Primjer modeliranja nestacionarnog procesa prijenosa topline i procjena parametara

Željka Ujević Andrijić

CILJEVI PREZENTACIJE

1. **KAKO FORMULIRATI MATEMATIČKI MODEL ZA DANI PROCES?**

2. **KAKO RIJEŠITI PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE (PDJ) MODELA?**
   - postavljanje početnih i rubnih uvjeta
   - rješavanje metodom konačnih razlika

3. **KAKO PROCJENITI NEPOZNATE PARAMETRE U MODELU Nelder Mead metodom?**

Opis procesa

Analizira se prijenos topline na laboratorijskoj aparaturi za istraživanje prijenosa topline kroz različite materijale. Ploča je sa jedne strane naslonjena na grijač. Druga strana ploče je u kontaktu sa zrakom iz okoline na sobnoj temperaturi.

Temperaturu je moguće mjeriti na tri mjesta s obzirom na debljinu ploče (na točki granice grijač-ploča, polovici debljine ploče te na vanjskoj strani ploče).

Zadatak

Potrebno je razviti matematički model procesa prijenosa topline i izraditi računalni program koji će računati profile temperatura po položaju u zadanom vremenu i profile temperatura za određeni položaj tijekom vremena i pritom procijeniti potrebne parametre.

1. Numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Opći oblik PDJ drugog reda:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\cdot b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+gu=f \qquad (1)$$

gdje su *a, b, c, d, e, f i g* konstante ili funkcije od *x* i *y*, a *x* i *y* su nezavisne varijable.

Tri skupine PDJ:

paraboličke: ako je $b^2 + 4a\cdot c = 0$
hiperboličke: ako je $b^2 + 4a\cdot c > 0$
eliptičke: ako je $b^2 + 4a\cdot c < 0$

Najčešće korištene metode rješavanja PDJ:

- o Metode konačnih razlika
- o Metode konačnih elemenata
- o Kolokacijske metode

Rješavanje PDJ metodom konačnih razlika

(*engl.* Finite Difference Method - FDM)

- **Parcijalne derivacije u jednadžbama aproksimiraju se algebarskim jednadžbama.**
- Vrijednosti funkcija (zavisnih varijabli) računaju se u diskretnim točkama, odnosno za pojedine vrijednosti nezavisnih varijabli

a) Neposredna (eksplicitna) metoda
b) Implicitna metoda
c) Metoda linija

Neposredna metoda

- **Rekurzivno izračunavanje vrijednosti zavisnih varijabli** → u svakoj sljedećoj točki računa se vrijednost funkcije na osnovi prethodnih.

Jednadžbe konačnih razlika

APROKSIMACIJA DERIVACIJA PRVOG REDA

UNAPREDNE KONAČNE RAZLIKE:

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_j^i = \frac{T_j^{i+1} - T_j^i}{\Delta t}}$$

POVRATNE (unatražne) KONAČNE RAZLIKE:

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_j^i = \frac{T_j^{i} - T_j^{i-1}}{\Delta t}}$$

CENTRALNE KONAČNE RAZLIKE:

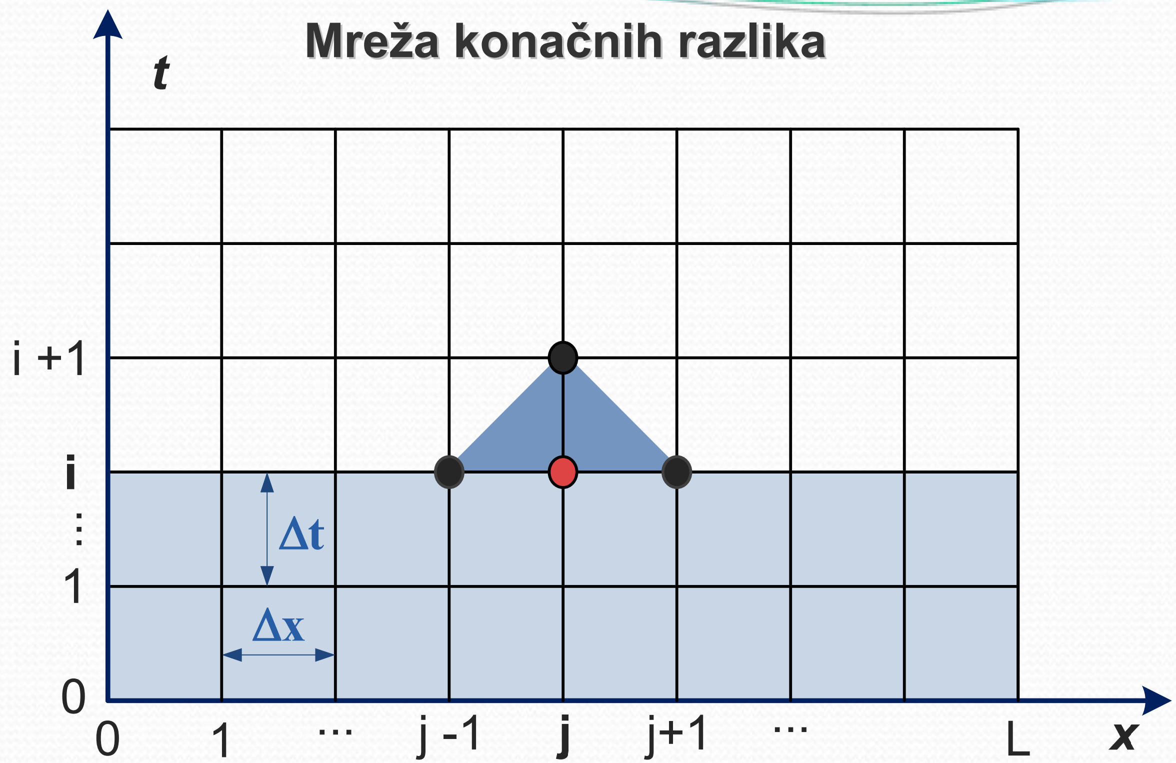
$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_j^i = \frac{T_j^{i+1} - T_j^{i-1}}{2\Delta t}}$$

