

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Mladen Vučić

FILTRI SA SIMETRIČNIM IMPULSNIM ODZIVOM

Doktorska disertacija

Zagreb, 1999.

Doktorska disertacija je izrađena na Zavodu za elektroničke sustave i obradbu informacija Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu.

Mentor: prof. dr. sc. Hrvoje Babić

Disertacija ima 94 stranice.

Povjerenstvo za ocjenu doktorske disertacije:

1. dr. sc. Neven Mijat, red. prof. FER-a Zagreb,
2. dr. sc. Hrvoje Babić, red. prof. FER-a Zagreb,
3. dr. sc. Petar Slapničar, red. prof. FESB Split.

Povjerenstvo za obranu doktorske disertacije:

1. dr. sc. Neven Mijat, red. prof. FER-a Zagreb,
2. dr. sc. Hrvoje Babić, red. prof. FER-a Zagreb,
3. dr. sc. Petar Slapničar, red. prof. FESB Split,
4. dr. sc. Vladimir Naglić, red. prof. FER-a Zagreb,
5. dr. sc. Damir Kalpić, izv. prof. FER-a Zagreb.

Datum obrane doktorske disertacije: 13. srpnja 1999.

# Sadržaj

1	Uvod .....	1
2	Svojstva filtera u frekvencijskoj i vremenskoj domeni .....	3
2.1	Aproksimacija konstantne amplitude.....	5
2.2	Linearizacija faze.....	9
2.3	Gaussova familija filtera .....	11
2.4	Poboljšavanje amplitude .....	16
2.5	Prijelazni filteri .....	17
2.6	Filteri dobiveni na osnovi iskustva.....	19
2.7	Aproksimacije u vremenskoj domeni.....	19
2.7.1	Filteri dobiveni sintezom u vremenskoj domeni.....	20
2.7.2	Aproksimacija zadanog impulsnog odziva.....	22
2.8	Kriteriji za sintezu prijenosnih funkcija .....	23
3	Kontinuirani filteri sa simetričnim impulsnim odzivom .....	25
3.1	Simetrija impulsnog odziva.....	25
3.2	Funkcija cilja.....	28
3.3	Optimizacijski postupak.....	30
3.3.1	Osnovni pojmovi vezani uz optimizaciju bez ograničenja.....	30
3.3.2	Kvazi-Newtonova metoda .....	33
3.3.3	Praktična realizacija .....	34
3.4	Rezultati optimizacije.....	37
3.4.1	Filteri sa svim nulama u beskonačnosti .....	38
3.4.2	Filteri s jednim parom kompleksnih nula.....	43
3.4.3	Filteri s dva para kompleksnih nula .....	47
3.4.4	Filteri s tri para kompleksnih nula .....	51
3.4.5	Filteri sa četiri para kompleksnih nula.....	55
3.5	Svojstva kontinuiranih filtera sa simetričnim impulsnim odzivom .....	58
4	Digitalni filteri sa simetričnim impulsnim odzivom .....	61
4.1	Simetrija impulsnog odziva.....	61
4.2	Funkcija cilja.....	65
4.3	Optimalni digitalni filteri .....	65
4.3.1	Filteri sa svim nulama u ishodištu .....	66
4.3.2	Filteri s jednim parom kompleksnih nula.....	69
4.3.3	Postupak sinteze optimalnih digitalnih filtera .....	72
4.4	Upotreba metode jednakog impulsnog odziva.....	75
4.5	Optimalni filteri s nulama na realnoj osi .....	79
4.5.1	Filteri s jednom realnom nulom.....	79
4.5.2	Filteri s N-1 realnom nulom.....	81
4.6	Svojstva digitalnih filtera sa simetričnim impulsnim odzivom.....	86
5	Zaključak.....	88
6	Literatura.....	90
	Sažetak/Summary	
	Životopis	

## 1 Uvod

Električki filtri zauzimaju važno mjesto u obradi signala. Zahtjevi koje filter mora zadovoljavati, pa tako i metode za njegovo projektiranje, proizlaze iz funkcije koju on obavlja u sustavu u kojeg je ugrađen. U ranoj fazi razvoja teorije filtera, pažnja je većinom poklanjana selektivnim svojstvima, što je bila posljedica tadašnjih praktičnih zahtjeva. Spomenimo kao primjer prijenos govornog signala, na čiju razumljivost fazna izobličenja ne utječu mnogo. Pojava sustava koji obrađuju impulse, kao na primjer televizije i čitavog niza telekomunikacijskih uređaja, pomaknula je težište proučavanja ka vremenskoj domeni. Ipak, kao što će u slijedećem poglavlju biti pokazano, sinteza prijenosnih funkcija i dalje je uglavnom bila temeljena na postupcima u frekvencijskoj domeni. Glavni razlog ležao je u tome što je sinteza u frekvencijskoj domeni jednostavnija, a rezultati su pogodni za odgovarajuću pasivnu ili aktivnu realizaciju, bez dodatnih preračunavanja [6].

Klasičan pristup sintezi filtera, od kojih se traže mala izobličenja u vremenskoj domeni, kreće od zahtjeva za linearnom fazom odnosno konstantnim vremenom grupnog kašnjenja. Linearna faza aproksimira se glatkom karakteristikom, ili se dopušta određena, najčešće jednolika valovitost. Takav pristup je indirektan jer je proveden u frekvencijskoj domeni. Bolji rezultati mogu se očekivati ako se prijenosna funkcija filtera odredi na temelju zahtjeva danih u vremenskoj domeni.

U ovom radu će biti opisana nova klasa filtera dobivena pomoću kriterija koji opisuje izobličenje u vremenskoj domeni. Kao mjera izobličenja bit će uzeta asimetrija impulsnog odziva. Minimizacijom asimetrije kauzalnih odziva, bit će određena nova klasa filtera, optimalnih u vremenskoj domeni. Obzirom da je simetrija impulsnog odziva svojstvo sustava s idealnom linearnom fazom, može se očekivati da će i dobiveni filtri aproksimirati linearnu fazu.

U svojim novijim radovima, autor je opisao metodu sinteze filtera sa simetričnim impulsnim odzivom primijenjenu na kontinuirane [71], [74] i diskretne (digitalne) filtre, [5], [73]. U ovoj disertaciji bit će opisana ta metoda i dani postojeći kao i dosad neobjavljeni rezultati. Svojstva dobivene nove klase filtera bit će dana u grafičkom i numeričkom obliku. Također, bit će dana usporedba s klasičnim filtarskim aproksimacijama.

U drugom poglavlju bit će dan pregled klasičnih filtarskih aproksimacija, s težištem na usporedbi njihovih svojstava u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. Cilj je, kroz evoluciju postojećih postupaka, ukazati na karakteristične momente u razmišljanju, koji su doveli do kriterija simetrije impulsnog odziva, kao jedinog kriterija za sintezu nove klase filtera. Ekonomičnost filtera je određena složenošću prijenosne funkcije kojom se postižu zadana svojstva. Ideja faznih korektora i metoda za poboljšavanje amplitude, vode na ideju o optimiranju prijenosnih funkcija s konačnim nulama, od kojih se očekuje doprinos simetriji impulsnog odziva, uz razmjerno maleno povećanje složenosti filtera.

U trećem poglavlju bit će opisan postupak dobivanja kontinuiranih filtera sa simetričnim impulsnim odzivom. Bit će opisana svojstva dobivenih optimalnih filtera s nulama u beskonačnosti

te konačnim nulama. Parametri prijenosnih funkcija, namijenjeni praktičnoj sintezi ovih filtara, bit će dani u numeričkom obliku.

Četvrto poglavlje opisuje digitalne filtre sa simetričnim impulsnim odzivom. Bit će razmatrani filtri sa svim nulama u ishodištu, te filtri s kompleksnim i realnim nulama. Postupci projektiranja digitalnih filtara sa simetričnim impulsnim odzivom razlikuju se od postupaka pogodnih za kontinuirane filtre. To je posljedica matematičkih svojstava z domene. Da bi se olakšalo projektiranje digitalnih filtara, bit će dan skup parametara u grafičkom obliku, te opis potrebnih matematičkih postupaka. Opravdanost metode jednakog impulsnog odziva razmotrit će se kroz usporedbu s optimalnim filtrima, te će, istovremeno, biti ukazano na posebnosti koje daje jedan i drugi pristup.

Razvoj filtra općenito se sastoji od dvije faze; sinteze prijenosne funkcije, te njene realizacije. Postojeća rješenja opisana u ovom radu, te predloženi novi tipovi prijenosnih funkcija, mogu se realizirati korištenjem poznatih struktura i metoda opisanim u mnogobrojnoj literaturi, kao na primjer [79], [77], [43] i dr. Zato će ovdje pažnja biti posvećena isključivo postupcima za sintezu prijenosnih funkcija, od kojih se traži da zadovoljavaju zahtjeve, te da budu fizički ostvarive, što vodi na kauzalne, stabilne sustave.

## 2 Svojstva filtara u frekvencijskoj i vremenskoj domeni

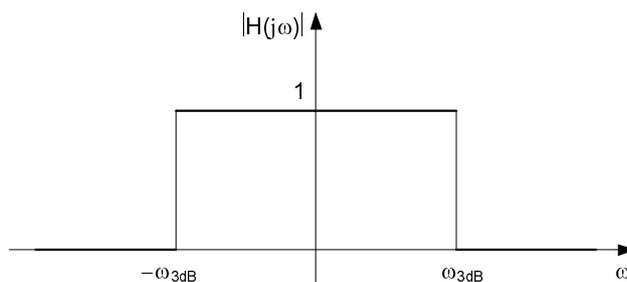
Zahtjevi postavljeni na odzive filtara proizlaze iz njihove primjene u nekom sustavu. Kod filtara čiji je zadatak potiskivanje signala određenog frekvencijskog područja važno je postići dobra selektivna svojstva. Kod obrade signala u vremenskoj domeni, moraju biti sačuvani određeni parametri valnog oblika signala. Zahtjevi, izraženi kroz odzive filtra, određuju pristup sintezi prijenosnih funkcija. Razlikujemo sintezu u frekvencijskoj i vremenskoj domeni. Kod oba pristupa krećemo od zadane, najčešće idealizirane karakteristike. Idealiziranu karakteristiku aproksimiramo funkcijom koja opisuje kauzalan, stabilan i realizibilan filter.

Kad govorimo o *sintezi u frekvencijskoj domeni*, podrazumijevamo da su u toj domeni zadana svojstva koja filter mora zadovoljavati. To je slučaj kod filtara Chebyshevljeve familije, koji, za slučaj niskopropusnog filtra, u području propuštanja aproksimiraju konstantu, slika 2.1

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_{3dB} \\ 0, & |\omega| > \omega_{3dB} \end{cases} \quad (2.1)$$

Obzirom da je zahtjev (2.1) postavljeni isključivo na amplitudu, tako dobiveni filtri pokazuju dobra selektivna svojstva tj. dobro aproksimiraju konstantu u području propuštanja, te imaju veliku strminu amplitude u prijelaznom području. Filtri Chebyshevljeve familije obuhvaćaju Butterworthov, Chebyshevjev, inverzan Chebyshevjev i Caurov filter [79].

Pored filtara Chebyshevljeve familije, postoje i druge aproksimacije zadane amplitude. Neke od njih su upotrebljive u širokom području, dok su druge napravljene za točno određenu primjenu. Obzirom da je tema ovog rada vezana za filtre optimalne u vremenskoj domeni, razmatranja aproksimacije konstantne amplitude također će biti ograničena na one aproksimacije koje su optimalne po nekom kriteriju.



Slika 2.1 Idealizirana amplitudna karakteristika niskopropusnog filtra.

U sustavima u kojima treba sačuvati valni oblik impulsa, traže se filtri čiji odzivi u vremenskoj domeni imaju malen podbačaj, prebačaj i istitravanje. Taj zahtjev zadovoljavaju filtri Gaussove familije, koja je ime dobila po idealiziranom Gaussovom filteru [79], slika 2.2. Amplitudno frekvencijska karakteristika idealiziranog Gaussovog filtra, normirana na  $\omega_{3dB}=1$ , ima oblik [6], [79]

$$|H(j\omega)| = \exp \left[ -\frac{\ln(2)}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_{3dB}} \right)^2 \right] \quad (2.2)$$

Uz pretpostavljeno konstantno vrijeme grupnog kašnjenja

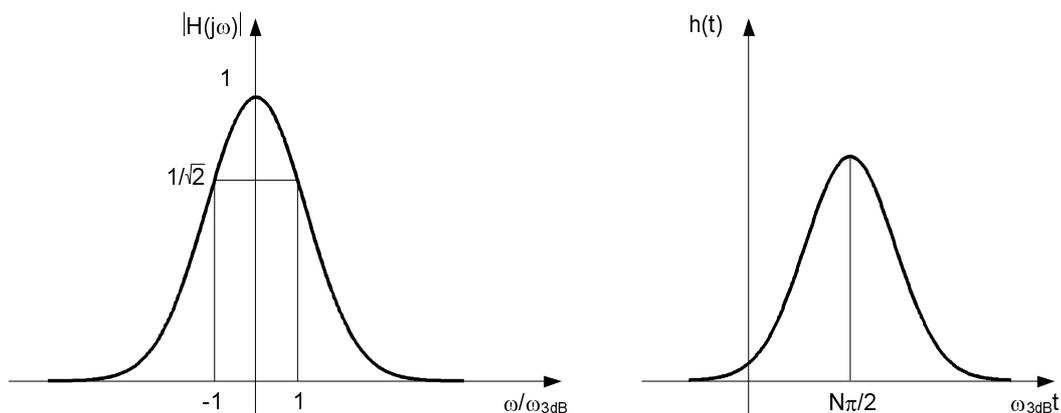
$$\tau_g = \frac{N\pi}{2\omega_{3dB}} \quad (2.3)$$

impulsni odziv Gaussovog filtra ima oblik

$$h(t) = \frac{\omega_{3dB}}{\sqrt{2\pi \ln(2)}} \exp\left[-\frac{(\omega_{3dB}t - N\pi/2)^2}{2\ln(2)}\right] \quad (2.4)$$

što je opet Gaussova krivulja koja monotono raste do maksimuma u točki  $t=N\pi/2\omega_{3dB}$ , a zatim monotono pada. Cijeli broj  $N$ , u gornje izraze uključen je jer bi aproksimacija polinomom stupnja  $N$ , dala najveći fazni pomak  $N\pi/2$ .

Filtri Gaussove familije imaju impulsni odziv koji aproksimira izraz (2.4). Zahtjevi su, dakle, postavljeni na valni oblik impulsnog odziva pa govorimo o *sintezi u vremenskoj domeni*. Ipak, postupak određivanja prijenosne funkcije provodi se u frekvencijskoj domeni, bilo da se radi o aproksimaciji Gaussove amplitude, kao u slučaju tzv. filtra s Gaussovom amplitudom ili aproksimaciji konstantnog vremena grupnog kašnjenja, kao kod Besselovih filtara i filtara s jednolikom valovitošću faze.



Slika 2.2 Amplitudna karakteristika i impulsni odziv idealiziranog Gaussovog filtra.

Iako filtri s Gaussovom amplitudom, Besselovi filtri i filtri s jednolikom valovitošću faze imaju dobre vremenske odzive, treba naglasiti da indirektno dobiveni odzivi nisu optimalni u vremenskoj domeni. Bolji rezultati mogu se očekivati ako se parametri prijenosnih funkcija odrede na osnovi aproksimacije željenog valnog oblika ili nekog od njegovih parametara, dakle direktno u vremenskoj domeni.

U daljnjem tekstu bit će dan pregled svojstava filtara u frekvencijskoj i vremenskoj domeni. Pored klasičnih aproksimacija bit će spomenuti i dosad poznati rezultati na području sinteze u vremenskoj domeni, kompromisna rješenja kao na primjer prijelazni filtri, te empirijska rješenja dobivena bez određenih kriterija. Cilj je pokazati put koji je doveo do *kriterija simetrije impulsnog odziva* kao osnove za novu klasu filtara, optimalnih u vremenskoj domeni.

Uobičajeno je kod sintezi visokopropusnih (VP) i pojasnopropusnih (PP) filtara te pojasnih brana (PB) početi od niskopropusnog (NP) prototipa, te prijenosnu funkciju dobiti odgovarajućim transformacijama. Ti postupci pokriveni su mnogobrojnom literaturom, kao na primjer [6], [79], [77] pa će naredna razmatranja obuhvaćati isključivo niskopropusne (NP) filtre.

## 2.1 Aproksimacija konstantne amplitude

Klasične aproksimacije idealizirane amplitude (2.1) polaze od aproksimacije u točki  $\omega=0$  ili aproksimacije u intervalu  $-1 \leq \omega \leq 1$ . U općem slučaju aproksimacija ima oblik [76]

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + A_N(\omega^2)} \quad (2.5)$$

Slučaj kad je aproksimacijska funkcija  $A_N(\omega)$  polinom oblika

$$A_N(\omega^2) = \omega^{2N} \quad (2.6)$$

daje klasu filtara s monotono padajućom amplitudnom karakteristikom, poznatu kao Butterworthovi filtri [9]. Funkcija  $|H(j\omega)|^2$  ima u točki  $\omega=0$  prvih  $2N-1$  derivacija jednakih nuli. Od svih "all-pole" prijenosnih funkcija zadanog reda, koje monotono aproksimiraju konstantu, Butterworthovi filtri predstavljaju najglatkiju moguću aproksimaciju u točki  $\omega=0$ . U tom smislu Butterworthovi filtri su optimalni, a njihovu amplitudnu karakteristiku nazivamo i maksimalno glatka amplitudna karakteristika [41]. Zbog tog svojstva i svoje jednostavnosti, Butterworthovi filtri su vrlo popularni u praksi.

Drugi tip vrlo često korištenih filtra temeljen je na aproksimaciji konstantne amplitude funkcijom jednolike valovitosti [54]. Aproksimacijska funkcija ima oblik

$$A_N(\omega^2) = \varepsilon^2 T_N^2(\omega) \quad (2.7)$$

gdje je  $T_N(\omega)$  Chebyshevjev polinom N-tog stupnja

$$T_N(\omega) = \begin{cases} \cos(N \arccos \omega) & |\omega| \leq 1 \\ \cosh(N \operatorname{Ar} \cosh \omega) & |\omega| > 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Ovi filtri nazivaju se Chebyshevljevi filtri. U području propuštanja, amplitudna karakteristika ima jednoliku valovitost. Postoji N točaka u kojima je prva derivacija funkcije  $|H(j\omega)|^2$  jednaka 0. U području gušenja, gušenje je veće nego kod Butterworthovog filtra istog reda. Od svih "all-pole" filtara zadanog reda i zadanog odstupanja u području propuštanja, Chebyshevljevi filtri imaju najveću strminu amplitude u prijelaznom području.

U beskonačnosti Chebyshevljevi filtri imaju maksimalno glatku amplitudu, dok u području propuštanja amplituda ima jednoliku valovitost. Takozvani filtri s inverznom Chebyshevjevom karakteristikom imaju jednoliku valovitost u području gušenja, a amplituda im je maksimalno glatka u području propuštanja. Amplitudna karakteristika ima oblik [76]

$$|H(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(1/\omega)} = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(1/\omega)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(1/\omega)} \quad (2.9)$$

Najstrijmije prijelazno područje, od svih filtara zadanog reda, uz zadanu valovitost u području propuštanja i području gušenja, imaju filtri kod kojih je aproksimacijska funkcija

$$A_N(\omega^2) = \varepsilon^2 R_N^2(\omega) \quad (2.10)$$

$R_N(\omega)$  je Chebyshevljeva racionalna funkcija koji su uveli Caer [11] i Norton [47]. Ovi filtri u literaturi su poznati pod imenom Caerovi filtri. Zbog upotrebe eliptičkih funkcija u njihovoj sintezi, nazivaju se i eliptički filtri.

Za aplikacije kod kojih nije dopuštena valovitost u području propuštanja, može se upotrijebiti Butterworthov filtar. Kad se pored monotone amplitude traži i velika strmina u prijelaznom području, optimalni su Legendreovi filtri. Aproksimacijska funkcija ima oblik

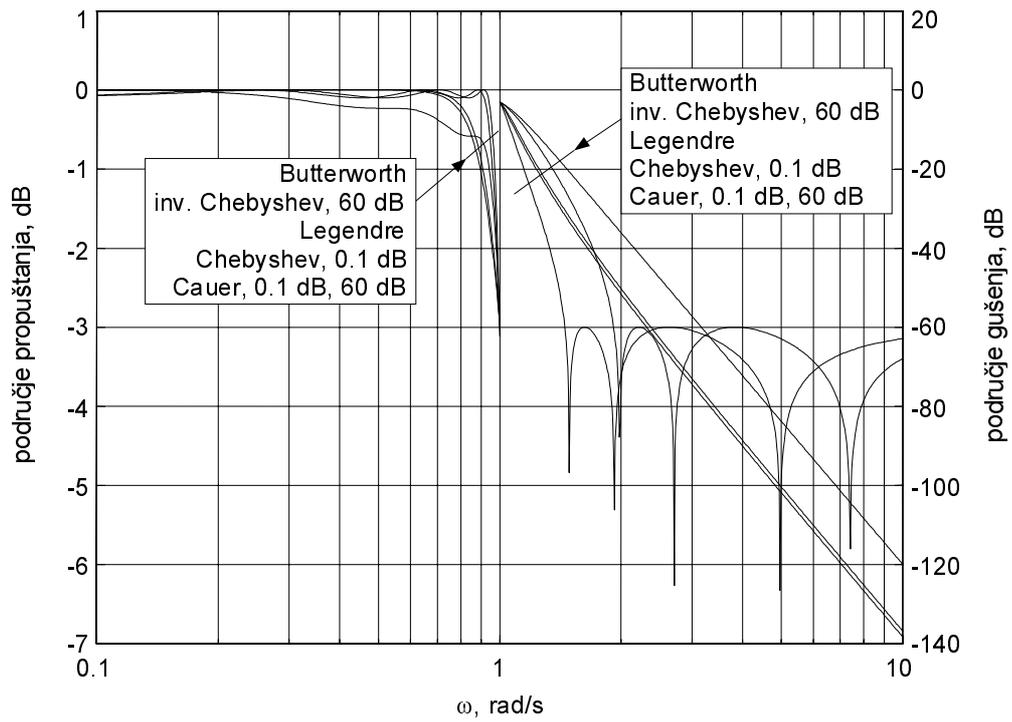
$$A_N(\omega^2) = L_N(\omega^2) \quad (2.11)$$

gdje su  $L_N(\omega)$  Legendreovi polinomi. Ovu aproksimaciju je predložio Papoulis, [49], [48], pa se ovi filtri nazivaju i Papoulisovi filtri. Iako Legendreovi filtri zadanog reda imaju najveću strminu prijelaznog područja uz monotono padajuću amplitudu, zbog velikih, nejednolikih odstupanja od konstante u području propuštanja, rijetko se koriste u praksi.

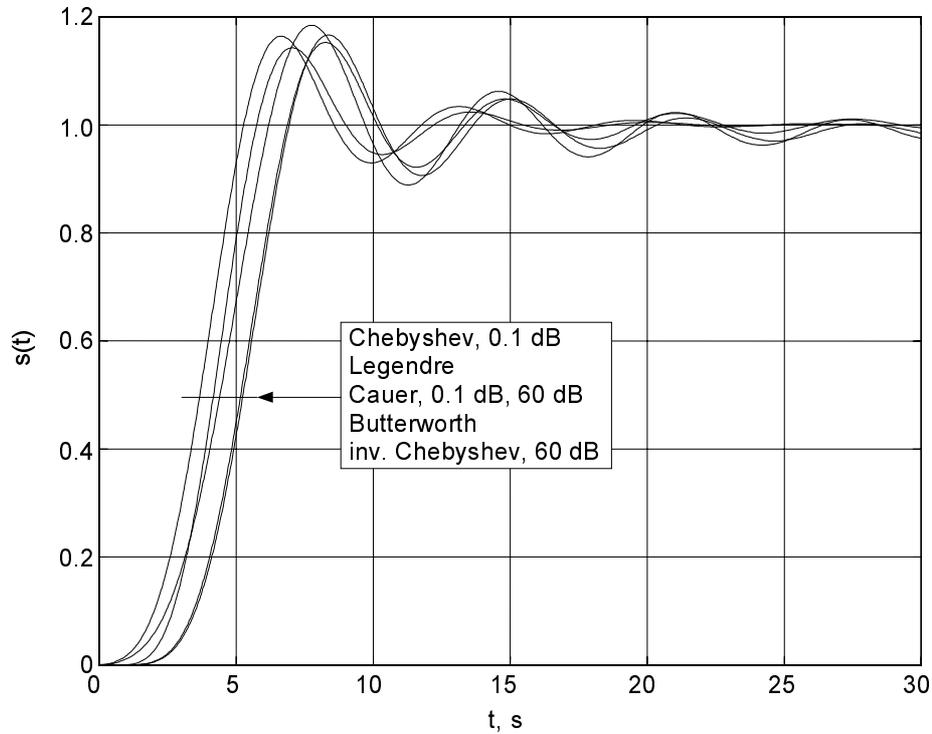
Amplitudne karakteristike spomenutih filtara, 6. reda, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ , prikazane su slikom 2.3. Svojevremeno im je dobra aproksimacija konstantne amplitude u području propuštanja te velika strmina amplitude u prijelaznom području. Nažalost, nemaju dobra svojstva u vremenskoj domeni. Slika 2.4 prikazuje odzive filtara na jediničnu stepenicu. Vidljiv je prebačaj u odzivu koji u ovom slučaju iznosi 14,3 % za Butterworthov, 15.2 % za Legendreov, te 16.3 % za inverzni Chebyshevjev filtar s valovitošću u području gušenja 60 dB. Predstavnicima valovite aproksimacije u području propuštanja imaju još veće prebačaje. Za Chebyshevjev filtar valovitosti 0.1 dB on iznosi 18.0 %, a za Caerov filtar valovitosti 0.1 dB u području propuštanja i 60 dB u području gušenja prebačaj je 19.7 %. S porastom reda, kod ovih filtara raste iznos prebačaja i vrijeme potrebno da se postigne približno stacionarno stanje. Najmanje vrijeme porasta, mjereno od 10 % do 90 % stacionarnog stanja, ima Butterworthov filtar, 2.68 s, a najveće Caerov filtar, 3.31 s.

Slična razmatranja možemo provesti i za impulsne odzive, prikazane slikom 2.5. Odzivi su izrazito asimetrični i oscilatorni, s velikim podbačajima koji rastu s redom filtra. Oscilatorno ponašanje posebno je izraženo kod Caerovog i Chebyshevjevog filtra, a podbačaj iznosi čak 44.3 % odnosno 37.5 %, relativno prema maksimumu impulsnog odziva. Nešto manji podbačaji dobivaju se inverznim Chebyshevjevim i Legendreovim filtrom, 33.6 % 34.4 %, dok Butterworthov filtar ima najmanji podbačaj, koji iznosi 27.2 %.

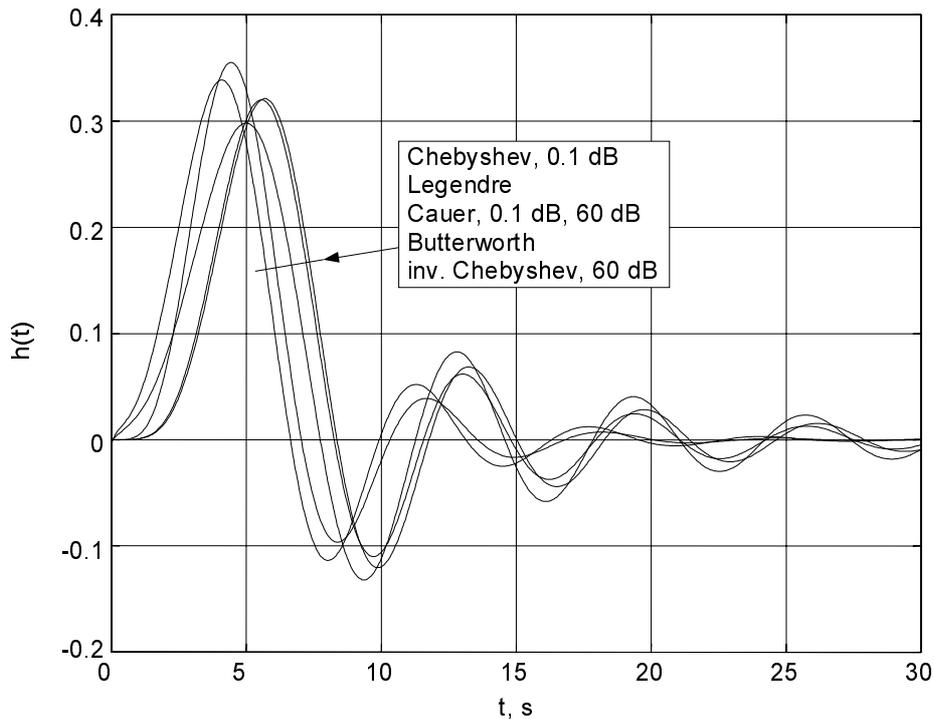
Sa stajališta vremenske domene, najbolja svojstva (najmanji prebačaj i podbačaj, najkraće istitravanje i najkraće vrijeme porasta) ima Butterworthov filtar.



Slika 2.3 Amplitudno frekvencijske karakteristike filtera 6. reda, koji optimalno aproksimiraju konstantnu amplitudu, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .



Slika 2.4 Odzivi na jediničnu stepenicu filtera 6. reda, koji optimalno aproksimiraju konstantnu amplitudu, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .



Slika 2.5 Impulsni odzivi filtera 6. reda, koji optimalno aproksimiraju konstantnu amplitudu, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .

Postoje dva uzroka koji objašnjavaju prebačaj i oscilacije u vremenskim odzivima. Prvi uzrok oscilatornog ponašanja posljedica je velike strmine amplitude u prijelaznom području filtra. Idealizirani Gaussov filter (2.2), s linearnom fazom, ima Gaussov impulsni odziv (2.4). Razmatrajući utjecaj amplitudnih izobličenja na svojstva vremenskih odziva, Humpherys [33] je pokazao da povećanje strmine amplitude idealiziranog Gaussovog filtra, kao na primjer

$$|H(j\omega)| = \left[ 1 + \frac{\ln(2)}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_{3dB}} \right)^2 \right] \exp \left[ -\frac{\ln(2)}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_{3dB}} \right)^2 \right], \quad (2.12)$$

uzrokuje pojavu prebačaja u vremenskim odzivima.

Povećanje strmine, kao granični slučaj daje skokovitu amplitudu oblika (2.1). Uz linearnu fazu, impulsni odziv takvog filtra ima oblik [33]

$$h(t) = \frac{\omega_{3dB}}{\pi} \frac{\sin(\omega_{3dB}t - N\pi/2)}{\omega_{3dB}t - N\pi/2}, \quad (2.13)$$

s podbačajem 21.7%. Odziv na jediničnu stepenicu ima oblik "Sinus integrala" s prebačajem i podbačajem 8.98 %.

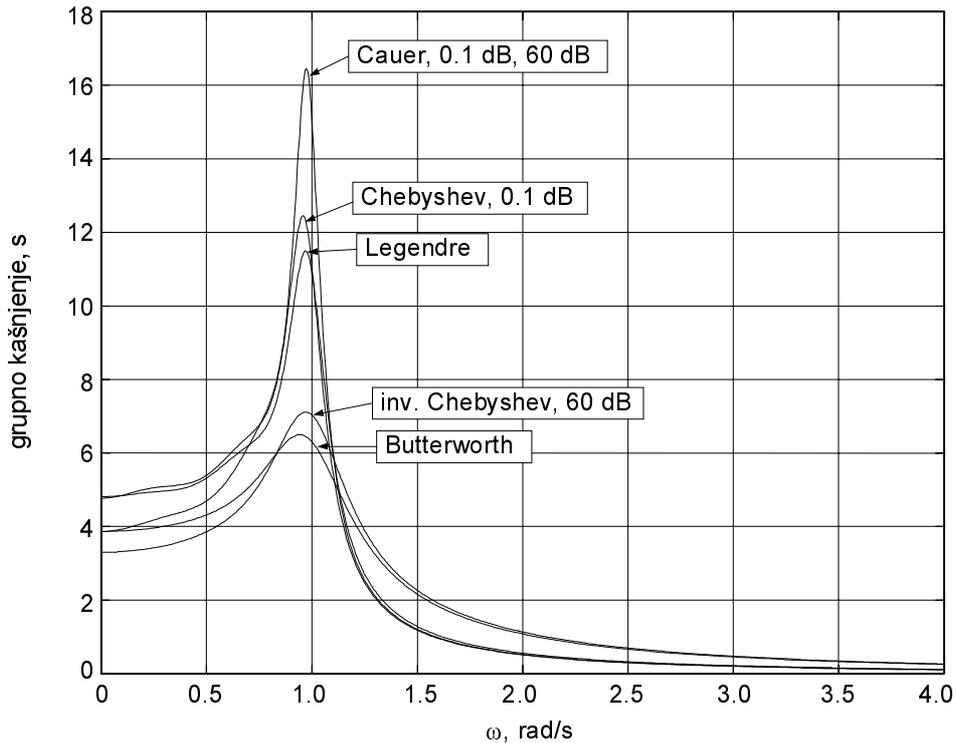
Drugi uzrok prebačaja kod vremenskih odziva uzrokovan je faznim izobličenjima. Filtrar s konstantnom amplitudom (2.1) neće unositi fazna izobličenja ako je faza linearna

$$\Theta(\omega) = -\frac{N\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_{3dB}} = k_{\Theta} \omega, \quad (2.14)$$

tj. ako je grupno kašnjenje konstantno

$$\tau(\omega) = \frac{N\pi}{2\omega_{3dB}} = k_{\tau} \quad (2.15)$$

Humpherys [31], [33] je pokazao da fazna izobličenja uzrokuju asimetriju impulsnog odziva. Velika odstupanje grupnog kašnjenja od konstante uzrokovat će veliko i dugotrajno istitravanje, [33]. Ilustracija takvog razmatranja prikazana je slikom 2.6. Vidljivo je da veće nadvišenje u grupnom kašnjenju imaju upravo filteri s naglašenim istitravanjem u impulsnom odzivu, slika 2.5.



Slika 2.6 Grupno kašnjenje filtera 6. reda, koji optimalno aproksimiraju konstantnu amplitudu, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .

## 2.2 Linearizacija faze

Fazna izobličenja bit će manja ako filtru u kaskadu dodamo sklop za linearizaciju faze, ili, drugim imenom, ujednačavanje vremena grupnog kašnjenja. Uobičajeno je za linearizaciju faze uzeti mrežu čija je prijenosna funkcija svepropusna, tj. pojačanje je jednako 1, za sve frekvencije. Takva funkcija ima oblik

$$H_a(s) = \frac{P(-s)}{P(s)} = \frac{P_p(s) - P_n(s)}{P_p(s) + P_n(s)}, \quad (2.16)$$

gdje je  $P_p(s)$  polinom koji sadrži samo parne potencije, dok je  $P_n(s)$  polinom koji sadrži samo neparne potencije varijable  $s$ . Kao što je poznato, u stabilnom sustavu polovi prijenosne funkcije leže u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine. Nule funkcije  $H_a(s)$  u tom slučaju se nalaze u desnoj poluravnini, simetrično polovima obzirom na  $j\omega$  os.

Prijenosna funkcija (2.16) ne može se odrediti analitičkim postupkom osim u nekim jednostavnim slučajevima. U praksi se koriste grafički [77] ili numerički postupci. Postupak može krenuti od zahtjeva da grupno kašnjenje cijelog sustava bude maksimalno glatko. Takva aproksimacija je dobra na niskim frekvencijama, ali razmjerno loša na rubu područja propuštanja. Bolje ponašanje na rubu područja propuštanja daje aproksimacija jednolike valovitosti. Primjer takvog algoritma temeljenog na numeričkom postupku dao je Crane [13]. Humpherys [32] je opisao postupak aproksimacije polinoma pomoću racionalne funkcije, koji se također može upotrijebiti za sintezu odgovarajućeg svepropusnog sustava. U slučaju monotono padajuće amplitude, kao kod Butterworthovog filtra, jednolika valovitost nije poželjna obzirom da je gušenje filtra raste s frekvencijom. Slična je situacija kod filtera s amplitudom jednolike valovitosti, ako amplituda spektra signala pada s frekvencijom. Razmatrajući fazne korektore za takve slučajeve, Crane i Klopfenstein [14] te kasnije El-Masry i Josephs [20] uveli su u postupak sinteze težinsku funkciju, koja uzrokuje veću valovitost grupnog kašnjenja na frekvencijama s manjom amplitudom signala. Iako su ti autori razmatrali prvenstveno televizijske sustave, ideja konstantnog grupnog kašnjenja nejednolike valovitosti primjenjiva je i u drugim aplikacijama.

Popularna metoda određivanje prijenosne funkcije podsustava za ujednačavanje grupnog kašnjenja temelji se na minimizaciji srednje kvadratne pogreške [6]

$$\varepsilon = \int_{\omega_1}^{\omega_2} [\tau_0 - \tau_f(\omega) - \tau_a(\omega)]^2 d\omega \quad (2.17)$$

gdje je  $\tau_a(\omega)$  grupno kašnjenje koje pripada svepropusnom podsustavu,  $\tau_f(\omega)$  polaznom filtru, dok je  $\tau_0$  željeno kašnjenje cijelog sustava. Izraženo pomoću faze filtra,  $\Theta_f$ , i svepropusnog podsustava,  $\Theta_a$ , ono iznosi

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} [\Theta_f(\omega_1) - \Theta_f(\omega_2) + \Theta_a(\omega_1) - \Theta_a(\omega_2)] \quad (2.18)$$

Praktičan nedostatak linearizacije faze očituje se u podizanju ukupnog reda sustava što realizaciju čini složenijom i samim tim manje ekonomičnom. Ugrubo, potreban red podsustava za linearizaciju faze može se procijeniti kao [77]

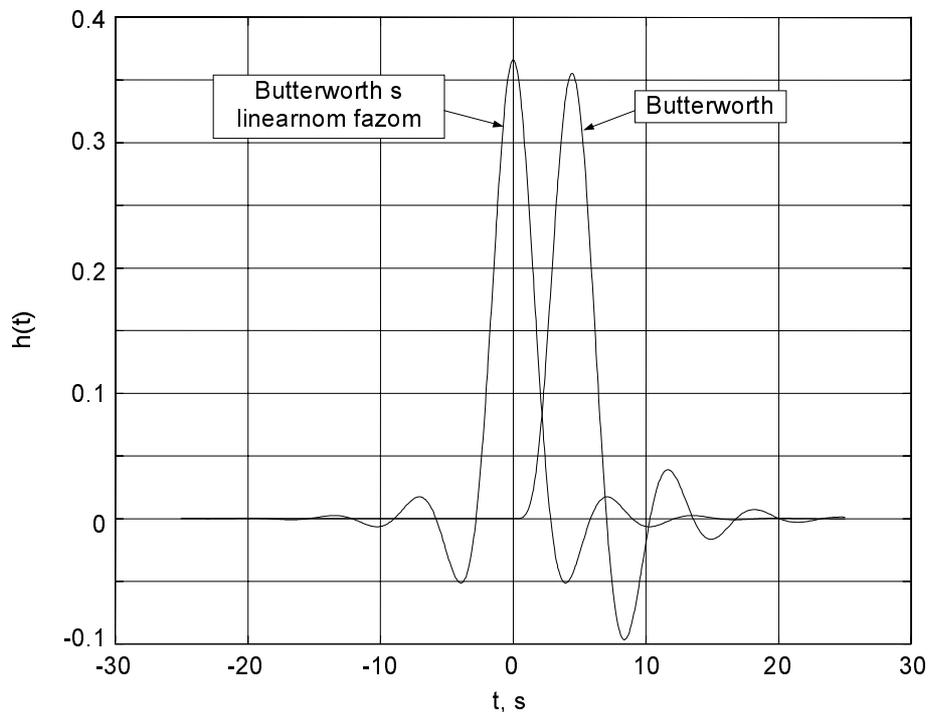
$$N_a = 2\Delta_B\Delta_\tau + 1 \quad (2.19)$$

gdje je  $\Delta_B$  pojas u Hertzima unutar kojeg se radi linearizacija, a  $\Delta_\tau$  odstupanje grupnog kašnjenja unutar pojasa  $\Delta_B$ , u sekundama.

Slika 2.7 prikazuje impulsni odziv Butterworthovog filtra 6. reda i odziv filtra s Butterworthovom amplitudom i idealnom linearnom fazom. Takav filter je nekauzalan, ali njegov odziv ukazuje na neke važne činjenice. Iako linearizacija faze općenito poboljšava svojstva vremenski odziva, ostaje značajan utjecaj strmine amplitude u prijelaznom području filtra.

Bolja svojstva u vremenskoj domeni mogu se očekivati kod filtera Gaussove familije. Aproksimacija linearne faze, bez ograničenja postavljenih na amplitudu dat će dobru aproksimaciju

faze i blago padajuću amplitudu u prijelaznom području pa se mogu očekivati i vremenski odzivi bez ili sa malim prebačajima, podbačajima i oscilacijama. S druge strane, aproksimacija Gaussove amplitude dat će ujedno i aproksimaciju Gaussovog impulsnog odziva.



Slika 2.7 Impulsni odziv Butterworthovog filtra 6. reda sa stvarnom i idealiziranom faznom karakteristikom.

### 2.3 Gaussova familija filtara

Sustav s konstantnim grupnim kašnjenjem,  $\tau(\omega)=t_d$ , i amplitudom jednakom 1 za sve frekvencije, ima prijenosnu funkciju oblika

$$H(s) = e^{-st_d} \quad (2.20)$$

U praksi ovu funkciju možemo aproksimirati raznim postupcima.

Maksimalno glatku aproksimaciju grupnog kašnjenja predložio je Thomson [65]. Storch [58] je razvio jednostavan postupak određivanja prijenosne funkcije temeljen na odsijecanju frakcionalnog razvoja funkcije  $ch(s)$ . Može se pokazati da tako dobivena prijenosna funkcija ima oblik

$$H(s) = \frac{K_0}{B_N(s)} \quad (2.21)$$

gdje je  $B_N(s)$  Besselov polinom  $N$ -tog stupnja. Ovi filtri poznati su pod nazivom Thomsonovi kao i Besselovi filtri.

Besselovi filtri preferiraju točku  $\omega=0$  gdje je odstupanje grupnog kašnjenja od konstante jednako 0, dok s porastom frekvencije odstupanje raste. Chebyshevljeva aproksimacija grupnog

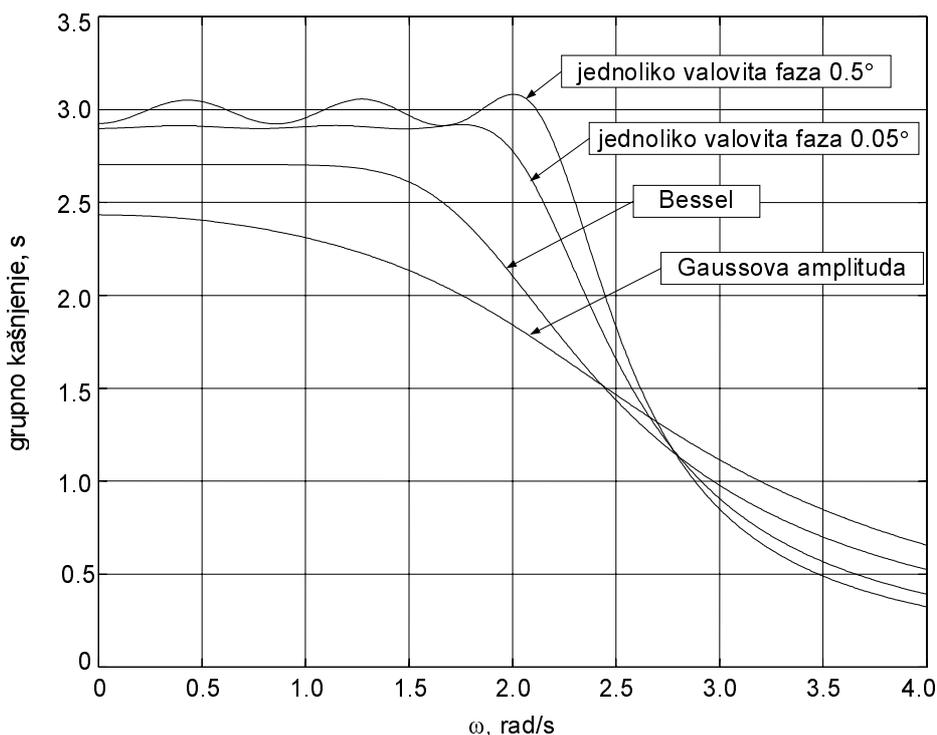
kašnjenja [1], [66], slično kao i kod aproksimacije konstantne amplitude, daje jednoliko valovitu aproksimaciju na određenom intervalu. Polovi ovih filtera dobiveni su numeričkim postupcima [66].

