KOORDINATNI SUSTAVI U GEOGRAFIJI

MILJENKO LAPAINE*, NEDJELJKO FRANČULA**

Izvadak:

Budući da je predmet proučavanja geografije prostor, autori ovoga rada smatraju da bi se pitanju koordinatnih sustava u geografiji trebalo prići na egzaktniji način od uobičajenog. Stoga razmatraju koordinate i koordinatne sustave u ravnini i prostoru, razlikujući pritom kosokutni i pravokutni te lijevi i desni Kartezijev koordinatni sustav. Osim toga, na plohi ili u prostoru često se uvode krivolinijske koordinate, a među njima su posebno važne polarne i sferne koordinate. Naravno, nezaobilazne su geografske koordinate na sferi i na rotacijskom elipsoidu.

Ključne riječi:

koordinate, koordinatni sustavi, geografija, kartografija

COORDINATE SYSTEMS IN GEOGRAPHY

Abstract:

The authors think that the approach to the coordinate systems in geography has to be more exact then it usually is, because the subject of geographical research is space. This is why the paper deals with coordinates and coordinate systems in plane and in space, taking into account the difference between oblique and rectangular, as well as left and right Cartesian coordinate systems. Besides, the curvilinear coordinates are often introduced onto a surface or into space. Among them very important are polar and spherical coordinates. Of course, the geographical coordinates on a sphere or on the rotational ellipsoid could not been overlooked.

Key Words:

coordinates, coordinate systems, geography, cartography

UVOD

Nova geografija objekt je svojega proučavanja usmjerila na prostor. Matematički aparat koji omogućuju određivanje položaja u prostoru i vremenu temelji se na pojmu koordinatnog sustava.

"Za obilježavanje lokacije, osim naziva kao najjednostavnijeg načina, služe i *prostorne* i *sferne mreže*. Kartezijeve mreže počivaju na koordinatnom sustavu sastavljenom od dvije osi koje se sijeku pod pravim kutom. To su apscisa (vodoravna) i ordinata (okomita), a obilježavamo ih sa

* Dr. sc., docent, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Hrvatska/Croatia.

** Dr. sc., red. prof., Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Hrvatska/Croatia.

x i y. Lokacija se obilježava mjerenjem udaljenosti od osnovnih koordinata prema istoku, zapadu, sjeveru i jugu. Usporedno s osnovnim koordinatama povučene su crte koje čine kvadratnu mrežu, primjerice 100 km^2 površine.

Kartezijev koordinatni sustav pogodan je za određivanje lokacije na manjim površinama. Prihvatile su ga i koriste se njime pojedine nacionalne institucije, primjerice Velika Britanija." (Vresk 1997, str. 207-208). Ne osporavajući nimalo vrijednost spomenute knjige u geografiji, o čemu već svjedoči njezin prikaz (Pejnović 1996) s citatima uglednih recenzenata, u ovome su se radu pokušala dati egzaktnija objašnjenja pojmova u svezi s koordinatnim sustavima u geografiji, a samim time i kartografiji, geodeziji i srodnim poljima znanosti.

U geografiji i kartografiji susrećemo se s kosokutnim i pravokutnim, lijevim i desnim te ravninskim i prostornim koordinatnim sustavima. Na plohi ili u prostoru često se uvode krivolinijske koordinate, a među njima su posebno važne polarne i sferne koordinate, te geografske koordinate na sferi i elipsoidu.

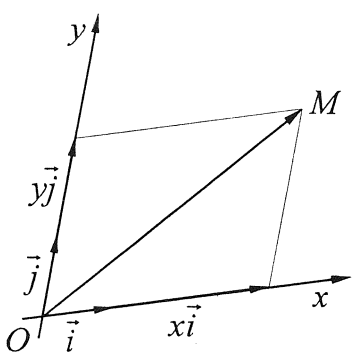
KOORDINATNI SUSTAVI

Koordinate (od lat. *co-* – zajedno i *ordinatus* – uređeni, definirani) su brojevi čijim se zadavanjem definira položaj točke na pravcu, u ravnini, na plohi ili u prostoru. Prve koje su ušle u sustavnu upotrebu bile su astronomske i geografske koordinate – širina i duljina, koje određuju položaj točke na nebeskoj sferi ili na plohi Zemljine kugle. U 14. stoljeću francuski matematičar, fizičar i ekonomist Nicola Oresme primijenio je koordinate u ravnini za konstrukciju grafova, nazivajući duljinu i širinu onime, što danas nazivamo apscisom i ordinatom. Koordinate su se počele primjenjivati sustavnije u 17. st. pri rješavanju geometrijskih problema u ravnini. Zasluga za objašnjenje važnosti koordinata koje omogućuju sustavno prevođenje zadataka geometrije na jezik matematičke analize i obratno pripada francuskom filozofu i matematičaru Renéu Descartesu (1596–1650, njegovo latinizirano ime je Cartesius). Osim koordinata točaka, razmatraju se također koordinate pravaca, ravnina i drugih geometrijskih objekata.

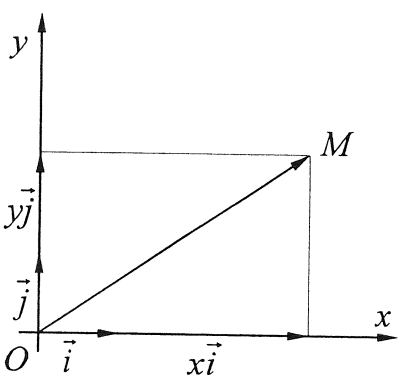
KARTEZIJEV SUSTAV KOORDINATA

To je pravolinijski sustav koordinata u euklidskom prostoru. U ravnini se *opći Kartezijev koordinatni sustav* (*afin koordinatni sustav*) zadaje točkom O koja se naziva *ishodištem* i uređenim parom nekolinearnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ koji se nazivaju *baznim vektorima* (sl. 1a). Pravci koji prolaze ishodištem u smjeru baznih vektora nazivaju se *koordinatnim osima* Kartezijeva koordinatnog sustava. Prva os, određena vektorom $\vec{i}$ naziva se *apscisnom osi* (ili osi x), druga *ordinatnom osi* (ili osi y). Kartezijev koordinatni sustav označava se $O\vec{i}\vec{j}$ ili Oxy. *Kartezijevim koordinatama točke M* u Kartezijevu koordinatnom sustavu Oxy naziva se uređeni par brojeva (x, y) koji su koeficijenti prikaza vektora $\overrightarrow{OM}$ u bazi $\vec{i}, \vec{j}$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$



Sl. 1a. Kartezijev koordinatni sustav u ravnini



Sl. 1b. Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u ravnini

Broj x naziva se *apscisom*, broj y *ordinatom* točke M. Ako su (x, y) koordinate točke M, piše se $M(x, y)$ i na taj način identificira točka s uređenim parom njenih koordinata.

