Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Marko Erceg

Poluklasični limes Schrödingerovih jednadžbi

Diplomski rad

Zagreb, 27. lipnja 2011.

Predgovor

Cilj je opisati Tartarovu konstrukciju poluklasičnih mjera (poznatih i pod imenom Wignerovih mjera), kao inačice H-mjera sa zadanom karakterističnom duljinom. Ti se objekti posljednjih godina intenzivno koriste u proučavanju visokofrekventnih limesa jednadžbi kvantne teorije. Kao primjena, polazeći od Schrödingerovih jednadžbi na poluklasičnom limesu dobiva se Liouvilleova jednadžba za gustoću.

H-mjere ili mikrolokalne defektne mjere su uveli neovisno Luc Tartar i Patrick Gérard prije dvadeset godina. Gérard je također prvi uveo poluklasične mjere, da bi ih pod nazivom Wignerova mjera nešto kasnije proučavali Pierre-Louis Lions i Thierry Paul

Problem poluklasičnih mjera je što za velike razlike između ε_n i karakteristične duljine dolazi do gubitka informacija o oscilacijama. U tu svrhu, Tartar uvodi poboljšanje tako da promatra umjesto neprekinutih funkcija na sferi, neprekinute funkcije na kompaktifikaciji prostora $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$. Upravo kroz tu konstrukciju ćemo proći u trećem poglavlju.

Iskoristio bih priliku da se zahvalim mentoru prof. Nenadu Antoniću koji me strpljivo i prijateljski vodio kroz cijeli rad, te s velikim veseljem iščekujem buduća zajednička druženja. Također bih iskoristio priliku da se zahvalim Ivanu Ivecu na mnogim korisnim komentarima i primjedbama. Na kraju bih se još zahvalio svojim roditeljima što su mi omogućili da studiram što želim, te bratu koji mi je bio velika podrška u teškim danima kroz cijelo studiranje.

Sadržaj

I. Funkcijski prostori i Fourierova pretvorba

1. Oznake

Varijable u prostoru $\mathbf{R}^d$ označavat ćemo s $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^d)$, a derivaciju s $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$. Slično, varijable u dualnom prostoru $(\mathbf{R}^d)'$ (koji je izomorfan s $\mathbf{R}^d$) označavat ćemo s $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$, te derivaciju s $\partial^k = \frac{\partial}{\partial \xi_k}$. Također ćemo se služiti Schwartzovim oznakama: *multiindeks* je d-torka prirodnih brojeva $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbf{N}_0^d$ za koju definiramo *duljinu*

$$|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$$

i *faktorijel*

$$\boldsymbol{\alpha}! := \alpha_1! \cdots \alpha_d! \,,$$

dok za $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ definiramo $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := (x^1)^{\alpha_1} \cdots (x^d)^{\alpha_d}$ (naravno, definicija je identična i za $\boldsymbol{\xi}$ iz dualnog prostora). Na multiindeksima uvodimo parcijalni uređaj $\leqslant$ na način da je $\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}$ ako i samo ako za svaki $j \in 1...d$ vrijedi $\beta_j \leqslant \alpha_j$. Definiramo i *binomni koeficijent* formulom:

$$\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} := \frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{\beta}!(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})!}$$

za $\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}$, dok je inače jednak 0. Za derivacije ćemo koristiti pokratu $\partial_{\boldsymbol{\alpha}} := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}$, te analogno $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}$ za derivacije po $\boldsymbol{\xi}$. Koristeći upravo uvedene oznake, vrlo se elegantno mogu iskazati *Binomni teorem*:

$$(\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d)(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d) \qquad (\mathbf{x} + \mathbf{y})^{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{y}^{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}} \,,$$

kao i *Leibnizova formula*:

$$(\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d)(\forall\, f, g \in \mathrm{C}^{\boldsymbol{\alpha}}(\Omega)) \qquad \partial_{\boldsymbol{\alpha}}(fg) = \sum_{\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}} (\partial_{\boldsymbol{\beta}} f)(\partial_{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}} g) \,,$$

gdje je $\mathrm{C}^{\boldsymbol{\alpha}}(\Omega)$ prostor funkcija koje su klase C^{α_j} po varijabli x^j. Leibnizova formula se može proširiti i na derivaciju produkta dovoljno glatke funkcije i distribucije.

Radi elegantnijeg zapisa, vektorske funkcije uglavnom nećemo razdvajati na komponentne funkcije. Pri tome ćemo promatrati standarnu *p-normu* na prostoru $\mathbf{R}^r$ (ili $\mathbf{C}^r$) koju ćemo označavati s $|\cdot|_p$, a posebno za $p = 2$ je riječ o *euklidskoj normi* za koju ćemo koristiti skraćeni zapis $|\cdot| := |\cdot|_2$ Na prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$, $p \in [1, \infty]$, promatramo normu

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)} = \||\mathbf{f}|_p\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)} \,,$$

uz koju su ti prostori Banachovi, a $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ je posebno i Hilbertov.

Kompleksni tenzorski produkt dva vektora, $\mathsf{a} \otimes \mathsf{b}$, definiramo kao jedinstveni linearni operator koji na po volji odabrani vektor v djeluje na sljedeći način $(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\mathsf{v} := (\mathsf{v} \cdot \mathsf{b})\mathsf{a}$, gdje je $\mathsf{v} \cdot \mathsf{b} = \sum_{j=1}^d v^j \overline{b^j}$ kompleksni skalarni produkt. Uz takav skalarni produkt s (e_i) označavamo ortonormiranu bazu prostora $\mathbf{C}^d$, pri čemu e_i na i-tom mjestu ima 1, a na ostalim mjestima 0 (analogno ćemo s (e^i) označavati pripadnu dualnu bazu, koja je također ortonormirana). U sljedećoj lemi ćemo pokazati neke jednostavne činjenice vezane uz kompleksni tenzorski produkt.

Lema 1. *Za $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{C}^r$ je $\mathsf{a} \otimes \mathsf{b}$ linearan operator na $\mathbf{C}^r$ ranga 1 ukoliko vrijedi $\mathsf{a}, \mathsf{b} \neq 0$, dok je inače jednak trivijalnom operatoru. Pripadna operatorska norma tog operatora je jednaka $|\mathsf{a} \otimes \mathsf{b}| = |\mathsf{a}||\mathsf{b}|$, matrični zapis je jednak $(a^i \overline{b^j})_{ij}$, te za njemu pridruženi adjungirani operator imamo formulu: $(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})^* = \mathsf{b} \otimes \mathsf{a}$.*

Dem. Za po volji izabrane $\mathsf{v}, \mathsf{u} \in \mathbf{R}^r$ vrijedi:

$$|(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\mathsf{v}| = |(\mathsf{v} \cdot \mathsf{b})\mathsf{a}| = |\mathsf{v} \cdot \mathsf{b}||\mathsf{a}| \leqslant |\mathsf{v}||\mathsf{b}||\mathsf{a}| ,$$

gdje smo koristili Cauchy-Schwartz-Bunjakowskijevu nejednakost za vektore. Gornjim računom smo dobili gornju ogradu. Sada za $\mathsf{v} = \mathsf{b}$ imamo

$$|(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\mathsf{b}| = |\mathsf{b}||\mathsf{b}||\mathsf{a}| ,$$

pa smo ovime pokazali i donju ogradu, što povlači da vrijedi jednakost. Pogledajmo sada dimenziju jezgre operatora:

$$(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\mathsf{v} = (\mathsf{v} \cdot \mathsf{b})\mathsf{a} = 0 .$$