Gaussova amplituda oblika (2.2) može se aproksimirati Taylorovim redom

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{e^{\omega^2}} = \frac{1}{1 + \omega^2 + \frac{\omega^4}{2!} + \dots + \frac{\omega^{2N}}{N!}} \quad (2.22)$$

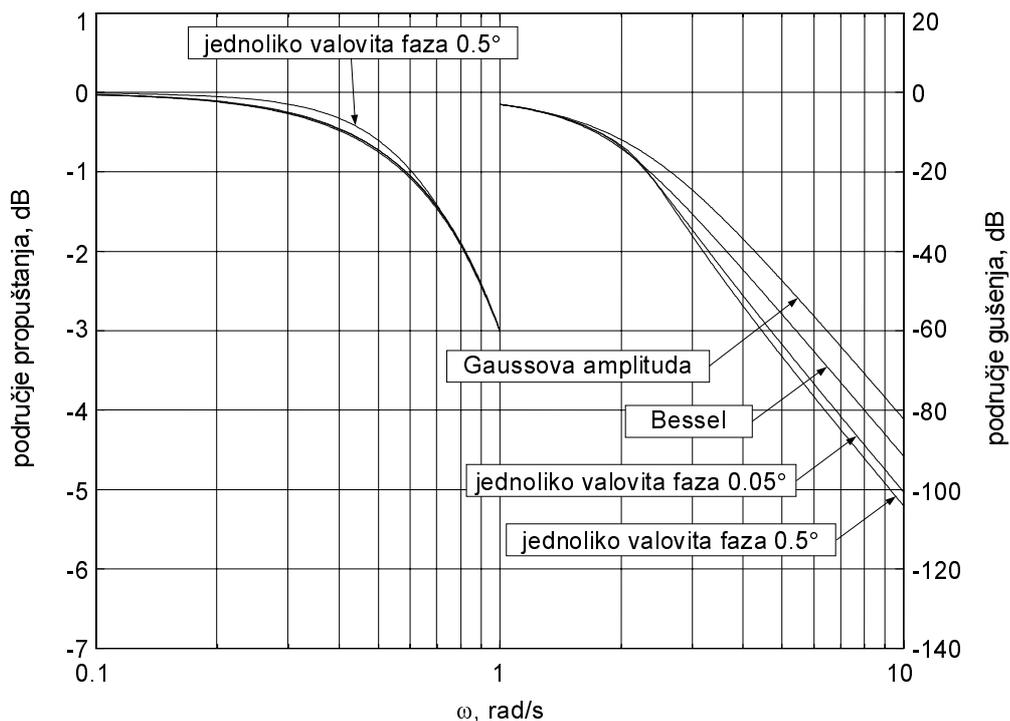
Odsijecanje nakon  $2N$ -te potencije daje amplitudnu karakteristiku filtra  $N$ -tog reda [18]. Ovako dobiveni filteri nazivaju se filteri s Gaussovom amplitudom.

Filteri Gaussove familije dobro aproksimiraju konstantno grupno kašnjenje, slika 2.8. Izuzetak je filter s Gaussovom amplitudom, što je posljedica zahtjeva postavljenih isključivo na amplitudnu karakteristiku. Jednolika valovitost postavlja manje zahtjeve na grupno kašnjenje u blizini  $\omega=0$ , pa je frekvencijsko područje u kojem kašnjenje aproksimira konstantu veće kod filtra s jednolikom valovitošću nego kod Besselovog filtra. Veća valovitost ujedno daje i šire područje aproksimacije, kao što pokazuje primjer dan slikom 2.8.



Slika 2.8 Grupno kašnjenje filtera 6. reda Gaussove familije, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .

Zahtjevi postavljeni na grupno kašnjenje, bez istovremenih zahtjeva na amplitudu, dat će blago padajuću amplitudu u prijelaznom području filtra, slika 2.9. Još manju strminu dat će aproksimacija Gaussove amplitude. Gušenje filtera Gaussove familije na frekvenciji  $10\omega_{3dB}$  je nekoliko desetaka decibela manje od gušenja "all-pole" filtera Chebyshevljeve familije, odgovarajućeg reda. Filteri Gaussove familije u području propuštanja i dijelu prijelaznog područja aproksimiraju Gaussovu krivulju, danu izrazom (2.2).

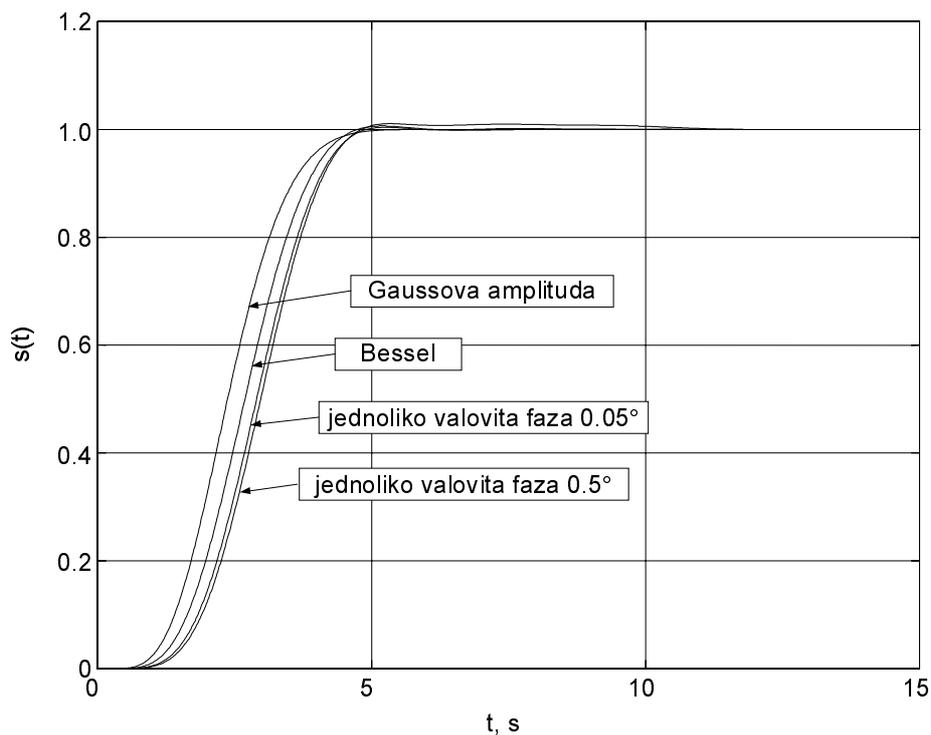


Slika 2.9 Amplitudno frekvencijske karakteristike filtera 6. reda Gaussove familije, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .

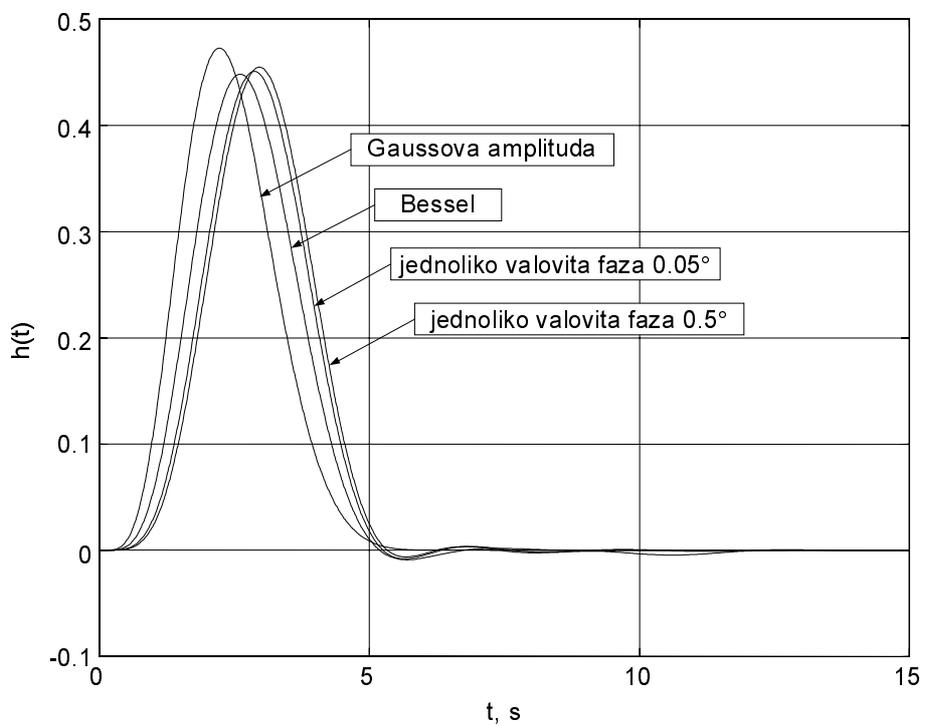
Približno konstantno grupno kašnjenje u području propuštanja i dijelu prijelaznog područja te mala strmina amplitude u prijelaznom području ovih filtera imaju kao posljedicu dobra svojstva u vremenskoj domeni. Prebačaj kod odziva na stepenicu filtera 6. reda iznose 0.00 % za filter s Gaussovom amplitudom, odnosno 0.64 % za Besselov filter, slika 2.10. Filtri s jednolikom valovitošću faze  $0.05^\circ$  i  $0.5^\circ$  imaju prebačaje 0.42 % i 1.05 %. Slabije potiskivanje viših frekvencija nego kod filtera koji aproksimiraju konstantnu amplitudu uzrokuje brži porast odziva na stepenicu. Brzina porasta kod filtera 6. reda iznosi 2.15 s kod filtera s Gaussovom amplitudom, 2.20 s kod Besselovog filtera, te 2.18 s i 2.15 s kod filtera s jednolikom valovitošću faze  $0.05^\circ$  i  $0.5^\circ$ .

Impulsni odziv aproksimira Gaussovu krivulju, kao što prikazuje slika 2.11. Podbačaji i istitravanja su znatno manji nego kod filtera Chebyshevljeve familije. Podbačaj filtera 6. reda najmanji je kod filtera s Gaussovom amplitudom, 0.00 %, a najveći kod Besselovog filtera, 1.96%. Filter s jednolikom valovitošću faze  $0.05^\circ$  ima podbačaj 1.79 % dok filter valovitosti  $0.5^\circ$  ima podbačaj od samo 1.36 %. Ova činjenica ukazuje na problem izbora odgovarajuće valovitosti ako treba zadovoljiti zahtjeve u vremenskoj domeni.

Iz slike 2.10 vidi se da filteri Gaussove familije nemaju izraženu simetriju impulsnog odziva karakterističnu za sustave s linearnom fazom.



Slika 2.10 Odzivi na jediničnu stepenicu filtera 6. reda Gaussove familije, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .



Slika 2.11 Impulsni odzivi filtera 6. reda Gaussove familije, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .

Radi potpunosti, potrebno je reći da postoje i druge aproksimacije konstantnog grupnog kašnjenja, dobivene sličnim postupcima kao Besselov filter. Mnogi od njih samo modificiraju ili generaliziraju poznatu Storchovu metodu.

Storchova metoda određivanja prijenosne funkcije Besselovog filtra temeljena je na odsijecanju frakcionalnog razvoja funkcije  $ch(s)$  [58]

$$ch(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \dots}} \quad (2.23)$$

D. E. Johnson, J. R. Johnson i Eskandar [36] predložili su modifikaciju Storchovog postupka dodajući parametar  $\alpha$  u izraz (2.23)

$$ch(s) = \frac{\alpha + 1}{s} + \frac{1}{\frac{\alpha + 3}{s} + \frac{1}{\frac{\alpha + 5}{s} + \dots}} \quad (2.24)$$

Izborom vrijednosti parametra  $\alpha$  mogu se dobiti prijenosne funkcije koje aproksimiraju konstantno grupno kašnjenje s nadvišenjem.

J. R. Johnson, D. E. Johnson, Boudra i Stoks [37] predložili su klasu filtara čija je prijenosna funkcija dana izrazom

$$H(s) = \frac{K_0}{B_N^\alpha(s)} \quad (2.25)$$

gdje je  $B_N^\alpha(s)$  generalizirani Besselov polinom. Parametar  $\alpha$  određuje svojstva filtara, a slučaj  $\alpha=0$ , daje maksimalno glatku aproksimaciju grupnog kašnjenja.

Cuong i Neiryneck [15] aproksimiraju eksponencijalnu funkciju pomoću sume Besselovih polinoma

$$e^s = \sum_{k=0}^{\infty} B_{k-1}^\alpha \left( \frac{\alpha}{s} \right) s^k \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)^k \frac{1}{k!} \quad (2.26)$$

Prvih  $N+1$  članova daje polinom  $N$ -tog stupnja,  $C_N(s)$ , koji određuje prijenosnu funkciju filtra  $N$ -tog reda

$$H(s) = \frac{K_0}{C_N(s)} \quad (2.27)$$

I u ovom slučaju  $\alpha$  predstavlja parametar koji određuje svojstva filtra.

Valand [69] opisuje valovitu aproksimaciju konstantnog grupnog kašnjenja dobivenu odsijecanjem faktoriziranog oblika McLaurinovog razvoja funkcija  $sh(s)$  i  $ch(s)$

$$H(s) = \frac{K_0}{sh(s) + ch(s)} \approx \frac{K_0}{\alpha s(s^2 + \pi^2)(s^2 + 4\pi^2)\dots + (s^2 + \frac{1}{4}\pi^2)(s^2 + \frac{9}{4}\pi^2)\dots} \quad (2.28)$$

Parametar  $\alpha$  određuje iznos valovitosti grupnog kašnjenja, koje u ovom slučaju nije jednoliko.

Izbor parametra  $\alpha$  u ovim filterima ovisi o zahtjevima konkretne aplikacije. Svojstva ovih filtera u frekvencijskoj i vremenskoj domeni interesantna su s matematičkog aspekta, ali niti jedan od njih ne zadovoljava jednoznačno neki određen zahtjev kao što je to slučaj kod Besselovog (Thomsonovog) filtra i filtra s jednolikom valovitošću faze. To je ujedno i jedan od razloga njihove rijetke upotrebe.

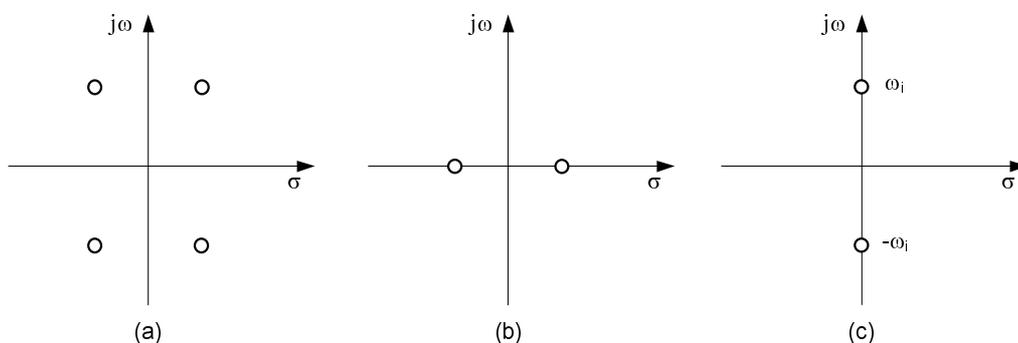
## 2.4 Poboljšavanje amplitude

Postupak linearizacije faze pomoću svepropusnih mreža, opisan u poglavlju 2.2, nije utjecao na amplitudu. Na sličan način može se promijeniti amplitudna karakteristika, a da se istovremeno ne promijeni linearnost faze. Taj postupak ponekad se primjenjuje na filtre Gaussove familije da bi se povećala strmina amplitude u prijelaznom području.

Korekcija amplitude provodi se množenjem polazne prijenosne funkcije  $H_p(s)$  polinomom  $P_f(s)$ . Tako se dobiva nova prijenosna funkcija

$$H(s) = H_p(s) P_f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} P_f(s) \quad (2.29)$$

gdje je stupanj polinoma  $P(s)P_f(s)$  manji ili jednak stupnju polinoma  $Q(s)$ . Ako polinom  $P_f(s)$  sadrži kompleksne parove nula u lijevoj poluravnini, i njima zrcalne nule u desnoj ravnini, kao što prikazuje slika 2.12a, ukupna promjena faze uzrokovana polinomom  $P_f(s)$  bit će jednaka 0 za bilo koju frekvenciju. Simetrično postavljen par realnih nula, slika 2.12b, mijenja fazu za  $\pi/2$  na svim frekvencijama. Par imaginarnih nula na frekvenciji  $\omega_i$ , prikazan slikom 2.12c, ne mijenja fazu signala na frekvencijama u području  $|\omega| < |\omega_i|$ , ali mijenja fazu za  $\pi/2$  u području  $|\omega| > |\omega_i|$ .



Slika 2.12 Položaj nula polinoma za korekciju amplitude, koji istovremeno ne utječe na fazu.

Ovakav postupak opisali su Kuo i Karnaug [40]. Njihov algoritam temelji se na minimizaciji srednje kvadratne pogreške pri čemu se odstupanje od tražene karakteristike računa u konačnom

broju točaka. Nekoliko godina kasnije Unbehauen [68] je opisao postupak određivanja prijenosnih funkcija s Chebyshevljevom karakteristikom u području gušenja, temeljen na opisanom poboljšavanju amplitude. Kao polazni filter uzima se filter sa svim nulama u beskonačnosti, a Chebyshevljeva karakteristika u području gušenja dobivena je dodavanjem parova imaginarnih nula. Yoshida [78] je sličan postupak primijenio na Besselove filtre. Za razliku od Unbehauena, Yoshida je radio s prijenosnim funkcijama, koje osim imaginarnih sadrže i kompleksne nule.

Za razliku od linearizacije faze, opisani postupak poboljšavanja amplitude ne podiže red sustava, te je sa tog aspekta učinkovit. Svojstva u vremenskoj domeni rezultat su fazne karakteristike polaznog filtra i postignute strmine amplitude u prijelaznom području. Prebačaji i podbačaji vremenskih odziva bit će u pravilu veći nego kod polaznog filtra.

## 2.5 Prijelazni filtri

Filtri Gaussove familije imaju približno konstantno vrijeme grupnog kašnjenja u određenom frekvencijskom području. Odzivi u vremenskoj domeni pokazuju dobra svojstva. Nažalost, strmina amplitude u prijelaznom području je mala, što je u nekim aplikacijama može biti nedostatak. Filtri koji aproksimiraju konstantnu amplitudu imaju velika nadvišenja u vremenu grupnog kašnjenja koja uzrokuju oscilatorne vremenske odzive s velikim prebačajima i podbačajima, što je ponekad nedopustivo. Ponekad je poželjan kompromis između konstantnog grupnog kašnjenja i strme amplitude. Kompromis se postiže prijelaznim filterima ili sintezom prijenosnih funkcija uz istovremeno postavljene zahtjeve na amplitudu i grupno kašnjenje.

Prijelazni filtri ujedinjuju svojstva dviju filterarskih klasa, jedne koja aproksimira amplitudu i druge koja aproksimira grupno kašnjenje. Najpoznatiji prijelazni filtri su takozvani Butterworth-Thomson prijelazni filtri i Gauss-Chebyshev prijelazni filtri. Prijenosna funkcija Butterworth-Thomson prijelaznih filtara dobiva se interpolacijom polova Butterworthovog i Thomsonovog filtra normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ , a postupak su predložili Pelless i Murakami, [50]. Polovi prijelaznog filtra,  $p_{tbt}$ , nalaze se na putu koji povezuje odgovarajuće polove polaznih filtara. Polovi su određeni izrazom

$$p_{tbt} = r_t^\alpha e^{j[\varphi_b - \alpha(\varphi_b - \varphi_t)]} . \quad (2.30)$$

Indeksi b i t označavaju polove Butterworthovog i Thomsonovog filtra dane izrazima

$$p_b = r_b e^{j\varphi_b} = e^{j\varphi_b} , \quad (2.31)$$

$$p_t = r_t e^{j\varphi_t} . \quad (2.32)$$

Parametar  $\alpha$  određuje svojstva filtra. Njegova vrijednost nalazi se između 0 i 1, pri čemu za  $\alpha=0$  filter postaje Butterworthov, dok  $\alpha=1$  odgovara Thomsonovoj karakteristici. Vrijednosti između 0 i 1 daju filtre čija su svojstva negdje između svojstava polaznih filtara. Detaljan prikaz frekvencijskih i vremenskih odziva ovih filtara može se naći npr. u [50] i [30].

Interpolacijska metoda dana izrazima (2.30), (2.31) i (2.32) može se primijeniti i na druge filtarske aproksimacije. Primjer su prijelazni Legendre-Thomsonovi filtri [2]. Johnson i drugi [38] primijenili su ovu interpolacijsku metodu na prijelazne filtre s racionalnim prijenosnim funkcijama.

Drugu popularnu klasu prijelaznih filtara, Gauss-Chebyshevljeve prijelazne filtre, predložio je Humpherys [33]. Ti filtri, na intervalu  $0 \leq \omega \leq 1$ , jednolikom valovitošću aproksimiraju Gaussovu krivulju. Izraženo u dB, gušenje ima oblik

$$G(\omega, \varepsilon, \alpha) = [10 \alpha \log(2) + \varepsilon] \omega^2 - \varepsilon, \text{ dB} \quad (2.33)$$

za parni red, odnosno

$$G(\omega, \varepsilon, \alpha) = [10 \alpha \log(2) - \varepsilon] \omega^2 + \varepsilon, \text{ dB} \quad (2.34)$$

za neparni red filtra. Parametar  $\alpha$  određuje do kojeg iznosa gušenja u decibelima će se aproksimirati Gaussova krivulja, dok  $\varepsilon$  određuje valovitost. Na primjer, za  $\alpha=4$  Gaussova krivulja aproksimirana je u području od 0 dB do 12 dB. Ovakva aproksimacija daje približno konstantno grupno kašnjenje na frekvencijama blizu ishodišta, i strmo padajuću amplitudu u prijelaznom području. Strmina amplitude je posljedica valovitosti, kao što je to bio slučaj kod Chebyshevljeve aproksimacije konstantne amplitude. Svojstva ovih filtara, s Gaussovom aproksimacijom do 6 dB i do 12 dB dana su u [79].

Interpolacija polova dviju filtarskih klasa ne predstavlja optimalnu aproksimaciju tražene karakteristike, već se oslanja na činjenicu da će neki filter s prijelaznom karakteristikom zadovoljavati zahtjeve određene aplikacije. Drugačiji pristup predstavlja aproksimacija kod koje je određen broj stupnjeva slobode, tj. nezavisnih parametara prijenosne funkcije, iskorišten za zadovoljavanje zahtjeva postavljenih na amplitudu, dok su ostali iskorišteni za fazu. Takav pristup vodi ka kompromisu između amplitude i faze, pa se pojavljuje problem koliku težinu dati amplitudi, a koliku fazi. Pomak u rješavanju tog problema za funkcije s minimalnom fazom dali su Carlin i Wu [10]. Oni su, za zadanu amplitudu izvan područja propuštanja i zadanu fazu unutar područja propuštanja, pomoću Hilbertovih transformacija odredili oblik amplitudne karakteristike. Dobivena karakteristika može se aproksimirati na više načina, od kojih su neki predloženi u [10] i [52].

Kompromisnu karakteristiku moguće je odrediti i numeričkim postupkom. Autor ovog rada, i suradnici [75] opisali su jedan takav filter. Postupak određivanja prijenosne funkcije temelji se na minimizaciji funkcije cilja koja opisuje odstupanje filtra od traženih zahtjeva. Funkcija cilja sadrži odstupanje od zadane amplitude i odstupanja od zadanog grupnog kašnjenja.

Prijelazni filtri dobiveni interpolacijom ne predstavljaju optimum niti po jednom kriteriju. Promjenom parametra koji određuje svojstva filtra (u gornjim slučajevima je to parametar  $\alpha$ ), traži se filter čija svojstva istovremeno zadovoljavaju zahtjeve dane u frekvencijskoj i/ili vremenskoj domeni. Prijelazni filtri dobiveni analitičkim postupcima ili numeričkom optimizacijom obično su dobiveni prema nekom kriteriju. Nažalost problem zadavanja takvog kriterija višeznačan je kao i problem odabira interpolacijom dobivenog prijelaznog filtra. Zato se takvi filtri obično koriste samo u specifičnim primjenama, kao na primjer [75].

## 2.6 Filtri dobiveni na osnovi iskustva

Izbor određenog prijelaznog filtra radi se na osnovi uvida u svojstva pojedinih filtara iz klase. U tom slučaju pažnja se rijetko posvećuje kriteriju prema kojem je filter izračunat. Takav pristup motivirao je mnoge autore da pokušaju napraviti filtre, na osnovi pretpostavljenih parametara prijenosnih funkcija. Ako naknadna provjera filtra pokaže dobra svojstva, filter je pogodan za upotrebu u praksi. Većina autora takvih filtara polazi se poznatog rasporeda polova klasičnih filtarskih aproksimacija. Na primjer, polovi Butterworthovog filtra su jednoliko razmaknuti po kutu, polovi Besselovog filtra pokazuju tendenciju ka jednolikom razmaku po vertikali, polovi filtara s linearnom fazom leže izvan jedinične kružnice na krivulji koja je izdužena po ordinati, itd.

Najjednostavniji filter ovog tipa dobiva se kad polove postavimo na vertikalni pravac s apscisom  $-\sigma_p$ . Pritom su polovi po vertikali jednoliko razmaknuti za iznos  $\Delta\omega$ . Ovako dobivene prijenosne funkcije aproksimiraju konstantno grupno kašnjenje s približno jednolikom valovitošću. Manji  $\sigma_p$  uz dani  $\Delta\omega$  dat će veću valovitost grupnog kašnjenja. Ova klasa filtara ne daje zadovoljavajuće rezultate za mali broj polova [59].

Praktično upotrebljive aproksimacije predložili su Scanlan [55], [56] i Kuh [39]. Scanlan je na elipsu postavio polove jednoliko razmaknute po ordinati. Kuh je također koristio elipsu, ali je polove razmaknuo jednoliko po kutu. U oba slučaja parametar koji određuje svojstva filtra iz klase dan je omjerom poluosi elipse,  $\alpha=b/a$ . Autori su na osnovi iskustva predložili vrijednost parametra  $\alpha$ , takvu da filter valovito aproksimira konstantno grupno kašnjenje, s manjom valovitošću na nižim frekvencijama.

Mnogi autori istraživali su prijenosne funkcije dobivene "ad hoc" postavljanjem polova na druge krivulje. Tako je na primjer Mullick [45] postavio na parabolu polove jednoliko razmaknute po kutu. Rakovich i Rabrenovich [53], te Lazović [42] opisali su filtre čiji su polovi leže na paraboli, a jednoliko su razmaknuti po ordinati. Ghausi i Adamowicz [24] predložili su filtre čiji polovi leže na lančanicama, a jednoliko su razmaknuti po kutu.

Parametre ovih, iskustveno dobivenih filtara, kao i uvid u neka njihova svojstva može se naći u literaturi [59].

## 2.7 Aproksimacije u vremenskoj domeni

Kad govorimo o aproksimaciji u vremenskoj domeni, podrazumijevamo da su zahtjevi zadani u toj domeni. Ipak, u mnogim slučajevima, s ciljem da se pojednostavni postupak, sinteza se djelomično ili potpuno provodi u frekvencijskoj domeni. Tada je potrebno prepoznati koje svojstvo u frekvencijskoj domeni odgovara zahtjevu postavljenom u vremenskoj domeni. Nažalost, najbolja aproksimacija nekog svojstva u jednoj domeni ne daje nužno i najbolju aproksimaciju odgovarajućeg svojstva u drugoj domeni. To znači da ovaj pristup općenito ne daje optimalna svojstva obzirom na postavljen zahtjev.

Sinteza izravno u vremenskoj domeni provodi se u dva slučaja; ili kad ne postoji svojstvo u frekvencijskoj domeni koje bi odgovaralo postavljenom zahtjevu u vremenskoj domeni, ili kad se svojstvo u vremenskoj domeni želi aproksimirati u optimalnom smislu. Generalno, sinteza u vremenskoj domeni je složenija i vrlo često traži numerička izračunavanja u pojedinim dijelovima postupka. U daljnjem tekstu bit će navedeni karakteristični primjeri sinteze u vremenskoj domeni.

### 2.7.1 Filtri dobiveni sintezom u vremenskoj domeni

Tipičan primjer filtra zadanog u vremenskoj, a dobivenog u frekvencijskoj domeni je filter koji aproksimira Gaussovu amplitudu [18]. Polazeći od zahtjeva za monotonim vremenskim odzivima, dolazimo do impulsnog odziva Gaussovog oblika. Pokazuje se da u tom slučaju i amplituda filtra ima oblik Gaussove krivulje. Aproksimirajući amplitudu, mi istovremeno aproksimiramo i vremenski odziv.

Sličan pristup koristili su i neki autori koji su rješavali problem filtra s monotonim odzivom na stepenicu. Temes [62] je pokazao da najbrži monoton odziv na stepenicu ima takozvani "prolate" filter, nazvan tako po funkciji pomoću koje je izvedena njegova prijenosna funkcija. Kao ni idealizirani Gaussov filter, niti "prolate" filter nije realizibilan, obzirom da mu je amplitudna karakteristika frekvencijski ograničena. U praksi je potrebna aproksimacija amplitude, što je opet postupak u frekvencijskoj domeni.

Halpern [26] je opisao klasu filtara s približno monotonim odzivom na stepenicu, dobivenih aproksimacijom impulsnog odziva oblika

$$h(t) = \begin{cases} K(\sin \pi t)^m, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , t > 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

Laplaceov transformat gornjeg izraza sadrži funkciju  $ch(s/2)$  za parni  $m$ , odnosno  $th(s/2)$  za neparni  $m$ . Halpern je te funkcije aproksimirao na način [27] koji se razlikuje od načina koji daje Besselove filtre.

Babić [3], [4] je opisao filtre s monotonim odzivom na stepenicu i najkraćim vremenom porasta, gdje je mjeru brzine porasta dobio pomoću prvog i drugog momenta impulsnog odziva. Obzirom da se momenti lako mogu izraziti pomoću parametara prijenosne funkcije, može se provesti optimizacija vremena porasta i tako naći parametri prijenosne funkcije čiji odziv na stepenicu ima najkraće vrijeme porasta.

Jess i Schussler [34], [35] razmatrali su filtre s najmanjim produktom "vrijeme - frekvencijski pojas". Njihov pristup je kombinacija sinteze u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. Područje propuštanja (frekvencijski pojas) definirano je kao

$$|H(j\omega)| \leq q_f |H(j0)|, \quad \omega \geq \omega_s \quad (2.36)$$

gdje  $q_f$  određuje gušenje na frekvenciji  $\omega_s$ , kao što prikazuje slika 2.13a. Širina impulsnog odziva definirana je kao

$$t_w = t_2 - t_1, \quad (2.37)$$

gdje je

$$|h(t)| \leq q_t |h(t)|_{\max}, \quad t \leq t_1 \text{ i } t \geq t_2 \quad (2.38)$$

kao što prikazuje slika 2.13b. Vrijeme porasta definirano je kao

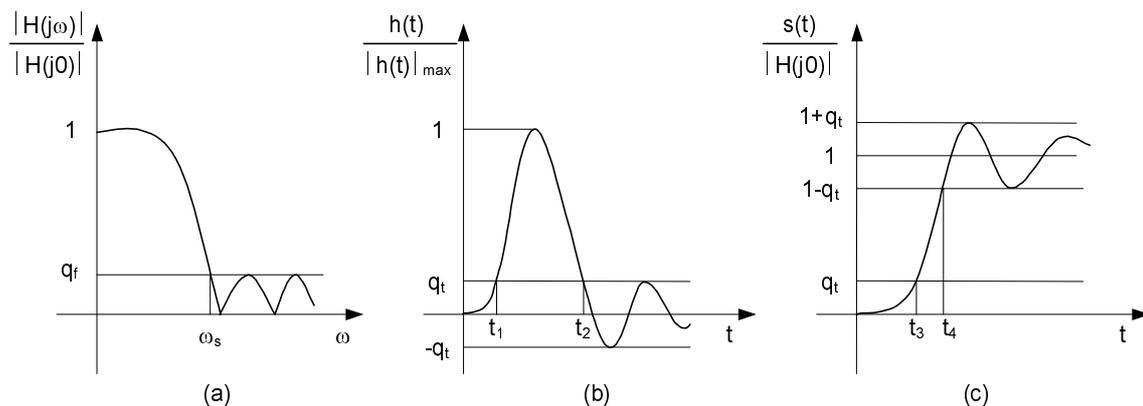
$$t_r = t_4 - t_3, \quad (2.39)$$

gdje je

$$|s(t)| \leq q_t |H(j0)|, \quad t \leq t_3 \quad (2.40)$$

$$|s(t) - |H(j0)|| \leq q_t |H(j0)|, \quad t \geq t_4 \quad (2.41)$$

kao što prikazuje slika 2.13c. Jess i Schussler odredili su dvije klase filtara. Jedna od njih ima minimalan produkt "širina impulsnog odziva - širina pojasa",  $t_w \omega_s$ , a druga minimalan produkt "brzina porasta - širina pojasa",  $t_r \omega_s$ . U oba slučaja autori predlažu jednoliku valovitost u području gušenja filtra te jednoliku valovitost tokom prvih N-1 prebačaja i podbačaja valnog oblika odgovarajućih vremenskih odziva.

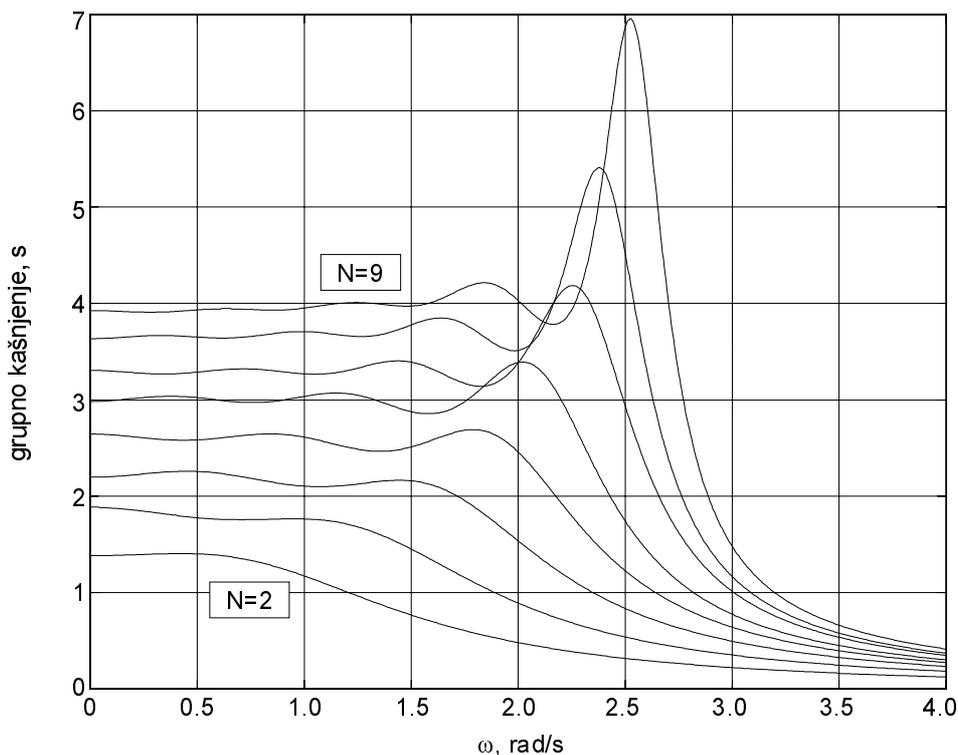


Slika 2.13 Definicija područja propuštanja, širine impulsnog odziva i vremena porasta koje su Jess u Schussler upotrijebljena za sintezu filtra s najmanjim produktom "vrijeme - frekvencijski pojas".

Dobiveni filtri interesantni su jer omogućavaju najveću brzinu prijenosa digitalnog signala (niza impulsa) uz zadano frekvencijsko područje  $\omega_s$ . Interesantna je činjenica da vrijeme grupnog kašnjenja ovih filtara razmjerno puno odstupa od konstante, unatoč dobrim vremenskim odzivima, kao što prikazuje slika 2.14. Takav rezultat se razlikuje od klasičnog pristupa u frekvencijskoj domeni, kao na primjer od filtara Gaussove familije.

Kod aproksimacije Gaussove amplitude, istovremeno aproksimiramo i Gaussov impulsni odziv. No, moguće je i obrat. Kod Morrisona [44] nalazimo začetke ideje da se linearna faza aproksimira postupkom u vremenskoj domeni. Proučavajući aproksimacije linearne faze, Morrison je uočio da odziv na stepenicu Besselovih filtara ima oblik sličan segmentu funkcije kosinus, na intervalu  $(\pi, 2\pi)$ . Iako je ukazao na tu činjenicu, nije ju upotrijebio, već je samo predložio da se ona

iskoristi kod sinteze filtara s linearnom fazom. Ulstad [67] je opisala postupak aproksimacije filtra s idealiziranom amplitudom (2.1), temeljenog na aproksimaciji njegovog impulsnog odziva. Kao što je ranije rečeno, odziv ima oblik  $\sin(x)/x$ , i dan je izrazom (2.13). Zbog nekauzalnosti, Ulstad je odziv pomakla udesno i izjednačila s nulom za  $t < 0$ , a dio odziva za  $t > 2$  je prigušila padajućom eksponencijalnom funkcijom. Tako modificiran impulсни odziv poslužio je kao polazna točka za aproksimaciju. Sličan postupak opisao je Pottle [51], dajući pritom kratak osvrt na metode koje koriste minimizaciju srednje kvadratne pogreške.



Slika 2.14 Grupno kašnjenje filtara s jednolikom valovitošću impulsnog odziva, uz  $q_f=q_t=0.01$ , normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .

### 2.7.2 Aproksimacija zadanog impulsnog odziva

Uloga filtara ne mora biti ograničena isključivo na operacije kao što su razdvajanje signala, prijenos i oblikovanje impulsa i slično. Filtri se mogu koristiti i za operacije kao što je na primjer sinteza određenog valnog oblika. U tom slučaju prijenosna funkcija neće biti određena zahtjevom za veliku brzinu porasta, mali prebačaj i sl., već će se tražiti dobra aproksimacija odziva u zadanom intervalu. Takav problem svodi se na aproksimaciju zadane funkcije  $f(t)$ , sumom kompleksnih eksponencijala

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N (C_{0i} + C_{1i}t + \dots + C_{(N-1)i}t^{N-1})A_i e^{s_i t}, \quad t \geq 0, \quad (2.42)$$

koja predstavlja impulсни odziv linearnog, vremenski nepromjenjivog sustava čiji su polovi  $s_i$ . Članovi od  $C_{1i}t$  do  $C_{(N-1)i}t^{N-1}$  posljedica su višestrukosti polova, od 2 do N. Polovi u općem slučaju mogu biti realni ili konjugirano kompleksni.

Dobar pregled postupaka za aproksimaciju zadanog oblika impulsnog odziva može se naći na primjer u literaturi [59]. Iako se u praksi koriste analitički i numerički postupci, razvoj elektroničkih računala učinio je najpopularnijim numeričke postupke temeljene na minimizaciji srednje kvadratne pogreške [70], [28], [61]

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} [f(t) - h_a(t)]^2 dt \quad (2.43)$$

Potrebno je naglasiti da metode za aproksimaciju zadanog oblika impulsnog odziva mogu biti iskorištene i za projektiranje filtara s klasičnim zahtjevima. U svom radu Svensson [61] je kao ilustraciju spomenute metode, aproksimirao impulsni odziv oblika

$$f(t) = \begin{cases} \sin^2(\pi t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases} \quad (2.44)$$

Takav impulsni odziv predstavlja slučaj  $m=2$  u izrazu (2.35), koji je drugačijim postupkom aproksimirao Halpern.

### 2.8 Kriteriji za sintezu prijenosnih funkcija

Razmatrajući razne filtarske aproksimacije, očita su dva glavna pristupa sintezi prijenosnih funkcija. Prvi pristup polazi od zahtjeva u frekvencijskoj domeni, danog izrazom (2.1) i vodi na čitav niz aproksimacija. Optimalna aproksimacija konstantne amplitude postiže na primjer Butterworthovim, Chebyshevljevim ili Cauerovim filtra. Kriterij po kojem su dobiveni ovi filtri određen je upravo onim parametrom kojeg želimo aproksimirati, a to je konstantna amplituda.

Drugi pristup nameće obrada signala u vremenskoj domeni. Osim u specijalnim primjenama spomenutim u poglavlju 2.7.2, od filtara koji se koriste u telekomunikacijskim sustavima traži se da sačuvaju određena svojstva odziva na pobudu tipa impulsa i stepenice. Važni su parametri na primjer prebačaj i podbačaj, kašnjenje, vrijeme porasta, širina impulsa i slično. Kao referentni filter tada se uzima filter s Gausovim oblikom impulsnog odziva, danim izrazom (2.4). Aproksimacija ovog odziva, tj. sinteza filtra čiji impulsni odziv aproksimira Gaussovu krivulju, klasično se radi u frekvencijskoj domeni, aproksimacijom konstantnog grupnog kašnjenja ili aproksimacijom Gaussove amplitude. To je indirektan pristup i ne daje optimalne rezultate u vremenskoj domeni. Pojavljuje se, naime, raskorak između kriterija po kojem je filter dobiven (npr. linearna faza) i potrebnog svojstva (npr. mali podbačaj kod impulsnog odziva).

Linearna faza se često uzima kao kriterij za sintezu filtara od kojih se traže dobra svojstva u vremenskoj domeni. Tada problem predstavlja odluka kako aproksimirati fazu? Kod aproksimacije linearne faze jednolikom valovitošću postavlja se pitanje koliku valovitost treba uzeti? Slijedeće pitanje koje se nameće je mora li valovitost uopće biti jednolika, obzirom da kod niskopropusnih filtara gušenje raste s frekvencijom?

Za prijenos impulsa s malim izobličenjima, nije važna samo faza, već i amplituda. Pitanje amplitudne karakteristike filtara namijenjenih obradi u vremenskoj domeni, obrađeno u prethodnim poglavljima, također ukazuje na nedostatak jednoznačnog rješenja, posebno kad razmatramo realizibilne filtre. Situaciju posebno otežava povezanost amplitude i faze, pa se u frekvencijskoj domeni često radi kompromis.

Jess i Schussler dali su velik doprinos sagledavanju problema filtara optimalnih u vremenskoj domeni. Koristeći istovremeno zahtjeve na amplitudu i vremenske odzive, ukazali su na opravdanost kriterija postavljenih u vremenskoj domeni. Štoviše, rezultat je dokazao i opravdanost izbacivanja linearne faze kao posrednog kriterija reflektiranog iz vremenske domene.

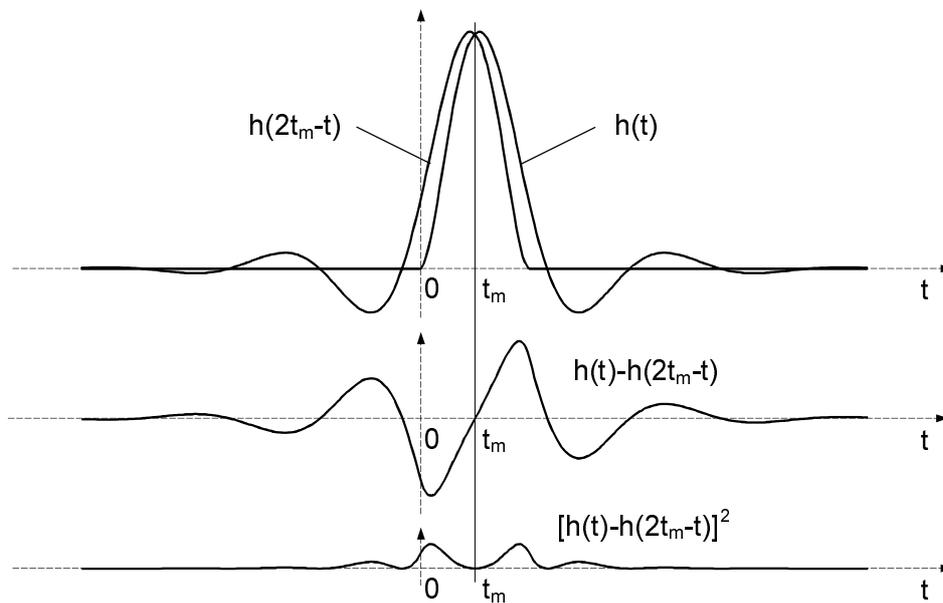
Velik broj indirektnih metoda sinteze filtara od kojih se traže dobri vremenski odzivi potaknuli su autora ovog rada na istraživanja sustava optimalnih u vremenskoj domeni. Nakon razmatranja mnogih metoda te eksperimenata s raznim kriterijima, kao rezultat je nastala nova klasa filtara, s impulsnim odzivom maksimalno simetričnim za dani red. Simetrija impulsnog odziva je svojstvo idealiziranih sustava s linearnom fazom, koji su nekauzalni. Može se očekivati da će kauzalni filtri s maksimalno simetričnim impulsnim odzivom aproksimirati linearnu fazu, ali ne nužno u smislu jednolike valovitosti ili najveće glatkoće. Filtri Gaussove familije aproksimiraju linearnu fazu, pa njihovi impulsni odzivi pokazuju određen stupanj simetrije. Opravdano je očekivati da će i kod filtara čija je simetrija impulsnog odziva optimalna, impulsni odziv aproksimirati Gaussovu krivulju.