Kartezijev koordinatni sustav naziva se *pravokutnim* ako su bazni vektori ortonormirani, tj. međusobno okomiti i jedinične duljine (sl. 1b). Vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$ nazivaju se u tom slučaju *ortima*. U pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu koordinate (x, y) točke M jednake su: x – skalarnoj ortogonalnoj projekciji vektora $\overrightarrow{OM}$ na os apscisa, y – skalarnoj ortogonalnoj projekciji vektora $\overrightarrow{OM}$ na os ordinata.

Neka su $S=O\vec{i}\,\vec{j}$ i $S'=O'\,\vec{i}'\,\vec{j}'$ dva pravokutna koordinatna sustava u ravnini. Postavlja se pitanje je li moguće krutim gibanjem dovesti sustav S' u poklapanje sa sustavom S, tj. tako da $\vec{i}'$ prijeđe u $\vec{i}$ i $\vec{j}'$ u $\vec{j}$. Ako je to moguće, onda kažemo da su S i S' ekvivalentni (jednako orijentirani) sustavi. U protivnom S i S' nisu ekvivalentni (nisu jednako orijentirani) sustavi. Da bismo odgovorili na postavljeno pitanje, translatirajmo sustav S' tako da njegovo ishodište O' prijeđe u ishodište O sustava S. Zatim gibanjem u ravnini dovedimo $\vec{i}'$ na $\vec{i}$. Pri tome vektor $\vec{j}'$ padne u pravac vektora $\vec{j}$. Ako je $\vec{j}'$ prešlo u $\vec{j}$, onda su S i S' jednako orijentirani (ekvivalentni), a ako je $\vec{j}'$ prešlo u $\vec{j}$, onda S i S' nisu jednako orijentirani. Iz upravo navedenih razmatranja jasno je da ako dva sustava S i S' nisu jednako orijentirani, onda je svaki treći pravokutni sustav orijentiran ili kao S ili kao S'. Dakle, skup svih pravokutnih koordinatnih sustava u ravnini raspada se na dva podskupa. Dva koordinatna sustava padaju u isti od tih podskupova samo ako su oni jednako orijentirani.

Sustav S smatramo pozitivno orijentiranim ili desnim ako gibanjem u smjeru suprotnom gibanju kazaljke na satu vektor $\vec{i}$ prelazi u vektor $\vec{j}$ nakon prijeđenog pravog kuta. Ukoliko analognim gibanjem vektor $\vec{i}$ prelazi u vektor $\vec{j}$ tek nakon prijeđena tri prava kuta, onda je sustav negativno orijentiran ili lijevi. Sustavi prikazani na sl. 2a i 2b nisu ekvivalentni. Kažemo da je sustav na sl. 2a i svaki njemu ekvivalentan sustav *lijevi*, a sustav na sl. 2b i svaki njemu ekvivalentan sustav *desni* sustav. Nezgodna strana intuitivno uvedene orijentacije ravnine pomoću gibanja kazaljke na satu vidi se ako ne uzmemo horizontalno položenu, nego kosu ravninu. Naravno da su termini desni i lijevi stvar dogovora. Ono što smo proglasili kao desni mogli bismo proglasiti i kao lijevi, ali bi tada lijevo prešlo u desno. Bitno je da za bilo koja dva sustava možemo ustanoviti jesu li jednako orijentirani ili nisu.

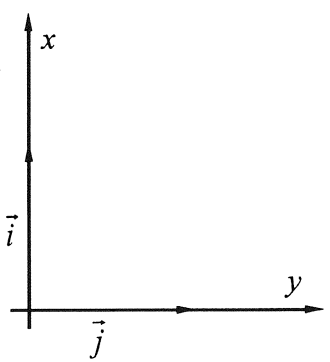
Kriterij po kojemu se za dane sustave S i S' odlučuje jesu li jednako orijentirani ili nisu dobiva se na ovaj način. Vektore $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ razvijemo po vektorima baze $\vec{i}$, $\vec{j}$:

$$\vec{i}' = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$$
$$\vec{j}' = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$$

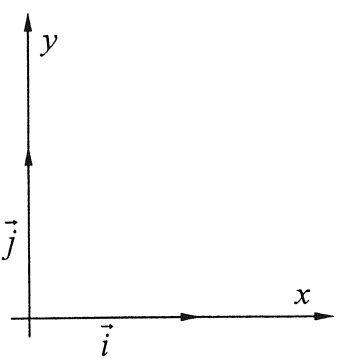
Sada računamo determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

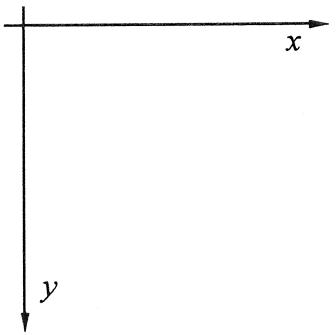
Ako je $D > 0$, onda su koordinatni sustavi S i S' jednako orijentirani, a ako je $D < 0$, oni nisu jednako orijentirani. Može se pokazati da nikada nije $D = 0$. U navedenom kriteriju nije važno da su sustavi S i S' pravokutni.



