Commun.* 15, 1–12.

Bosner, T., Rogina, M., 2007. Non–uniform exponential tension splines. *Numer. Alg.* 46(3), 265–294.

Cullen, M., 2007. Modelling atmospheric flows. *Acta Numerica* 16, 67–154.

Defant, F., 1949. Zur theorie der Hangwinde, nebst bemerkungen zur Theorie der Bergund Talwinde. *Arch. Meteor. Geophys. Biokl.* A1, 421–450.

Denby, B., 1999. Second–order modelling of turbulence in katabatic flows. *Bound.–Layer Meteorol.* 92, 65–98.

de Boor, C., Swartz, B., 1973. Collocation at Gaussian points. *SIAM J. Numer. Anal.* 10(4), 582–606.

Durran, D. R., 1999. *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*. Springer–Verlag, New York, 465 pp.

Egger, J., 1990. Thermally forced flows: Theory. In: Blumen, W. (Ed.), *Atmospheric Processes over Complex Terrain*, No. 45 in Meteorol. Monogr., Amer. Meteorol. Soc., pp. 43–57.

Enger, L., 1990. Simulation of dispersion in moderately complex terrain. Part A. The fluid dynamic model. *Atmos. Environ.* 24, 2431–Ű2446.

Enger, L., Grisogono, B., 1998. The response of bora–type flow to sea surface temperature. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 124, 1227–1244.

Farrell, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O'Riordan, E., Shiskin, G. I., 2000. *Robust Computational Techniques for Boundary Layers*. Chapman & Hall/CRC, Florida, USA, 275 pp.

Fedorovich, E., Nieuwstadt, F. T. M., Kaiser, R., 2001. Numerical and laboratory study of a horizontally evolving convective boundary layer. Part I: Transition regimes and development of the mixed layer. *J. Atmos. Sci.* 58, 70–86.

Garratt, J. R., 1994. *The Atmospheric Boundary Layer*. Cambridge University Press, UK, 335 pp.

Gordon, A. L., Comiso, J. C., 1988. Polynyas in the Southern Ocean. *Sci. Amer.* 258(6), 90–97.

Grandison, C., 1997. Behaviour of exponential splines as tensions increase without bound. *J. Approx. Theory* 89(3), 289–307.

Grisogono, B., 1994. Dissipation of wave drag in the atmospheric boundary layer. *J. Atmos. Sci.* 51, 1237–1243.

Grisogono, B., 1995. A generalized Ekman layer profile within gradually varying eddy diffusivities. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 121, 445–453.

Grisogono, B., 2003. Post–onset behaviour of the pure katabatic flow. *Bound.–Layer Meteorol.* 107, 157–175.

Grisogono, B., 2010. Generalizing "z–less" mixing length for stable boundary layers. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 136, 213–221.

Grisogono, B., Oerlemans, J., 2001a. Katabatic flow: Analytic solution for gradually varying eddy diffusivities. *J. Atmos. Sci.* 58, 3349–3354.

Grisogono, B., Oerlemans, J., 2001b. A theory for the estimation of surface fluxes in simple katabatic flows. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 127, 2725–2739.

Grisogono, B., Oerlemans, J., 2002. Justifying the WKB approximation in pure katabatic flows. *Tellus* 54A, 453–462.

Grisogono, B., Enger, L., 2004. Boundary–layer variations due to orographic–wave breaking in the presence of rotation. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 130, 2991–3014.

Grisogono, B., Belušić, D., 2008. Improving mixing length–scale for stable boundary layers. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 134, 2185–2192.

Grisogono, B., Zovko Rajak, D., 2009. Assessment of Monin–Obukhov scaling over small slopes. *Geofizika* 26, 101–108.

Holmes, M. H., 1996. *Introduction to Perturbation Methods.* Springer–Verlag, New York, 337 pp.

Horn, R. A., Johnson, C. R., 1991. *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 607 pp.

Jeričević, A., Večenaj, Ž., 2009. Improvement of vertical diffusion analytic schemes under stable atmospheric conditions. *Bound.–Layer Meteorol.* 131, 293–307.

Jeričević, A., Kraljević, L., Grisogono, B., Fagerli, H., Ž. Večenaj, 2010. Parameterization of vertical diffusion and the atmospheric boundary layer height determination in the EMEP model. *Atmos. Chem. Phys.* 10, 341–364.