Ako je bilo $\mathsf{a} = 0$ ili $\mathsf{b} = 0$, onda je operator jednak nul-operatoru. Uzmimo sada da je $\mathsf{a}, \mathsf{b} \neq 0$. Gornja jednakost tada vrijedi ako i samo ako je $\mathsf{v} \cdot \mathsf{b} = 0$, tj. ako i samo ako je $\mathsf{v} \in \{\mathsf{b}\}^{\perp}$. Iz toga zaključujemo da je dimenzija jezgre $d-1$, pa je onda po teoremu o rangu i defektu rang operatora u ovom slučaju jednak 1. Na mjestu (i,j) u matričnom zapisu iz formule dobivamo:

$$(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_i = \overline{b^j} a^i .$$

$$(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\mathsf{v} \cdot \mathsf{u} = (\mathsf{v} \cdot \mathsf{b})\mathsf{a} \cdot \mathsf{u} = \mathsf{v} \cdot \overline{(\mathsf{a} \cdot \mathsf{u})}\mathsf{b} = \mathsf{v} \cdot (\mathsf{u} \cdot \mathsf{a})\mathsf{b} = \mathsf{v} \cdot (\mathsf{b} \otimes \mathsf{a})\mathsf{u} .$$

Konačno, koristeći definiciju adjungiranog operatora dobivamo traženu tvrdnju.

Q.E.D.

Istaknimo još da su operatori gornjeg oblika seskvilinearni po vektorima a i b, tj. lako se provjeri da vrijedi:

$$(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r))(\forall\, \alpha \in \mathbf{C}) \qquad \begin{aligned} &(\mathsf{a} + (\alpha\mathsf{b})) \otimes \mathsf{c} = \mathsf{a} \otimes \mathsf{c} + \alpha(\mathsf{b} \otimes \mathsf{c}) \\ &\mathsf{a} \otimes (\mathsf{b} + (\alpha\mathsf{c})) = \mathsf{a} \otimes \mathsf{b} + \overline{\alpha}(\mathsf{a} \otimes \mathsf{c}) . \end{aligned}$$

Za razliku od kompleksnog tenzorskog produkta kojeg označavamo s $\otimes$, s $\boxtimes$ označavamo tenzorski produkt funkcija:

$$(\varphi \boxtimes \psi)(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \varphi(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi}) .$$

2. Funkcijski prostori

Vektorski prostor $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ nam je od velikog interesa, jer se sastoji od funkcija s kojima znamo dobro računati, a pritom je gust u Banachovim prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, $p \in [1, \infty\rangle$. Za slučaj $p = \infty$ spomenuta gustoća ne vrijedi, ali zato znamo da je zatvarač prostora $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ u L^∞ normi prostor $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ (neprekinute funkcije koje trnu u beskonačnosti). Međutim, ponekad je zanimljivo promatrati i nešto jaču topologiju u kojoj bi sam prostor $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ bio potpun. Opišimo tu topologiju strogog induktivnog limesa, s kojom $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ postaje tzv. *LF prostor* (limes Fréchetovih prostora).

Neka je $\mathcal{K}(\Omega)$ familija svih kompakata sadržanih u otvorenom podskupu $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ i uzmimo $K \in \mathcal{K}(\Omega)$. Definirajmo skup

$$\mathrm{C}_K^\infty(\Omega) := \{f \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} f \subseteq K\} ,$$

kojeg poistovjećujemo s $\mathrm{C}^\infty(K)$, iz čega je očito da je riječ o vektorskom prostoru. Budući da vrijedi:

$$\mathrm{C}_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}(\Omega)} \mathrm{C}_K^\infty(\Omega) , \tag{1}$$

traženu topologiju prostora $C_c^\infty(\Omega)$ ćemo konstruirati kao limes topologija na prostorima $C_K^\infty(\Omega)$. Prostor $C_c^\infty(\Omega)$ nije normabilan, pa ćemo za konstrukciju topologije koristiti polunorme, te kao rezultat dobiti lokalno konveksan prostor.

Polunorma na vektorskom prostoru V, nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva, je funkcija $p : V \to \mathbf{R}_0^+$ koja ima sljedeća svojstva

(i) *subaditivnost:* $(\forall\, v, w \in V) \quad p(v+w) \leqslant p(v) + p(w)$,

(ii) *apsolutna homogenost:* $(\forall\, v \in V)(\forall\, \lambda \in \mathbf{F}) \quad p(\lambda v) \leqslant |\lambda| p(v)$.

Kod proučavanja topologija definiranih polunormama, često su važna i sljedeća svojstva familija polunormi: uzmimo da je A neki skup indeksa; kažemo da je familija polunormi $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$

(i) *usmjerena*, ako vrijedi

$$(\forall\, \alpha, \beta \in A)(\exists\, \gamma \in A)(\exists\, C > 0)(\forall\, v \in V) \qquad p_\alpha(v) + p_\beta(v) \leqslant C p_\gamma(v) ,$$

(ii) *razlikuje točke*, ako vrijedi

$$(\forall\, \alpha \in A) \quad p_\alpha(v) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \mathsf{0} .$$

Lokalno konveksan prostor je realan ili kompleksan vektorski prostor V, zajedno s familijom polunormi $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ koje razlikuju točke. Prirodna topologija na lokalno konveksnom prostoru je najslabija topologija u kojoj su sve polunorme p_α neprekinute, a u toj topologiji su također i operacije zbrajanja i množenja skalarom neprekinute. Kažemo da niz (v_n) u lokalno konveksnom prostoru V konvergira k v ukoliko

$$(\forall\, \alpha \in A) \quad p_\alpha(v_n - v) \to 0 . \tag{2}$$

Analogno se definira i konvergencija hiperniza. U normiranim prostorima imamo vezu između omeđenosti i neprekinutosti linearnih operatora. U lokalno konveksnim prostorima vrijedi analogon te tvrdnje:

Teorem 1. *Neka su V i W lokalno konveksni prostori s pripadnim familijama polunormi $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ i $(\rho_\beta)_{\beta\in B}$. Tada je linearno preslikavanje $T : V \to W$ neprekinuto ako i samo ako za svaki $\beta \in B$ postoji $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, te konstanta $C > 0$ tako da vrijedi*

$$\rho_\beta(Tv) \leqslant C \sum_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}(v) . \tag{3}$$

Ako je familija $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ usmjerena, onda je T neprekinuto ako i samo ako

$$(\forall\, \beta \in A)(\exists\, \alpha \in A)(\exists\, C > 0) \qquad \rho_\beta(Tv) \leqslant C p_\alpha(v) . \tag{4}$$

∎

Istaknimo još da je V metrizabilan ako i samo ako je topologija na V generirana nekom prebrojivom familijom polunormi. Dokaz Teorema 1 kao i opširnija razrada spomenutih topologija može se naći u [12, str. 286–294].