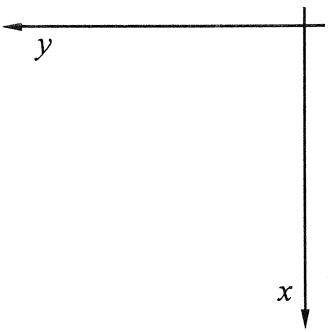
Sl. 2a. Lijevi Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u ravnini



Sl. 2b. Desni Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u ravnini



Sl. 2c. Lijevi Kartezijev pravokutni koordinatni sustav na zaslonu monitora



Sl. 2d. Stari lijevi koordinatni sustav na podrucju Hrvatske

U matematici redovito rabimo desni Kartezijev koordinatni sustav u ravnini, kao što je prikazan na sl. 2b. Međutim, u nekim drugim područjima našao je primjenu i lijevi koordinatni sustav.

U računalnoj grafici moramo posvetiti pozornost početnom postavu koordinatnog sustava. Na primjer, ukoliko drugačije ne zadamo, u nekim računalnim programima početni postav koordinatnog sustava na zaslonu monitora je lijevi s ishodištem u gornjem lijevom kutu (sl. 2c).

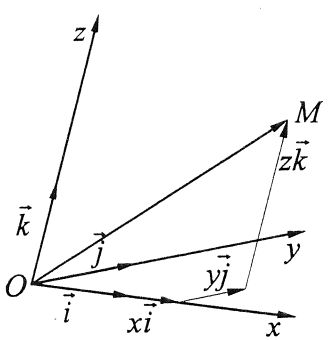
U teoriji kartografskih projekcija, gotovo redovito, primjenjuje se lijevi koordinatni sustav kao na slici 2a, s dodatnim dogovorom da pozitivni smjer osi x pokazuje sjever, a pozitivni smjer osi y – istok. Ipak, stari koordinatni sustavi na području Hrvatske (Budimpeštanski, Kloštar-Ivanički, Južni sustav kose konformne cilindrične projekcije, Bečki na području Dalmacije i Krimski) također su lijevi, ali im pozitivan smjer osi x gleda prema jugu, a pozitivan smjer osi y prema zapadu (sl. 2d).

Analogno se definira *opći Kartezijev koordinatni sustav* (*afin koordinatni sustav*) u prostoru zadavanjem točke O – ishodišta, i baznih vektora – trojke nekomplanarnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ (sl. 3a). Da bi se dobile koordinate x, y, z točke M, vektor $\overrightarrow{OM}$ se prikaže u obliku

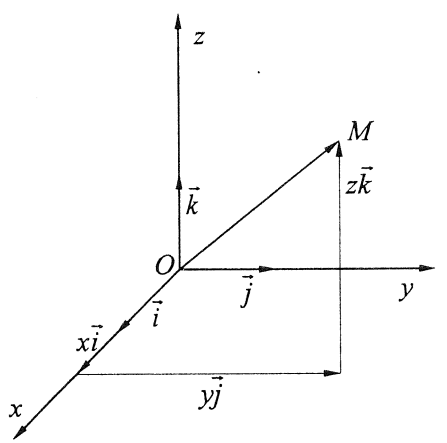
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

U slučaju *pravokutnih koordinata* vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ su u parovima okomiti i imaju jediničnu duljinu. Analogno slučaju u ravnini definiraju se *koordinatne osi – os apscisa* (ili os Ox), *os ordinata* (ili os Oy) i *os aplikata* (ili os Oz). Kartezijev koordinatni sustav u prostoru označava se s $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ ili $Oxyz$ (sl. 3b). Ravnine koje sadrže par koordinatnih osi nazivaju se *koordinatnim ravninama*.

Neka su $S = O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ i $S' = O'\,\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ dva pravokutna koordinatna sustava u prostoru. Postavlja se pitanje je li moguće krutim gibanjem dovesti sustav S' u poklapanje sa sustavom S, tj. tako da $\vec{i}'$ prijeđe



Sl. 3a. Kartezijev koordinatni sustav u prostoru



Sl. 3b. Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u prostoru

u $\vec{i}$, $\vec{j}'$ u $\vec{j}$ i $\vec{k}'$ u $\vec{k}$. Ako je to moguće, onda kažemo da su S i S' ekvivalentni (jednako orijentirani) sustavi. U protivnom S i S' nisu ekvivalentni (nisu jednako orijentirani) sustavi. Da bismo odgovorili na postavljeno pitanje, translatirajmo sustav S' tako da njegovo ishodište O' prijeđe u ishodište O sustava S. Zatim gibanjem dovedimo $\vec{i}'$ na $\vec{i}$. Pri tome ravnina vektora $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, koja je okomita na $\vec{i}'$, prijeđe u ravninu vektora $\vec{j}$, $\vec{k}$, koja je okomita na $\vec{i}$. Rotacijom prostora oko vektora $\vec{i}$ dovedimo novi položaj vektora $\vec{j}'$ u vektor $\vec{j}$. Pri tome vektor $\vec{k}'$ padne u pravac vektora $\vec{k}$. Ako je $\vec{k}'$ prešlo u $\vec{k}$, onda su S i S' jednako orijentirani (ekvivalentni), a ako je $\vec{k}'$ prešlo u $\vec{k}$, onda S i S' nisu jednako orijentirani. Iz upravo navedenih razmatranja jasno je da ako dva sustava S i S' nisu jednako orijentirana, onda je svaki treći pravokutni sustav orijentiran ili kao S ili kao S'. Dakle, skup svih pravokutnih koordinatnih sustava raspada se na dva podskupa. Dva koordinatna sustava padaju u isti od tih podskupova i samo ako su oni jednako orijentirani.

