

Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet

**Nenad Bijelić**

**Nelinearni dinamički proračun nadogradnje  
poslovnog tornja Cibona u Zagrebu**

Zagreb, 2010.

# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Formulacija problema</b>	<b>2</b>
2.1. Jednadžba gibanja dinamičkog sustava . . . . .	2
2.1.1. Diskretizacija . . . . .	3
2.1.2. Uvjet dinamičke ravnoteže . . . . .	4
<b>3. Procjena matrica svojstava konstrukcije</b>	<b>6</b>
3.1. Matrica krutosti . . . . .	6
3.1.1. Štapni element . . . . .	9
3.2. Matrica prigušenja . . . . .	11
3.2.1. Model viskoznog prigušenja . . . . .	11
3.2.2. Procjena koeficijenata prigušenja . . . . .	12
3.2.3. Preporučene vrijednosti $\zeta$ . . . . .	17
3.2.4. Formiranje matrice prigušenja . . . . .	18
3.3. Matrica mase . . . . .	23
<b>4. Potresno opterećenje</b>	<b>25</b>
4.1. Općenito o potresu . . . . .	25
4.2. Eurocode 8 . . . . .	30
4.3. Efektivna sila potresa . . . . .	33
<b>5. Redukcija stupnjeva slobode</b>	<b>36</b>
5.1. Kinematička ograničenja . . . . .	36
5.2. Statička kondenzacija . . . . .	38
5.3. Rayleigh-Ritzova metoda . . . . .	38
<b>6. Numerička procjena dinamičkog odgovora</b>	<b>40</b>
6.1. Newmarkova metoda . . . . .	42
6.2. Algoritam proračuna . . . . .	48
<b>7. Proračun nadogradnje poslovnog tornja Cibona</b>	<b>50</b>
7.1. Tehnički opis konstrukcije . . . . .	50
7.2. Numerički model . . . . .	51
7.3. Rezultati proračuna . . . . .	53
<b>8. Zaključak</b>	<b>60</b>
<b>Literatura</b>	<b>61</b>
<b>Sažetak</b>	<b>63</b>

---

# 1. Uvod

Sva djelovanja na konstrukcije su, strogo gledano, vremenski promjenjiva te su time po svojoj biti dinamička. Stoga dinamika konstrukcija predstavlja temeljnu inženjersku disciplinu poznavanjem koje se dobiva dublji uvid i omogućava se bolje razumijevanje ponašanja konstrukcije i toka sila u njoj, što predstavlja nužan preduvjet za ozbiljna razmatranja i ingeniozna rješenja kompleksnih problema.

Među najozloglašnijim dinamičkim djelovanjima zasigurno se nalazi i podrhtavanje tla uslijed potresa. Razornoj moći potresa ljudski rod svjedok je već tisućljećima, što posebno dolazi do izražaja u novije vrijeme masifestacijom podrhtavanja tla u seizmički aktivnim područjima visoke gustoće naseljenosti (slika 1.). Kompleksan problem potresnog inženjer-



Slika 1.: Posljedice potresa

stva, koji zahtijeva interdisciplinarni pristup i suradnju, od posebnog je značaja i za naše podneblje budući da se Republika Hrvatska nalazi na jednom od seizmički najaktivnijih područja Europe. Suština problema slikovito se može prikazati slijedećim citatima:

„[...] the news media and some optimistic scientists encourage the belief that earthquakes can be predicted. Recent research suggests to us that this belief is incorrect. [...] Seismology can, however, contribute to earthquake hazard mitigation.”<sup>1</sup>

„Structural engineering is the art of using materials that have properties which can only be estimated to build real structures that can only be approximately analyzed to withstand forces that are not accurately known, so that our responsibility with respect to public safety is satisfied.”<sup>2</sup>

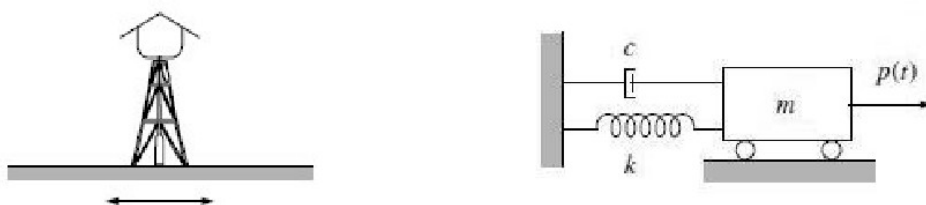
Iz navedenoga slijedi da na građevinskim inženjerima leži iznimna društvena odgovornost. Stoga je u ovom radu prikazan općeniti pristup problemu dinamike konstrukcija pri čemu je poseban naglasak stavljen na potresnu pobudu. Provedena je i seizmička analiza moguće nadogradnje poslovnog tornja Cibona u Zagrebu te je izvršena usporedba linearnog i nelinearnog odgovora konstrukcije.

<sup>1</sup>GELLER, R.J.; et al.: *Earthquakes Cannot Be Predicted*, Science 275 (1997), 1616-1617

<sup>2</sup>nepoznati autor, preuzeto iz [1]

## 2. Formulacija problema

Temeljni zadatak je procijeniti ponašanje buduće konstrukcije u definiranim uvjetima, a sa svrhom dokazivanja pouzdanosti konstrukcije. Pritom je potrebno matematički opisati realnu konstrukciju i uvjete u kojima se nalazi, odnosno *nužno* je fizikalni problem *aproksimirati* matematičkim modelom (slika 2.).



Slika 2.: Od fizikalnog problema (lijevo) prema numeričkome modelu (desno)

Ključan korak svake dinamičke analize je postavljanje odgovarajućeg matematičkog modela. Razlog tomu leži u činjenici da rezultati dobiveni analizom izravno ovise o prikladnosti korištenog matematičkog modela za opis ponašanja realnog fizikalnog sustava. Dakle, matematičkim modelom je potrebno obuhvatiti ključna svojstva konstrukcije i djelovanja na konstrukciju te njihovu međusobnu ovisnost. Naravno, budući se u dinamici konstrukcija radi o vremenski ovisnim problemima, uz prostorne varijable potrebno je uzeti u obzir i vremensku dimenziju.

### 2.1. Jednadžba gibanja dinamičkog sustava

Svojstva konstrukcije ključna za formulaciju matematičkog modela dinamičkog problema su: *tromost*, *prigušenje* i *krutost*. Parametri (mjere) kojima se opisuju navedena svojstva konstrukcije prikazani su u tablici 1.

Tablica 1.: Svojstva konstrukcije

SVOJSTVO KONSTRUKCIJE	PARAMETAR (MJERA)
tromost	generalizirana masa
prigušenje	disipacija energije
krutost	ovisnost $\sigma$ - $\varepsilon$

Jedan od osnovnih pojmova u dinamici konstrukcija je *dinamički stupanj slobode*. Broj dinamičkih stupnjeva slobode predstavlja broj *nezavisnih* pomaka potrebnih da se opiše položaj svih masa u deformiranom sustavu u odnosu na njihov početni položaj, odnosno broj nezavisnih pomaka potreban da se obuhvate učinci svih značajnih inercijalnih sila u

konstrukciji. Dinamički stupnjevi slobode razlikuju se od stupnjeva slobode za statičku analizu koji su potrebni radi uzimanja u obzir sila uslijed krutosti konstrukcije. Evidentno je da su realne konstrukcije sustavi s neizmjereno mnogo stupnjeva slobode budući da su svojstva tromosti, prigušenja i krutosti definirana u svakoj točki konstrukcije.

### 2.1.1. Diskretizacija

Općenito gledano, realnu konstrukciju je moguće matematički modelirati na dva načina i to kao:

- distribuirani sustav
- diskretni sustav

Modelirajući konstrukciju distribuiranim sustavom, svojstva konstrukcije se definiraju kao funkcije kontinuiranih koordinata. Formalni matematički postupak za razmatranje sustava od neizmjereno mnogo povezanih točaka temelji se na primjeni diferencijalnog računa. Formulacija jednadžbi gibanja tim pristupom vodi na sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi po prostornim i vremenskim koordinatama. Ovakav pristup, iako korištan kod jednostavnijih jednodimenzionalnih sustava, nije prikladan kao općeniti pristup kompleksnijim problemima. Poteškoće leže u formuliranju jednadžbi gibanja koje, ukoliko je uopće i moguće, zasigurno nije praktično. Nadalje, rješenje tih jednadžbi u zatvorenom obliku najčešće nije moguće te je nužno pribjeći njihovom numeričkom rješavanju. Stoga opravdanost inzistiranja na strogoj formulaciji problema postaje upitna.

Aproksimacijom polja pomaka sustava s neizmjereno mnogo stupnjeva slobode konačnim brojem parametara u obliku:  $\mathbf{u} \approx \tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{b}}_i$ , gdje su  $\mathbf{N}_i$  koordinatne funkcije, a  $\bar{\mathbf{b}}_i$  amplitude koordinatnih funkcija, matematički se model konstrukcije aproksimira numeričkim. Na taj se način realna konstrukcija aproksimira diskretnim sustavom. Posebno prikladna metoda za provedbu diskretizacije modela je metoda konačnih elemenata (MKE). Diskretizacija se provodi tako da se konstrukcija podijeli na potpodručja, a koordinatne funkcije se definiraju lokalno, odnosno na način da su različite od nule samo nad pripadnim potpodručjem. Izravna posljedica toga je da amplitude koordinatnih funkcija  $\bar{\mathbf{b}}_i$  dobivaju fizikalni smisao u vidu pomaka čvorova modela definiranih na spojevima konačnih elemenata. Diskretizacija polja pomaka tada je oblika:

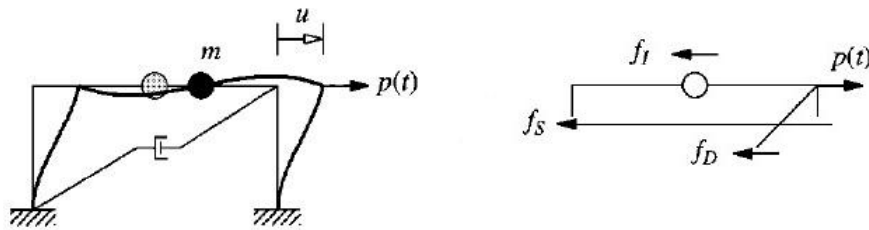
$$\mathbf{u} \approx \tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{u}}_i, \quad (1)$$

gdje je  $\bar{\mathbf{u}}_i$  vektor pomaka čvorova modela. Na taj je način neizmjeran broj stupnjeva slobode matematičkog modela aproksimiran konačnim brojem stupnjeva slobode u diskretnim točkama numeričkog modela.

### 2.1.2. Uvjet dinamičke ravnoteže

Definiranje matematičkog modela, pomoću kojega se idealizira fizikalni problem, obuhvaća postavljanje odgovarajućih jednadžbi kojima se model opisuje. U dinamici konstrukcija je od interesa uspostaviti vezu između djelovanja na konstrukciju  $\mathbf{p}(t)$  i odgovora konstrukcije na danu pobudu, odnosno pomaka konstrukcije  $\mathbf{u}(t)$  uslijed djelovanja vremenski promjenjivog opterećenja.

Jednadžbe gibanja dinamičkog sustava (slika 3. lijevo) moguće je, između ostaloga, formulirati postavljanjem uvjeta dinamičke ravnoteže (d'Alembertov princip). Koristeći *fiktivnu* inercijalnu silu, postavljaju se uvjeti ravnoteže sustava u gibanju. Na slici 3. desno, prikazano je slobodno tijelo (*engl. free-body diagram*) u trenutku  $t$  s efektivnim silama koje na njega djeluju. Općenito se u točki  $i$  javljaju četiri različite vrste sila:



Slika 3.: Dinamički sustav (lijevo) i slobodno tijelo (desno)

opterećenje sustava  $p_i(t)$  te sile uslijed gibanja sustava, odnosno, inercijalna sila  $f_{Ii}$ , sila uslijed prigušenja  $f_{Di}$  te sila uslijed krutosti  $f_{Si}$ . Stoga se za svaki stupanj slobode može postaviti jednadžba oblika

$$f_{Ii} + f_{Di} + f_{Si} = p_i(t), \quad i = 1, 2, \dots$$

odnosno zapisano koristeći matričnu simboliku,

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t) \quad (2)$$

što predstavlja uvjet dinamičke ravnoteže sustava s više stupnjeva slobode.

Svaka se od sila koje nastaju uslijed gibanja sustava može prikazati pomoću prikladnog skupa koeficijenata. Primjerice, sila uslijed krutosti se, uz pretpostavku linearno elastičnog modela, može zapisati kao

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k} \mathbf{u}, \quad (3)$$

gdje je  $\mathbf{k}$  *matrica (materijalne) krutosti* konstrukcije, a  $\mathbf{u}$  vektor pomaka konstrukcije. Elementi matrice  $\mathbf{k}$  su koeficijenti krutosti  $k_{ij}$  čija je definicija:

$k_{ij}$  - sila na mjestu  $i$  u smjeru stupnja slobode  $i$  uslijed  
jediničnog pomaka na mjestu  $i$  u smjeru stupnja  
slobode  $j$

Ovisno o razmatranoj konstrukciji, utjecaj uzdužnih (membranskih) sila na krutost može biti značajan. U tom slučaju se nelinearni utjecaj membranskih sila ( $P - \delta$  efekt) može obuhvatiti pribrajanjem rezultirajućih sila lijevoj strani jednadžbe (2)

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S + \mathbf{f}_G = \mathbf{p}(t), \quad (4)$$

gdje je  $\mathbf{f}_G$  vektor sila uslijed *geometrijske* krutosti konstrukcije. Taj je član, analogno članu uslijed materijalne krutosti, moguće zapisati na način

$$\mathbf{f}_G = \mathbf{k}_G \mathbf{u}, \quad (5)$$

gdje je  $\mathbf{k}_G$  *matrica geometrijske krutosti* konstrukcije. Elementi matrice  $\mathbf{k}_G$  su koeficijenti geometrijske krutosti  $k_{Gij}$  čija je definicija:

$k_{Gij}$  - sila na mjestu  $i$  u smjeru stupnja slobode  $i$   
prouzročena *membranskim silama* u konstrukciji,  
a uslijed jediničnog pomaka na mjestu  $i$  u smjeru  
stupnja slobode  $j$

U slučaju neelastičnog modela, sila  $\mathbf{f}_S$  ovisi o povijesti i smjeru deformacija. Jednadžba (3) tada postaje

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{f}_S(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}). \quad (6)$$

Ukoliko se pretpostavi viskozni model prigušenja, odnosno da prigušenje ovisi o vektoru brzine  $\dot{\mathbf{u}}$ , sila  $\mathbf{f}_D$  se može zapisati kao

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}, \quad (7)$$

gdje je  $\mathbf{c}$  *matrica prigušenja konstrukcije* (za definirane stupnjeve slobode). Elementi matrice  $\mathbf{c}$  su, po analogiji s matricom krutosti, koeficijenti prigušenja  $c_{ij}$  koji kvantificiraju disipaciju energije sustava uslijed prigušenja, a čija je definicija:

$c_{ij}$  - sila na mjestu  $i$  u smjeru stupnja slobode  $i$  usli-  
jed *jedinične brzine* na mjestu  $i$  u smjeru stupnja  
slobode  $j$

Potpuno analogno silama uslijed krutosti i prigušenja konstrukcije moguće je formulirati izraz za sile uslijed tromosti konstrukcije. Tromost je s inercijalnim silama vezana preko ubrzanja  $\ddot{\mathbf{u}}$  i odgovarajućih koeficijenata proporcionalnosti, odnosno

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}, \quad (8)$$

gdje je  $\mathbf{m}$  *matrica mase konstrukcije*. Elementi matrice  $\mathbf{m}$  su koeficijenti tromosti mase (generalizirana masa)  $m_{ij}$  čija je definicija:

$m_{ij}$  - sila na mjestu  $i$  u smjeru stupnja slobode  $i$  uslijed  
jediničnog ubrzanja na mjestu  $i$  u smjeru stupnja  
slobode  $j$

Uvrštavanjem jednadžbi (6),(7) i (8) u jednadžbu (2) dobiva se jednadžba dinamičke ravnoteže sustava uzimajući u obzir prihvaćene idealizacije:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{f}_S(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) = \mathbf{p}(t) \quad (9)$$

Izraz (9) predstavlja jednadžbu gibanja konstrukcije pod djelovanjem dinamičkog opterećenja. Time je dinamički sustav, odnosno odgovor konstrukcije na dinamičku pobudu, u potpunosti definiran.

### 3. Procjena matrica svojstava konstrukcije

Za formuliranje modela konstrukcije pod djelovanjem dinamičke pobude nužno je definirati, odnosno na odgovarajući način *procijeniti* matrice svojstava konstrukcije – matricu krutosti  $\mathbf{k}$ , matricu prigušenja  $\mathbf{c}$  te matricu mase  $\mathbf{m}$ . Gdje je to prikladno, koristiti će se formulacija prema metodi konačnih elemenata (energetski pristup).

#### 3.1. Matrica krutosti

Matricu krutosti moguće je formulirati polazeći od funkcionala energije matematičkog modela. Funkcional energije *elastičnog* tijela je oblika:

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\bar{\Omega} - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \mathbf{q} d\Gamma, \quad \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma. \quad (10)$$

Prvi član predstavlja potencijalnu energiju deformacija, a drugi i treći član potencijal volumenskih i površinskih sila. To je općeniti izraz bez pretpostavki na vezu polja  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  i  $\mathbf{u}$  – pretpostavka je *elastičnost* modela, odnosno da nema gubitaka energije pri deformiranju.

Konstitutivni zakon za linearno elastično tijelo s početnim deformacijama  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  (napreznja tada izaziva razlika između stvarnih i početnih deformacija) i početnim napreznjima  $\boldsymbol{\sigma}_0$  glasi [2]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + (\boldsymbol{\sigma}_0), \quad (11)$$

gdje je  $\mathbf{D}$  matrica konstanta elastičnosti. Usvajajući pretpostavku o iščezavanju početnih deformacija ( $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{0}$ ), razmatra se prirast energije sustava u odnosu na nedeformiranu početnu konfiguraciju. Time se, naravno, ne isključuje mogućnost postojanja početnih napreznja. Uvrštavajući jednadžbu (11) u izraz (10), a pritom uvažavajući činjenicu da se radi o linearno elastičnom modelu tijela i da početna napreznja djeluju u punom iznosu slijedi:

$$\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\bar{\Omega} - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \mathbf{q} d\Gamma \quad (12)$$



Izraz (12) predstavlja funkcional energije *linearne elastičnog* matematičkog modela.

Kako bi se funkcional mogao zapisati u ovisnosti o jednom nepoznatom polju, potrebno je uvesti pretpostavku o vezi polja naprezanja i polja pomaka. Uz vektorske oznake za polje deformacija

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} ]^T \quad (13)$$

i polje pomaka

$$\mathbf{u} = [ u \quad v \quad w ]^T, \quad (14)$$

veza polja pomaka i deformacija može se zapisati u obliku:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{S}\mathbf{u} + \mathcal{S}_n\mathbf{u} \quad (15)$$

gdje su  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{S}_n$  diferencijalni operatori. Prvi član u jednadžbi (15) predstavlja linearni utjecaj, odnosno *linearne* komponente Cauchyjevog tenzora deformacija. Drugi član obuhvaća nelinearni doprinos, pa jednadžba (15) predstavlja komponente *nelinearnog* Green-Lagrangeovog tenzora konačnih deformacija. Jednadžba (15) u raspisanome obliku glasi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{,x}^T \mathbf{u}_{,x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{,y}^T \mathbf{u}_{,y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{,z}^T \mathbf{u}_{,z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{,x}^T \mathbf{u}_{,y} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{,y}^T \mathbf{u}_{,x}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{,x}^T \mathbf{u}_{,z} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{,z}^T \mathbf{u}_{,x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{,y}^T \mathbf{u}_{,z} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{,z}^T \mathbf{u}_{,y}. \end{aligned} \quad (16)$$

U jednadžbi (16) doprinos nelinearnih članova zapisan je pomoću umnožaka vektora definiranih kao:

$$\mathbf{u}_{,x} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial x \\ \partial w / \partial x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{,y} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{,z} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial z \\ \partial v / \partial z \\ \partial w / \partial z \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Uvrštavajući jednadžbu (15) u (12) dobiva se izraz za funkcional energije ovisan samo o polju pomaka:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathcal{S}^T \mathbf{D} \mathcal{S} \mathbf{u} d\bar{\Omega} + \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathcal{S}_n^T \mathbf{D} \mathcal{S}_n \mathbf{u} d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathcal{S}_n^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\bar{\Omega} \\ &\quad + \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathcal{S}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\bar{\Omega} - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \mathbf{q} d\Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

Izrazom (18) obuhvaćeni su doprinosi nelinearnih članova tenzora konačnih deformacija funkcionalu energije matematičkog modela.

Uvodeći pretpostavku da početna naprezanja  $\boldsymbol{\sigma}_0$  ostaju *konstantna* prilikom nastanka deformacija  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , implicitno se uvodi pretpostavka o mali deformacijama. Odnosno, budući da naprezanja uslijed početnog opterećenja ne ovise o naprezanjima uslijed naknadno nametnutih opterećenja, implicira se mogućnost primjene principa superpozicije, to jest potpuna linearizacija modela. Uslijed toga iščezava drugi pribrojnik u jednadžbi (18). Međutim, potpunom linearizacijom problema nije moguće uzeti u obzir doprinos početnih naprezanja funkcionalu energije budući da bi to uvjetovalo iščezavanje i trećeg pribrojnika u jednadžbi (18). Zadržavanjem tog člana u biti je formuliran proračun prema teoriji drugog reda – uvjeti ravnoteže postavljaju se na deformiranom sistemu uz linearnu vezu naprezanja i deformacija (linearizacija nelinearnosti).

Sljedeći korak u procjeni krutosti konstrukcije je diskretizacija. Uvrštavanjem jednadžbe (1) u jednadžbu (18), uz uvažavanje pritom pretpostavljenih aproksimacija, izraz (18) prelazi u diskretni oblik funkcionala energije, odnosno u funkcional energije *numeričkog* modela. Minimizacijom dobivenog funkcionala po diskretnim nepoznatim parametrima (pomaci čvorova), a uslijed svojstva stacionarnosti prema teoremu o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije, dobiva se sustav jednadžbi ravnoteže oblika:

$$\underbrace{\left( \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\bar{\Omega} \right)}_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \underbrace{\left( \int_{\bar{\Omega}} \tilde{\mathbf{u}}^T \mathcal{S}_n^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\bar{\Omega} \right)}_{\Pi_{\boldsymbol{\sigma}}} + \underbrace{\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\bar{\Omega} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\Gamma}_{\mathbf{F}} = \mathbf{0}, \quad (19)$$

gdje je  $\mathbf{B} = \mathcal{S}\mathbf{N}$  matrica koja sadrži derivacije koordinatnih funkcija. Vektor  $\mathbf{F}$  predstavlja vektor opterećenja, a  $\mathbf{k}$  matricu materijalne krutosti čiji su elementi:

$$\mathbf{k}_{i,j} = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\bar{\Omega}, \quad (20)$$

koeficijenti materijalne krutosti.

Drugi pribrojnik u jednadžbi (19) zahtijeva dodatno pojašnjenje. Član  $\Pi_{\boldsymbol{\sigma}}$  predstavlja doprinos početnih naprezanja potencijalnoj energiji deformacija što je, korištenjem izraza (16), moguće zapisati u obliku:

$$\Pi_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{,x}^T & \tilde{\mathbf{u}}_{,y}^T & \tilde{\mathbf{u}}_{,z}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{xx} & \mathbf{s}_{xy} & \mathbf{s}_{xz} \\ \mathbf{s}_{yx} & \mathbf{s}_{yy} & \mathbf{s}_{yz} \\ \mathbf{s}_{zx} & \mathbf{s}_{zy} & \mathbf{s}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{,x} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{,y} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{,z} \end{bmatrix} d\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^T \underbrace{\left( \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} d\bar{\Omega} \right)}_{\mathbf{k}_G} \bar{\mathbf{u}}, \quad (21)$$

gdje su  $\mathbf{s}_{ij}$  podmatrice reda 3 koje sadrže početna naprezanja:

$$\mathbf{s}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ij} \end{bmatrix}_0 \quad (22)$$

Iz jednadžbe (21) proizlazi izraz za matricu geometrijske krutosti  $\mathbf{k}_G$  čiji su elementi:

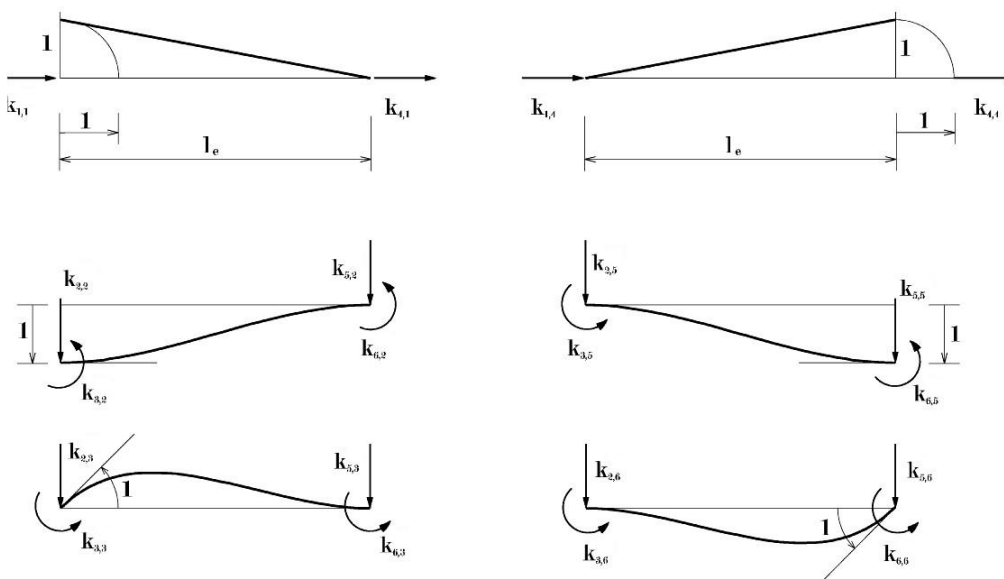
$$\mathbf{k}_{G^{i,j}} = \int_{\Omega} \mathbf{G}_i^T \mathbf{S} \mathbf{G}_j d\bar{\Omega}, \quad (23)$$

koeficijenti geometrijske krutosti, gdje matrica  $\mathbf{G}$  sadrži odgovarajuće derivacije koordinatnih funkcija. Pritom se za proračun geometrijske krutosti ne moraju koristiti iste koordinatne funkcije kao pri proračunu materijalne krutosti – time se donosi odluka o načinu na koji će se aproksimirati utjecaj geometrijske krutosti. Izraz za proračun utjecaja geometrijske krutosti (23) je lineariziran i ograničen na male pomake.