Vratimo se sada prostoru $C_K^\infty(\Omega)$. Definirajmo prebrojivu familiju polunormi na sljedeći način:

$$p_n(f) = \max_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant n} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\|_{L^\infty(\Omega)} . \tag{5}$$

Očito ta familija razlikuje točke, te definira lokalno konveksnu topologiju na $C_K^\infty(\Omega)$. Kako je ta familija polunormi prebrojiva, definirana topologija je i metrizabilna, a jedna pripadna metrika je dana formulom:

$$d(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} \,, \tag{6}$$

s kojom $C_K^\infty(\Omega)$ postaje *Fréchetov prostor*: potpun metrizabilan lokalno konveksan topološki vektorski prostor, sa standarnim operacijama (zbrajanje funkcija i množenje skalarom je neprekinuto u definiranoj metrici). Važno je još uočiti da je familija polunormi $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ usmjerena, pa se za provjeru neprekinutosti operatora koristi pojednostavljeni zahtjev (4).

U metričkom prostoru je podskup omeđen ako mu je dijametar konačan. Budući da je metrika (6) konačna (manja od 1), svaki podskup $C_K^\infty(\Omega)$ je omeđen. Konvergenciju nizova provjeravamo pomoću (2) (uočimo da zbog metrizabilnosti, konvergencija nizova u potpunosti opisuje topologiju na $C_K^\infty(\Omega)$).

Neka je (K_n) niz rastućih kompakata za koje vrijedi

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n = \mathbf{R}^d \tag{7}$$

i

$$K_n \subseteq \operatorname{Int} K_{n+1} \,. \tag{8}$$

Svaki od prostora $C_{K_n}^\infty$, je opskrbljen gore konstruiranom topologijom. Uvjet (7) povlači da unija svih $C_{K_n}^\infty$ daje $C_c^\infty(\Omega)$ (za razliku od (1), ovdje je riječ o prebrojivoj uniji), a iz (8) slijedi da je $C_{K_n}^\infty$ pravi podskup prostora $C_{K_{n+1}}^\infty$, za svaki n.

Za definiciju topologije prostora $C_c^\infty(\Omega)$ potreban nam je još jedan pojam: $E \subseteq C$ je *apsolutno konveksan skup (disk)* u vektorskom prostoru V ako za skalare α i β vrijedi:

$$|\alpha| + |\beta| \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha E + \beta E \subseteq E \,,$$

gdje su operacije na skupovima u V definirane s:

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b \in V \mid a \in A, b \in B\} \,, \\ \alpha A &:= \{\alpha a \in V \mid a \in A\} \,. \end{aligned}$$

Uočimo da su operacije zbrajanja i množenja skalarom nad elementima dobro definirane, jer se nalazimo u vektorskom prostoru. Disk u $C_c^\infty(\Omega)$ je okolina nule ako je njegov presjek sa svakim $C_{K_n}^\infty(\Omega)$ okolina nule u $C_{K_n}^\infty(\Omega)$ u pripadnoj topologiji. Okolina neke proizvoljne točke prostora $C_c^\infty(\Omega)$ se dobije translacijom okolina nule, pa da imamo dobru definiranost topologije još je samo ostalo provjeriti da je navedena familija skupova predbaza za V. Po teoremu iz [12; Tm 4.5.3], dovoljno je provjeriti da se u našem skupu nalaze konačni presjeci diskova, a to je ispunjeno po samoj konstrukciji. Time smo dobro definirali lokalno konveksu topologiju prostora $C_c^\infty(\Omega)$ koju nazivamo topologijom *strogog induktivnog limesa*.

Vrijedi da se naslijeđena topologija s $C_c^\infty(\Omega)$ na $C_{K_n}^\infty(\Omega)$ podudara s početnom Fréchetovom, tj. da je za svaki n, $C_{K_n}^\infty(\Omega)$ topološki potprostor $C_c^\infty(\Omega)$. Kako je svaki $C_{K_n}^\infty(\Omega)$ Hausdorffov i potpun, onda je to i $C_c^\infty(\Omega)$. Također, svaki $C_{K_n}^\infty(\Omega)$ je zatvoren potprostor u $C_{K_{n+1}}^\infty(\Omega)$, pa je $C_{K_n}^\infty(\Omega)$ zatvoren i u $C_c^\infty(\Omega)$. Budući da $C_c^\infty(\Omega)$ nije metrizabilan (slijedi iz činjenice što je $C_{K_n}^\infty(\Omega)$ pravi potprostor $C_{K_{n+1}}^\infty(\Omega)$), nizovi ne određuju u potpunosti topologiju, ali ipak se može opisati većina svojstava. Za to su nam potrebni sljedeći kriteriji:

- $E \subseteq \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ je omeđen ako i samo ako je za neki $n \in \mathbf{N}$ skup $E \subseteq \mathrm{C}_{K_n}^\infty(\Omega)$ i E je omeđen skup u $\mathrm{C}_{K_n}^\infty(\Omega)$. Budući da je svaki podskup skupa $\mathrm{C}_{K_n}^\infty(\Omega)$ omeđen, uvjet da je E omeđen u $\mathrm{C}_{K_n}^\infty(\Omega)$ je uvijek ispunjen i može se izostaviti.
- Niz $\varphi_k \to \varphi$ u $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ ako i samo ako je za neki $n \in \mathbf{N}$ čitav niz sadržan u $\mathrm{C}_{K_n}^\infty(\Omega)$ i konvergira k φ u topologiji prostora $\mathrm{C}_{K_n}^\infty(\Omega)$. Koristeći definiciju konvergencije u prostorima $\mathrm{C}_{K_n}^\infty(\Omega)$, tvrdnju možemo preciznije zapisati na sljedeći način: $\varphi_k \to \varphi$ ako i samo ako postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da

$$\begin{aligned} &(\forall\, k \in \mathbf{N}) \quad \operatorname{supp} \varphi_k \subseteq K_n \ , \\ &(\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0) \quad \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi_k \rightrightarrows \varphi \ . \end{aligned}$$

- $E \subseteq \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ je kompaktan ako i samo ako je za neki $n \in \mathbf{N}$: $E \subseteq \mathrm{C}_{K_n}^\infty(\Omega)$ i E je kompaktan u $\mathrm{C}_{K_n}^\infty(\Omega)$.