Fazni korektori, postupci za poboljšanje amplitudne karakteristike, te, nažalost, razmjerno malobrojni radovi u kojima autori opisuju prijenosne funkcije s kompleksnim nulama, kao na primjer [19], [78], [29] i [72], daju ideju o optimalnim filtrima čije prijenosne funkcije sadrže kompleksne nule. U daljnjem tekstu bit će opisana dobivena klasa filtara sa simetričnim impulsnim odzivom, sa svim nulama u beskonačnosti kao i s konačnim nulama.

### 3 Kontinuirani filtri sa simetričnim impulsnim odzivom

#### 3.1 Simetrija impulsnog odziva

Mjera simetrije mora brojčano pokazivati koliko se razlikuje lijeva i desna strana impulsnog odziva, obzirom na neku liniju simetrije. Pored toga, mjera simetrije mora biti jednostavno izražena pomoću parametara prijenosne funkcije da bi mogla biti upotrijebljena u optimizacijskom postupku. U ovom slučaju, kao mjera simetrije uzet je integral kvadrata razlike lijeve i desne strane impulsnog odziva, obzirom na vertikalni pravac s apscisom  $t=t_m$ , kao što prikazuje slika 3.1. Spomenuti integral opisuje asimetriju, tj. manji iznos znači veću simetriju.



Slika 3.1 Definicija mjere asimetrije impulsnog odziva kontinuiranog filtra.

Osnovni izraz koji će poslužiti za definiranje mjere asimetrije dan je integralom

$$e_c = \int_{t_m}^{\infty} [h(t) - h(2t_m - t)]^2 dt, \quad (3.1)$$

gdje  $h$  predstavlja impulsni odziv filtra. Simetrija se računa obzirom na pravac s apscisom  $t_m$ . Ako je sustav kauzalan, vrijedi

$$h(2t_m - t) = 0 \text{ za } t > 2t_m, \quad (3.2)$$

pa integral (3.1) možemo prikazati kao

$$e_c = \int_{t_m}^{2t_m} [h(t) - h(2t_m - t)]^2 dt + \int_{2t_m}^{\infty} h^2(t) dt, \quad (3.3)$$

Nakon kvadriranja, prvi integral se može raspisati po pribrojnicima

$$e_c = \int_{t_m}^{2t_m} h^2(t)dt - 2 \int_{t_m}^{2t_m} h(t)h(2t_m - t)dt + \int_{t_m}^{2t_m} h^2(2t_m - t)dt + \int_{2t_m}^{\infty} h^2(t)dt \quad (3.4)$$

Supstitucijom  $2t_m - t = u$ , treći član izraza (3.4) se može napisati kao

$$\int_{t_m}^{2t_m} h^2(2t_m - t)dt = \int_0^{t_m} h^2(u)du \quad (3.5)$$

Uvrštavanjem (3.5) u (3.4) i sređivanjem dobiva se

$$e_c = \int_0^{\infty} h^2(t)dt - 2 \int_{t_m}^{2t_m} h(t)h(2t_m - t)dt \quad (3.6)$$

odnosno

$$e_c = \int_0^{\infty} h^2(t)dt - 2 \int_0^{t_m} h(t_m + t)h(t_m - t)dt \quad (3.7)$$

Izraz (3.7) kraće se može zapisati kao

$$e_c = e_{ch} - 2e_{ca} \quad (3.8)$$

Integral  $e_{ch}$  predstavlja ukupnu energiju impulsnog odziva. Normiranjem  $e_c$  na ukupnu energiju  $e_{ch}$ , dobiva se konačan izraz za pogrešku simetrije impulsnog odziva

$$E_c = 1 - 2 \frac{e_{ca}}{e_{ch}} \quad (3.9)$$

koji je, kao posljedica normiranja, neovisan o pojačanju filtra.

Da bismo pogrešku simetrije mogli odrediti za neki određen filter,  $E_c$  treba izraziti pomoću parametara prijenosne funkcije filtra. U ovom slučaju odabrani su polovi i nule. Prijenosna funkcija u faktoriziranom obliku glasi

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (3.10)$$

gdje su  $z_i$  nule, a  $p_k$  polovi filtra. Ako su polovi jednostruki i  $M < N$ , impulsni odziv filtra ima oblik

$$h(t) = \sum_{r=1}^N K_r e^{p_r t} \quad (3.11)$$

gdje su  $K_r$ ,  $r=1,2,\dots,N$ , residuumi polova prijenosne funkcije. Residuumi su određeni izrazom

$$K_r = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (p_r - z_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^N (p_r - p_k)} \quad (3.12)$$

Koristeći (3.11) i (3.12), energija impulsnog odziva može se izraziti kao funkcija polova i residuuma

$$e_{ch} = \int_0^{\infty} h^2(t) dt = \int_0^{\infty} \left( \sum_{r=1}^N K_r e^{p_r t} \right)^2 dt \quad (3.13)$$

Kvadriranje daje dvostruku sumu oblika

$$e_{ch} = \int_0^{\infty} \left( \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N K_q K_r e^{p_q t} e^{p_r t} \right) dt \quad (3.14)$$

U izrazu (3.14) može se integrirati svaki pribrojnik, odnosno

$$e_{ch} = \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N K_q K_r \int_0^{\infty} e^{t(p_q + p_r)} dt \quad (3.15)$$

Nakon integriranja dobiva se izraz

$$e_{ch} = \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N \frac{K_q K_r}{p_q + p_r} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \left( e^{t(p_q + p_r)} \right) - 1 \right] \quad (3.16)$$

U stabilnom sustavu, polovi  $p_q$  i  $p_r$  nalaze se u lijevoj poluravnini pa je vrijednost limesa jednaka 0.

U tom slučaju energija impulsnog odziva je konačna i iznosi

$$e_{ch} = - \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N \frac{K_q K_r}{p_q + p_r} \quad (3.17)$$

Na sličan način, pomoću polova i nula može se izraziti integral  $e_{ca}$ . Uvrštavanjem (3.11) u izraz za  $e_{ca}$ , dobiva se

$$e_{ca} = \int_0^{t_m} h(t_m + t) h(t_m - t) dt = \int_0^{t_m} \left( \sum_{q=1}^N K_q e^{p_q(t_m+t)} \right) \left( \sum_{r=1}^N K_r e^{p_r(t_m-t)} \right) dt \quad (3.18)$$

Nakon množenja,

$$e_{ca} = \int_0^{t_m} \left( \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N K_q K_r e^{t_m(p_q + p_r)} e^{t(p_q - p_r)} \right) dt \quad (3.19)$$

može se provesti integracija svakog člana

$$e_{ca} = \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N K_q K_r e^{t_m(p_q+p_r)} \int_0^{t_m} e^{t(p_q-p_r)} dt \quad (3.20)$$

Nakon integracije dobiva se izraz

$$e_{ca} = \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ q \neq r}}^N \frac{K_q K_r}{p_q - p_r} e^{t_m(p_q+p_r)} \left( e^{t_m(p_q-p_r)} - 1 \right) + \sum_{j=1}^N K_j^2 e^{2t_m p_j} t_m \quad (3.21)$$

koji nakon sređivanja ima oblik

$$e_{ca} = \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ q \neq r}}^N \frac{K_q K_r}{p_q - p_r} e^{2t_m p_q} - \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ q \neq r}}^N \frac{K_q K_r}{p_q - p_r} e^{t_m(p_q+p_r)} + \sum_{j=1}^N K_j^2 e^{2t_m p_j} t_m \quad (3.22)$$

Srednji član gornjeg izraza uvijek je jednak 0, pa konačno integral  $e_{ca}$  možemo pomoću polova i residuuma izraziti na slijedeći način

$$e_{ca} = \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ q \neq r}}^N \frac{K_q K_r}{p_q - p_r} e^{2t_m p_q} + \sum_{j=1}^N K_j^2 e^{2t_m p_j} t_m \quad (3.23)$$

### 3.2 Funkcija cilja

Izraz (3.9), zajedno sa izrazima (3.17) i (3.23) čini funkciju oblika

$$E_c = f(z_i, p_k); \quad i=1, \dots, M; \quad k=1, \dots, N \quad (3.24)$$

$E_c$  je funkcija sa ukupno  $M+N$  kompleksnih varijabli. Skup varijabli koji odgovara minimumu ove funkcije predstavlja skup parametara filtra, čiji je impulsni odziv maksimalno simetričan za zadan broj polova,  $N$ , i nula,  $M$ . Da bi taj skup varijabli mogao biti pronađen, potrebno je uzeti u obzir još neke pretpostavke o obliku funkcije  $E_c$ .

Kod fizički ostvarivih sustava kompleksni polovi i nule dolaze u konjugiranim parovima. U slučaju kad su  $M$  i  $N$  neparni, funkcija  $E_c$  bit će izražena kao

$$E_c = f(z_0, z_{Ri}, z_{Li}, p_0, p_{Rk}, p_{Ik}); \quad i=1, \dots, (M-1)/2; \quad k=1, \dots, (N-1)/2 \quad (3.25)$$

gdje su  $z_{Ri}$ ,  $z_{Li}$ ,  $p_{Rk}$  i  $p_{Ik}$  realne varijable koje predstavljaju parametre polova i nula, tj.

$$z_i = z_{Ri} + j z_{Li}, \quad p_k = p_{Rk} + j p_{Ik} \quad (3.26)$$

Parametar  $p_0$  predstavlja realan pol, a  $z_0$  realnu nulu. U slučaju da je  $M$  ili  $N$  paran, iz izraza (3.25) bila bi izostavljena varijabla  $z_0$  odnosno  $p_0$ .

Varijablama opisanim izrazima (3.25) i (3.26) možemo opisati isključivo konjugirano kompleksne parove te najviše jedan realan pol ili nulu. Da bismo obuhvatili i prijenosne funkcije s proizvoljnim brojem realnih polova i nula, potrebno je promijeniti skup varijabli funkcije  $E_c$ .

Grupiranjem konjugiranih parova polova i nula, za neparne M i N, prijenosna funkcija (3.10) može se zapisati kao

$$H(s) = H_0 \frac{(s + \omega_{z0}) \prod_{i=1}^{(M-1)/2} (s + \frac{\omega_{zi}}{Q_{zi}} s + \omega_{zi}^2)}{(s + \omega_{p0}) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} (s + \frac{\omega_{pk}}{Q_{pk}} s + \omega_{pk}^2)} \quad (3.27)$$

Parametri  $\omega_{zi}$  i  $\omega_{pk}$  predstavljaju udaljenost kompleksne nule odnosno pola od ishodišta kompleksne ravnine

$$\omega_{zi} = \sqrt{z_{Ri}^2 + z_{Ii}^2}, \quad \omega_{pi} = \sqrt{p_{Ri}^2 + p_{Ii}^2}, \quad (3.28)$$

dok je Q faktor relativna udaljenosti pola od imaginarne osi

$$Q_{zi} = \frac{\omega_{zi}}{2z_{Ri}}, \quad Q_{pi} = \frac{\omega_{pi}}{2p_{Ri}}. \quad (3.29)$$

Za  $Q > 0.5$ , par polova ili nula bit će konjugirano kompleksan, a za  $Q < 0.5$  par će se raspodijeliti na realnoj osi. Negativna vrijednost  $Q_{zi}$  opisuje nulu koja se nalazi u desnoj poluravnini. Zbog stabilnosti sustava Q faktor pola,  $Q_{pk}$ , bit će uvijek pozitivan.

Funkcija  $E_c$ , izražena pomoću varijabli oblika  $\omega$ -Q,

$$E_c = f(\omega_{z0}, \omega_{zi}, Q_{zi}, \omega_{p0}, \omega_{pk}, Q_{pk}); \quad i=1, \dots, (M-1)/2; \quad k=1, \dots, (N-1)/2, \quad (3.30)$$

ima kao domenu skup svih mogućih pozicija jednostrukih polova i svih nula kompleksnoj ravnini. Ograničenje u jednostrukosti ne vrijedi za nule. Kao i u izrazu (3.25), za parne M ili N, gornji izraz ne sadrži varijablu  $\omega_{z0}$  odnosno  $\omega_{p0}$ .

Problem određivanja prijenosne funkcije filtra s maksimalno simetričnim impulsnim odzivom za dani red brojnika i nazivnika odgovara problemu minimizacije

$$\min_{z_0, z_{Ri}, z_{Ii}, p_0, p_{Rk}, p_{Ik}} [E_c(z_0, z_{Ri}, z_{Ii}, p_0, p_{Rk}, p_{Ik})], \quad (3.31)$$

ili

$$\min_{\omega_{z0}, \omega_{zi}, Q_{zi}, \omega_{p0}, \omega_{pk}, Q_{pk}} [E_c(\omega_{z0}, \omega_{zi}, Q_{zi}, \omega_{p0}, \omega_{pk}, Q_{pk})]. \quad (3.32)$$

Tokom istraživanja korištena su oba zapisa funkcije  $E_c$ . Optimizacijski postupak (3.32) kao rezultat je davao prijenosne funkcije s najviše jednim realnim polom, što je, naravno, slučaj kod neparnog reda filtra, N. To dokazuje opravdanost upotrebe zapisa (3.25) odnosno (3.31), koji su nešto jednostavniji. Realne nule tokom optimizacije bile su potisnute daleko od ishodišta. Kako je njihov utjecaj tada zanemariv, optimizacije su dalje rađene isključivo za paran stupanj brojnika, M.

Postupak određivanja minimuma funkcije  $E_c$  bit će detaljnije razmotren u slijedećem poglavlju.

### 3.3 Optimizacijski postupak

Optimiranjem nazivamo postupak određivanja točke u n-dimenzionalnom prostoru,  $\mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ , koja predstavlja minimum funkcije  $f(\mathbf{x})$ , tj.

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.33)$$

Funkcija  $f(\mathbf{x})$  zove se funkcija cilja. Ako je  $f(\mathbf{x}_m)$  najmanja vrijednost funkcije u zadanom području, kažemo da je  $\mathbf{x}_m$  globalni minimum. Ako je  $f(\mathbf{x}_m)$  najmanja vrijednost funkcije u nekoj okolini točke  $\mathbf{x}_m$ , ali ne i u cijelom području, kažemo da je  $\mathbf{x}_m$  lokalni minimum.

Ukoliko je područje unutar kojeg tražimo minimum ograničeno skupom jednadžbi i/ili nejednadžbi oblika

$$c_u(\mathbf{x}) = 0, \quad u=1,2,\dots,U \quad (3.34)$$

$$c_v(\mathbf{x}) \geq 0, \quad v=1,2,\dots,V \quad (3.35)$$

govorimo o optimiranju s ograničenjima (engl. constrained optimization). Ukoliko područje nije ograničeno već se proteže preko cijelog prostora  $\mathbb{R}^n$ , govorimo o optimiranju bez ograničenja (engl. unconstrained optimization).

Kao što je ranije rečeno, zbog stabilnosti, polovi filtra moraju biti u lijevoj poluravnini. To znači da je područje unutar kojeg provodimo optimizaciju ograničeno nejednadžbama

$$-p_0 \geq 0, \quad -p_{Ri} \geq 0, \quad (3.36)$$

u slučaju opisanom izrazom (3.31), odnosno

$$\omega_0 \geq 0, \quad \omega_{pk} \geq 0, \quad Q_{pk} \geq 0 \quad (3.37)$$

u slučaju (3.32). U praksi je jednostavnije u funkciju cilja uvrštavati kvadrate ovih varijabli nego provoditi optimizaciju s ograničenjima. Tokom istraživanja uočeno je da postupak koji krene od početne točke koja zadovoljava (3.36) odnosno (3.37), daje kao rezultat stabilan filter, što također opravdava optimizaciju bez ograničenja. U daljnjem tekstu bit će ukratko opisan postupak za optimizaciju bez ograničenja, pomoću koje su nađeni filtri s maksimalno simetričnim impulsnim odzivom.

#### 3.3.1 Osnovni pojmovi vezani uz optimizaciju bez ograničenja

Funkcija  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , koja je neprekidna i ima neprekidnu prvu derivaciju (klasa  $\mathcal{C}^1$ ), u svakoj točki ima definiran vektor prvih parcijalnih derivacija ili vektor gradijenta

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Ako funkcija  $f(\mathbf{x})$  ima neprekidnu drugu derivaciju (klasa  $\mathbf{C}^2$ ), tada postoji matrica drugih parcijalnih derivacija ili Hessian

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial^2 f / (\partial x_1 \partial x_1) & \partial^2 f / (\partial x_1 \partial x_2) & \dots & \partial^2 f / (\partial x_1 \partial x_n) \\ \partial^2 f / (\partial x_2 \partial x_1) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f / (\partial x_n \partial x_1) & \dots & \dots & \partial^2 f / (\partial x_n \partial x_n) \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Točka  $\mathbf{x}_m$  je lokalni minimum funkcije  $f(\mathbf{x})$  ako vrijedi

$$\mathbf{g}_m = \mathbf{0}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{s}^T \mathbf{G}_m \mathbf{s} > 0, \quad \forall \mathbf{s}. \quad (3.41)$$

Radi preglednosti zapisa uzeto je  $\mathbf{g}_m = \mathbf{g}(\mathbf{x}_m)$  i  $\mathbf{G}_m = \mathbf{G}(\mathbf{x}_m)$ . Uvjet (3.40) govori da u točki  $\mathbf{x}_m$  funkcija nema nagiba (ne pada niti ne raste). Izraz (3.41) je zahtjev da matrica  $\mathbf{G}_m$  bude pozitivno definitna. Ako predstavimo funkciju  $f(\mathbf{x})$  kao plohu u  $n$ -dimenzionalnom prostoru, izraz (3.41) osigurava pozitivnu zakrivljenost, tj. konkavna strana plohe bit će okrenuta "prema gore".

Numerički postupci traženja minimuma funkcije  $f(\mathbf{x})$  uglavnom su iterativnog tipa. Postupak kreće od točke  $\mathbf{x}_0$ , koja predstavlja početno pretpostavljeno rješenje. U prvoj iteraciji određuje se točka  $\mathbf{x}_1$ , zatim, u drugoj iteraciji, točka  $\mathbf{x}_2$  itd. U  $k$ -toj iteraciji obavlja se slijedeći postupak:

- Određuje se smjer u prostoru duž kojeg će se tražiti minimum. Taj smjer određen je vektorom  $\mathbf{s}_k$ .
- Određuje se minimum funkcije  $f(\mathbf{x})$  u smjeru vektora  $\mathbf{s}_k$ . Taj postupak predstavlja rješavanje jednodimenzionalnog problema minimizacije, tj. traženje broja  $\alpha$ , takvog da bude

$$\min_{\alpha} f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s}_k) \quad (3.42)$$

- Kao nova točka iterativnog postupka uzima se

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{s}_k \quad (3.43)$$

Iterativni postupak završava kad se zadovolji uvjet koji eksplicitno ili implicitno sadrži traženu točnost rješenja. U praksi se koriste 3 tipa uvjeta. Prvi tip uvjeta temeljen je na apsolutnom iznosu vektora gradijenta

$$\|\mathbf{g}_k\| \leq \varepsilon. \quad (3.44)$$

Drugi tip uvjeta dan je za pojedine koordinate vektora  $\mathbf{x}_k$  kao

$$|x_{ki} - x_{(k+1)i}| \leq \varepsilon_i, \quad (3.45)$$

gdje je  $\varepsilon$  vektor. Jednostavniji uvjet dobiva se ako se umjesto vektora  $\varepsilon$  uzme skalarna vrijednost pa uvjet ima oblik

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{(k+1)}\| \leq \varepsilon \quad (3.46)$$

Treći test temeljen je na procjeni toka funkcije i glasi

$$\frac{1}{2} \mathbf{g}_k^T \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{g}_k \leq \varepsilon. \quad (3.47)$$

Problem određivanja minimuma, (3.42), ne može se egzaktno riješiti konačnim brojem operacija. U iteracijama u kojima je  $\mathbf{x}_{k+1}$  jako udaljen od traženog minimuma  $\mathbf{x}_m$ , egzaktno rješavanje izraza (3.42) nije niti ekonomično. Zato se u praksi određivanje minimuma funkcije  $f(\mathbf{x})$  u smjeru vektora  $\mathbf{s}_k$  provodi samo do neke točnosti, pa govorimo o neegzaktom ili parcijalnom određivanju minimuma u zadanom smjeru.

Način određivanja vektora  $\mathbf{s}_k$  različit je za razne metode. O njemu najvećim dijelom ovisi brzina konvergencije cijelog postupka. Općenito, postupak određivanja vektora  $\mathbf{s}_k$  proizlazi iz modela funkcije cilja. Funkciju cilja  $f(\mathbf{x})$ , moguće je prikazati Taylorovim redom

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{h}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) \mathbf{h} + \dots \quad (3.48)$$

Odbacivanjem trećeg i viših članova dobiva se linearna aproksimacija funkcije cilja u okolini točke  $\mathbf{x}_k$ ,

$$f_L(\mathbf{x}_k + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{h}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_k). \quad (3.49)$$

Uz takav model funkcije cilja, kao vektor u čijem bi smjeru trebao ležati minimum, nameće se smjer suprotan od smjera vektora gradijenta

$$\mathbf{s}_k = -\mathbf{g}(\mathbf{x}_k). \quad (3.50)$$

U tom smjeru vrijednost funkcije najbrže pada, pa se ova metoda naziva metoda najbržeg pada. Iako se može formalno dokazati da iterativan postupak temeljen na (3.50) konvergira, te iako je vrlo jednostavan, u praksi je gotovo neupotrebljiv. Razlog leži u sporoj konvergenciji.

Ako tokom iterativnog procesa promatramo udaljenost pojedinih točaka od traženog minimuma

$$\xi_k = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| \quad (3.51)$$

možemo uvesti mjeru brzine konvergencije. Ako vrijedi

$$\frac{\xi_{k+1}}{\xi_k} \rightarrow a \quad (3.52)$$

gdje je  $a \geq 0$ , govorimo o linearnoj konvergenciji ili konvergenciji prvog reda. Postupak ima kvadratnu konvergenciju ili konvergenciju drugog reda, ako se može pokazati da vrijedi

$$\frac{\xi_{k+1}}{\xi_k^2} \rightarrow a \quad (3.53)$$

Metoda najbržeg pada ima konvergenciju prvog reda što je posljedica linearnog modela koji loše aproksimira funkciju cilja. Konvergencija drugog reda može se očekivati uz upotrebu kvadratnog modela funkcije cilja, koji sadrži prva tri člana Taylorovog reda i ima oblik

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{h}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) \mathbf{h} \quad (3.54)$$

Ovaj model, pored informacije o smjeru najbržeg pada funkcije, sadrži i informaciju o zakrivljenosti. Upotreba ovakvog modela očigledna je kad se radi o kvadratnoj funkciji cilja. U općem slučaju kvadratni model dobro opisuje ponašanje funkcije u blizini minimuma, obzirom da se u dovoljno maloj okolini minimuma funkcija ponaša kao kvadratna funkcija. Velik broj algoritama razvijen je na temelju kvadratnog modela od kojih su najpoznatiji opisani u [23].

### 3.3.2 Kvazi-Newtonova metoda

Funkciji opisanoj izrazom (3.54) može se analitički odrediti minimum direktnom primjenom uvjeta (3.40). Gradijent promatrane funkcije, obzirom na varijablu  $\mathbf{h}$ , dan je izrazom

$$\nabla f(\mathbf{x}_k + \mathbf{h}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (3.55)$$

Rješavanjem gornje jednadžbe dobiva se relativan položaj "tjemena"

$$\mathbf{h} = -\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \quad (3.56)$$

Apsolutne koordinate minimuma mogu poslužiti kao slijedeća točka iterativnog procesa

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{h} \quad (3.57)$$

Opisana metoda poznata je kao Newtonova metoda. Uvjet konvergencije Newtonove metode traži da matrica  $\mathbf{G}$  bude pozitivno definitna što u praksi ne mora biti slučaj, posebno kad je  $\mathbf{x}_k$  daleko od  $\mathbf{x}_m$ . Postoji čitav niz rješenja koja rješavaju taj problem. Unatoč njima, glavni nedostatak Newtonove metode leži u činjenici da treba poznavati matricu  $\mathbf{G}$ . U praksi često nije pogodno određivati analitički izraz za računanje matrice  $\mathbf{G}$ , a numeričko izračunavanje zahtijeva velik broj operacija (velik broj poziva funkcije cilja) što znatno usporava postupak optimizacije. Taj problem rješava čitava klasa metoda, poznatih pod nazivom kvazi-Newtonove metode.

Za razliku od Newtonove metode, kod kvazi-Newtonovih metoda, matricu  $\mathbf{G}$  aproksimiramo pozitivno definitnom matricom  $\mathbf{B}$ , koju korigiramo u svakom koraku iterativnog postupka. Postoji nekoliko formula za aproksimaciju matrice  $\mathbf{G}$  od kojih su najpoznatije takozvana DFP formula (naziv dolazi od autora Davidon [16], Fletcher, Powell [22]), koja kao rezultat daje inverznu matricu,  $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}$ ,

$$\mathbf{D}_{k+1}^{(DFP)} = \mathbf{D} + \frac{\delta\delta^T}{\delta^T\mathbf{y}} - \frac{\mathbf{D}\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{D}}{\mathbf{y}^T\mathbf{D}\mathbf{y}}, \quad (3.58)$$

te BFGS formula (Broyden [7], Fletcher [21], Goldfarb [25], Shanno [57])

$$\mathbf{B}_{k+1}^{(BFGS)} = \mathbf{B} + \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T\delta} - \frac{\mathbf{B}\delta\delta^T\mathbf{B}}{\delta^T\mathbf{B}\delta}. \quad (3.59)$$

### 3.3.3 Praktična realizacija

Pojednostavljen blok dijagram optimizacijskog postupka prikazan je slikom 3.2. Jezgru algoritma čini iterativni postupak opisan u poglavlju 3.3.1, temeljen na kvazi-Newtonovoj metodi koja koristi BFGS formulu za aproksimaciju Hessiana. Postupak počinje od početnog pretpostavljenog rješenja,  $\mathbf{x}_0$ , a završava kad se postigne zadana točnost  $\varepsilon$ . U početnoj iteraciji,  $k=0$ , određuje se gradijent  $\mathbf{g}_0$ , a matrica drugih derivacija aproksimira se jediničnom maticom, tj.  $\mathbf{B}_0=\mathbf{I}$ . Gradijent se određuje pomoću konačne razlike,  $h$ . U  $k$ -toj iteraciji pojedine komponente vektora gradijenta dane su izrazom

$$g_i = \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i)}{h}. \quad (3.60)$$

U praksi je uzeto  $h=\varepsilon$ . Vektor  $\mathbf{e}_i$  je koordinatni vektor dan kao

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ti stupac}. \quad (3.61)$$

U  $k$ -toj iteraciji, minimum se traži u smjeru vektora  $\mathbf{s}_k$

$$\min_{\alpha} f(\mathbf{x}_k + \alpha\mathbf{s}_k) \quad (3.62)$$

koji se određuje kao

$$\mathbf{s}_k = -\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{g}_k. \quad (3.63)$$

U svakom koraku vrijednost funkcije će padati ako je matrica  $\mathbf{B}_k$  pozitivno definitna. Dovoljan uvjet da matrica  $\mathbf{B}_k$  bude pozitivno definitna glasi

$$\delta_k^T\mathbf{y}_k > 0, \quad \forall k \quad (3.64)$$

gdje je

$$\delta_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \quad (3.65)$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k \quad (3.66)$$

Uvjet (3.64) zadovoljen je ukoliko je minimum u smjeru određen s dovoljno velikom točnošću. U nekim algoritmima minimum se traži tako dugo dok se ne zadovolji (3.64). Prema postojećoj literaturi [23], i prema vlastitim rezultatima, BFGS formula daje vrlo dobre rezultate čak i kad je u kombinaciji s "grubim" pretraživanjem u zadanom smjeru. Zato je u opisanom algoritmu upotrijebljeno pretraživanje male točnosti, u kombinaciji s provjerom uvjeta (3.64). Ukoliko uvjet nije zadovoljen, uzima se  $\mathbf{B}_k = \mathbf{I}$ .

Iako je pozitivna definitnost matrice  $\mathbf{B}_k$  dovoljan uvjet da bi vrijednost funkcije padala, to nije dovoljan uvjet za konvergenciju postupka. Postupak će konvergirati ka stacionarnoj točki  $\mathbf{x}_m$  ako je kut između vektora  $\mathbf{s}_k$  i  $-\mathbf{g}_k$  ograničen vrijednošću [23]

$$\vartheta_k \leq \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \forall k. \quad (3.67)$$

gdje je  $\mu$  konstanta. Uvjet će biti zadovoljen ako vrijedi nejednakost

$$\kappa_k = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} < \kappa_{\max}, \quad (3.68)$$

gdje su  $\lambda_{\min}$  i  $\lambda_{\max}$  najmanja odnosno najveća vlastita vrijednost matrice  $\mathbf{B}_k$ . U tom slučaju vrijedi

$$\vartheta_k \leq \frac{\pi}{2} - \kappa_k^{-1}. \quad (3.69)$$

U praksi se rijetko rade zahvati u algoritmu koji bi osigurali spomenuti uvjet. U opisan algoritam je uključena provjera vrijednosti  $\kappa_k$ . Kad iznos ne zadovoljava uvjet (3.68), kao  $\mathbf{s}_k$  se uzima onaj smjer koji sigurno zadovoljava (3.67), a to je smjer najbržeg pada kojeg dobivamo postavljanjem  $\mathbf{B}_k = \mathbf{I}$ .

Tokom pretraživanja (3.62) formira se niz točaka koje leže u smjeru vektora  $\mathbf{s}_k$ , a čija udaljenost od točke  $\mathbf{x}_k$  eksponencijalno raste i iznosi  $v^0 \varepsilon, v^1 \varepsilon, v^2 \varepsilon, v^3 \varepsilon, \dots$ , gdje je  $v$  realna pozitivna konstanta. Vrijednost funkcije cilja u tim točkama iznose

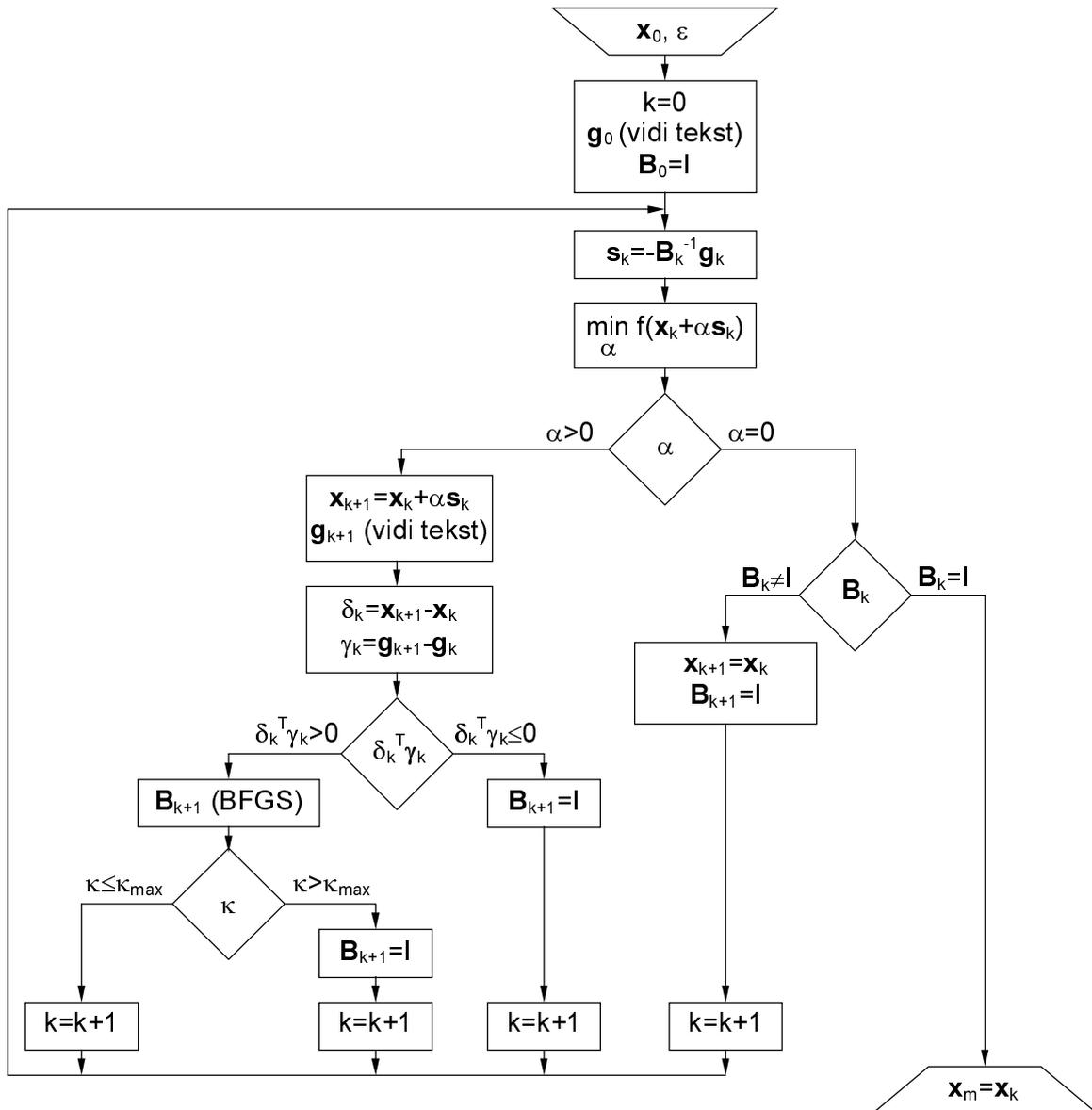
$$f_i = f\left(\mathbf{x}_k + v^{i-1} \varepsilon \frac{\mathbf{s}_k}{\|\mathbf{s}_k\|}\right), \quad i=1, 2, \dots \quad (3.70)$$

Niz funkcijskih vrijednosti  $\{f(\mathbf{x}_k)=f_0, f_i\}, i=1, 2, \dots$ , monotono pada do nekog člana  $i=i^*$ . Kroz prvu i posljednju točku niza ( $i=0$  i  $i=i^*$ ), te prvu točku u kojoj funkcijska vrijednost počinje rasti ( $i=i^*+1$ ), može se interpolirati parabola čije tjeme se nalazi u točki

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_k + \varepsilon \frac{\mathbf{s}_k}{\|\mathbf{s}_k\|} \frac{1}{2} \frac{(v^2 - v^4)f_0 + (v^4 - 1)f_{i^*} + (1 - v^2)f_{i^*+1}}{(v^3 - v^4)f_0 + (v^4 - v^2)f_{i^*} + (v^2 - v^3)f_{i^*+1}}. \quad (3.71)$$

Minimum niza  $\{f(\mathbf{x}_k)=f_0, f_i, f(\mathbf{x}_t)\}, i=1, 2, \dots$ , uzima se kao minimum funkcije  $f(\mathbf{x})$  u smjeru vektora  $\mathbf{s}_k$ . U praktičnoj implementaciji opisanog algoritma uzeto je  $v=2$ .

Ukoliko je  $f_1 > f_0$ , uzima se  $\alpha = 0$ , a u slijedećem koraku iterativnog postupka smjer pretraživanja bit će suprotan od smjera gradijenta. Ako niti tada funkcijska vrijednost ne bude padala, postupak završava. Takav oblik uvjeta za završetak postupka odgovara izrazu (3.46). Najmanji korak za pretraživanje iznosi  $\varepsilon$  ovisi o traženoj točnosti i obliku funkcije cilja i treba ga eksperimentalno utvrditi. U optimizacijama opisanim u ovom radu korištena je vrijednost  $\varepsilon = 1e-6$ .



Slika 3.2 Pojednostavljen blok dijagram optimizacijskog postupka.

### 3.4 Rezultati optimizacije

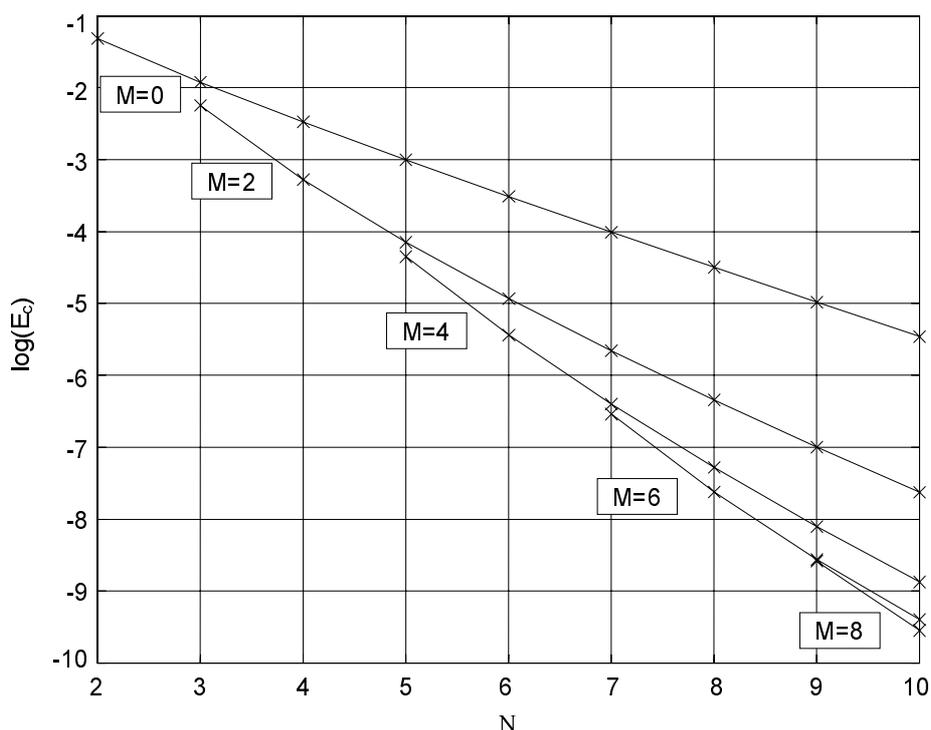
Optimizacija izraza (3.31) i (3.32) provedena je za filtre od 2. do 10. reda ( $N=2$  do  $N=10$ ), za filtre sa svim nulama u beskonačnosti kao i filtre s 1, 2, 3 i 4 para kompleksnih nula ( $M=2, 4, 6$  i  $8$ ). U slučaju neparnog stupnja brojnika,  $M$ , postupak je davao jednu realnu nulu na vrlo velikoj udaljenosti od ishodišta, s  $\omega_0$  reda veličine nekoliko tisuća. Zbog zanemarivog utjecaja tako daleke nule, dalje su razmatrani samo slučajevi s parnim brojem nula.

Slika 3.3 prikazuje pogrešku simetrije optimalnih filtara. Pogreška simetrije eksponencijalno pada s redom filtra. Kod filtra sa svim nulama u beskonačnosti, pogreška simetrije može se aproksimirati izrazom

$$\log(E_c) \sim (-0.5 - 0.5N) . \quad (3.72)$$

Nule povećavaju simetriju. Najveće poboljšanje dobivamo kod filtara s jednim parom kompleksnih nula, dok drugi, te svaki slijedeći par nula sve manje doprinosi simetriji. Najbolji rezultat koji se može dobiti upotrebom nula, uzevši u obzir ranije spomenut uvjet  $M < N$ , iznosi približno

$$\log(E_c) \sim (0.5 - N) . \quad (3.73)$$



Slika 3.3 Pogreška simetrije impulsnog odziva kontinuiranih optimalnih filtara od 2. do 10. reda s 0, 2, 4, 6 i 8 kompleksnih nula.

Kod filtara reda  $N < 5$  dodavanje para polova povećava simetriju više nego dodavanje para nula. Za  $N \geq 5$ , utjecaj para nula je veći nego utjecaj para polova, što upotrebu nula čini vrlo interesantnom. Dodatnu motivaciju nalazimo i u činjenici da nule ne povećavaju ukupan red sustava, pa dodavanje para nula manje komplicira realizaciju nego dodavanje para polova.

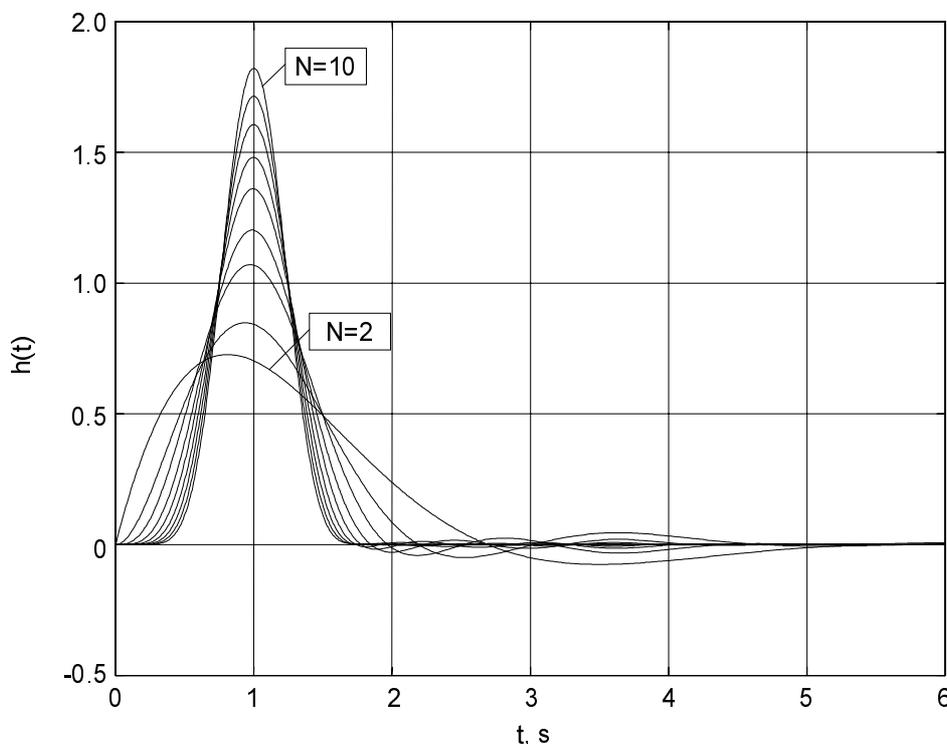
Obzirom da filtri višeg reda, s jednim do dva para nula, postižu praktički potpuno zadovoljavajuću simetriju impulsnog odziva, u praksi ne treba koristiti više od dva para nula.

### 3.4.1 Filtri sa svim nulama u beskonačnosti

Impulsni odziv optimalnih filtara bez konačnih nula prikazan je slikom 3.4. S porastom reda,  $N$ , podbačaj je manji, a vrijeme potrebno da se postigne približno stacionarno stanje je sve kraće. To je rezultat integralnog kriterija (3.1) koji, zbog kauzalnosti, prigušuje impulsni odziv za  $t > 2t_m$ . Podbačaj, definiran kao

$$\gamma_h = \frac{-\min[h(t)]}{\max[h(t)]} \cdot 100\% , \quad (3.74)$$

iznosi 10.33 %, 5.75 %, 3.87 %, 2.40 %, 1.28 %, 0.51 %, 0.27 %, 0.17% i 0.10 % za filtre od 2. do 10 reda. S porastom reda filtra, impulsni odziv se približava zvonolikoj krivulji.



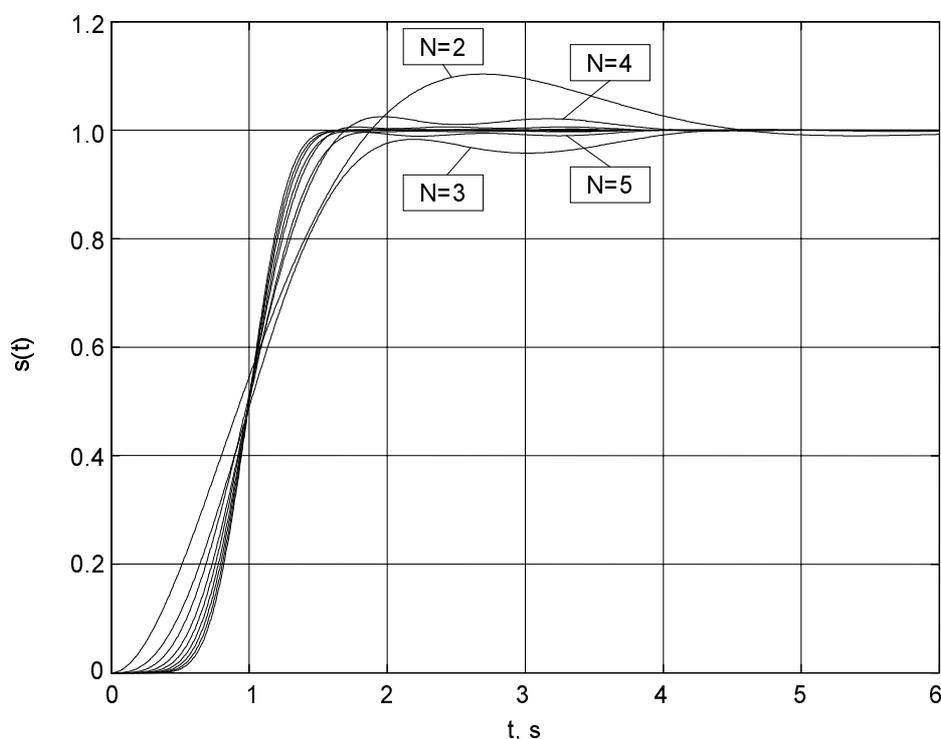
Slika 3.4 Impulsni odzivi kontinuiranih filtara sa svim nulama u beskonačnosti, normiranih na  $t_m=1$ .