Potrebno je istaknuti da geometrijska krutost postoji u svim konstrukcijama. Međutim, ona postaje značajna samo kada je njezin utjecaj velik u odnosu na materijalnu krutost konstrukcije.

### 3.1.1. Štapni element

Razmatrati će se ravni štap s tri stupnja slobode po čvoru: dvije translacije i jedna rotacija. Koordinatne funkcije dobivene rješavanjem odgovarajućih homogenih diferencijalnih jednadžbi ravnoteže ravnog štapa konstantnog poprečnog presjeka prikazane su na slici 4.



Slika 4.: Koordinatne funkcije štapa s tri stupnja slobode po čvoru

Vektor pomaka čvorova je oblika:

$$\bar{\mathbf{u}} = \left[ \bar{u}_1 \quad \bar{w}_1 \quad \bar{\varphi}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{w}_2 \quad \bar{\varphi}_2 \right]^T, \quad (24)$$

a vektor koordinatnih funkcija:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 & \varphi_5 & \varphi_6 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Članovi matrice materijalne krutosti određuju se prema izrazu (20) koji u slučaju korištenja Bernoulli–Navierovog modela štapa prelazi u (prema [3])

$$k_{i,j} = \int_0^L EA\varphi'_i\varphi'_j dx \quad (26)$$

za uzdužni smjer, te

$$k_{i,j} = \int_0^L EI_y\varphi''_i\varphi''_j dx \quad (27)$$

za poprečni smjer. Matrica je krutosti takvog štapa uz  $EI_y = \text{const.}$  i  $EA = \text{const.}$  oblika:

$$\mathbf{k} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_y}{L^2} & \frac{6I_y}{L} & 0 & -\frac{12I_y}{L^2} & \frac{6I_y}{L} \\ 0 & \frac{6I_y}{L} & 4I_y & 0 & -\frac{6I_y}{L} & 2I_y \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I_y}{L^2} & -\frac{6I_y}{L} & 0 & \frac{12I_y}{L^2} & -\frac{6I_y}{L} \\ 0 & \frac{6I_y}{L} & 2I_y & 0 & -\frac{6I_y}{L} & 4I_y \end{bmatrix} \quad (28)$$

Članovi matrice geometrijske krutosti izvode se prema izrazu (23). Pritom se matrica  $\mathbf{S}$  svodi na uzdužno naprezanje  $\sigma_{x0}$ , a matrica  $\mathbf{G}$ , ukoliko se koriste iste koordinatne funkcije kao pri izvodu matrice materijalne krutosti, prelazi u

$$\mathbf{G} = \mathbf{N}_{,x} = \begin{bmatrix} \varphi'_1 & 0 & 0 & \varphi'_4 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'_2 & \varphi'_3 & 0 & \varphi'_5 & \varphi'_6 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Matrica je geometrijske krutosti uz  $\sigma_{x0} = \text{const.}$  oblika:

$$\mathbf{k}_G = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (30)$$

pri čemu je  $P = \sigma_{x0}A$ . Budući da su i matrica  $\mathbf{k}$  i matrica  $\mathbf{k}_G$  vezane uz isti vektor pomaka, moguće je zapisati u obliku:

$$\widehat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \mathbf{k}_G. \quad (31)$$

gdje je  $\widehat{\mathbf{k}}$  ukupna matrica krutosti elementa.

U izrazu (30) je vidljivo da postoje koeficijenti geometrijske krutosti vezani uz stupnjeve slobode štapa u uzdužnome smjeru. Budući da je  $AE \gg P$  u svim praktičnim problemima ([4]), doprinos je geometrijske krutosti u uzdužnom smjeru zanemariv. Primjerice, u slučaju pravokutnog stupa opterećenog eulerovom kritičnom silom izvijanja obostrano upetog štapa, uz  $h/L = 1/5$  dobivaju se slijedeće vrijednosti:

$$\frac{P}{AE} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{h}{L}\right)^2 \approx -0.13; \quad \frac{k_{G2,2}}{k_{2,2}} = \frac{2\pi^2}{5} \approx -3.95; \quad \frac{k_{G3,3}}{k_{3,3}} = \frac{2\pi^2}{15} \approx -1.32$$

Ako se kao kriterij uzme iščezavanje člana  $\hat{k}_{2,2} = k_{2,2} + k_{G2,2}$  ukupne matrice krutosti, uz  $h/L = 1/5$  dobiva se:

$$\frac{P}{AE} = \frac{5}{6} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \approx -0.03$$

Iz ovih primjera se vidi opravdanost zanemarivanja doprinosa geometrijske krutosti krutosti u uzdužnom smjeru. Time prvi i četvrti redak i stupac matrice  $\mathbf{k}_G$  postaju ispunjeni nulama.

### 3.2. Matrica prigušenja

Postojanje prigušenja u konstrukciji je empirijski evidentna činjenica – pobuđena konstrukcija, po prestanku pobude, nakon nekog konačnog vremena prestaje oscilirati. Opadanje amplitude odgovora konstrukcije upućuje na disipaciju energije sustava pri osciliranju.

U realnim konstrukcijama su prisutni brojni mehanizmi disipacije energije pri čemu oni djeluju istovremeno. Neke od pojava koje uzrokuju prigušenje su: toplinski učinci uslijed unutarnjeg trenja u materijalu, otpor zraka pri gibanju, neelastično ponašanje materijala, trenje u čeličnim spojevima, otvaranje i zatvaranje mikropukotina u betonu, trenje između konstruktivnih i nosivih elemenata, radijacijsko prigušenje uslijed međudjelovanja temeljnog tla i konstrukcije. Pritom posebnu skupinu čine uređaji (prigušivači) koji se ugrađuju na konstrukciju u svrhu prigušenja.

Uslijed kompleksnosti pojava koje uzrokuju prigušenje, praktično je nemoguće identificirati i matematički opisati svaki od mehanizama disipacije energije u realnoj konstrukciji. Iz navedenoga proizlazi nužnost idealizacije mehanizama prigušenja sa svrhom odgovarajućeg obuhvaćanja prigušenja matematičkim modelom.

#### 3.2.1. Model viskoznog prigušenja

Uobičajeni pristup modeliranju konstruktivnog prigušenja je korištenjem modela viskoznog prigušenja. Sile uslijed viskoznog prigušenja funkcija su vektora brzine  $\dot{\mathbf{u}}$ . U slučaju *linearnog* viskoznog modela sile uslijed prigušenja dane su jednadžbom (7):

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}},$$

gdje je  $\mathbf{c}$  matrica prigušenja konstrukcije. Kako se viskoznim prigušenjem modelira kombinirani utjecaj svih mehanizama disipacije energije u konstrukciji, kriterij za procjenu koeficijenata prigušenja je disipacija energije – energija disipirana kroz viskozno prigušenje treba biti ekvivalentna energiji disipiranoj kroz sve mehanizme disipacije prisutne u stvarnoj konstrukciji.

Ovako definiran model prigušenja namijenjen je obuhvaćanju disipacije energije u linearno elastičnom području ponašanja konstrukcije. Disipacija energije uslijed tečenja

uzima se u obzir radnim dijagramom, to jest nelinearnom vezom između pomaka i sile uslijed krutosti. Utjecaj prigušivača se također ne obuhvaća viskoznim prigušenjem. Budući da se kod prigušivača radi o konstrukciji nametnutome prigušenju, mehanizam disipacije je poznat pa ih se stoga modelira odgovarajućim nelinearnim elementima.

### 3.2.2. Procjena koeficijenata prigušenja

Za razliku od elemenata matrice krutosti, koeficijente prigušenja  $c_{ij}$  nije moguće procijeniti na temelju materijalnih i geometrijskih svojstava konstrukcije i konstruktivnih elemenata. Razlog tomu leži u kompleksnosti pojava koje uzrokuju prigušenje u stvarnoj konstrukciji. Stoga je za njihovu procjenu nužan eksperimentalni pristup pri čemu, općenito gledano, postoje dvije mogućnosti:

- analiza zapisa odgovora konstrukcije na ispitivanjem nametnutu pobudu
  - logaritamski dekrement
  - rezonancijski pokus (*engl. resonant amplification method*)
  - korištenje frekvencijske funkcije odziva (*engl. half-power, band-width method*)
  - procjena gubitka energije po ciklusu pri rezonanciji (*engl. resonance energy loss per cycle method*)
- analiza zapisa odgovora konstrukcije uslijed zapisane potresne pobude

Pri analizi zapisa odgovora konstrukcije na ispitivanjem nametnutu pobudu koristi se teorija slobodnih oscilacija te teorija prisilnih oscilacija uslijed harmonijske pobude. Pri analizi zapisa odgovora konstrukcije uslijed zapisane potresne pobude koristi se metoda identifikacije sistema (*engl. system identification procedures*).

#### Logaritamski dekrement

Jednadžba gibanja sustava s jednim stupnjem slobode može se zapisati u obliku:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = \begin{cases} 0, & \text{slobodne oscilacije} \\ \frac{p_0}{m}\sin\omega t, & \text{harmonijska pobuda} \end{cases} \quad (32)$$

gdje je  $\zeta$  koeficijent relativnog prigušenja,  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  vlastita frekvencija,  $p_0$  amplituda harmonijske pobude, a  $\omega$  frekvencija pobude.

Koeficijenti prigušenja uvijek se definiraju posredno i to korištenjem koeficijenta relativnog prigušenja. Koeficijent relativnog prigušenja je u slučaju sustava s jednim stupnjem slobode definiran kao:

$$\zeta = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{c}{2m\omega_n}, \quad (33)$$

gdje je  $c_{kr}$  kritični koeficijent prigušenja, a  $c$  koeficijent viskoznog prigušenja. Kritični koeficijent prigušenja  $c_{kr}$  predstavlja najmanji iznos viskoznog prigušenja koji sprečava titranje (odgovor konstrukcije nije oscilatoran). Koeficijent  $c$  je mjera utrošene energije u slobodnom ili prisilnom harmonijskom titranju.

Koeficijent relativnog prigušenja može se odrediti iz omjera iznosa pomaka nakon  $j$  ciklusa slobodnih oscilacija. Prema [5] vrijedi:

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \frac{u_k}{u_{k+j}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (34)$$

gdje je  $\delta$  logaritamski dekrement. Za mali  $\zeta$  vrijedi  $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$  ( $\zeta < 0.2$ , što vrijedi za razmatrane konstrukcije) pa iz (34) slijedi:

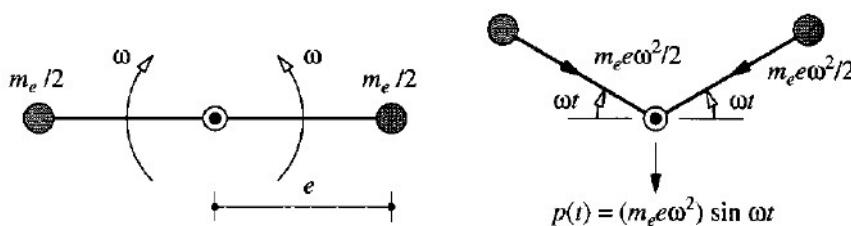
$$\zeta \approx \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_k}{u_{k+j}} = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{\ddot{u}_k}{\ddot{u}_{k+j}} \quad (35)$$

Izraz (35) vrijedi za slabo prigušene sustave, pri čemu je definicija preko ubrzanja s praktičnog stajališta prikladnija jer je lakše mjeriti ubrzanje nego pomak konstrukcije.

Eksperimentalno je ustanovljeno da je koeficijent relativnog prigušenja određen na ovaj način ovisan o amplitudi slobodnog titranja. Općenito se  $\zeta$  smanjuje sa smanjivanjem amplitude slobodnog titranja. Stoga je potreban oprez pri korištenju ovim putem dobivenih vrijednosti relativnog prigušenja u dinamičkom proračunu konstrukcija.

### Rezonancijski pokus

Za harmonijsku pobudu građevina koristi se vibracijski uređaj. Silu pobude proizvodi rotiranje ekscentrično položenih masa frekvencijom  $\omega$ . Amplituda pobude je tada ovisna o frekvenciji pobude  $p_0 = m_e e \omega^2$ , gdje je  $e$  iznos ekscentriciteta, a  $m_e$  iznos ekscentrično položene mase (slika 5.).



Slika 5.: Vibracijski uređaj: početni položaj (lijevo) i sile u trenutku  $t$  (desno)

Za slabo prigušene sustave pri pobudi vlastitom frekvencijom vrijedi (prema [5]):

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{(u_{st})_0}{(u_0)_{\omega=\omega_n}}, \quad (36)$$

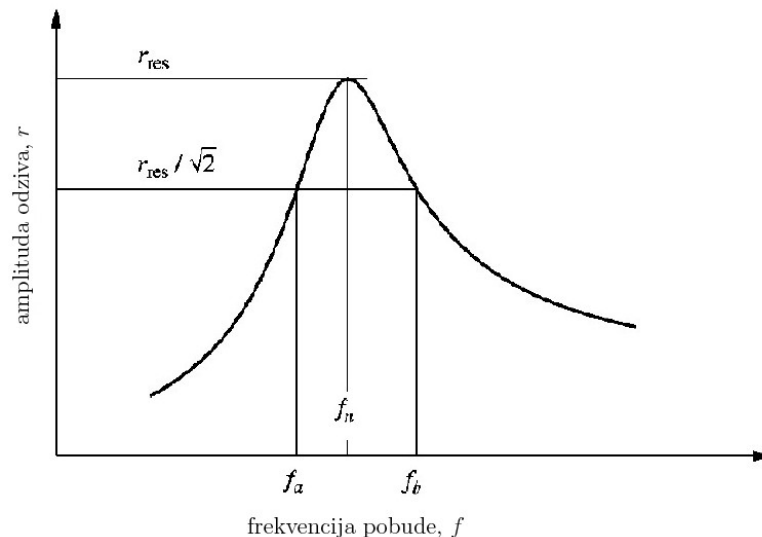
gdje je  $(u_0)_{\omega=\omega_n}$  amplituda pomaka nakon iščezavanja prolaznog dijela gibanja, a  $(u_{st})_0 = p_{0,vrš}/k$ , pri čemu je  $p_{0,vrš}$  amplituda pobude pri rezonanciji.

Vrijednosti  $(u_{st})_0$  i  $u_0$  određuju se pokusom. Budući da rezonantna frekvencija nije unaprijed poznata (strogo gledano,  $\omega_n$  nije rezonantna frekvencija, no za slabo prigušene sustave je to zadovoljavajuća aproksimacija) potrebno je mjeriti i fazni kut  $\phi$ . Postupno se povećava  $\omega$  dok se ne postigne  $\phi = 90^\circ$ , tada je  $\omega = \omega_n$ . Kako se najčešće mjeri ubrzanje, amplituda pomaka se određuje iz  $u_0 = \ddot{u}_0/\omega^2$ . Pri određivanju  $(u_{st})_0$  javlja se problem na koji način prouzročiti statičku amplitudu  $p_{0, \text{vrš}}$  [6].

Kao što je već napomenuto, u realnim konstrukcijama je koeficijent relativnog prigušenja često ovisan o amplitudi. U ovom slučaju, vrijednost  $\zeta$  određena pomoću izraza (36) ovisi o amplitudi  $p_{0, \text{vrš}}$  harmonijske prisile. Ovu činjenicu je potrebno imati na umu pri definiranju prikladne vrijednosti koeficijenta  $\zeta$  za potrebe dinamičke analize.

### Korištenje frekvencijske funkcije odziva

Potrebu određivanja  $(u_{st})_0$  moguće je izbjeći korištenjem frekvencijske funkcije odziva (slika 6.). Frekvencijska funkcija odziva određuje se variranjem pobude i mjerenjem pri-



Slika 6.: Određivanje prigušenja pomoću frekvencijske funkcije odziva

padnih amplituda ubrzanja  $\ddot{u}_0$  nakon iščezavanja prolaznog dijela gibanja. Oko tjemena krivulje je radi pouzdanosti rezultata potrebno progustiti mjerenja. Korištenjem vibracijskog uređaja pri mjerenju dobiva se krivulja odziva za amplitudu prisile koja je proporcionalna kvadratu frekvencije prisile ( $p_0 \sim \omega^2$ ). Dijeljenjem te krivulje s  $\omega^2$  ( $\omega^4$ ) dobiva se krivulja  $R_a$  ( $R_d$ ) za  $p_0 = \text{const}$ .  $R_a$  i  $R_d$  su krivulje amplituda odziva za ubrzanja, odnosno pomake. Prema [5] vrijedi:

$$\zeta = \frac{f_b - f_a}{2f_n}, \quad (37)$$

gdje su  $f_a$  i  $f_b$  frekvencije pobude za koje je amplituda odziva jednaka amplitudi odziva pri rezonanciji pomnoženoj s  $1/\sqrt{2}$  (slika 6.). Izraz (37) je kod sustava s malim prigušenjem primjenjiv na frekvencijske funkcije odziva  $R_d$ ,  $R_v$  i  $R_a$ .



### Gubitak energije po ciklusu pri rezonanciji

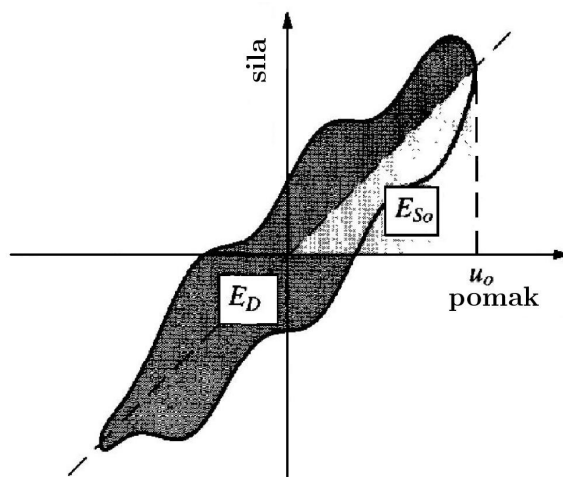
Koeficijent relativnog prigušenja moguće je odrediti i iz razmatranja energije sustava. Disipacija energije uslijed viskoznog prigušenja u jednom ciklusu prisilnog harmonijskog titranja iznosi:

$$\begin{aligned} E_{D,\text{visk}} &= \int f_D du = \int_0^{2\pi/\omega} (c\dot{u})\dot{u} dt = c \int_0^{2\pi/\omega} [\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)]^2 dt \\ &= \pi(c\omega u_0)u_0 = 4\pi \zeta \frac{\omega}{\omega_n} \underbrace{(ku_0^2/2)}_{E_{S_0}} \end{aligned} \quad (38)$$

Energija disipirana u realnoj konstrukciji jednaka je površini petlje histereze  $E_D$  u dijagramu sila–pomak određenom eksperimentalno pri cikličkom opterećenju uz amplitudu pomaka  $u_0$  (slika 7.). Izjednačavanjem te energije s energijom disipiranom uslijed viskoznog prigušenja slijedi:

$$\zeta = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\omega/\omega_n} \frac{E_D}{E_{S_0}}, \quad (39)$$

gdje je  $E_{S_0} = ku_0^2/2$  energija deformacija određena pomoću krutosti  $k$  utvrđene eksperimentom.

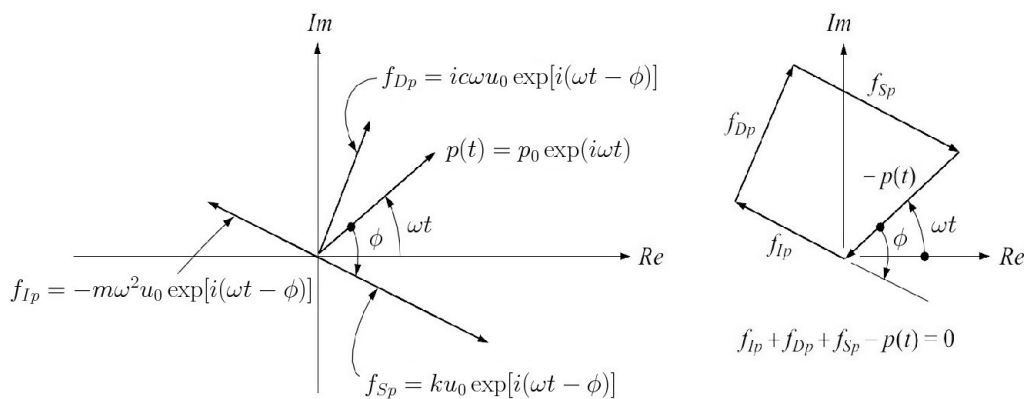


Slika 7.: Eksperimentalno utvrđena ovisnost sila–pomak

Eksperimentalno određivanje krivulje sila–pomak, a time i  $E_D$ , trebalo bi provesti za slučaj  $\omega = \omega_n$ . Tada jednadžba (39) postaje:

$$\zeta = \frac{1}{4\pi} \frac{E_D}{E_{S_0}} \quad (40)$$

U tom slučaju dovoljno je eksperimentalno utvrđivanje krutosti konstrukcije te nije potrebna procjena mase konstrukcije (izraz (40) ne ovisi o  $\omega_n$ ). Također, u rezonantnom području odgovor konstrukcije ponajprije je uvjetovan prigušenjem u sustavu. To se može uočiti i iz prikaza komponenti sile odgovora konstrukcije u kompleksnoj ravnini (slika 8.). Za slučaj kada je  $\phi = 90^\circ$  ( $\omega = \omega_n$ ) sila  $f_{Dp}$  u potpunosti uravnotežuje nametnuto opterećenje  $p$ .



Slika 8.: Komponente odgovora konstrukcije u kompleksnoj ravni i poligon sila

Ovaj postupak se može primijeniti i na sustave s više stupnjeva slobode. Koeficijent relativnog prigušenja  $\zeta_n$  pridružuje se  $n$ -tom vlastitom obliku na način da je energija disipirana kroz viskozno prigušenje jednaka energiji disipiranoj u stvarnoj konstrukciji uslijed osciliranja u  $n$ -tom vlastitom obliku pri pripadnoj vlastitoj frekvenciji.

Iz jednadžbe (38) je vidljivo da energija disipirana uslijed viskoznog prigušenja, uz  $u_0 = \text{const.}$ , ovisi o frekvenciji prisile  $\omega$ . To nije u skladu s rezultatima ispitivanja koji upućuju na to da je gubitak energije po ciklusu oscilacija u biti neovisan o frekvenciji prisile. Vibracijska ispitivanja konstrukcija također pokazuju da je koeficijent relativnog prigušenja približno jednak za sve vlastite oblike i frekvencije. Razlog tomu leži u činjenici da prigušenje u konstrukciji nije viskozno, već ono proizlazi iz unutarnjeg trenja i lokalnog plastičnog deformiranja koje je prisutno čak i u slučaju kada je globalno ponašanje konstrukcije elastično [7]. Tu činjenicu moguće je uzeti u obzir modelom histereznog prigušenja (*engl. rate-independent damping*).

Histerežno prigušenje jednostavno je definirati u slučaju harmonijske pobude, pri čemu se analiza tada najčešće vrši u frekventnom području. Poteškoće se javljaju pri analizi odgovora sustava u slučaju općenite pobude  $p(t)$  i pri prelasku iz frekvencijske u vremensku domenu. No, modeliranje histereznog prigušenja viskoznim (ukoliko se koeficijent relativnog prigušenja  $\zeta$  odredi prema (40), pri čemu  $E_D$  predstavlja disipaciju energije u slučaju histereznog prigušenja) predstavlja zadovoljavajuću aproksimaciju [8].

### Analiza zapisa odgovora konstrukcije uslijed zapisane potresne pobude

Procjenu svojstava konstrukcije moguće je izvršiti i analizom zapisa odgovora konstrukcije na zapisanu potresnu pobudu. Za poznatu pobudu i odgovor potrebno je pronaći pripadna svojstva sustava:

$$\mathfrak{A}[\mathbf{u}(t)] = \mathbf{p}(t) \quad \mathfrak{A} = ?,$$

gdje je  $\mathfrak{A}$  diferencijalni operator. U tu svrhu koristi se metoda identifikacije sistema pri čemu su moguće različite formulacije ovisno o razmatranom problemu.

Za primjenu metode identifikacije nužno je raspolaganje s korisnim podacima o odgovorima konstrukcija. Radi prikupljanja podataka potrebno je konstrukciju opremiti odgovarajućom opremom (akcelerometri) koja, za bilježene seizmičke pobude i pripadnog odgovora, mora u principu biti permanentno postavljena. Primjena opisanog postupka je stoga skupa i spora.

Iako postoji relativno mnogo podataka nisu svi prikladni za seizmički proračun. Slabe pobude (pobuđivač ili slabi potres) rezultiraju vrijednostima  $\zeta$  manjim od onih koje se očekuju pri većim amplitudama odgovora konstrukcije. S druge strane, snažne pobude rezultiraju vrijednostima  $\zeta$  koje sadrže i utjecaj trošenja energije uslijed plastičnog popuštanja konstrukcije (utjecaj tečenja se, kao što je već napomenuto, uzima u obzir radnim dijagramom  $\mathbf{f}_S\text{-}\mathbf{u}$ ). Najkorisniji podaci stoga se dobivaju iz jakih trešnji u elastičnom području konstrukcije.

### 3.2.3. Preporučene vrijednosti $\zeta$

Pri projektiranju konstrukcije prigušenje je moguće uzeti u obzir jedino procjenom koeficijenta relativnog prigušenja na temelju izmjerenih podataka o sličnim konstrukcijama. Pritom problem proizlazi iz činjenice da je korisnih podataka (jake trešnje u elastičnom području) malo, a posebno s aspekta različitih tipova konstrukcija (zgrade, mostovi, brane, itd.) te primijenjenih građevnih materijala (armirani beton, prednapeti beton, čelik, drvo, itd.). U nedostatku podataka mogu se koristiti preporuke dane u tablici 2.