Sustavi prikazani na sl. 4a i 4b nisu ekvivalentni. Ako srednji prst ruke pokazuje u smjeru vektora $\vec{k}$ i palac u smjeru vektora $\vec{i}$, onda kažiprst pokazuje u smjeru vektora $\vec{j}$, i to za sl. 4a ako se radi lijevom, a za sl. 4b ako se radi desnom rukom. Zbog toga kažemo da je sustav na sl. 4a i svaki njemu ekvivalentan sustav *lijevi*, a sustav na sl. 4b i svaki njemu ekvivalentan sustav *desni* sustav. Naravno da su termini desni i lijevi stvar dogovora. Ono što smo proglasili kao desni mogli bismo proglasiti i kao lijevi, ali bi tada lijevo prešlo u desno. Bitno je da za bilo koja dva sustava možemo ustanoviti jesu li jednako orijentirani ili nisu.

Kriterij po kojemu se za dane sustave S i S' odlučuje jesu li jednako orijentirani ili nisu dobiva se na ovaj način. Vektore $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ razvijemo po vektorima baze $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{i}' = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

$$\vec{j}' = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$$

$$\vec{k}' = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}.$$

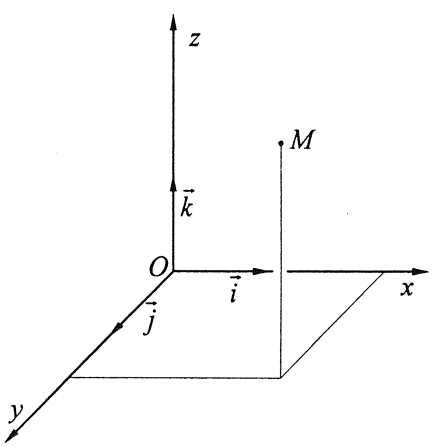
Sada računamo determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

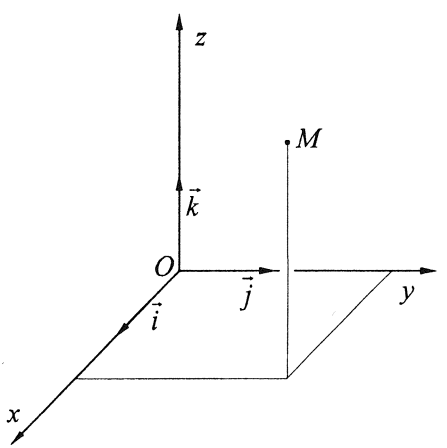
Ako je $D > 0$, onda su koordinatni sustavi S i S' jednako orijentirani, a ako je $D < 0$ oni nisu jednako orijentirani. Može se pokazati da nikada nije $D = 0$. U navedenom kriteriju nije važno da su sustavi S i S' pravokutni.

Položaj jednog pravokutnog Kartezijeva koordinatnog sustava u odnosu na drugi pravokutni Kartezijev koordinatni sustav sa zajedničkim ishodištem i iste orijentacije može se definirati i s pomoću tri Eulerova kuta (Leonhard Euler, 1707–1783, švicarski matematičar). Detaljnije o tome pisao je npr. Kurepa (1967).

Kartezijev koordinatni sustav nazvan je po francuskom matematičaru i filozofu R. Descartesu koji je u svome djelu *Geometrija* (1637)



Sl. 4a. Lijevi Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u prostoru



Sl. 4b. Desni Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u prostoru

upotrebljavao kosi koordinatni sustav s koordinatama koje su mogle biti samo pozitivni brojevi. No, već u izdanju iz 1659–61 *Geometriji* je priložen rad nizozemskog matematičara J. Huddea (1633–1704), u kojem se prvi puta dozvoljavaju i negativne vrijednosti za koordinate. Prostorni Kartezijev koordinatni sustav uveo je francuski matematičar i fizičar Philipe de La Hire (1640–1718); on je prvi primijenio riječ ishodište (franc. *origine*) – odatle oznaka O za ishodište. Oznake x, y i z za Kartezijeve koordinate nisu bile predložene odmah, već su se uobičajile početkom 18. st. Suvremene nazive za desni i lijevi koordinatni sustav uveo je engleski fizičar J. C. Maxwell (1831–1879).

KRIVOLINIJSKE KOORDINATE

To su koordinate točaka u području na plohi u prostoru, različite od pravolinijskih (Kartezijevih) koordinata. Neka su na području D, koje se može podudarati s cijelom ravninom, zadane dvije glatke funkcije točaka $u(M)$ i $v(M)$ tako da u području D svaka krivulja familije $u(M)$ = const. siječe svaku krivulju familije $v(M)$ = const. u ne više od jedne točke. Par brojeva (u, v) jednoznačno definira točku M u području D i naziva se *krivolinijskim koordinatama* te točke (sl. 5). Krivulje $u(M)$ = const. i $v(M)$ = const. nazivaju se koordinatnim krivuljama u sustavu krivolinijskih koordinata u, v; one pokrivaju područje D *koordinatnom mrežom* koja je u pravilu krivolinijska, i to objašnjava naziv krivolinijske koordinate. Ako je u ravnini definiran pravokutni koordinatni sustav Oxy, tada su funkcije $u(M)$ i $v(M)$ funkcije koordinata (x, y) točke M, tj.

$$u = u(x,y),\ v = v(x,y) \qquad (1)$$

Funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ preslikavaju područje D uzajamno jednoznačno na neko područje D', tj. sustav (1) može se riješiti:

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v). \qquad (2)$$

Glatkost funkcija $u(x, y)$ i $v(x, y)$ označava da su funkcije (1) neprekidno diferencijabilne po x i y do određenog reda. Pretpostavlja se da su funkcije (2) iste glatkoće.