APROKSIMACIJA DERIVACIJA DRUGOG REDA

CENTRALNE KONAČNE RAZLIKE:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_j^i = \frac{T_{j+1}^i - 2T_j^i + T_{j-1}^i}{\Delta x^2}}$$

Mreža konačnih razlika



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Razvijanjem u Taylor-ov red $\boldsymbol{T}_{j+1}^{i}$, $\boldsymbol{T}_{j\text{-}1}^{i}$ i $\boldsymbol{T}_{j}^{i+1}$ **u točkama čvorova mreže (*j*, *i*) imamo:**

$$T_{j+1}^{i} = T_j^i + \Delta x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_j^i + \frac{1}{2}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_j^i + \frac{1}{6}\Delta x^3\left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_j^i + O(\Delta x^4)$$

$$T_{j-1}^{i} = T_{j}^{i} - \Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j}^{i} - \frac{1}{2} \Delta x^{2} \left(\frac{\partial^{2} T}{\partial x^{2}} \right)_{j}^{i} - \frac{1}{6} \Delta x^{3} \left(\frac{\partial^{3} T}{\partial x^{3}} \right)_{j}^{i} + O(\Delta x^{4})$$

$$T_{j}^{i+1} = T_{j}^{i} + \Delta t \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{j}^{i} + O(\Delta t^{2})$$

Zbrajanjem prve dvije

$$\boxed{\left(\frac{\partial^{2} T}{\partial x^{2}} \right)_{j}^{i} = \frac{T_{j+1}^{i} - 2T_{j}^{i} + T_{j-1}^{i}}{\Delta x^{2}}}$$

aproksimacija *prostorne* derivacije drugog reda (aproksimacija *centralnom razlikom)*

Sređivanjem zadnje

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{j}^{i} = \frac{T_{j}^{i+1} - T_{j}^{i}}{\Delta t}}$$

aproksimacija *vremenske* derivacije - aproksimacija unaprijednom *razlikom*

$$\boxed{\frac{T_{j}^{i+1} - C_{j}^{i}}{\Delta t} = \mathrm{D} \frac{T_{j+1}^{i} - 2T_{j}^{i} + T_{j-1}^{i}}{\Delta x^{2}}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{T_{j}^{i+1} = T_{j}^{i} + \mathrm{D} \frac{\Delta t}{\Delta x^{2}} (T_{j+1}^{i} - 2T_{j}^{i} + T_{j-1}^{i})}}$$

neposredna formula konačnih razlika

2. PROCJENA PARAMETARA

- Procjena parametara u modelima često se svodi na korištenje metoda optimiranja nelinearnih funkcija s linearnim ili nelinearnim ograničenjima.

- Svrha optimiranja je pronaći najbolje moguće rješenje za dani problem, odnosno pronalaženje min ili max funkcije cilja uz određena ograničenja i zadanu točnost.

Procjena parametara izmijenjenom diferencijalnom metodom

- Numeričko rješavanje ODJ, PDJ i algebarskih jednadžbi uz istovremeni postupak procjene parametara modela.

- Izbjegava se numeričko deriviranje (može biti izvor pogreške) ili izbor odgovarajuće aproksimacije krivulje.

Kao **kriterij slaganja** ID metoda koristi *korijen srednjeg kvadratnog odstupanja* → *funkcija cilja*:

$$SD = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i^e - y_i^t\right)^2}$$

Nelder-Meadova metoda

- Bezgradijentna metoda, izvedenica *Simpleks* metode.

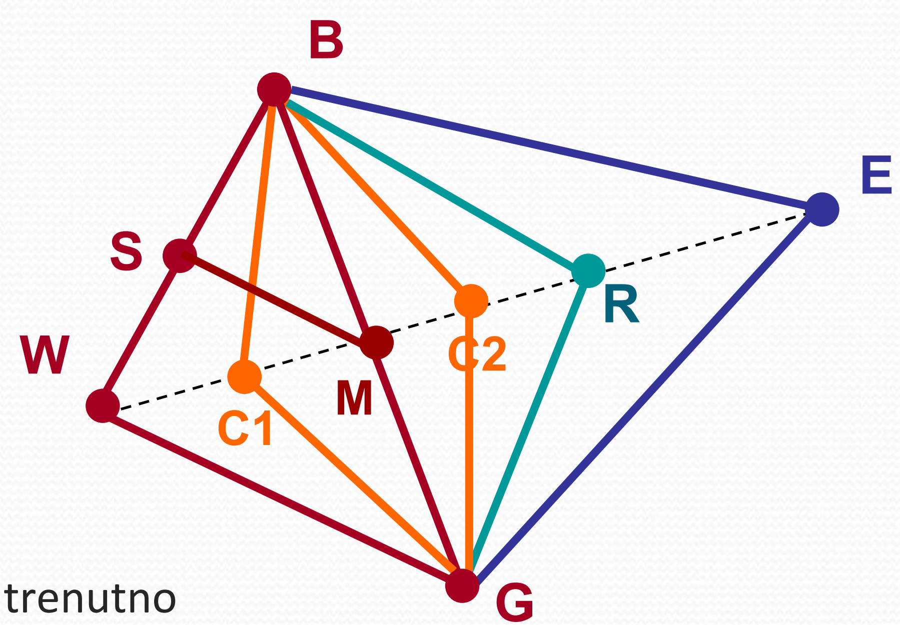
- Za dvodimenzijski slučaj simpleks je početni trokut s kutnim točkama **W**, **G**, **B.**