Odziv na stepenicu, s porastom reda,  $N$ , teži ka monotono rastućoj krivulji, slika 3.5. Odziv se stacionarnom stanju približava s gornje strane za parni, a s donje za neparni red filtra. To za posledicu ima i alternirajući iznos prebačaja. Ako prebačaj kod odziva na stepenicu,  $s(t)$ , definiramo kao

$$\gamma_s = \frac{\max[s(t)]}{|H(j0)|} \cdot 100\% , \quad (3.75)$$

dobivamo iznose 10.33 %, 0.14 %, 2.47 %, 0.07 %, 0.57 %, 0.02 %, 0.18 %, 0.01 % i 0.05 % za filtre od 2. do 10. reda.

Slično, alternirano ponašanje, pokazuju filtri s jednoliko valovitim grupnim kašnjenjem. Neiryneck [46] je pokazao da sustavi s jednoliko valovitim grupnim kašnjenjem imaju zaravnjenje kod odziva na stepenicu, prije prijelaza u stacionarno stanje. To zaravnjenje je posljedica grupnog kašnjenja koje je pretežno veće ili manje nego kašnjenje na frekvenciji  $\omega=0$ . Bunker [8] je pokušao popraviti učinak valovitosti mijenjanjem nagiba srednje vrijednosti grupnog kašnjenja. Filtri sa simetričnim impulsnim odzivom imaju odziv na stepenicu koji valovito aproksimira spomenuto zaravnjenje. To zaravnjenje manje odstupa od stacionarnog stanja nego kod filtara s jednoliko valovitim vremenom grupnog kašnjenja. To se može objasniti time što je valovitost grupnog kašnjenja manja na nižim frekvencijama, kao što prikazuje slika 3.6.

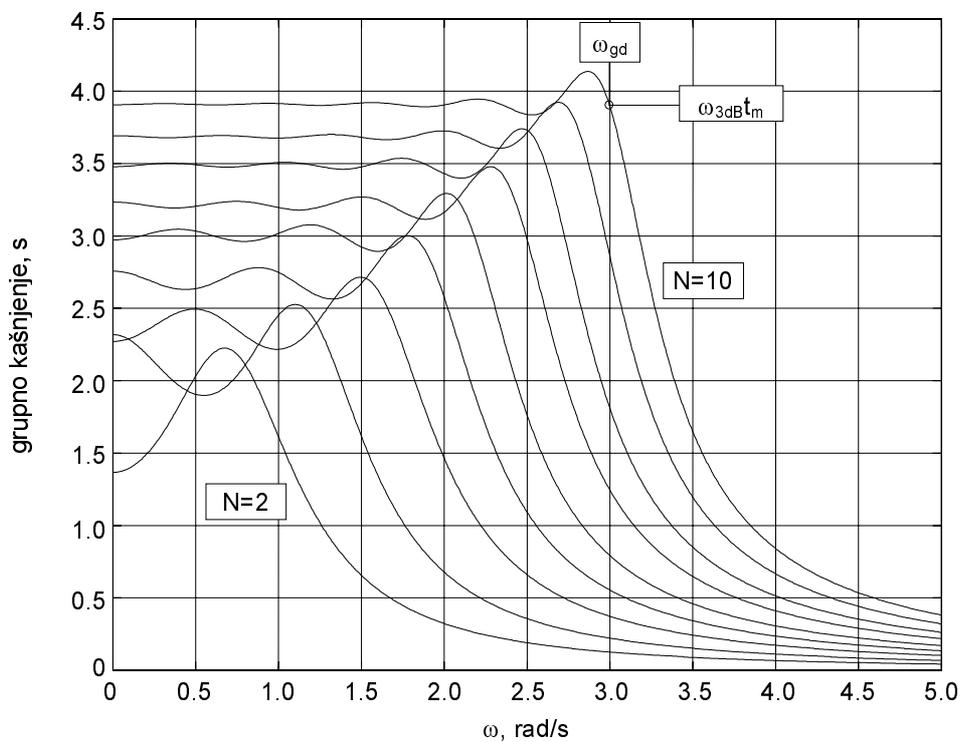


Slika 3.5 Odzivi na stepenicu kontinuiranih filtara sa svim nulama u beskonačnosti, normiranih na  $t_m=1$ .

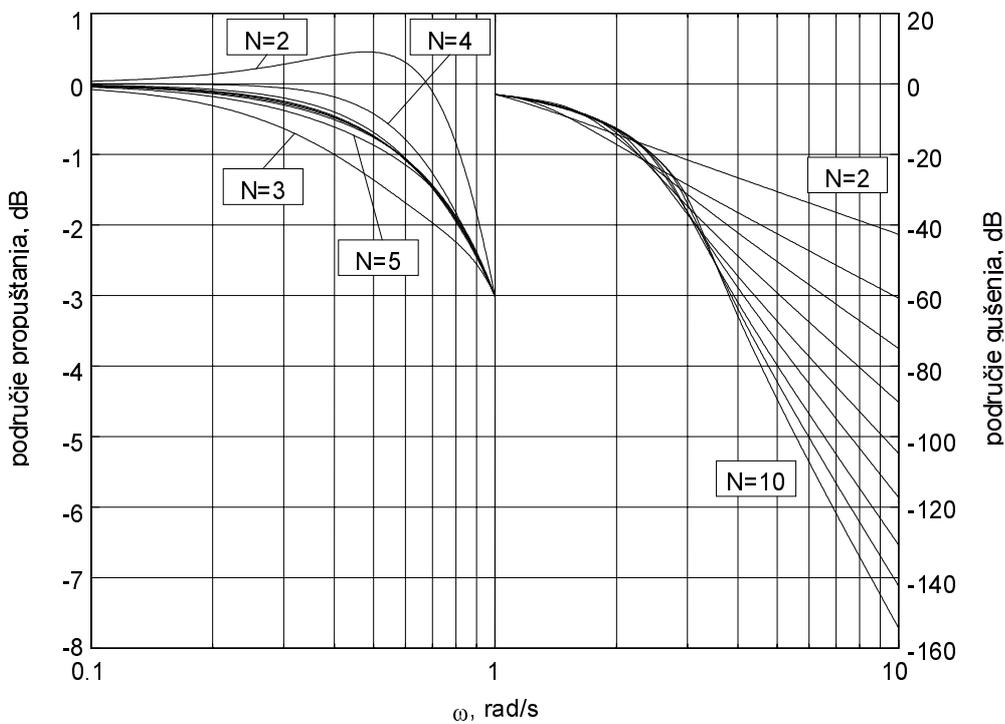
Iako nije postavljen nikakav izravan zahtjev na grupno kašnjenje, ono valovito aproksimira konstantu. Valovitost nije jednolika već raste s frekvencijom. Očito je da odstupanje smije biti veće na frekvencijama na kojima je veće gušenje, jer komponente signala tih frekvencija imaju manji utjecaj na vremenske odzive. Uz zadani  $\omega_{3dB}$ , područje kvazi konstantnog grupnog kašnjenja raste s redom sustava, dok se valovitost općenito smanjuje. Broj ekstrema u krivuljama grupnog kašnjenja jednak je redu sustava,  $N$ .

Za potrebe razmatranja definirajmo područje konstantnog grupnog kašnjenja,  $\omega_{gd}$ , kao posljednji presjek krivulje grupnog kašnjenja i linije simetrije  $\omega_{3dB}t_m$ . Tako definirano područje konstantnog grupnog kašnjenja kod filtra bez konačnih nula iznosi  $\omega_{gd}=0.97\omega_{3dB}$  za  $N=2$ , odnosno  $\omega_{gd}=2.99\omega_{3dB}$  za  $N=10$ .

Amplitudna karakteristika u području propuštanja aproksimira Gaussovu krivulju. Amplituda se Gaussovoj krivulji približava s gornje strane za parni, a s donje strane za neparni red filtra, kao što prikazuje slika 3.7.



Slika 3.6 Grupno kašnjenje kontinuiranih filtara sa svim nulama u beskonačnosti, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .



Slika 3.7 Amplitudne karakteristike kontinuiranih filtara sa svim nulama u beskonačnosti, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .

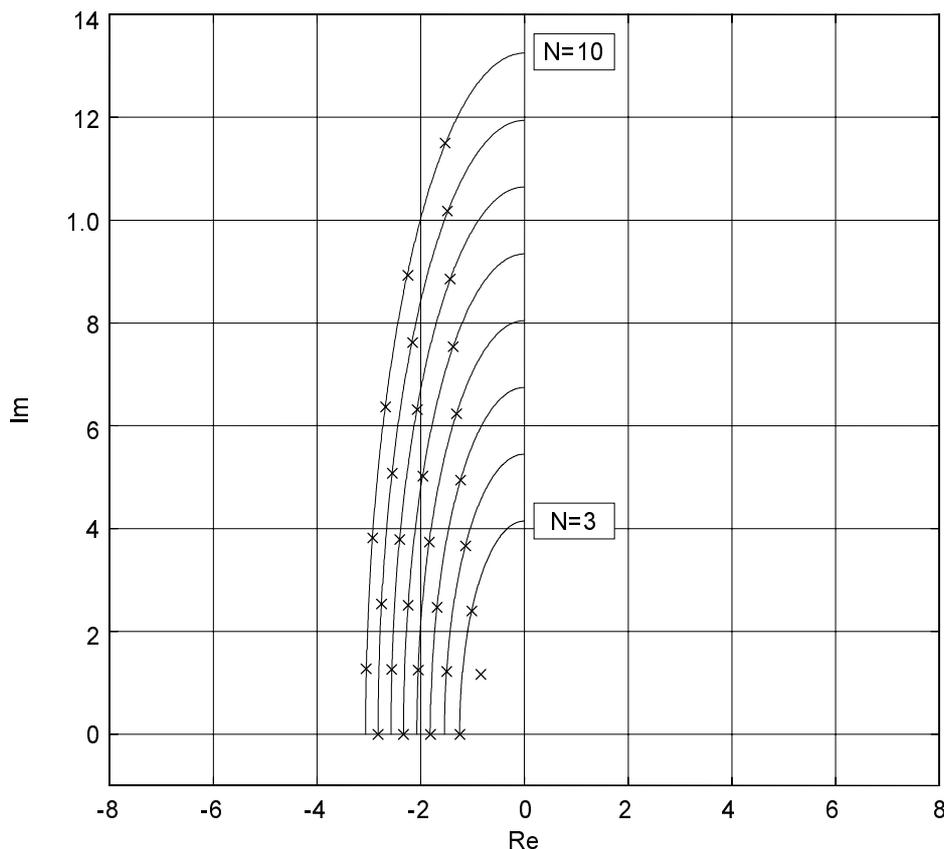
Polovi optimalnog filtra prikazani su slikom 3.8. Interesantno je da polovi leže na elipsama s centrom u ishodištu kompleksne ravnine i da su jednoliko razmaknuti po ordinati, tj. frekvenciji. Parametri elipsi prikazanih slikom 3.8 određeni su pomoću kriterija najmanjeg srednjeg kvadratnog odstupanja polova od elipsi. Obzirom da su vertikalne poluosi višestruko veće od horizontalnih, kao mjeru odstupanja polova od elipse opravdano je uzeti relativnu pogrešku

$$\varepsilon_e = \max \left| \frac{\operatorname{Re}(p_i - q_i)}{\operatorname{Re}(q_i)} \right| \cdot 100\%, \quad i=1, \dots, N, \quad (3.76)$$

gdje je  $q_i$  točka na elipsi najbliža polu  $p_i$ . Prema opisanoj mjeri, polovi optimalnog filtra od elipse odstupaju manje od  $\varepsilon_e=0.81\%$ . Mjeru jednolikog rasporeda polova po frekvenciji možemo izraziti relativnim odstupanjem razmaka polova od njihovog srednjeg razmaka,

$$\varepsilon_d = \max \left| \frac{\delta_i - \bar{\delta}}{\bar{\delta}} \right| \cdot 100\%, \quad i=1, \dots, N-1, \quad (3.77)$$

gdje je  $\delta_i = \operatorname{Im}(p_i) - \operatorname{Im}(p_{i+1})$  vertikalna udaljenost dvaju susjednih polova, a  $\bar{\delta}$  srednji razmak susjednih polova. U ovom slučaju polovi su jednoliko raspoređeni s točnošću  $\varepsilon_d=0.60\%$ .



Slika 3.8 Položaj polova kontinuiranih filtara sa svim nulama u beskonačnosti, normiranih na  $t_m=1$ .

Jednolik raspored polova po frekvenciji u literaturi se navodi kao svojstvo sustava s linearnom fazom [59]. Vertikalni razmak polova kod klasičnih aproksimacija linearne faze mnogo je nepravilniji nego što je to slučaj kod opisanog filtra, te se kreće do  $\varepsilon_d=9.7\%$ ,  $\varepsilon_d=5.5\%$ ,  $\varepsilon_d=4.8\%$  za Besselov filter te filtre s jednolikom valovitošću faze  $0.5^\circ$  i  $0.05^\circ$ .

Potrebno je spomenuti da su neki autori predlagali razne tipove filtera s jednoliko razmaknutim polovima koji leže na pravcu, elipsi [56], i paraboli [53], [42] (vidi poglavlje 2.6). Ti su filtri predloženi na osnovi iskustva, a razmatrani raspored polova nije optimalan prema bilo kojem kriteriju u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni.

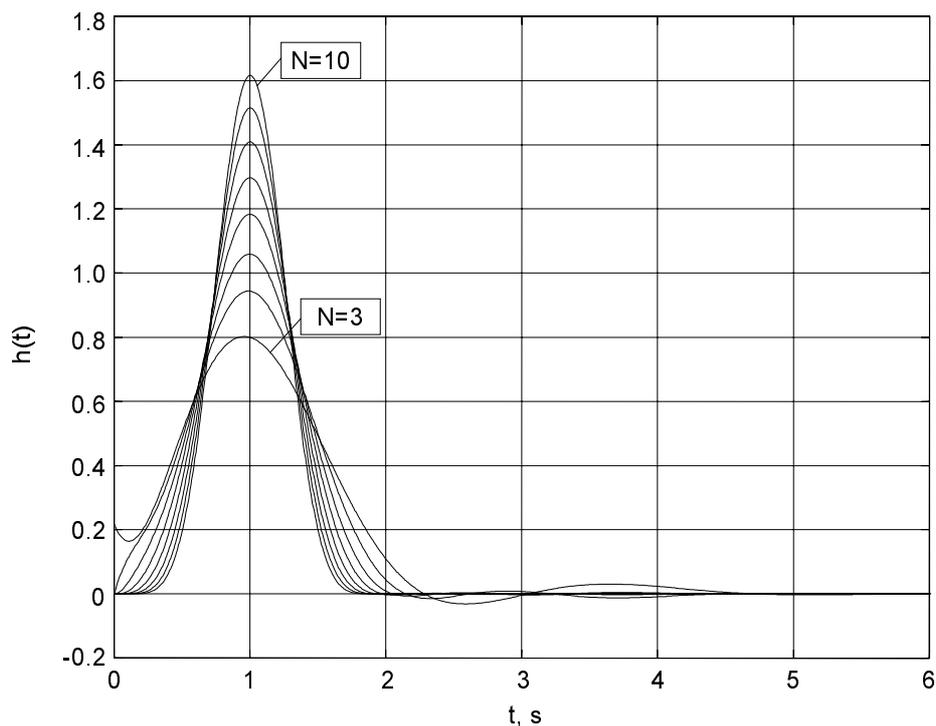
Numeričke vrijednosti parametara polova  $\omega_p$  i  $Q_p$  optimalnih filtera sa svim nulama u beskonačnosti, normiranih na  $t_m=1$ , dani su u tablici 3.1. Tablica također sadrži i vrijednosti koeficijenta  $H_0$  kao i graničnu frekvenciju  $\omega_{3dB}$ .

Tablica 3.1 Parametri prijenosnih funkcija filtera sa svim nulama u beskonačnosti, normiranih na  $t_m=1$ .

N	$H_0$	$\omega_p$	$Q_p$	$\omega_{3dB}$
2	2.071845176	1.4394	0.8537	1.6799
3	8.510708542	2.6080	1.2778	2.1103
		1.2512		
4	55.17446145	3.8353	1.6785	2.3740
		1.9367	0.6443	
5	422.0295296	5.0937	2.0599	2.6955
		2.9928	0.8862	
		1.8160		
6	4065.952661	6.3726	2.4258	3.0086
		4.1667	1.1342	
		2.4015	0.5849	
7	45223.13655	7.6662	2.7789	3.2151
		5.3924	1.3746	
		3.3677	0.7499	
		2.3333		
8	584803.6794	8.9710	3.1219	3.4904
		6.6476	1.6066	
		4.4879	0.9316	
		2.8573	0.5573	
9	8503519.327	10.2850	3.4565	3.6873
		7.9220	1.8310	
		5.6790	1.1134	
		3.7479	0.6789	
10	138600994	11.6034	3.7771	3.9111
		9.2096	2.0453	
		6.9106	1.2897	
		4.8162	0.8206	
		3.3101	0.5416	

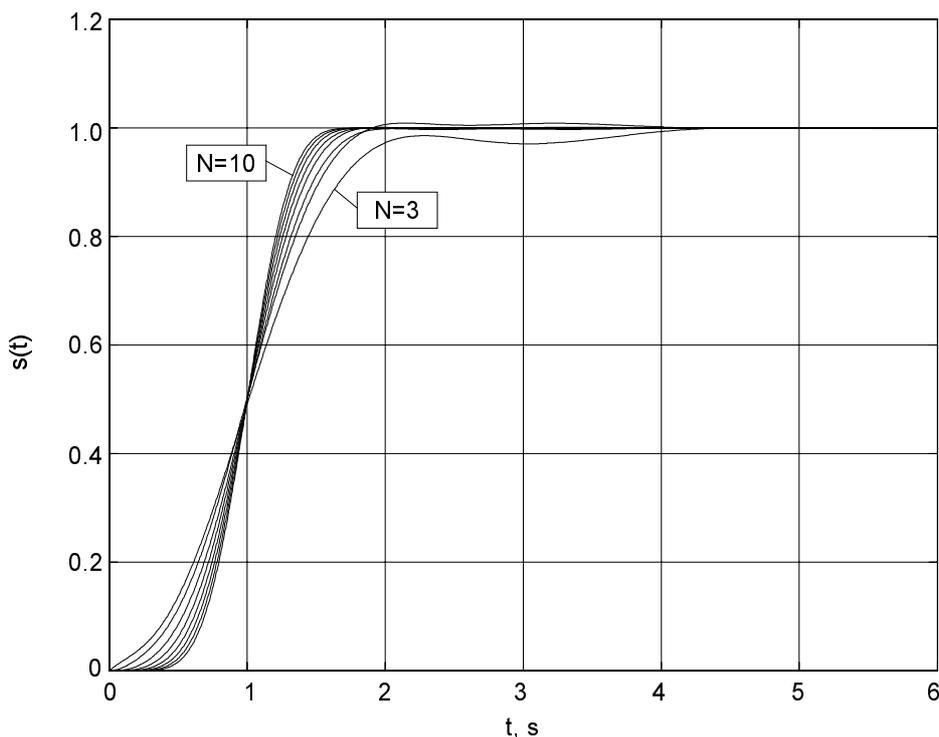
### 3.4.2 Filtri s jednim parom kompleksnih nula

Utjecaj para kompleksnih nula vidi se u impulsnom odzivu kroz ranije spomenuto povećanje simetrije, te smanjenje podbačaja i istitravanja. Valni oblik impulsnih odziva optimalnih filtara s jednim parom kompleksnih nula prikazan je na slici 3.9. U usporedbi s filterima bez konačnih nula, prisustvo para nula smanjuje podbačaj za oko 45 % kod filtra trećeg reda, pa sve do oko 10 puta kod filtra 10. reda. I u ovom slučaju podbačaj pada s povećanjem reda,  $N$ , te za filtre od 3. do 10. reda iznosi 3.92 %, 1.48 %, 0.66 %, 0.31 %, 0.14 %, 0.06 %, 0.02 %, 0.01 %.



Slika 3.9 Impulsni odzivi kontinuiranih filtara s jednim parom kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

Odzivi na stepenicu prikazani su slikom 3.10. Odzivi se stacionarnom stanju približavaju s gornje strane za parni, a s donje za neparni red filtra, s prebačajem koji iznosi 0.07 %, 0.88 %, 0.01 %, 0.12 % za filtre od 3. do 6. reda te 0.02 % za filtar 8. reda. Kod filtara 7., 9. i 10. reda prebačaj ima zanemariv iznos.

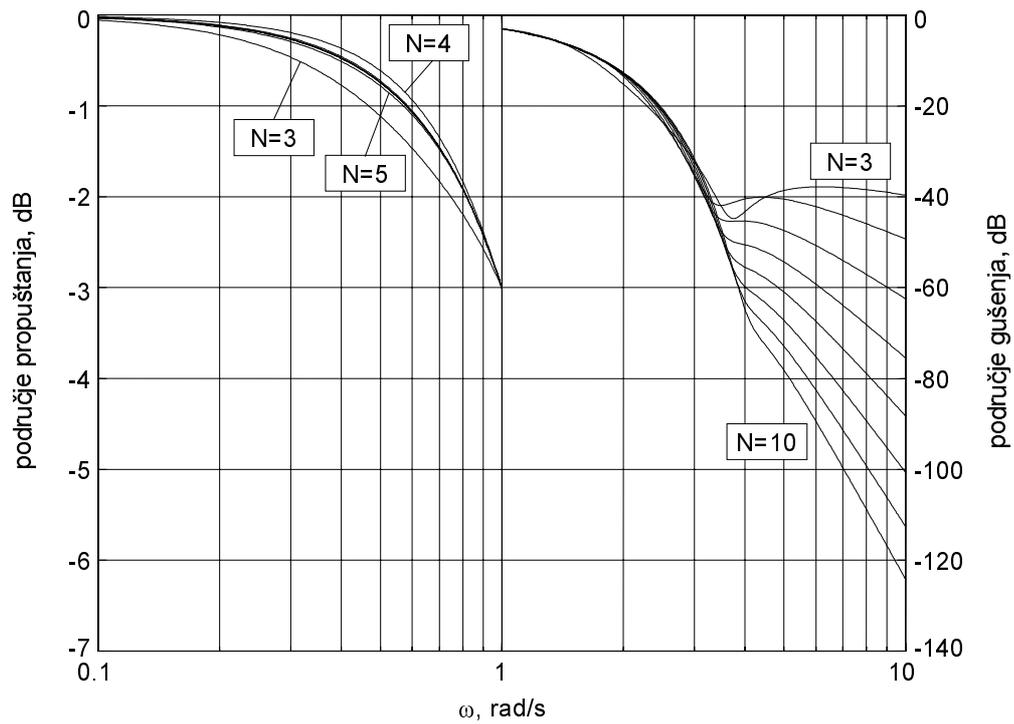


Slika 3.10 Odzivi na stepenicu kontinuiranih filtara s jednim parom kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

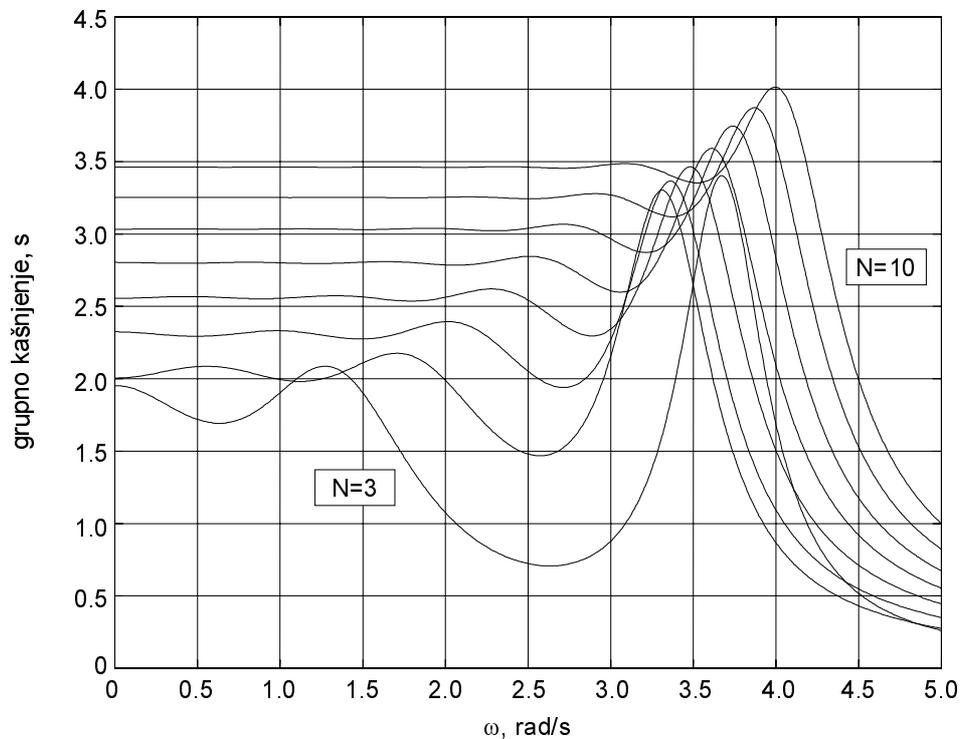
Amplitudna karakteristika u području propuštanja aproksimira Gaussovu krivulju bolje nego kod filtra bez konačnih nula, što se dobro vidi kod filtara 3. i 4. reda na slici 3.11. Filtri viših redova grupirani su vrlo blizu Gaussove krivulje. Amplitudne karakteristike u prijelaznom području konvergiraju ka istoj krivulji. Dobro poklapanje postoji na frekvencijama do  $\omega=3.4\omega_{3dB}$  za niže odnosno  $\omega=4\omega_{3dB}$  za više redove filtra.

U grupnom kašnjenju pojavio se novi val, pa je sada broj ekstrema jednak sumi polova i nula,  $N+M$ , kao što prikazuje slika 3.12. Također, amplituda prvih  $N$  valova grupnog kašnjenja manja je nego u slučaju bez konačnih nula. Očekivano, uvođenje nula smanjilo je ukupno kašnjenje filtara odgovarajućeg reda, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .

Kod filtra s jednim parom nula, područje konstantnog grupnog kašnjenja,  $\omega_{gd}$ , je šire nego kod filtra bez konačnih nula, a kreće se od  $\omega_{gd}=1.54\omega_{3dB}$  za  $N=3$ , do  $\omega_{gd}=4.19\omega_{3dB}$  za  $N=10$ . Kod filtra 3. reda,  $\omega_{gd}$ , je uzet kao treći, a ne posljednji tj. peti presjek krivulje grupnog kašnjenja i linije simetrije  $\omega_{3dB}t_m$ .

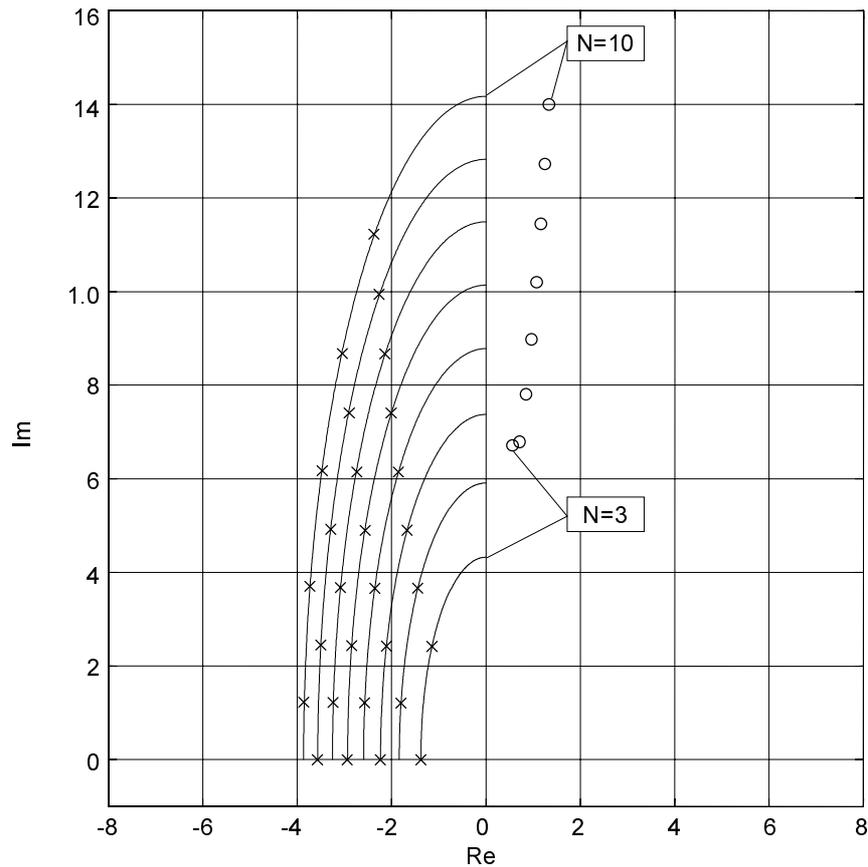


Slika 3.11 Amplitudne karakteristike kontinuiranih filtara s jednim parom kompleksnih nula, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .



Slika 3.12 Grupno kašnjenje kontinuiranih filtara s jednim parom kompleksnih nula, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .

Nakon dodavanja para kompleksnih nula, polovi filtra odgovarajućeg reda pomakli su se ulijevo, ali se i dalje nalaze na elipsama čiji su centri u ishodištu. Odstupanje od elipse manje je od  $\varepsilon_e=0.60\%$ , a polovi su jednoliko raspoređeni po frekvenciji s točnošću  $\varepsilon_d=2.23\%$ . Nule se nalaze u desnoj poluravnini, na frekvenciji koja se može grubo procijeniti kao  $\text{Re}(\omega_z)\sim 3.8\omega_{3dB}$ . Numeričke vrijednosti parametara polova  $\omega_p$  i  $Q_p$  i nula  $\omega_z$  i  $Q_z$ , kao i vrijednost koeficijenta  $H_0$  i granične frekvencije  $\omega_{3dB}$ , optimalnih filtara normiranih na  $t_m=1$ , dani su u tablici 3.2.



Slika 3.13 Položaj polova i nula kontinuiranih filtara s jednim parom kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

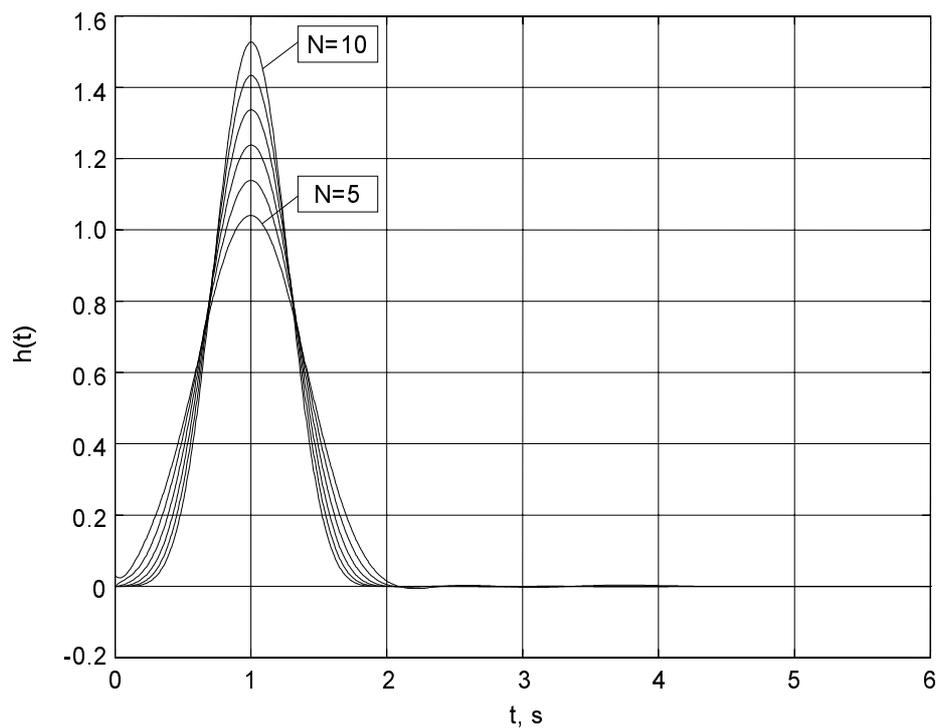
Tablica 3.2 Parametri prijenosnih funkcija filtara s jednim parom kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

N	$H_0$	$\omega_p$	$Q_p$	$\omega_z$	$Q_z$	$\omega_{3dB}$
3	0.2175560936	2.6782	1.1737	6.7391	-5.9272	1.8274
		1.3775				
4	1.56697128	3.9385	1.3662	6.8227	-4.7679	2.0436
		2.1685	0.6030			
5	10.07004387	5.1806	1.5530	7.8487	-4.6138	2.3104
		3.2163	0.7638			
		2.2344				
6	77.55800783	6.4253	1.7356	9.0265	-4.6531	2.5612
		4.3512	0.9254			
		2.8434	0.5533			
7	707.3012824	7.6766	1.9130	10.2565	-4.7645	2.8010
		5.5288	1.0808			
		3.7508	0.6591			
		2.9359				
8	7545.683548	8.9345	2.0867	11.5094	-4.9337	3.0343
		6.7321	1.2304			
		4.7982	0.7790			
		3.4642	0.5345			
9	92539.50137	10.2029	2.2542	12.7828	-5.0686	3.2522
		7.9564	1.3738			
		5.9214	0.9009			
		4.2799	0.6109			
		3.5726				
10	1283768.46	11.4780	2.4179	14.0640	-5.2298	3.4635
		9.1956	1.5128			
		7.0887	1.0216			
		5.2582	0.7044			
		4.0505	0.5249			

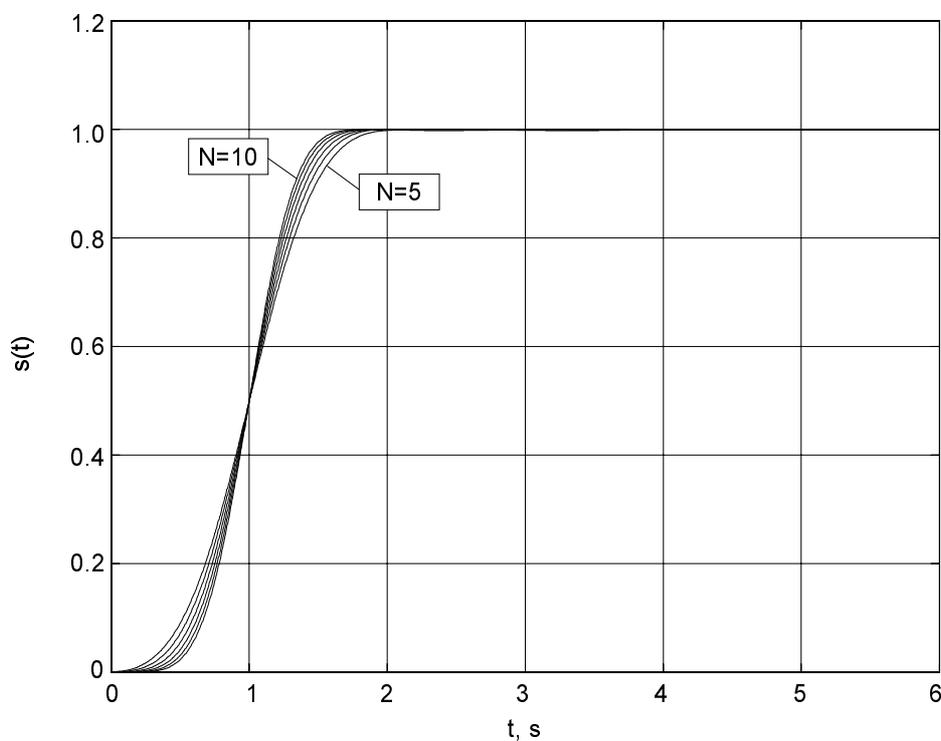
### 3.4.3 Filtri s dva para kompleksnih nula

Filtri s dva para kompleksnih nula imaju praktički zvonolik impulsni odziv, kao što prikazuje slika 3.14. Podbačaji kod filtara od 5. do 9. reda iznose 0.50 %, 0.16 %, 0.06 %, 0.02 % i 0.01 %, dok je kod filtra 10. reda podbačaj zanemarivog iznosa. Prebačaj kod odziva na stepenicu praktički je zanemariv, kao što prikazuje slika 3.15.

Amplitudne karakteristike slijede Gaussovu krivulju u području propuštanja i dijelu prijelaznog područja. Vidljivo je da krivulje aproksimiraju istu krivulju do frekvencije  $\omega=3.4\omega_{3dB}$  za niže, odnosno  $\omega=5\omega_{3dB}$  za više redove filtra, kao što prikazuje slika 3.16. Poboljšanje gušenja vidljivo kod viših redova, posljedica je drugog para nula koje se nalaze dublje u području gušenja, na frekvenciji oko  $\text{Re}(\omega_z)\sim 5.5\omega_{3dB}$ , dok se prvi par nalazi na frekvenciji  $\text{Re}(\omega_z)\sim 3.8\omega_{3dB}$ .



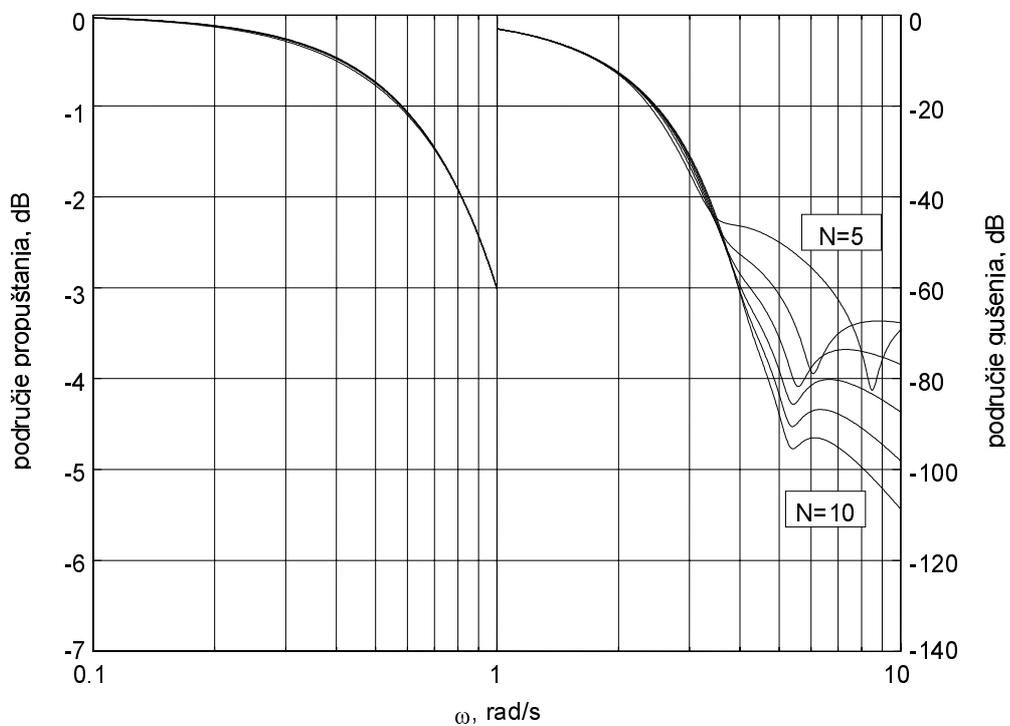
Slika 3.14 Impulsni odzivi kontinuiranih filtara s dva para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .



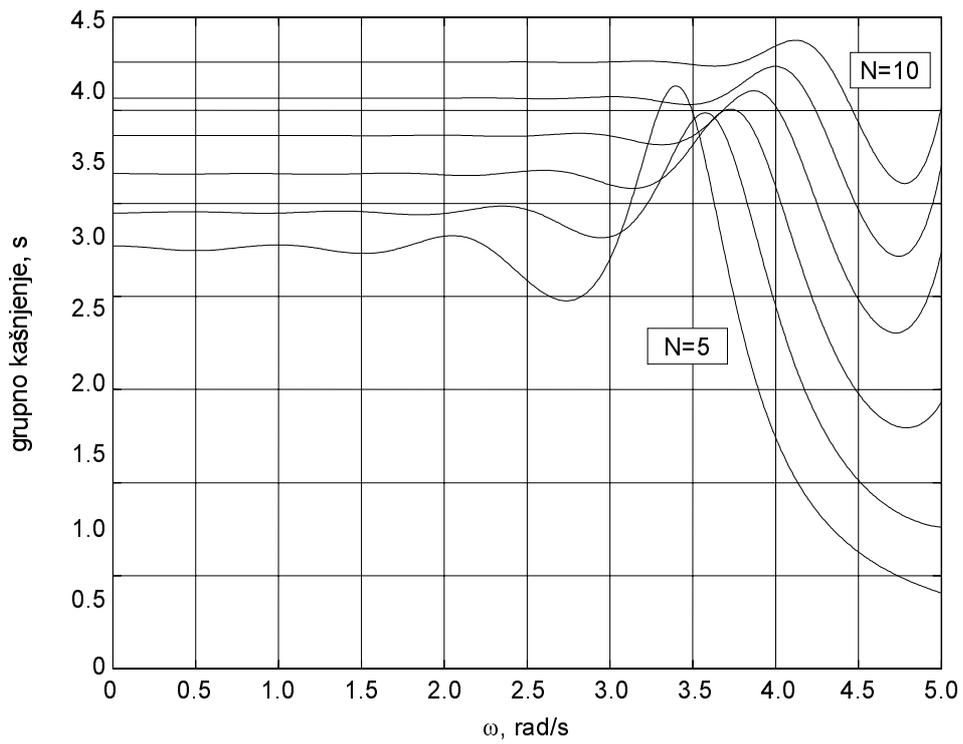
Slika 3.15 Odzivi na stepenicu kontinuiranih filtara s dva para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

Grupno kašnjenje dobilo je još jedan val koji se već nalazi duboko u području gušenja filtra. Na slici 3.17 vidi se tek njegov početak. Područje konstantnog grupnog kašnjenja je šire nego kod filtra s jednim parom nula i kreće se od  $\omega_{gd}=3.68\omega_{3dB}$  za  $N=5$ , do  $\omega_{gd}=5.51\omega_{3dB}$  za  $N=10$ . (Kod filtra 5. reda zanemaren je zadnji val grupnog kašnjenja.) Amplituda prvih  $N$  valova grupnog kašnjenja manja je nego kod filtra s jednim parom nula.

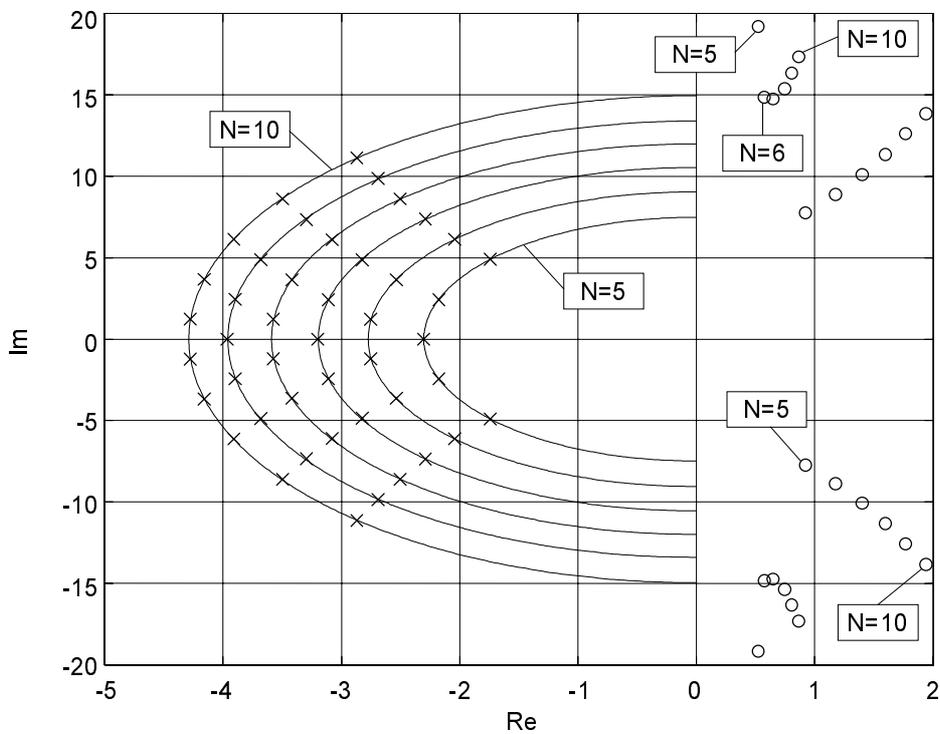
Polovi filtra su jednoliko raspoređeni po frekvenciji s točnošću  $\varepsilon_d=2.38\%$ , a nalaze se na elipsama čiji je centar u ishodištu, kao što prikazuje slika 3.18. Zbog relativno velike udaljenosti od ishodišta drugog para nula, vertikalna skala slike 3.18 je komprimirana. Odstupanje polova od elipse manje je od  $\varepsilon_e=0.39\%$ . Numeričke vrijednosti parametara polova  $\omega_p$  i  $Q_p$  i nula  $\omega_z$  i  $Q_z$ , kao i vrijednost koeficijenta  $H_0$  i granične frekvencije  $\omega_{3dB}$ , optimalnih filtara normiranih na  $t_m=1$ , dani su u tablici 3.3.