Kadalbajoo, M. K., Patidar, K. C., 2002. Numerical solution of singularly perturbed two–point boundary value problems by spline in tension. *Appl. Math. Comput.* 131, 299–320.

Kavčič, I., Grisogono, B., 2007. Katabatic flow with Coriolis effect and gradually varying eddy diffusivity. *Bound.–Layer Meteorol.* 125, 377–387.

Kavčič, I., Grisogono, B., Stiperski, I., Durran, D. R., 2007a. Comparison of the rotating Prandtl model with $K(z)$ and a mesoscale numerical model. In: *29th International Conference on Alpine Meteorology - Extended Abstracts*, Météo–France, pp. 293–296.

Kavčič, I., Grisogono, B., Renfrew, I. A., Anderson, P. S., Večenaj, Ž., Stiperski, I., 2007b. Comparison of the Prandtl model with $K(z)$ and non–zero f with Doppler sodar observations. In: *29th International Conference on Alpine Meteorology - Extended Abstracts*, Météo–France, pp. 597–600.

Kavčič, I., Rogina, M., Bosner, T., 2010. Singularly perturbed advection–diffusion-reaction–problems: Comparison of operator–fitted methods. *Math. Comp. Sim.* Poslano.

Kim, J., Mahrt, L., 1992. Simple formulation of turbulent mixing in the stable free atmosphere and nocturnal boundary layer. *Tellus* 44A, 381–394.

King, J. C., Conneley, W. M., Derbyshire, S. H., 2001. Sensitivity of modelled Antarctic climate to surface and boundary–layer flux parameterizations. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 127, 779–794.

Klein, T., Heinemann, G., Bromwich, D. H., Cassano, J. J., Hines, K. M., 2001. Mesoscale modeling of katabatic kinds over Greenland and comparisons with AWS and aircraft data. *Meteorol. Atmos. Phys.* 78, 115–132.

Kundu, P. K., Cohen, I. M., 2002. *Fluid Mechanics.* 2nd Edition, Academic Press, San Diego, Calif., London, 730 pp.

Küther, M., 1997. Exponentially fitted hierarchical bases multigrid for the convection–diffusion equation. *Preprint series*, Faculty of Mathematics and Physics, University of Freiburg.

LeVeque, R. J., 1992. *Numerical Methods for Conservation Laws.* Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 232 pp.

Mahrt, L., 1981. Modelling the depth of the stable boundary layer. *Bound.–Layer Meteorol.* 21, 3–19.

Mahrt, L., 1982. Momentum balance of gravity flows. *J. Atmos. Sci.* 39, 2701–2711.

Mahrt, L., 1998. Stratified atmospheric boundary layers and breakdown of models. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 11, 263–279.

Marušić, M., 2001. A fourth/second order accurate collocation method for singularly perturbed two-point boundary value problems using tension splines. *Numer. Math.* 88, 135–158.

Marušić, M., Rogina, M., 1996a. A collocation method for singularly perturbed two–point boundary value problems with splines in tension. *Adv. Comput. Math.* 6(1), 65–76.

Mauritsen, T., Svensson, G., Zilitinkevich, S., Esau, I., Enger, L., Grisogono, B., 2007. A total turbulent energy closure model for neutral and stably stratified atmospheric boundary layers. *J. Atmos. Sci.* 64, 4117–4126.

Mellor, G. L., Yamada, T., 1974. A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. *J. Atmos. Sci.* 31, 1791–1806.

Moler, C., Van Loan, C. F., 2003. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty–five years later. *SIAM Rev.* 45(1), 3–49.

Morton, K. W., 1996. *Numerical Solution of Convection–Diffusion Problems*, *Applied Mathematics and Mathematical Computation*, Vol. 12. Chapman & Hall/CRC, London, 384 pp.

Munro, D. S., 1989. Surface roughness and bulk heat transfer on a glacier: Comparison with eddy correlation. *J. Glaciol.* 35, 343–348.

Munro, D. S., 2004. Revisiting bulk heat transfer on the Peyto Glacier in light of the OG parameterization. *J. Glaciol.* 50, 590–600.

Naughton, A., Stynes, M., 2009. Singularly perturbed convection–diffusion problems in one dimension: Bounds on derivatives. *Comput. Methods Appl. Math.* 9, 281–291.

O'Brien, J. J., 1970. A note on the vertical structure of the eddy exchange coefficient in the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.* 27, 1213–1215.