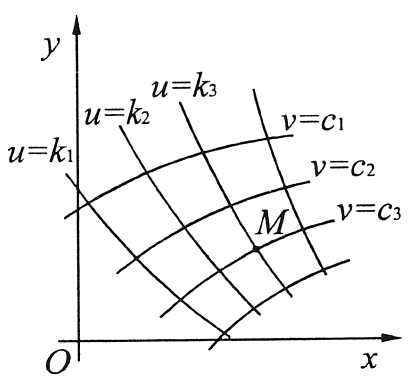
Ako su funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ neprekidno diferencijabilne i uzajamno jednoznačno preslikavaju područje D na područje D' i ako su funkcije (2) također neprekidno diferencijabilne, onda su determinante

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix},\ J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

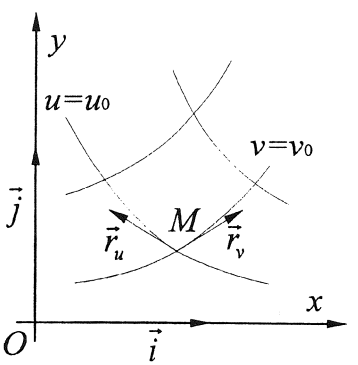
različite od nule i $J_1 J_2 = 1$. Determinante J_1 i J_2 nazivaju se Jacobijanima preslikavanja (1), odnosno (2). Koordinatne krivulje u okolini svake točke područja D su neprekidno diferencijabilne krivulje, koje dopuštaju parametarski prikaz $x = x(u,v_0)$ i $y = y(u,v_0)$ ili $x = x(u_0,v)$ i $y = y(u_0,v)$. U svakoj točki M (sl. 6) područja D određena su dva nekolinearna vektora

$$\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j},\quad \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j},$$

usmjerenih po tangentama na koordinatne krivulje u i v u smjeru porasta parametara ($\vec{i}$ i $\vec{j}$ čine ortonormiranu bazu u koordinatnom sustavu Oxy). Par vektora $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ naziva se *lokalnom bazom* u krivolinijskom koordinatnom sustavu u, v. Ako je lokalna baza orijentirana pozitivno, onda su



Sl. 5. Krivolinijske koordinate u ravnini



Sl. 6. Lokalna baza u krivolinijskom koordinatnom sustavu

Jacobijani J_1 i J_2 pozitivni, u protivnom slučaju – negativni. Krivolinijske koordinate nazivaju se *ortogonalnima* ako su koordinatne linije međusobno ortogonalne u svakoj točki područja D. Nužan i dovoljan uvjet ortogonalnosti krivolinijskih koordinata je $\vec{r}_u \vec{r}_v = 0$. Ortogonalne krivolinijske koordinate u ravnini su primjerice: polarne koordinate, bipolarne koordinate, paraboličke koordinate, eliptičke koordinate.

Analogno se uvode krivolinijske koordinate u područje D prostora kao neprekidno diferencijabilno uzajamno jednoznačno preslikavanje definirano funkcijama

$$u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z),\ w = w(x,y,z), \qquad (4)$$

za koje postoji neprekidno diferencijabilno inverzno preslikavanje

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w). \qquad (5)$$

Jacobijani preslikavanja (4) i njegova inverznog preslikavanja (5) različiti su od nule. Kroz svaku točku M područja D prolazi po jedna ploha familije $u(M)$ = const., familije $v(M)$ = const. i familije $w(M)$ = const., koje se nazivaju *koordinatnim plohama*. Krivulje presjeka dviju koordinatnih ploha nazivaju se *koordinatnim krivuljama*. U svakoj točki područja D definirana je lokalna baza $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_w$ čiji vektori su usmjereni po tangentama na koordinatne krivulje u smjeru porasta parametara. Ako je $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ baza pravokutnog Kartezijeva sustava $Oxyz$, tada je

$$\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k},$$

$$\vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}, \qquad (6)$$

$$\vec{r}_w = \frac{\partial x}{\partial w}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\vec{k}.$$

Ako su lokalna baza i baza $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jednako orijentirane, onda je Jacobijan preslikavanja (5) zajedno s Jacobijanom sustava (6) pozitivan, u protivnom slučaju – negativan. Krivolinijski koordinatni sustav naziva se *ortogonalnim* ako su u svakoj točki područja D koordinatne krivulje uzajamno okomite.

Ortogonalne krivolinijske koordinate u prostoru su primjerice sferne koordinate, cilindrične koordinate, bisferne, bicilindrične i toroidalne koordinate (koje se konstruiraju pomoću polarnih koordinata), konusne koordinate, paraboličke koordinate, eliptičke koordinate.

U nizu slučajeva krivolinijske koordinate se proširuju s područja na širi skup uz narušavanje uvjeta uzajamno jednoznačnog pridruživanja između točaka i njihovih krivolinijskih koordinata (primjerice polarne koordinate u ravnini).

Parametarsko zadavanje ploha u prostoru omogućuje uvođenje krivolinijskih koordinata na plohe, pritom se geometrijska svojstva ploha izučavaju metodama diferencijalne geometrije.

Krivolinijske koordinate rabe se u različitim područjima i posebno u numeričkim zadacima matematike i fizike, geografije, geodezije i kartografije, a u nekim slučajevima u određenom smislu to su prirodne koordinate (polarne koordinate u kružnim područjima, sferne u kuglastim itd.).

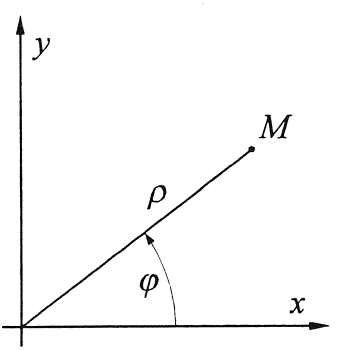
Krivolinijske koordinate prvi je primijenio švicarski matematičar Jacob Bernoulli (1654–1705), a koordinatama ih je nazvao njemački filozof-idealist, matematičar, fizičar, izumitelj, pravnik, povjesničar i jezikoslovac Gottfried Wilhelm von Leibnitz (1646–1716). Krivolinijske koordinate na plohi vežu se uz ime njemačkog matematičara koji je dao temeljne doprinose također astronomiji i geodeziji Carla Friedricha Gaußa (1777–1855). Naziv za krivolinijske koordinate u prostoru prvi je uveo francuski matematičar i inženjer Gabriel Lamé (1795–1870).