- Zamjena najlošije točke W točkom E
  f(e) < f(g) → Prihvaća se E i završava iteracija
  (*proširenje*)

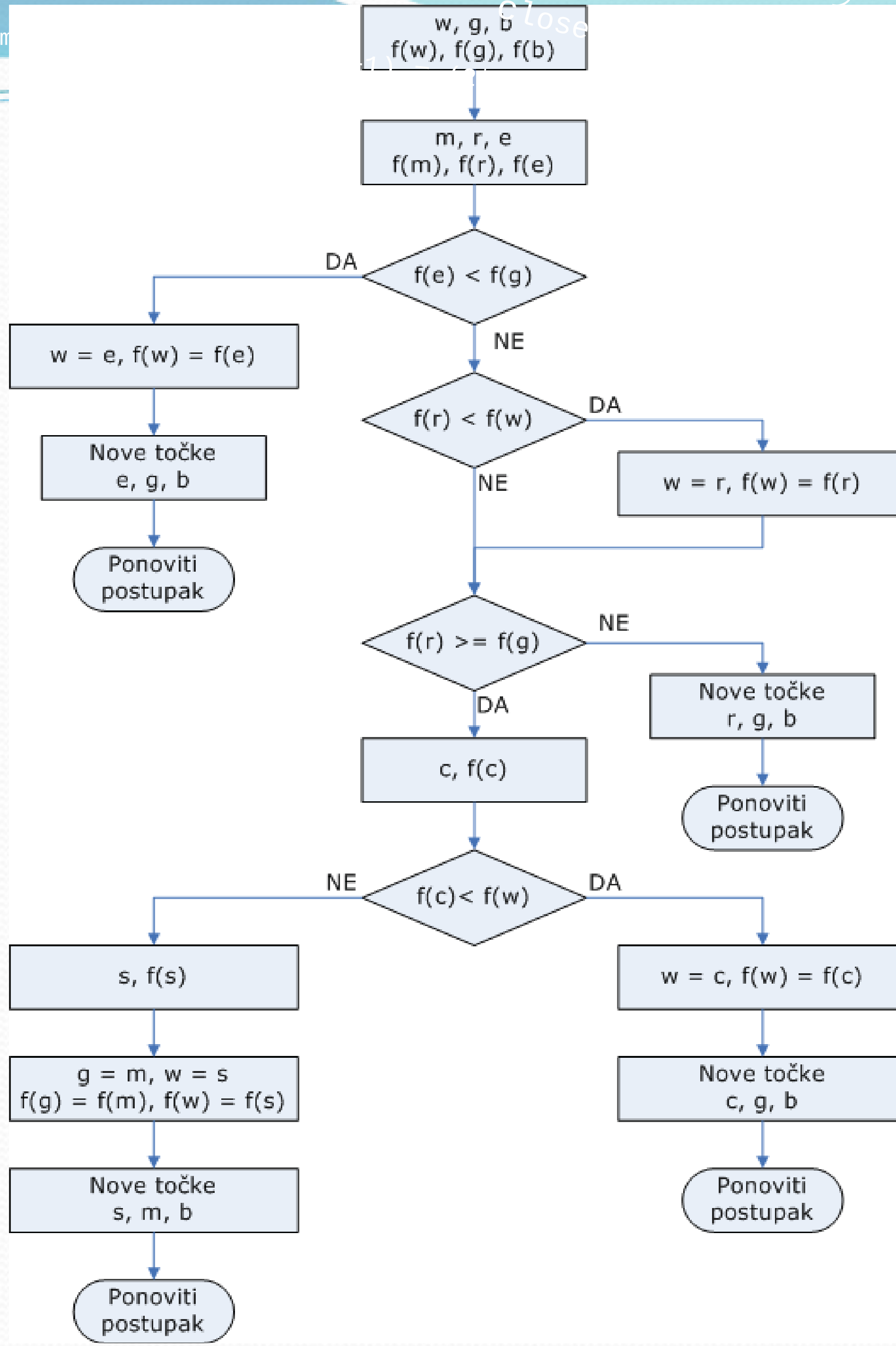
- Zamjena najlošije točke W točkom R
  f(e) ≥ f(g) , f(r) < f(g) → Prihvaća se E i
  završava iteracija (*preslikavanje*)

- Zamjena najlošije točke W točkom C
  ako f(e) < f(w) prihvaća se C1 (*sažimanje*)

- Istodobna zamjena dvije točke trokuta
  (*sažimanje prema točki* B)



U svakom koraku iteracije algoritam otklanja trenutno najgoru točku i prihvaća slijedeću u simpleks.


w, g, b
f(w), f(g), f(b)
m, r, e
f(m), f(r), f(e)
f(e) < f(g)
DA
w = e, f(w) = f(e)
Nove točke
e, g, b
Ponoviti
postupak
NE
f(r) < f(w)
DA
w = r, f(w) = f(r)
NE
f(r) >= f(g)
NE
Nove točke
r, g, b
Ponoviti
postupak
DA
c, f(c)
f(c)< f(w)
NE
s, f(s)
g = m, w = s
f(g) = f(m), f(w) = f(s)
Nove točke
s, m, b
Ponoviti
postupak
DA
w = c, f(w) = f(c)
Nove točke
c, g, b
Ponoviti
postupak

3. RAZVOJ MODELA

Nakon prislanjanja hladne ploče na grijač, potrebno je razmotriti prijelazno stanje i odrediti profile temperature kroz ploču za različita vremena.