Slika 3.16 Amplitudne karakteristike kontinuiranih filtara s dva para kompleksnih nula, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .



Slika 3.17 Grupno kašnjenje kontinuiranih filtara s dva para kompleksnih nula, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .



Slika 3.18 Položaj polova i nula kontinuiranih filtara s dva para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

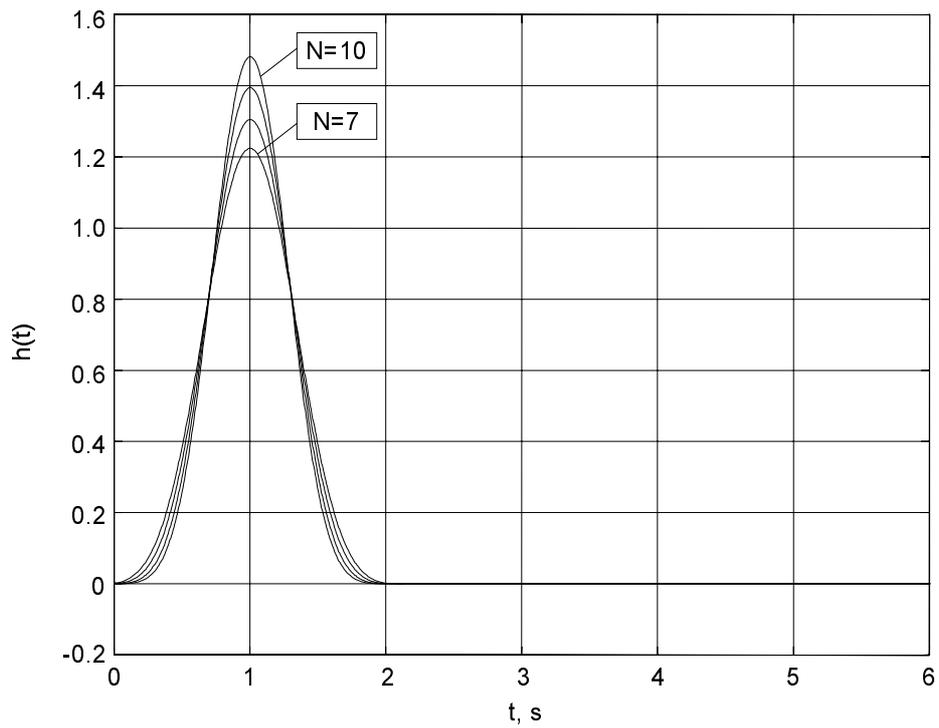
Tablica 3.3 Parametri prijenosnih funkcija filtara s dva para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

N	$H_0$	$\omega_p$	$Q_p$	$\omega_z$	$Q_z$	$\omega_{3dB}$
5	0.02973650081	5.1997	1.4916	19.1862	-18.3945	2.2598
		3.2611	0.7487	7.7843	-4.2201	
		2.3069				
6	0.4217643043	6.4613	1.5810	14.8377	-12.8597	2.4517
		4.4386	0.8758	8.9488	-3.8042	
		3.0068	0.5463			
7	4.167425847	7.7158	1.6841	14.7459	-11.3862	2.6585
		5.6291	0.9962	10.1829	-3.6348	
		3.9447	0.6341			
		3.2010				
8	43.16288859	8.9694	1.7904	15.3940	-10.3294	2.8651
		6.8327	1.1100	11.4408	-3.5801	
		4.9978	0.7312			
		3.7777	0.5280			
9	491.3409174	10.2222	1.8995	16.3337	-10.1288	3.0650
		8.0440	1.2202	12.6974	-3.5903	
		6.1076	0.8294			
		4.5950	0.5893			
		3.9685				
10	6266.12288	11.4958	2.0023	17.3516	-10.0107	3.2597
		9.2888	1.3277	13.9664	-3.5995	
		7.2732	0.9304			
		5.5506	0.6674			
		4.4501	0.5201			

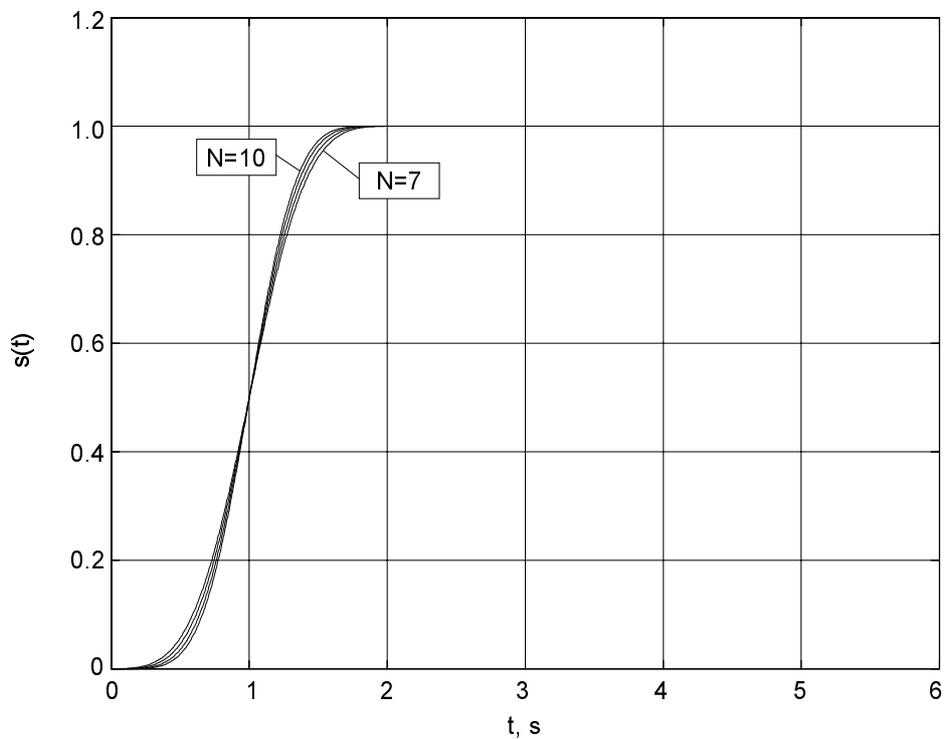
### 3.4.4 Filtri s tri para kompleksnih nula

Impulsni odziv prikazan slikom 3.19, simetričan je i praktički bez podbačaja. Također, zanemariv je i prebačaj kod odziva na stepenicu, slika 3.20. Amplitudne karakteristike slijede istu krivulju do frekvencije  $\omega=3.8\omega_{3dB}$  za niže, odnosno  $\omega=5.2\omega_{3dB}$  za više redove filtra, kao što prikazuje slika 3.21. Grupno kašnjenje je približno konstantno do frekvencija kojima odgovara gušenje od 60 dB za filter 7. reda pa sve do gotovo 100 dB za filter 10. reda, kao što se vidi na slikama 3.21 i 3.22.

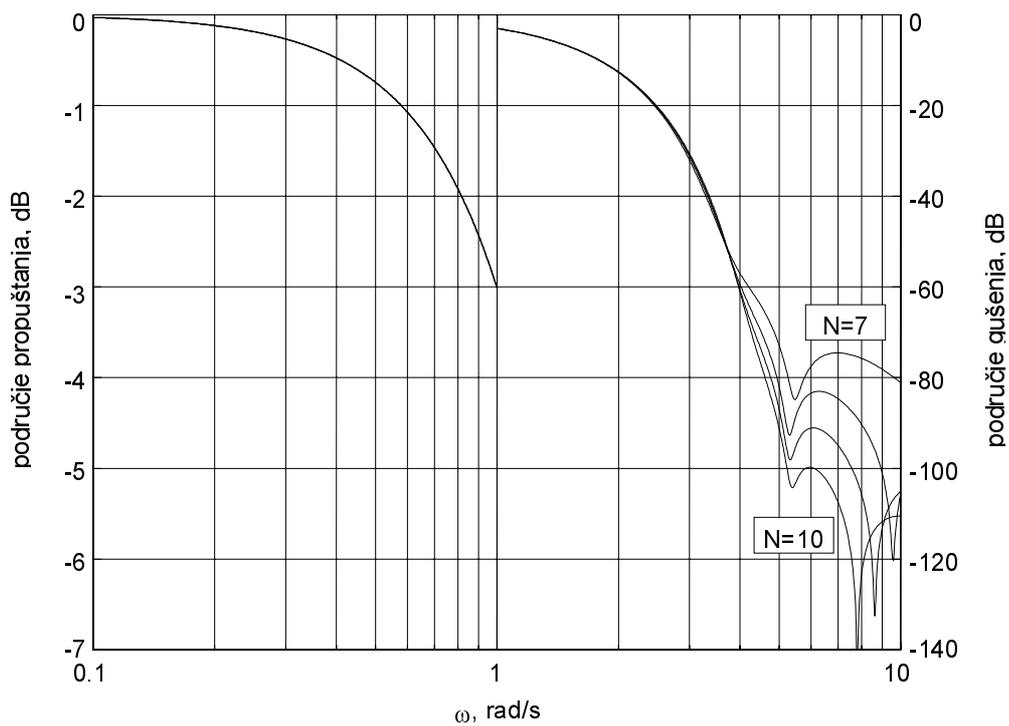
Raspored polova i nula optimalnog filtra prikazuje slika 3.23. Polovi su jednoliko raspoređeni po frekvenciji s točnošću  $\varepsilon_d=1.88\%$ , a nalaze se na elipsama čiji je centar u ishodištu. Odstupanje polova od elipse manje je od  $\varepsilon_e=0.37\%$ . Numeričke vrijednosti parametara polova  $\omega_p$  i  $Q_p$  i nula  $\omega_z$  i  $Q_z$ , kao i vrijednost koeficijenta  $H_0$  i granične frekvencije  $\omega_{3dB}$ , optimalnih filtara normiranih na  $t_m=1$ , dani su u tablici 3.4.



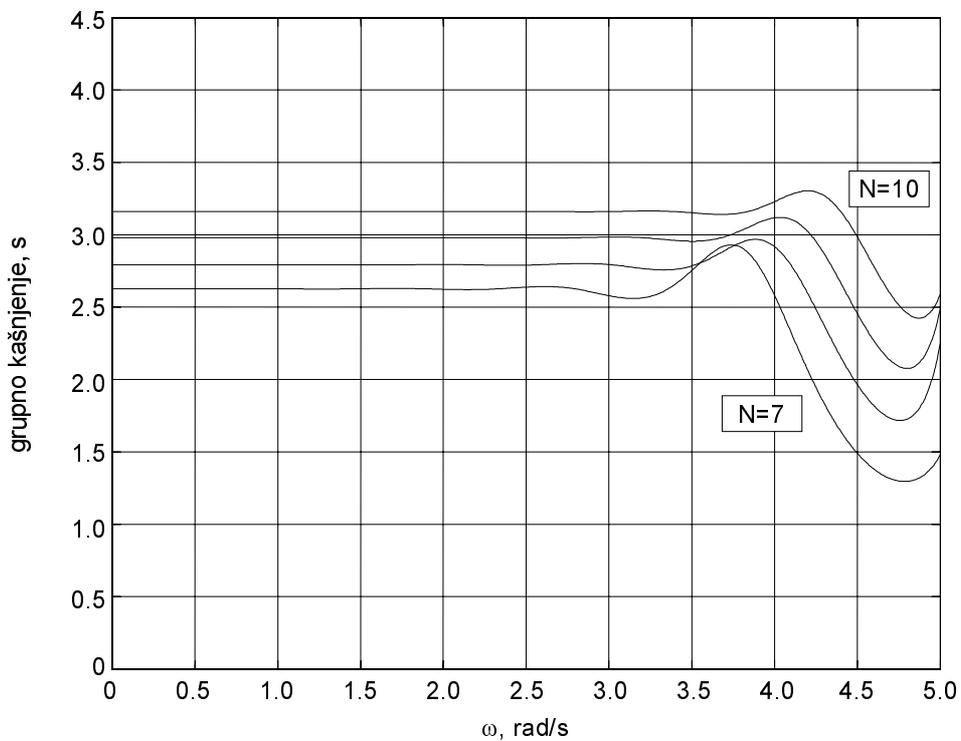
Slika 3.19 Impulsni odzivi kontinuiranih filtara s tri para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .



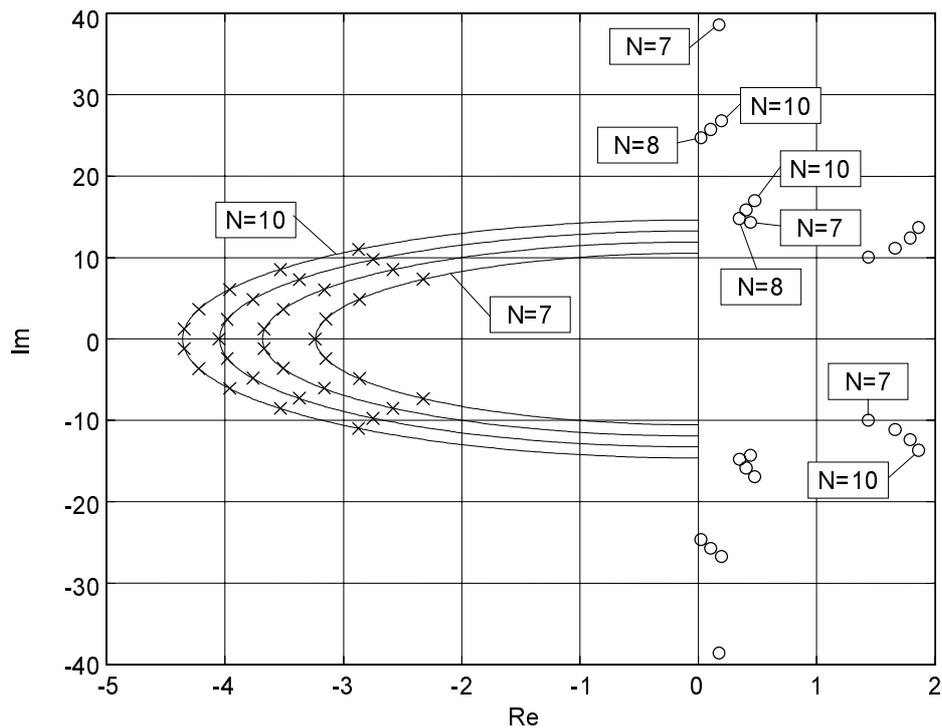
Slika 3.20 Odzivi na stepenicu kontinuiranih filtara s tri para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .



Slika 3.21 Amplitudne karakteristike kontinuiranih filtara s tri para kompleksnih nula, normiranih na  $\omega_{3\text{dB}}=1$ .



Slika 3.22 Grupno kašnjenje kontinuiranih filtara s tri para kompleksnih nula, normiranih na  $\omega_{3\text{dB}}=1$ .



Slika 3.23 Položaj polova i nula kontinuiranih filtara s tri para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

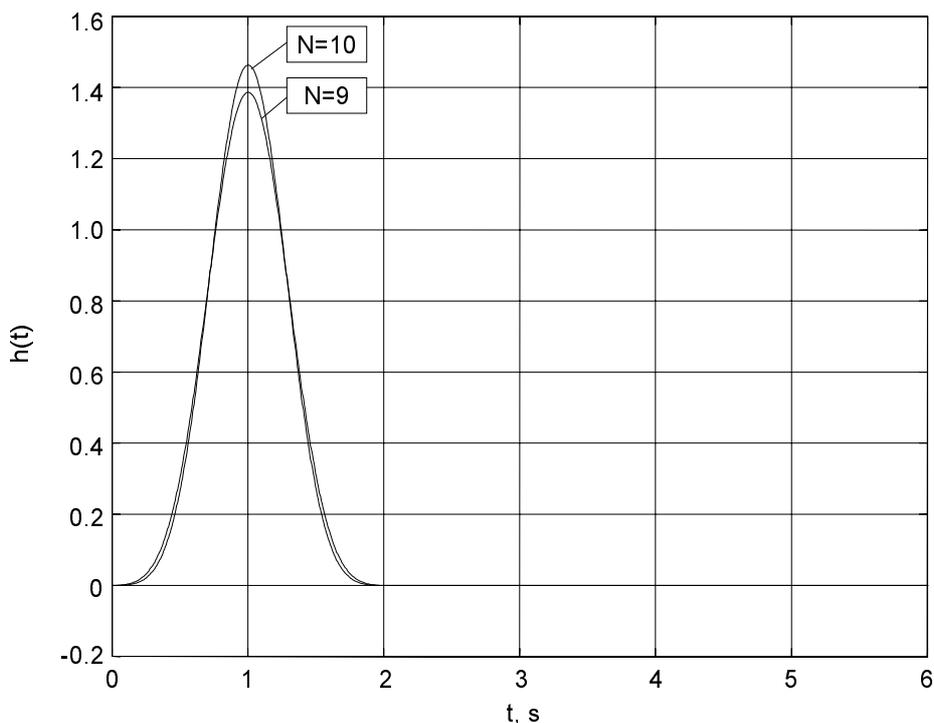
Tablica 3.4 Parametri prijenosnih funkcija filtara s tri para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

N	$H_0$	$\omega_p$	$Q_p$	$\omega_z$	$Q_z$	$\omega_{3dB}$
7	0.003055866832	7.6913	1.6522	38.5811	-110.9212	2.6263
		5.6291	0.9829	14.3382	-16.2847	
		3.9696	0.6300	10.1184	-3.5205	
		3.2414				
8	0.07003169983	8.9011	1.7235	26.7442	-67.6394	2.7925
		6.8176	1.0778	14.7856	-21.4521	
		5.0350	0.7176	11.2795	-3.3936	
		3.8630	0.5261			
9	0.8375487269	10.1291	1.8409	25.7049	-120.8146	2.9796
		8.0104	1.1873	15.8158	-19.6764	
		6.1244	0.8135	12.5173	-3.4991	
		4.6557	0.5846			
10	10.98651504	11.3741	1.9795	24.6744	-580.2847	3.1606
		9.2181	1.3048	16.9450	-17.8027	
		7.2483	0.9149	13.7938	-3.7029	
		5.5740	0.6601			
		4.5127	0.5191			

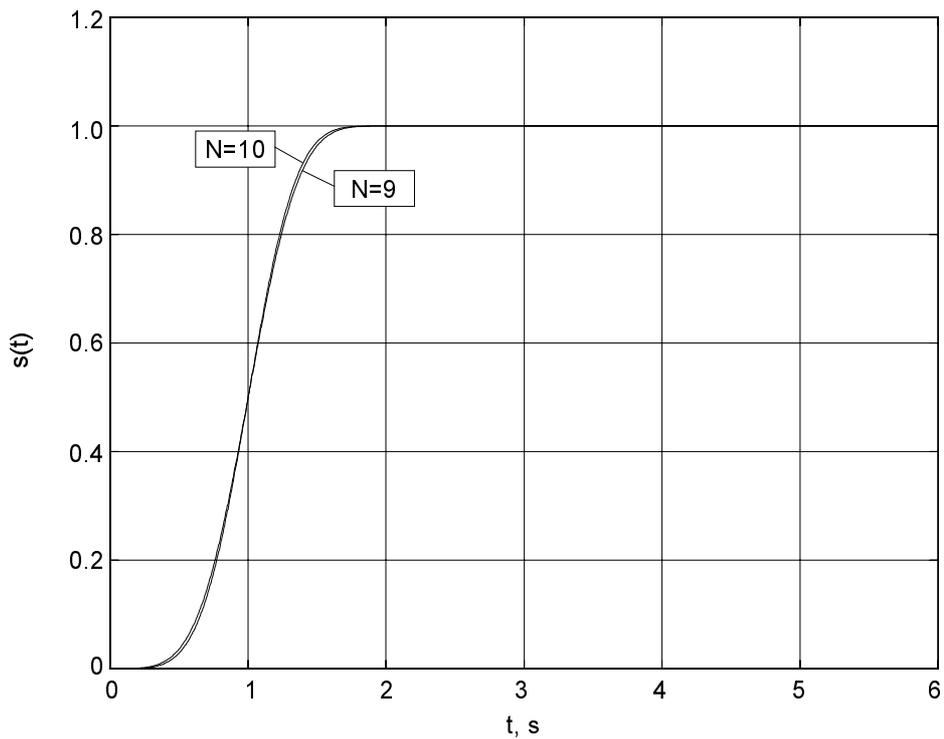
### 3.4.5 Filtri sa četiri para kompleksnih nula

Kao što je pokazano na slici 3.3, vrlo velika simetrija impulsnog odziva postiže se već kod filtera koji sadrže 1, 2 i 3 para nula, pri čemu svaki novi par sve manje doprinosi simetriji. Utjecaj četvrtog para nula na vremenske i frekvencijske odzive prikazan je slikama 3.24 do 3.27. Vremenski odzivi imaju praktički zanemarive podbačaje i prebačaje te se vrlo malo razlikuju od odgovarajućih odziva filtera s tri para nula. Slična je situacija kod frekvencijskih odziva. Grupno kašnjenje ima nešto manju valovitost blizu frekvencije  $\omega_{gd}$ , dok se u amplitudnoj karakteristici vidi vrlo malen doprinos gušenju na frekvencijama "između" druge i treće nule, što u praksi nema veliko značenje.

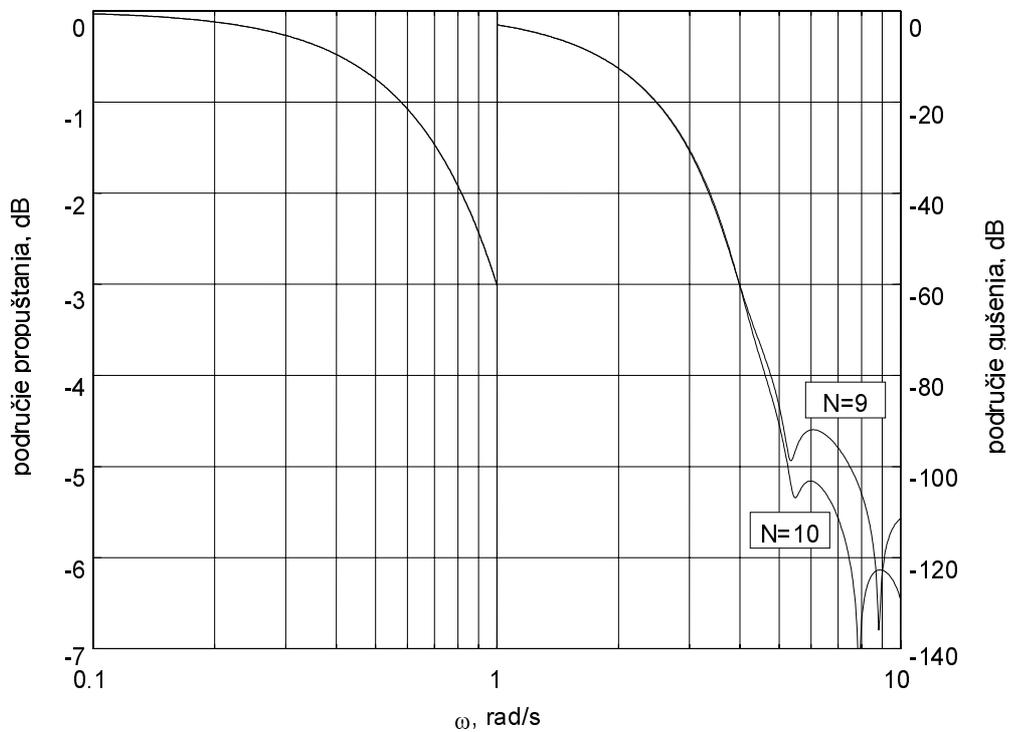
Polovi filtera su jednoliko raspoređeni po frekvenciji s točnošću  $\varepsilon_d=1.96\%$ , a nalaze se na elipsama čiji je centar u ishodištu. Odstupanje polova od elipse manje je od  $\varepsilon_e=0.38\%$ . Numeričke vrijednosti parametara polova prijenosnih funkcija filtera normiranih na  $t_m=1$ , dane su u tablici 3.5.



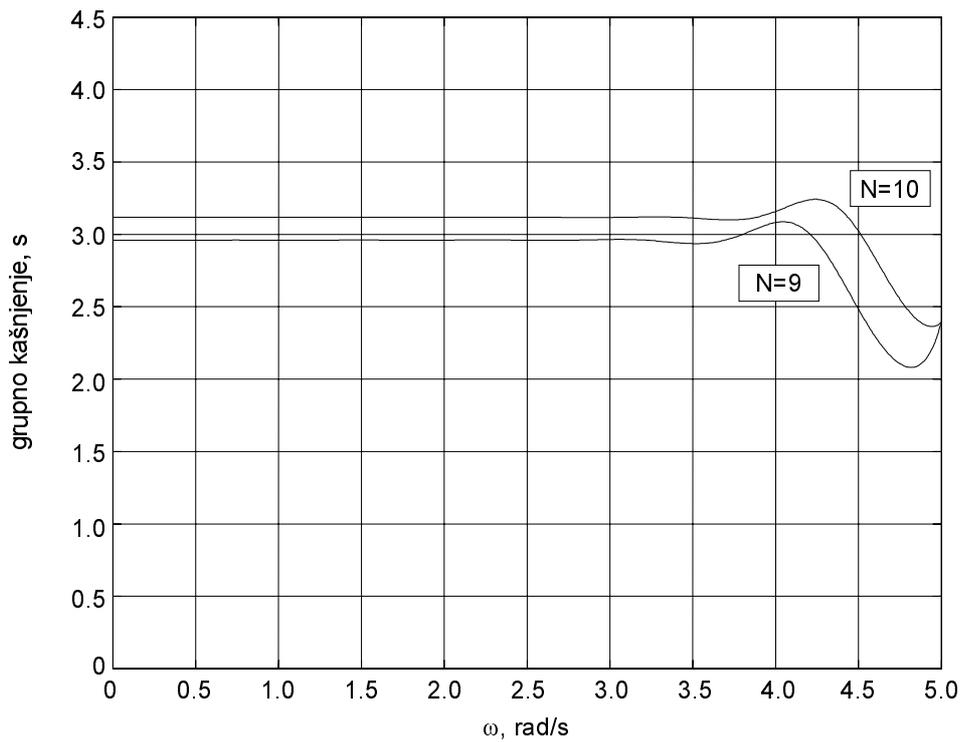
Slika 3.24 Impulsni odzivi kontinuiranih filtera sa četiri para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .



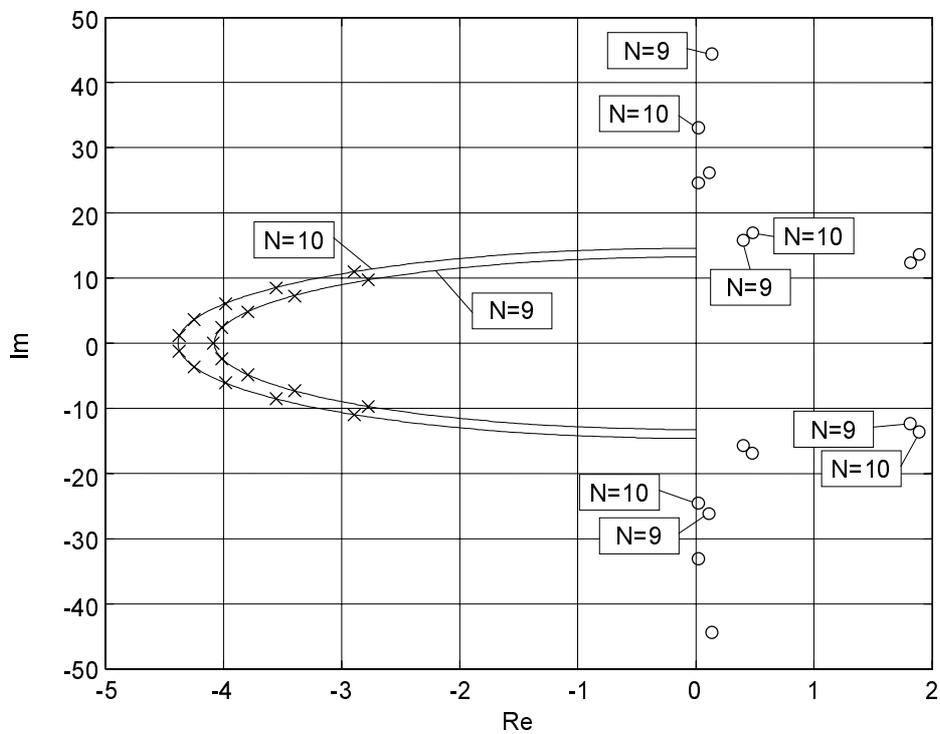
Slika 3.25 Odzivi na stepenicu kontinuiranih filtara sa četiri para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .



Slika 3.26 Amplitudne karakteristike kontinuiranih filtara sa četiri para kompleksnih nula, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .



Slika 3.27 Grupno kašnjenje kontinuiranih filtara sa četiri para kompleksnih nula, normiranih na  $\omega_{3dB}=1$ .



Slika 3.28 Položaj polova i nula kontinuiranih filtara sa četiri para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

Tablica 3.5 Parametri prijenosnih funkcija filtara sa četiri para kompleksnih nula, normiranih na  $t_m=1$ .

N	$H_0$	$\omega_p$	$Q_p$	$\omega_z$	$Q_z$	$\omega_{3dB}$
9	0.0004223992412	10.1216	1.8222	44.4103	-159.8852	2.9600
		8.0094	1.1780	26.1526	-115.8783	
		6.1339	0.8084	15.7730	-19.6778	
		4.6807	0.5829	12.4972	-3.4400	
		4.0867				
10	0.01027187576	11.3670	1.9622	33.0978	-780.5792	3.1186
		9.2165	1.2961	24.5821	-579.9826	
		7.2530	0.9099	16.9809	-17.6166	
		5.5897	0.6577	13.7747	-3.6416	
		4.5412	0.5187			

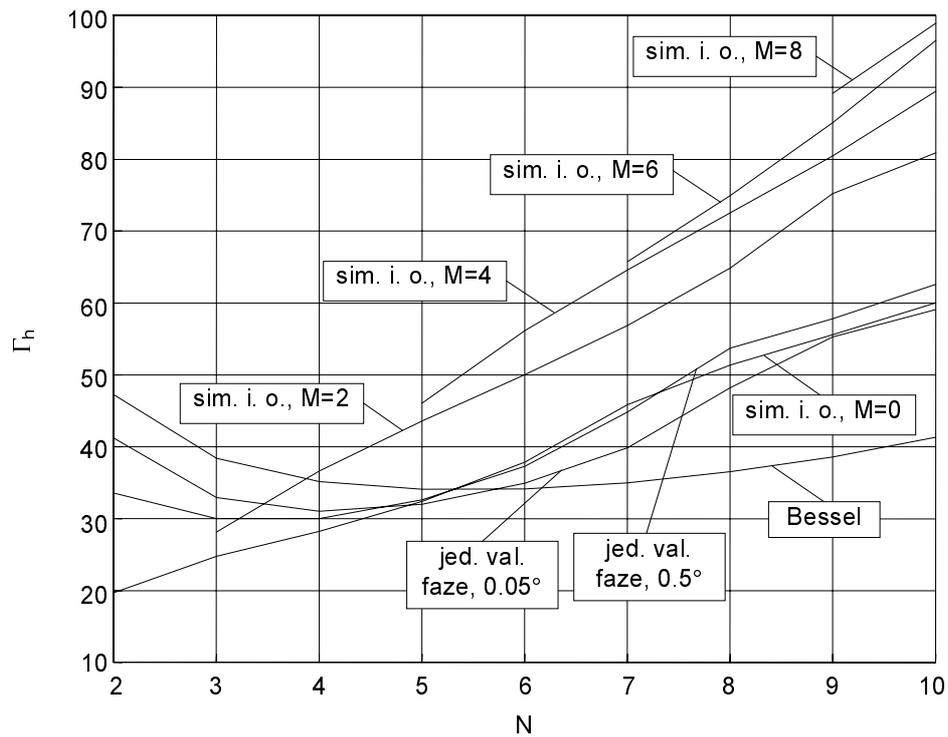
### 3.5 Svojstva kontinuiranih filtara sa simetričnim impulsnim odzivom

Filtri sa simetričnim impulsnim odzivom optimalni su prema integralnom kriteriju simetrije impulsnog odziva (3.1). U praksi je interesantno poznavati i druga parametre njihovih vremenskih odziva. Kao karakterističan parametar, pogodan za usporedbu s klasičnim filterskim aproksimacijama odabran je podbačaj impulsnog odziva, jer on, u kombinaciji s mjerom simetrije, vrlo cjelovito opisuje impulsni odziv. Slika 3.29 prikazuje koliko je podbačaj impulsnog odziva manji od njegove amplitude, izraženo u decibelima,

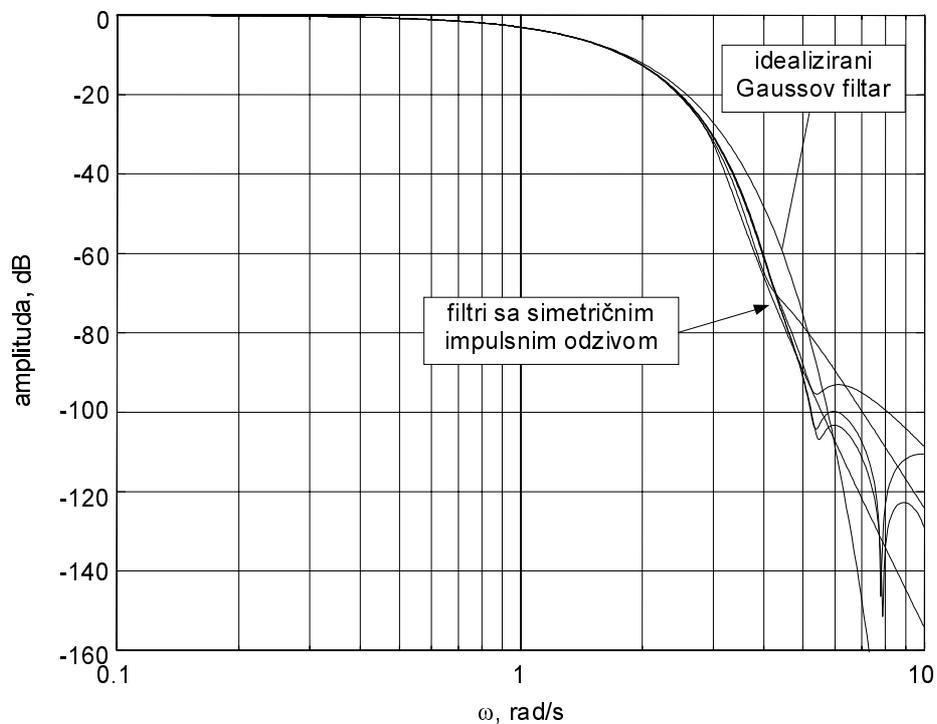
$$\Gamma_h = 20 \log \left\{ \frac{\max[h(t)]}{-\min[h(t)]} \right\}. \quad (3.78)$$

Na slici su prikazani podbačaji filtara sa simetričnim impulsnim odzivom i klasičnih filtara koji aproksimiraju konstantno grupno kašnjenje. Filtri koji aproksimiraju konstantnu amplitudu imaju loša svojstva u vremenskoj domeni pa nema potrebe uključivati ih u ovu analizu (vidi poglavlje 2.1). Filtri sa simetričnim impulsnim odzivom, bez konačnih nula, reda  $N>5$ , bolji su od Besselovog filtra, a nalaze se negdje oko filtara s jednoliko valovitom fazom. Takav rezultat ponovo ukazuje na činjenicu da glatka ili jednoliko valovita faza nisu nužne za dobar vremenski odziv. Filtri s konačnim nulama pokazuju još bolja svojstva, toliko bolja što je broj nula,  $M$ , veći. Na primjer, filtri sa samo jednim parom nula, reda  $N>3$  daju bolje rezultate nego Besselov filter. Omjer podbačaja i maksimuma impulsnog odziva veći od 50 dB do 60 dB, zadovoljava potrebe velikog broja aplikacija. Takav omjer postiže se već kod filtra 6. reda uz 1 do 2 para nula. Daljnje smanjivanje podbačaja dodavanjem nula nije opravdano, posebno jer svaki novi par sve manje popravljaju svojstva. S porastom reda filtra, utjecaj nula na podbačaj raste pa tako kod 10. reda, već prvi par nula smanjuje relativni iznos podbačaja za gotovo 10 puta.

Utjecaj nula na amplitudu u području propuštanja i prijelaznom području nije velik, kao što se vidi na slici 3.30, To je posljedica kriterija (3.1) koji forsira isključivo simetriju. Amplitudne karakteristike konvergiraju ka istoj krivulji do  $5\omega_{3dB}$ . Ta krivulja pada nešto brže nego amplituda idealiziranog Gaussovog filtra dana izrazom (2.2). Za razliku od amplitude grupno kašnjenje se dodavanjem novih nula poboljšava u većoj mjeri.



Slika 3.29 Podbačaj impulsnog odziva filtera s maksimalno simetričnim impulsnim odzivom i filtera koji aproksimiraju linearnu fazu.

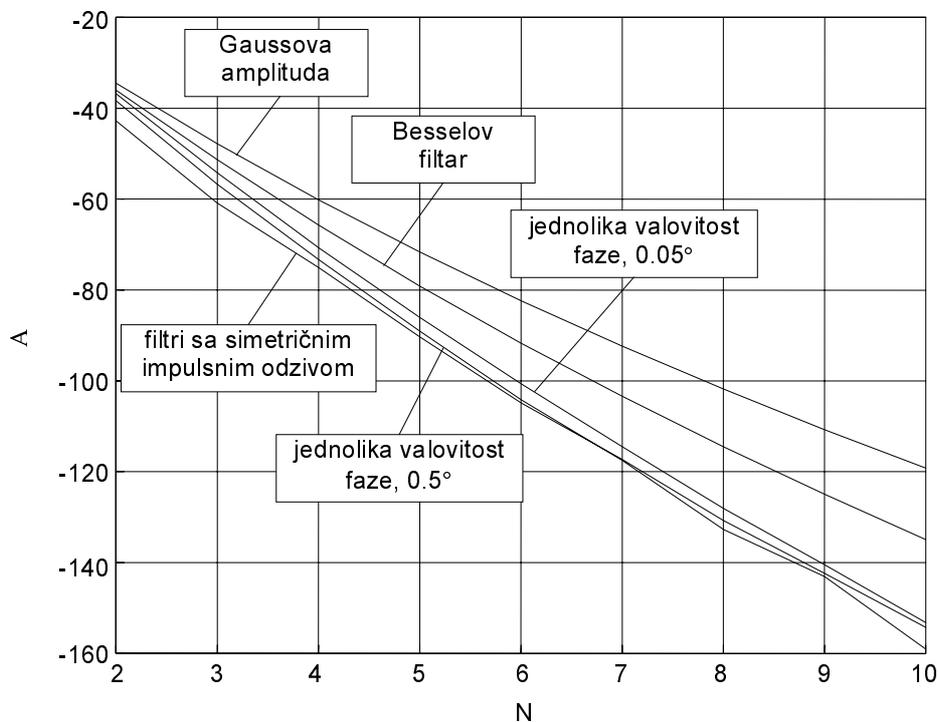


Slika 3.30 Amplitudna karakteristika filtera sa simetričnim impulsnim odzivom, 10. reda sa 0, 2, 4, 6 i 8 nula.

Slika 3.31 prikazuje usporedbu filtera sa simetričnim impulsnim odzivom bez konačnih nula s klasičnim filterima koji aproksimiraju linearnu fazu i Gaussovu amplitudu, a koji također ne sadrže konačne nule. Kao parametar za usporedbu odabrano je gušenje na frekvenciji  $10\omega_{3dB}$ ,

$$A = 20 \log \left\{ \frac{|H(j10\omega_{3dB})|}{|H(j0)|} \right\}. \quad (3.79)$$

Iz slike se vidi da je gušenje filtra sa simetričnim impulsnim odzivom znatno veće od filtra s Gaussovom amplitudom i Besselovog filtra. Filtri s jednolikom valovitošću faze  $0.5^\circ$  imaju nešto veće gušenje nakon 6. reda, ali tada imaju i nešto lošija svojstva u vremenskoj domeni, kao što pokazuje slika 3.29.



Slika 3.31 Gušenje na frekvenciji  $10\omega_{3dB}$  filtera sa simetričnim impulsnim odzivom, filtera koji aproksimiraju linearnu fazu te filtera koji aproksimira Gaussovu amplitudu.

## 4 Digitalni filtri sa simetričnim impulsnim odzivom

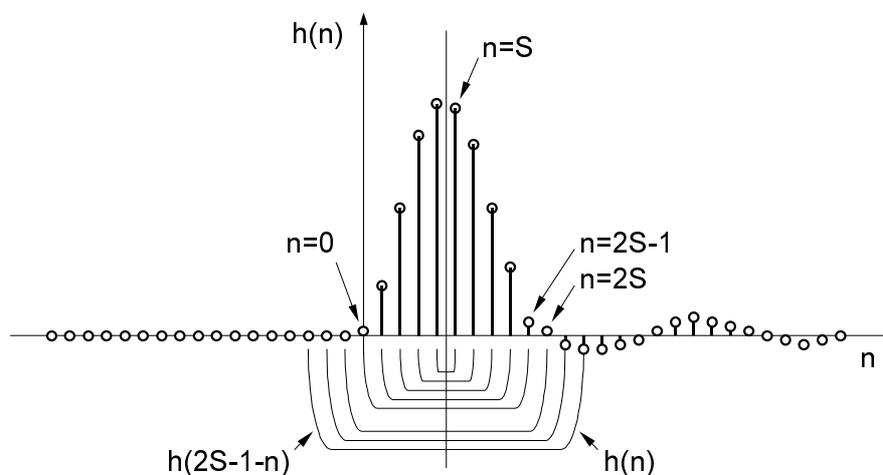
Kod diskretnih sustava moguće je napraviti filter s konačnim impulsnim odzivom (FIR), što omogućava realizaciju kauzalnih sustava s potpuno simetričnim impulsnim odzivom, odnosno idealnom linearnom fazom. Realizacija FIR filtra obično zahtijeva mnogo više memorijskih lokacija i operacija (množenja i zbrajanja), nego što je to slučaj kod rekurzivnog (IIR) filtra sličnih karakteristika. U praksi idealna linearna faza nije uvijek nužna, pa se u mnogim aplikacijama mogu uspješno upotrebljavati IIR filtri s približno linearnom fazom.

Mnogi autori bavili su se sintezom IIR filtara s kvazi linearnom fazom. Kao primjer spomenimo filtre s maksimalno glatkom aproksimacijom grupnog kašnjenja koje je predložio Thiran [64], te filtre s grupnim kašnjenjem jednolike valovitosti, koje su razmatrali Thiran [63] i Deczky [17]. Kao predmet istraživanja bili su, također, i postupci aproksimacije konstantnog grupnog kašnjenja, uz istovremeno postavljene zahtjeve na amplitudu, kao što je to slučaj postupka kojeg su opisali Chottera i Jullien [12]. Jedan takav pristup, temeljen na strukturi koja sadrži fazni korektor, u posljednje vrijeme razmatrali su Surma-aho i Saramaki [60].

Slično kao i kod kontinuiranih sustava, i ovdje se nameće pitanje da li će filter, čija su svojstva zadana izravno u vremenskoj domeni, imati bolja svojstva nego filter dobiven postupcima u frekvencijskoj domeni. To pitanje bit će razmatrano u ovom poglavlju, a odgovor će biti dan u obliku nove klase diskretnih (digitalnih) filtara dobivenih optimiranjem simetrije impulsnog odziva.