Tablica 2.: Preporučeni iznosi koeficijenta relativnog prigušenja [8]

RAZINA NAPREZANJA	VRSTA I STANJE KONSTRUKCIJE	$\zeta$ [%]
radno naprezanje: ne više od polovine granice tečenja	vareni čelik, prednapeti beton, dobro armirani beton sa sitnim pukotinama	2 – 3
	armirani beton sa značajnim pukotinama	3 – 5
	vijčani i/ili zakovani spojevi u čeliku, vijčani ili čavlni spojevi u drvetu	5 – 7
radno naprezanje: malo ispod ili na granici tečenja	vareni čelik, prednapeti beton (bez potpunog gubitka prednapona)	5 – 7
	prednapeti beton s potpunim gubitkom prednapona, armirani beton	7 – 10
	vijčani i/ili zakovani spojevi u čeliku, vijčani spojevi u drvetu	10 – 15
	čavlni spojevi u drvetu	15 – 20

Kao dodatak tablici 2. mogu se koristiti preporučene vrijednosti prigušenja od 3% za nearmirano zide te 7% za armirano zide. Mnogi propisi ne razlikuju promjenu prigušenja ovisno o građevnom materijalu – obično se pretpostavlja vrijednost koeficijenta relativnog prigušenja od 5%. Iz navedenih razmatranja je vidljivo da je u numeričkom modelu prigušenje obuhvaćeno uz popriličnu aproksimaciju realnog ponašanja.

### 3.2.4. Formiranje matrice prigušenja

Matricu prigušenja potrebno je u potpunosti formirati u slučaju kada klasična modalna analiza nije primjenjiva. To je nužno u slučaju sustava s neklasičnim prigušenjem te za nelinearne sustave (vlastiti oblici nisu konstantni već se mijenjaju s promjenom krutosti).

Općenito se razlikuju dva tipa matrica prigušenja – klasična (proporcionalna) i neklasična. Klasična matrica prikladna je u slučaju ujednačenog prigušenja unutar čitavog sustava, dok je neklasičnu matricu potrebno formulirati u slučaju sustava s izrazito različitim prigušenjima pojedinih dijelova (primjerice kod modela konstrukcije i okolnog tla).

#### Klasična matrica prigušenja

Osnovno svojstvo klasične matrice prigušenja je njena dijagonalizacija prilikom transformacije u modalne koordinate:

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{c} \mathbf{\Phi}, \quad (41)$$

gdje je  $\mathbf{\Phi}$  modalna matrica. Kako to svojstvo posjeduju i matrica krutosti i matrica mase, klasična matrica prigušenja formira se tako da je, na odgovarajući način, proporcionalna matricama  $\mathbf{k}$  i  $\mathbf{m}$ .

Opći oblik klasične matrice prigušenja može se odrediti korištenjem poopćenja uvjeta ortogonalnosti vlastitih vektora [5]:

$$\phi_m^T \mathbf{m} [\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k}]^b \phi_n = 0 \quad -\infty < b < \infty \quad (42)$$

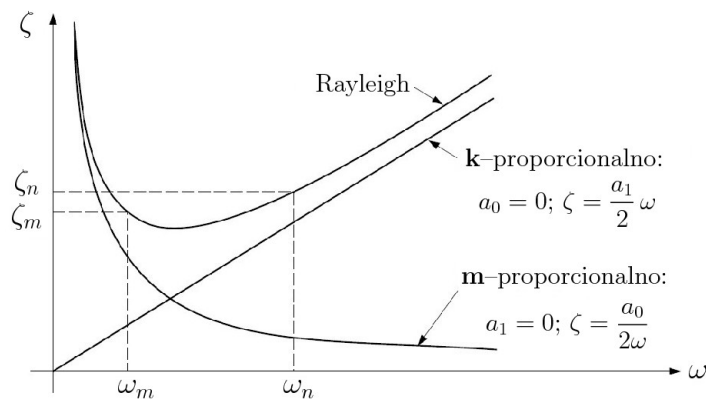
Korištenjem jednadžbe (42) dobiva se opći oblik matrice prigušenja:

$$\mathbf{c} = \mathbf{m} \sum_b a_b [\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k}]^b \equiv \sum_b \mathbf{c}_b, \quad (43)$$

gdje su  $a_b$  proizvoljni koeficijenti. Članovi jednadžbe (43) za  $b = 0$  ( $b = 1$ ) predstavljaju matricu prigušenja proporcionalnu masi (krutosti), a njihovim zbrojem definirano je Rayleighovo prigušenje (slika 9.).

Koeficijenti  $a_b$  u jednadžbi (43) određuju se na način da dobivena matrica prigušenja bude donekle u skladu s eksperimentalnim podacima, to jest definiraju se pomoću izmjerenih (preporučenih) vrijednosti koeficijenata relativnog prigušenja, a koristeći svojstvo dijagonalnosti matrice  $\mathbf{C}$ . Za prigušenje proporcionalno masi i krutosti vrijedi:

$$C_n = \phi_n^T \mathbf{c} \phi_n = 2\omega_n M_n \zeta_n = \begin{cases} a_0 M_n, & \mathbf{m}\text{-proporcionalnost} \\ a_1 \omega_n^2 M_n, & \mathbf{k}\text{-proporcionalnost} \end{cases} \quad (44)$$



Slika 9.: Ovisnost relativnog prigušenja o frekvenciji za Rayleighevo prigušenje

iz čega slijedi:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} \quad \text{ili} \quad \zeta_n = \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (45)$$

Iz jednadžbe (45) je vidljivo da je koeficijent prigušenja proporcionalan (obrnuto proporcionalan) frekvenciji za slučaj prigušenja razmjernog krutosti (masi). Stoga niti jedna od ovih matrica sama za sebe nije prikladna za sustave sa širokim rasponom frekvencija značajnih vlastitih oblika—relativni doprinosi različitih modova biti će znatno iskrivljeni uslijed neprikladnog koeficijenta relativnog prigušenja.

Za Rayleighevo prigušenje na analogan način vrijedi:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1\omega_n}{2} \quad (46)$$

Ovisnost prigušenja o frekvenciji prikazana je na slici 9. Za određivanje koeficijenata  $a_0$  i  $a_1$  potrebno je definirati koeficijente prigušenja  $\zeta_m$  i  $\zeta_n$  koji pripadaju frekvencijama  $\omega_m$  i  $\omega_n$ :

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = 2 \frac{\omega_m \omega_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \begin{bmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ -1/\omega_n & 1/\omega_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_m \\ \zeta_n \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Nakon što su koeficijenti  $a_0$  i  $a_1$  izračunati, pripadna proporcionalna matrica odredi se iz izraza (43).

Frekvencije za koje se definira vrijednost koeficijenta relativnog prigušenja nazivaju se kontrolne frekvencije. Kako su podaci o promjeni  $\zeta$  s promjenom frekvencije dostupni samo u rijetkim slučajevima, obično se pretpostavlja jednako prigušenje za obje kontrolne frekvencije ( $\zeta_m = \zeta_n \equiv \zeta$ ) pa jednadžba (47) prelazi u:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\zeta}{\omega_n + \omega_m} \begin{Bmatrix} \omega_m \omega_n \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Pri praktičnoj primjeni ovog postupka obično se za  $\omega_m$  uzima osnovna vlastita frekvencija, a za  $\omega_n$  jedna od viših frekvencija vlastitih oblika koji značajno doprinose odgovoru konstrukcije. Na taj način će vlastiti modovi s frekvencijama između kontrolnih imati

nešto niže vrijednosti relativnog prigušenja od prigušenja definiranog za kontrolne frekvencije. Istovremeno će svim oblicima s frekvencijom većom od  $\omega_n$  biti pridruženo relativno prigušenje veće od  $\zeta_n$  koje monotonno raste s porastom frekvencije. Posljedično, doprinos modova vrlo visokih frekvencija biti će praktično eliminiran uslijed pridruženih im velikih koeficijenata relativnog prigušenja.

Ukoliko se želi definirati vrijednosti relativnog prigušenja za više od dva oblika oscilacija, potrebno je u izrazu (43) zadržati odgovarajući broj članova niza. Doprinos  $b$ -tog člana niza vrijednosti generaliziranog prigušenja je:

$$C_{nb} = \phi_n^T \mathbf{c}_b \phi_n = a_b \phi_n^T \mathbf{m} [\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k}]^b \phi_n \quad (49)$$

Množeći frekvencijsku jednadžbu ( $\mathbf{k}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\phi_n$ ) slijeva s  $\phi_n^T \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1}$  dobiva se

$$\phi_n^T \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \phi_n = \omega_n^2 \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n \equiv \omega_n^4 M_n \quad (50)$$

Analognim postupkom može se pokazati da vrijedi

$$\phi_n^T \mathbf{m} [\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k}]^b \phi_n = \omega_n^{2b} M_n, \quad (51)$$

što uvrštavanjem u jednadžbu (49) daje

$$C_{nb} = a_b \omega_n^{2b} M_n \quad (52)$$

Vrijednost generaliziranog prigušenja pridružena  $n$ -tom vlastitom obliku tada je

$$C_n = \sum_b C_{nb} = \sum_b a_b \omega_n^{2b} M_n = 2\zeta_n \omega_n M_n, \quad (53)$$

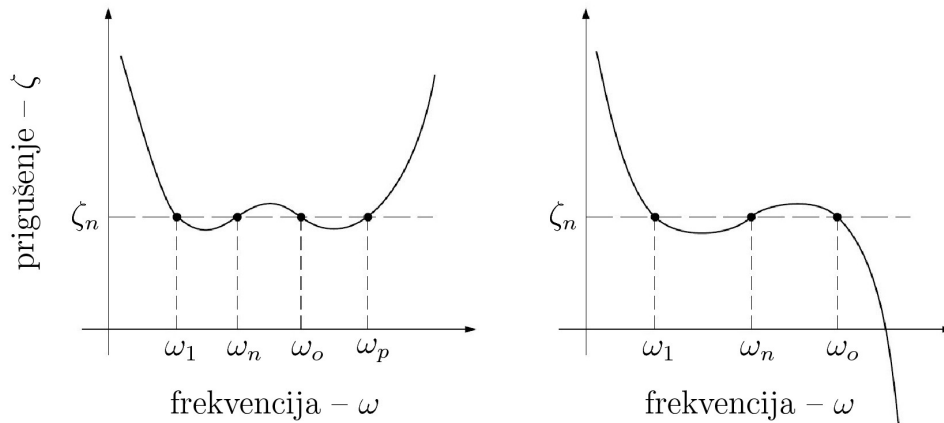
iz čega slijedi

$$\zeta_n = \frac{1}{2\omega_n} \sum_b a_b \omega_n^{2b} \quad (54)$$

Postavljajući jednadžbu (54) za svaku od željenih kontrolnih frekvencija dobiva se sustav jednadžbi čije rješenje daje koeficijente  $a_b$ . Matrica prigušenja  $\mathbf{c}$  tada se odredi koristeći izraz (43).

Izraz (54) definira ovisnost koeficijenta relativnog prigušenja o frekvenciji (slika 10.). Ovisno o broju korištenih članova niza (43) i ovisno o izboru vrijednosti  $b$ , koeficijenti relativnog prigušenja za neke od vlastitih oblika (izvan područja određenog kontrolnim frekvencijama) mogu poprimiti negativne vrijednosti (slika 10. desno). Negativne vrijednosti koeficijenata  $\zeta_n$  nemaju fizikalno opravdanje i treba ih izbjeći stoga što impliciraju slobodne oscilacije pri kojima amplituda odgovora s vremenom raste.

Pri praktičnoj primjeni opće matrice prigušenja (Caugheyjevo prigušenje),  $\omega_1$  se obično definira kao osnovna vlastita frekvencija, a  $\omega_p$  kao frekvencija najvišeg vlastitog oblika koji znatno doprinosi odgovoru sustava. Frekvencije  $\omega_n$  i  $\omega_o$  jednoliko se raspodijele kroz



Slika 10.: Ovisnost relativnog prigušenja o frekvenciji za opći oblik matrice prigušenja

kontrolno područje. Sa slike 10. (lijevo) je vidljivo da se vrijednost relativnog prigušenja, za frekvencije unutar kontrolnog područja, kreće oko vrijednosti prigušenja zadanih u kontrolnim točkama, dok za frekvencije veće od  $\omega_p$  prigušenje raste monotono s porastom frekvencije. Uslijed toga će doprinos vlastitih oblika s frekvencijama znatno većim od  $\omega_p$  praktično biti eliminiran.

Iako se, koristeći izraz (43), koeficijente prigušenja može definirati za proizvoljan broj vlastitih oblika, postoje dva problema pri primjeni Caugheyevog prigušenja. Prvo, sustav jednadžbi (54) može biti loše uvjetovan jer se koeficijenti  $\omega_n^{-1}, \omega_n, \omega_n^3, \omega_n^5, \dots$  mogu razlikovati za nekoliko redova veličine. Stoga koeficijente  $b$  treba izabrati što bliže nuli iako, u principu, mogu ležati bilo gdje u skupu cijelih brojeva. Drugo, ukoliko se koristi više od dva člana niza u jednadžbi (43), matrica  $\mathbf{c}$  postaje puna iako je  $\mathbf{k}$  vrpčasta, a  $\mathbf{m}$  dijagonalna matrica (uz odgovarajuću aproksimaciju). Kako vrijeme potrebno za proračun velikih sustava znatno raste kada matrica prigušenja nije vrpčasta, u većini se praktičnih slučajeva koristi Rayleighovo prigušenje.

Klasičnu matricu prigušenja moguće je formulirati i obrnutim putem, to jest polazeći od modalne matrice prigušenja:

$$\Phi^T \mathbf{c} \Phi = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2M_1 \omega_1 \zeta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2M_2 \omega_2 \zeta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2M_N \omega_N \zeta_N \end{bmatrix}, \quad (55)$$

gdje je  $N$  broj stupnjeva slobode. Koeficijenti relativnog prigušenja različiti od nule definiraju se za odabrane oblike oscilacija, a matrica prigušenja se odredi kao:

$$\mathbf{c} = (\Phi^T)^{-1} \mathbf{C} \Phi^{-1} \quad (56)$$

Iz svojstva ortogonalnosti  $\Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{M}$ , gdje je  $\mathbf{M}$  dijagonalna matrica modalnih masa,

vrijedi

$$(\Phi^T)^{-1} = \mathbf{m}\Phi\mathbf{M}^{-1} \quad \text{i} \quad \Phi^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\Phi^T\mathbf{m}, \quad (57)$$

što uvrštavanjem u jednadžbu (56) daje

$$\mathbf{c} = (\mathbf{m}\Phi\mathbf{M}^{-1})\mathbf{C}(\mathbf{M}^{-1}\Phi^T\mathbf{m}) \quad (58)$$

Budući su  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{M}$  dijagonalne matrice, jednadžbu (58) može se zapisati u obliku

$$\mathbf{c} = \mathbf{m} \left( \sum_{n=1}^N \frac{2\zeta_n\omega_n}{M_n} \phi_n \phi_n^T \right) \mathbf{m}, \quad (59)$$

pri čemu je  $\mathbf{c}$  puna matrica.

Iz jednadžbe (59) vidljiv je doprinos pojedinih vlastitih oblika matrici prigušenja;  $n$ -ti član sume predstavlja doprinos  $n$ -tog vlastitog oblika s relativnim prigušenjem  $\zeta_n$ . Kako je doprinos pojedinog moda prigušenju proporcionalan s pripadnim koeficijentom relativnog prigušenja, samo vlastiti oblici za koje je definiran koeficijent relativnog prigušenja utječu na matricu  $\mathbf{c}$ . Drugim riječima, vlastiti oblici za koje nije eksplicitno definiran koeficijent  $\zeta$  su neprigušeni. To je suštinska razlika ovog tipa prigušenja u odnosu na Caugheyjevo prigušenje.

Pri praktičnoj primjeni izraza (59) potrebno je uključiti samo prvih  $J$  vlastitih oblika koji značajno doprinose odgovoru sustava. Nedostatak prigušenja za oblike  $J + 1$  do  $N$  ne uzrokuje numeričke probleme ukoliko se koristi bezuvjetno stabilna metoda integracije jednadžbi gibanja [8]. Međutim, ukoliko je to potrebno, matricu  $\mathbf{c}$  određenu izrazom (59) moguće je dopuniti matricom prigušenja proporcionalnom krutosti [7]. Time se izbjegava neželjena amplifikacija doprinosa neprigušenih oblika, budući da će doprinos viših modova praktično biti eliminiran.

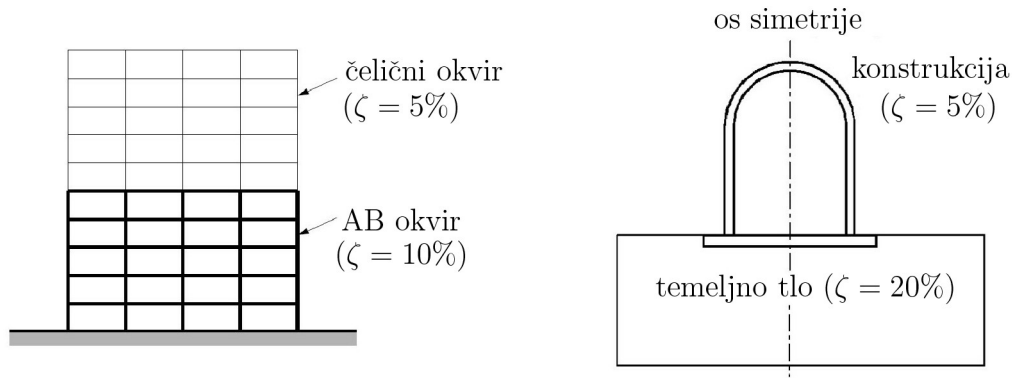
Pri formiranju klasičnih matrica prigušenja za potrebe analize nelinearnih sustava, matrica prigušenja se definira za početno elastično stanje sustava (prije nastupanja nelinearnih deformacija). Pritom se pretpostavlja da tako definirano svojstvo prigušenja ostaje konstantno, to jest neovisno o promjenama krutosti koje nastupaju i uzrokuju histerezno prigušenje uz definirano viskozno prigušenje [5].

### Neklasična matrica prigušenja

Klasična matrica prigušenja nije prikladna za sustave s različitim prigušenjima pojedinih dijelova (slika 11.). Uslijed drastično različitih disipacija energije pojedinih dijelova, distribucija sila uslijed prigušenja neće biti slična distribuciji sila uslijed krutosti i tromosti, a samim time ni matrica prigušenja čitavog sustava neće biti proporcionalna. Ovu činjenicu moguće je uzeti u obzir formiranjem neklaasične matrice prigušenja.

Za svaki od podsustava definira se klasična matrica prigušenja. Moguće je upotrijebiti bilo koju od navedenih metoda, no obično se koristi Rayleighjevo prigušenje. Konstante  $a_b$  se za svaki od podsustava određuju iz jednadžbe (48) koristeći frekvencije  $\omega_n$  i  $\omega_m$





Slika 11.: Primjeri sustava s neklasičnim prigušenjem

određene za *cijeli* sustav. Potom se matrica prigušenja čitavog sustava formira na način analogan formiranju matrice krutosti sustava, zbrajanjem doprinosa prigušenju za zajedničke stupnjeve slobode. Tako formirana matrica prigušenja nakon transformacije u modalne koordinate, za razliku od klasične matrice prigušenja, nije dijagonalna.

### 3.3. Matrica mase

Najjednostavniji postupak definiranja matrice  $\mathbf{m}$  je aproksimacijom distribuirane mase koncentriranim (diskretnim) masama u čvorovima modela. Masa elementa koja pripada čvoru određuje se statički (prema dijelu težine koji pripada čvoru), a ukupna masa u čvoru jednaka je zbroju doprinosa svih elemenata. Kako u tom slučaju jedinično ubrzanje na mjestu  $i$  u smjeru stupnja slobode  $j$  uzrokuje inercijalnu silu *samo* na mjestu  $i$  u smjeru tog stupnja slobode, matrica mase je dijagonalna, a elementi na dijagonali jednaki su koncentriranim masama pridruženim pojedinom čvoru:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix} \quad (60)$$

Budući da se radi o koncentriranim masama, dijagonalni članovi vezani uz rotacijske stupnjeve slobode iščezavaju. To je uobičajena pretpostavka uslijed toga što je doprinos momenta tromosti mase inercijalnim silama, s praktičnog stanovišta, zanemariv – translacija pokreće veću masu, rijetke i slabe rotacijske pobude oko horizontalne osi [6]. Međutim, ukoliko je koncentriranoj masi pridružen moment tromosti mase konačnog iznosa, a potrebno ga je uzeti u obzir pri dinamičkoj analizi, njegov iznos postaje odgovarajući dijagonalni član matrice  $\mathbf{m}$ .

Utjecaj distribucije mase duž elementa može se uzeti u obzir formiranjem konzistentne matrice krutosti mase. Koeficijenti  $m_{ij}$  (generalizirana masa) mogu se odrediti

korištenjem principa virtualnih pomaka (slaba formulacija uvjeta ravnoteže diferencijalnog elementa):

$$\int_{\bar{\Omega}} \delta \mathbf{u}^T (\hat{\mathbf{f}}_I - \rho \ddot{\mathbf{u}}) d\bar{\Omega} = 0, \quad (61)$$

gdje je  $\rho = \rho(\bar{\Omega})$  polje gustoće mase. Korištenjem izraza (1) slijedi

$$\int_{\bar{\Omega}} \delta \bar{\mathbf{u}}^T (\mathbf{N}^T \hat{\mathbf{f}}_I - \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) d\bar{\Omega} = 0 \quad (62)$$

Kako vektor čvornih pomaka (i ubrzanja) nije funkcija koordinata vrijedi

$$\delta \bar{\mathbf{u}}^T \left[ \int_{\bar{\Omega}} (\mathbf{N}^T \hat{\mathbf{f}}_I - \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}) d\bar{\Omega} \right] = 0, \quad (63)$$

a budući je vektor  $\delta \bar{\mathbf{u}}$  proizvoljan slijedi

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{f}}_I d\bar{\Omega} = \left( \int_{\bar{\Omega}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\bar{\Omega} \right) \ddot{\bar{\mathbf{u}}}, \quad (64)$$

gdje je

$$\mathbf{f}_I = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{f}}_I d\bar{\Omega} \quad (65)$$

vektor čvornih sila uslijed ubrzanja  $\ddot{\bar{\mathbf{u}}}$ , a matrica

$$\mathbf{m} = \int_{\bar{\Omega}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\bar{\Omega} \quad (66)$$

je matrica reda  $N$  čiji su elementi koeficijenti  $m_{ij}$ . Za matricu definiranu jednačbom (66) koristi se naziv konzistentna matrica mase jer je definirana u skladu s općim postupkom diskretizacije prema metodi konačnih elemenata [9].

Za štapni konačni element, uz  $\rho = \text{const.}$ , a koristeći iste koordinatne kao pri formiranju matrice krutosti (slika 4.), konzistentna matrica mase je oblika:

$$\mathbf{m} = \bar{m}L \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & \frac{-13L}{420} \\ 0 & \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & 0 & \frac{13L}{420} & \frac{-L^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & \frac{-11L}{210} \\ 0 & \frac{-13L}{420} & \frac{-L^2}{140} & 0 & \frac{-11L}{210} & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad (67)$$

gdje je  $\bar{m} = \rho A$  masa po jedinici dužine elementa. Općenito će konzistentna matrica mase čitavog sustava imati istu topografiju (raspored članova različitih od nule) kao matrica krutosti sustava.

Korištenje matrice diskretnih masa u odnosu na konzistentnu ima prednost u tome što je rješavanje sustava brže (dijagonalna matrica, moguće provesti statičku kondenzaciju), no istovremeno dolazi do određenog gubitka točnosti rezultata. Za velike sustave, a posebno pri direktnoj integraciji jednačbzi gibanja, preporuča se koristiti dijagonalnu matricu mase jer su uštede u vremenu potrebnom za rješavanje znatne i više nego kompenziraju gubitke u točnosti rezultata [9].

## 4. Potresno opterećenje

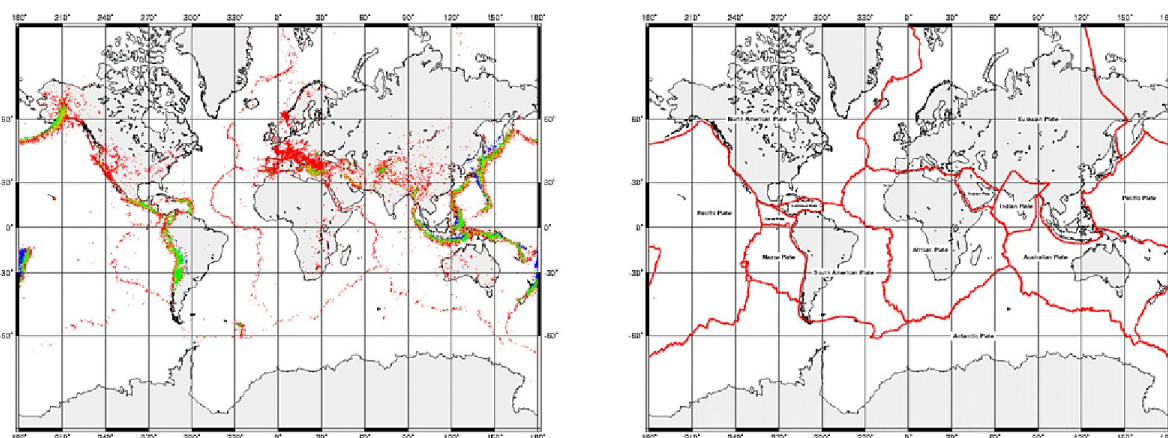
### 4.1. Općenito o potresu

Seizmologija je znanost koja se bavi istraživanjem uzroka i mehanizama potresa, parametara koji karakteriziraju transmisiju seizmičkih valova, kao i predviđanjem seizmičkih pojava. Sa stajališta potresnog inženjerstva, seizmologija treba pružiti podatke potrebne za obuhvaćanje potresnog djelovanja pri provedbi dokaza pouzdanosti.