Za formulaciju prijelaznog stanja potrebno je poći od osnovne bilance topline za nestacionarni period,

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Osnovni model je PDJ paraboličkog tipa

POČETNI I RUBNI UVJETI

Temp. grijača

Rubni uvjet 1 $\boxed{T(t,0)=T_1}$

Dirchlet
zadano

strana 1

Grijač

$T(0,z)=T_0$ **Početni uvjet**
zadano

$$\boxed{\frac{\partial T(t,\mathrm{L})}{\partial x}=-\frac{h}{\lambda}\left[\mathrm{T_z}-T(t,\mathrm{L})\right]}$$

Rubni uvjet 2

Robinov

strana 2

$z=0$ $z=\mathrm{L}$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Rubni uvjet na strani 2 → toplina koja se odvede prirodnom konvekcijom zrakom jednaka je toplini koja se dovede do strane 2 ploče vođenjem.

Rješenje neposrednom metodom

Aproksimacija prve derivacije: $$\frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta t}$$

Aproksimacija druge derivacije: $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\left(\Delta x\right)^2}$$

Korak iteracije po vremenu i duljini

- Prvo se zadaje ***korak iteracije po duljini***, Δx .

Broj iteracija po duljini: $M = \mathrm{L} / \Delta x$

- ***Korak iteracije po vremenu*** određuje se iz uvjeta stabilnosti. Za parabolički tip PDJ drugog reda - *Fourierov broj*:

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{K}\Delta t}{\left(\Delta x\right)^2} \leq 1/2 \longrightarrow \Delta t \leq \frac{\left(\Delta x\right)^2}{2\mathrm{K}}$$

Broj iteracija po vremenu: $N = \mathrm{t_K} / \Delta t$

t_K - vrijeme pokusa

$$T_{i+1,j} = T_{i,j}\left[1-\frac{2K\Delta t}{(\Delta x)^2}\right]+\frac{K\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[T_{i,j+1}+T_{i,j-1}\right]$$

vrijedi za temperature u unutrašnjim točkama ploče, $j = 1 : M$ dok se za točke na početku, $j = 0$ i na kraju, $j = M+1$ mora prilagoditi prema rubnim uvjetima.

Rubni uvjet 1: $\boxed{T_{i,0} = T_1}$

Rubni uvjet 2: $\boxed{\dfrac{\partial T(t,L)}{\partial x} = -\dfrac{hL}{\lambda}\left[T_z - T(t,L)\right]}$

neposredna aproksimacija rubnog uvjeta s boljom točnošću unatrag,

$$\boxed{T_{i+1,M+1} = \frac{2\Delta x\cdot K_3\cdot T_z + 4T_{i,M} - T_{i,M-1}}{2\cdot K_3\cdot\Delta x + 3}} \qquad K_3 = \frac{hL}{\lambda}$$

Procjena parametara u programskom paketu *Matlab*

- Potrebno je procijeniti koeficijent prijenosa topline s ploče u okolni zrak kao i toplinsku vodljivost korištenog materijala.

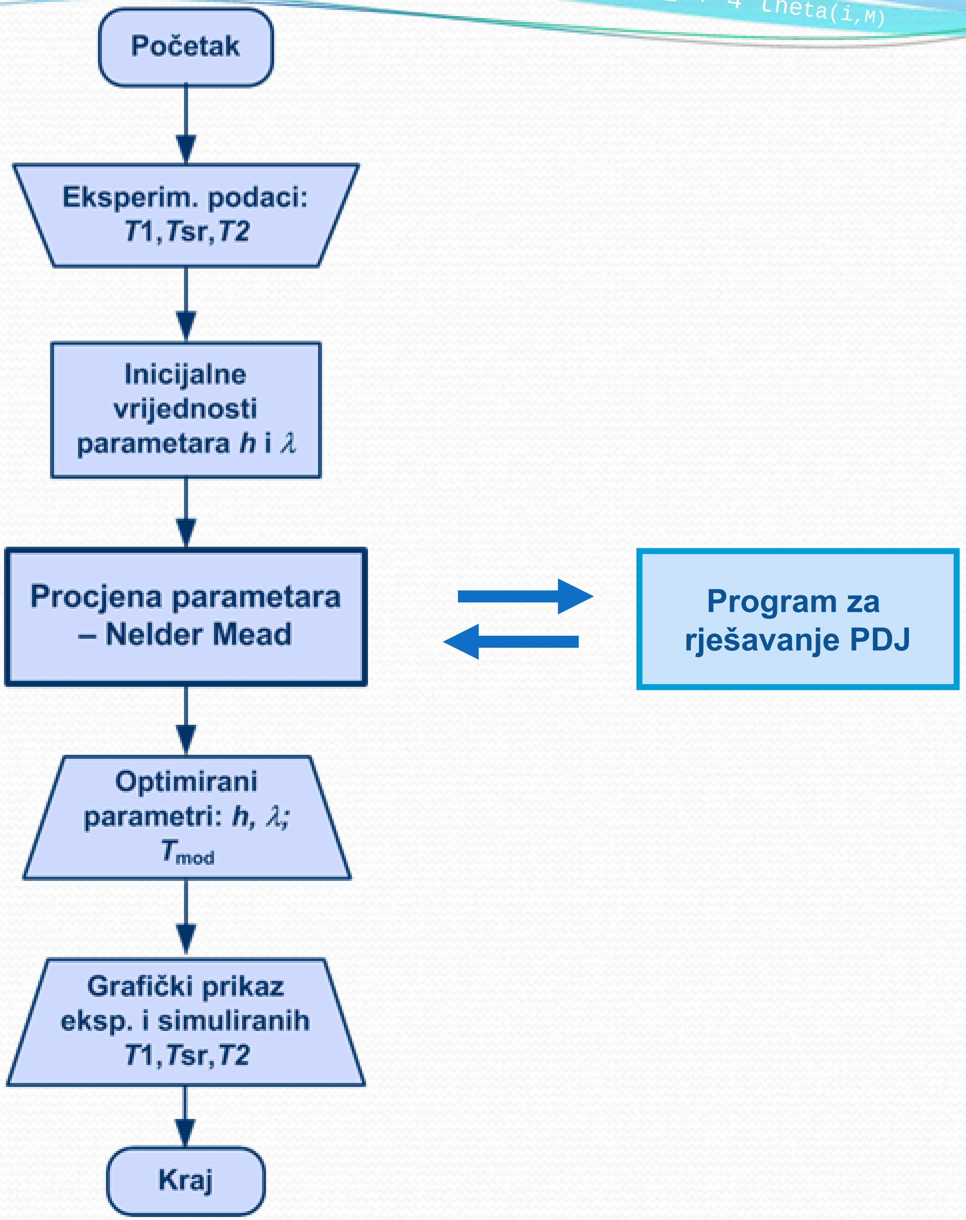
- Funkcija **`fminsearch`** u Matlabu koristi Nelder-Mead metodu za minimizaciju definirane funkcije po jednom ili više parametara.