### 4.1 Simetrija impulsnog odziva

Na sličan način kao i kod kontinuiranih filtara (poglavlje 3.1), možemo definirati mjeru asimetrije impulsnog odziva digitalnog filtra. Linija simetrije kod kontinuiranih filtara nalazila se na  $t=t_m$ . Njoj sada odgovara linija smještena između uzoraka  $S-1$  i  $S$ , kao što prikazuje slika 4.1.



Slika 4.1 Mjera asimetrije impulsnog odziva digitalnog filtra.

Asimetrija je određena sumom

$$e_d = \sum_{n=S}^{\infty} [h(n) - h(2S-1-n)]^2, \quad (4.1)$$

gdje  $h$  predstavlja impulsni odziv filtra. Ako je sustav kauzalan, vrijedi

$$h(2S-1-n) = 0 \text{ za } n > 2S-1, \quad (4.2)$$

pa izraz (4.1) možemo prikazati kao

$$e_d = \sum_{n=S}^{2S-1} [h(n) - h(2S-1-n)]^2 + \sum_{n=2S}^{\infty} [h(n)]^2. \quad (4.3)$$

Nakon kvadriranja izraza u prvoj sumi, dobiva se

$$e_d = \sum_{n=S}^{2S-1} [h(n)]^2 - 2 \sum_{n=S}^{2S-1} h(n)h(2S-1-n) + \sum_{n=S}^{2S-1} [h(2S-1-n)]^2 + \sum_{n=2S}^{\infty} [h(n)]^2. \quad (4.4)$$

Supstitucijom  $2S-1-n = v$ , treći član izraza (4.4) se može napisati kao

$$\sum_{n=S}^{2S-1} [h(2S-1-n)]^2 = \sum_{v=S-1}^0 [h(v)]^2 = \sum_{\mu=0}^{S-1} [h(\mu)]^2 \quad (4.5)$$

Uvrštavanjem (4.5) u (4.4) i sređivanjem dobiva se

$$e_d = \sum_{n=0}^{\infty} [h(n)]^2 - 2 \sum_{n=S}^{2S-1} h(n)h(2S-1-n) \quad (4.6)$$

odnosno

$$e_d = \sum_{n=0}^{\infty} [h(n)]^2 - 2 \sum_{n=0}^{S-1} h(S+n)h(S-1-n) \quad (4.7)$$

Izraz (4.7) kraće se može zapisati kao

$$e_d = e_{dh} - 2e_{da}. \quad (4.8)$$

Suma  $e_{dh}$  predstavlja ukupnu energiju impulsnog odziva. Normiranjem  $e_d$  na ukupnu energiju  $e_{dh}$ , dobiva se konačan izraz za pogrešku simetrije impulsnog odziva.

$$E_d = 1 - 2 \frac{e_{da}}{e_{dh}} \quad (4.9)$$

Normiranje daje mjeru asimetrije impulsnog odziva,  $E_d$  koja je neovisna o pojačanju sustava.

Da bismo odredili simetriju nekog filtra, pogrešku danu izrazom (4.9) potrebno je izraziti pomoću parametara prijenosne funkcije. Kao i kod kontinuiranih sustava, i ovdje su odabrani polovi i nule. Prijenosna funkcija diskretnog sustava u faktoriziranom obliku glasi

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (4.10)$$

gdje  $c_i$  nule, a  $d_k$  polovi filtra. Ako su polovi jednostruki i  $M < N$ , impulsni oblik filtra ima oblik

$$h(n) = \sum_{r=1}^N A_r d_r^n, \quad (4.11)$$

gdje su  $A_r$ ,  $r=1,2,\dots,N$ , residuumi polova prijenosne funkcije. Residuumi su određeni izrazom

$$A_r = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (1 - \frac{c_i}{d_r})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^N (1 - \frac{d_k}{d_r})}. \quad (4.12)$$

Koristeći (4.11) i (4.12), energija impulsnog odziva može se izraziti kao funkcija polova i residuuma

$$e_{dh} = \sum_{n=0}^{\infty} [h(n)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{r=1}^N A_r d_r^n \right]^2. \quad (4.13)$$

Kvadriranje daje dvostruku sumu oblika

$$e_{dh} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N A_q A_r d_q^n d_r^n \right]. \quad (4.14)$$

U izrazu (4.14) može se zamijeniti redoslijed suma

$$e_{dh} = \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N A_q A_r \sum_{n=0}^{\infty} d_q^n d_r^n \quad (4.15)$$

Treća suma predstavlja geometrijski red

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_q^n d_r^n = \sum_{n=0}^{\infty} (d_q d_r)^n = \frac{1}{1 - d_q d_r}. \quad (4.16)$$

Dovoljan uvjet za konvergencija reda (4.16) glasi

$$|d_q d_r| < 1. \quad (4.17)$$

Stabilan diskretan sustav ima polove smještene unutar jedinične kružnice pa je uvjet konvergencije u praksi uvijek zadovoljen. Uvrštavanjem (4.16) u (4.15) dobiva se izraz za ukupnu energiju impulsnog odziva

$$e_{dh} = \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N \frac{A_q A_r}{1 - d_q d_r} . \quad (4.18)$$

Na sličan način, pomoću polova i nula može se izraziti suma  $e_{da}$ . Uvrštavanjem (4.11) u izraz za  $e_{da}$ , dobiva se

$$e_{da} = \sum_{n=0}^{S-1} h(S+n)h(S-1-n) = \sum_{n=0}^{S-1} \left( \sum_{q=1}^N A_q d_q^{S+n} \right) \left( \sum_{r=1}^N A_r d_r^{S-1-n} \right) \quad (4.19)$$

Množenje daje dvostruku sumu

$$e_{da} = \sum_{n=0}^{S-1} \left( \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N A_q A_r d_q^{S+n} d_r^{S-1-n} \right) . \quad (4.20)$$

Sumacija po  $n$  može se provesti prva. Zamjenom redoslijeda sumacija i izlučivanjem konstanti, dobiva se

$$e_{da} = \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^N A_q A_r d_q^S d_r^{S-1} \sum_{n=0}^{S-1} \left( \frac{d_q}{d_r} \right)^n . \quad (4.21)$$

Treća suma, za slučaj  $q \neq r$ , predstavlja sumu prvih  $S$  članova geometrijskog reda, dok u slučaju  $q=r$ , njezina vrijednost iznosi  $S$ . Izraz (4.21) zato se raspada na dva dijela

$$e_{da} = \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^N A_q A_r d_q^S d_r^{S-1} \frac{\left( \frac{d_q}{d_r} \right)^S - 1}{\frac{d_q}{d_r} - 1} \frac{d_q}{d_r} + \sum_{j=1}^N A_j^2 d_j^S d_j^{S-1} S , \quad (4.22)$$

te nakon sređivanja dobiva oblik

$$e_{da} = \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^N A_q A_r \frac{d_q^{2S}}{d_q - d_r} - \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^N A_q A_r \frac{d_q^S d_r^S}{d_q - d_r} + \sum_{j=1}^N A_j^2 d_j^{2S-1} S . \quad (4.23)$$

Srednji član gornjeg izraza uvijek je jednak 0, pa konačno integral  $e_{da}$  možemo pomoću polova i residuuma izraziti na slijedeći način

$$e_{da} = \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^N A_q A_r \frac{d_q^{2S}}{d_q - d_r} + \sum_{j=1}^N A_j^2 d_j^{2S-1} S . \quad (4.24)$$

## 4.2 Funkcija cilja

Da bismo odredili prijenosne funkcije optimalnih filtara postupit ćemo slično kao i kod kontinuiranih sustava (poglavlje 3.2). Izraz (4.9), zajedno sa izrazima (4.18) i (4.24) čini funkciju oblika

$$E_d = f(c_i, d_k); \quad i=1, \dots, M; \quad k=1, \dots, N. \quad (4.25)$$

Skup varijabli koji odgovara minimumu funkcije  $E_d$  predstavlja skup parametara filtra, čiji je impulsni odziv maksimalno simetričan za zadan broj polova,  $N$ , i nula,  $M$ .

Kod fizički ostvarivih sustava kompleksni polovi i nule dolaze u konjugiranim parovima. U slučaju kad su  $M$  i  $N$  neparni, funkcija  $E_d$  bit će izražena kao

$$E_d = f(z_0, z_{Ri}, z_{Li}, p_0, p_{Rk}, p_{Ik}); \quad i=1, \dots, (M-1)/2; \quad k=1, \dots, (N-1)/2, \quad (4.26)$$

gdje su  $z_{Ri}$ ,  $z_{Li}$ ,  $p_{Rk}$  i  $p_{Ik}$  realne varijable koje predstavljaju parametre polova i nula, dane izrazima (3.26), koji su ovdje ponovljeni zbog preglednosti,

$$z_i = z_{Ri} + j z_{Li}, \quad p_k = p_{Rk} + j p_{Ik} \quad (4.27)$$

Parametar  $p_0$  predstavlja realan pol, a  $z_0$  realnu nulu. Za neparne  $M$  ili  $N$ , iz izraza (4.27) izostavljaju se varijabla  $z_0$  odnosno  $p_0$ .

Problem određivanja prijenosne funkcije filtra sveden je na problem pronalaženja skupa polova i nula, za koje će funkcija  $E_d$  imati minimalnu vrijednost, tj.

$$\min_{z_0, z_{Ri}, z_{Li}, p_0, p_{Rk}, p_{Ik}} [E_d(z_0, z_{Ri}, z_{Li}, p_0, p_{Rk}, p_{Ik})]. \quad (4.28)$$

Za određivanje minimuma funkcije  $E_d$  upotrijebljen je isti postupak kao i kod analognih filtara, opisan u poglavlju 3.3.3.

## 4.3 Optimalni digitalni filtri

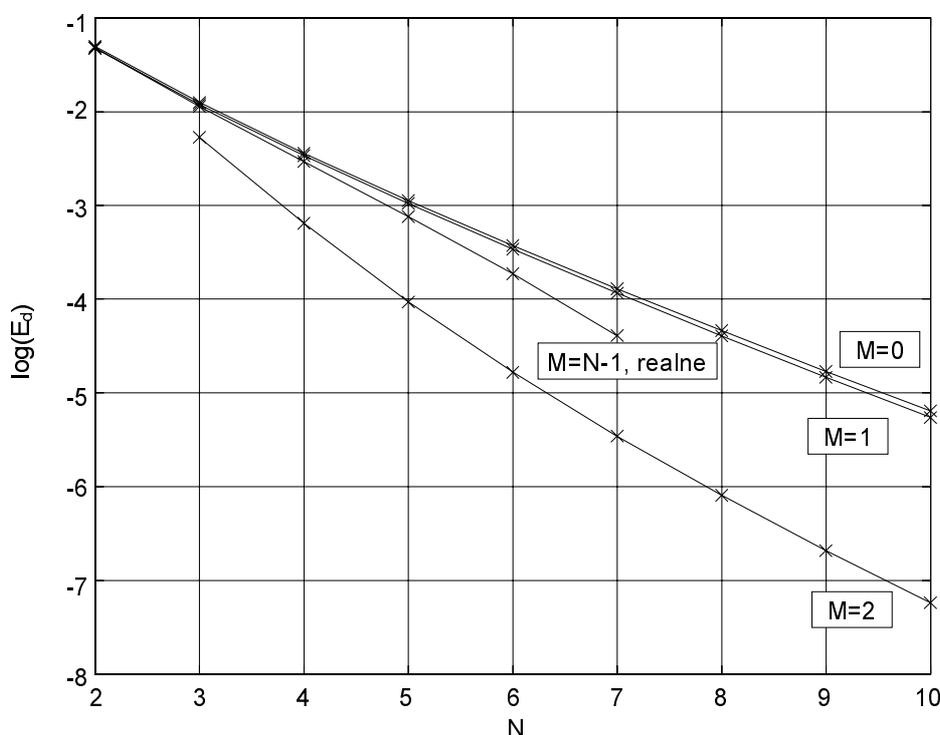
Optimizacija opisana izrazom (4.28) provedena je za filtre od 2. do 10. reda. Razmatrani su (i) filtri sa svim nulama u ishodištu, (ii) filtri s jednim parom kompleksnih nula, te (iii) filtri s realnim nulama. Nule u ishodištu doprinose kašnjenju, ali ne mijenjaju osnovni oblik vremenskih i frekvencijskih odziva. Kod kontinuiranih filtara, optimizacija je pokazala da realne nule ne povećavaju simetriju impulsnog odziva. Utjecaj realnih nula na svojstva kontinuiranog niskopropusnog filtra dominantan je uvijek u području propuštanja. Kod digitalnih filtara situacija je slična ako se realne nule nalaze u intervalu  $(0, \infty)$ . Realne nule iz intervala  $(-\infty, 0)$  utječu na svojstva filtra na frekvencijama blizu Nyquistove, dakle u području gušenja. Zato je opravdano očekivati drugačije ponašanje realnih nula nego kod kontinuiranih sustava.

Slika 4.2 prikazuje pogrešku simetrije impulsnog odziva optimalnih digitalnih filtara. Pogreška pada s porastom reda filtra. Nule povećavaju simetriju, pri čemu je utjecaj kompleksnih

nula generalno veći od utjecaja realnih nula. Kao i kod kontinuiranih filtara, upotreba nula je opravdana, posebno za  $N \geq 5$ , gdje je povećanje simetrije dodavanjem para nula veće od onog koje bi izazvalo povećanje reda filtra za 2, tj. dodavanje para polova.

Iz slike 4.2 se vidi da je doprinos simetriji jednog para nula jednak onom kod kontinuiranih filtara, slika 3.3. Za očekivati je da 2 i više parova nula ima isti utjecaj na simetriju odziva te vremenske i frekvencijske odzive kao i kod kontinuiranih filtara. Kako je doprinos daljnjih nula kod kontinuiranih filtara sve manji, za praktične primjene je dovoljno upotrebljavati 1 do 2 para kompleksnih nula (poglavlje 3.4 i 3.5).

U nastavku ovog poglavlja bit će bit će razmatrane prijenosne funkcije (i) sa svim nulama u ishodištu te (ii) s jednim parom kompleksnih nula. Utjecaj realnih nula (iii) bit će razmotren u poglavljima 4.4 i 4.5.

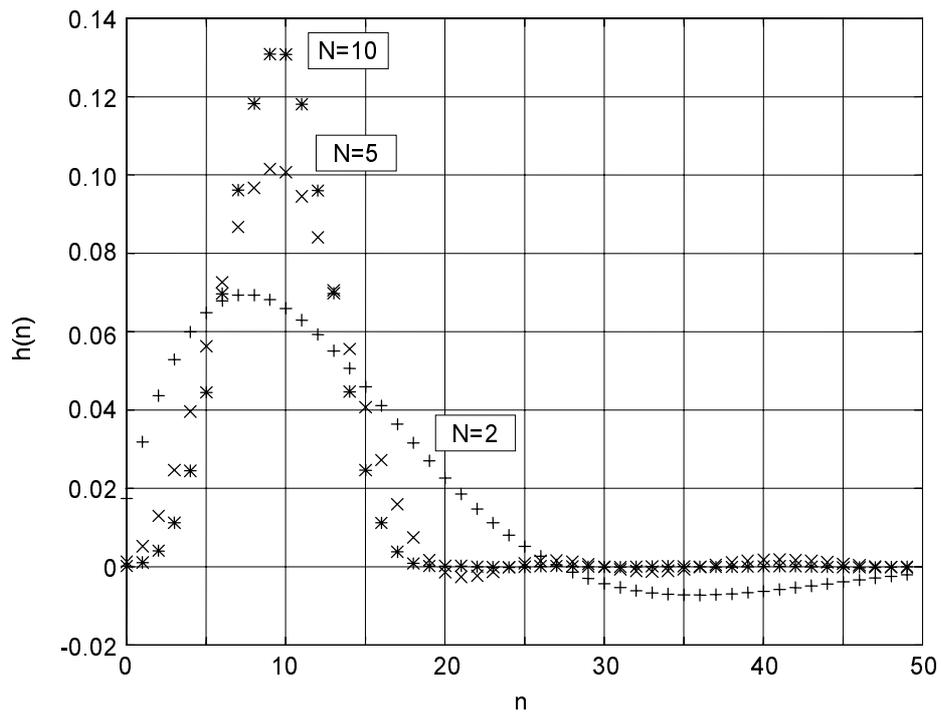


Slika 4.2 Pogreška simetrije impulsnog odziva digitalnih optimalnih filtara od 2. do 10. reda s 0, 1, 2 i N-1 konačnih nula.

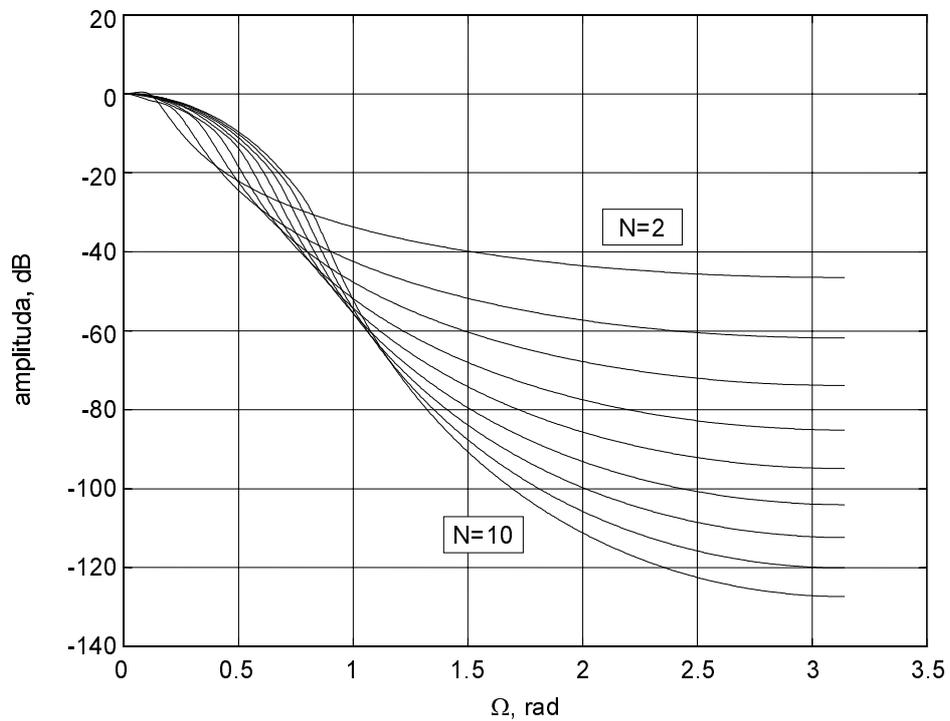
#### 4.3.1 Filtri sa svim nulama u ishodištu

Slično kao i kod kontinuiranih filtara, impulsni odzivi digitalnih sustava imaju zvonolik oblik, kao što prikazuje slika 4.3. Podbačaj i vrijeme istitravanja padaju s porastom reda sustava. Odziv kod viših redova ima duljinu od  $L=2S$  uzoraka, a kašnjenje iznosi  $S-1/2$  uzoraka.

Slika 4.4 prikazuje amplitudne karakteristike optimalnih filtara, sa skalom u linearnom mjerilu. Amplitudne karakteristike slijede parabolu do frekvencija oko  $4\omega_{3dB}$ . To znači da krivulje u području propuštanja i dijelu prijelaznog područja aproksimiraju Gaussovu amplitudu.

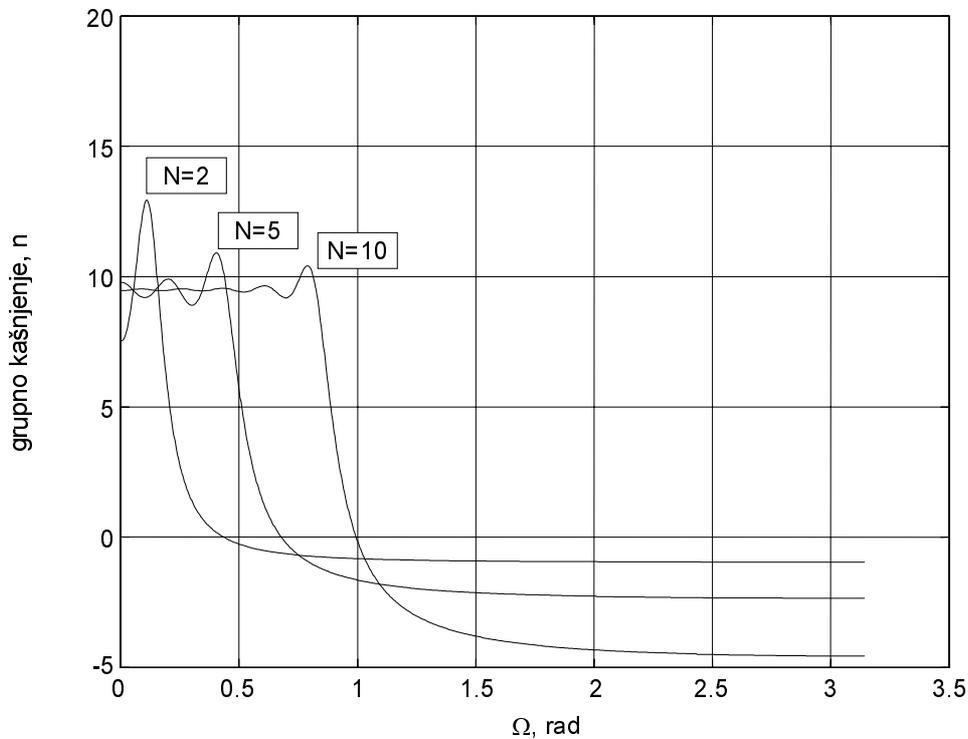


Slika 4.3 Impulsni odzivi digitalnih filtara sa svim nulama u ishodištu,  $S=10$ .



Slika 4.4 Amplitudne karakteristike digitalnih filtara sa svim nulama u ishodištu,  $S=10$ .

Grupno kašnjenje aproksimira konstantu u valovitom smislu, kao što prikazuje slika 4.5. Amplituda valova raste s porastom frekvencije, a pada s redom sustava. Broj ekstrema na krivuljama grupnog kašnjenja jednak je redu sustava, N.

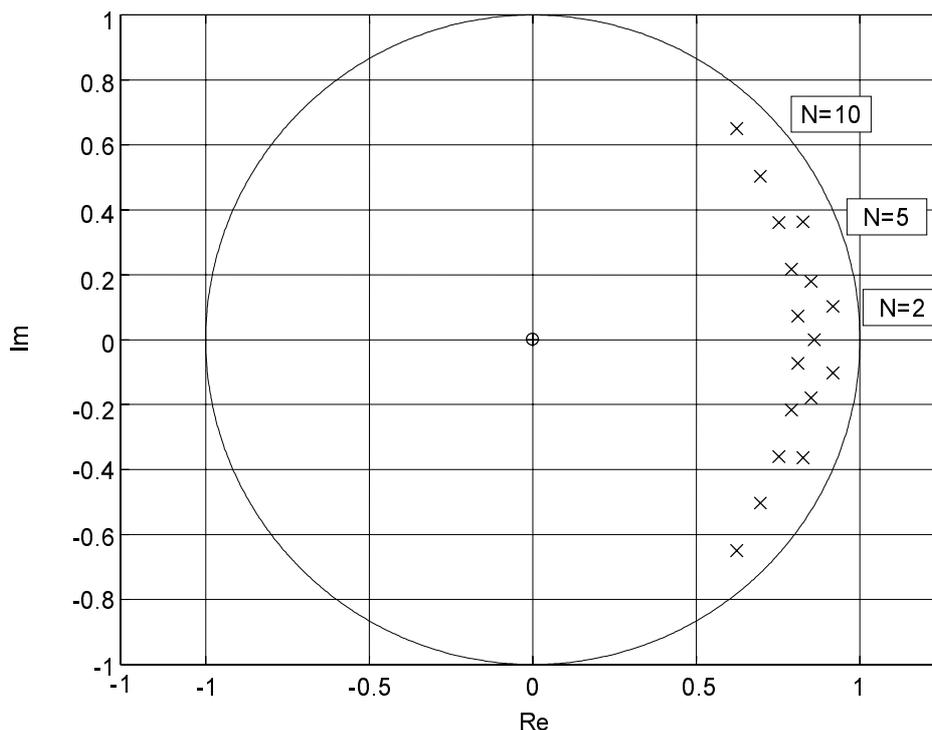


Slika 4.5 Grupno kašnjenje digitalnih filtara sa svim nulama u ishodištu, S=10.

Kao i kod kontinuiranih sustava sa simetričnim impulsnim odzivom, polovi IIR filtra su jednoliko raspodijeljeni po frekvenciji, slika 4.6. Kod diskretnih sustava frekvenciji odgovara kut točke koja po jediničnoj kružnici prelazi put od 0 do  $\pi$ . Kao brojčanu mjeru jednolikosti možemo uzeti najveće relativno odstupanje

$$\varepsilon_k = \max \left| \frac{\varphi_i - \bar{\varphi}}{\bar{\varphi}} \right| \cdot 100\%, \quad i=1, \dots, N-1, \quad (4.29)$$

gdje je  $\varphi_i = |\angle(p_i) - \angle(p_{i+1})|$  razlika kutova dvaju susjednih polova, a  $\bar{\varphi}$  srednji kut susjednih polova. Za filtre od 4. do 10 reda čiji se S kreće od S=3 do S=30, ovo odstupanje u najgorem slučaju iznosi  $\varepsilon_k = 0.57\%$ .



Slika 4.6 Položaj polova digitalnih filtara sa svim nulama u ishodištu, S=10.

#### 4.3.2 Filtri s jednim parom kompleksnih nula

Polovi,  $d_i$ , i nule,  $c_i$ , rekurzivnog digitalnog filtara sa simetričnim impulsnim odzivom približno se nalaze na lokacijama

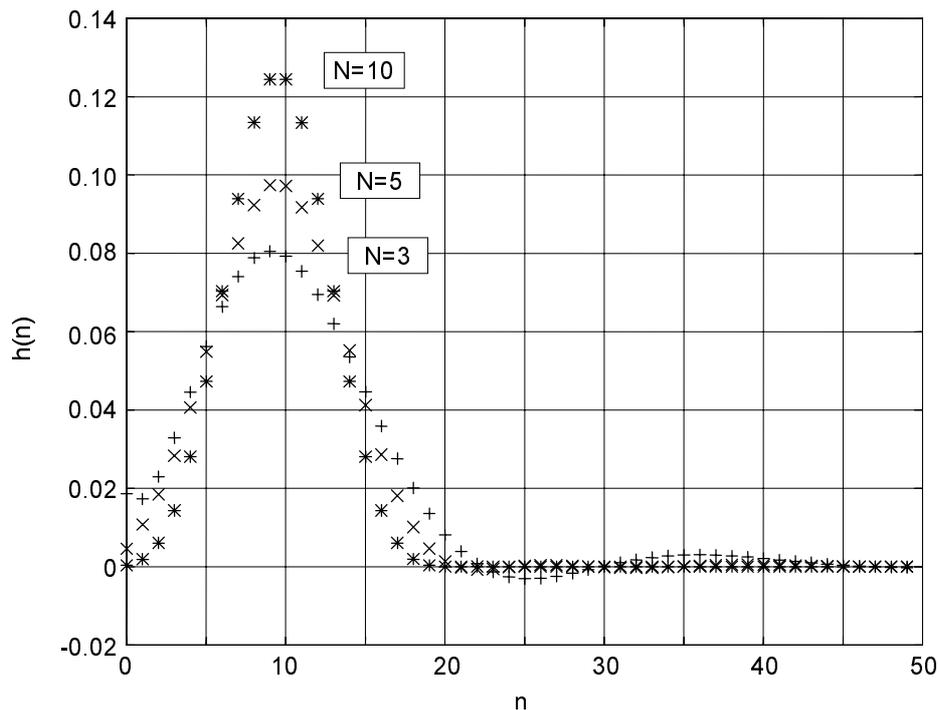
$$d_i = e^{p_i T}, \quad (4.30)$$

$$c_i = e^{z_i T}, \quad (4.31)$$

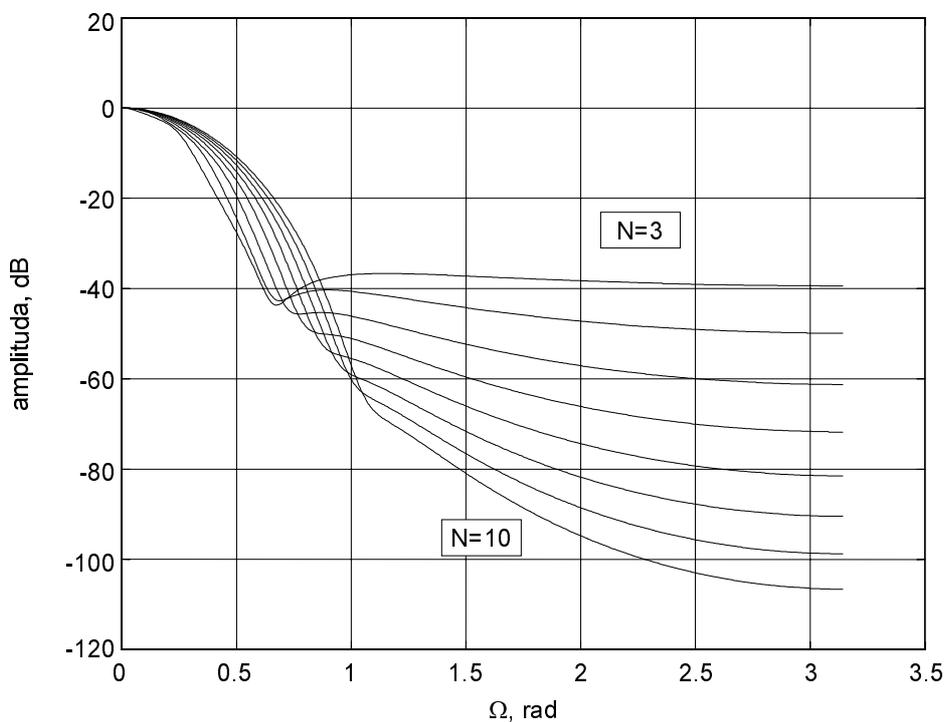
gdje su  $p_i$  i  $z_i$  polovi i nule odgovarajućeg kontinuiranog filtra sa simetričnim impulsnim odzivom. Konstantu  $T$  možemo uzeti takvom da granične frekvencije,  $\omega_{3dB}$ , kontinuiranog i optimalnog digitalnog filtra budu jednake. Na primjer, za  $S=10$ , položaj polova i nula optimalnog digitalnog i transformiranog analognog filtra, oba s dvije kompleksne nule, razlikovat će se najviše od 1.45 % za  $N=3$  do 4.22 % za  $N=10$ , po realnom, odnosno imaginarnom dijelu. Položaj polova i nula optimalnih digitalnih filtara s jednim parom kompleksnih nula,  $S=10$ , prikazan je slikom 4.10, odakle se vidi da su polovi jednoliko razmaknuti po kutu (frekvenciji), s najvećim odstupanjem  $\varepsilon_k=3.02$  %

Impulsni odzivi filtara s jednim parom kompleksnih nula imaju zvonolik oblik, s većom simetrijom, manjim podbačajima i kraćim istitravanjima nego kod filtara sa svim nulama u ishodištu, slika 4.7.

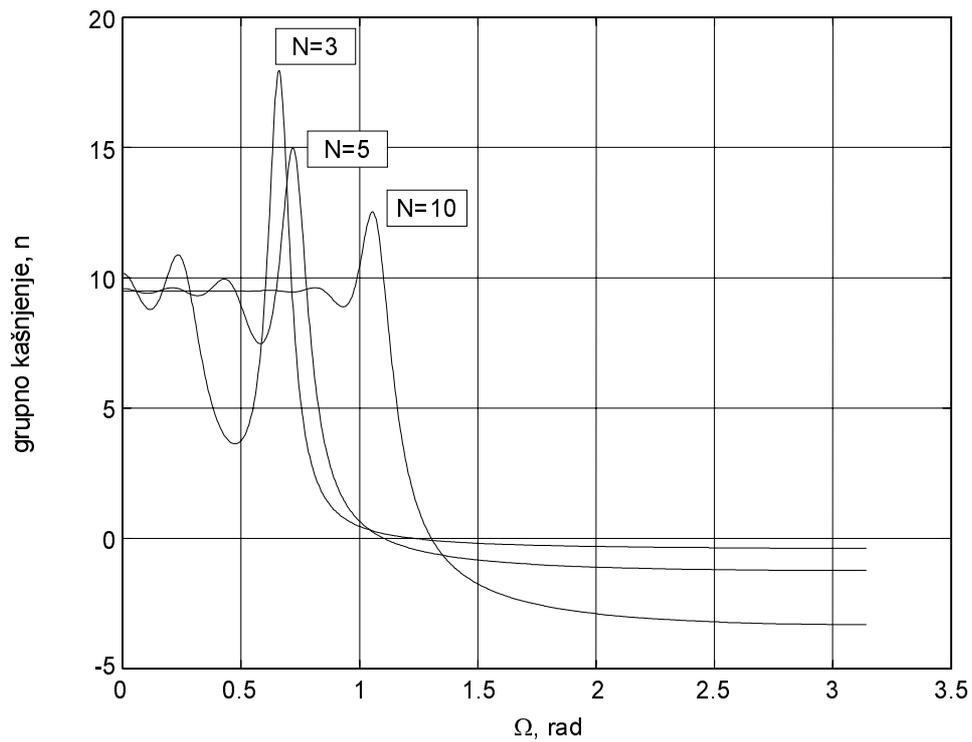
Amplitudna karakteristika filtara, prikazana u logaritamsko-linearnom mjerilu, ima paraboličan karakter, a grupno kašnjenje valovito aproksimira konstantu. Kompleksne nule su doprinijele smanjenju valova i proširenju frekvencijskog područja u kojem je grupno kašnjenje približno konstantno. Broj ekstrema porastao je za broj nula te sada iznosi  $N+M$ .



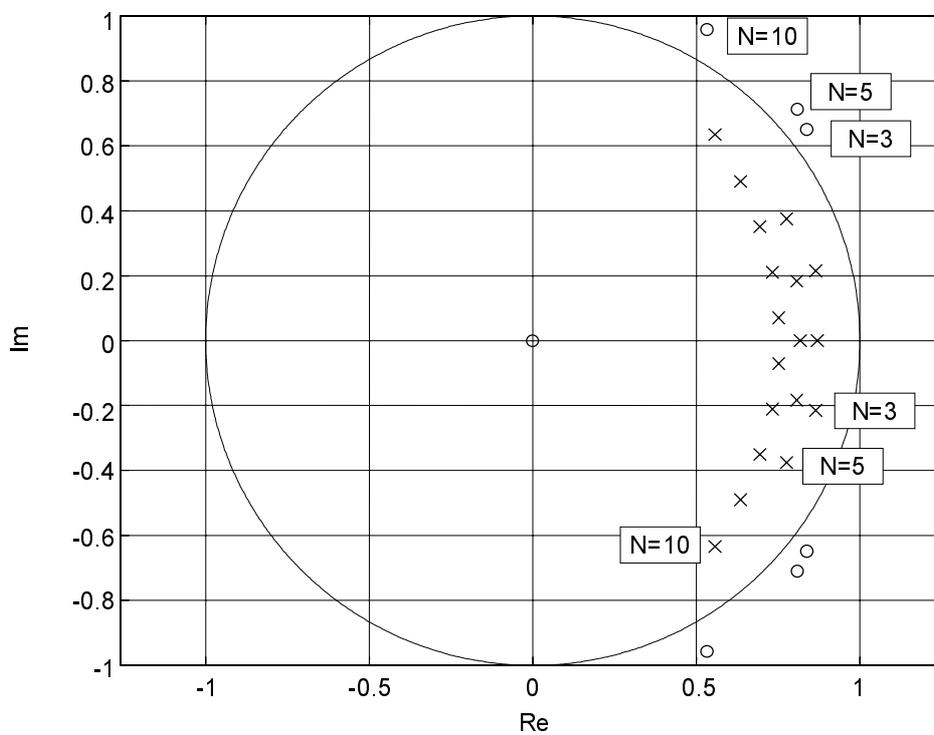
Slika 4.7 Impulzni odzivi digitalnih filtara s jednim parom kompleksnih nula,  $S=10$ .



Slika 4.8 Amplitudne karakteristike digitalnih filtara s jednim parom kompleksnih nula,  $S=10$ .



Slika 4.9 Grupno kašnjenje digitalnih filtara s jednim parom kompleksnih nula, S=10.



Slika 4.10 Položaj polova i nula digitalnih filtara s jednim parom kompleksnih nula, S=10.

### 4.3.3 Postupak sinteze optimalnih digitalnih filtara

Parametri prijenosnih funkcija optimalnih kontinuiranih filtara dani su tablicama 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 i 3.5. Jednom izračunati, ovi parametri mogu poslužiti za sintezu filtra proizvoljne granične frekvencije, korištenjem supstitucije, [6] i [79]

$$s \rightarrow s \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (4.32)$$

koja filtar s graničnom frekvencijom  $\omega_1$  transformira u filtar s novom graničnom frekvencijom  $\omega_2$ . Transformacija je linearna, a jedina nepromijenjena frekvencija je  $\omega=0$ . Frekvencijska skala se komprimira ili ekspandira, što ne utječe na oblik amplitudne i fazne karakteristike.

Odgovarajuća transformacija u diskretnoj domeni preslikava jediničnu kružnicu u samu sebe. Transformacija zato ne smije mijenjati položaj frekvencija  $\Omega=0$  i  $\Omega=\pi$ , iz čega je odmah vidljivo da se radi o nelinearnoj transformaciji frekvencijske osi. Jedna takva transformacija je [43]

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}}. \quad (4.33)$$

Parametar  $\lambda$  određen je graničnim frekvencijama polaznog i željenog filtra,  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  kao [43]

$$\lambda = \frac{\sin[(\Omega_1 - \Omega_2)/2]}{\sin[(\Omega_1 + \Omega_2)/2]}. \quad (4.34)$$

Posljedica ovakvog "savijanja" frekvencijske osi je promjena oblika amplitudne i fazne karakteristike. Može se očekivati je da transformirani filtar više neće biti optimalan obzirom na simetriju impulsnog odziva. Zato je potrebno napraviti postupak sinteze optimalnih filtara koji se ne temelji na frekvencijskoj transformaciji. Put vodi ka optimizacijskim postupcima koji će biti razmotreni u daljnjem tekstu.

Optimalni digitalni filtar potpuno je zadan brojem nula,  $M$ , redom,  $N$  i linijom simetrije,  $S$ . Potrebne  $M$ ,  $N$  i  $S$  možemo odrediti polazeći od zahtjeva u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni.

Postupak u vremenskoj domeni kreće od svojstava impulsnog odziva. Red brojnika i nazivnika,  $M$  i  $N$ , možemo odrediti iz željene pogreške simetrije, korištenjem dijagrama na slici 4.2. Položaj linije simetrije,  $S$ , određen je dopuštenim trajanjem impulsnog odziva, koji približno iznosi  $L=2S$  uzoraka.

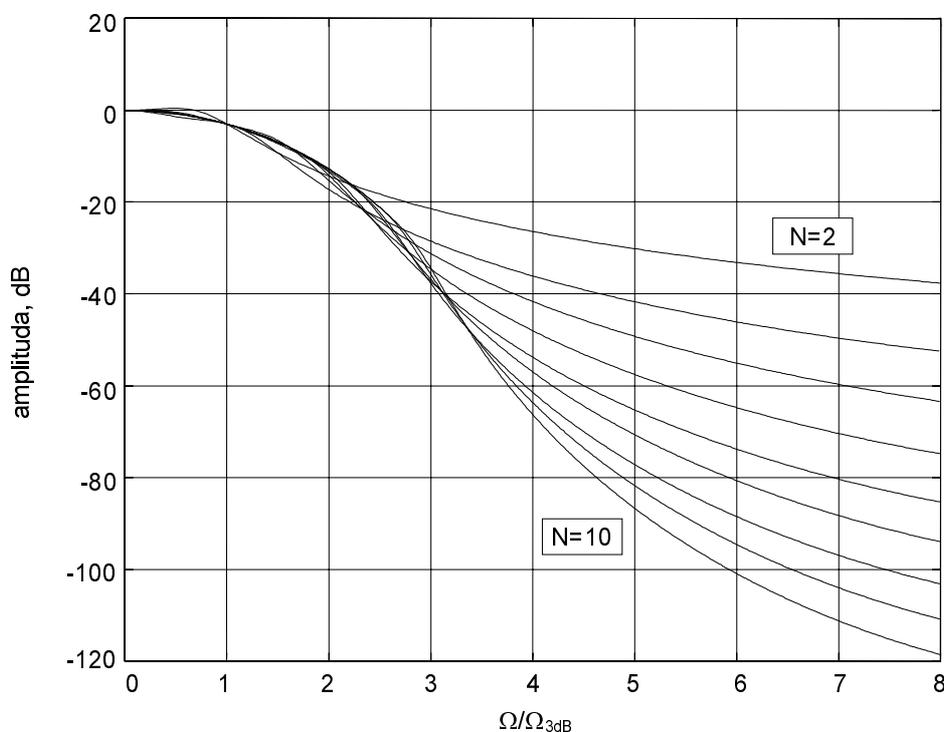
Određivanje parametara  $M$ ,  $N$  i  $S$  prema zahtjevima frekvencijskoj domeni na prvi pogled izgleda složeno, obzirom da postoje mnogo kombinacija  $M$ ,  $N$  i  $S$  koje daju istu graničnu frekvenciju  $\omega_{3dB}$ . Srećom, skupovi amplitudnih karakteristika za razne  $S$  praktički se razlikuju samo u frekvencijskoj skali. Slika 4.11 prikazuje amplitudne karakteristike filtara sa svim nulama u ishodištu, linearno skalirane na isti  $\Omega/\Omega_{3dB}$ . Krivulje opisuju gušenje filtara s linijom simetrije od  $S=7$  do  $S=30$  s točnošću boljom od 0.2 dB, 1.6 dB, 0.7 dB i 5.4 dB na frekvencijama  $2\Omega_{3dB}$ ,  $3\Omega_{3dB}$ ,  $4\Omega_{3dB}$  i  $6\Omega_{3dB}$ . Iste krivulje mogu se uspješno koristiti i za filtre s linijom simetrije od  $S=3$  do  $S=6$  gdje je

točnost na frekvencijama  $2\Omega_{3dB}$ ,  $3\Omega_{3dB}$  i  $4\Omega_{3dB}$  bolja od 2.5 dB, 7.8 dB i 7.3 dB. Frekvencija  $6\Omega_{3dB}$  ovdje nema velik značaj obzirom da za mnoge filtre s malim S vrijedi  $6\Omega_{3dB} > \pi$ .

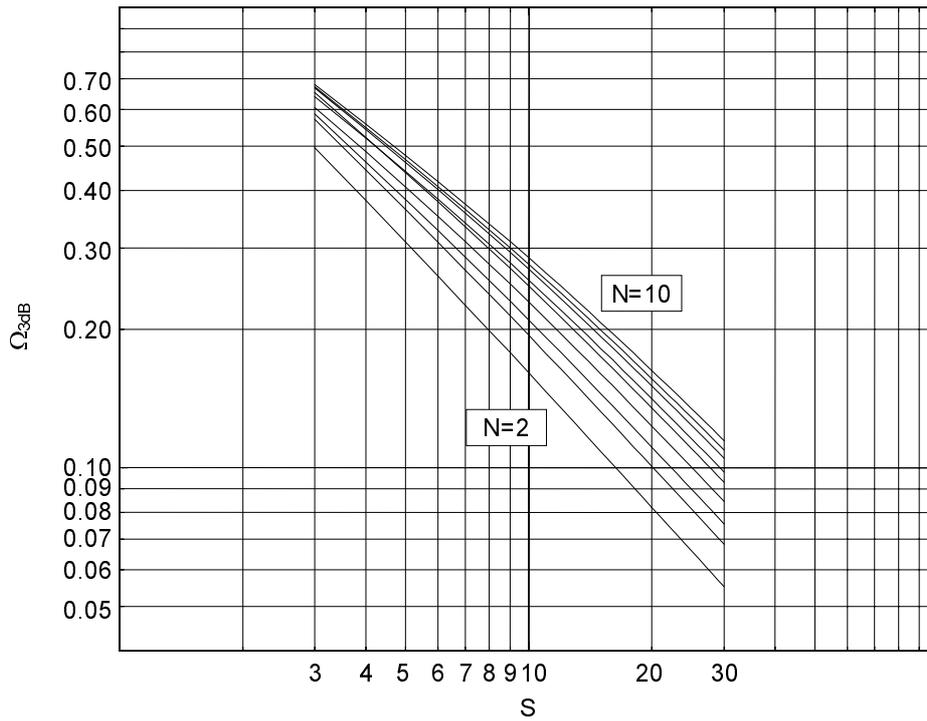
Red sustava, N, sada je moguće odrediti pomoću slike 4.11, iz željenog gušenja na zadanoj frekvenciji  $\Omega_s/\Omega_{3dB}$ . Potreban S određuje se iz dijagrama prikazanog slikom 4.12, pomoću prethodno odabranog reda N i željene granične frekvencije  $\Omega_{3dB}$ .