Potpuno analogno kao i za prostor $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ može se definirati topologija strogog induktivnog limesa na prostoru $\mathrm{L}_{\mathrm{c}}^p(\Omega)$ (funkcije iz $\mathrm{L}^p(\Omega)$ s kompaktnim nosačem). Zanimljivo je uočiti da je $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ gust i u prostoru $\mathrm{L}_{\mathrm{c}}^p(\Omega)$ s topologijom strogog induktivnog limesa. Neka je $f \in \mathrm{L}_{\mathrm{c}}^p(\Omega)$; tada postoji kompakt K takav da je $\operatorname{supp} f \subseteq K$. Definirajmo niz funkcija $f_n := f * \rho_n$, gdje je $\rho_n(\mathbf{x}) = n^d \rho(n\mathbf{x})$, a ρ standarni izglađivač. Za dovoljno veliki n, niz (f_n) je sadržan u $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ (moramo biti oprezni da nosač od f_n ostane unutar Ω) i, budući da je nosač funkcije ρ_n jednak $\mathrm{K}[0, \frac{1}{n}]$, vrijedi $\operatorname{supp} f_n \subseteq K + \mathrm{K}[0, \frac{1}{n}]$ (napuhnuli smo K za $\frac{1}{n}$ u svakom smjeru). Uzmimo $\tilde{K} \subseteq \Omega$, $K \subseteq \mathsf{Int}\, \tilde{K}$ (takav $\tilde{K}$ postoji jer je Ω otvoren). Iz svojstva niza (f_n) zaključujemo:

$$(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall\, n \geqslant n_0) \quad \operatorname{supp} f_n \in \tilde{K} \ ,$$

što zapravo znači da je $f_n \in \mathrm{L}_{\tilde{K}}^p(\Omega)$ za $n \geqslant n_0$. Također znamo da ovakav niz konvergira prema f u L^p normi. Time (f_n) konvergira k f u topologiji prostora $\mathrm{L}_{\mathrm{c}}^p(\Omega)$, pa zbog proizvoljnosti funkcije f zaključujemo da je $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ gust u $\mathrm{L}_{\mathrm{c}}^p(\Omega)$.

Prostor

$$\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbf{F} \mid (\forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega)) \int_K |f|^p < \infty \right\}$$

također možemo opskrbiti s lokalno konveksnom topologijom i dobiti Fréchetov prostor. Kao i prije promatramo familiju kompakata $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sa svojstvima (7) i (8), te definiramo polunorme:

$$p_n(f) := \|f\|_{\mathrm{L}^p_{|K_n}} \ ,$$

koje definiraju topologiju. Karakteristične funkcije su iz $\mathrm{L}^p(\Omega)$ pa je gornja konstrukcija valjana, međutim, za općenite Soboljevljeve prostore u kojima imamo i zahtjev na određenu gustoću, trebali bismo koristiti glatke funkcije sa svojstvom da su jednake 1 na K_n, a 0 izvan K_{n+1} (pri toj konstukciji važnu ulogu ima uvjet (8) na (K_n)). Iz prethodnog razmatranja zaključujemo da niz (f_k) konvergira k f ako

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad \lim_k p_n(f_k - f) = 0 \ ,$$

te da je omeđen ako

$$(\forall\, k \in \mathbf{N})(\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad p_n(f_k) < \infty \ .$$

Ipak, za nas je od većeg interesa promatrati slabu konvergenciju u ovom prostoru o čemu će biti više rečeno u sljedećoj točki.

3. Dualni prostori

Za početak ćemo promatrati prostore $\mathrm{L}^p(\Omega)$ za $p \in \langle 1, \infty\rangle$, dok ćemo slučajeve $p = 1$ i $p = \infty$ sagledati naknadno. Pritom, p' će nam označavati pripadni konjugiran eksponent p, tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Prostori $\mathrm{L}^p(\Omega)$ su Banachovi prostori, a posebno je $\mathrm{L}^2(\Omega)$ Hilbertov. Neka je $g \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$. Definirajmo funkcional F_g na $\mathrm{L}^p(\Omega)$ formulom:

$$F_g(f) = \int_\Omega f\bar{g} \, . \tag{9}$$

Iz Hölderove nejednakosti slijedi da je F_g omeđen funkcional, dok gornje razmatranje povlači da je preslikavanje $g \mapsto F_g$ dobro definirano. Međutim, vrijedi i više. Rieszov teorem povlači da je navedeno preslikavanje antilinearan izmorfizam i time nam daje bitnu vezu između L^p prostora i njihovih duala.

Teorem 2. **(Riesz)** *Za $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren, p i p' kao gore, vrijedi*

$$(\forall\, G \in (\mathrm{L}^p(\Omega))')(\exists!\, g \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega))(\forall\, f \in \mathrm{L}^p(\Omega)) \quad {}_{(\mathrm{L}^p(\Omega))'}\langle\, G, f\,\rangle_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = G(f) = \int_\Omega f\bar{g}d\lambda \, ,$$

pa je $G \mapsto g$ izometrički antilinearan izomorfizam prostora $(\mathrm{L}^p(\Omega))'$ i $\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$. ∎

Dokaz se može naći u [3]. Rieszov teorem nam omogućuje da preciznije opišemo *slabu topologiju:* Neka je (f_n) niz u $\mathrm{L}^p(\Omega)$ i $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$. Kažemo da f_n *slabo konvergira* prema f, $f_n \rightharpoonup f$, ako vrijedi:

$$(\forall\, g \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)) \qquad F_g(f_n) \to F_g(f) \, . \tag{10}$$

Hölderova nejednakost povlači da je $g \mapsto \int_\Omega f\bar{g}$ neprekinuto, pa je jedinstveno određeno svojim vrijednostima na gustom skupu. To nam omogućuje da uvjet (10) oslabimo tako da uzimamo g iz gustog podskupa (npr. $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ je gusto u $\mathrm{L}^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty\rangle$).

Prostori $\mathrm{L}^p(\Omega)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$ su *refleksivni*, pa im se podudaraju slaba i slaba $*$ topologija. Dual prostora $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ je kompliciran prostor, pa se zato ne promatra slaba, nego slaba $*$ topologija za koju opet po Rieszovom teoremu vrijedi:

$$f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} f \iff (\forall\, g \in \mathrm{L}^1(\Omega)) \int f_n\bar{g}d\lambda \to \int f\bar{g}d\lambda \, .$$

Za svaku funkciju f iz $\mathrm{L}^1(\Omega)$ formulom $\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi f d\mu$ definiran je neprekinut funkcional na prostoru $\mathrm{C}_0(\Omega)$. Po Rieszovom teoremu reprezentacije, dual prostora $\mathrm{C}_0(\Omega)$ je izomorfan prostoru $\mathcal{M}_\mathrm{b}$, prostoru (omeđenih) Radonovih mjera, što povlači da je $\mathrm{L}^1(\Omega)$ uloženo u $\mathcal{M}_\mathrm{b}$. Ograničen niz (f_n) ne mora nužno imati slabo konvergentan podniz, ali pridruženi niz μ_{f_n} je također ograničen pa, budući da je $C_0(\Omega)$ separabilan (jer je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ separabilan), postoji slabo $*$ konvergentan podniz (u $\mathcal{M}_\mathrm{b}$).

Za razliku od funkcija iz $\mathrm{L}^1(\Omega)$, funkcije iz $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definiraju ograničen funkcional na prostoru $\mathrm{C}_\mathrm{c}(\Omega)$ u topologiji strogog induktivnog limesa. Međutim, takvom funkcionalu ne možemo pridružiti omeđenu Radonovu mjeru, niti ga možemo proširiti do neprekinutog funkcionala na $\mathrm{C}_0(\Omega)$. Budući da takvi objekti ipak imaju poveznicu s (omeđenim) Radonovim mjerama, njih ćemo zvati Radonovim mjerama i prostor označavati s $\mathcal{M}$, dok ćemo za prostor $\mathcal{M}_\mathrm{b}$ isticati da se radi o omeđenim Radonovim mjerama.