Potres se može definirati kao pojava kaotičnog podrhtavanja Zemljine kore karakteriziranog vremenski ovisnim amplitudama i frekvencijama, a nastalog uslijed naglog oslobađanja energije u unutrašnjosti Zemlje. Prema uzroku nastanka i izvoru energije razlikuju se [10]:

- a) prirodni potresi – tektonski, vulkanski, urušni
- b) umjetni potresi (antropogeni utjecaj)

Za potresno inženjerstvo najznačajniji su tektonski potresi koji čine oko 85% svih potresa. Tektonski potresi nastaju uslijed tektonskih procesa u litosferi i povezani su s aktivnom tektonikom ploča (slika 12.). Potres nastaje kada naprezanja u Zemljinoj kori premaše



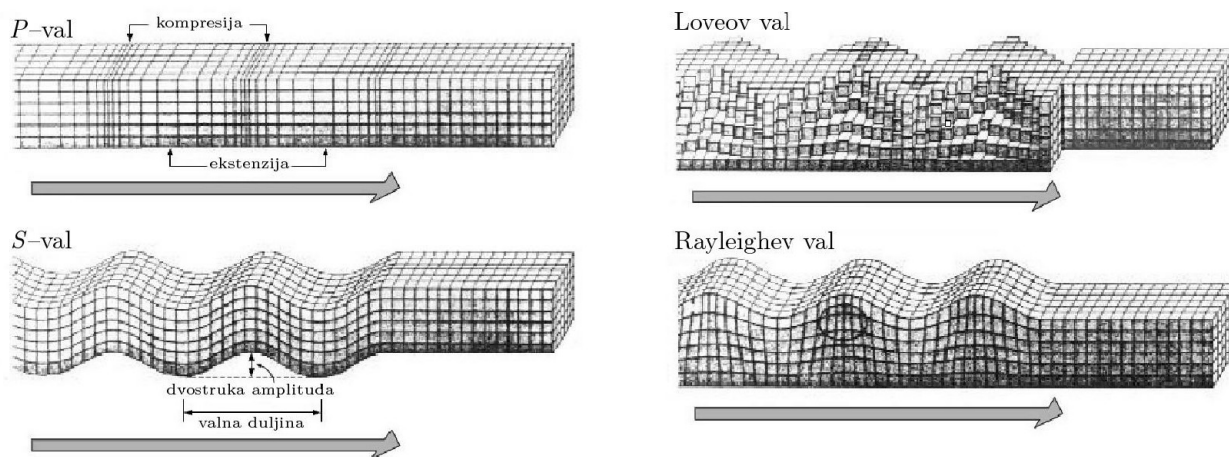
Slika 12.: Globalna razdioba epicentara potresa (lijevo) i granice tektonskih ploča (desno) [11]

čvrstoću materijala, pri čemu dolazi do stvaranja pukotina duž rasjeda uz naglo oslobađanje akumulirane energije deformacija. Naglo otpuštanje energije ima za posljedicu formiranje i širenje elastičnih valova kroz tlo. Ti valovi sačinjavaju potresne valove koji se šire u svim smjerovima od mjesta nastanka pukotine. Postoje dva glavna tipa seizmičkih valova (slika 13.):

**Prostorni** valovi šire se kroz unutrašnjost Zemlje na sve strane od hipocentra potresa. Karakterizirani su kratkim valnim duljinama i visokim frekvencijama. Dijele se na *P-valove* (longitudinalni) i *S-valove* (transverzalni).

**Površinski** valovi šire se duž površine Zemlje. Amplitude im opadaju eksponenci-

jalno s dubinom. Karakterizirani su velikim valnim duljinama i malim frekvencijama. Dijele se na *Rayleigheve* i *Loveove* valove.



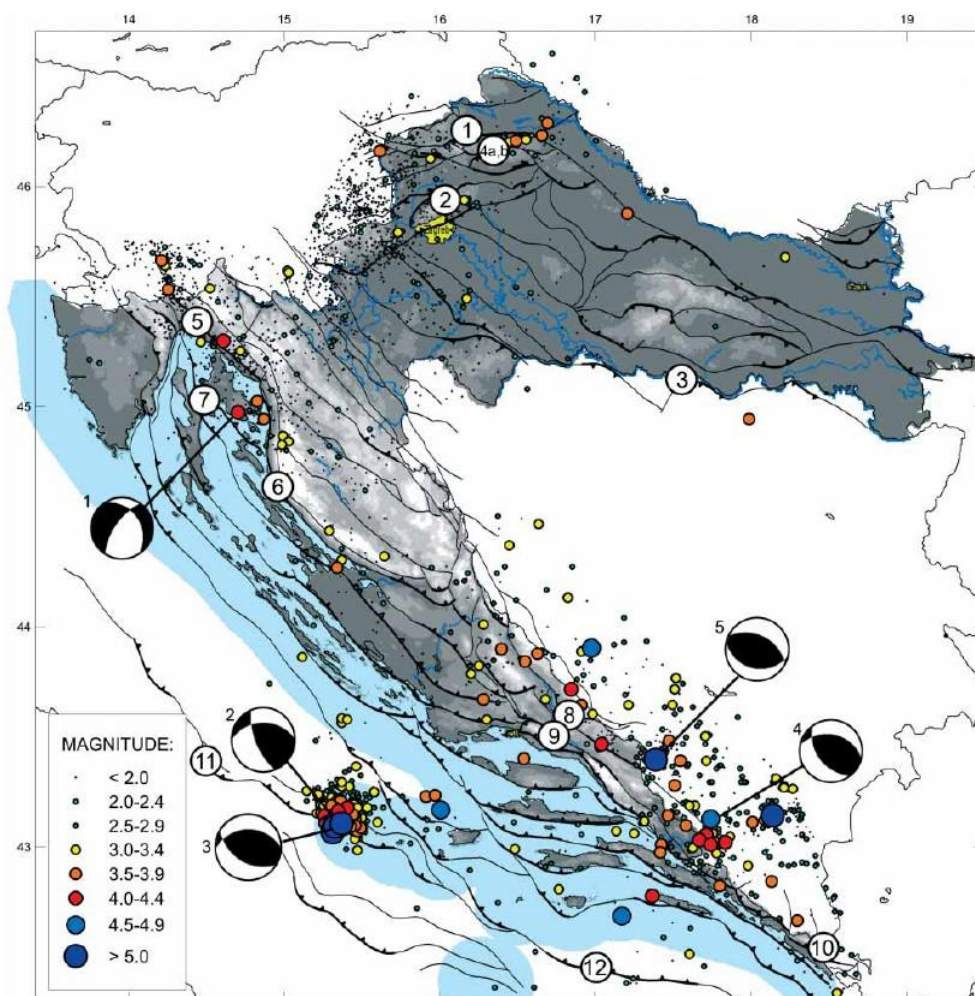
Slika 13.: Oblici seizmičkih valova [5]

Čestice sredstva pri prolazu  $P$ -valova titraju u smjeru širenja vala pa se naizmjenično javljaju područja ekstenzije i kompresije. Naziv  $P$ -valovi ili primarni valovi dolazi od činjenice da se oni najbrže šire kroz tlo te stoga prvi dopijuu do neke promatrane točke. Pri prolazu  $S$ -valova čestice sredstva titraju u smjeru okomitom na smjer širenja vala. Kako su  $S$ -valovi posmični valovi ne šire se kroz fluide. Naziv  $S$ -valovi ili sekundarni valovi dolazi od činjenice da im je brzina rasprostiranja manja od brzine rasprostiranja  $P$ -valova pa do neke promatrane točke stižu nakon njih.

Pod pojmom seizmičnosti (seizmičke aktivnosti) podrazumijeva se prostorna razdioba potresa u ovisnosti o njihovoj jakosti. Na slici 12. prikazana je globalna razdioba epicentara potresa za razdoblje od 1990. do 1996. godine. Seizmička ili seizmički aktivna područja su područja učestalih potresa, dok su u aseizmičkim područjima potresi rijetki ili se uopće ne događaju. Sa slike je vidljivo da Zemlja nije svugdje jednako seizmički aktivna već se potresi uglavnom događaju duž linija koje definiraju granice tektonskih ploča.

Razdioba epicentara potresa na području Republike Hrvatske za razdoblje od 2002. do 2005. godine prikazana je na slici 14. Podaci o potresima dobiveni su analizom seizmograma prikupljenih na stalnim i privremenim mjernim postajama Seizmološke službe Republike Hrvatske. Ovakva istraživanja čine osnovu za provedbu seizmičkog zoniranja i izradu seizmičkih karata. Korištenjem različitih metoda (Monte Carlo, metoda modalne sumacije i računanja sintentskih seizmograma) provedena su probabilistička i deterministička istraživanja seizmičkog rizika za pojedina područja Republike Hrvatske. Seizmički rizik izražava se vršnim ubrzanjem tla te maksimalnim očekivanim intenzitetom potresa za različite povratne periode. Najveći seizmički rizik određen je u širem dubrovačkom

području, dok se zagrebačko područje ističe kao potresima najugroženiji dio unutrašnjosti [13].



Slika 14.: Razdioba epicentara potresa na području Republike Hrvatske u razdoblju od 2002. do 2005. godine [12]. Legenda: (1) Dravski rasjed, (2) Medvednički rasjed, (3) Savski rasjed, (4a,b) rasjed Ivanščica i Kalnički rasjed, (5) rasjed Ilirska Bistrica–Vinodol, (6) Velebitski rasjed, (7) Krčki rasjed, (8) rasjed Imotski, (9) rasjed Mosor–Biokovo, (10) Dubrovački rasjed, (11) rasjed Jabuka–Andrija, (12) Južnojadranski rasjed

Sa stajališta potresnog inženjerstva najznačajniji aspekt potresa je njegov učinak na konstrukcije, odnosno naprezanja, deformacije, te oštećenje koje prouzrokuje. Ti učinci potresa vezani su uz „veličinu” potresa. Za procjenu veličine potresa koriste se različite ljestvice, a najčešće se iskazuje *intenzitetom* i *magnitudom* potresa.

Intenzitet potresa *subjektivna* je mjera definirana opisom pojava na površini Zemlje koje su primijećene za vrijeme trajanja potresa, kao i učincima na površini koji iza potresa trajno ostaju. Postoji nekoliko empirijskih skala ili ljestvica u kojima su učinci potresa razvrstani u klase koje definiraju stupnjeve intenziteta trešnje tla. U Europi se koristi

MCS (Mercalli-Cancani-Sieberg) ljestvica ili u novije vrijeme njena modifikacija MSK (Medvedev-Sponhauer-Karnik) dok se u SAD-u koristi MM (modificirana Mercallijeva) ljestvica. Sve navedene ljestvice imaju po 12 stupnjeva od I (nezamjetljiv potres) do XII (totalno uništenje).

Magnituda potresa je *objektivna* i sa seizmološkog stajališta najvažnija mjera veličine potresa, a proporcionalna je količini oslobođene energije u žarištu potresa (hipocentar). Magnituda potresa prema Richteru definirana je kao logaritam (po bazi 10) maksimalne amplitude (mjerene u mikrometrima) potresnog zapisa dobivenog na Wood–Andersonovom seizmografu, a korigirane na udaljenost od 100 kilometara. Empirijska relacija za Richtеровu magnitudu izvodi se posebno za svaku seizmološku postaju. Uz Richtеровu magnitudu (lokalna magnituda,  $M_L$ ) postoje i magnituda prostornih valova ( $M_B$ ), magnituda površinskih valova ( $M_S$ ), te magnituda momenta<sup>3</sup> ( $M_W$ ). Prve tri ljestvice imaju ograničen raspon vrijednosti magnitude te ne pružaju zadovoljavajuću mjeru veličine najsnažnijih potresa, dok je ljestvica magnitude momenta primjenjiva za sve potrese [14].

Za provedbu dokaza pouzdanosti konstrukcija pod djelovanjem potresnog opterećenja karakterizacija potresa pomoću magnitude ili intenziteta nije dostatna. Gibanje tla uslijed potresa na nekoj lokaciji potpuno je definirano s tri komponente potresnog zapisa. Međutim, s aspekta uzrokovanja odgovora konstrukcije najznačajnija svojstva potresnog zapisa su amplituda (uobičajeno vršna vrijednost ubrzanja tla), sadržaj frekvencija, te trajanje potresa. Stoga je za procjenu odgovora i potencijalnog oštećenja konstrukcije uslijed potresa prikladno potres okarakterizirati spektralnim krivuljama odziva konstrukcije.

Spektra odziva predstavlja prikaz ekstremnih vrijednosti odziva sustava s jednim stupnjem slobode na potresnu pobudu, a u ovisnosti o  $T_n$  ( $\omega_n$  ili  $f_n$ ) za definiranu vrijednost koeficijenta relativnog prigušenja  $\zeta$ . Za vršne vrijednosti odziva mogu se uzeti pomaci  $u_0$ , relativne brzine  $\dot{u}_0$ , te ubrzanja  $\ddot{u}_0$  čime nastaju pripadni spektri odziva. Definiranjem relativne pseudobrziine kao

$$V = \omega_n D, \quad (68)$$

gdje je  $D \equiv u_0$  vršna vrijednost relativnog pomaka, te pseudoubrzanja kao

$$A = \omega_n^2 D, \quad (69)$$

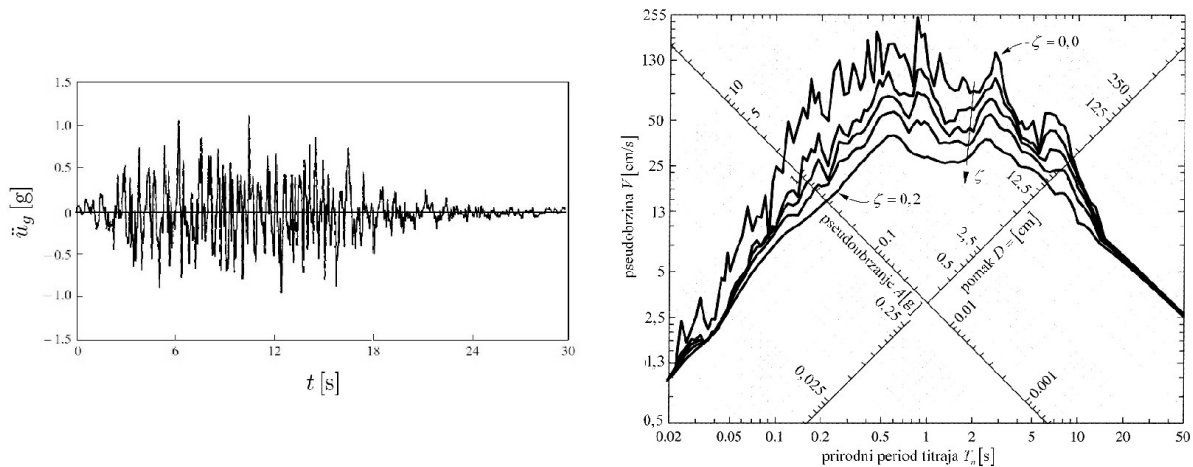
moguće je, koristeći veze

$$\frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D, \quad (70)$$

---

<sup>3</sup>Ova metoda zasnovana je na određivanju površine rasjeda koji je uzrokovao potres. Suštinska razlika u odnosu na Richtеровu metodu je u tome što se kod određivanja magnitude po Richteru za žarište potresa uzima mala površina odnosno točka. Kod metode magnitude momenta kao izvor potresa uzima se rasjed konačne površine pritom uzimajući u obzir i svojstva materijala kroz koji prolaze seizmički valovi.

spektre odziva pomaka, pseudobrzine i pseudoubzranja prikazati zajedničkim (tripartitnim) spektrom (slika 15.). Primjena spektra odziva ograničena je na linearno elastično



Slika 15.: Potresni zapis (lijevo) i tripartitni spektar (desno) [6]

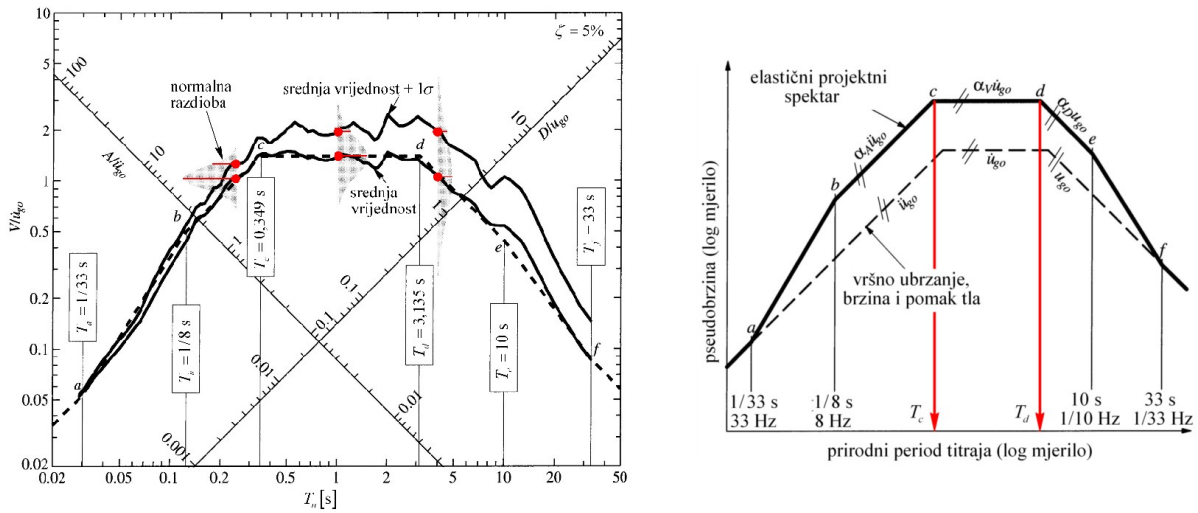
područje (odgovor sustava na opću pobudu definiran Duhamelovim integralom), te pomoću njega nije moguće točno procijeniti oštećenje konstrukcije uslijed potresa. Međutim, maksimalna elastična deformacija uzrokovana potresom značajan je pokazatelj intenziteta gibanja tla. Stoga se integral spektra odziva (za prikladni raspon perioda) može koristiti kao efektivna mjera intenziteta gibanja tla uslijed potresa (spektralni intenzitet, [5]).

Nakon bilježenja značajnih potresa vrši se izrada i objava spektara odziva. Iako se kod potresa radi o stohastičkoj pojavi, uočavaju se ovisnosti o mehanizmu oslobađanja energije u blizini žarišta i duž ploha rasjeda, udaljenosti od rasjeda, geološkim svojstvima područja, magnitudi potresa, te o lokalnim uvjetima temeljenja. Kako uslijed toga na istoj lokaciji dolazi do izrazitih razlika među potresnim zapisima i pripadnim spektrima odziva različitih potresa, spektralni zapis jednog prošlog potresa nije dovoljan za provedbu dokaza pouzdanosti konstrukcije. Stoga je potrebno stvoriti spektar koji zamjenjuje više potresa i na odgovarajući način karakterizira razmatrano područje. U tu svrhu koristi se elastični projektni spektar.

Spektri odziva čine bazu za tvorbu projektnih spektara. Statističkom obradom više spektralnih krivulja (slika 16.) kreira se projektni spektar za razmatranu lokaciju. Ukoliko ne postoji dovoljno potresnih zapisa s razmatranog područja, koriste se zapisi sa sličnih područja (postoje podudarna svojstva) ili se vrši prilagodba zapisa s različitih područja. Koeficijenti uvećanja vršnih vrijednosti gibanja tla, te periodi koji razgraničavaju odgovarajuća područja elastičnog projektnog spektra rezultat su statističkih analiza.

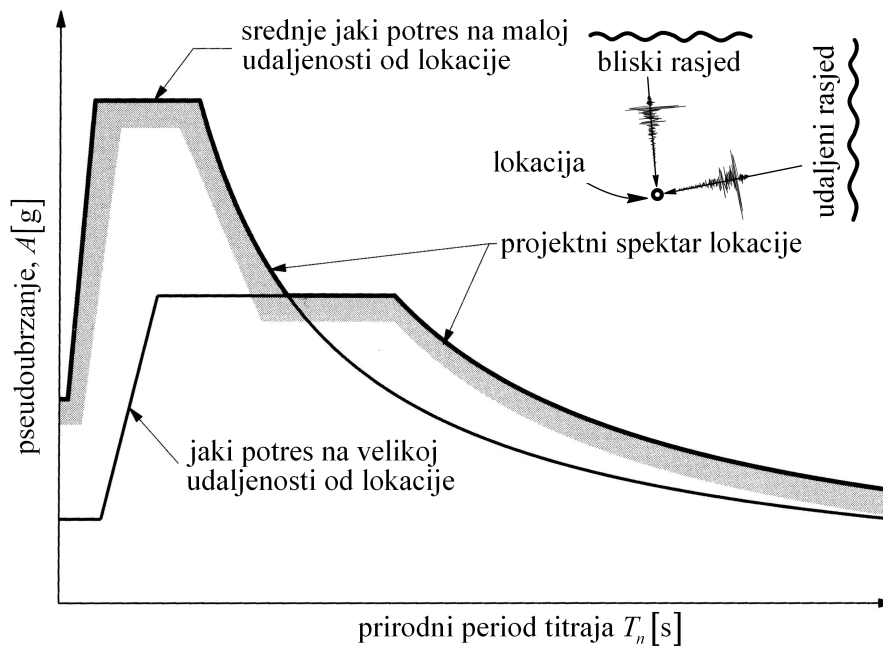
Elastični projektni spektar idealizirani je prikaz koji sadrži procjenu djelovanja budućih potresa te je stoga prikladan za primjenu pri provedbi dokaza pouzdanosti. Spektar odziva prikazuje *vršne* iznose za određeni potresni zapis, dok su projektnim spektrom definirani *propisani* iznosi vršnih vrijednosti. Projektni spektar, ovisno o tvorbi, može stoga biti





Slika 16.: Statistička obrada spektralnih krivulja (lijevo) i projektni spektar (desno) [6]

vrlo različit od spektra odziva. Također, za neke je lokacije projektni spektar ovojnica dvaju spektara, primjerice kada dva rasjeda utječu na širenje potresa (slika 17.). U tom slučaju bliski potresi utječu na kratke, a udaljeni na duge periode.



Slika 17.: Projektni spektar kao ovojnica dvaju spektara [6]

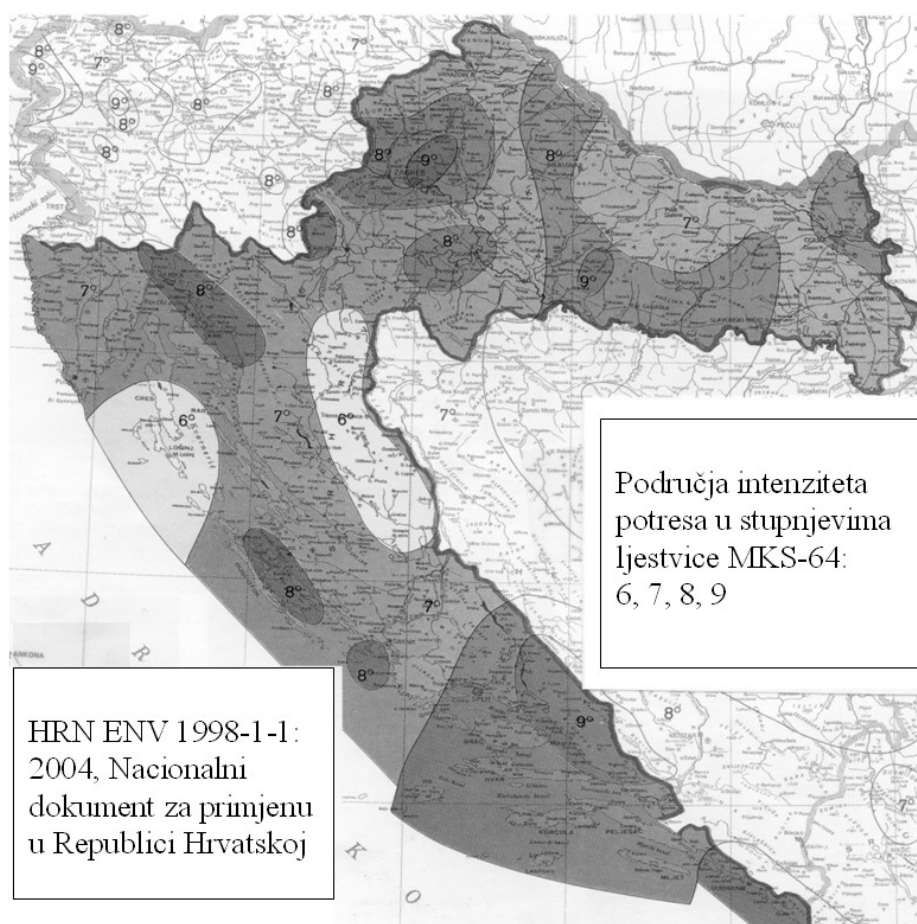
## 4.2. Eurocode 8

Nizom europskih normi EN 1998 (Eurocode 8), odnosno odgovarajućim hrvatskim normama, dana su pravila za projektiranje i izvedbu konstrukcija u seizmički aktivnim područjima. Za provedbu dokaza pouzdanosti konstrukcija EC 8 dopušta definiranje



seizmičkog opterećenja, odnosno gibanja tla uslijed potresa na razmatranoj lokaciji, na dva načina [15]: a) elastičnim projektnim spektrom (*engl. elastic ground acceleration response spectrum*), b) potresnim zapisom (*engl. ground acceleration time-history*).

Projektni spektar određuje se na temelju karakteristika tla (način klasifikacije tla kao i potrebna ispitivanja također su obuhvaćeni normom) te ovisno o računskom ubrzanju tla  $a_g$  propisanom za razmatrani povratni period. Računsko ubrzanje tla ovisi o stupnju seizmičkog rizika i određuje se na temelju odgovarajućih seizmoloških ispitivanja lokacije građevine ili prema usvojenim vrijednostima za seizmička područja državnog teritorija (tablica 3. i slika 18.). Područja s ubrzanjem  $a_g \leq 0,05g$  smatraju se područjima malog intenziteta (može se primijeniti skraćeni ili pojednostavnjeni postupak proračuna na potres za određene vrste ili razrede građevina), dok u slučaju  $a_g \leq 0,02g$  proračun na potres nije potreban.



Slika 18.: Seizmološka karta Republike Hrvatske [16]

Komponente potresnog opterećenja prikazuju se s dva horizontalna elastična spektra (za ortogonalne komponente horizontalnog gibanja tla) i jednim vertikalnim spektrom. Propisom je dopušteno i definiranje elastičnog spektra kao ovojnice više različitih mjerodavnih spektara. Implicitno obuhvaćanje disipacije energije uslijed nelinearnog ponašanja eleme-

nata omogućeno je korištenjem faktora ponašanja  $q$ , odnosno modificiranjem elastičnog projektnog spektra u proračunski projektni spektar [15].