Oerlemans, J., 1998. The atmospheric boundary layer over melting glaciers. In: Holtslag, A. A. M., Duynkerke, P. G. (Eds.), *Clear and Cloudy Boundary Layers*, Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, Place, VNE 48, pp. 129–153.

Parish, T. R., Bromwich, D. H., 1991. Continental–scale simulation of the Antarctic katabatic wind regime. *J. Clim.* 4, 135–146.

Parmhed, O., Oerlemans, J., Grisogono, B., 2004. Describing the surface fluxes in the katabatic flow on Breidamerkurjokull, Iceland. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 130, 1137–1151.

Parmhed, O., Kos, I., Grisogono, B., 2005. An improved Ekman layer approximation for smooth eddy diffusivity profiles. *Bound.–Layer Meteorol.* 115, 399–407.

Pedlosky, J., 1987. *Geophysical Fluid Dynamics.* 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 710 pp.

Prandtl, L., 1942. *Führer durch die Strömungslehre.* Vieweg und Sohn: Braunschweig, 648 pp.

Ramos, J. I., 2005. Exponentially–fitted methods on layer–adapted meshes. *Appl. Math. Comput.* 167, 1311–1330.

Renfrew, I. A., 2004. The dynamics of idealized katabatic flow over a moderate slope and ice shelf. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 130, 1023–1045.

Renfrew, I. A., Anderson, P. S., 2002. The surface climatology of an ordinary katabatic wind regime in Coats Land, Antarctica. *Tellus* 54A, 463–484.

Renfrew, I. A., Anderson, P. S., 2006. Profiles of katabatic flow in summer and winter over Coats Land, Antarctica. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 132, 779–882.

Rogina, M., 1994. *Nove rekurentne relacije za Čebiševljeve spline funkcije i njihove primjene.* Disertacija, Matematički odjel, Prirodoslovno - matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu.

Rogina, M., 2005. Algebraic proof of the B–spline derivative formula. In: Drmač, Z., Marušić, M., Tutek, Z. (Eds.), *Proceedings of the Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing*, Springer, pp. 273–282.

Rogina, M., Bosner, T., 2000. On calculating with lower order Chebyshev splines. In: Laurent, P. J., Sabloniere, P., Schumaker, L. L. (Eds.), *Curves and Surfaces Design*, Vanderbilt Univ. Press, Nashville, pp. 343–353.

Rogina, M., Bosner, T., 2003. A de Boor type algorithm for tension splines. In: Cohen, A., Merrien, J.-L., Schumaker, L. L. (Eds.), *Curve and Surface Fitting*, Nashboro Press, Brentwood, pp. 343–352.

Roos, H.-G., Stynes, M., Tobiska, L., 2008. *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*, *Springer Series in Computational Mathematics*, Vol. 24. Springer–Verlag, Berlin, 604 pp.

Schumaker, L. L., 1981. *Spline functions: Basic theory.* John Wiley & Sons, New York, 553 pp.

Shapiro, A., Fedorovich, E., 2007. Katabatic flow along a differentially cooled sloping surface. *J. Fluid Mech.* 571, 149–175.

Shapiro, A., Fedorovich, E., 2008. Coriolis effects in homogeneous and inhomogeneous katabatic flows. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 134, 353–370.

Söderberg, S., Parmhed, O., 2006. Numerical modelling of katabatic flow over a melting outflow glacier. *Bound.–Layer Meteorol.* 120, 509–534.

Spiegel, E. A., Veronis, G., 1960. On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astr. J.* 131, 442–447.

Stiperski, I., Kavčič, I., Grisogono, B., 2005. Katabatic flow with Coriolis effect. *Cro. Meteorol. J.* 40, 470–473.

Stiperski, I., Kavčič, I., Grisogono, B., Durran, D. R., 2007. Including Coriolis effects in the Prandtl model for katabatic flow. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 133, 101–106.

Stull, R. B., 1988. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology.* Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 666 pp.

Stynes, M., 2005. Steady–state convection–diffusion problems. *Acta Numerica* 14, 445–508.

Surla, K., Uzelac, Z., 1990. Some uniformly convergent spline difference schemes for singularly perturbed value problems. *IMA J. Numer. Anal.* 10, 209–222.