Neprekinuti funkcionali na $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ u topologiji strogog induktivnog limesa su *distribucije*. Koristeći karakterizacije spomenute topologije, dobivamo da je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ako i samo ako

$$(\forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega))(\exists\, m \in \mathbf{N}_0)(\exists\, C > 0)(\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega))\ \mathrm{supp}\,\varphi \subseteq K \Longrightarrow |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant Cp_m(\varphi) \, ,$$

gdje je p_m definiran s (5). Ako postoji m iz gornje definicije takav da je neovisan o K, tada je najmanji takav m *red* distribucije. Posebno su Radonove mjere distribucije reda 0.

Ranije smo opisali konvergenciju u prostoru $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; međutim, nama je zanimljivija slaba konvergencija u ovom prostoru. Za to nam je potrebno znati nešto više o njegovom dualu. Najveći prostor za funkciju g da $\int_\Omega f\bar{g}$ bude definirano je $\mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{c}}(\Omega)$, a pokaže se da je to upravo i njegov dual, tj. vrijedi

$$(\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega))' \cong \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{c}}(\Omega) .$$

Dokaz ove tvrdnje za općenite Soboljevljeve prostore, može se naći u [2].

Sada imamo da niz (f_k) slabo konvergira k f u prostoru $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $f_k \rightharpoonup f$ ako

$$(\forall\, g \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{c}}(\Omega)) \qquad \int_\Omega f_k\bar{g} \to \int_\Omega f\bar{g} .$$

Naravno, kao prostor probnih funkcija možemo uzeti bilo koji prostor koji je gust u $\mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{c}}(\Omega)$ u pripadnoj topologiji ($\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ je samo jedan takav prostor). Sljedeća lema nam omogućuje da možemo gledati i manji prostor za $p = 1$.

Lema 2. *Neka je $d = d_1d_2$, te neka su dani otvoreni skupovi $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, $\Omega_1 \subseteq \mathbf{R}^{d_1}$ i $\Omega_2 \subseteq \mathbf{R}^{d_2}$ takvi da $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Prostor*

$$\Big\{\sum_{k=1}^m \varphi_k \boxtimes \theta_k \mid m \in \mathbf{N},\ \varphi_k \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega_1),\ \theta_k \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega_2)\Big\}$$

je gust u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}(\Omega)$ (u topologiji strogog induktivnog limesa).

Dem. Neka je $\psi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $\operatorname{supp}\psi \subseteq I$, gdje je $I = \langle 0, 1\rangle^d$ (ako nije, funkciju možemo reskalirati po svakoj varijabli). Prostor $\mathrm{L}^2(\mathsf{Cl}\, I)$ je Hilbertov s potpunim ortonormiranim sustavom $\{e^{2\pi i\mathbf{kx}} \mid \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^d\}$ [11, Theorem 1.10], stoga niz funkcija

$$\tilde{\psi}_n(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|_\infty \leqslant n} \widehat{\psi}(\mathbf{k})e^{2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

konvergira k ψ u normi prostora $\mathrm{L}^2(\mathsf{Cl}\, I)$, pri čemu su

$$\widehat{\psi}(\mathbf{k}) := \int_{\mathsf{Cl}\, I} \psi(\mathbf{y})e^{-2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}d\mathbf{y}$$

Fourierovi koeficijenti funkcije ψ. Uzmimo $\delta > 0$ takav da je $\operatorname{supp}\psi \subseteq [\delta, 1-\delta]^d$ (takav δ postoji jer je $\operatorname{supp}\psi \subseteq I$) i funkciju $\rho \in \mathrm{C}^\infty_c(0, 1)$ sa svojstvom da $\rho = 1$ na $[\frac{1}{2}\delta, 1 - \frac{1}{2}\delta]$ (to se može dobiti djelovanjem konvolucijom sa standarnim izglađivačem na karakterističnu funkciju skupa $[\frac{1}{4}\delta, 1 - \frac{1}{4}\delta]$). Definirajmo:

$$\psi_n(\mathbf{x}) := \sum_{|k_1|\leqslant n,\dots,|k_d|\leqslant n} \widehat{\psi}(\mathbf{k}) \prod_{l=1}^d \rho(x_l)e^{2\pi ik_lx_l}.$$

Produkt se pojavio zbog svojstva eksponencijalne funkcije:

$$(\forall\, \mathbf{x} \in \operatorname{supp}\psi) \qquad e^{2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \prod_{l=1}^d e^{2\pi ik_lx_l} = \prod_{l=1}^d \rho(x_l)e^{2\pi ik_lx_l} .$$

Zadnja jednakost vrijedi, jer za $\mathbf{x}$ iz nosača funkcije ψ imamo da su mu sve komponente unutar $[\delta, 1-\delta]$, gdje je ρ jednak 1. U produktu se nalaze funkcije jedne varijable s neovisnim varijablama, pa se iz toga vidi da je funkcija ψ_n oblika

$$\sum_{k=1}^{m} \psi_k^1 \boxtimes \cdots \boxtimes \psi_k^d \,,$$

za $m = d(2n+1)$. Definirajmo

$$\begin{aligned} \varphi_k &:= \psi_k^1 \boxtimes \cdots \boxtimes \psi_k^{d_1} \,, \\ \theta_k &:= \psi_k^{d_1+1} \boxtimes \cdots \boxtimes \psi_k^d \,. \end{aligned}$$

Iz Leibnitzove formule se vidi da su $\varphi_k \in \mathrm{C}_c^\infty(I_1)$ i $\theta_k \in \mathrm{C}_c^\infty(I_2)$ za svaki k, $I_1 = \langle 0,1\rangle^{d_1}$, $I_2 = \langle 0,1\rangle^{d_2}$, tako da je ψ_n željenog oblika. Kako se $\tilde{\psi}_n$ i ψ_n podudaraju na nosaču od ψ, zaključujemo da i ψ_n konvergira prema ψ u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathsf{Cl}\, I)$. Budući da još vrijedi $\operatorname{supp}\psi_n \subseteq \mathsf{Cl}\, I$ za svaki n, dobili smo konvergenciju u prostoru $\mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}(\Omega)$.

Q.E.D.

Ako imamo prostor $\mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, onda gornju lemu primijenimo po svakoj komponenti tako da dobijemo da je potprostor

$$\Big\{ \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{\psi}_k \mid m \in \mathbf{N},\ \boldsymbol{\psi}_k = \sum_{i=1}^{r} (\varphi_k^i \boxtimes \theta_k^i)\mathsf{e}_i \,,\ \varphi_k^i \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega_1),\ \theta_k^i \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega_2) \Big\}$$

gust u njemu.