Tablica 3.: Proračunsko ubrzanje tla  $a_g$  za različita potresna područja [16]

INTENZITET PREMA MSK-64	PRORAČUNSKO UBRZANJE TLA, $a_g$ ( $T_{NCR} = 500$ godina)
VI	0,05g
VII	0,1g
VIII	0,2g
IX	0,3g
X	Prema posebnim istraživanjima

Kao alternativu proračunskom spektru, EC 8 dopušta definiranje potresnog opterećenja u obliku vremenskog zapisa ubrzanja tla i o njemu ovisnih veličina (brzine i pomaka). Takav pristup nužan je pri provedbi nelinearnog postupka proračuna. Ukoliko se zahtijeva prostorni model konstrukcije, potresno se djelovanje sastoji od tri akcelerograma koji djeluju istodobno, pri čemu se isti akcelerogram ne može upotrijebiti istodobno u oba horizontalna smjera. Ovisno o načinu primjene i raspoloživim podacima, za prikaz potresnog djelovanja mogu se koristiti [15]:

- umjetni akcelerogrami
- akcelerogrami zapisanog potresa
- simulirani akcelerogrami

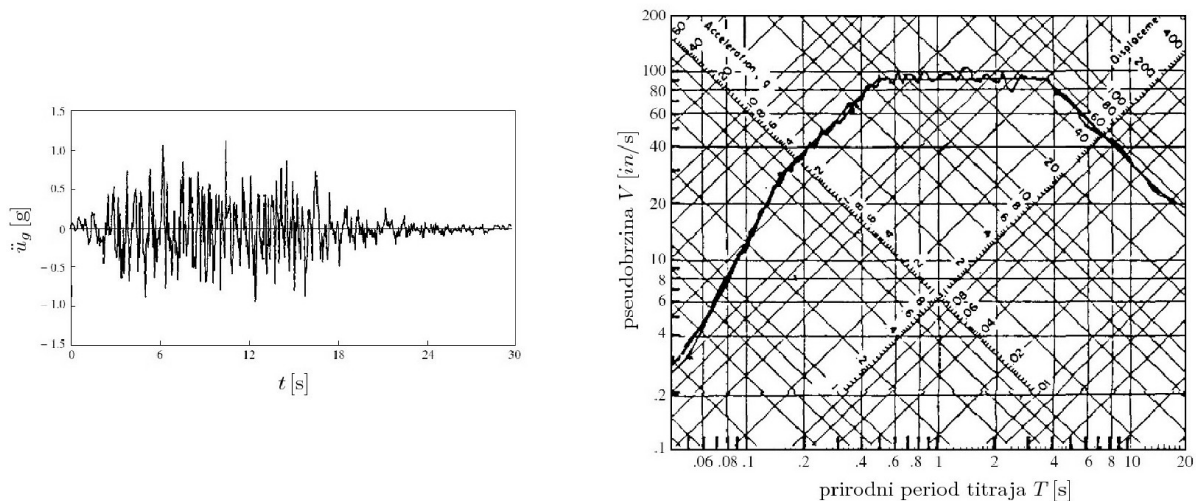
Generirani umjetni akcelerogrami moraju se poklapati s elastičnim projektnim spektrom (uz  $\zeta = 5\%$ ) definiranim za razmatranu lokaciju u skladu s propisom. Trajanje akcelerograma mora biti u skladu s magnitudom i drugim mjerodavnim svojstvima potresa ključnim pri definiranju  $a_g$ .

Upotreba akcelerograma zapisanih potresa ili akcelerograma generiranih fizikalnom simulacijom žarišta i mehanizama širenja potresa dopuštena je uz uvjet da korišteni uzorci akcelerograma odgovaraju seizmičkim svojstvima izvora potresa i uvjetima tla gradilišta, a njihove vrijednosti moraju biti primjerene vrijednostima  $a_g S$  razmatranog potresnoga područja ( $S$  je parametar tla definiran propisom ovisno o vrsti tla).

Broj korištenih akcelerograma mora biti takav da se dobije stabilna statistička mjera (srednja vrijednost i koeficijent varijacije) važnih veličina odziva. Amplituda i frekvencijski sadržaj akcelerograma mora se odabrati tako da se dobiveni rezultati na općoj razini pouzdanosti slažu s onima koji bi se dobili primjenom elastičnog projektnog spektra (slika 19.). S tom svrhom potrebno je zadovoljiti sljedeća pravila [15]:

- upotrijebiti će se najmanje 3 akcelerograma

- srednja vrijednost spektralnog ubrzanja za period  $T = 0$  (izračunana iz pojedinačnih vremenskih zapisa) nije manja od vrijednosti  $a_g S$  za promatrano gradilište
- u rasponu perioda od  $0,2T_1$  do  $2T_1$ , gdje je  $T_1$  period vibracija osnovnog vlastitog oblika za smjer primjene akceleroograma, nijedna vrijednost srednjeg elastičnog spektra (izračunanog iz svih vremenskih zapisa, uz  $\zeta = 5\%$ ) ne smije biti manja od 90% odgovarajuće vrijednosti elastičnog projektnog spektra (uz  $\zeta = 5\%$ )



Slika 19.: Akceleroogram potresa usklađen s elastičnim projektnim spektrom [5]

### 4.3. Efektivna sila potresa

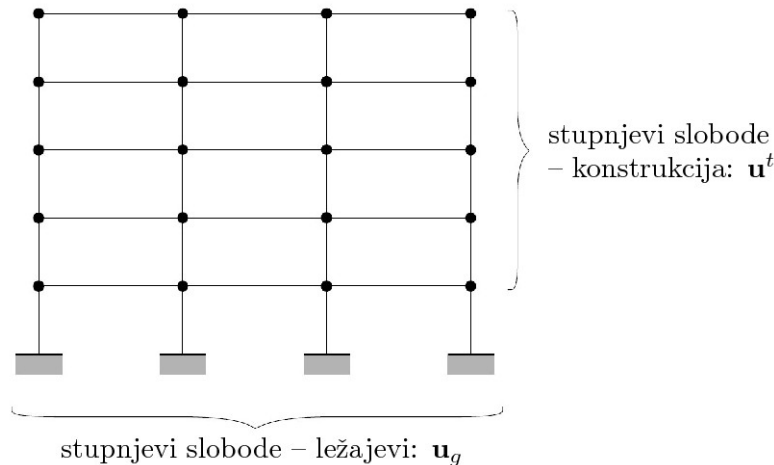
Posebnost potresne pobude u odnosu na druge oblike dinamičkog opterećenja je u tome što se potresno opterećenje konstrukciji nameće u obliku pomaka oslonaca, a ne preko eksplicitno definiranih vanjskih sila. Stoga je za provedbu analize potrebno definirati efektivnu silu potresa u ovisnosti o pomacima oslonaca.

Definiranje pomaka oslonaca predstavlja najtežu fazu korektno procjene odgovora konstrukcije na potresnu pobudu, uz koju su vezane brojne nesigurnosti te posljedično i nužne aproksimacije, što evidentno proizlazi iz same prirode razmatranog problema. Stoga je pri definiranju pomaka oslonaca moguće koristiti deterministički ili stohastički pristup. Stohastički pristup zahtijeva definiranje gibanja tla u obliku slučajnog procesa te provedbu stohastičke seizmičke analize, pri čemu je i odgovor konstrukcije tada izražen u okviru probabilitike. S druge strane, koristeći deterministički pristup smatra se da je gibanje tla uslijed potresa u potpunosti definirano potresnim zapisom, odnosno projektnim spektrom. Takav pristup koristiti će se i ovdje.

Daljnja aproksimacija pri definiranju gibanja tla uslijed potresa vezana je uz definiranje svojstava tla, prvenstveno s aspekta krutosti. Općenito gledano, gibanje oslonaca konstrukcije uslijed potresa različito je za različite oslonce što može značajno utjecati na

odgovor konstrukcije. U slučaju da je razmak ležaja mali prema poluvahu širenja potresa, pretpostavka o jednolikom gibanju oslonaca (uz zanemarivanje rotacijskog gibanja, ova pretpostavka ekvivalentna je pretpostavci o apsolutno krutom temeljnom tlu) je prihvatljiva. Nadalje, stvarno gibanje podloge na mjestu građevine može se znatno razlikovati od gibanja podloge koje bi nastupilo da konstrukcija nije prisutna. Taj utjecaj biti će zanemariv ukoliko je krutost konstrukcije mala u odnosu na krutost tla. U suprotnom, utjecaj interakcije postaje značajan i potrebno ga je obuhvatiti proračunom (dolazi do izobličenja potresnog zapisa). Utjecaj interakcije temeljnog tla i konstrukcije (*engl. soil-structure interaction*) neće se razmatrati.

Efektivnu potresnu silu za slučaj determinističke potresne pobude, bez razmatranja interakcije konstrukcije i temeljnog tla, uz dopuštanje različitih pomaka oslonaca konstrukcije može se izvesti iz jednadžbe gibanja izražene preko ukupnih pomaka. Pritom se pravi distinkcija između stupnjeva slobode konstrukcije i stupnjeva slobode oslonaca (slika 20.), tako da se vektor pomaka sastoji od dva dijela: (1)  $\mathbf{u}^t$  sadrži  $N$  stupnjeva



Slika 20.: Opći model konstrukcije za djelovanje potresne pobude

slobode konstrukcije, pri čemu eksponent  $t$  označava da se radi o ukupnim pomacima, i (2)  $\mathbf{u}_g$  sadrži  $N_g$  stupnjeva slobode ležajeva. Jednadžba gibanja tada je oblika:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{m}_g \\ \mathbf{m}_g^T & \mathbf{m}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^t \\ \ddot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{c}_g \\ \mathbf{c}_g^T & \mathbf{c}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^t \\ \dot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_g^T & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_g(t) \end{Bmatrix} \quad (71)$$

Elementi matrica mase, prigušenja i krutosti odrede se na poznati način, dok su komponente gibanja tla  $\mathbf{u}_g(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_g(t)$  i  $\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$  zadane. Iz jednadžbe (71) potrebno je odrediti pomake konstrukcije  $\mathbf{u}^t$  te sile u ležajima  $\mathbf{p}_g$ .

Vektor pomaka razdvaja se na dva dijela

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (72)$$

gdje je  $\mathbf{u}^s$  vektor pomaka čvorova konstrukcije uslijed statički nametnutih pomaka ležajnih čvorova  $\mathbf{u}_g$  u promatranom vremenskom trenutku. Veza među njima može se dobiti iz jednadžbe (71) primijenjene na statički slučaj

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_g^T & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_g^s \end{Bmatrix}, \quad (73)$$

pri čemu je  $\mathbf{p}_g^s$  vektor statički nanešenih sila u ležajnim čvorovima potrebnih da izazovu pomake  $\mathbf{u}_g$ . Kako  $\mathbf{p}_g^s$  ovisi o vremenu, vektor  $\mathbf{u}^s$  također je funkcija vremena pa se stoga naziva vektorom kvazistatičkih pomaka. Vektor  $\mathbf{p}_g^s$  iščezava u slučaju statički određenih sustava te u slučaju pomaka konstrukcije kao krutog tijela.

Prva od matrice jednadžbi iz izraza (71)

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{m}_g\ddot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{c}_g\dot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{k}\mathbf{u}^t + \mathbf{k}_g\mathbf{u}_g = \mathbf{0}, \quad (74)$$

uvrštanjem izraza (72) i prebacivanjem svih članova koji sadrže  $\mathbf{u}_g$  ili  $\mathbf{u}^s$  na desnu stranu znaka jednakosti postaje

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}_{\text{eff}}(t), \quad (75)$$

gdje je vektor efektivne sile potresa

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}^s + \mathbf{m}_g\ddot{\mathbf{u}}_g) - (\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}^s + \mathbf{c}_g\dot{\mathbf{u}}_g) - (\mathbf{k}\mathbf{u}^s + \mathbf{k}_g\mathbf{u}_g) \quad (76)$$

Zadnji član u izrazu (76) iščezava budući da iz jednadžbe (73) slijedi

$$\mathbf{k}\mathbf{u}^s + \mathbf{k}_g\mathbf{u}_g = \mathbf{0} \quad (77)$$

Taj izraz omogućava izražavanje vektora kvazistatičkih pomaka  $\mathbf{u}^s$  u ovisnosti o definiranim pomacima oslonaca  $\mathbf{u}_g$ :

$$\mathbf{u}^s = \boldsymbol{\iota}\mathbf{u}_g \quad \boldsymbol{\iota} = -\mathbf{k}^{-1}\mathbf{k}_g, \quad (78)$$

gdje je  $\boldsymbol{\iota}$  *matrica utjecaja* (uplivna matrica) koja opisuje utjecaj pomaka oslonaca na pomake čvorova konstrukcije. Uvrštavanjem izraza (78) i (77) u jednadžbu (76) slijedi izraz za efektivnu silu potresa

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -(\mathbf{m}\boldsymbol{\iota} + \mathbf{m}_g)\ddot{\mathbf{u}}_g(t) - (\mathbf{c}\boldsymbol{\iota} + \mathbf{c}_g)\dot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (79)$$

čime je jednadžba gibanja sustava (75) u potpunosti definirana.

Za mnoge praktične slučajeve moguće je daljnje pojednostavljenje izraza za efektivnu silu potresa. U slučaju matrice prigušenja definirane proporcionalno krutosti, član vezan uz prigušenje u izrazu (79) evidentno iščezava. Štoviše, numeričkim pokusom moguće je pokazati da je član ovisan o brzini zanemariv u odnosu na inercijalnu komponentu ukoliko koeficijenti viskoznog prigušenja poprimaju razumne vrijednosti za konstrukcije

od interesa [5]. Nadalje, u slučaju aproksimacije diskretnim (koncentriranim) masama, matrica mase je dijagonalna što implicira da je  $\mathbf{m}_g$  nul–matrica, a  $\mathbf{m}$  dijagonalna matrica. Usljed toga izraz (79) se svodi na

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}\ddot{\mathbf{u}}_g(t), \quad (80)$$

gdje je matrica utjecaja  $\boldsymbol{\iota}$  matrica reda  $N \times N_g$ , a vektor pomaka oslonaca  $\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$  je matrica reda  $N_g \times 1$ .

U slučaju jednakih pomaka svih oslonaca, što je ekvivalentno pomicanju konstrukcije kao krutog tijela, matrica utjecaja reducira se na vektor utjecaja (uplivni vektor, red  $N \times 1$ ), a vektor pomaka oslonaca postaje skalar  $\ddot{u}_g$ . Principijelna razlika između matrice utjecaja i vektora utjecaja je u tome što se vektor utjecaja može odrediti iz kinematičkih razmatranja, dok je za određivanje matrice utjecaja potrebno riješiti sustav (77). U slučaju jednakih pomaka oslonaca efektivna sila potresa postaje

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}\ddot{u}_g(t), \quad (81)$$

pri čemu je izraz (81) primjenjiv za linearne i za nelinearne probleme.

## 5. Redukcija stupnjeva slobode

Ključan korak svake analize konstrukcija je postavljanje odgovarajućeg matematičkog odnosno numeričkog modela, budući da rezultati dobiveni analizom izravno ovise o prikladnosti korištenog modela za opis ponašanja realnog fizikalnog sustava.

Idealizacija za potrebe statičke analize, koja uobičajeno prethodi dinamičkom proračunu, uvjetovana je kompleksnošću konstrukcije te je za korektan proračun unutarnjih sila i naprezanja u elementima potreban model s velikim brojem stupnjeva slobode. Međutim, pri provedbi dinamičke analize iste konstrukcije najčešće je potreban znatno manji broj stupnjeva slobode. Razlog tomu leži u činjenici da su pomaci čvorova koji uvjetuju distribuciju inercijalnih sila manje osjetljivi na lokalne varijacije deformacija u odnosu na polje naprezanja, odnosno mreža konačnih elemenata potrebna za statičku analizu je pre-gusta za potrebe dinamičke analize.

Stoga je prije provedbe dinamičke analize od interesa reducirati stupnjeve slobode na optimalan broj, pri čemu je kriterij smanjivanje vremena potrebnog za proračun uz istovremeno zadržavanje zadovoljavajuće točnosti rezultata.

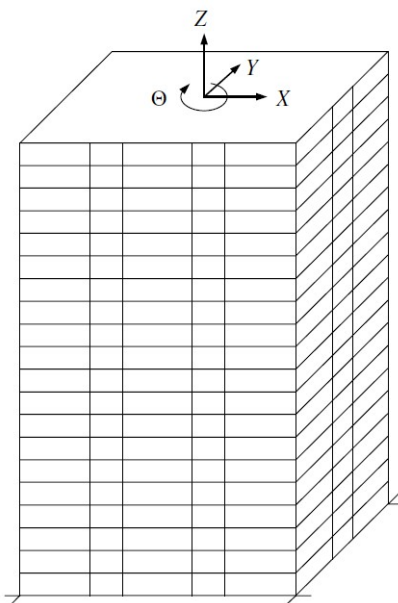
### 5.1. Kinematička ograničenja

Stupnjeve slobode matematičkog modela moguće je reducirati uvodeđnjem kinematičkih ograničenja koja definiraju stupnjeve slobode konstrukcije preko umanjenog skupa

pomaka. Odnosno, *unaprijed* se određuju neki pomaci i/ili se definiraju njihove međusobne veze, a pritom ne uvodeći nove krutosti i opterećenja u numerički model.

Izbor odgovarajućeg podmodela, interpolacijskih funkcija, pa i transformacija koordinata iz globalnog u lokalni sustav također predstavljaju ograničenja polja pomaka, no u širem smislu pojma. U užem smislu, radi se o ograničenjima koja se uvode nakon odabira podmodela, a definira ih se prema inženjerskoj procjeni: a) uvjeta oslanjanja, b) svojstava elemenata nosivog sustava i ponašanja spojeva, te c) opterećenja koja modeliramo. Stoga kinematička ograničenja predstavljaju poopćenje poznate inženjerske metode pomaka.

Na slici 21. prikazana je višekatna okvirna konstrukcija. Konstrukcija se sastoji od 480 čvorova što, uz šest stupnjeva slobode po čvoru, daje ukupno 2880 stupnjeva slobode u modelu. Uvodeći pretpostavku da su međukatne konstrukcije apsolutno krute u svojoj ravnini, broj stupnjeva slobode po čvoru reducira se sa šest na tri (translacija u smjeru osi  $Z$  te rotacije oko osi  $X$  i  $Y$ ) uz dodatak tri stupnja slobode međukatne dijafragme (translacije u smjeru osi  $X$  i  $Y$  te rotacija oko osi  $Z$ ). Uslijed toga, broj stupnjeva slobode razmatran pri statičkoj analizi reducira se gotovo za pola na  $1440 + 60 = 1500$ .



Slika 21.: Okvirna konstrukcija – 20 katova, 2880 stupnjeva slobode

Daljnja redukcija stupnjeva slobode za provedbu dinamičke analize okvirne konstrukcije sa slike 21. moguća je korištenjem statičke kondenzacije (odjeljak 5.2.). Tim postupkom moguće je stupnjeve slobode konstrukcije reducirati na svega tri dinamička stupnja slobode po međukatnoj dijafragmi. Rezultat toga je dinamički model konstrukcije s ukupno 60 dinamičkih stupnjeva slobode, što iznosi svega oko 2% stupnjeva slobode početnog modela.

Ponekad se u statičkoj i dinamičkoj analizi koristi pretpostavka aksijalno apsolutno krutih stupova te pretpostavka apsolutno krutih dijafragmi u i izvan svoje ravnine. Među-

tim, pri korištenju tih kinematičkih ograničenja potreban je poseban oprez budući da najčešće nisu opravdana svojstvima krutosti konstruktivnih elemenata.

## 5.2. Statička kondenzacija

Ukoliko se jednadžbe gibanja sustava formuliraju koristeći idealizaciju koncentriranim masama, iz dinamičke analize je moguće eliminirati stupnjeve slobode bez pridružene mase, a na koje ne djeluje dinamičko opterećenje.

Jednadžba gibanja sustava bez prigušenja može se zapisati u obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{t0} \\ \mathbf{k}_{0t} & \mathbf{k}_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_t(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (82)$$

gdje  $\mathbf{u}_0$  predstavlja stupnjeve slobode bez pridružene mase, a  $\mathbf{u}_t$  dinamičke stupnjeve slobode. Iz gornjeg sustava proizlaze dvije matrice jednadžbe

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}_{tt}\mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{t0}\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_t(t) \quad \mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{00}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad (83)$$

Jednadžba (83b) definira statičku vezu između vektora  $\mathbf{u}_0$  i  $\mathbf{u}_t$

$$\mathbf{u}_0 = -\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t \quad (84)$$

što uvrštavanjem u jednadžbu (83a) daje

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{k}}_{tt}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t), \quad (85)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$  kondenzirana matrica krutosti definirana izrazom

$$\hat{\mathbf{k}}_{tt} = \mathbf{k}_{tt} - \mathbf{k}_{0t}^T\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t} \quad (86)$$

uz  $\mathbf{k}_{t0} = \mathbf{k}_{0t}^T$  jer je  $\mathbf{k}$  simetrična matrica.

Statičkom kondenzacijom se može znatno smanjiti broj stupnjeva slobode modela potrebnih za provedbu dinamičke analize. Međutim, to automatski ne povlači i znatnu uštedu u vremenu potrebnom za rješavanje sustava. Naime, kondenzirana matrica krutosti  $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$  je puna (za razliku od vrpčaste matrice  $\mathbf{k}$ ) pa je time i postupak rješavanja vremenski skuplji po stupnju slobode. Stoga je odluku o provedbi kondenzacije potrebno donijeti posebno za svaki razmatrani slučaj.

## 5.3. Rayleigh-Ritzova metoda

Rayleigh-Ritzova metoda (poopćenje modalne transformacije) najopćenitiji je postupak reduciranja broja stupnjeva slobode matematičkog modela. Vektor čvornih pomaka  $\mathbf{u}$  (diskretni sustav) aproksimira se linearnom kombinacijom vektora oblika  $\boldsymbol{\psi}_j$ :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^J z_j(t)\boldsymbol{\psi}_j = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}(t), \quad (87)$$



gdje je  $\mathbf{z}$  vektor–stupac od  $J$  generaliziranih koordinata, a  $\Psi$  je matrica reda  $N \times J$  čiji su stupci vektori oblika (Ritzovi vektori)  $\psi_j$  pri čemu je  $J \leq N$ . Ritzovi vektori trebaju biti linearno nezavisni te moraju zadovoljavati geometrijske rubne uvjete.

Uvrštavanjem Ritzove transformacije (87) u jednadžbu gibanja sustava dobiva se

$$\mathbf{m}\Psi\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{c}\Psi\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{k}\Psi\mathbf{z} = \mathbf{p}(t) \quad (88)$$

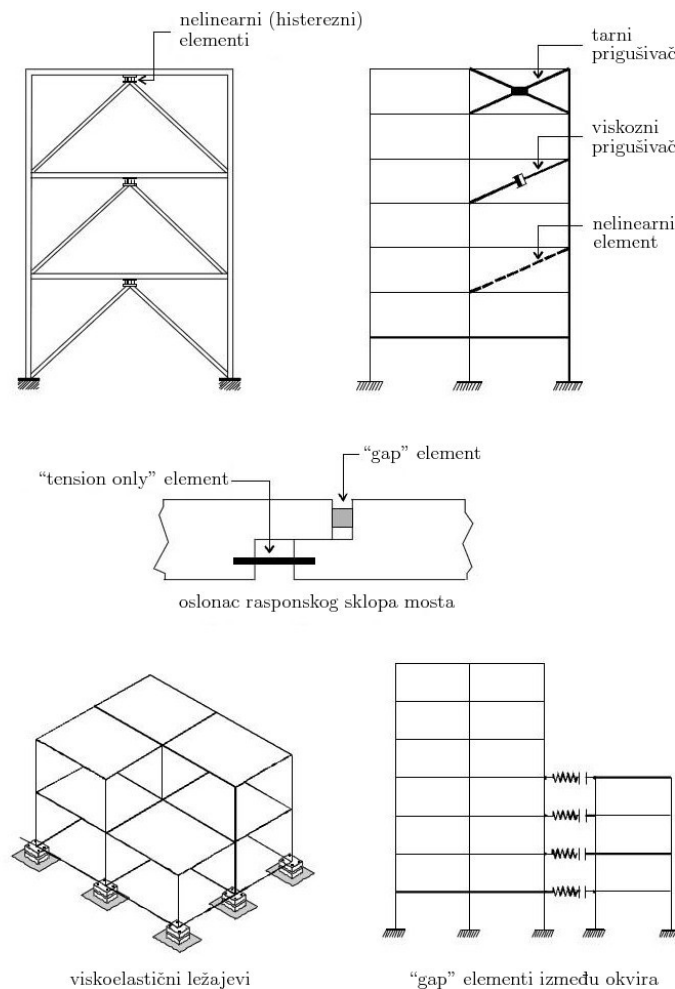
što množenjem s lijeve strane matricom  $\Psi^T$  daje

$$\hat{\mathbf{m}}\ddot{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{z} = \hat{\mathbf{p}}(t), \quad (89)$$

gdje je

$$\hat{\mathbf{m}} = \Psi^T \mathbf{m} \Psi \quad \hat{\mathbf{c}} = \Psi^T \mathbf{c} \Psi \quad \hat{\mathbf{k}} = \Psi^T \mathbf{k} \Psi \quad \hat{\mathbf{p}}(t) = \Psi^T \mathbf{p}(t). \quad (90)$$

Jednadžba (89) predstavlja sustav od  $J$  diferencijalnih jednadžbi po generaliziranim koordinatama  $\mathbf{z}(t)$ . Time je polazni sustav od  $N$  jednadžbi po geometrijskim koordinatama  $\mathbf{u}$  reduciran na sustav od  $J$  jednadžbi po generaliziranim koordinatama  $\mathbf{z}$ , što može biti značajna prednost u slučaju kada je  $J$  znatno manji od  $N$ .



Slika 22.: Primjeri nelinearnih elemenata

Općenito govoreći, izbor Ritzovih vektora je poprilično slobodan; moraju zadovoljavati samo navedene nužne uvjete. Međutim, u svrhu dobivanja zadovoljavajućih rezultata uz korištenje relativno malog broja vektora  $\psi_j$ , Ritzovi vektori biraju se prikladno analiziranom sustavu.