Nakon što su određeni parametri M, N i S, polovi i nule optimalnog filtra dobivaju se optimizacijom (4.28) koja, kao što je ranije pokazano predstavlja traženje minimuma pogreške simetrije,  $E_d$ , dane izrazima (4.9), (4.18) i (4.24). Optimizacija se može provesti postupcima opisanim u poglavlju 3.3.3, a može se upotrijebiti i neki komercijalan programski paket kao na primjer Matlab, Mathematica i sl. Vrlo dobar početni skup varijabli za optimizaciju, koje se nalaze blizu konačnog rješenja, određen je izrazima (4.30) i (4.31).

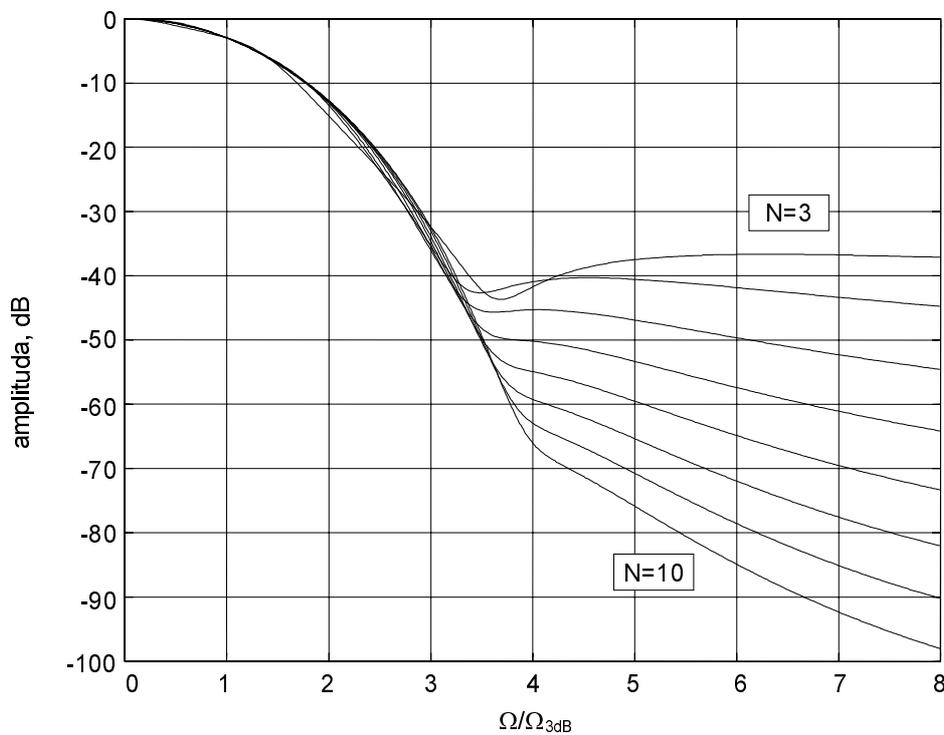
Oblik amplitudnih karakteristika skaliranih na isti  $\Omega/\Omega_{3dB}$  za filtre s jednim parom kompleksnih nula prikazan je slikom 4.13. Točnost krivulja za filtre s linijom simetrije od S=7 do S=30, na frekvencijama  $2\Omega_{3dB}$ ,  $3\Omega_{3dB}$ ,  $4\Omega_{3dB}$  i  $6\Omega_{3dB}$ , bolja je od 0.1 dB, 0.7 dB, 1.6 dB i 4.0 dB. Dobro poklapanje postoji i kod filtara za filtre s linijom simetrije od S=3 do S=6 gdje je točnost bolja od 0.8 dB, 5.0 dB i 10.3 dB na frekvencijama  $2\Omega_{3dB}$ ,  $3\Omega_{3dB}$  i  $4\Omega_{3dB}$ . Ovisnost granične frekvencije,  $\Omega_{3dB}$ , o liniji simetrije, S, i redu sustava, N, za filtre s jednim parom kompleksnih nula prikazana je slikom 4.14.



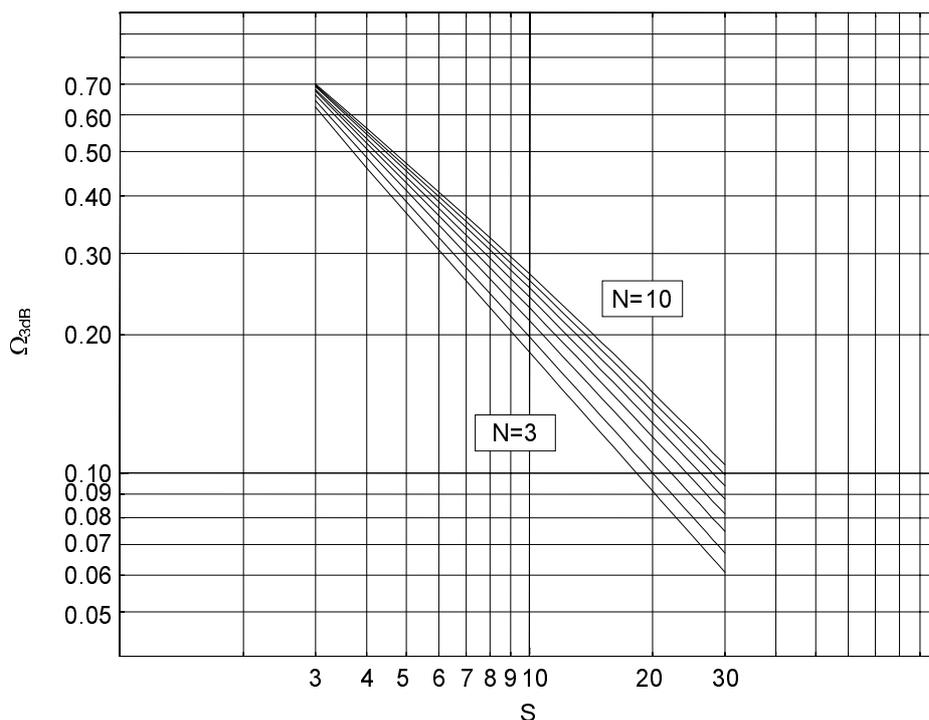
Slika 4.11 Amplitudne karakteristike optimalnim filtara sa svim nulama u ishodištu.



Slika 4.12 Granične frekvencije,  $\Omega_{3dB}$ , optimalnih filtara sa svim nulama u ishodištu.



Slika 4.13 Amplitudne karakteristike optimalnim filtara s jednim parom kompleksnih nula.



Slika 4.14 Granične frekvencije,  $\Omega_{3dB}$ , optimalnih filtera s jednim parom kompleksnih nula.

#### 4.4 Upotreba metode jednakog impulsnog odziva

Prijenosne funkcije rekurzivnih digitalnih filtera mogu se dobiti pomoću metode jednakog impulsnog odziva [43], primijenjene na prethodno pripremljen kontinuirani prototip. U ovom slučaju nameće se ideja o upotrebi kontinuiranih filtera sa simetričnim odzivom, čiji su parametri dani u tablicama 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 i 3.5.

Metoda jednakog impulsnog odziva polazi od prijenosne funkcije kontinuiranog sustava

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{s - p_i}, \quad (4.35)$$

čiji je impulsni odziv  $h_c(t)$  dan izrazom (3.11). Uzorkovanjem impulsnog odziva  $h_c(t)$ , periodom  $T$  daje impulsni odziv diskretnog sustava, čija je prijenosna funkcija

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{T K_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}. \quad (4.36)$$

Uspoređivanjem gornjih izraza vidljivo je da su polovi diskretnog sustava dobiveni preslikavanjem

$$d_i = e^{p_i T}, \quad (4.37)$$

što prepoznamo kao izraz (4.30). Općenito, takav izraz ne možemo napisati za nule, koje su funkcija polova i residuuma.

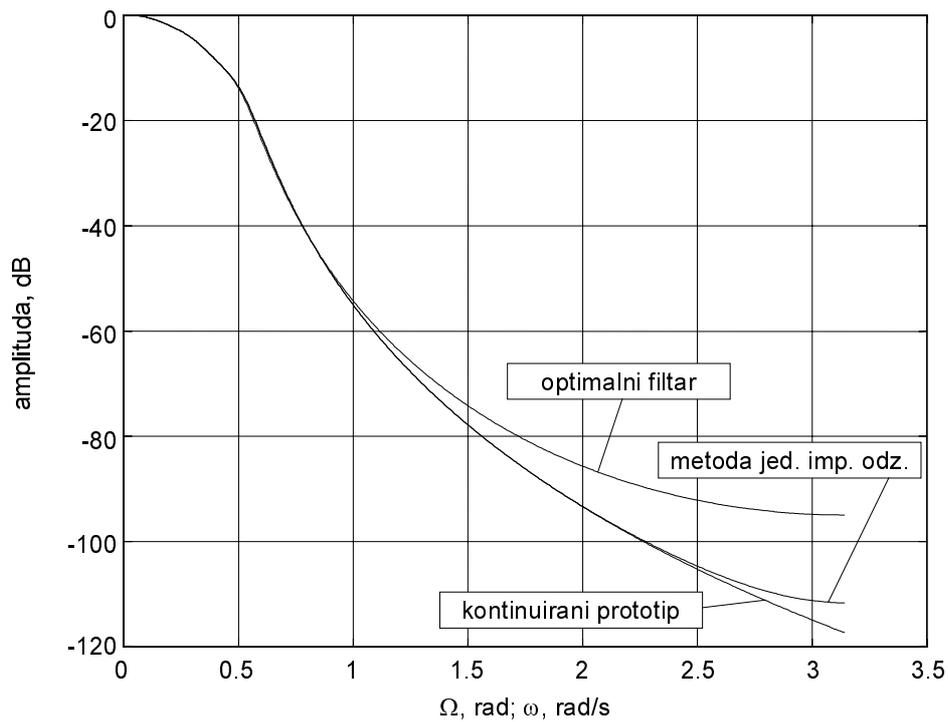
Optimiranjem dobiveni digitalni filtri sa simetričnim impulsnim odzivom nude diskretan skup amplitudnih karakteristika, odnosno diskretan skup mogućih graničnih frekvencija  $\omega_{3dB}$ , što je posljedica diskretnih vrijednosti kašnjenja,  $S-1/2$ . Obzirom da u gornjim izrazima period  $T$  može biti odabran proizvoljno, metoda jednakog impulsnog odziva daje proizvoljnu raspodjelu uzoraka unutar impulsnog odziva kontinuiranog sustava. Time se dobiva impulsni odziv sa simetričnom ovojnicom, ali ne nužno i simetričnim uzorcima. Kašnjenje, a time i granična frekvencija,  $\omega_{3dB}$ , mogu imati bilo koju vrijednost, što metodu jednakog impulsnog odziva čini fleksibilnom. Pritom se nameću dva pitanja koja proizlaze iz prirode te metode.

Amplitudna karakteristika kontinuiranog sustava,  $|H_c(j\omega)|$ , je frekvencijski neograničena, pa uzorkovanje periodom  $T$  uzrokuje pogrešku uslijed preklapanja spektara (aliasing). Pitanje je koliko pogreška uslijed preklapanja spektara utječe na simetriju impulsnog odziva, odnosno da li, i kada, je upotreba metode jednakog impulsnog odziva opravdana?

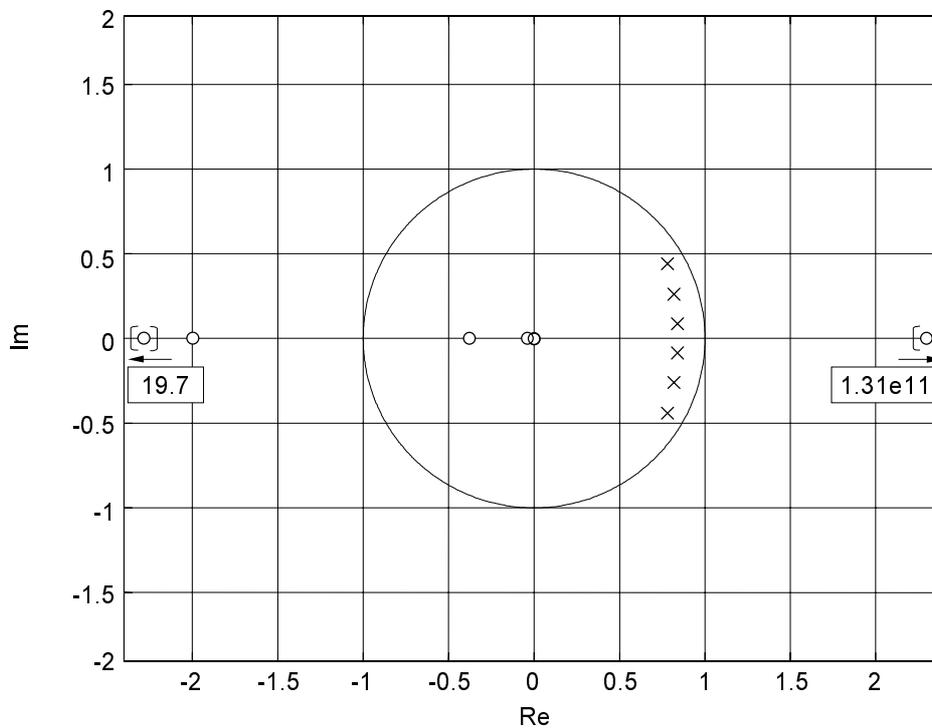
Kao što je rečeno u poglavlju 4.3.2, nule optimalnog kontinuiranog i optimalnog diskretnog filtra, približno su povezane su istom relacijom, (4.30) i (4.31). Kod nula koje daje metoda jednakog impulsnog odziva to nije slučaj. Iz toga proizlazi drugo pitanje koje glasi; koliko su svojstva filtara dobivenih metodom jednakog impulsnog odziva daleko od svojstava optimalnih filtara, te, ponovo, da li, i kada, upotreba metode jednakog impulsnog odziva opravdana?

Simetrija impulsnog odziva ne može poslužiti kao mjera za usporedbu optimalnih filtara i filtara dobivenih metodom jednakog impulsnog odziva, jer, kao što je ranije rečeno takvi filtri ne moraju imati nužno simetrične uzorke, koje uspoređuje kriterij (4.1). Svojstva filtara bit će zato uspoređena u frekvencijskoj domeni. Slika 4.15 prikazuje amplitudnu karakteristiku optimalnog filtra 6. reda sa svim nulama u ishodištu te kontinuiranog filtra s nulama u beskonačnosti, normiranog tako da ima istu graničnu frekvenciju,  $\omega_{3dB}$ , kao i digitalni filter. Na istoj slici prikazana je i amplituda filtra dobivenog metodom jednakog impulsnog odziva. Vidljivo je da se krivulje dobro poklapaju u području propuštanja i dijelu prijelaznog područja. Na području blizu Nyquistove frekvencije, gušenje filtra dobivenog metodom jednakog impulsnog odziva veće je oko 20 dB od gušenje optimalnog filtra. Ovakvo ponašanje vidljivo je kod filtara parnog reda. Kod filtara neparnog reda, metoda jednakog impulsnog odziva daje veće gušenje, ne samo od optimalnog filtra, već i od analognog prototipa. Amplituda filtra dobivenog metodom jednakog impulsnog odziva, sve manje se razlikuje od amplitude analognog prototipa, kako raste red filtra,  $N$ . To se može objasniti sve manjom pogreškom uslijed preklapanja spektara, obzirom da s porastom reda raste i gušenje na Nyquistovoj frekvenciji. Oblik grupnog kašnjenja filtra dobivenog metodom jednakog impulsnog odziva isti je kao i kod optimalnog filtra.

Ovakvo, na prvi pogled neobično ponašanje, posljedica je utjecaja nula koje dodaje metoda jednakog impulsnog odziva, kao što prikazuje slika 4.16. Kao analogni prototip poslužio je filter sa simetričnim impulsnim odzivom, 6. reda, sa svim nulama u beskonačnosti. Unatoč tome, dobiveni digitalni filter ima 6 konačnih nula, jednu ishodištu, a ostale raspisane po realnoj osi. Očigledno je da su za povećanje gušenja zaslužne realne nule u blizini Nyquistove frekvencije, tj., točke  $z=-1+0j$ .



Slika 4.15 Amplitudna karakteristika optimalnog filtra sa svim nulama u ishodištu, kontinuiranog prototipa iste granične frekvencije,  $\omega_{3dB} = \Omega_{3dB}$ , i filtra dobivenog metodom jednakog impulsnog odziva,  $N=6$ .



Slika 4.16 Položaj polova i nula filtra dobivenog metodom jednakog impulsnog odziva, primijenjene na filter sa simetričnim impulsnim odzivom 6. reda, sa svim nulama u beskonačnosti.

Slična analiza može se provesti i za filtre s kompleksnim nulama. Metoda jednakog impulsnog odziva preslikava  $N$  polova i  $M$  nula kontinuiranog sustava u blizinu polova i nula optimalnog diskretnog sustava. Od preostalih  $N-M$  nula, jedna je u ishodištu dok su ostale raspodijeljeno po realnoj osi. Neke od tih nula povećavaju gušenje u okolini Nyquistove frekvencije.

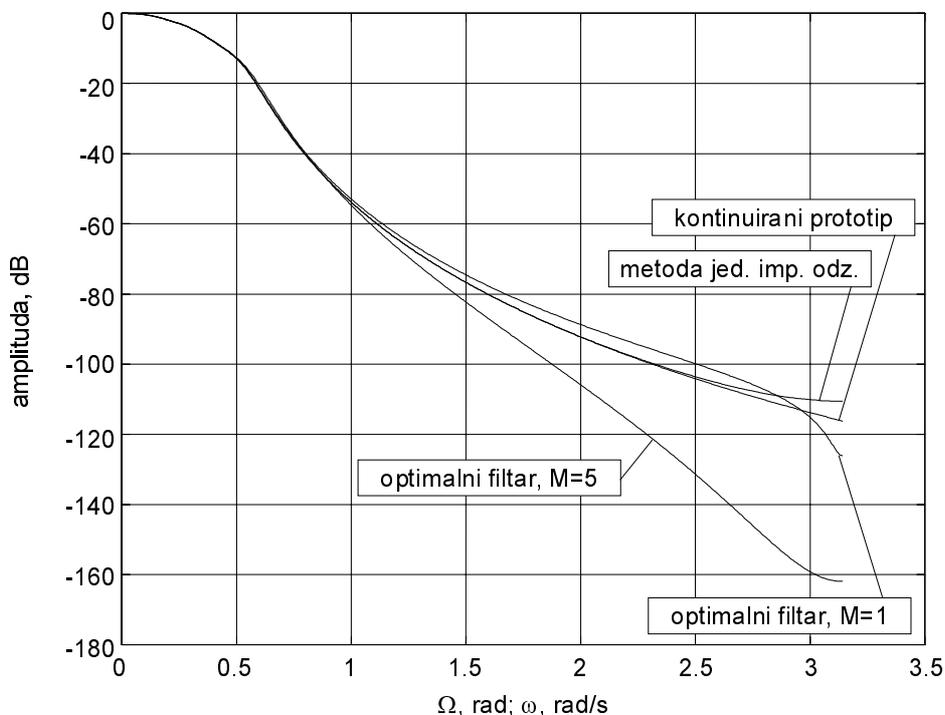
Prisustvo nula izvan ishodišta čini realizaciju složenijom. Realizacija se može pojednostavniti zanemarivanjem nula koje su daleko od ishodišta, obzirom da one vrlo malo utječu na svojstva filtra. Također, za nule blizu ishodišta može se pretpostaviti da leže u ishodištu.

Povoljan utjecaj realnih nula na svojstva filtra daje ideju o optimiranju prijenosnih funkcija s realnim nulama. Optimizacijski problem za neparni red filtra ima u tom slučaju oblik

$$\min_{z_{Ri}, p_0, p_{Rk}, p_{Ik}} [E_d(z_{Ri}, p_0, p_{Rk}, p_{Ik})]; \quad i=1, \dots, M; \quad k=1, \dots, (N-1)/2 \quad (4.38)$$

U slučaju parnog reda izraz ne sadrži realan pol  $p_0$ .

Slika 4.17 ilustrira utjecaj realnih nula na optimalne filtre 6. reda. Optimalan filter s 5 realnih nula povećava gušenje blizu Nyquistove frekvencije za oko 40 dB u odnosu na filter dobiven metodom jednakog impulsnog odziva, čija prijenosna funkcija također sadrži 5 realnih nula. Na istoj slici prikazana je i amplituda optimalnog filtra iste granične frekvencije, ali sa samo jednom realnom nulom. Vidi se da već filter s jednom nulom, ako se ona nalazi na optimalnoj poziciji, daje gušenje približno jednako kao i filter dobiven metodom jednakog impulsnog odziva.



Slika 4.17 Amplitudne karakteristike optimalnog filtra s 1 i 5 realnih nula, kontinuiranog prototipa iste granične frekvencije,  $\omega_{3dB} = \Omega_{3dB}$ , te filtra dobivenog metodom jednakog impulsnog odziva,  $N=6$ .

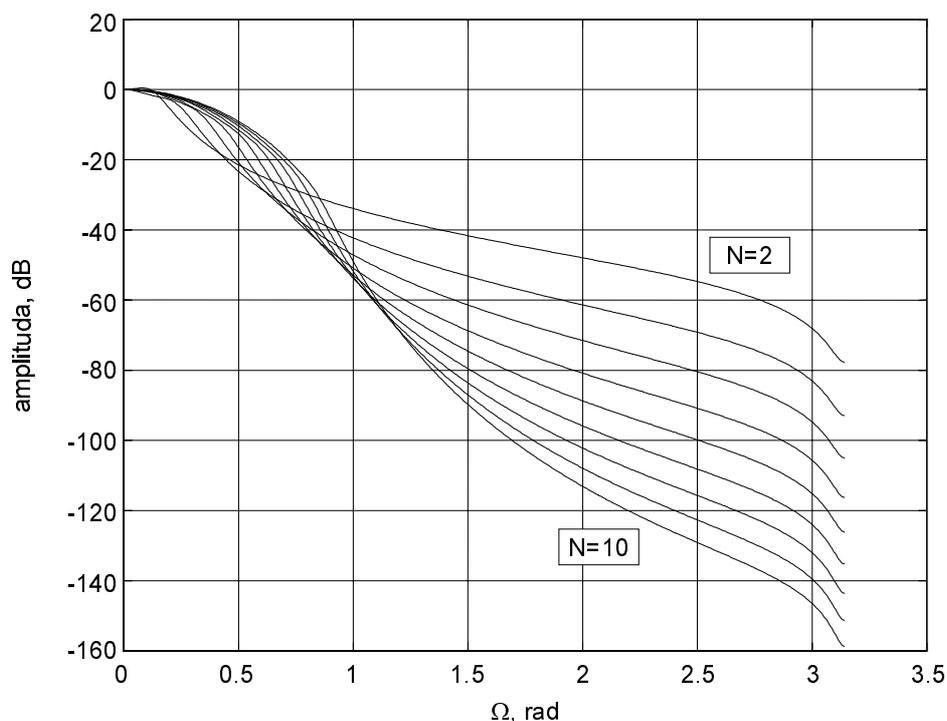
## 4.5 Optimalni filtri s nulama na realnoj osi

Optimizacija prijenosnih funkcija s realnim nulama provedena je za slučaj (i) s jednom realnom nulom, te (ii) s najvećim mogućim brojem nula, koji iznosi  $N-1$ , dok se preostalih  $N-M$  nula nalazi u ishodištu. Kao što je pokazano u prethodnom poglavlju, filtri s jednom realnom nulom su interesantni jer su im svojstva u frekvencijskoj domeni sumjerljiva filtrima koje daje metoda jednakog impulsnog odziva. S povećanjem broja realnih nula raste i gušenje u blizini Nyquistove frekvencije, što u nekim aplikacijama može biti važno. To je razlog što su u razmatrane prijenosne funkcije s najvećim mogućim brojem nula.

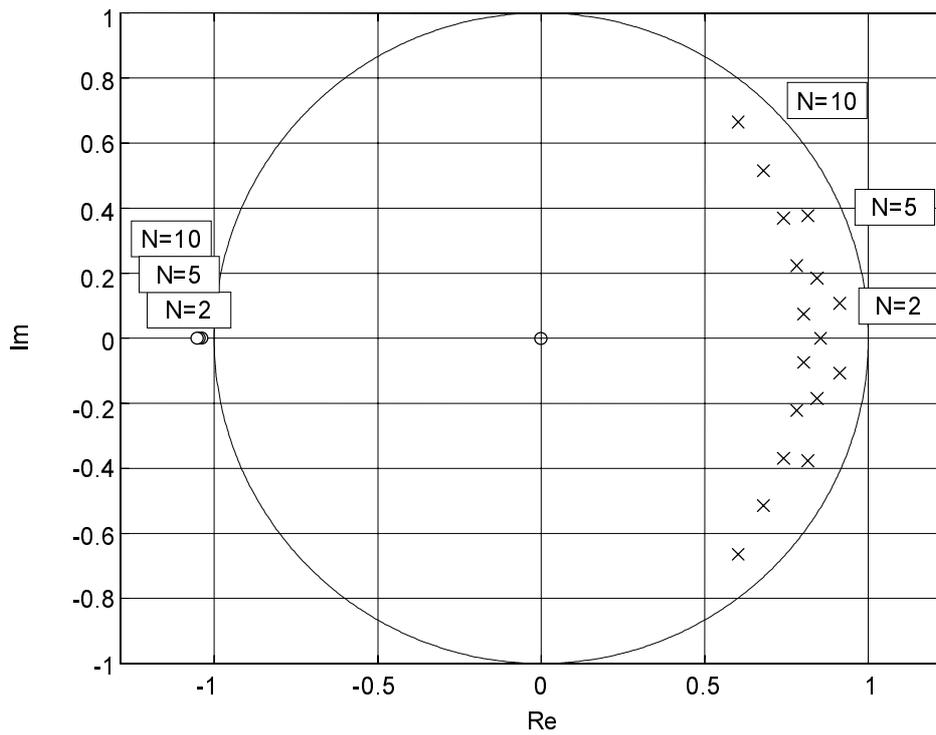
### 4.5.1 Filtri s jednom realnom nulom

Kao što je pokazano slici 4.2, realne nule ne doprinose mnogo simetriji impulsnog odziva. Zato se niti njihovi impulsni odzivi praktički ne razlikuju od odziva filtara sa svim nulama u ishodištu, 3.4. To vrijedi i za njihovo grupno kašnjenje, koje se vrlo malo razlikuje od onog prikazanog slikom 4.5. Doprinos nula najbolje se vidi se kod gušenja u blizini Nyquistove frekvencije, slika 4.18. To je posljedica prisutnosti realne nule čija se optimalna pozicija nalazi u blizini točke  $z=-1+j0$ , kao što prikazuje slika 4.19.

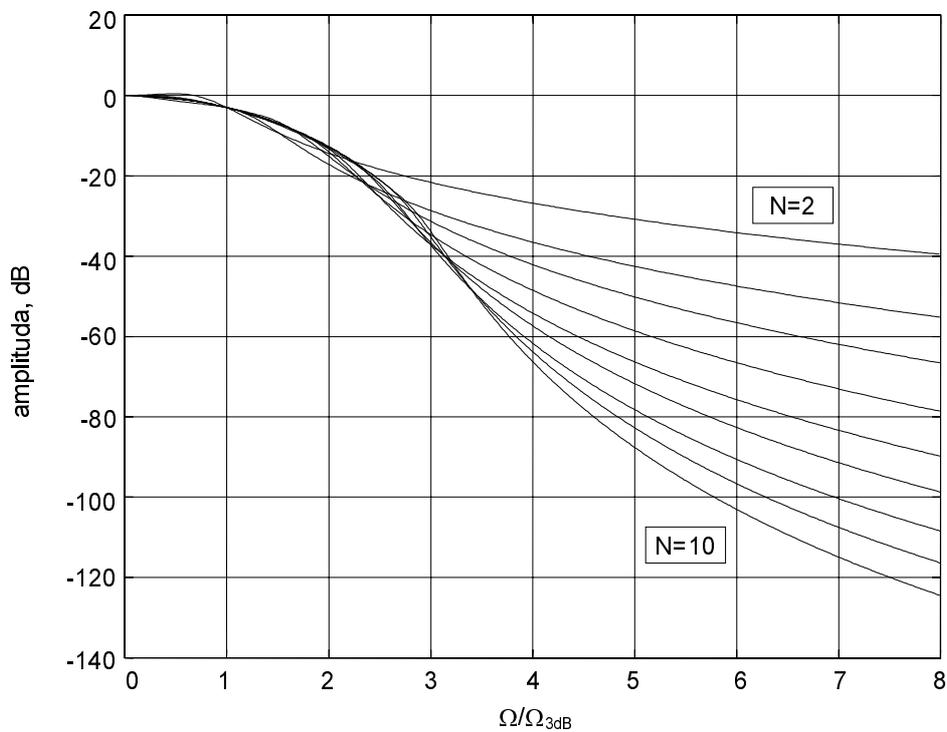
Kao što je opisano u poglavlju 4.3.3, postupak sinteze ovih filtara počinje određivanjem reda  $N$ , te linije simetrije  $S$ . Slika 4.20 prikazuje amplitudne karakteristike, skalirane na isti  $\Omega/\Omega_{3dB}$ . Krivulje opisuju gušenje filtara s linijom simetrije od  $S=7$  do  $S=30$  s točnošću 0.2 dB, 1.4 dB, 0.4 dB i 3.3 dB na frekvencijama  $2\Omega_{3dB}$ ,  $3\Omega_{3dB}$ ,  $4\Omega_{3dB}$  i  $6\Omega_{3dB}$ . Točnost za filtre s linijom simetrije od  $S=3$  do  $S=6$  na frekvencijama  $2\Omega_{3dB}$ ,  $3\Omega_{3dB}$  i  $4\Omega_{3dB}$  bolja je od 1.1 dB, 7.2 dB i 2.9 dB.



Slika 4.18 Amplitudne karakteristike digitalnih filtara s jednom realnom nulom,  $S=10$ .

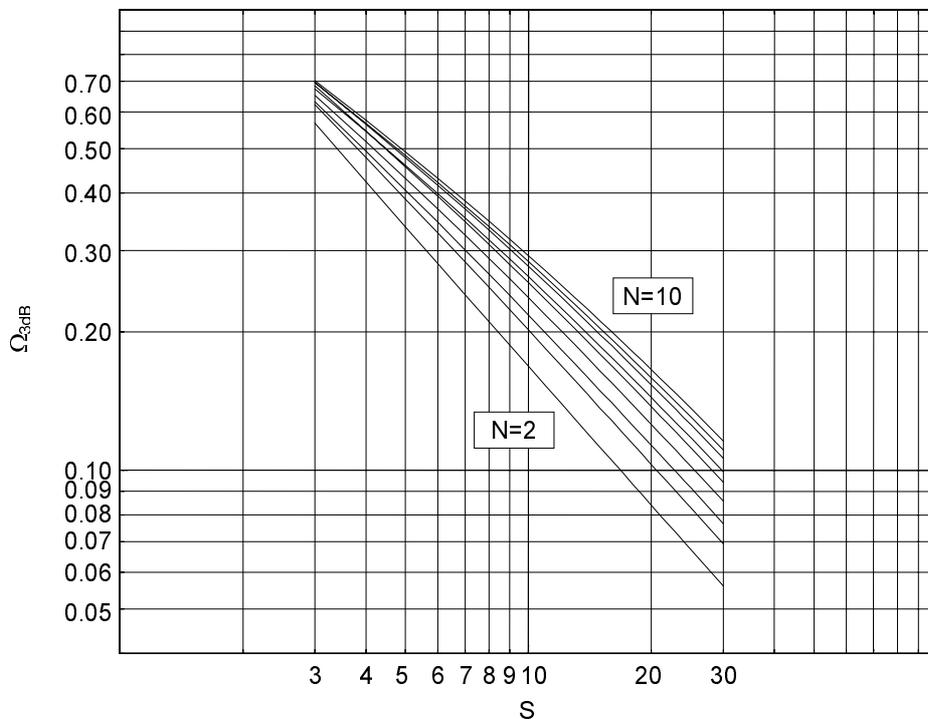


Slika 4.19 Položaj polova i nula optimalnih filtera s jednom realnom nulom,  $S=10$ .



Slika 4.20 Amplitudne karakteristike optimalnim filtera s jednom realnom nulom.

Nakon što se pomoću slike 4.20 procijeni red filtra, pomoću poznatog reda i granične frekvencije, iz slike 4.21 određuje se potrebno kašnjenje,  $S$ . Nakon što su određeni parametri  $N$  i  $S$ , polovi i nule optimalnog filtra dobivaju se optimizacijom (4.38). Početni skup polova za optimizaciju dobiva se pomoću izraza (4.30), dok se nule mogu uzeti kao  $z_{R1}=-1.1$ .



Slika 4.21 Granične frekvencije,  $\Omega_{3dB}$ , optimalnih filtara s jednom realnom nulom.

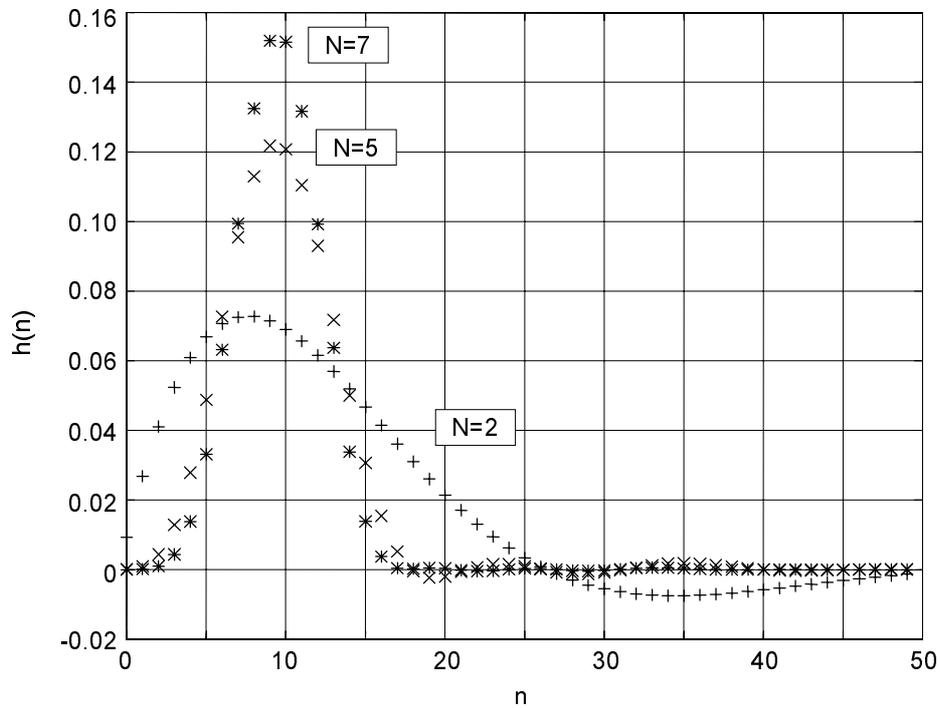
#### 4.5.2 Filtri s N-1 realnom nulom

Optimizacija filtara s nulama na realnoj osi provedena je za filtre reda  $N=2$  do  $N=7$ , s  $M=N-1$  realnom nulom. Filtri reda  $N>7$  predstavljaju problem za numeričku optimizaciju, zbog malenog utjecaja nula na simetriju impulsnog odziva. U praksi to ne mora biti nedostatak, obzirom da filtri višeg reda već i bez realnih nula imaju zadovoljavajuće gušenje u blizini Nyquistove frekvencije.

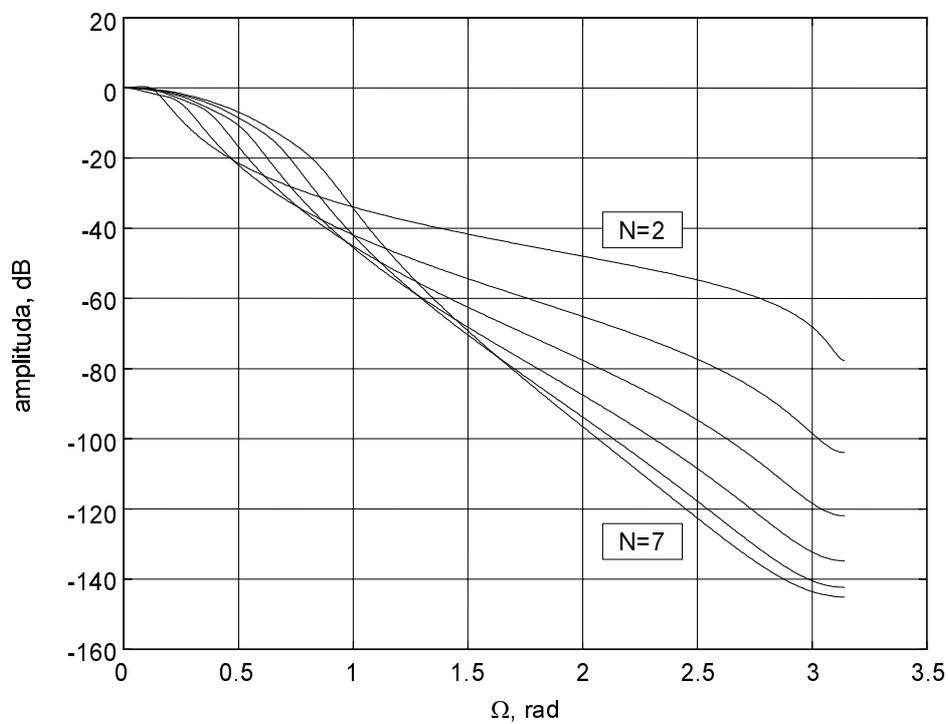
$N-1$  realna nula doprinosi simetriji impulsnog odziva manje nego 1 par kompleksnih nula, kao što se vidi na slici 4.2. To je razlog što impulsi prikazani slikom 4.22 nemaju značajno manje podbačaje nego odzivi filtara svim nulama u ishodištu. Doprinos je očit u gušenju na Nyquistovoj frekvenciji, što je posebno bitno za sustave nižih redova, slika 4.23. Za isti  $S$ , ovi filtri imaju širi pojas propuštanja nego filtri sa svim nulama u ishodištu, filtri s jednim parom kompleksnih nula i filtri s jednom realnom nulom.

Grupno kašnjenje prikazano je slikom 4.24. Valovitost je manja, a frekvencijsko područje na kojem grupno kašnjenje aproksimira konstantu je šire, nego što je to bio slučaj kod filtara sa svim nulama u ishodištu. Broj valova grupnog kašnjenja jednak je  $N$ .

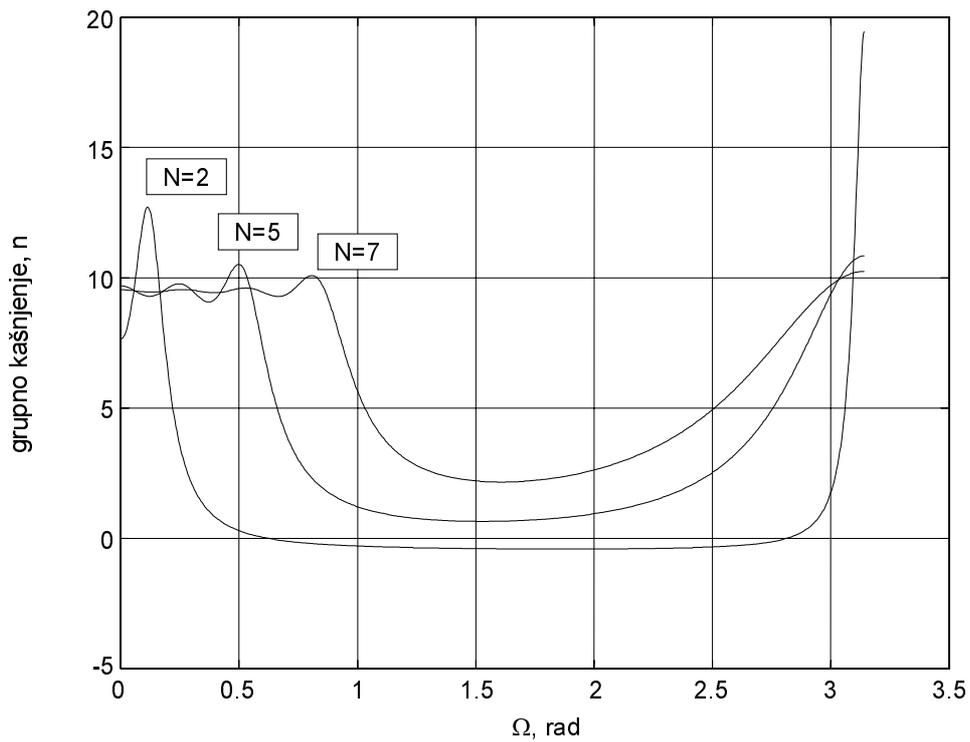
Interesantno je da su nule tokom optimizacionog postupka postale višestruke. Slika 4.25 prikazuje primjer rasporeda polova i nula filtera 2. 5. i 7. reda. Nule se nalaze nešto dalje od točke  $z=-1$  nego kod filtra sa samo jednom realnom nulom.



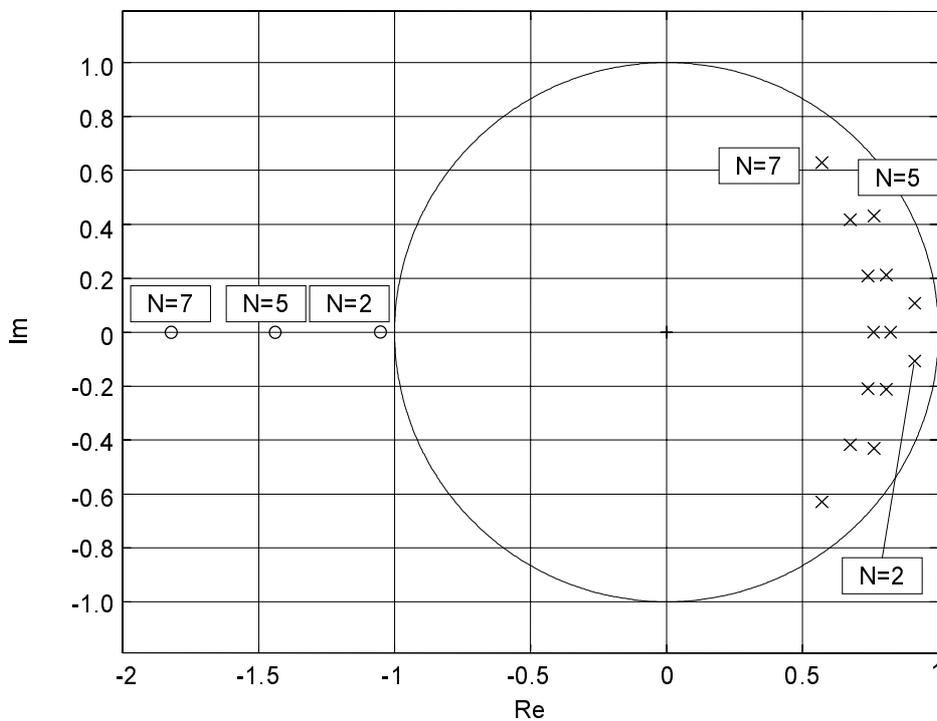
Slika 4.22 Impulsni odzivi digitalnih filtera s  $N-1$  realnom nulom,  $S=10$ .



Slika 4.23 Amplitudne karakteristike digitalnih filtera s  $N-1$  realnom nulom,  $S=10$ .



Slika 4.24 Grupno kašnjenje digitalnih filtara s N-1 realnom nulom, S=10.

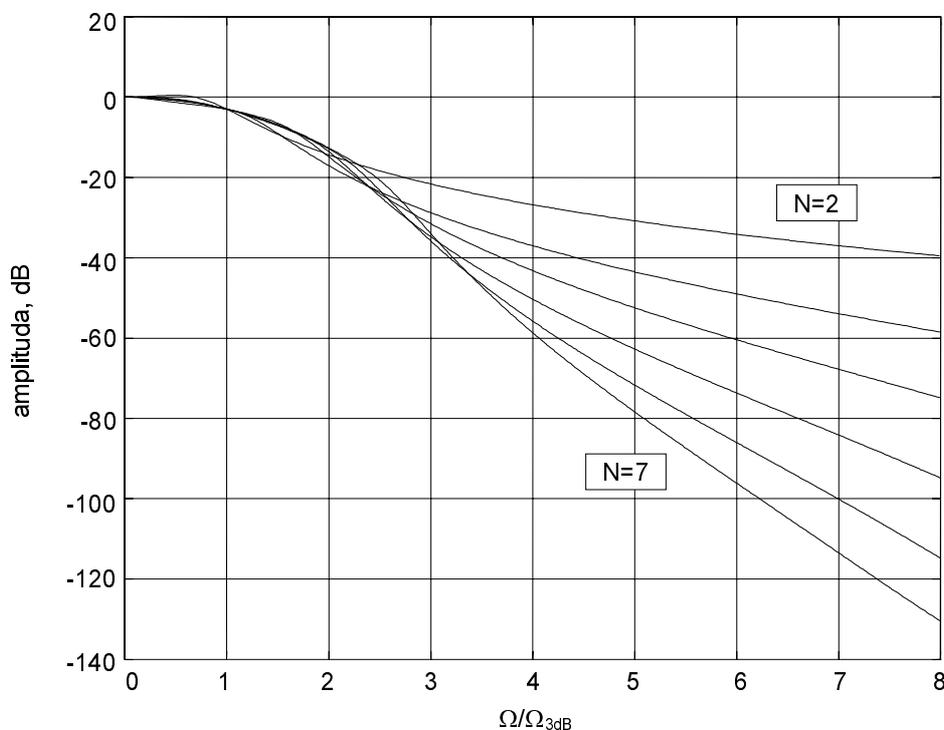


Slika 4.25 Položaj polova i nula digitalnih filtara s N-1 realnom nulom, S=10.