4. Fourierova pretvorba

Za funkciju $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ dobro je definirana sljedeća funkcija:

$$\mathcal{F}(u)(\boldsymbol{\xi}) := \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \,. \tag{11}$$

Preslikavanje $\mathcal{F}$ je očito omeđeno linearno preslikavanje s $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$, međutim Riemann-Lebesgueova lema precizira da je slika sadržana u Banachovom prostoru $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$. Gornju definiciju možemo proširiti i na omeđene Radonove mjere. Naime, prostor $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ je uložen u $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\mathbf{R}^d)$ na način da za svaku funkciju $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ postoji $\mu_f \in \mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\mathbf{R}^d)$ tako da

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)) \qquad \int_{\mathbf{R}^d} f\varphi d\mu = \int_{\mathbf{R}^d} \varphi\, d\mu_f \,.$$

Želimo proširiti definiciju Fourierove pretvorbe i na omeđene Radonove mjere, ali da se definicije poklapaju na $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$, tj. da bude $\widehat{f} = \widehat{\mu}_f$.

$$\widehat{\mu}_u(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, d\mu_u(\mathbf{x}) \,,$$

pa je onda formulom

$$\widehat{\mu}(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, d\mu(\mathbf{x})$$

dobro definirano proširenje Fourierove pretvorbe na omeđene Radonove mjere.

Budući da vrijedi

$$(\forall\, f,g\in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d))\quad \widehat{f*g}(\mathbf{x})=\widehat{f}\widehat{g}\ ,$$

$\mathcal{F}$ je homomorfizam s konvolucijske algebre $(\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d),+,*)$ u multiplikativnu algebru $(\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d),+,\cdot)$.

Neka je $\tau_{\mathbf{h}}$ translacija za vektor $\mathbf{h}\in\mathbf{R}^d$. Izravnim računanjem se lako dobiju sljedeće relacije:

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_{\mathbf{h}}f}(\boldsymbol{\xi})&=e^{-2\pi i\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}}\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\ ,\\ (e^{2\pi i\,\cdot\,\cdot\mathbf{h}}f)^\wedge(\boldsymbol{\xi})&=(\tau_{\mathbf{h}}\widehat{f})(\boldsymbol{\xi})\ ,\end{aligned}$$

kao i sljedeće formule za derivacije:

$$\begin{aligned}\partial_j\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})&=(-2\pi i x^j f(\mathbf{x}))^\wedge(\boldsymbol{\xi})\ ,\\ \widehat{\partial^j f}(\boldsymbol{\xi})&=2\pi i\xi_j\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\ .\end{aligned}$$

Direktnom primjenom Fubinijevog teorema izvodi se *formula množenja*

$$(\forall\, f,g\in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d))\qquad \int_{\mathbf{R}^d}\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}=\int_{\mathbf{R}^d}f(\mathbf{x})\widehat{g}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\ .$$

Posebno zgodna svojstva ima restrikcija $\mathcal{F}$ na *Schwartzov prostor* brzo opadajućih funkcija

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d):=\{\varphi\in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)\ :\ (\forall\, k\in\mathbf{N}_0)\ \|\varphi\|_k<\infty\}\ ,$$

pri čemu su polunorme $\|\cdot\|_k$ definirane na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}&:=\|\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\ ,\\ \|\varphi\|_k&:=\sup_{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant k}\|\varphi\|_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\ .\end{aligned}$$

Schwartzov prostor $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, zajedno s prirodnom topologijom danom s pomoću familije polunormi $(\|\cdot\|_k\ ,\ k\in\mathbf{N}_0)$, je Fréchetov prostor (lokalno konveksna topologija; konstruira se analogno kao i za prostor $\mathrm{C}_K^\infty(\Omega)$). Posebno vrijedi da je zatvoren na operacije deriviranja, množenja polinomom, te množenjem s C^∞ funkcijama najviše polinomijalnog rasta u beskonačnosti. Budući da vrijedi

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\subseteq\bigcap_{p\in[1,\infty]}\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)\ ,$$

uistinu je riječ samo o restrikciji postojeće definicije Fourierove pretvorbe, tako da za $\mathcal{F}$ na prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ vrijedi sve što se do sad pokazalo za $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$.

Restrikcija Fourierove pretvorbe $\mathcal{F}$ na prostor $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ je bijekcija toga skupa na samoga sebe, te vrijede *formule inverzije*

$$\widehat{\widehat{\varphi}}=\tilde{\varphi}\ ,\qquad \widehat{\widehat{\widehat{\varphi}}}=\check{\varphi}=\bar{\mathcal{F}}\varphi=\mathcal{F}^{-1}\varphi\ ,\tag{12}$$

pri čemu je $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}):=\varphi(-\mathbf{x})$, a

$$\check{\varphi}(\mathbf{x}):=\int_{\mathbf{R}^d}e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\varphi(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}\ .$$

Koristeći *Parsevalovu formulu*

$$(\forall\, u,v\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d))\quad \langle\,\widehat{u}\mid\widehat{v}\,\rangle=\int_{\mathbf{R}^d}\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})\overline{\widehat{v}(\boldsymbol{\xi})}\,d\boldsymbol{\xi}=\int_{\mathbf{R}^d}u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}=\langle\,u\mid v\,\rangle\tag{13}$$

i gustoću Schwartzovog prostora u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, na jedinstveni način proširujemo omeđeni operator $\mathcal{F}$ na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, te i za prošireni $\mathcal{F}$ vrijedi (13). Ovo proširenje je poznato kao *Plancherelov teorem*.

Osim proširenja po gustoći, moguće je i proširenje po dualnosti na $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, prostor temperiranih distribucija (topološki dual prostora $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$):

$$(\forall\, u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d))(\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)) \qquad \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle \tilde{u}, \widehat{\varphi} \rangle \ ,$$

pri čemu je $\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle$. Iz gornjih formula se dobiva i da temperirane distribucije zadovoljavaju formulu inverzije, što povlači da je proširenje $\mathcal{F}$ na $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ linearna bijekcija sa $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ u samoga sebe. Napomenimo da se ovo proširenje podudara s ranijom definicijom na prostoru omeđenih Radonovih mjera.

Definirajmo skalirani operator deriviranja po varijabli $\mathbf{x}$

$$D_j := \frac{1}{2\pi i}\partial_j \ , \ D_{\boldsymbol{\alpha}} := \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \ ,$$

te po dualnoj varijabli $\boldsymbol{\xi}$

$$D^j := \frac{1}{2\pi i}\partial^j \ , \ D^{\boldsymbol{\alpha}} := \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \ .$$

Na $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ vrijede sljedeće formule:

$$\begin{aligned} (D_{\boldsymbol{\alpha}} u)^{\wedge}(\boldsymbol{\xi}) &= \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) \ , \\ (\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} u)^{\wedge}(\boldsymbol{\xi}) &= (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} D^{\boldsymbol{\alpha}} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) \ . \end{aligned}$$

Diracova masa δ_0 se nalazi u prostoru $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, pa možemo pogledati što je njezina slika po $\mathcal{F}$:

$$\langle \widehat{\delta_0}, \varphi \rangle = \langle \tilde{\delta}_0, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \delta_0, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle 1, \varphi \rangle \ ,$$

pa zaključujemo da je $\widehat{\delta_0} = 1$, a iz formule inverzije slijedi i da je $\widehat{1} = \delta_0$.

Neka je $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ po volji odabrana. Uočimo da vrijedi:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \langle 1, \widehat{f} \rangle = \langle \widehat{1}, f \rangle = \langle \delta_0, f \rangle = f(0) \ .$$

Ovime su dani glavni i najčešće korišteni razultati i pojmovi na koje se kasnije pozivamo u ovom radu. Nadam se da se uspjelo pokriti sve potrebno pa da čitanje ovog rada bude ugodno i zanimljivo.