Za Ritzove vektore moguće je odabrati vlastite vektore čime se dobiva sustav jednadžbi u modalnim koordinatama. S tog aspekta, Rayleigh-Ritzova metoda predstavlja poopćenje modalne transformacije, a samim time implicira linearnost modela. Drugu mogućnost predstavlja generiranje Ritzovih vektora ovisnih o opterećenju (*engl. Load-Dependent Ritz vectors, LDR*), čijom primjenom se općenito dobivaju bolji rezultati u odnosu na primjenu istog broja vlastitih vektora, a posebno u slučaju potresne pobude. Za sustave sa diskretnim nelinearnim elementima (slika 22.), metodu je moguće vrlo učinkovito primijeniti korištenjem LDR vektora i FNA algoritma (*engl. Fast Nonlinear Analysis*), pri čemu vrijeme potrebno za proračun (u slučaju relativno malog broja nelinearnih elemenata) nije znatno veće u odnosu na linearnu analizu [1].

## 6. Numerička procjena dinamičkog odgovora

Rješenje jednadžbi gibanja dinamičkog sustava u zatvorenome obliku moguće je isključivo za linearne sustave i to pri djelovanju nekih jednostavnijih oblika opterećenja koje je moguće analitički formulirati. Već za složenija opterećenja, primjerice za potresno opterećenje koje je definirano kao diskretna funkcija, potrebno je i pri analizi jednostavnijih linearnih sustava pribjeći numeričkim metodama. Za obuhvaćanje nelinearnosti, numerička aproksimacija rješenja ostaje kao jedini izlaz.

Za određivanje odgovora konstrukcije na dinamičku pobudu potrebno je riješiti sustav diferencijalni jednadžbi:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t), \quad (91)$$

uz zadane početne uvjete u trenutku  $t = 0$ . Vektori  $\mathbf{f}_I$ ,  $\mathbf{f}_D$ , i  $\mathbf{f}_S$  funkcije su vektora pomaka  $\mathbf{u}(t)$  i njegovih derivacija po vremenu  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  i  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ . Rješenjem problema dobiva se funkcijska ovisnost vektora pomaka o vremenu.

Zajednička svim numeričkim metodama procjene odgovora konstrukcije je diskretizacija vremenske domene (*engl. time-stepping methods*). Vremenska skala dijeli se na niz vremenskih koraka ili intervala, obično jednake dužine  $\Delta t$ . Posljedično, vektor pobude i odgovor sustava definirani su kao diskretne funkcije za trenutke  $t_i = i \Delta t$ . U trenutku  $t_i$ , označenom kao trenutak  $i$ , vektor pobude je  $\mathbf{p}_i \equiv \mathbf{p}(t_i)$ , a odgovor konstrukcije izračunat za isti trenutak je  $\mathbf{u}_i \equiv \mathbf{u}(t_i)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_i \equiv \dot{\mathbf{u}}(t_i)$ , te  $\ddot{\mathbf{u}}_i \equiv \ddot{\mathbf{u}}(t_i)$ .

Polazeći od poznatog odgovora sustava u trenutku  $i$  koji zadovoljava jednadžbu gibanja (91) za razmatrani trenutak

$$(\mathbf{f}_I)_i + (\mathbf{f}_D)_i + (\mathbf{f}_S)_i = \mathbf{p}_i, \quad (92)$$

određuje se odgovor konstrukcije  $\mathbf{u}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$ , te  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  u trenutku  $i + 1$  koji zadovoljava jednadžbu (91) za trenutak  $i + 1$ :

$$(\mathbf{f}_I)_{i+1} + (\mathbf{f}_D)_{i+1} + (\mathbf{f}_S)_{i+1} = \mathbf{p}_{i+1} \quad (93)$$

Primjenjujući postupak uzastopno za  $i = 0, 1, 2, \dots$ , dobiva se traženi odgovor sustava za trenutke  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Početni uvjeti u trenutku  $i = 0$  daju podatke potrebne za pokretanje numeričkog postupka.

Ovako definiran postupak proračuna predstavlja općeniti pristup rješavanju jednadžbi gibanja i prikladan je za obuhvaćanje nelinearnosti budući da se izbjegava bilokakva upotreba superpozicije. Odgovor sustava za svaki korak predstavlja nezavisnu analizu te nema potrebe za kombiniranjem različitih doprinosa odgovoru sustava unutar samog koraka. Nelinearno ponašanje može se lako obuhvatiti pretpostavljajući konstantna svojstva sustava unutar koraka, a mijenjajući ih na odgovarajući način pri prelasku iz jednog koraka u drugi. Stoga nelinearna analiza zapravo predstavlja niz uzastopnih linearnih analiza promjenjivog sustava. Svaki željeni stupanj profinjenja pri obuhvaćanju nelinearnosti moguć je usvajanjem dovoljno kratkog vremenskog intervala  $\Delta t$  ili dodatnom iteracijom unutar koraka.

Za procjenu odgovora sustava na kraju koraka potrebne su tri jednadžbe budući da je potrebno odrediti tri nepoznata vektora  $\mathbf{u}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$ , i  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ . Dvije jednadžbe dobivaju se numeričkim deriviranjem (diferenciranjem) ili numeričkom integracijom, dok se kao treća jednadžba koristi izraz (91) u odabranom trenutku.

Ovisno o vezi veličina s početka i s kraja intervala, postupak može biti eksplicitan ili implicitan. U eksplicitnim metodama vrijednosti odgovora sustava koje se proračunavaju ovise isključivo o vrijednostima koje su dobivene prethodnim korakom. S druge strane, vrijednosti koje se u danom koraku proračunavaju implicitnim postupkom ovise i o nepoznatim vrijednostima odgovora u tom koraku te je stoga za njihovo određivanje potrebna iteracija. Kako iteracija vremenski opterećuje proračun poželjno je implicitnu metodu preformulirati u eksplicitnu.

Tri važna zahtjeva koja se postavljaju na numeričke metode su:

- (1) *konvergencija* — smanjivanjem vremenskog intervala  $\Delta t$  postupak bi trebao težiti točnom rješenju
- (2) *stabilnost* — numerički postupak bi trebao biti stabilan u prisutnosti pogrešaka zaokruživanja i pogrešaka prekida; instabilitet se manifestira uvećavanjem pogrešaka naslijeđenih iz prethodnog koraka u proračunima narednih koraka; razlikuju se uvjetno i bezuvjetno stabilne numeričke metode, pri čemu uvjetno stabilne metode postavljaju zahtjev na veličinu intervala  $\Delta t$
- (3) *točnost* — greške proračuna trebale bi biti u prihvatljivim granicama, odnosno numerička metoda bi trebala davati rezultate koji su po volji blizu točnom rješenju

Prilikom analize sustava s jednim stupnjem slobode kriterij stabilnosti nije ograničavajući faktor na izbor  $\Delta t$  budući da  $\Delta t$  mora biti znatno manji od granice stabilnosti (uvjet stabilnosti općenito je dan u obliku  $\Delta t/T_n < \alpha$ , gdje je  $\alpha$  pozitivni realni broj) kako bi se funkcija opterećenja mogla adekvatno obuhvatiti te kako bi se zadovoljio uvjet točnosti. S druge strane, prilikom analize sustava s više stupnjeva slobode kriterij stabilnosti postaje restriktivan budući da najviši mod, iako znatno ne utječe na točnost rezultata, diktira izbor intervala  $\Delta t$ . To može dovesti do jako malih vrijednosti zahtijevanog vremenskog koraka, što umanjuje efikasnost metode čineći ju vremenski skupljom. Stoga je pri provedbi dinamičke analize sustava s više stupnjeva slobode poželjno koristiti bezuvjetno stabilne numeričke postupke.

Pri numeričkom rješavanju jednadžbi gibanja nužno se javljaju greške koje se mogu manifestirati u obliku: a) pomaka u fazi ili u obliku prividne promjene frekvencije (produljenje ili skraćenje perioda), i b) numeričkog (umjetnog) prigušenja, kojim numerička metoda daje ili oduzima energiju dinamičkom sustavu. Način manifestiranja greške i njen utjecaj ovisan je o primijenjenoj metodi te o odabranom intervalu  $\Delta t$ .

Primarni faktor kojeg je potrebno razmotriti pri izboru numeričke metode je njena efikasnost pri rješavanju razmatranog problema. Efikasnost metode vezana je uz vrijeme potrebno za proračun odgovora sustava uz postizanje željene točnosti. Točnost sama po sebi ne može biti kriterij izbora budući da sve metode moraju konvergirati točnom rješenju smanjenjem intervala  $\Delta t$  (postajući time vremenski skuplje). U svakom slučaju, korak  $\Delta t$  mora biti dovoljno mali kako bi se adekvatno obuhvatilo opterećenje i odgovor sustava.

## 6.1. Newmarkova metoda

Metode direktne integracije, koje su općenito primjenjive za rješavanje proizvoljnog skupa nelinearnih jednadžbi gibanja, zasnivaju se na jednadžbama:

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \int_0^{\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau \quad (94)$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau \quad (95)$$

koje izražavaju vezu vektora brzine i vektora pomaka na kraju koraka s pripadnim vrijednostima s početka koraka preko dodatnog integralnog člana. Kako bi se ovakva analiza mogla provesti potrebno je usvojiti pretpostavku o promjeni vektora ubrzanja  $\ddot{\mathbf{u}}(\tau)$  unutar intervala  $\Delta t$ . Tom pretpostavkom uvjetovana je i promjena vektora brzine  $\dot{\mathbf{u}}(\tau)$  što omogućava izračunavanje traženih veličina  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$  i  $\mathbf{u}_{i+1}$  s kraja vremenskog koraka.

Općenita pretpostavka o vektoru ubrzanja je oblika

$$\ddot{\mathbf{u}}(\tau) = \ddot{\mathbf{u}}_i + f(\tau) (\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i) \quad (96)$$

gdje je funkcija  $f(\tau)$  neprekidna za  $\tau \in \langle 0, \Delta t \rangle$  i monotono rastuća za  $\tau \in [0, \Delta t]$  za koju

vrijedi

$$f(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau = 0 \\ 1, & \tau = \Delta t \end{cases} \quad (97)$$

Funkcijom  $f(\tau)$  definira se varijacija vektora ubrzanja unutar intervala  $\Delta t$ . Iz jednadžbe (96) je vidljivo da je u  $i$ -tom koraku za sve stupnjeve slobode usvojena ista pretpostavka o promjeni vektora ubrzanja.

Uvrštavanjem izraza (96) u jednadžbu (94) slijedi

$$\dot{\mathbf{u}}(\tau) = \dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i \tau + (\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i) \int_0^\tau f(\tau) d\tau, \quad (98)$$

što uz

$$g(\tau) = \int_0^\tau f(\tau) d\tau \quad (99)$$

i

$$\gamma \Delta t = \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (100)$$

daje

$$\dot{\mathbf{u}}(\tau) = \dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i \tau + (\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i) g(\tau) \quad (101)$$

odnosno

$$\boxed{\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + [(1 - \gamma) \Delta t] \ddot{\mathbf{u}}_i + (\gamma \Delta t) \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}} \quad (102)$$

Uvrštavanjem izraza (101) u jednadžbu (95) dobiva se

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i \tau + \ddot{\mathbf{u}}_i \frac{\tau^2}{2} + (\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i) \int_0^\tau g(\tau) d\tau, \quad (103)$$

što uz

$$\beta (\Delta t)^2 = \int_0^{\Delta t} g(\tau) d\tau \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (104)$$

daje

$$\boxed{\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + (\Delta t) \dot{\mathbf{u}}_i + [(0,5 - \beta)(\Delta t)^2] \ddot{\mathbf{u}}_i + [\beta (\Delta t)^2] \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}} \quad (105)$$

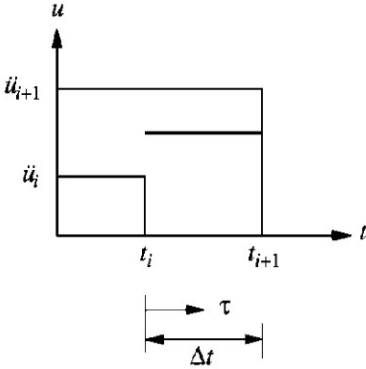
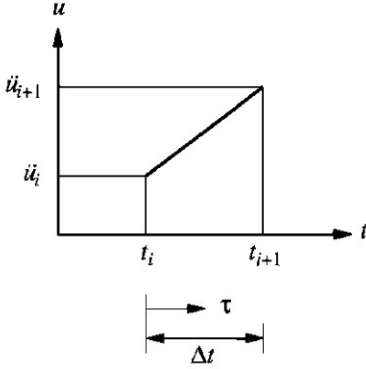
Jednadžbe (102) i (105) čine osnovu familije Newmarkovih numeričkih metoda. Uz korištenje jednadžbe (93) moguće je proračunati vrijednosti odgovora konstrukcije na kraju vremenskog koraka.

Iz jednadžbe (102) je vidljivo da faktor  $\gamma$  težinira (linearno) utjecaj početnog i konačnog ubrzanja na promjenu vektora brzine. Slično tome, faktor  $\beta$  težinira doprinose početnog i konačnog ubrzanja na promjenu vektora pomaka. Faktor  $\gamma$  također utječe na iznos umjetnog prigušenja u metodi; za slučaj  $\gamma = 1/2$  umjetno prigušenje iščezava [5].

Metoda prosječnog ubrzanja i metoda linearnog ubrzanja posebni su slučajevi Newmarkove metode kao što je vidljivo iz tablice 4. Uvjet stabilnosti Newmarkove metode dan je izrazom [8]:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \quad (106)$$

Tablica 4.: Metoda prosječnog ubrzanja i metoda linearnog ubrzanja

PROSJEČNO UBRZANJE ( $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$ )	LINEARNO UBRZANJE ( $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$ )
	
$\ddot{\mathbf{u}}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i)$ $\dot{\mathbf{u}}(\tau) = \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i)$ $\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i)$ $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i \tau + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i)$ $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i)$	$\ddot{\mathbf{u}}(\tau) = \ddot{\mathbf{u}}_i + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i)$ $\dot{\mathbf{u}}(\tau) = \dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i \tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i)$ $\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i)$ $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i \tau + \ddot{\mathbf{u}}_i \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i)$ $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i \Delta t + (\Delta t)^2 \left( \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \frac{1}{3} \ddot{\mathbf{u}}_i \right)$

Iz toga slijedi da je metoda prosječnog ubrzanja bezuvjetno stabilna ( $\Delta t/T_n \leq \infty$ ), dok je metoda linearnog ubrzanja numerički stabilna uz uvjet  $\Delta t/T_n \leq 0,551$ . Uslijed toga će se u ovom radu koristiti metoda prosječnog ubrzanja.

Iz jednadžbi (102) i (105) je vidljivo da Newmarkova metoda pripada skupini implicitnih metoda budući da vrijednosti odgovora sustava u trenutku  $i + 1$  ne ovise isključivo o vrijednostima u trenutku  $i$ . Kako bi se izbjegla potreba za iteracijom, izvornu Newmarkovu metodu potrebno je preformulirati u eksplicitan oblik. Uz to je radi obuhvaćanja nelinearnog ponašanja sustava potrebna inkrementalna formulacija veličina:

$$\Delta \mathbf{u}_i \equiv \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i \quad \Delta \dot{\mathbf{u}}_i \equiv \dot{\mathbf{u}}_{i+1} - \dot{\mathbf{u}}_i \quad \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i \equiv \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (107)$$

$$(\Delta \mathbf{f}_x)_i \equiv (\mathbf{f}_x)_{i+1} - (\mathbf{f}_x)_i \quad \Delta \mathbf{p}_i \equiv \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i \quad (108)$$

Korištenjem relacija (107) jednadžbe (102) i (105) mogu se zapisati u obliku

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}_i = (\Delta t) \ddot{\mathbf{u}}_i + (\gamma \Delta t) \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i \quad \Delta \mathbf{u}_i = (\Delta t) \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i + \beta (\Delta t)^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (109)$$

Iz druge od gornjih jednadžbi slijedi

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta \mathbf{u}_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (110)$$

što uvrštavanjem u jednadžbu (109a) daje

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u}_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (111)$$

Jednadžba gibanja u inkrementalnom obliku glasi

$$(\Delta \mathbf{f}_I)_i + (\Delta \mathbf{f}_D)_i + (\Delta \mathbf{f}_S)_i = \Delta \mathbf{p}_i \quad (112)$$

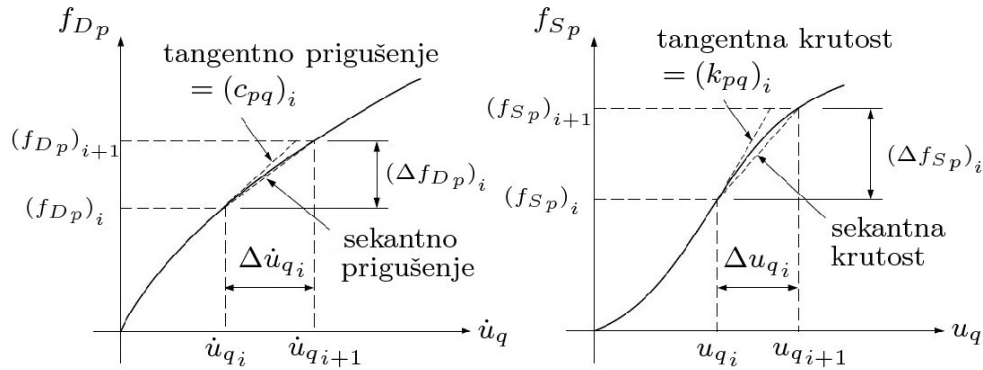
Budući da se, kako je već napomenuto, nelinearna analiza provodi kao niz uzastopnih linearnih analiza promjenjivog sustava, nelinearno se ponašanje unutar inkrementa aproksimira linearnim pa gornja jednadžba prelazi u:

$$\mathbf{m} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{c}_i \Delta \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{k}_i \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{p}_i \quad (113)$$

Izrazom (113) predviđeno je nelinearno viskozno prigušenje i nelinearna krutost. Matrice  $\mathbf{c}_i$  i  $\mathbf{k}_i$  predstavljaju *tangentne* matrice (za  $i$ -ti korak) čiji su koeficijenti definirani kao:

$$(c_{pq})_i = \left( \frac{\partial f_{Dp}}{\partial \dot{u}_q} \right)_i \quad (k_{pq})_i = \left( \frac{\partial f_{Sp}}{\partial u_q} \right)_i, \quad (114)$$

gdje  $(c_{pq})_i$  predstavlja koeficijent tangentnog prigušenja, a  $(k_{pq})_i$  koeficijent tangentne krutosti (slika 23.). Budući da se svojstva prigušenja sustava (ekvivalentnog viskoznog



Slika 23.: Nelinearni koeficijenti prigušenja (lijevo) i krutosti (desno)

prigušenja) ne mogu egzaktno odrediti, linearno viskozno prigušenje predstavlja razumnu aproksimaciju. Stoga se nelinearno viskozno prigušenje neće razmatrati iako principijelno ne predstavlja praktičan problem pri formulaciji algoritma. Jednadžba (113) tada poprima oblik

$$\mathbf{m} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{c} \Delta \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{k}_i \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{p}_i \quad (115)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (110) i (111) u izraz (115) dobiva se

$$\hat{\mathbf{k}}_i \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \hat{\mathbf{p}}_i, \quad (116)$$

gdje je

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \mathbf{k}_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{c} + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{m} \quad (117)$$

i

$$\Delta \hat{\mathbf{p}}_i = \Delta \mathbf{p}_i + \left( \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{m} + \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{c} \right) \dot{\mathbf{u}}_i + \left[ \frac{1}{2\beta} \mathbf{m} + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{c} \right] \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (118)$$

Jednadžba kvazistatičke ravnoteže (116) predstavlja ključnu jednadžbu koju je potrebno riješiti u svakom koraku. Odredivši prirast pomaka  $\Delta \mathbf{u}_i$ , prirast brzine  $\Delta \dot{\mathbf{u}}_i$  određuje se pomoću jednadžbe (111), a prirast ubrzanja  $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i$  određuje se iz jednadžbe (110). Vrijednosti odgovora sustava u trenutku  $i + 1$  tada se određuju iz jednadžbi (107). Ubrzanje  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  može se odrediti i iz uvjeta dinamičke ravnoteže u trenutku  $i + 1$  kao:

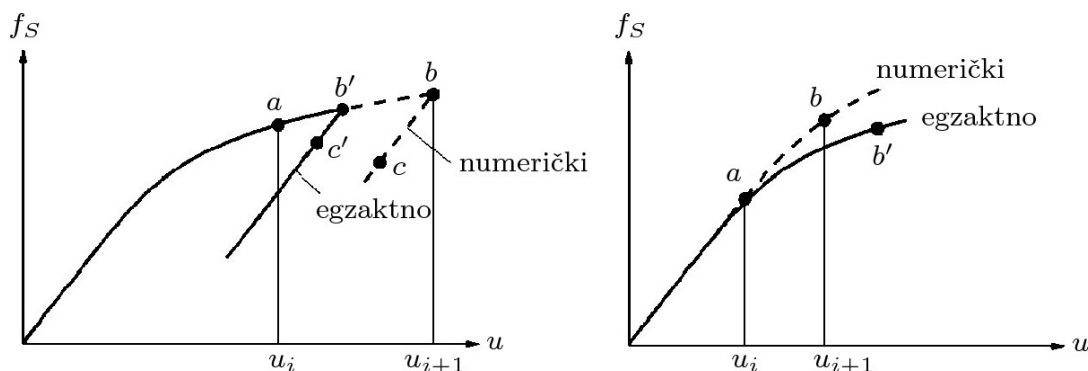
$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \mathbf{m}^{-1}[\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} - (\mathbf{f}_S)_{i+1}] \quad (119)$$

Iz gornjeg izraza određuje se i vektor  $\ddot{\mathbf{u}}_0$  potreban za pokretanje postupka.

Opisana procedura konstantnog koraka  $\Delta t$  može polučiti neprihvatljivo netočne rezultate. Dva su osnovna izvora značajnih pogrešaka: a) upotreba konstantnog vremenskog intervala usporava detektiranje promjena u ovisnosti sile o pomaku, i b) koristi se tangenta umjesto sekantne krutosti.

Pogreška uslijed upotrebe konstantnog vremenskog intervala shematski je prikazana lijevo na slici 24. Neka je na početku intervala (trenutak  $i$ ) pomak  $u_i$ , a brzina  $\dot{u}_i$  neka je pozitivna (pomaci se povećavaju), što je na slici označeno točkom  $a$ . Rezultat Newmarkove metode su pomak  $u_{i+1}$  i brzina  $\dot{u}_{i+1}$  na kraju intervala što je označeno točkom  $b$ . Ako je brzina  $\dot{u}_{i+1}$  negativna, tada je u točki  $b'$  negdje unutar koraka brzina postala nula i zatim promijenila predznak, a pomaci su se počeli smanjivati. Ukoliko se numeričkom procedurom ne locira točka  $b'$ , proračun će rezultirati točkom  $c$  umjesto točke  $c'$  koja bi bila korektna. Takva „premašivanja“ događala bi se svaki puta pri promjeni predznaka brzine što uzrokuje pogreške u rezultatima.

Te pogreške bi se mogle izbjeći točnim određivanjem točke  $b'$ . To je moguće ostvariti integriranjem s manjim korakom unutar intervala  $t_i$  do  $t_{i+1}$  (primjerice s  $\Delta t/4$ ) ili iterativnim postupkom postupnog namještanja veličine koraka integracije sve dok na kraju intervala brzina približno ne iščezava.



Slika 24.: Shematski prikaz izvora značajnih pogrešaka

Pogreška uslijed aproksimacije sekantne krutosti tangentnom shematski je prikazana desno na slici 24. Pomak u trenutku  $i$  prikazan je točkom  $a$ . Upotrebom tangentne krutosti



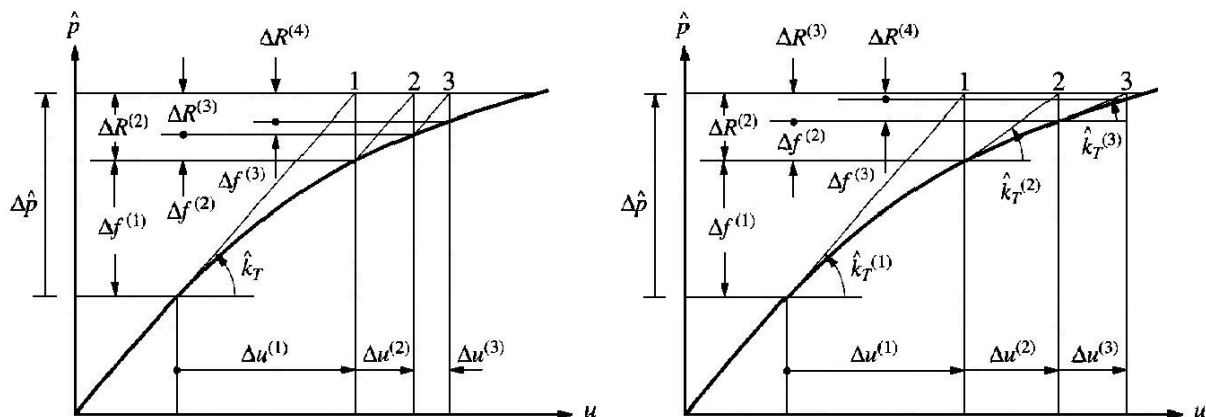
numerička integracija od trenutka  $i$  do  $i + 1$  rezultira pomakom  $u_{i+1}$  označenim točkom  $b$ , dok bi korištenje sekantne krutosti rezultiralo točkom  $b'$ . Akumuliranje ovog nesrazmjera kroz niz koraka može dovesti do značajnih pogrešaka.

Ove pogreške moguće je minimizirati iterativnim postupkom unutar vremenskog intervala  $\Delta t$ . Ključna jednačba koja se rješava u svakom koraku Newmarkove metode je jednačba kvazistatičke ravnoteže (116) uz kvazistatičku krutost definiranu izrazom (117). Jednačba je shematski prikazana na slici 25. pri čemu je iz notacije izbačen indeks  $i$ , a tangentna krutost  $\mathbf{k}_i$  je označena s  $\mathbf{k}_T$ , odnosno s  $\hat{\mathbf{k}}_T$ :

$$\hat{\mathbf{k}}_T \Delta \mathbf{u} = \Delta \hat{\mathbf{p}} \quad (120)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_T = \mathbf{k}_T + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{c} + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{m} \quad (121)$$

Veza veličina je nelinearna budući da tangentna krutost ovisi o iznosu pomaka. U slučaju statičke analize vrijedi  $\hat{\mathbf{k}}_T = \mathbf{k}_T$  pa je nelinearnost u  $\hat{\mathbf{k}}_T$  istovjetna nelinearnosti u  $\mathbf{k}_T$ . S druge strane, prisutnost mase i prigušenja u izrazu za  $\hat{\mathbf{k}}_T$  pri dinamičkoj analizi umanjuje nelinearnost budući je njihov doprinos za uobičajene vrijednosti intervala  $\Delta t$  obično znatno veći od  $\mathbf{k}_T$ .