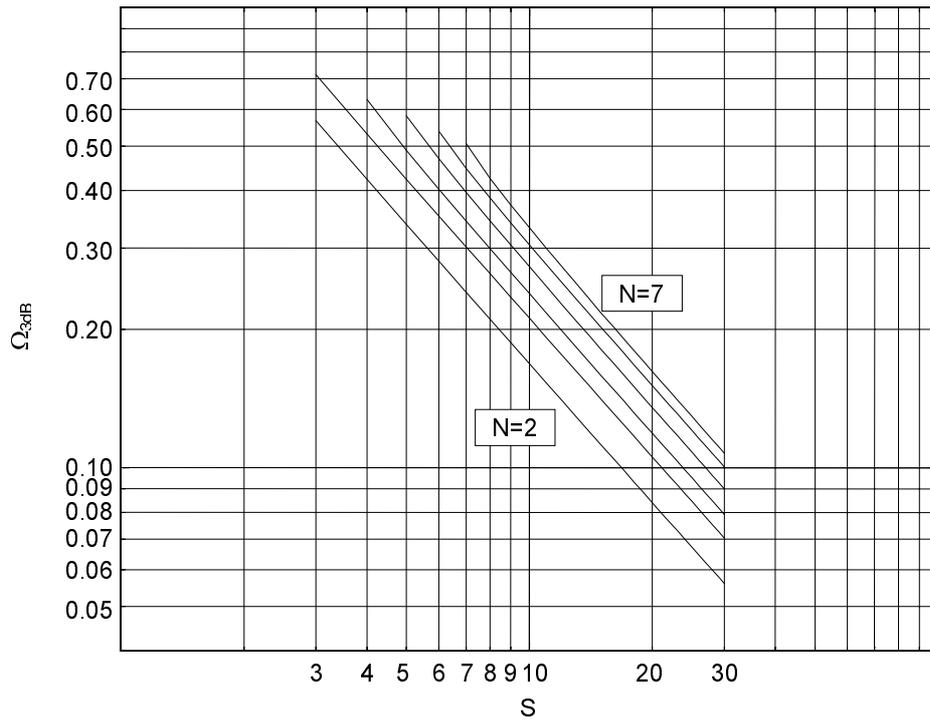
Dijagrami za određivanje reda  $N$  i linije simetrije,  $S$ , filtara s  $N-1$  nulom prikazani su slikama 4.26 i 4.27. Amplitudne karakteristike, skalirane na isti  $\Omega/\Omega_{3dB}$  opisuju gušnje filtara s linijom simetrije od  $S=7$  do  $S=30$  s točnošću boljom od 0.4 dB, 5.0 dB, 4.9 dB i 9.8 dB na frekvencijama  $2\Omega_{3dB}$ ,  $3\Omega_{3dB}$ ,  $4\Omega_{3dB}$  i  $6\Omega_{3dB}$ . Točnost za filtre s linijom simetrije od  $S=3$  do  $S=6$  na frekvencijama  $2\Omega_{3dB}$ ,  $3\Omega_{3dB}$  i  $4\Omega_{3dB}$  bolja od 1.5 dB, 1.0 dB i 5.8 dB.

Kod filtara s većom širinom pojasa (malenim  $S$ ), područje konstantnog grupnog kašnjenja širi se do Nyquistove frekvencije, pokrivajući tako cijelo frekvencijsko područje. To kao posljedicu ima vrlo malu asimetriju impulsnog odziva, koja dolazi u red veličine numeričkih pogrešaka računskog postupka. To je slučaj kod filtara s malim  $S$ , a velikim  $N$ , pa su oni izostavljeni sa dijagrama na slici 4.27. Također, točnost krivulja danih slikom 4.26 vrijedi za kombinacije  $S$  i  $N$  koje se mogu naći na dijagramu 4.27.

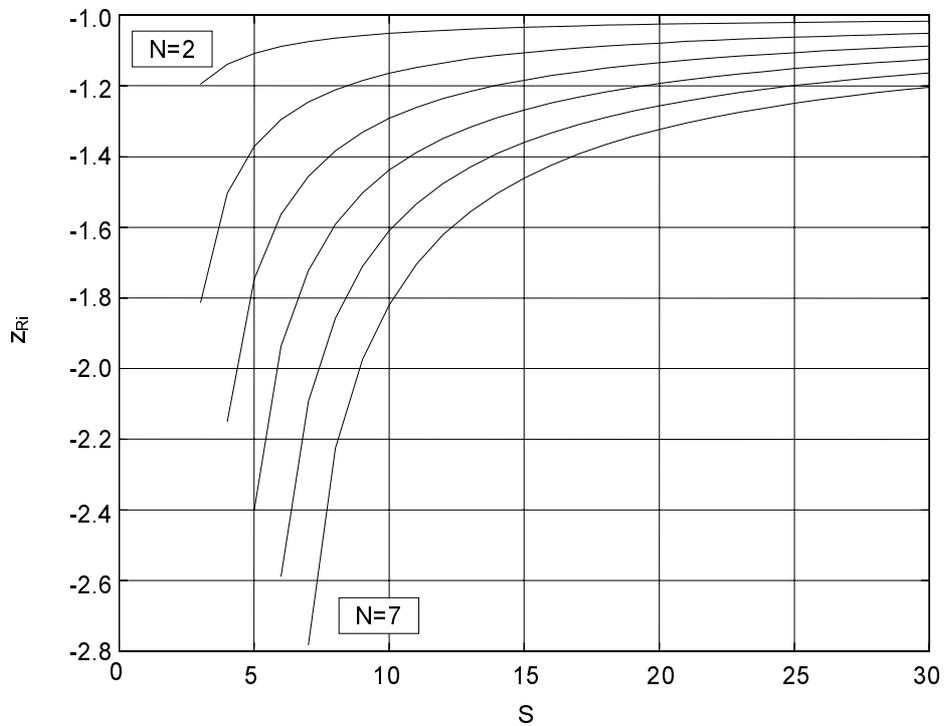
Nakon što se pomoću slike 4.26 procijeni red filtra, pomoću poznatog reda i granične frekvencije, iz slike 4.27 određuje se potrebno kašnjenje,  $S$ . Kad su određeni parametri  $N$  i  $S$ , polovi i nule optimalnog filtra dobivaju se optimizacijom (4.38). Za procjenu polova prvog koraka optimizacije može ponovo poslužiti izraz (4.30) iako je optimum ovoga puta nešto udaljeniji nego u slučaju s jednom nulom. Zbog malog utjecaja nula na prijenosnu funkciju, poželjno je otprilike poznavati njihove optimalne položaje. Optimalni položaji  $(N-1)$ -strukih filtara, pogodne za kontrolu rezultata optimizacijskog postupka prikazane su slikom 4.28.



Slika 4.26 Amplitudne karakteristike optimalnim filtara s  $N-1$  realnom nulom.



Slika 4.27 Granične frekvencije,  $\Omega_{3dB}$ , optimalnih filtara s  $N-1$  realnom nulom.



Slika 4.28 Optimalni položaji nula digitalnih filtara s  $N-1$  realnom nulom.

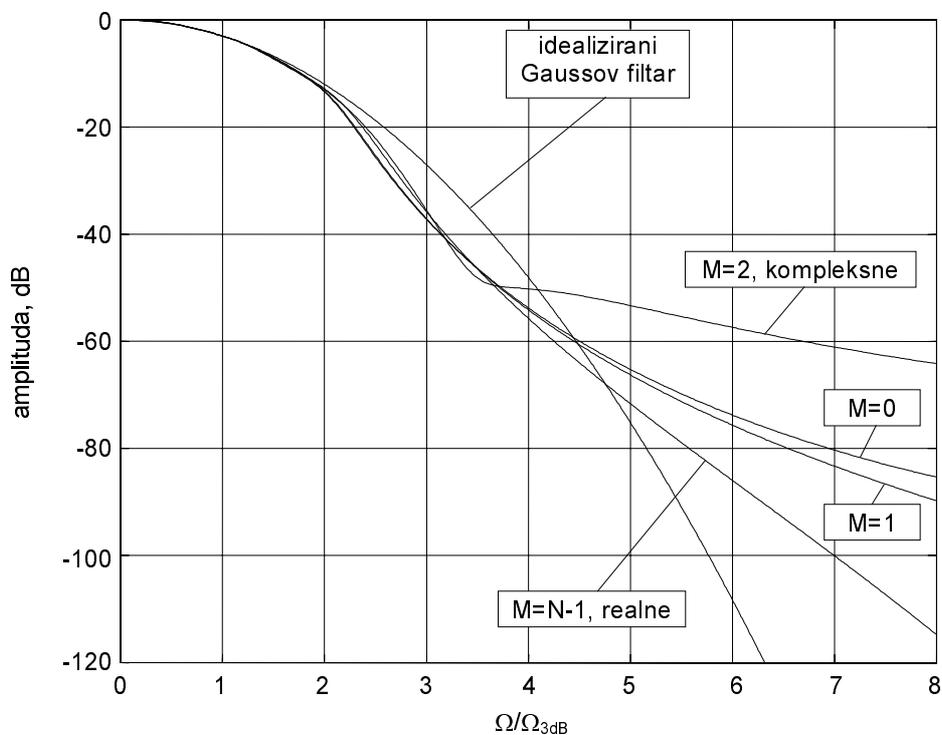
## 4.6 Svojstva digitalnih filtara sa simetričnim impulsnim odzivom

Slika 4.29 prikazuje amplitudne karakteristike filtara 6. reda, skalirane na isti  $\Omega_{3dB}$ . Sve amplitude prate Gaussovu krivulju do frekvencije  $\Omega=2\Omega_{3dB}$ . Nakon toga padaju strmije, ali i dalje konvergiraju ka istoj krivulji. Razdvajanje u ovom slučaju nastaje tek nakon što gušenje postigne 50 dB. Realne nule povećavaju gušenje u blizini Nyquistove frekvencije.

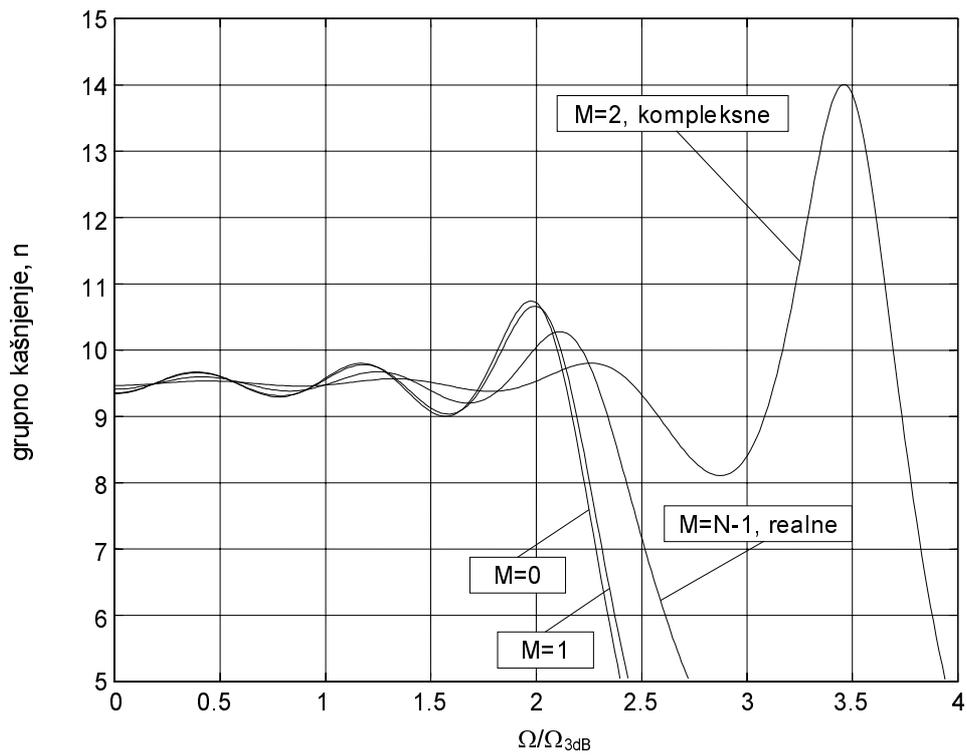
Doprinos realnih nula aproksimaciji konstantnog grupnog kašnjenja mnogo je manji nego doprinos kompleksnih nula, kao što prikazuje slika 4.30. Kao što je ranije pokazano, kompleksne nule mnogo više doprinose simetriji impulsnog odziva nego realne nule.

Iz provedenih razmatranja vidi se da su svi opisani tipovi prijenosnih funkcija upotrebljivi u praksi. Prijenosne funkcije sa svim nulama u ishodištu zanimljive su zbog jednostavne realizacije. Dodatak nula čini realizaciju složenijom, ali doprinosi boljim svojstvima filtra. Kompleksne nule pogodne su kad se od filtra traže dobri vremenski odzivi, dok su realne nule potrebne kad je potrebno veliko gušenje u blizini Nyquistove frekvencije.

Metoda jednakog impulsnog odziva temeljena na optimalnim kontinuiranim filterima također daje dobre rezultate. Njena prednost je u jednostavnosti primjene, te u mogućnosti određivanja filtra s proizvoljnom graničnom frekvencijom. Simetrija ovojnice dobivenog diskretnog impulsnog odziva nije optimalna, ali odstupanja od optimalne nisu velika, pa se u praksi se često mogu zanemariti.



Slika 4.29 Amplitudne karakteristike filtara sa simetričnim impulsnim odzivom, sa svim nulama u ishodištu, jednim parom kompleksnih nula, jednom realnom nulom te  $N-1$  realnom nulom,  $N=6$ ,  $S=10$ .



Slika 4.30 Grupno kašnjenje filtera sa simetričnim impulsnim odzivom, sa svim nulama u ishodištu, jednim parom kompleksnih nula, jednom realnom nulom te N-1 realnom nulom, N=6, S=10.

## 5 Zaključak

U radu je opisana nova klasa filtara s najmanjom kvadratnom pogreškom simetrije impulsnog odziva za dani red sustava, čime je osigurano najmanje izobličenje signala u vremenskoj domeni. Provedena istraživanja pokazuju da se simetrija impulsnog odziva može uspješno koristiti kao kriterij za sintezu analognih i rekurzivnih digitalnih filtara. Svojim svojstvima dobiveni filtri se svrstavaju među klasične filtarske aproksimacije.

Impulzni odzivi optimalnih kontinuiranih filtara aproksimiraju zvonolik oblik, a maksimalno su simetrični za zadanu složenost prijenosne funkcije. Simetrija raste s porastom reda filtra, a podbačaji i prebačaji te vrijeme istitravanja se smanjuju, da bi kod filtara viših redova postali zanemarivi. Prisutnost kompleksnih nula povećava simetriju impulsnog odziva, a realne nule su tokom optimizacijskog postupka potisnute daleko od ishodišta pa je njihov utjecaj zanemariv. U praksi je opravdano koristiti 1 do 2 para kompleksnih nula, obzirom da s njima postiže dovoljno velika simetrija impulsnog odziva. Dodatne nule doprinose simetriji, ali je doprinos manji, dok istovremeno povećavaju složenost prijenosne funkcije. Amplitudne karakteristike filtara slijede Gaussovu krivulju u širokom frekvencijskom području. Iako nije zadan nikakav zahtjev na grupno kašnjenje, ono valovito aproksimira konstantu. Frekvencijsko područje na kojem grupno kašnjenje aproksimira konstantu se širi, a valovitost smanjuje, s porastom reda sustava. Za dani red filtra, valovitost grupnog kašnjenja raste s frekvencijom, što je logično jer komponente s manjom amplitudom manje utječu na vremenski odziv. Generalno, rezultati potvrđuju pretpostavku da jednolika valovitost grupnog kašnjenja, karakteristična za pristup u frekvencijskoj domeni, nije nužna za mala izobličenja u vremenskoj domeni. Nule razmjerno malo utječu na osnovni oblik gušenja, ali povećavaju frekvencijsko područje u kojem grupno kašnjenje aproksimira konstantu. Parametri prijenosnih funkcija optimalnih filtara dani su u tabelarnom obliku čime je omogućeno njihovo jednostavno projektiranje.

Optimizacija rekurzivnih digitalnih filtara provedena je za filtre sa svim nulama u ishodištu, filtre s kompleksnim nulama, te filtre s realnim nulama. Sva tri tipa prijenosnih funkcija su interesantna za primjenu u praksi. Filtri sa svim nulama u ishodištu imaju simetričan impulсни odziv s najjednostavnijom realizacijom. Veću simetriju, sa širim područjem konstantnog grupnog kašnjenja, ali i složenijom strukturom, imaju filtri s jednim parom kompleksnih nula. Realne nule razmjerno malo doprinose simetriji i grupnom kašnjenju, ali povećavaju gušenje na Nyquistovoj frekvenciji. Osnovni oblici vremenskih i frekvencijskih odziva optimalnih digitalnih filtara vrlo su slični onima dobivenim kod kontinuiranih filtara. Postupak projektiranja ovih filtara dan je u obliku dijagrama pomoću kojih se određuju potrebno kašnjenje i red filtra, nakon čega je jednostavno provesti potrebnu optimizaciju.

Metoda jednakog impulsnog odziva interesantna je zbog svoje jednostavnosti i fleksibilnosti. Primijenjena na optimalne kontinuirane filtre daje praktički upotrebljive, ali ne i optimalne digitalne filtre. Njena upotreba daje kao rezultat prijenosne funkcije s nulama na realnoj osi. Te nule povećavaju gušenje na Nyquistovoj frekvenciji. Nažalost pojava realnih nula povećava složenost realizacije. Optimalni filtri koji sadrže samo jednu realnu nulu daju rezultate sumjerljive filtrima dobivenim metodom jednakog impulsnog odziva, iako im je struktura jednostavnija. Vrijednosti kašnjenja optimalnih filtara ne dozvoljavaju izbor bilo koje granične frekvencije filtra. Za razliku od njih, metoda jednakog impulsnog odziva omogućava dobivanje filtra bilo koje granične frekvencije. Tako dobiveni filtri imaju simetričnu ovojnici uzoraka impulsnog odziva, ali ne i simetrične uzorke, kao što je to slučaj kod filtara dobivenih optimizacijom.

## 6 Literatura

- [1] Abele, T. A., "Transmission Factors With Chebyshev-Type Approximations of Constant Group Delay", *Archiv der Elektrischen Übertragung*, Vol. 16, Januar 1962., str. 9-18
- [2] Aiello, G. L., Angelo, P. M., "Transitional Legendre-Thomson Filters", *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, Vol. CAS-21, January 1974., str. 159-162
- [3] Babić, H., "An Optimum Transfer Function for Amplifiers with Nondecreasing Step Response", *International Symposium on Network Theory - ISYNT*, Beograd, Yugoslavia, September 1968., str. 66
- [4] Babić, H., "Filtri s nenegativnim impulsnim odzivom", *Zbornik radova XXI Jugoslavenske konferencije ETAN*, Banja Luka, Jugoslavija, Lipanj 1977., str. 189-195
- [5] Babić, H., Vučić, M., "Maximum Impulse Response Symmetry as a Criterion for Analog and Digital Filter Design", *Proceedings of 1998 UCSB Workshop on Signal & Image Processing*, Santa Barbara, California, USA, 1998., str. 57-61
- [6] Blinchikoff, H. J., Zverev, A. I., *Filtering in the Time and Frequency Domain*, Malabar, Florida, USA, Robert E. Krieger Publishing Company, 1987.
- [7] Broyden, C. G., "The Convergence of a Class of Double Rank Minimization Algorithms", part I and II, *J. Inst. Maths. Applns.*, 6/1970., str. 76-90 i 221-231
- [8] Bunker, W. M., "Symmetrical Equal-Ripple Delay and Symmetrical Equal-Ripple Phase Filters", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-17, August 1970., str. 455-458
- [9] Butterworth, S., "On the Theory of Filter-Amplifiers", *Exp. Wireless and Wireles Engineering*, Vol. 7, October 1930., str. 536
- [10] Carlin, H. J., Wu, J. L. C., "Amplitude Selectivity Versus Constant Delay in Minimum-Phase Lossless Filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, No. 7, July 1976., str. 447-455
- [11] Cauer, W., *Siebschaltungen*, Berlin, Deutschland, V. D. I. Verlag, G.m.b.H., 1931.
- [12] Chottera, A. T., Jullien, G. A., "A Linear Programming Approach to Recursive Digital Filter Design with Linear Phase", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-29, March 1982., str. 139-149
- [13] Crane, R. L., "All-Pass Network Synthesis", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-15, December 1968., str. 474-477
- [14] Crane, R. L., Klopfenstein, R. W., "Optimum Weights in Delay Equalization ", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-26, No. 1, January 1979., str. 46-51

- [15]Cuong, D. M., Neiryneck, J., "Constant Group Delay Approximation by Series of Bessel Polynomials", *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, February 1978., str. 107-109
- [16]Davidon, W. C., "A Variable Metric Method for Minimization", *AEC Research and Development Report ANL 5990*, 1959.
- [17]Deczky, A. G., "Recursive Digital Filters Having Equiripple Group Delay", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-21, January 1974., str. 131-134
- [18]Dishal, M., "Gaussian-Response Filter Design", *Electrical Communication*, Vol. 36, 1959., str. 3-26
- [19]Dutta Roy, S. C., "Reducing Overshoot and Ringing in Filters", *Proceedings of IEEE*, Vol. 54, September 1966., str. 1189-1190
- [20]El-Masry, E. I., Josephs, L. C., "Optimum Weighting Functions in Delay Equalization ", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-31, No. 2, February 1984., str. 226-229
- [21]Fletcher, R., "A New Approach to Variable Metric Algorithms", *Computer Journal*, Vol. 13, August 1970., str. 317-322
- [22]Fletcher, R., Powell, M. J. D., "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization", *Computer Journal*, Vol. 6, 1963., str. 163-168
- [23]Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, Vol. 1, New York, John Wiley & Sons, 1980.
- [24]Ghausi, M. S., Adamowicz, M., "A New Class of Filters for Pulse Applications", *Journal of Franklin Institute*, Vol. 282, July 1966., str. 20-30
- [25]Goldfarb, D., "A Family of Variable Metric Methods Derived by Variational Means", *Maths. Comput.*, 24/1970., str. 23-26
- [26]Halpern, P. H., "Monotonic Step response Filters with Maximum Asymptotic Cutoff", *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, June 1976., str. 380-383
- [27]Halpern, P. H., "Trigonometric Pulse-Forming Networks Revisited", *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-19, January 1972., str. 81-86
- [28]Harman, R. K., Fairman, F. W., "Exponential Approximation Via a Closed-Form Gauss-Newton Method", *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-20, July 1973., str. 361-369
- [29]Hibino, M., Ishizaki, Y., Watanabe, H., "Design of Chebyshev Filters with Flat Group-Delay Characteristics", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-15, December 1968., str. 316-325
- [30]Hindin, H. J., "Impulse Response and Transfer Phase of Transitional Butterworth-Thompson Filters", *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-15, December 1968., str. 471-474
- [31]Humpherys, D. S., "A Relationship between Impulse Response and Phase Ripple", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-10, September 1963., str. 450-452

- [32] Humpherys, D. S., "Rational Function Approximation of Polynomial to Give an Equiripple Error", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-11, December 1964., str. 479-486
- [33] Humpherys, D. S., *The Analysis, Design and Synthesis of Electrical Filters*, New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1970.
- [34] Jess, J., Schussler, H. W., "A Class of Pulse-Forming Networks", *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-12, June 1965., str. 296-299
- [35] Jess, J., Schussler, H. W., "On the Desig of Pulse-Forming Networks", *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-12, September 1965., str. 393-400
- [36] Johnson, D. E., Johnson, J. R., Eskandar, A., "A Modification of the Bessel Filter ", *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, Vol. CAS-22, No 8, August 1975., str. 645-648
- [37] Johnson, J. R., Johnson, D. E., Boudra, P. W., Stokes, W. P., "Filters Using Bessel-Type Polynomials", *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, No 2, February 1976., str. 96-99
- [38] Johnson, J. R., Johnson, D. E., Perrit, R. Q., LaCarna, R. J., "Transitional Rational Filters", *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, Vol. CAS-26, November 1979., str. 976-979
- [39] Kuh, E. S., "Synthesis of Lumped Parameter Precision Delay Line", *Proceedings of IRE*, Vol. 45, December 1957., str. 1632-1642
- [40] Kuo, F. F., Karnaug, M., " Approximation of Linear Phase Filters with Gaussian Damped Impulse Response", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-11, June 1964., str. 255-260
- [41] Landon, V. D., "Cascade Amplifiers With Maximal Flatness", *RCA Review*, Vol. V, January 1941., str. 347
- [42] Lazović, S., "Nova klasa filtara za impulsne primene", *Zbornik materijala XII jugoslovenske konferencije o elektronici, telekomunikacijama i nuklearnoj tehnici*, Rijeka, Jugoslavija, 1968.
- [43] Mitra, S. K., *Digital Signal Processing*,. New York, McGraw - Hill Co. Inc., 1998.
- [44] Morrison, R., "Linear Phase Versus Step Response," *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-14, December 1967., str. 429-430
- [45] Mullick, S. K., "Pulse Networks with Parabolic Distribution of Poles", *IRE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-8, September 1961., str. 302-305
- [46] Neiryneck, J. J., "Transient Behavior of Systems with Equal-Ripple Delay", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. 11, June 1964., str. 302-303
- [47] Norton, E. L., "Constant Resistance Networks with Applications to Filter Groups", *Bell System Tech. Journal*, Vol. 16, April 1937., str. 178.193
- [48] Papoulis, A., "On Monotonic Response Filters", *Proceedings of IRE*, Vol. 47, February 1959., str. 332-333

- [49] Papoulis, A., "Optimum Filters with Monotonic Response", *Proceedings of IRE*, Vol. 46, March 1958., str. 606-609
- [50] Peless, Y., Murakami, T., "Analysis and Synthesis of Transitional Butterworth-Thomson Filters and Bandpass Amplifiers", *RCA Review*, Vol. 18, March 1957., str. 60-94
- [51] Pottle, C., Wong, J. C. K., "Optimum Least-Squares Approximations to the Ideal Low-Pass Filter", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-17, May 1970., str. 282-284
- [52] Rakovich, B. D., Popovich, M. V., Drakulich, B. S., "Minimum Phase Transfer Functions Providing a Compromise Between Phase and Amplitude Approximation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-24, No. 12, December 1977., str. 718-724
- [53] Rakovich, B. D., Rabrenovich, D. M., "Transfer Functions with Poles Located on Parabolic and Elliptic Contours", *Electronics Letters*, Vol. 3, May 1967., str. 201-202
- [54] Saraga, W., "Approximations in Network Design", *Wireless Engineering*, Vol. 29, October 1952., str. 280-281
- [55] Scanlan, J. O., "A Class of Transfer Functions Having Approximately Maximally Flat Group Delay Characteristics", *IEEE Transactions on Circuit Theory (Correspondence)*, Vol. CT-10, March 1968., str. 122
- [56] Scanlan, J. O., "Transfer Functions with Elliptic Distribution of poles at Equal Frequency Spacings", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-10, June 1965., str. 260-266
- [57] Shanno, D. F., "Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization", *Maths. Comput.*, 24/1970., str. 646-656
- [58] Storch, L., "Synthesis of Constant-Time-Delay Ladder Networks Using Bessel Polynomials", *Proceedings of IRE*, Vol. 42, November 1954., str. 1666-1675
- [59] Su, K., *Time-Domain Synthesis of Linear Network*, New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1971.
- [60] Surma-aho, K., Saramaki, T., "A Systematic Technique for Designing Approximately Linear Phase Recursive Digital Filters", *Proceedings of 1998 IEEE Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 5, Monterey, California, USA, 1998., str. 339-403
- [61] Svensson, T., "An Approximation Method for Time Domain Synthesis of Linear Networks", *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-20, March 1973., str. 142-144
- [62] Temes, G. C., "The Prolate Filter: An Ideal Lowpass Filter with Optimum Step-Response", *J. Franklin Inst.*, Vol. 293, February 1972., str. 77-103
- [63] Thiran, J. P., "Equal-Ripple Delay Recursive Digital Filters", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-18, November 1971., str. 664-669
- [64] Thiran, J. P., "Recursive Digital Filters with Maximally Flat Group Delay", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-18, November 1971., str. 659-664

- [65] Thomson, W. E., "Delay Networks Having Maximally Flat Frequency Characteristics", *Proceedings of IEE*, Vol. 96, November 1949., str. 487-490
- [66] Ulbrih, E., Piloty, H., "Über der Entwurf von Allpassen, Tiefpassen und Bandpassen mit einer im Tschebyscheffschen Sinne approximierten konstanten Gruppenlaufzeit", *Archiv der Elektrischen Übertragung*, Vol. 14, Oktober 1960., str. 451-467
- [67] Ulstad, M. S., "Time Domain Approximations and an Active Network Realization of Transfer Functions Derived From Ideal Filters", *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-15, September 1968., str. 205-210
- [68] Unbehauen, R., "Low-Pass Filters with Predetermined Phase or Delay and Chebyshev Stopband Attenuation", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-15, December 1968., str. 337-341
- [69] Valand, J., "On the Linear Phase Approximation", *Proceedings of IEEE*, Vol. 55, September 1967., str. 1627-1628
- [70] Vasiliu, C. G., "A Practical Method for Time-Domain Network Synthesis", *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-12, June 1965., str. 234-241
- [71] Vučić, M., Babić, H., "A Class of Systems with Symmetric Impulse Response", *Proceedings of 1998 IEEE Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 3, Monterey, California, USA, 1998., str. 485-488
- [72] Vučić, M., Babić, H., "An Approach for Antialiasing Filter Optimization," *Proceedings of 39th Annual Conference KoREMA*, Vol. 1, Zagreb, Croatia, 1994., str. 186-190
- [73] Vučić, M., Babić, H., "IIR Filters with Maximum Impulse Response Symmetry", *Proceedings of 1999 IEEE Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 3, Orlando, Florida, USA, 1999., str. 319-322
- [74] Vučić, M., Babić, H., "Systems with Symmetric Impulse Response", *Proceedings of 1998 Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Notre Dame, Indiana, USA, 1998., str. 440-443
- [75] Vučić, M., Babić, H., Čosić, V., Mijat, N., "Optimization and Realization of the Digitally Controlled Antialiasing Filter Set", *Automatika, časopis za automatizaciju i informatiku, KoREMA*, 3-6/1992, str. 135-140
- [76] Weinberg, L., *Network Analysis and Synthesis*, New York, USA, McGraw - Hill Co. Inc., 1962.
- [77] Williams, A. B., Taylor, F. J., *Electronic Fiter Design Handbook*,. New York, McGraw - Hill Co. Inc., 1995.
- [78] Yoshida, N., "Transfer Functions of Maximally Flat Group-Delay Low-Pass Filters with Equal-Ripple Attenuation in the StopBand and Flat Attenuation in the Passband", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, No. 2, February 1976., str. 81-84
- [79] Zverev, A. I., *Handbook of Filter Synthesis*, New York, USA, John Wiley & Sons Inc., 1967.

## Sažetak

Filtri s linearnom fazom koriste se u sustavima od kojih se traži malo izobličenje signala u vremenskoj domeni. Takav pristup je indirektan, obzirom da je dan u frekvencijskoj domeni. Bolji rezultati mogu se očekivati projektiranjem filtara na temelju kriterija u vremenskoj domeni.

U radu je opisana nova klasa filtara, s najmanjom kvadratnom pogreškom simetrije impulsnog odziva za dani red sustava, čime je osigurano najmanje izobličenje signala u vremenskoj domeni. U frekvencijskoj domeni ti filtri aproksimiraju konstantno grupno kašnjenje s nejednolikom valovitošću. Valovitost je manja u području propuštanja, a veća u području većeg gušenja, što pokazuje da zahtjev jednolike valovitosti nije nužan za mala izobličenja u vremenskoj domeni. Amplitudna karakteristika dobivenih filtara u širokom području aproksimira Gaussovu krivulju. Svojim svojstvima ovi filtri se svrstavaju među klasične filtarske aproksimacije.

Prijenosne funkcije filtara dobivene su numeričkom optimizacijom. Optimizacija je provedena za filtre od 2. do 10. reda sa svim nulama u beskonačnosti te kompleksnim nulama. U radu je opisan postupak dobivanja filtara, te dani numerički rezultati pogodni za jednostavno projektiranje ovih filtara.

Optimizacija rekurzivnih digitalnih filtara provedena je za filtre sa svim nulama u ishodištu, filtre s kompleksnim nulama, te filtre s realnim nulama. Pokazano je da su sva tri tipa prijenosnih funkcija interesantna za primjenu u praksi. Filtri sa svim nulama u ishodištu imaju simetričan impulsnog odziv s najjednostavnijom realizacijom. Veću simetriju, sa širim područjem konstantnog grupnog kašnjenja, ali i složenijom strukturom, imaju filtri s jednim parom kompleksnih nula. Realne nule razmjerno malo doprinose simetriji i grupnom kašnjenju, ali povećavaju gušenje na Nyquistovoj frekvenciji. Za projektiranje digitalnih filtara sa simetričnim impulsnim odzivom dani su dijagrami za određivanje potrebnih parametara s kojima se ulazi u optimizacijski postupak.

Kao jedan pristup projektiranju rekurzivnih digitalnih filtara, razmatrana je metoda jednakog impulsnog odziva, primijenjena na optimalne kontinuirane filtre sa simetričnim impulsnim odzivom. Razmotren je utjecaj realnih nula koje ta metoda unosi u prijenosne funkcije.

Provedena je optimizacija sustava s realnim nulama, te predložena metoda za njihovo projektiranje.

Ključne riječi: simetrija impulsnog odziva, analogni filter, digitalni filter

---

## Summary

Linear phase filters are used when a small time domain signal distortion is required. This is indirect approach because it is given in frequency domain. One should expect better results from optimum systems based on the time domain criteria.

In this thesis, a new class of filters with maximum impulse response symmetry for a given system order is determined. The used criterion enables the minimum time domain distortion. The obtained filters in the frequency domain approximate constant group delay with a ripple. The ripple is low in passband, but greater in the frequency region where amplitude attenuation is high. It means that equal ripple or maximally flat requirement are not necessary for a small time domain distortion. Amplitude response of these filters approximate Gaussian curve in a wide frequency band.

Filter transfer functions are obtained by numerical optimization. Transfer functions of the second to the tenth order with all zeros at infinity and complex zeros are obtained. The parameters required for a filter design are given in tables.

Optimization of recursive digital filters is carried out for filters with all zeros at the origin, filters with complex zeros and filters with real zeros. All three types of transfer functions are interesting for practical applications. All-pole filters enable symmetric impulse response with simple structure. Higher symmetry and wider constant group delay bandwidth, but somewhat more complex structure, can be achieved using filters with complex zeros. Real zeros have rather low contribution to impulse response symmetry and group delay response, but they increase attenuation at Nyquist frequency. An efficient procedure for a filter design based on numerical optimization is proposed. Required parameters for the optimization are given in diagrams.

Impulse invariance method, based on the obtained continuous time filters with symmetric impulse response, is also considered.

Filters with real zeros are optimized, and design procedure is given.

Key words: impulse response symmetry, continuous time filter, discrete time filter, analog filter, digital filter

---

## Životopis

Mladen Vučić rođen je 1965. godine u Karlovcu, Republika Hrvatska, gdje je 1984. završio srednju školu, matematičko - informatički smjer. Godine 1989. diplomirao je na Elektrotehničkom fakultetu u Zagrebu, smjer Industrijska elektronika. Godine 1993. magistrirao je na Elektrotehničkom fakultetu u Zagrebu, smjer Opća elektronika.

Od 1989. radi kao asistent pripravnik na Zavodu za elektronička mjerenja i sisteme Elektrotehničkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (danas Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija Fakulteta elektrotehnike i računarstva). Od 1991. radi na istom zavodu kao znanstveni novak, financiran od Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske. Godine 1996. godine izabran je u istraživačko zvanje asistenta.

Područje znanstvenog djelovanja obuhvaća analognu i digitalnu obradu signala, a posebno dizajn električkih filtara. Autor je više znanstvenih radova, od kojih su najznačajniji iz područja antialiasing filtara s linearnom fazom i filtara sa simetričnim impulsnim odzivom te područja prihvata i obradu podataka. Tokom posljednjih godina radio je na slijedećim znanstvenoistraživačkim projektima Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske; Sustavi i algoritmi u mjerenju i procesiranju signala, broj 2-07-265 i Sustavi i algoritmi za obradbu signala i slika, broj 036024, pod vodstvom prof. dr. sc. Hrvoja Babića. Također radi na vlastitom znanstvenoistraživačkom projektu Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske; Optimizacija antialiasing filtara, broj 036124.

Od 1989, sudjelovao je u više stručnih projekata od kojih su najvažniji:

- razvoj i realizacija modula za regulacija istosmjernih motora male snage
  - infracrvena i radio telemetrija
  - razvoj i realizacija sustava za telemetrijsko mjerenje prijenosa snage i broja okretaja na brodskoj osovini
  - razvoj i realizacija ionizacijskog pretvarača za detekciju dima, namijenjenog sustavu za protupožarnu zaštitu
  - razvoj i realizacija četverokanalnog istosmjernog digitalno programabilnog mjernog pojačala s programabilnim izvorima za napajanje pretvarača
  - razvoj i realizacija četverokanalnog izmjeničnog digitalno programabilnog mjernog pojačala
  - razvoj i realizacija četverokanalnog antialiasing filtarskog sloga s digitalno programabilnim graničnim frekvencijama
  - razvoj i realizacija modula za razvođenje takta i okidnog signala u raspodijeljenim sustavima za prihvata podataka
  - razvoj i realizacija namjenskog "repeatera" za razvođenje takta i okidnog signala u raspodijeljenim sustavima za prihvata podataka
  - razvoj i realizacija emulatora "single-chip" izvedbe mikrokontrolera 8051
  - razvoj inteligentnog sustava za prijem slike s meteoroloških satelita tipa NOAA i Meteor
  - razvoj i realizacija uređaja za digitalizaciju slike za PC računalo s velikom brzinom prijenosa podataka
  - razvoj i realizacija procesorom upravljano mjerila frekvencije i perioda
-

- razvoj i realizacija višenamjenskog programabilnog izvora napajanja za pogon kontrasta, svjetline i rasvjete LCD ekrana za industrijsko PC računalo
- razvoj i realizacija procesorom upravljanoj generatora impulsa
- razvoj i realizacija brze A/D kartice s velikim spremnikom za podatke
- razvoj sklopovlja uređaja za šifrirani prijenos govorne informacije
- razvoj i realizacija sustava za daljinsko upravljanje
- razvoj i realizacija mjerno dijagnostičke stanice za provjeru ispravnosti elektrooptičkog sustava posebne namjene
- razvoj i realizacija terenskog uređaja za provjeru ispravnosti elektromehaničnog izvršnog sklopa visoke pouzdanosti
- razvoj i realizacija sustava za detekciju infracrvenog izvora u vidnom polju

Pored znanstvenog i stručnog rada, Mladen Vučić sudjeluje u vođenju nastave na predmetima Teorija mreža i linija, Sustavi za obradu signala, Sustavi za mjerenje i praćenje procesa. Na navedenim predmetima držao je auditorne i laboratorijske vježbe te pismene ispite, a ujedno je i jedan od autora zavodskih skripata "Upute za laboratorijske vježbe" na predmetima Sustavi za obradu signala te Filtri i filtarska pojačala. Na predmetu Projektiranje ugrađenih računalnih sustava sudjeluje u održavanju predavanja te organizaciji i održavanju laboratorijskih vježbi. Za potrebe tog predmeta napisao je skripta "Upute za laboratorijske vježbe I" te "Upotreba mikrokontrolera u ugrađenim računalnim sustavima". Vodio je studente tokom izrade konstrukcijskih programa i sudjelovao u vođenju diplomskih radova.

Godine 1997. dobio je Nagradu Ministarstva obrane i Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske za znanstveni doprinos razvoju oružanih snaga Republike Hrvatske.

Član je udruženja KoREMA i IEEE.

Tokom dosadašnjeg rada, Mladen Vučić je izradio i objavio slijedeće znanstvene i stručne radove:

#### **Radovi u časopisima:**

- [1] M. Vučić, H. Babić, V. Čosić, N. Mijat, *Optimization and Realization of the Digitally Controlled Antialiasing Filter Set*, AUTOMATIKA 3-6/1992, časopis za automatizaciju i informatiku, KoREMA, str. 135-140 i Zbornik radova KoREMA, 1. svezak, 37. međunarodni skup KoREMA, Zagreb, 1992., str. 436-439

#### **Radovi na međunarodnim skupovima:**

- [1] M. Vučić, H. Babić, *A Class of Systems with Symmetric Impulse Response*, Proceedings of 1998 IEEE Symposium on Circuit and Systems, Volume 3, Monterey, CA, USA, 1998, pages 485-488
- [2] M. Vučić, H. Babić, *Systems with Symmetric Impulse Response*, Proceedings of 1998 Midwest Symposium on Circuits & Systems, University of Notre Dame, Notre Dame, IN, USA, 1998, pages 440-443
-

- [3] H. Babić, M. Vučić, *Maximum Impulse Response Symmetry as a Criterion for Analog and Digital Filter Design*, Proceedings of 1998 UCSB Workshop on Signal & Image Processing, Santa Barbara, CA, USA, 1998, pages 57-61
- [4] M. Vučić, H. Babić, *IIR Filters with Maximum Impulse Response Symmetry*, Proceedings of 1999 IEEE Symposium on Circuit and Systems, Volume 3, Orlando, FL, USA, 1999, pages 319-322

**Radovi na domaćim skupovima:**

- [1] V. Čosić, N. Mijat, B. Mrković, M. Vučić, *Mjerni moduli mikroprocesorski upravljane komunikacijske petlje*, Zbornik radova II-III ETAN 1990., Konferencija ETAN, Zagreb 1990., str. 75-81
- [2] M. Vučić, S. Lončarić, *Realizacija sustava za razvođenje takta u distribuiranim mjernim sustavima*, Zbornik radova simpozija MIPRO '91/PU, Simpozij MIPRO '91, Opatija 1991., str. 200-203
- [3] N. Mijat, V. Čosić, M. Vučić, *Design of Two-Amplifiers Biquartic BP Active Filters Blocks*, Zbornik radova KoREMA, 1. svezak, 37. međunarodni skup KoREMA, Zagreb, 1992., str. 448-451
- [4] H. Babić, B. Jeren, S. Lončarić, D. Kovačec, P. Pale, D. Petrinović, D. Seršić, D. Sudarević, I. Tannir, P. Vidas, M. Vučić, R. Vuković, G. Vukušić, *Koncepcija složenog višekanalnog sustava za dinamička mjerenja*, Zbornik radova Hrvatskog društva za sustave, CROSS, Zagreb, 1992., str. 161-165
- [5] V. Henč-Bartolić, M. Vučić, Ž. Andreić, *Uređaj za analizu širenja optičkih valova u svjetlovodima i kapljevinama*, Zbornik radova KoREMA, 1. svezak, 38. međunarodni skup KoREMA, Zagreb, 1993., str.104-106
- [6] M. Vučić, H. Babić, *An Approach for Antialiasing Filter Optimization*, Zbornik radova KoREMA, 1. svezak, 39. međunarodni skup KoREMA, Zagreb, 1994., str.186-190
- [7] D. Petrinović, M. Vučić, *High Transfer Rate Frame Grabber for Personal Computer*, Zbornik radova KoREMA, 1. svezak, 40. međunarodni skup KoREMA, Zagreb, 1995., str. 458-461
- [8] M. Vučić, M. Slišković, H. Babić, *Realization of Weather Satellite Pictures Receiving System*, Zbornik radova KoREMA, 1. svezak, 40. međunarodni skup KoREMA, Zagreb, 1995., str. 462-466

**Magistarski rad:**

- [1] M. Vučić, *Optimizacija filtara za otklanjanje pogreške uslijed preklapanja spektara*, magistarski rad, ETF, Zagreb 1993.
-