II. H-mjere

1. Definicija i pregled osnovnih svojstava H-mjera

Pri proučavanju fizike neprekinutih sredina jednadžbe koje upravljaju ponašanjem kontinuuma mogu biti podijeljene na dvije vrste: *jednadžbe ravnoteže* i *konstitutivne pretpostavke*.

Dok su Youngove mjere prikladno sredstvo za proučavanje pojava *titranja* rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, pokazale su se neodgovarajućim za proučavanje pojava *koncentracije*. Kao mjera koja ovisi samo o varijabli $\mathbf{x}$, Youngova mjera nije prilagođena za opisivanje pojava koje ovise i o posebnom smjeru u prostoru. Taj nedostatak je u znatnoj mjeri riješen H-mjerama, jer one upravo promatraju ponašanje $|\widehat{\varphi \mathsf{u}_n}|^2$ u beskonačnosti i rezultat projiciraju na sferu, tako da su sačuvani smjerovi ponašanja u Fourierovom prostoru.

H-mjere, ili kako se još nazivaju, mikrolokalne defektne mjere su osamdesetih godina dvadesetog stoljeća neovisno uveli Luc Tartar i Patrick Gérard. Kako su se najprije pojavile u vezi s nekim problemima iz homogenizacije, Tartar ih je nazvao H-mjerama. One su Radonove mjere, definirane kao limes kvadratičnih izraza L^2 funkcija.

Kako bismo primijenili Fourierovu pretvorbu, moramo promatrati funkcije definirane na čitavom prostoru $\mathbf{R}^d$, što lako postižemo proširivanjem funkcija nulom van Ω. To je standarni postupak koji ćemo po potrebi uvijek raditi i nećemo posebno komentirati.

Prije definicije samih H-mjera, potrebno je uvesti jednostavne pseudodiferencijalne operatore. Neka su $a \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$ i $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ neprekinute funkcije. Pridružimo im operator množenja M_b i Fourierov množitelj P_a na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$, na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
&M_b : \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r) \to \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)\ ,\ M_b\mathsf{u}(\mathbf{x}) := b\mathsf{u}(\mathbf{x})\ ,\\
&P_a : \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r) \to \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)\ ,\ \widehat{P_a\mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi}) := a\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right)\hat{\mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi})\ ;
\end{aligned}
$$

dakle, $P_a = \bar{\mathcal{F}} M_a \mathcal{F}$. Očito vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\|M_b\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r);\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r))} &= \|b\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\ ,\\
\|P_a\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r);\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r))} &= \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\ .
\end{aligned}
$$

Upravo definirani operatori se javljaju u definiciji H-mjera i baš je sljedeći rezultat bio ključan za razvoj teorije. Navodimo ga bez dokaza, koji se može naći u [18].

Lema 1. (prva komutacijska lema) *Komutator $C := [P_a, M_b] = P_a M_b - M_b P_a$ linearnih operatora P_a i M_b je kompaktan operator na prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ (drugim riječima $C \in \mathcal{K}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$).* ∎

U trećem poglavlju ćemo također trebati ovakav rezultat, samo zbog drugačijih pretpostavki morat ćemo pokazati poopćenu prvu komutacijsku lemu. U dokazu teorema egzistencije trebat će nam još i sljedeća lema koju navodimo iz [14].

Lema 2. *Neka su X i Y konačnodimenzionalne lokalno kompaktne neprekinute mnogostrukosti, te B neprekinuta bilinearna forma na $\mathrm{C}_0(X) \times \mathrm{C}_0(Y)$. Ako je forma B nenegativna, tj. ako vrijedi*

$$
f \geqslant 0 \ \&\ g \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad B(f,g) \geqslant 0\ ,
$$

tada postoji Radonova mjera m na $X \times Y$ takva da je $B(f,g) = \langle m, f \boxtimes g\rangle$. ∎

Teorem 1. (postojanje H-mjera) *Ako je* (u_n) *niz u prostoru* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, *takav da* $\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \mathsf{0}$ *(slabo), onda postoji podniz* $(\mathsf{u}_{n'})$ *i kompleksna matrična Radonova mjera* $\boldsymbol{\mu}$ *na* $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}$ *takva da za svaki* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ *i* $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$ *vrijedi:*

$$\begin{aligned}\lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} (\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_{n'}})(\boldsymbol{\xi}) \otimes (\widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_{n_k}})(\boldsymbol{\xi}) \psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} &= \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi_1 \bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi \rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}} \varphi_1(\mathbf{x}) \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \psi(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, .\end{aligned} \tag{1}$$

Mjeru $\boldsymbol{\mu}$ *nazivamo* H-mjerom *pridruženom (pod)nizu* (u_n).

Dem. Iz Plancherelove formule slijedi da je niz integrala na lijevoj strani u (1) omeđen, stoga ima gomilište za koje vrijedi ista ocjena:

$$|\langle \boldsymbol{\mu}, \varphi_1 \bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi \rangle| \leqslant \left(\sup_n \|\mathsf{u}_n\|^2_{\mathrm{L}^2} \right) \|\varphi_1\|_{\mathrm{L}^\infty} \|\varphi_2\|_{\mathrm{L}^\infty} \|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty} \, .$$

Potrebno je pokazati da limes linearno ovisi o produktu $\varphi_1 \bar{\varphi}_2$, te da definira Radonovu mjeru (čime bismo opravdali zapis u gornjoj ocjeni).

Označimo s M_{φ_i} standardni operator množenja pridružen simbolu φ_i, $i = 1, 2$, te s P_ψ operator pridružen simbolu $\bar{\psi}$. Koristeći prvu komutacijsku lemu imamo

$$P_\psi M_{\varphi_2} - M_{\varphi_2} P_\psi \in \mathcal{K}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)) \, .$$

To znači da $P_\psi M_{\varphi_2} \mathsf{u}_n - M_{\varphi_2} P_\psi \mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ jako u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, pa stoga zamjena redoslijeda operatora M_{φ_2} i P_ψ ne utječe na limes u (1):

$$\begin{aligned}\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} (\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_n})(\boldsymbol{\xi}) \otimes (\widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_n})(\boldsymbol{\xi}) \psi\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) d\boldsymbol{\xi} &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} (M_{\varphi_1} \mathsf{u}_n)(\mathbf{x}) \otimes (P_\psi M_{\varphi_2} \mathsf{u}_n)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} (M_{\varphi_1} \mathsf{u}_n)(\mathbf{x}) \otimes (M_{\varphi_2} P_\psi \mathsf{u}_n)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \varphi_1 \bar{\varphi}_2 \left(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \otimes (P_\psi \mathsf{u}_n)(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} \\ &\longrightarrow \mathbf{B}(\varphi_1 \bar{\varphi}_2, \psi) \, ,\end{aligned}$$

pri čemu je $\mathbf{B}$ matrica neprekinutih bilinearnih formi na $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}) \times \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1};\mathbf{C})$, omeđena izrazom na desnoj strani u (1). Zbog separabilnosti prostora $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})$ i $\mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1};\mathbf{C})$ možemo uzeti prebrojive guste podskupove u tim prostorima, te dijagonalnim postupkom izdvojiti podniz $(\mathsf{u}_{n'})$ tako da za svaki izbor funkcija φ_1, φ_2 i ψ iz danih skupova imamo gornju konvergenciju. Zbog gustoće stoga imamo konvergenciju za proizvoljne test funkcije iz danih prostora.