POLARNE KOORDINATE

Osim pomoću Kartezijevih koordinata u ravnini, položaj točke može se opisati i pomoću polarnih koordinata ρ i φ (sl. 7), koje su povezane s pravokutnim koordinatama x i y formulama

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,$$

gdje je $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Koordinatne linije su koncentrične kružnice (ρ=const.) i zrake



Sl. 7. Polarni koordinatni sustav u ravnini

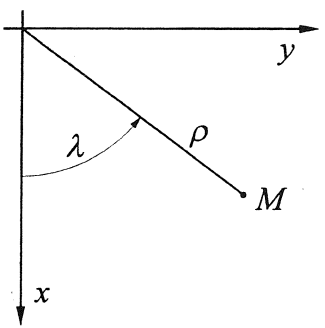
(φ=const.). Svakoj točki u ravnini *Oxy* (osim točke *O*, za koju je $\rho = 0$, a φ nije definirano) odgovara par brojeva (ρ,φ) i obratno. Udaljenost ρ točke *M* od pola naziva se *polarnim polumjerom*, a kut φ *polarnim kutom*.

Poopćene polarne koordinate su *r* i ψ, povezane s pravokutnim koordinatama formulama

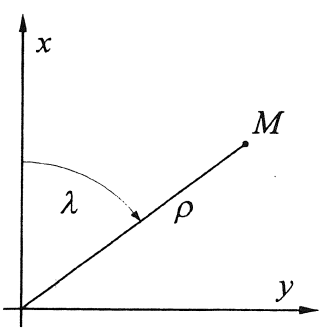
$$x = ar\cos\psi, \quad y = br\sin\psi,$$

gdje je $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \psi < 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$ Koordinatne linije su elipse (r = const.) i zrake (ψ=const.).

Polarne koordinate u implicitnom obliku primijenio je starogrčki matematičar Dinostrat (4. st. pr. Kr.) pri istraživanju kvadratrise. Engleski fizičar i matematičar I. Newton (1643–1727) upotrebljava polarne koordinate i daje formule njihove veze s pravokutnim koordinatama. U gotovo suvremenom obliku polarne koordinate se pojavljuju kod švicarskog matematičara Jacoba Bernoullija (1654–1705). Termin *polarne koordinate* pojavio se u 19. st.



Sl. 8a. Koordinatni sustav pri azimutalnoj projekciji gornje polusfere



Sl. 8b. Koordinatni sustav pri azimutalnoj projekciji donje polusfere

U teoriji kartografskih projekcija polarne koordinate primjenjuju se kod azimutalnih i konusnih projekcija. Kod uspravnih ili polarnih azimutalnih projekcija polarne koordinate u ravnini su ρ i λ, a njihova veza s pravokutnim Kartezijevima

$$x = \rho\cos\lambda, \quad y = \rho\sin\lambda,$$

gdje je $\rho \geq 0$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$. Pritom, ukoliko želimo imati prirodan pogled odozgo na gornju polusferu, treba postaviti koordinatni sustav kao na sl. 8a. No, taj će postav dati pogled na donju polusferu iznutra, odnosno dobit će se zrcalna slika rasporeda kopna i mora u odnosu na onu na koju smo inače navikli. Stoga u tom slučaju postav koordinatnog sustava treba biti kao na sl. 8b. Postoji naravno i druga mogućnost, prema kojoj postav koordinatnog sustava ostaje uvijek jedan te isti, ali tada treba na odgovarajući način promijeniti jednadžbe projekcije.

Pri uspravnim konusnim projekcijama polarne koordinate u ravnini su ρ i δ, a njihova veza s pravokutnim Kartezijevima

$$x = q - \rho\cos\delta, \quad y = \rho\sin\delta, \quad \delta = k\lambda,$$

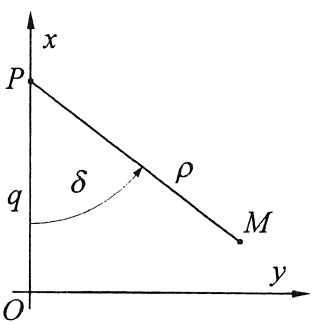
gdje je $\rho \geq 0$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, a q i k konstante projekcije. Pritom, ukoliko želimo imati prirodan pogled odozgo na gornju polusferu treba postaviti koordinatni sustav kao na sl. 9.

SFERNE KOORDINATE

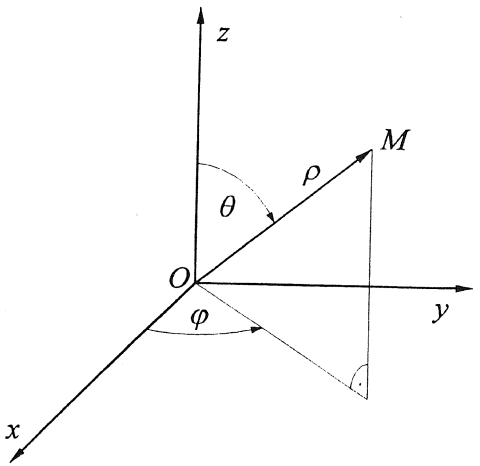
Sferne ili prostorne polarne koordinate ρ, θ i φ povezane su s pravokutnim koordinatama x, y, z formulama

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \; y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \; z = \rho\cos\theta,$$

gdje $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$ (sl. 10). Koordinatne plohe su: koncentrične sfere sa središtem *O* (ρ=const.), poluravnine koje sadrže os *Oz*



Sl. 9. Polarni koordinatni sustav kod uspravnih konusnih projekcija



Sl. 10. Sferni koordinatni sustav

(φ=const.), kružni stošci s vrhom O i osi Oz (θ=const.). Sustav sfernih koordinata je ortogonalan.

Poopćene sferne koordinate u, v, w povezane su s pravokutnim koordinatama x, y, z formulama

$x = a\,u \cos v \sin w$, $y = b\,u \sin v \sin w$, $z = c\,u \cos w$,

gdje je $0 \le u < \infty$, $0 \le v < 2\pi$, $0 \le w < \pi$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Koordinatne plohe su: elipsoidi (u= const.), poluravnine (v = const.) i elipticki stošci (w = const.).