Tjernström, M., Grisogono, B., 2000. Simulations of super–critical flow around points and capes in a coastal atmosphere. *J. Atmos. Sci.* 57, 108–135.

van den Broeke, M. R., van Lipzig, N. P. M., van Meijgaard, E., 2002. Momentum budget of the east–Antarctic atmospheric boundary layer: Results of a regional climate model. *J. Atmos. Sci.* 59, 3117–3129.

van den Broeke, M. R., van Lipzig, N. P. M., 2003. Factors controlling the near-surface wind field in Antarctica. *Mon. Weather Rev.* 131, 733–743.

Weng, W., Taylor, P. A., 2003. On modelling the one–dimensional atmospheric boundary layer. *Bound.–Layer Meteorol.* 107, 371–400.

Whiteman, C. D., 1990. *Atmospheric Processes Over Complex Terrain*, poglavlje Observations of Thermally Developed Wind Systems In Mountainous Terrain. Am. Meteorol. Soc., Boston MA, pp. 5–42.

Wilkinson, J. H. (Ed.), 1965. *Algebraic Eigenvalue Problem.* Clarendon Press, Oxford, 662 pp.

Winitzki, S., 2005. Cosmological particle production and the precision of the WKB approximation. *Phys. Rev. D* 72(104011), 14.

Zilitinkevich, S., Savijärvi, H., Baklanov, A., Grisogono, B., Myrberg, K., 2006. Forthcoming meetings on planetary boundary-layer theory, modelling and applications. *Bound.–Layer Meteorol.* 119, 591–593.

Zilitinkevich, S., Esau, I., 2007. Similarity theory and calculation of turbulent fluxes at the surface for the stably stratified atmospheric boundary layer. *Bound.–Layer Meteorol.* 125, 193–205.

Zilitinkevich, S., Elperin, T., Kleeorin, N., Rogachevskii, I., Esau, I., Mauritsen, T., Miles, M. W., 2008. Turbulence energetics in stably stratified geophysical flows: Strong and weak mixing regimes. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 134, 793–799.

Popis slika

Popis tablica

Sažetak

U ovoj se disertaciji razmatra modeliranje atmosferskog graničnog sloja (ABL) u svjetlu teorije singularnih perturbacija. Posebna pozornost posvećena je nagnutom, stabilno stratificiranom, rotirajućem ABL–u predstavljenom kroz model katabatičkog strujanja. Kroz definicije graničnih slojeva u matematici i dinamici fluida te provedenu analizu rotirajućeg Prandtlovog modela pokazano je da katabatičko strujanje s varijabilnim koeficijentom turbulentne difuzije predstavlja singularno perturbirani problem. Disertacija je stoga organizirana u dva glavna dijela, gdje su u prvom dijelu predstavljeni rezultati numeričkih testova 1D singularno perturbiranog rubnog problema. U drugom dijelu dana je primjena teorije singularnih perturbacija u analitičkom i numeričkom modeliranju katabatičkog strujanja.

Prvi dio daje usporedbu klasičnih metoda za rješavanje singularno perturbiranih problema, poput El–Mistikawy i Werle metode i njezine modifikacije (EMW i RAM), s kolokacijom napetim splajnovima (TC i AD–splajnovi). Kao što se može vidjeti iz prikazanih primjera, AD–splajnovi su superiorni klasičnim TC–splajnovima i EMW metodi za advekcijsko–difuzijske probleme s konstantnim koeficijentima. U slučaju reakcijsko–difuzijskih i advekcijsko–difuzijsko–reakcijskih problema s dva granična sloja, AD–splajnovi ne reproduciraju dobro lijevi rubni uvjet, što je i očekivano. RAM metoda i TC–splajnovi su ovdje mnogo bolji. Ovisno o prisutnosti advekcijskog ili reakcijskog člana, čini se da nema jedinstvenog odgovora na pitanje o najboljoj metodi za sve slučajeve.