Sintaksa: `x = fminsearch(fun,x0,options)`

x ... matrica ugodivih parametara; `fun` ... funkcija čiji se minimum traži.

- Funkcija čiji minimum tražimo je korijen srednjeg kvadratnog odstupanja simuliranih i mjerenih vrijednosti temperatura na sredini i na strani 2 ploče.

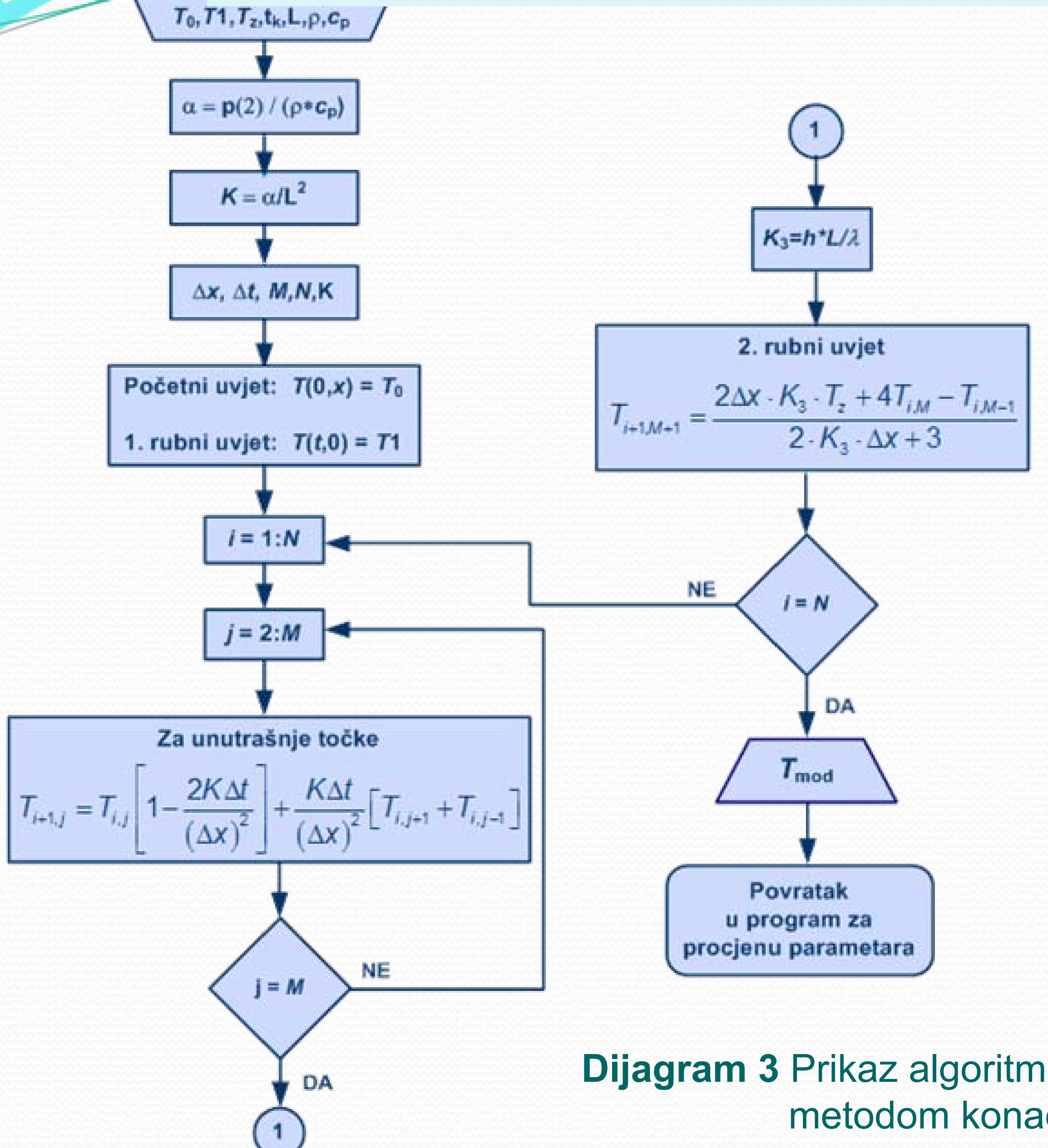
Alternativa `fminsearch` u Matlabu – `fminbnd; fminunc; fzero; ga; linprog;lsqnonneg;lsqnonlin;quadprog;`…



Dijagram 1 Prikaz glavnog algoritma za procjenu parametara

Alternativa rješavanju PDJ u Matlabu – `pdepe` funkcija; `pdetool` GUI

```
solution = pdepe(m, pdefun, icfun, bcfun, xmesh, tspan)
```