Slika 25.: Newton-Raphsonova metoda iteracije unutar koraka

Iterativna procedura prikazana lijevo na slici 25. predstavlja modificirani oblik Newton-Raphsonove metode. Prvi korak iteracije primjena je jednačbe (120):

$$\hat{\mathbf{k}}_T \Delta \mathbf{u}^{(1)} = \Delta \hat{\mathbf{p}} \quad (122)$$

radi određivanja vektora  $\Delta \mathbf{u}^{(1)}$  (označeno točkom  $b$  na slici 24. desno) koji predstavlja prvu aproksimaciju konačnog prirasta  $\Delta \mathbf{u}$  (označeno točkom  $b'$  na slici 24. desno). Stvarna sila  $\Delta \mathbf{f}^{(1)}$  vezana uz vektor  $\Delta \mathbf{u}^{(1)}$ , manja je od sile  $\Delta \hat{\mathbf{p}}$  pa dolazi do pojave reziduala definiranog kao:  $\Delta \mathbf{R}^{(2)} = \Delta \hat{\mathbf{p}} - \Delta \mathbf{f}^{(1)}$ . Dodatni prirast pomaka  $\Delta \mathbf{u}^{(2)}$  uslijed tog reziduala određuje se iz

$$\hat{\mathbf{k}}_T \Delta \mathbf{u}^{(2)} = \Delta \mathbf{R}^{(2)} = \Delta \hat{\mathbf{p}} - \Delta \mathbf{f}^{(1)}, \quad (123)$$

koristeći istu tangentnu krutost kao i u prethodnom koraku. Taj dodatni prirast koristi se tada za procjenu novog iznosa reziduala i postupak se nastavlja do konvergencije. Kao kriterij konvergencije koristi se uvjet

$$\frac{[\Delta \mathbf{R}^{(j)}]^T \Delta \mathbf{u}^{(j)}}{[\Delta \hat{\mathbf{p}}]^T \Delta \mathbf{u}} < \epsilon, \quad (124)$$

kojim se rad rezidualnih sila  $\Delta \mathbf{R}^{(j)}$  na prirastu pomaka  $\Delta \mathbf{u}^{(j)}$  uspoređuje s radom sile  $\Delta \hat{\mathbf{p}}$  na trenutnoj procjeni ukupnog prirasta pomaka  $\Delta \mathbf{u}$ , čime se osigurava konvergencija vektora pomaka (translacijskih i rotacijskih) te vektora sila.

Kako bi se iterativna procedura mogla provesti potrebno je u svakom koraku procijeniti vektor  $\Delta \mathbf{f}^{(j)}$ . Njega je moguće odrediti razmatranjem kvazistatičkih jednadžbi ravnoteže formuliranih preko tangentne i sekantne krutosti:

$$\left( \mathbf{k}_T + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{c} + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{m} \right) \Delta \mathbf{u}^{(j)} = \Delta \mathbf{R}^{(j)} \quad (125)$$

$$\left( \mathbf{k}_S^{(j)} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{c} + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{m} \right) \Delta \mathbf{u}^{(j)} = \Delta \mathbf{f}^{(j)} \quad (126)$$

Oduzimanjem gornjih jednadžbi slijedi

$$(\mathbf{k}_T - \mathbf{k}_S^{(j)}) \Delta \mathbf{u}^{(j)} = \Delta \mathbf{R}^{(j)} - \Delta \mathbf{f}^{(j)}, \quad (127)$$

što uz  $\Delta \mathbf{R}^{(j)} = \hat{\mathbf{k}}_T \Delta \mathbf{u}^{(j)}$  i uz

$$\mathbf{k}_S^{(j)} = \frac{\mathbf{f}_S^{(j)} - \mathbf{f}_S^{(j-1)}}{\Delta \mathbf{u}^{(j)}} \quad (128)$$

prelazi u

$$\Delta \mathbf{f}^{(j)} = \mathbf{f}_S^{(j)} - \mathbf{f}_S^{(j-1)} + (\hat{\mathbf{k}}_T - \mathbf{k}_T) \Delta \mathbf{u}^{(j)} \quad (129)$$

što je i bilo traženo.

Izvorna Newton-Raphsonova metoda razlikuje se od opisanog modificiranog postupka utoliko što se u svakom koraku iteracije traži trenutna tangentna krutost nasuprot korištenju tangentne krutosti s početka intervala, što je shematski prikazano na slici 25. desno. Uslijed toga, izvorna Newton-Raphsonova metoda konvergira brže u odnosu na modificirani postupak (kvadratna konvergencija u odnosu na linearnu konvergenciju [17]) dok je istovremeno numerički zahtjevnija — u svakoj iteraciji potrebno je proračunati novu tangentnu matricu krutosti  $\mathbf{k}_T$ , a ukoliko se jednadžba (120) rješava direktnim metodama, dekompoziciju matrice sustava potrebno je vršiti u svakoj iteraciji. S druge strane, izvorni oblik rješava problem konvergencije koji se može javiti u modificiranom postupku kada korištena tangenta ima suprotan nagib od nagiba tangente u trenutnom rješenju [17].

## 6.2. Algoritam proračuna

Postupak direktne integracije jednadžbi gibanja prema Newmarkovoj metodi prikazan je algoritmom 1, dok je rekapitulacija izvorne Newton-Raphsonove metode i njenog modificiranog oblika prikazana algoritmom 2 i algoritmom 3.

**Algoritam 1** Newmarkova metoda

- 
- 1: izaberi  $\gamma$  i  $\beta$
  - 2: izaberi korak  $\Delta t$
  - 3: početni uvjeti:  $\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0$
  - 4:  $\ddot{\mathbf{u}}_0 \leftarrow \mathbf{m}^{-1}[\mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_0 - (\mathbf{f}_S)_0]$
  - 5:  $\mathbf{a} \leftarrow \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{m} + \frac{\gamma}{\beta}\mathbf{c}$
  - 6:  $\mathbf{b} \leftarrow \frac{1}{2\beta}\mathbf{m} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\mathbf{c}$
  - 7: **for**  $i = 0$  **to**  $(t/\Delta t) - 1$  **do**
  - 8:  $\Delta\hat{\mathbf{p}}_i \leftarrow \Delta\mathbf{p}_i + \mathbf{a}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{b}\ddot{\mathbf{u}}_i$
  - 9: izračunaj  $\Delta\mathbf{u}_i \rightarrow$  algoritam 2 ili algoritam 3
  - 10:  $\Delta\dot{\mathbf{u}}_i \leftarrow \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\mathbf{u}_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{u}}_i + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{u}}_i$
  - 11:  $\Delta\ddot{\mathbf{u}}_i \leftarrow \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta\mathbf{u}_i - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{u}}_i$
  - 12:  $\mathbf{u}_{i+1} \leftarrow \mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}_i$
  - 13:  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1} \leftarrow \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta\dot{\mathbf{u}}_i$
  - 14:  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \leftarrow \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta\ddot{\mathbf{u}}_i$
  - 15: **end for**
- 

**Algoritam 2** Newton-Raphsonova metoda, izvorni oblik

- 
- 1:  $\mathbf{u}_{i+1}^{(0)} \leftarrow \mathbf{u}_i$      $\mathbf{f}_S^{(0)} \leftarrow (\mathbf{f}_S)_i$      $\Delta\mathbf{R}^{(1)} \leftarrow \Delta\hat{\mathbf{p}}_i$      $j \leftarrow 1$      $\epsilon \in \{\text{ulazni podaci}\}$
  - 2: **repeat**
  - 3: odredi tangentnu matricu krutosti  $\mathbf{k}_i^{(j)}$
  - 4:  $\hat{\mathbf{k}}_T^{(j)} \leftarrow \mathbf{k}_i^{(j)} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{c} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{m}$
  - 5:  $\Delta\mathbf{u}^{(j)} \leftarrow [\hat{\mathbf{k}}_T^{(j)}]^{-1}\Delta\mathbf{R}^{(j)}$
  - 6:  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)} \leftarrow \mathbf{u}_{i+1}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{u}^{(j)}$
  - 7:  $\Delta\mathbf{f}^{(j)} \leftarrow \mathbf{f}_S^{(j)} - \mathbf{f}_S^{(j-1)} + (\hat{\mathbf{k}}_T^{(j)} - \mathbf{k}_i^{(j)})\Delta\mathbf{u}^{(j)}$
  - 8:  $\Delta\mathbf{R}^{(j+1)} \leftarrow \Delta\mathbf{R}^{(j)} - \Delta\mathbf{f}^{(j)}$
  - 9:  $\Delta\mathbf{u} \leftarrow \Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(j)}$
  - 10:  $j \leftarrow j + 1$
  - 11: **until**  $([\Delta\mathbf{R}^{(j)}]^T \Delta\mathbf{u}^{(j)})/([\Delta\hat{\mathbf{p}}_i]^T \Delta\mathbf{u}) < \epsilon$
  - 12:  $\Delta\mathbf{u}_i \leftarrow \Delta\mathbf{u}$
  - 13: **return**  $\Delta\mathbf{u}_i$
-

**Algoritam 3** Newton-Raphsonova metoda, modificirani oblik

---

```

1: odredi tangentnu matricu krutosti  $\mathbf{k}_i$ 
2:  $\mathbf{u}_{i+1}^{(0)} \leftarrow \mathbf{u}_i$     $\mathbf{f}_S^{(0)} \leftarrow (\mathbf{f}_S)_i$     $\Delta \mathbf{R}^{(1)} \leftarrow \Delta \hat{\mathbf{p}}_i$     $\hat{\mathbf{k}}_T \leftarrow \mathbf{k}_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{c} + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{m}$ 
    $j \leftarrow 1$     $\epsilon \in \{\text{ulazni podaci}\}$ 
3: repeat
4:    $\Delta \mathbf{u}^{(j)} \leftarrow [\hat{\mathbf{k}}_T]^{-1} \Delta \mathbf{R}^{(j)}$ 
5:    $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)} \leftarrow \mathbf{u}_{i+1}^{(j-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(j)}$ 
6:    $\Delta \mathbf{f}^{(j)} \leftarrow \mathbf{f}_S^{(j)} - \mathbf{f}_S^{(j-1)} + (\hat{\mathbf{k}}_T - \mathbf{k}_i) \Delta \mathbf{u}^{(j)}$ 
7:    $\Delta \mathbf{R}^{(j+1)} \leftarrow \Delta \mathbf{R}^{(j)} - \Delta \mathbf{f}^{(j)}$ 
8:    $\Delta \mathbf{u} \leftarrow \Delta \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}^{(j)}$ 
9:    $j \leftarrow j + 1$ 
10: until  $([\Delta \mathbf{R}^{(j)}]^T \Delta \mathbf{u}^{(j)}) / ([\Delta \hat{\mathbf{p}}_i]^T \Delta \mathbf{u}) < \epsilon$ 
11:  $\Delta \mathbf{u}_i \leftarrow \Delta \mathbf{u}$ 
12: return  $\Delta \mathbf{u}_i$ 

```

---

## 7. Proračun nadogradnje poslovnog tornja Cibona

### 7.1. Tehnički opis konstrukcije

Poslovni toranj nalazi se u sklopu sportsko–poslovnog kompleksa Cibona u Zagrebu. Osnovnu tlocrtnu formu čine dva polukruga radijusa  $r = 12,4\text{ m}$ , međusobno pomaknuta za  $1,8\text{ m}$ , ukupne površine  $\sim 485,0\text{ m}^2$ . Objekt sadrži podrum, prizemlje, mezanin, 21 kat te etažu strojarnice na vrhu objekta, sveukupno 25 etaža. Ukupna visina tornja od temeljne podloge do vrha iznosi  $92,0\text{ m}$ .

Poslovni toranj projektiran je kao monolitna armirano betonska konstrukcija, sastavljena od zidova, fasadnih okvira i stropnih ploča kao osnovnih konstruktivnih elemenata. Glavni objekt predstavlja složenu, heterogenu prostornu konstrukciju, a sastoji se od središnjih liftnih jezgri, zidova u liniji stubišno–liftnog bloka i dva polukružna, međusobno pomaknuta fasadna okvira. Između obodnih, fasadnih okvira te središnjih jezgri i zidova projektirana je armirano betonska ploča debljine  $20\text{ cm}$ , koja u svim etažama djeluje kao kruta horizontalna dijafragma.

Između uzdužnih zidova (debljine  $30\text{ cm}$ ) nalaze se prečke, dimenzija  $30/115\text{ cm}$  u karakterističnom katu, tako da navedeni nizovi zidova djeluju kao zidovi s otvorima i predstavljaju osnovne konstruktivne elemente za preuzimanje horizontalnih sila u uzdužnom smjeru. U poprečnom smjeru, između zidova liftnih jezgri (debljine  $40\text{ cm}$ ) projektirana su tri niza prečki, dimenzija  $80/70\text{ cm}$  u karakterističnom katu, tako da ti zidovi zajedno s prečkama čine glavnu konstrukciju za preuzimanje horizontalnog opterećenja u poprečnom smjeru.

Fasadni okviri imaju stupove na osnovom razmaku od 2,55 m. U prvih trinaest etaža odabrani su stupovi kružnog presjeka  $\phi 60$  cm, a dalje do vrha objekta  $\phi 50$  cm. Fasadne grede projektirane su dimenzija 60/50 cm do jedanaestog kata, izuzev stropa prizemlja i mezanina, a od stropa dvanaestog kata do vrha objekta odabrane su grede dimenzija 50/50 cm.

Na devetnaestom i dvadesetom katu objekta, u jednom tlocrtnom polukrugu, smješten je restoran. Fasada, a time i sama konstrukcija uvučeni su djelomično prema unutra, tako da vanjski stupovi restorana kroz dvije etaže leže na roštiljnom sistemu greda stropa osamnaestog kata. Roštiljni sistem greda sastoji se od meridijalnih greda, razapetih između vanjskih stupova i unutarnjih zidova, te jedne radijalne grede koja leži ispod stupova restorana.

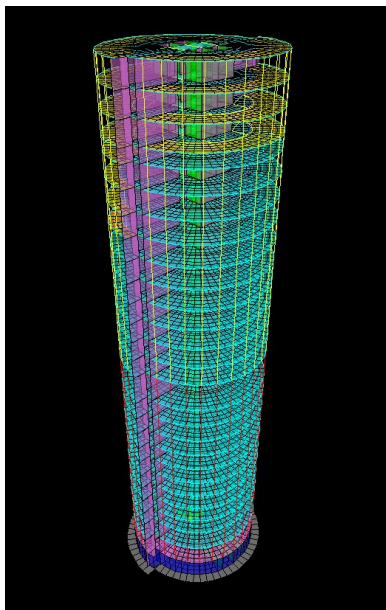
Temeljna konstrukcija tornja složena je konstrukcija izrazito prostornog djelovanja, a sastoji se od donje temeljne ploče debljine 150 cm, stropne ploče podruma debljine 40 cm te podrumskih zidova različite debljine. Temeljna ploča projektirana je u ukupnoj površini od  $\sim 600,0$  m<sup>2</sup>. Temeljenje objekta provodi se na horizontalno uslojenom šljunku, sloju relativno velike dubine s dobro granuliranim materijalom.

Kompletna konstrukcija objekta izvedena je u betonu kvalitete MB 30, dok su za armiranje korišteni rebrasti čelik RA 400/500 i zavarene armaturne mreže MA 500/560. Razmatrana je nadogradnja objekta u vidu proširenja suženih etaža na punu širinu, pri čemu se proširenje izvodi arimirano betonskom pločom debljine 20 cm, uz dodavanje potrebnih stupova i greda kao u karakterističnome katu.

## 7.2. Numerički model

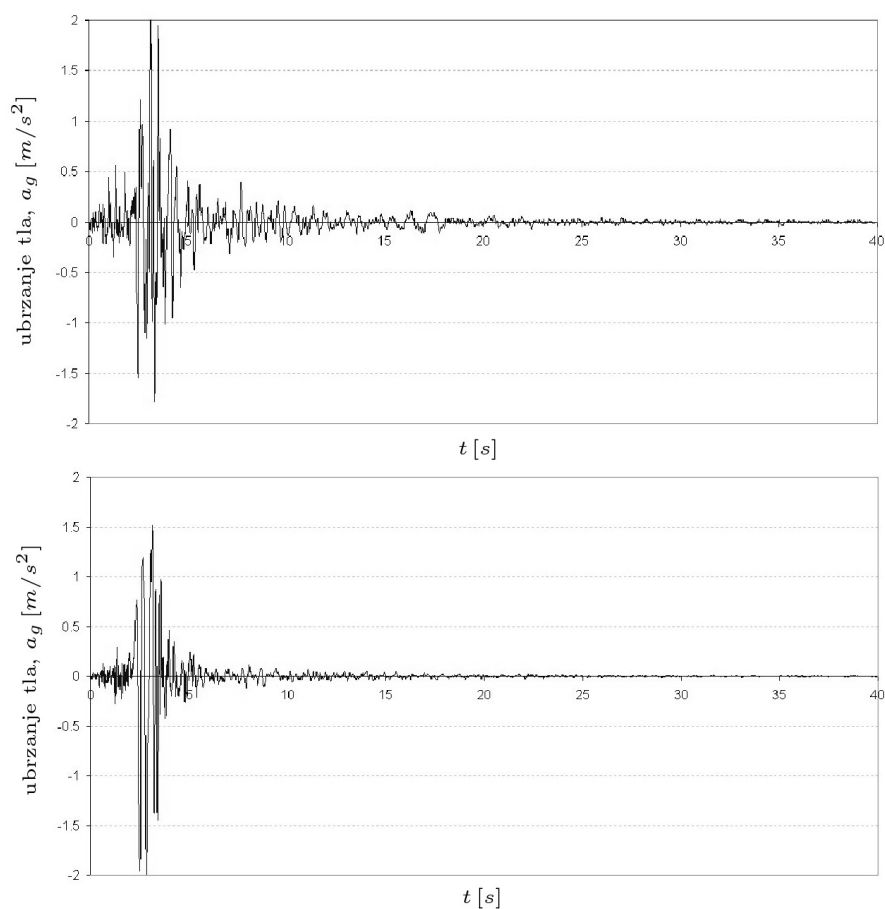
Numerički model konstrukcije izrađen je u računalnom programu SAP2000 Advanced v14.1.0 (slika 26.). Grede i stupovi modelirani su štapnim konačnim elementima odgovarajućih geometrijskih i materijalnih karakteristika, dok su ploče i zidovi modelirani plošnim elementima. Djelovanje krutih horizontalnih međukatnih dijafragmi modelirano je uvođenjem odgovarajućih kinematičkih ograničenja. Konstrukcija je oslonjena na zglobne ležajeve nepomične u horizontalnom smjeru, dok je djelovanje podloge u vertikalnom smjeru modelirano plošnim oprugama krutosti 30000 kN/m<sup>3</sup>.

Konstrukcija je proračunata za djelovanje potresnog opterećenja uz istovremeno djelovanje vlastite težine, stalnog opterećenja te korisnog opterećenja (korisno opterećenje množeno koeficijentom 0,3). Vlastitu težinu konstruktivnih elemenata računalni program uzima u obzir prema definiranim karakteristikama elemenata. Stalno opterećenje zadano je kao jednoliko plošno opterećenje međukatnih konstrukcija u iznosu od 2,0 kN/m<sup>2</sup> te kao jednoliko linijsko opterećenje obodnih greda u iznosu od 1,6 kN/m. Korisno opterećenje zadano je kao jednoliko plošno opterećenje međukatnih konstrukcija u iznosu od 2,0 kN/m<sup>2</sup>.



Slika 26.: Numerički model konstrukcije

Potresno opterećenje je definirano potresnim zapisima ubrzanja tla (slika 27.) koji istovremeno djeluju u međusobno okomitim horizontalnim smjerovima (smjer x i y).



Slika 27.: Potresni zapis ubrzanja tla: smjer x (gore) i smjer y (dolje)

### 7.3. Rezultati proračuna

Kako bi se dobio uvid u dinamička svojstva konstrukcije provedena je modalna analiza, pri čemu su razmatrana dva slučaja. Prvo je provedena modalna analiza na neopterećenoj konstrukciji, dok je u drugom slučaju razmatrana opterećena konstrukcija kojoj je krutost modificirana uslijed doprinosa geometrijske nelinearnosti (krutost određena nelinearnom statičkom analizom za kombinaciju: vl. težina + stalno + 0,3×korisno). Dobivene vrijednosti za prvih deset vlastitih perioda dane su u tablici 5. Iz tablice je vidljivo „omekšanje” konstrukcije uslijed doprinosa geometrijske krutosti što je rezultiralo produljenjem vlastitih perioda konstrukcije. Vidljivo je i da je razlika među vlastitim vrijednostima najznačajnija za prve vlastite oblike, dok se s porastom frekvencije razlika smanjuje. Vlastiti vektori su pritom ostali nepromijenjeni.

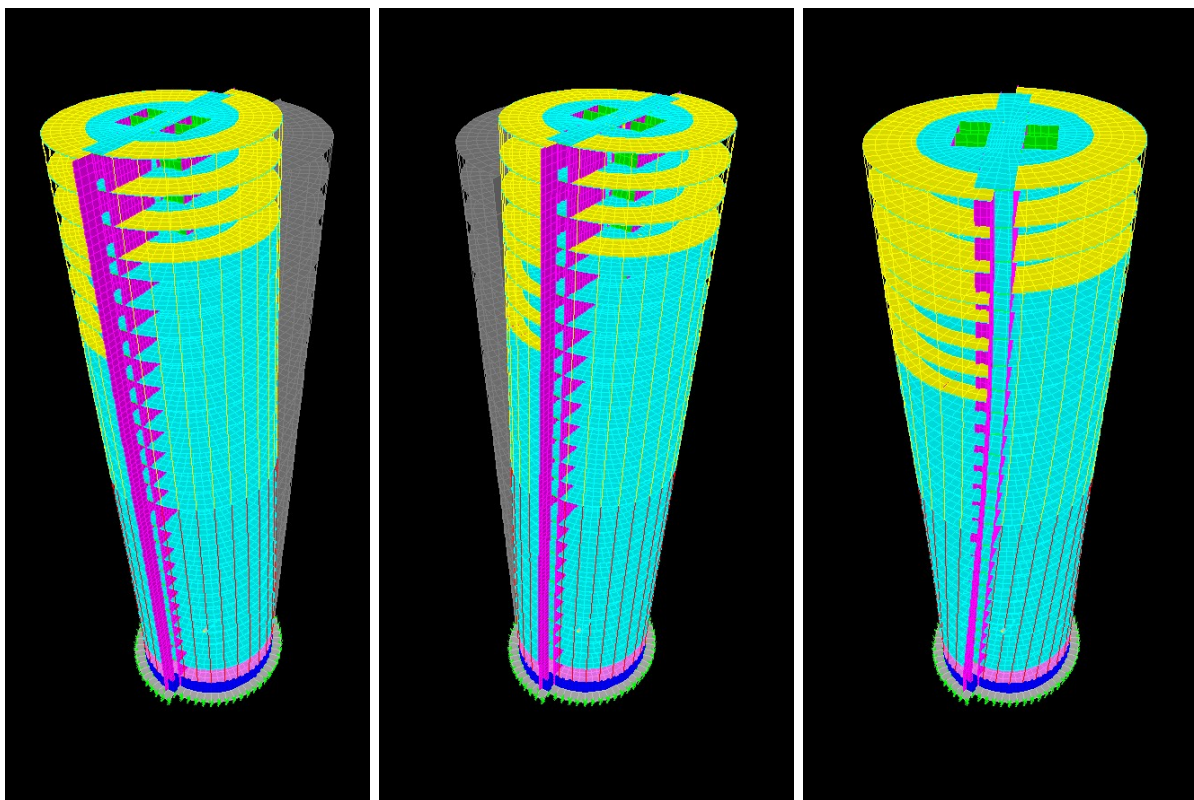
Tablica 5.: Vlastiti periodi konstrukcije

PERIOD	NEOPTEREĆENO	OPTEREĆENO	RAZLIKA
$T_1$	3,225543 s	3,293677 s	+2,11%
$T_2$	2,282593 s	2,306162 s	+1,03%
$T_3$	1,527919 s	1,542301 s	+0,94%
$T_4$	0,755247 s	0,761034 s	+0,77%
$T_5$	0,508250 s	0,510776 s	+0,50%
$T_6$	0,428485 s	0,429536 s	+0,25%
$T_7$	0,375338 s	0,377195 s	+0,49%
$T_8$	0,284284 s	0,285171 s	+0,31%
$T_9$	0,282736 s	0,282850 s	+0,04%
$T_{10}$	0,224927 s	0,225725 s	+0,35%

Prva tri vlastita oblika za neopterećeni slučaj prikazana na slici 28. Prvi oblik predstavlja translaciju u y-smjeru budući da konstrukcija u tome smjeru ima najmanju krutost. Centar masa i centar krutosti konstrukcije gotovo su u istoj točki, krute jezgre i zidovi su blizu centra krutosti, a fasadni okviri su znatno mekši od središnjih zidova tako da su moguće torzijske oscilacije. To se i pokazalo budući da treći vlastiti oblik predstavlja torzijski ton, dok drugi vlastiti oblik predstavlja translaciju u smjeru x.

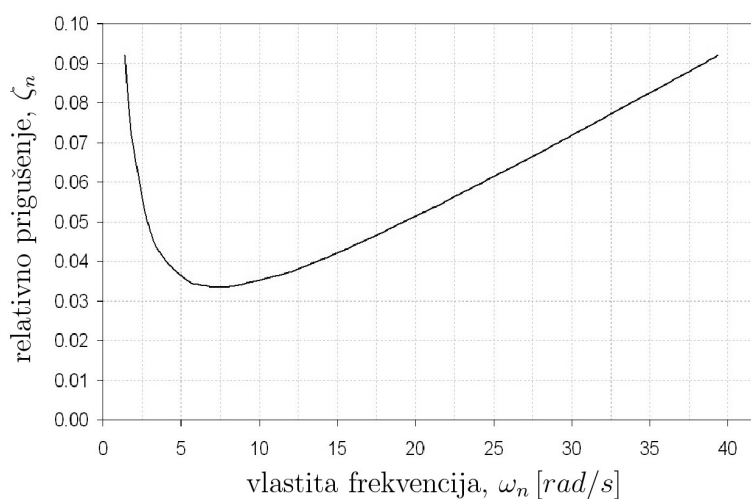
Na temelju provedene modalne analize definirano je prigušenje u modelu konstrukcije. Korišteno je Rayleighovo prigušenje pri čemu su kao kontrolne frekvencije upotrijebljene prva i jedanaesta vlastita frekvencija. Ovisnost relativnog prigušenja o frekvenciji prikazana je na slici 29.