Bolje razumijevanje katabatičkog strujanja nužno je za bolji opis i parametrizaciju međudjelovanja atmosfere i dugih, nagnutih, radijacijski hlađenih površina. Rotirajući Prandtlov model zbog pretpostavke o konstantnom koeficijentu turbulentne difuzije ne opisuje dobro realnu atmosferu, iako daje analitičko sredstvo procjene navedenog međudjelovanja. U disertaciji je provedena analiza katabatičkog strujanja s konstantnim i varijabilnim zadanim koeficijentom turbulentne difuzije, radi realističnijeg opisa dugoživućeg jako stabilnog ABL. Predstavljena su analitička i numerička rješenja za (θ, U, V) ovisna o (z, t) za rotirajuće katabatičko strujanje. Ovaj rad pokazuje da se WKB metoda nultog reda može uspješno primijeniti za nalaženje aproksimativnih analitičkih rješenja svih komponenti u modelu. Predložena analitička rješenja za (θ, U, V) se mogu koristiti za proučavanje katabatičkih strujanja nad dugim padinama. Daljnjom usporedbom s mezoskalnim numeričkim modelom i motrenjima pokazano je da predložena rješenja, s profilom varijabilne turbulentne difuzivnosti, daju realističniji opis parametrizacija površinskih tokova za nagnuti granični sloj u numeričkim prognostičkim i klimatskim modelima, kao i analizi podataka.

Summary

This thesis is concerned with the modelling of atmospheric boundary layer (ABL) in the light of singular perturbation theory. Particular consideration is given to the sloped, stably stratified, rotating ABL and the related model of katabatic wind. Through the definitions of boundary layers in mathematics and fluid dynamics it is shown that katabatic wind with the variable eddy diffusivity represents a singularly perturbed problem. The thesis is, hence, consisted of two main parts: the first part presents results of numerical tests of 1D singularly perturbed boundary value problem; in the second the application of singular perturbation theory to analytical and numerical modelling of katabatic wind is given.

In the first part a comparison between classical methods for singular perturbation problems, such as El–Mistikawy and Werle scheme and its modification (EMW and RAM), to exponential tension spline collocation schemes (TC and AD–splines, respectively) is shown. As can be seen from the examples discussed, AD–splines are superior for the pure advection–diffusion problem with constant coefficients to classical TC–splines and EMW method. In case of pure reaction–diffusion problems and advection–diffusion–reaction problems with two boundary layers, AD–splines fail to reproduce properly the left boundary condition, what is expected. RAM method and TC–spline are considerably better here. Depending on the presence of advection or reaction term, there seems to be no unique answer as to the "best" possible method in all cases.

A better understanding of katabatic flows is necessary for better treatment and parameterization of the coupling between the atmosphere and cool, inclined surfaces. The rotating Prandtl model, although providing the analytical tool for description of this coupling, does not hold for the real atmosphere due to the assumption of constant eddy diffusivity. In this work the detailed analysis of katabatic flow with constant and variable eddy diffusivity is shown, in order to obtain more realistic description of the long–lived katabatic strongly stable ABL. The analytical and numerical solutions for $(\theta, U, V,)$ depending on (z, t) in the rotating katabatic flow are presented. This study shows that the WKB method of zero–order may be successfully applied to find the approximate analytical solutions for all the model components. The proposed analytical solutions for (θ, U, V) can be used for studying katabatic flows over long slopes. As shown trough the further comparison with the mesoscale numerical model and measurements the proposed solutions, together with the varying eddy diffusivity profile, give a more realistic description of sloped surface–flux parameterizations in numerical weather prediction and climate models, as well as in data analysis.

Životopis

OSOBNI PODACI

Ustanova:	Geofizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu
Adresa:	Horvatovac 95, 10000 Zagreb, Hrvatska
Telefon:	+385 1 460 5922, +385 91 792 1321
Fax:	+385 1 468 0331
E-mail:	ivakavc@gfz.hr, ikavcic@math.hr
Datum rođenja:	03. 06. 1979.
Državljanstvo:	Hrvatsko
Materinji jezik:	Hrvatski
Prebivalište:	Maksimirska 1, 10000 Zagreb, Hrvatska

OBRAZOVANJE

Poslijediplomski studij:	Geofizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu, 30. 03. 2005. - Doktorski studij iz područja prirodnih znanosti, znanstveno polje Fizike, smjer Geofizika Prosjek ocjena poslijediplomskog studija: **4,833**
Dodiplomski studij:	Geofizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu, 09. 07. 1997. - 15. 07. 2004. Zvanje: **Diplomirani inženjer fizike – geofizika**. Prosjek ocjena dodiplomskog studija: **4,519**
Srednja škola:	Gimnazija Pula, Hrvatska, 01. 09. 1993. – 01. 07. 1997. Zvanje: **Maturant gimnazije.**

RADNO ISKUSTVO

Znanstveni novak (suradničko zvanje: asistent) na Geofizičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta, Sveučilište u Zagrebu, 01. 12. 2004. –

Znanost (MZOŠ projekti):	• Projekt **“Numeričke metode u geofizičkim modelima”**, br. 037-1193086-2771, voditelj: **prof. dr. sc. Mladen Rogina** (Matematički odjel, PMF, Sveučilište u Zagrebu), 01. 01. 2007. –
Nastava (asistent):	• Računarstvo i numerička matematika, 2009. – . • Uvod u programiranje, 13. – 17. 10. 2008. • Numeričke metode u fizici, 2007. –. • Numerička matematika, programiranje i statistika, 2005. – . • Dinamička meteorologija III, 2006. – 2007. • Sinoptička meteorologija, 2005. – 2008.