Sferne koordinate upotrebljavale su se u astronomiji; formule koje povezuju sferne koordinate s pravokutnim koordinatama dao je francuski matematičar i fizičar Joseph Louis Lagrange (1736–1813), a naziv *sferne koordinate* predložio je njemački matematičar-pedagog H. R. Baltzer (1818–1887).

GEOGRAFSKE KOORDINATE NA SFERI

Često se za model Zemljine plohe uzima sfera. Jednadžba sfere sa središtem u ishodištu pravokutnoga Kartezijeva sustava $Oxyz$ i polumjerom R glasi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

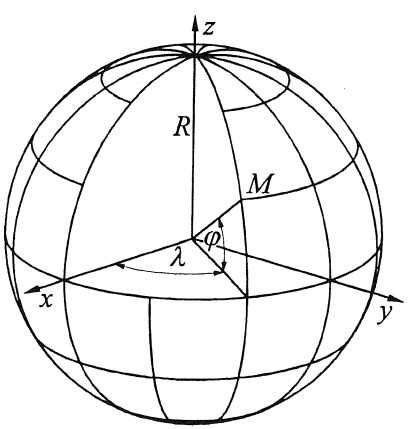
Takva se sfera naziva *Zemljinom sferom*. Točka s koordinatama $(0, 0, R)$ naziva se *Sjevernim polom*, a ona s koordinatama $(0, 0, -R)$ *Južnim polom*. Kružnica na sferi koja je jednako udaljena od polova naziva se *ekvatorom* ili *polutarom* i ona dijeli sferu na dvije *polusfere – polutke*. Pravac koji prolazi polovima naziva se *os Zemljine sfere*, a ravnina u kojoj se nalazi ekvator – *ekvatorskom ravninom*.

Kut koji zatvara normala (ujedno i radijus-vektor) proizvoljne točke M na Zemljinoj sferi s ekvatorskom ravninom naziva se *geografskom širinom* i označava s φ. Sve točke na Zemljinoj sferi koje imaju istu geografsku širinu leže na kružnici koja se naziva *paralelom* ili *usporednicom*.

Polukružnice na Zemljinoj sferi koje spajaju Sjeverni i Južni pol nazivaju se *meridijanima* ili *podnevnicima*. Jedan među njima naziva se *početnim* ili *nultim meridijanom*. To je obično meridijan koji leži u ravnini $y = 0$. *Geografska duljina* proizvoljne točke M na Zemljinoj sferi označava se s λ, a to je kut između meridijana koji prolazi točkom M i početnog meridijana. Prema tome, sve točke koje leže na istom meridijanu imaju istu geografsku duljinu.

Geografska se širina mjeri u intervalu $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$ ($-90^0 \le \varphi \le 90^0$), a geografska duljina najčešće u intervalu $-\pi \le \lambda \le \pi$ ($-180^0 \le \lambda \le 180^0$). Geografske koordinate φ i λ čine krivolinijski koordinatni sustav na sferi. Koordinatne krivulje su paralele i meridijani.

U geografskoj literaturi uobičajeno je govoriti npr. 40. sjeverna paralela ili nulti meridijan (vidjeti npr. Krnjeta 1996). To jest uobičajeno, ali nije sasvim ispravno. Naime, na Zemljinoj sferi nema samo konačno mnogo paralela i meridijana. Drugim riječima, izmedu 40. i 41. sjeverne paralele ima još uvijek beskonačno mnogo paralela. Ili uzmimo drugi primjer: koji je po redu meridijan koji prolazi približno sredinom Hrvatske i kojemu odgovara geografska duljina λ=16°30'? To očito nije ni



Sl. 11. Geografske koordinate na Zemljinoj sferi

šesnaesti ni sedamnaesti. Kad govore o meridijanima, Brazda i dr. (1992) kažu: "Možemo ih zamisliti bezbroj, ali se uzima za svaki stupanj po jedan, pa ih ima ukupno 360". Nije jasno tko to tako uzima i zašto? Koliko će se paralela i meridijana prikazati na globusu ili karti ovisi o vrsti i namjeni globusa ili karte. Autori ovoga rada smatraju da bi umjesto 40. sjeverna paralela, ispravnije bilo reći ona paralela kojoj pripada geografska širina $\varphi=40^0$.

Geografski koordinatni sustav može se interpretirati i kao restrikcija sfernog prostornog koordinatnog sustava na sferu polumjera R. Pritom se u geografiji, geodeziji i kartografiji uvode drugačije oznake od onih u matematici: umjesto φ dolazi λ, a umjesto zenitne daljine θ – geografska širina φ, točnije vrijedi

$$\lambda = \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

gdje su s lijeve strane jednadžbi geografske koordinate, a s desne strane koordinate sfernog prostornog koordinatnog sustava (usporediti slike 10 i 11).

Na temelju izloženoga i sl. 11 mogu se izvesti veze pravokutnih Kartezijevih prostornih koordinata x, y, z proizvoljne točke M na sferi i njenih geografskih koordinata φ, λ:

$$x = R\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = R\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = R\sin\varphi.$$

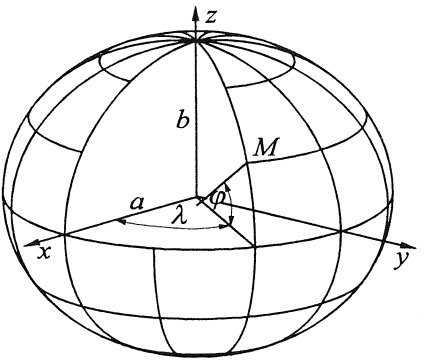
GEOGRAFSKE KOORDINATE NA ROTACIJSKOM ELIPSOIDU

Osim sfere, često se za model Zemljine plohe uzima rotacijski elipsoid. Jednadžba rotacijskoga elipsoida sa središtem u ishodištu pravokutnoga Kartezijevog sustava $Oxyz$ i poluosima a i b glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Točka s koordinatama $(0, 0, b)$ naziva se *Sjevernim polom*, a ona s koordinatama $(0, 0, -b)$ *Južnim polom* (sl. 12). Kružnica na elipsoidu koja je jednako udaljena od polova naziva se *ekvatorom* ili *polutarom* i ona dijeli elipsoid na dva dijela – *polutke*. Pravac koji prolazi polovima naziva se *os rotacijskoga elipsoida*, a ravnina u kojoj se nalazi ekvator – *ekvatorskom ravninom*.