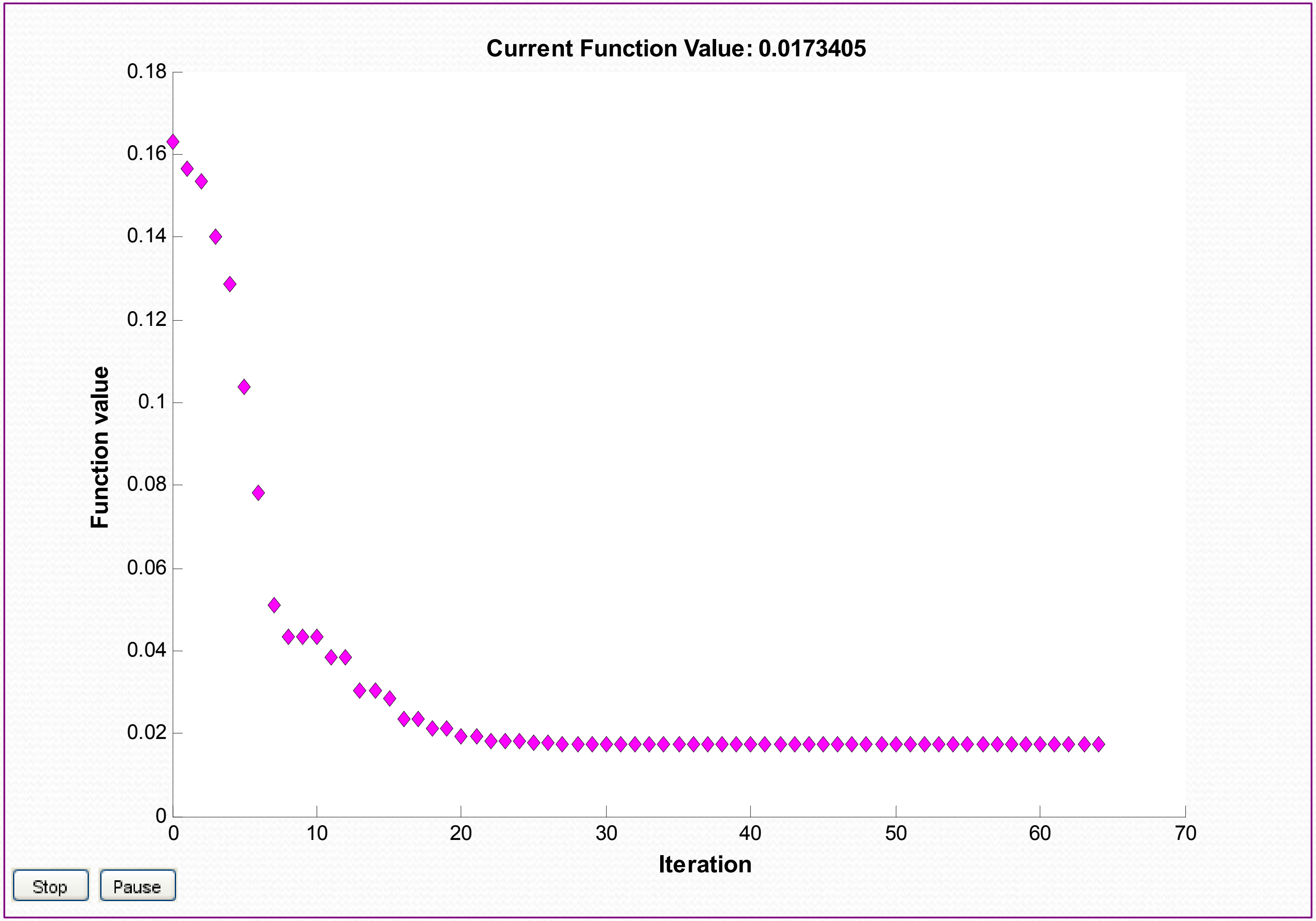
Dijagram 3 Prikaz algoritma za numeričko rješavanje PDJ metodom konačnih razlika

REZULTATI

Eksperiment je izveden tako da se ploča na početku prislonila na hladan grijač, a zatim temperatura grijača podesila na oko 90°C. Nakon što se postigla zadana temperatura, grijač je isključen, a podaci su se snimali još neko vrijeme kako bi se snimilo prijelazno stanje. Strana 2 ploče hladi se prirodnom konvekcijom.