Ostala zaduženja:	• Koordinatorica za predstavljanje Geofizičkog odsjeka na godišnjoj Smotri Sveučilišta u Zagrebu, ak. god. 2004/05. – ak. god. 2008/09. (priznanje za najbolju promidžbu Geofizičkom odsjeku PMF-a na 12. Smotri Sveučilišta u Zagrebu, 10. – 12. 04. 2008. u Zagrebu) . • Satničarka Geofizičkog odsjeka, ak. god. 2006/07.

NAGRADE I PRIZNANJA

- **L'Oreal Adria - UNESCO nacionalna stipendija "Za žene u znanosti"**, Hrvatska, 2010.
- **Geophysical Fluid Dynamics Fellowship**, Woods Hole Oceanographic Institution, SAD (Woods Hole, Massachusetts), 2007.

KONFERENCIJE, LJETNE ŠKOLE, RADIONICE

Konferencije

- **Sixth Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing (ApplMath09)**, 14. - 18. 09. 2009, Zadar, Hrvatska
- **3rd International Conference on Approximation Methods and numerical Modeling in Environment and Natural Resources (MAMERN 2009)**, 08. - 11. 06. 2009, Pau, Francuska (predavanje)
- **29th International Conference on Alpine Meteorology**, 04. – 08. 06. 2007, Chambéry, Francuska (predavanje i poster)
- **6th Annual Meeting of the European Meteorological Society and the 6th European Conference on Applied Climatology**, 04. – 08. 09 2006, Ljubljana, Slovenija
- **28th International Conference on Alpine Meteorology and the Annual Scientific Meeting of the Mesoscale Alpine Programme**, 23. – 27. 05. 2005, Zadar, Hrvatska (poster)

Ljetne škole i radionice

- **Proposal writing and project implementation**, 10. 09. 2009, Zagreb, Hrvatska
- **49th Geophysical Fluid Dynamics Program (Boundary Layers)**, 18. 06. – 24. 08. 2007, Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole, SAD (predavanje)
- **ACCENT-CMAS Training Workshop on Air Quality Modelling**, 30. 07. – 08. 08. 2006, Sofia, Bugarska
- **St. Petersburg Summer School 2006 on Nonhydrostatic Dynamics and Fine Scale Data Assimilation**, 11. – 17. 06. 2006, St. Petersburg (Sanatorium Dunes, Sestroretsk), Rusija (predavanje)
- **NATO PBL Advanced Research Workshop "Atmospheric Boundary Layers: Modelling and Applications for Environmental Security"**, 18. – 22. 04. 2006, Dubrovnik, Hrvatska
- **International summer school "From Micro to Mesoscale"**, 25. – 30. 09. 2005, Castro Marina, Lecce, Italija
- **Niz radionica o korištenje grid okoline i računalnih klastera**, 2007.- 2009, Zagreb

STRANI JEZICI

- Engleski jezik (C2), talijanski jezik (B1), slovenski jezik (B1)

RAČUNALNE VJEŠTINE

- OS: MS Windows XP i pripadni alati (izvrsno); MS Windows Vista i pripadni alati (izvrsno); Linux (dobro); UNIX (dobro)
- Programski jezici: FORTRAN 77 i 90 (izvrsno poznavanje - operativno programiranje); HTML (dobro poznavanje), C/C++ (osnove)
- Programski paketi i alati: MATLAB (izvrsno); LaTeX (izvrsno); Winteracter (izvrsno), MAPLE i MATHEMATICA (dobro)

ORGANIZACIJSKE VJEŠTINE

Sudjelovanje u organizaciji međunarodne znanstvene konferencije **„Sixth Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing“ (ApplMath09)** i **NATO-ve PBL napredne istraživačke radionice „Atmospheric Boundary Layers: Modelling and Applications for Environmental Security“.**

ČLANSTVA

- Hrvatsko matematičko društvo (2009 -).
- Hrvatsko meteorološko društvo (2006 -).
- Europsko meteorološko društvo (2006 -).