Nakon definiranja prigušenja u modelu izvršen je dinamički proračun konstrukcije. Provedene seizmičke analize prikazane su u tablici 6. Uz svaku analizu dano je i vrijeme trajanja proračuna. Odgovor konstrukcije na seizmičku pobudu određen je direktnom



Slika 28.: Prva tri vlastita vektora (s lijeva na desno)

integracijom jednadžbi gibanja (metoda prosječnog ubrzanja) za tri slučaja: a) potpuno linearan model, b) linearan model uz modificiranu krutost uslijed utjecaja geometrijske nelinearnosti za djelovanje gravitacijskog opterećenja te c) geometrijski nelinearan model. Uz to, odgovor konstrukcije određen je i metodom modalne superpozicije pri



Slika 29.: Ovisnost relativnog prigušenja o frekvenciji

čemu je korišteno petnaest LDR vektora. Ritzovi vektori ovisni o opterećenju generirani su korištenjem jediničnog translacijskog ubrzanja tla u smjeru globalnih osi x i y.



Tablica 6.: Provedene dinamičke analize

SLUČAJ	OPIS	TRAJANJE PRORAČUNA
potres_lin	Newmarkova metoda, $\beta = 1/4$ ; linearan model	9278,94 s
lin_PD	Newmarkova metoda, $\beta = 1/4$ ; linearan model, krutost umanjena uslijed geometrijske nelinearnosti	9075,16 s
PD_modal	modalna analiza; korišteno 15 LDR vektora, krutost umanjena uslijed geometrijske nelinearnosti	184,12 s
potres_nelin	Newmarkova metoda, $\beta = 1/4$ ; geometrijski nelinearan model	/

Vršne vrijednosti odgovora konstrukcije prikazane su u tablici 7. Prikazane su komponente pomaka čvora na vrhu konstrukcije, globalne poprečne sile na razini temelja (*engl. base shear*), momenti prevrtanja oko globalnih osi x i y (*engl. overturning moment*) te omjer maksimalne poprečne sile i ukupnog vertikalnog opterećenja. Iz tablice je vidljivo da

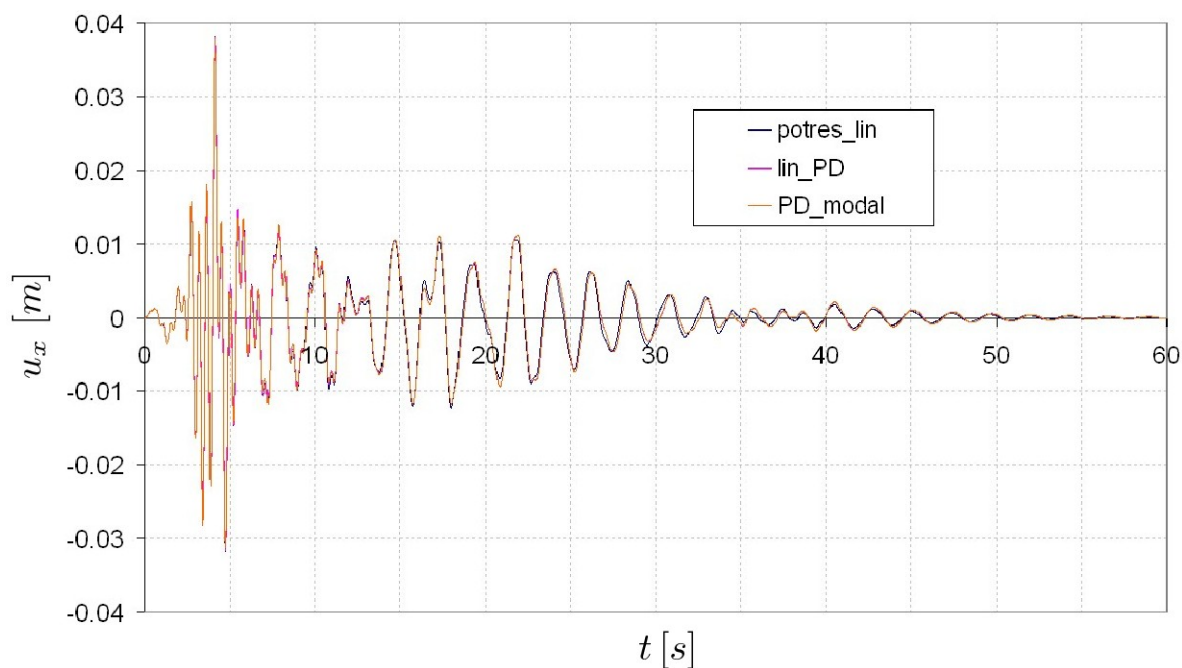
Tablica 7.: Vršne vrijednosti odgovora konstrukcije

SLUČAJ	$ u_x _{max}$ [cm]	$ u_y _{max}$ [cm]	$ V_x _{max}$ [kN]	$ V_y _{max}$ [kN]	$ M_x _{max}$ [kNm]	$ M_y _{max}$ [kNm]	$ V/G _{max}$ [%]
potres_lin	3,83	3,28	19442	10268	81211	143421	9,64
lin_PD	3,81	3,30	19469	10356	81589	144007	9,66
PD_modal	3,78	3,31	21764	13917	81709	141572	10,80

se za sva tri razmatrana slučaja dobivaju principijelno jednaki translacijski pomaci vrha. Također je vidljivo da se u slučaju linearnog odgovora s umanjenom krutošću dobivaju nešto veće poprečne sile i momenti prevrtanja u odnosu na potpuno linearan model, dok je odstupanje u slučaju modalne analize nešto veće. Maksimalna poprečna sila u odnosu na ukupno vertikalno opterećenje (vl. težina + stalno +  $0,3 \times$  korisno) u svim slučajevima iznosi oko 10%.

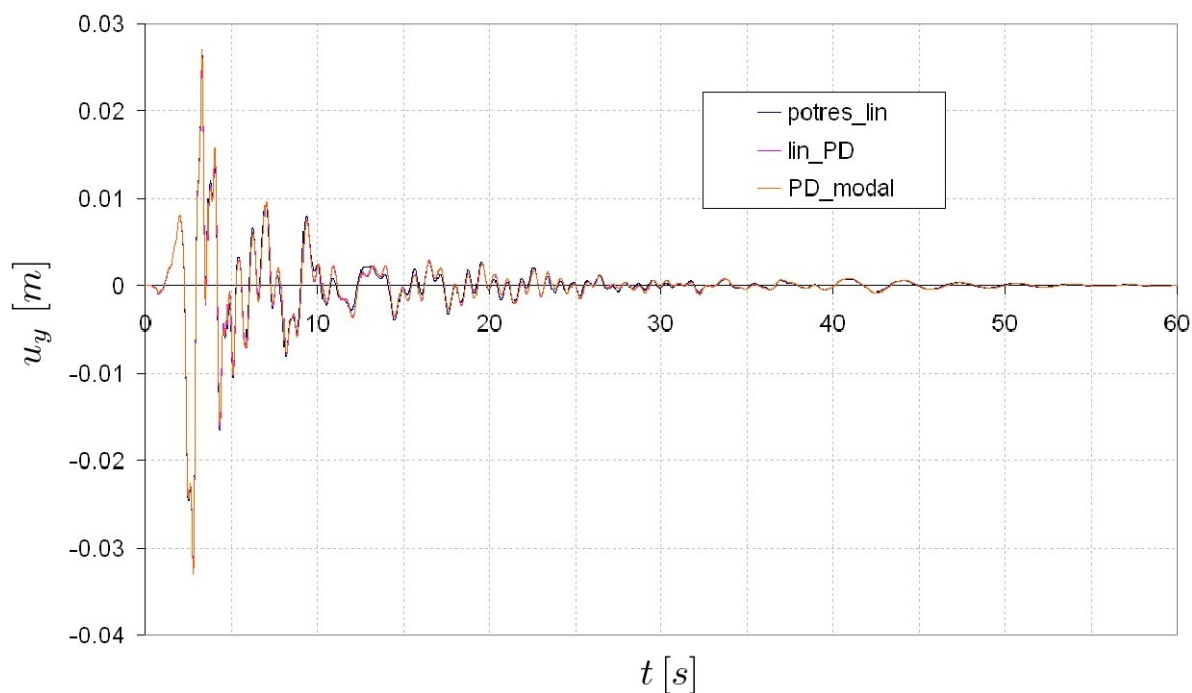
Vrijednosti odgovora konstrukcije u ovisnosti o vremenu prikazane su na slikama 30. do 35. Vidljivo je produljenje perioda u slučaju linearnog odgovora s umanjenom krutošću u odnosu na potpuno linearni model, te dobro poklapanje odgovora dobivenih modalnom superpozicijom i direktnom integracijom uz umanjenu krutost.

Na slikama 30. i 31. prikazane su horizontalne komponente translacijskog pomaka čvora



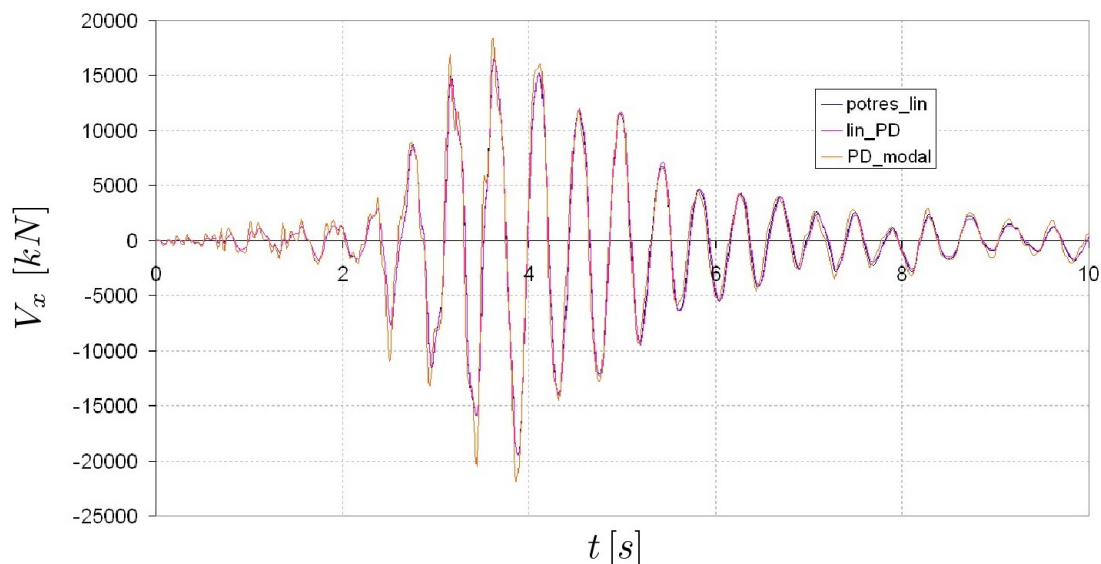
Slika 30.: Translacijski pomaci vrha u smjeru x-osi u ovisnosti o vremenu

na vrhu konstrukcije u ovisnosti o vremenu za provedene seizmičke analize. Maksimalna vrijednost odgovora konstrukcije javlja se nešto prije pete sekunde (oko četvrte sekunde za x-smjer, odnosno oko treće sekunde za y-smjer) što je bilo i očekivano s obzirom na oblik potresnog zapisa (slika 27.). Nakon prestanka djelovanja potresne pobude vidljivo je slobodno prigušeno titranje konstrukcije do iščezavanja gibanja.



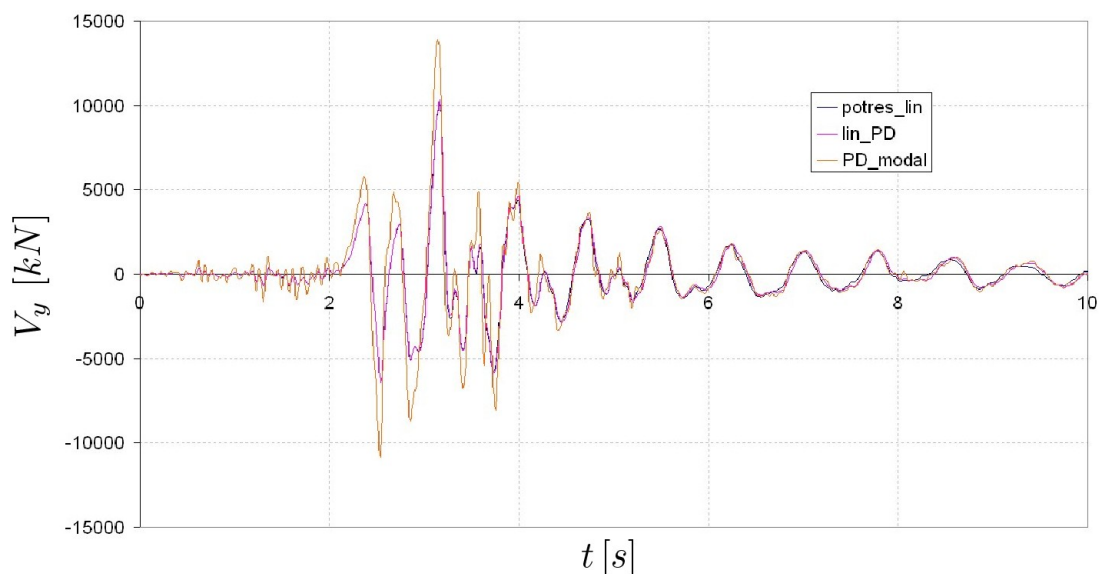
Slika 31.: Translacijski pomaci vrha u smjeru y-osi u ovisnosti o vremenu

Na slikama 32. i 33. prikazana je ovisnost ukupne poprečne sile u razini temelja o vremenu (prvih 10 sekundi) za provedene seizmičke analize. U skladu s pomacima vrha, maksimalna vrijednost odgovora konstrukcije javlja se nešto prije pete sekunde (oko četvrte sekunde za x-smjer, odnosno oko treće sekunde za y-smjer). Sa slika je također vidljivo da



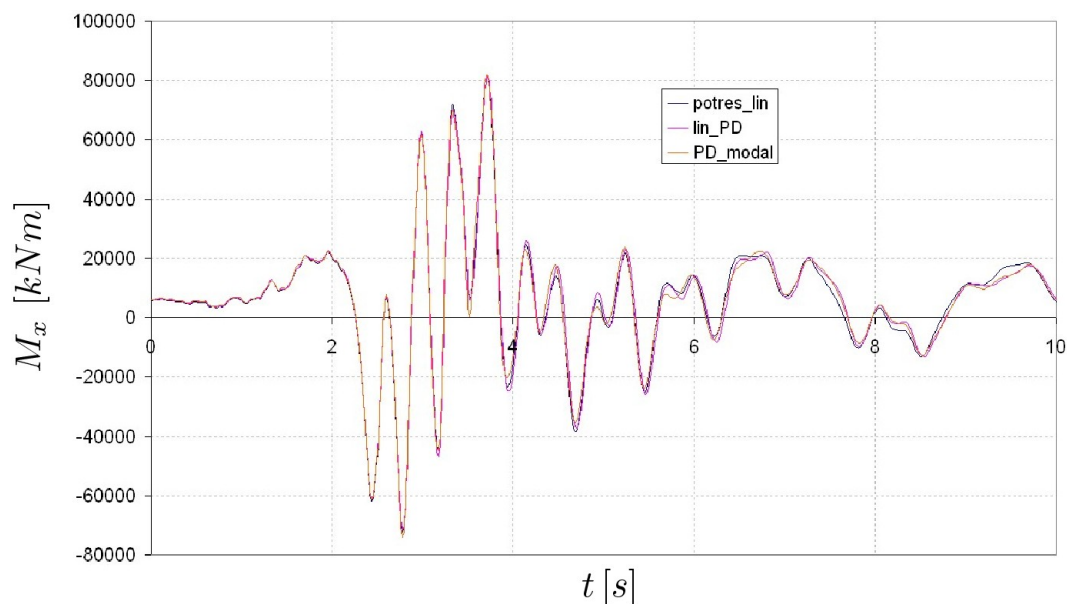
Slika 32.: Ukupna poprečna sila u razini temelja za x-smjer u ovisnosti o vremenu

konstrukcija preuzima veću poprečnu silu u smjeru x (tablica 7.) budući da je u tome smjeru krutost konstrukcije veća. Zamjetno je i nešto veće odstupanje vrijednosti poprečne sile dobivene modalnom superpozicijom u odnosu na vrijednosti dobivene direktnom integracijom; odstupanje je najveće u području vršnih vrijednosti odgovora konstrukcije, dok s vremenom jenjava.

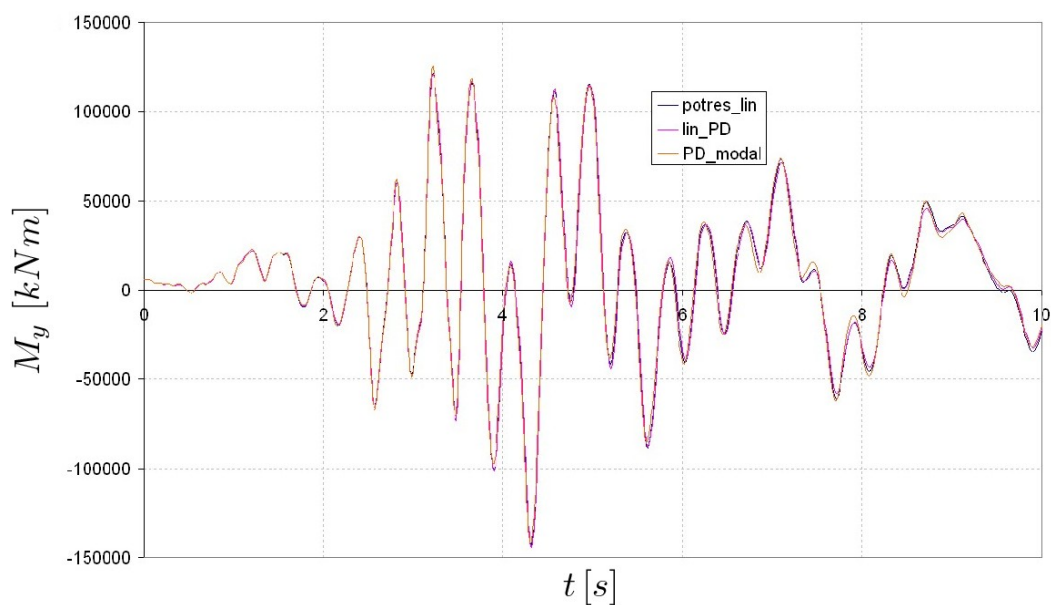


Slika 33.: Ukupna poprečna sila u razini temelja za y-smjer u ovisnosti o vremenu

Momenti prevrtanja oko globalnih osi x i y prikazani su na slikama 34. i 35. Na slikama je vidljivo dobro poklapanje dobivenih vrijednosti momenata prevrtanja, bez značajnijih razlika za provedene seizičke analize. Također je vidljivo da je vrijednost momenta prevrtanja veća oko osi y (tablica 7.) razlog čemu leži u većoj krutosti konstrukcije u smjeru x-osi.



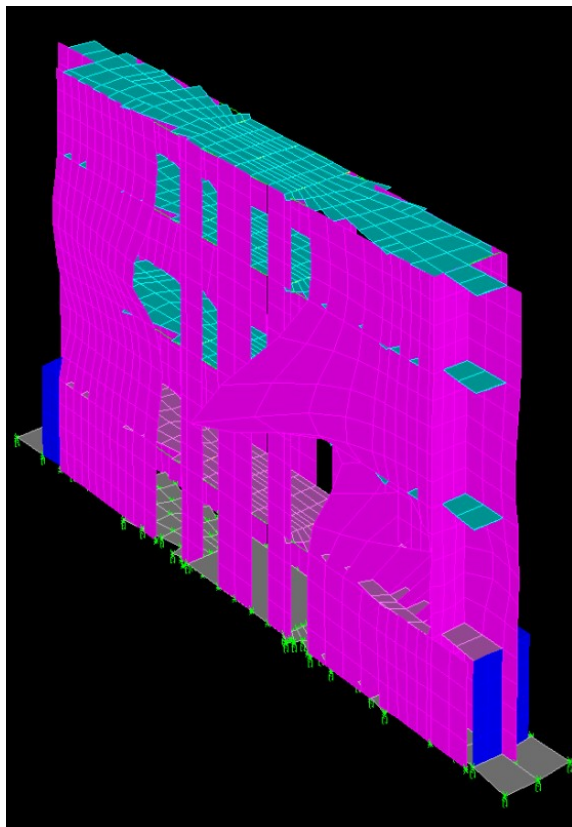
Slika 34.: Moment prevrtanja oko globalne x-osi u ovisnosti o vremenu



Slika 35.: Moment prevrtanja oko globalne y-osi u ovisnosti o vremenu

Uz prikazane proračune na linearnim modelima napravljena je i nelinearna seizička analiza. Pritom je uzeta u obzir geometrijska nelinearnost uz zadržavanje malih pomaka ( $P - \delta$  učinak). Analiza je pokazala potencijalno postojanje problema instabiliteta

uzdužnih zidova. Naime, nešto prije pete sekunde odgovora konstrukcije, pri čemu naprezanje u zidnim elementima doseže otprilike polovinu karakteristične tlačne čvrstoće betona, dolazi do gubitka stabilnosti uzdužnih zidova prizemlja i prvog kata (slika 36.). Ovaj problem zahtijeva daljnje razmatranje (analiza parcijalnog modela prizemlja i prvog kata konstrukcije).



Slika 36.: Gubitak stabilnosti zidova prizemlja i prvog kata

## 8. Zaključak

Metode direktne integracije jednadžbi gibanja omogućavaju procjenu odgovora konstrukcije uslijed djelovanja dinamičke pobude. Newmarkova metoda, kao pripadnica posebne skupine metoda direktne integracije, predstavlja općeniti pristup rješavanju proizvoljnog skupa nelinearnih jednadžbi gibanja dinamičkog sustava. Nelinearno ponašanje sustava (materijalna i geometrijska nelinearnost) moguće je obuhvatiti inkrementalnom formulacijom problema. Za provedbu postupka direktne integracije potrebno je eksplicitno definiranje matrice prigušenja sustava, pri čemu se rješenje traži u koordinatama u kojima je napisan polazni sustav jednadžbi gibanja te stoga nije potrebno vršiti modalnu analizu niti transformaciju koordinata. S druge strane, metode direktne integracije su numerički iznimno zahtjevne, posebno u slučaju značajnijeg utjecaja nelinearnosti, što rezultira znatnim vremenom potrebnim za provedbu dinamičke analize. S tog aspekta povoljnu alternativu predstavljaju metode modalne superpozicije, a u slučaju potresne pobude posebno je prikladna upotreba Ritzovih vektora ovisnih o opterećenju. Međutim, u tom je slučaju moguće obuhvaćanje isključivo diskretnih nelinearnosti.

## Literatura

- [1] WILSON, E.L.: *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures: A Physical Approach With Emphasis on Earthquake Engineering*, 3rd edition, Computers & Structures, Inc., Berkeley, 2000.
- [2] TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N.: *Theory of Elasticity*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [3] LAZAREVIĆ, D.; DVORNIK, J.: *Plošni nosači - bilješke s predavanja*, Građevinski fakultet, Zagreb, 2008.
- [4] COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd edition, John Wiley & Sons, New-York, 1989.
- [5] CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J.: *Dynamics of Structures*, 3rd edition, Computers & Structures, Inc., Berkeley, 2003.
- [6] LAZAREVIĆ, D.: *Dinamika konstrukcija s uvodom u potresno inženjerstvo - bilješke s predavanja*, Građevinski fakultet, Zagreb, 2009.
- [7] HUMAR, J.L.: *Dynamics of Structures*, 2nd edition, A.A. Balkema Publishers, Lisse, 2002.
- [8] CHOPRA, A.K.: *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, 3rd edition, Prentice Hall, New Jersey, 2006.
- [9] ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.; ZHU, J.Z.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
- [10] BARBAT, A.H.; CANET, J.M.: *Structural Response Computations in Earthquake Engineering*, 1st edition, Pineridge Press Ltd., Swansea, 1989.
- [11] URL IZVOR: <http://www.geophysics.rice.edu/plateboundary/downloads.html>, pristupljeno: 3. svibnja 2010.
- [12] IVANČIĆ, I.; HERAK, D.; MARKUŠIĆ, S.; SOVIĆ, I.; HERAK, M.: *Seismicity of Croatia in the period 2002–2005*, Geofizika 23 (2006) 2, 87-103
- [13] URL IZVOR: [http://www.gfz.hr/G0\\_Monografija.htm](http://www.gfz.hr/G0_Monografija.htm), pristupljeno: 3. svibnja 2010.
- [14] USGS: Earthquake Glossary, <http://earthquake.usgs.gov/learn/glossary/>, pristupljeno: 4. svibnja 2010.

- 
- [15] EN 1998-1: *Design of structures for earthquake resistance - Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings*, European Committee for Standardization, Bruxelles, December 2004
- [16] RADIĆ, J. I SURADNICI: *Betonske konstrukcije - Priručnik*, Hrvatska sveučilišna naklada – Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet – Andris, Zagreb, 2006.
- [17] ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.



## Sažetak

Nenad Bijelić

### NELINEARNI DINAMIČKI PRORAČUN NADOGRAĐNJE POSLOVNOG TORNJA CIBONA U ZAGREBU

U radu su dane teoretske podloge za provedbu dinamičke analize konstrukcija te postavljanje odgovarajućeg numeričkog modela, uz naglasak na seizmičku pobudu. Razrađen je algoritam proračuna odgovora sustava prema Newmarkovoj metodi uz uzimanje u obzir nelinearnog ponašanja. Proveden je seizmički proračun moguće nadogradnje poslovnog tornja Cibona te je izvršena usporedba linearnog i nelinearnog odgovora konstrukcije.

**Ključne riječi:** dinamička analiza, seizmičko opterećenje, numerički model, geometrijska nelinearnost, Newmarkova metoda