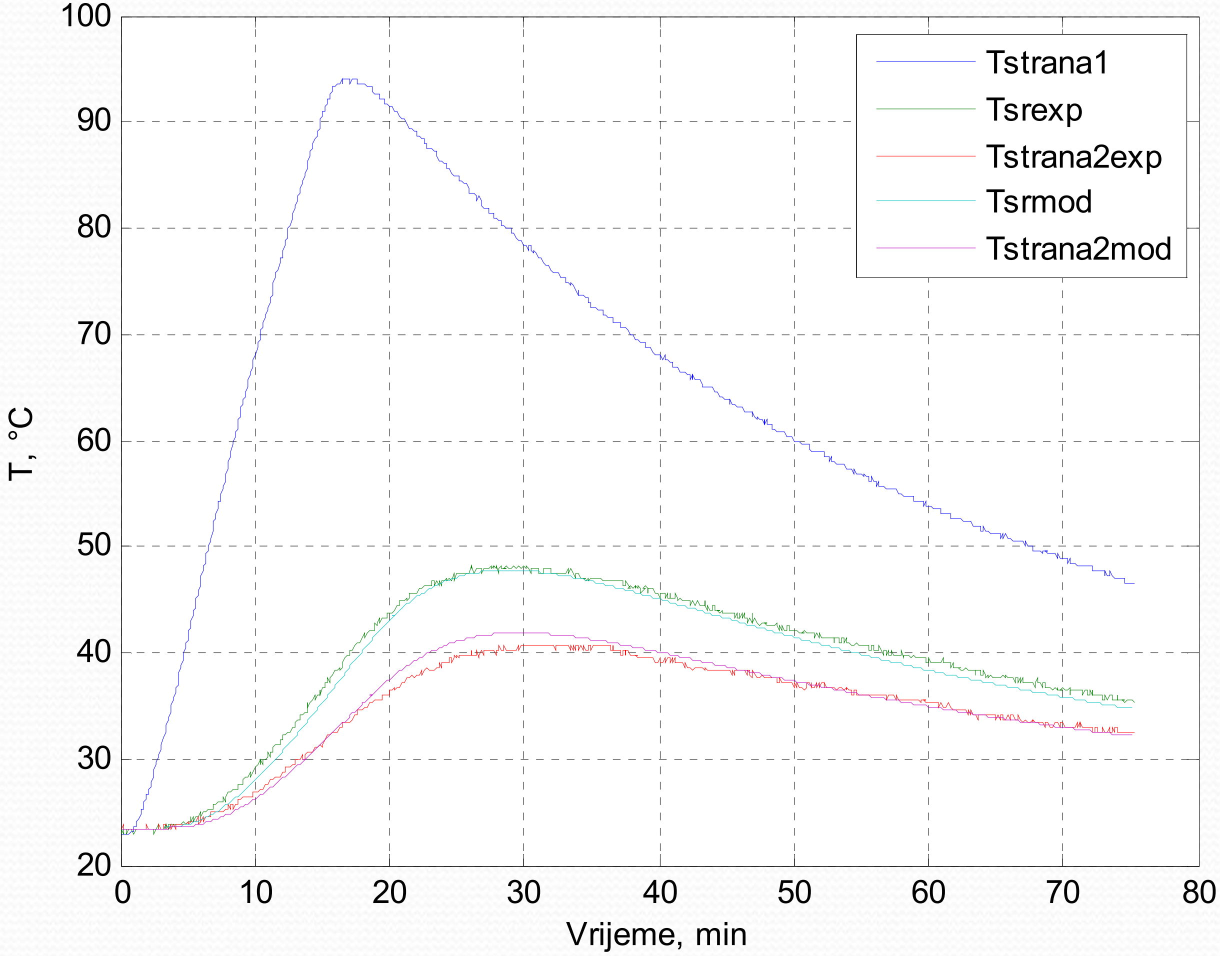
Značajka	iznos	jedinice
Debljina ploče	1,8	cm
Gustoća	0,0025	$kgcm^{-3}$
Inic. toplinska vodljivost	0,1	$Jmin^{-1}cm^{-1}K^{-1}$
Toplinski kapacitet	850	$Jkg^{-1}K^{-1}$
Inic. koeficijent prijenosa topline	1	$Jmin^{-1}cm^{-2}K^{-1}$
Temperatura zraka	23,5	^oC
Temperatura ploče prije početka grijanja	23,5	^oC

REZULTATI



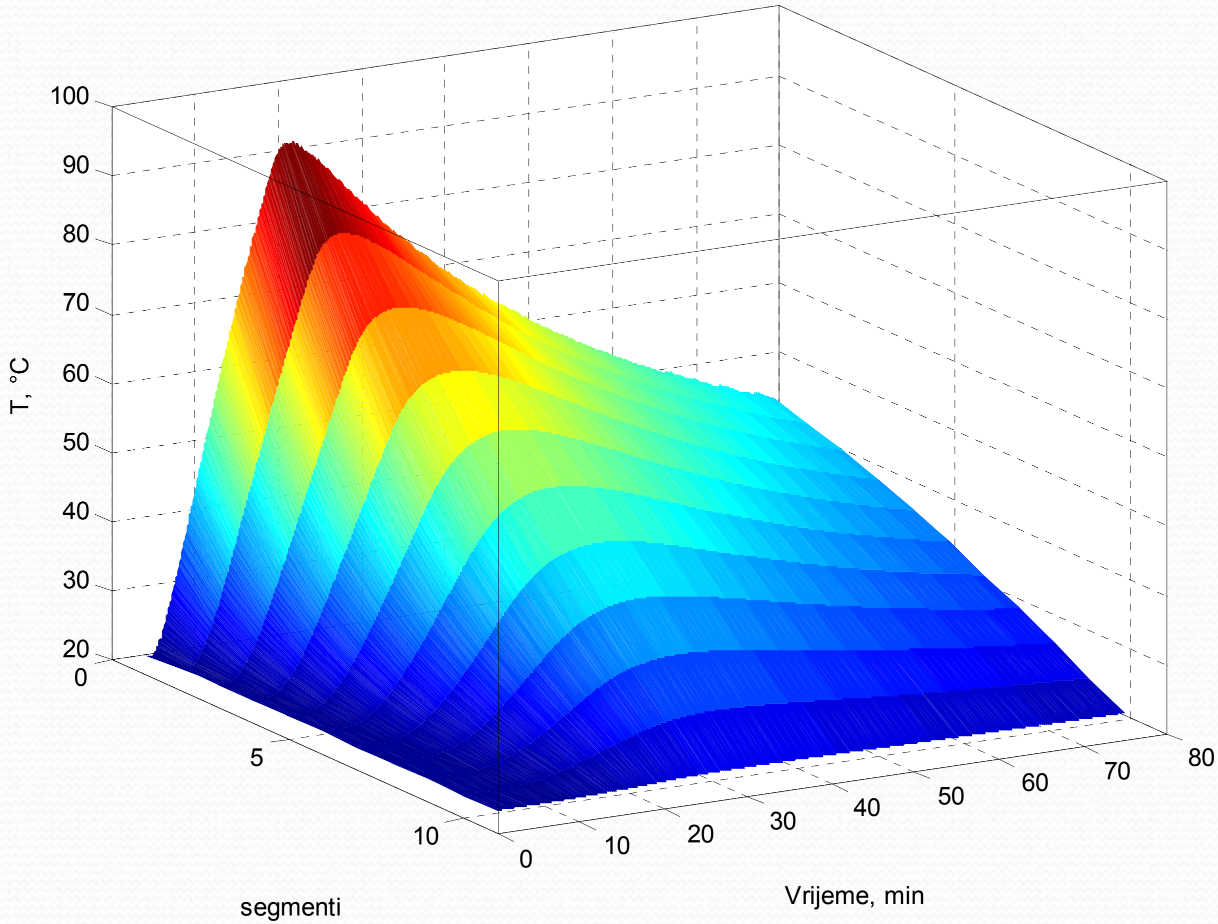
Ovisnost funkcije cilja o broju iteracija