Popis radova

Izvorni znanstveni i pregledni radovi u CC časopisima

- Prtenjak, M. T., Tomažić, I., Kavčič, I., Đivanović, S., 2010. Characteristics of shallow thermally driven flow in the complex topography of the south–eastern Adriatic. *Ann. Geophys.* Prihvaćeno.
- Kavčič, I., Rogina, M., Bosner, T., 2010. Singularly perturbed advection-diffusion-reaction problems: Comparison of operator-fitted methods. *Math. Comp. Sim.* Poslano.
- Thorpe, S. A., Kavčič, I., 2008. The circular internal hydraulic jump. *J. Fluid Mech.* 610, 99–129.
- Kavčič, I., Grisogono, B., 2007. Katabatic flow with Coriolis effect and gradually varying eddy diffusivity. *Bound.–Layer Meteorol.* 125(2), 377–387.
- Stiperski, I., Kavčič, I., Grisogono, B., Durran, D. R., 2007. Including Coriolis effects in the Prandtl model for katabatic flow. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 622A, 101–106.

Znanstveni radovi u drugim časopisima s međunarodnom recenzijom

- Špoler Čanić, K., Kavčič, I., Bencetić Klaić, Z., 2009. An episode of Saharan dust over Croatia. *Newsletter (European Association for the Science of Air Pollution. Online).* 69.
- Stiperski, I., Kavčič, I., Grisogono, B., Durran, D. R., 2005. *Katabatic flow with Coriolis effect.* Hrv. meteor. časopis. 40, 470–473.

Znanstveni radovi u zbornicima skupova s međunarodnom recenzijom

- Kavčič, I., Rogina, M., Bosner, T., 2009. Comparison of operator–fitted methods for singularly perturbed advection–diffusion–reaction problems. In: Barrera, D., et al. (Eds.), *Proceedings of the 3rd International Conference on Approximation Methods and numerical Modeling in Environment and Natural Resources (MAMERN 2009)*, Imprenta Comercial. Motril., Granada, pp. 521–525.
- Kavčič, I., 2008. An experimental study of the circular internal hydraulic jump. In: Cenedese, C., Whitehead, J. A., Pedlosky, J., Lentz, S. (Eds.), *Geophysical Fluid*

Dynamics Program Notes (Course Lectures and Fellows Project Reports), WHOI, Woods Hole, USA, pp. 244–263.

- Kavčič, I., Grisogono, B., Renfrew, I. A., Anderson, P. S., Večenaj, Ž., Stiperski, I., 2007. Comparison of the Prandtl model with $K(z)$ and non–zero f with Doppler sodar observations. *29th International Conference on Alpine Meteorology - Extended Abstracts.*, Météo–France, pp. 597–600.

- Kavčič, I., Grisogono, B., Stiperski, I., Durran, D. R., 2007. Comparison of the rotating Prandtl model with $K(z)$ and a mesoscale numerical model. *29th International Conference on Alpine Meteorology - Extended Abstracts.* Météo–France, pp. 293–296.

Sažeci u zbornicima skupova

- Špoler Čanić, K., Kavčič, I., Bencetić Klaić, Z., 2009. Impact of Saharan dust on precipitation chemistry in Croatia. *ITM 2009 Conference Abstracts.* San Francisco, USA.

- Grisogono, B., Kavčič, I., 2007. Some recent findings about very stable boundary layers. In: Builtjes, P., Bencetić Klaić, Z., (Eds.), *AMGI/EURASAP Workshop on the Air Quality Management, Monitoring, Modeling, and Effects: Book of Abstracts*.

- Grisogono, B., Kavčič, I., Durran, D. R., Belušić, D., Žagar, M., Enger, L., Mahrt, L., 2007. Modeling simple katabatic flows. *EMS7/ECAM8 Abstracts.*

- Stiperski, I., Kavčič, I., Durran, D. R., Grisogono, B., 2006. Unsteadiness in the Prandtl model of the katabatic flow due to Coriolis effects. *12th Conference on Mountain Meteorology*, Santa Fe, NM, USA.

Diplomski radovi

- Kavčič, I., 2004. *Verifikacija produkata atmosferskog modela ALADIN/Hrvatska.* Diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 91 pp.