Kut koji zatvara normala (ali ne i radijus-vektor) proizvoljne točke M na elipsoidu s



Sl. 12. Geografske koordinate na rotacijskom elipsoidu

ekvatorskom ravninom naziva se *geografskom širinom* i označava s φ. Sve točke na rotacijskom elipsoidu koje imaju istu geografsku širinu leže na kružnici koja se naziva *paralelom* ili *usporednicom*.

Poluelipse na elipsoidu koje spajaju Sjeverni i Južni pol nazivaju se *meridijanima* ili *podnevnicima*. Jedan među njima naziva se *početnim* ili *nultim meridijanom*. To je obično meridijan koji leži u ravnini $y=0$. *Geografska duljina* proizvoljne točke M na elipsoidu označava se s λ, a to je kut između meridijana koji prolazi točkom M i početnog meridijana. Prema tome, sve točke koje leže na istom meridijanu imaju istu geografsku duljinu.

Geografska širina mjeri se u intervalu $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$ ($-90^0 \le \varphi \le 90^0$), a geografska duljina najcešce u intervalu $-\pi \le \lambda \le \pi$ ($-180^0 \le \lambda \le 180^0$). Geografske koordinate φ i λ predstavljaju krivolinijski koordinatni sustav na rotacijskom elipsoidu. Koordinatne krivulje su paralele i meridijani.

Na temelju izloženoga i sl. 12 mogu se izvesti veze pravokutnih Kartezijevih prostornih koordinata x, y, z proizvoljne točke M na rotacijskom elipsoidu i njenih geografskih koordinata φ, λ:

$$x = \frac{a}{W}\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = \frac{a}{W}\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = \frac{a}{W}(1-e^2)\sin\varphi,$$

gdje je

$$W = \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}, \qquad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

DRUGI KOORDINATNI SUSTAVI

U geografiji, kartografiji i geodeziji najčešće se primjenjuje parametrizacija rotacijskog elipsoida ili sfere s pomoću koje se na njih uvodi geografski koordinatni sustav, odnosno mreža meridijana i

paralela. Međutim, ponekad će biti spretnije upotrijebiti neku drugu parametrizaciju. Tako se primjerice u teoriji kartografskih projekcija pri proučavanju konformnih preslikavanja prirodno pojavljuje konformna ili izometrijska širina (Frančula, 1999).

Nadalje, s obzirom na složenost svijeta koji nastojimo spoznati, dvodimenzionalni i trodimenzionalni prostori često neće biti dovoljni, nego će trebati takvi kojima je dimenzija veća od tri. Tu nam može u pomoć priskočiti matematika u kojoj su već istraženi n-dimenzionalni prostori i njihova koordinatizacija (Kurepa 1967, Horvatić 1995).

Ovim radom nisu iscrpljeni svi koordinatni sustavi s kojima se susrećemo u znanstvenom i praktičnom radu. Obrađeni su oni najvažniji, zajednički svim geoznanostima, a posebno geografiji, kartografiji i geodeziji.

LITERATURA

BRAZDA, M., DERADO, K., KALODERA, A., STRAŽIČIĆ, N., ŠAŠEK, M., VUJNOVIĆ, V. (1992): Prirodna osnova geoprostora, 8. izdanje, Školska knjiga, Zagreb.

FRANČULA, N. (1999): Kartografske projekcije, rukopis, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.

GUSIĆ, I. (1995): Matematicki rječnik, Element, Zagreb.

HORVATIĆ, K. (1995): Linearna algebra I-III, Matematički odjel, PMF, Sveučilište u Zagrebu.

KRNJETA, Z. (1996): Nastavna jedinica: Stupanjska mreža, Geografski horizont, 1, 80-85.

KUREPA, S. (1967): Konačnodimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb.

PEJNOVIĆ, D. (1996): Milan Vresk: Uvod u geografiju, Geografski horizont, 2, 108-109.

VINOGRADOV, I. M. (urednik, 1977-85): Matematičeskaja enciklopedija, 1-5, Sovjetskaja enciklopedija, Moskva.

VRESK, M. (1997): Uvod u geografiju, Školska knjiga, Zagreb.

SUMMARY

The subject of geographical research is space. The mathematical apparatus enabling the determination of position in space is based on the notion of coordinate systems. The goal of the paper is to explain some vagueness and to show the incorrect statements on coordinates and coordinate systems, which can be found in the recent geographical publications.

Coordinates are numbers by means of which the position of a point could be defined on straight line, in plane, on surface or in space. The first types of coordinates that entered into systematic usage were astronomical and geographical ones – latitude and longitude, which determine the position of a point on celestial or earth's sphere, resp.

The wider application of coordinates started in 17th century by solving geometrical problems in plane. It was the French philosopher and mathematician René Descartes (1596–1650, Latin name Cartesius) who explained the importance of coordinates enabling a systematic translation of geometrical problems to the language of mathematical analysis and vice versa. The name of Cartesian coordinates was given after this famous scientist.

When we are talking about Cartesian coordinate systems, then one should distinguish the left and the right ones, as well as plane and space systems. On a surface or in space the curvilinear coordinates are often introduced. Among them, polar and spherical coordinates are very important in geosciences, as well as geographical coordinates on the surface of a sphere and of a rotational ellipsoid.

Particularly, the authors of the paper intercede in favor of the concept *mreža meridijana i paralela* (the graticule) instead of the term *stupanjska mreža* (the net of degrees). Namely, the meridians and parallels do not correspond only to integer degrees, but there is a continuum of them. How many parallels and meridians would be represented depends mainly on the type and purpose of a particular globe or a map.