REZULTATI



Profili temperature po vremenu na zadanim debljinama ploče.

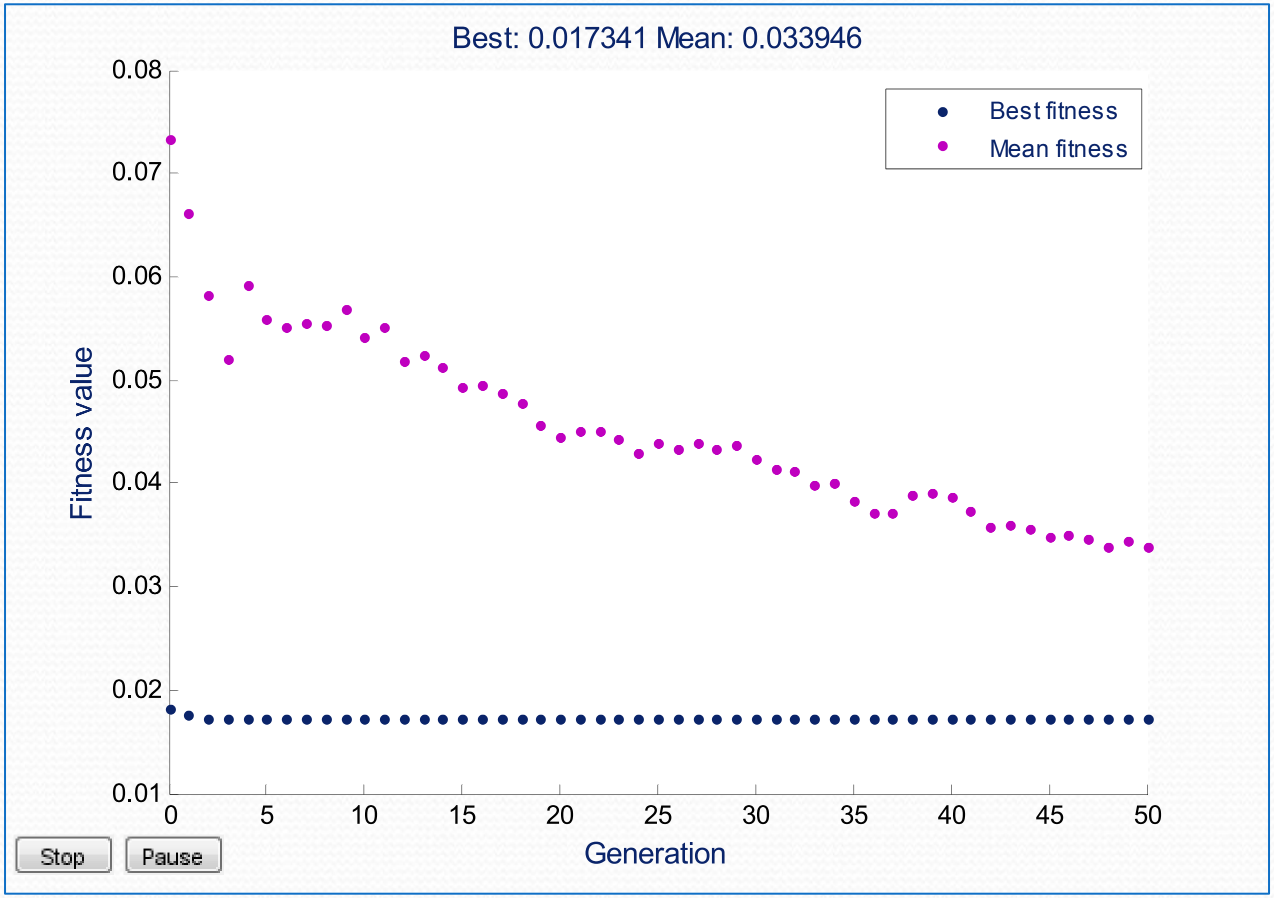
REZULTATI



3D PRIKAZ OVISNOSTI TEMPERATURE PO POLOŽAJU I VREMENU

REZULTATI

OPTIMIRANJE PARAMETARA GENETIČKIM ALGORITMOM



Ovisnost funkcije cilja o broju generacija GA

ZAKLJUČAK

- Analiziran je proces prijenosa topline kroz ploču eksperimentalno i simulacijom na osnovu razvijenog matematičkog modela.

- Izrađen je računalni program u programskom paketu Matlab koji računa i prikazuje profile temperatura ploče po vremenu i pritom procjenjuje potrebne parametre.

- Kao alat za numeričko rješavanje PDJ korištena je neposredna metoda konačnih razlika.

- Nepoznati parametri su se procjenjivali Nelder – Mead metodom optimiranja (`fminsearch` funkcija).

- Računalni program se lako moze prilagoditi za slične sustave.