Na koncu, cilj nam je primijeniti Lemu 2 kako bismo bilinearnoj formi $\mathbf{B}$ pridružili odgovarajuću Radonovu mjeru. Uzmemo li $\varphi_1 = \varphi_2 =: \varphi$ i $\psi \geqslant 0$, te neka je $\mathsf{v} \in \mathbf{C}^r$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(|\varphi|^2, \psi)\mathsf{v} \cdot \mathsf{v} &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(\varphi \mathsf{u}^n)(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathcal{F}(\varphi \mathsf{u}^n)(\boldsymbol{\xi}) \psi\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) \mathsf{v} \cdot \mathsf{v}\, d\boldsymbol{\xi} \\ &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}(\varphi \mathsf{u}^n)(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathsf{v}|^2\, \psi\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) d\boldsymbol{\xi} \geq 0 \, .\end{aligned}$$

Zbog pozitivnost forme $\mathbf{B}$ slijedi egzistencija matrične Radonove mjere $\boldsymbol{\mu}$ na $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}$ takve da je

$$\mathbf{B}(|\varphi|^2, \psi) = \langle \boldsymbol{\mu}, |\varphi|^2 \boxtimes \psi \rangle \, .$$

Za prozvoljne test funkcije φ_1, φ_2 i ψ tvrdnja jednostavno slijedi iz gornjeg rezultata, rastavljanjem na realni i imaginarni, odnosno pozitivni i nenegativni dio, te koristeći bilinearnost forme $\mathbf{B}$.

Q.E.D.

Zanimljivo je primijetiti kako je bitnu ulogu u dokazu postojanja H-mjera imala separabilnost prostora probnih funkcija. Upravo će nam to zadavati probleme u preostalim poglavljima ovog rada.

Primijetimo da pri perturbaciji niza (u_n) jako konvergentnim nizom (v_n) s limesom nula, dobiveni niz $(\mathsf{u}_n + \mathsf{v}_n)$ definira identičnu H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$. Posebno, jako konvergentnom nizu pridružena je $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$.

Ako uzmemo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$, definicija se proširuje i na nizove koji konvergiraju slabo u prostoru $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, samo što je sada $\boldsymbol{\mu}$ u dualu (lokalno konveksnog) prostora $\mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$, pa ne mora imati konačnu ukupnu masu (tj. varijaciju), jer nemamo više omeđenost.

Korolar 1. *H-mjera $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}; \mathrm{M}_{\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$ je hermitska i nenegativna:*

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^* \qquad i \qquad (\forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)) \quad \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\varphi} \otimes \boldsymbol{\varphi} \rangle \geqslant 0 \,,$$

gdje je $\langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\varphi} \otimes \boldsymbol{\varphi} \rangle$ Radonova mjera na S^{d-1}.

Dem. Za realne φ_1, φ_2 i ψ nam definicija H-mjere (1) daje

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi_1\varphi_2\psi \rangle &= \lim_{n_k} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(\varphi_1 \mathsf{u}_{n_k}) \otimes \mathcal{F}(\varphi_2 \mathsf{u}_{n_k})\, \psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} \\ &= \lim_{n_k} \int_{\mathbf{R}^d} \Big(\mathcal{F}(\varphi_2 \mathsf{u}_{n_k}) \otimes \mathcal{F}(\varphi_1 \mathsf{u}_{n_k})\Big)^* \psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{\mu}^*, \varphi_1\varphi_2\psi \rangle \,, \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili Lemu I.1. Uzimanjem ortonormirane baze $(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_r)$ za $\mathbf{R}^r$ možemo pisati (u smislu Radonovih mjera na S^{d-1}):

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\varphi} \otimes \boldsymbol{\varphi} \rangle = \Big\langle \boldsymbol{\mu}, \Big(\sum_{i=1}^r (\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathsf{e}_i)\mathsf{e}_i\Big) \otimes \Big(\sum_{j=1}^r (\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathsf{e}_j)\mathsf{e}_j\Big) \Big\rangle = \sum_{i,j=1}^r \Big\langle \boldsymbol{\mu}\mathsf{e}_i \cdot \mathsf{e}_j, (\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathsf{e}_i)(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathsf{e}_j) \Big\rangle \geqslant 0 \,,$$

jer za svaki par (i, j) uzevši $\varphi_1 := \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathsf{e}_i$, $\varphi_2 := \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathsf{e}_j$ i ψ realne i nenegativne, (1) nam daje $\langle \boldsymbol{\mu}\mathsf{e}_i \cdot \mathsf{e}_j, (\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathsf{e}_i)(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathsf{e}_j)\psi \rangle \geqslant 0$.

Q.E.D.

Uočimo da je $\langle \nu, \psi \rangle := \langle \boldsymbol{\mu}, (\boldsymbol{\varphi} \otimes \boldsymbol{\varphi}) \boxtimes \psi \rangle$ skalarna Radonova mjera na S^{d-1}.

Ako je niz (u_n) omeđen u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$, onda je niz $(\mathsf{u}_n \otimes \mathsf{u}_n)$ omeđen u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, ali to nije dovoljno za slabu kompaktnost u posljednjem prostoru. Moramo $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$ neprekinuto uložiti u (Banachov) prostor omeđenih matričnih mjera $\mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{\mathrm{r}}(\mathbf{C})) = (\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{\mathrm{r}}(\mathbf{C})))'$, u kojem onda imamo slabo $*$ gomilište $\boldsymbol{\nu}$, kojem konvergira neki podniz $(\mathsf{u}_{n_k} \otimes \mathsf{u}_{n_k})$.

Korolar 2. *Ako niz $\mathsf{u}_n \otimes \mathsf{u}_n$ konvergira slabo$*$ k mjeri $\boldsymbol{\nu}$ u $\mathcal{M}_b(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$, onda za svaki $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ vrijedi:*

$$\langle \boldsymbol{\nu}, \varphi \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \boxtimes 1 \rangle \,.$$

Dem. Uzimanjem $\psi := 1$ u (1) Plancherelov teorem nam daje

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \varphi_1\varphi_2 \otimes 1 \rangle = \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \varphi_1 \mathsf{u}_n \otimes \varphi_2 \mathsf{u}_n \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^d} \lim_n (\mathsf{u}_n \otimes \mathsf{u}_n)\varphi_1\bar{\varphi}_2 \, d\mathbf{x} = \langle \boldsymbol{\nu}, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \rangle \,.$$

Q.E.D.

Primjer. (**koncentracija**) Za danu funkciju $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ promatramo niz $u_n(\mathbf{x}) := n^{d/2} f(n(\mathbf{x}-\mathbf{z}))$, za dani $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^d$.

Tada čitav niz (u_n) određuje (skalarnu) H-mjeru $\mu = \delta_{\mathbf{z}} \boxtimes \nu$, pri čemu je ν mjera s površinskom gustoćom N (ν je apsolutno neprekinuta s obzirom na površinsku mjeru) na S^{d-1}, koja je dana formulom:

$$N(\boldsymbol{\xi}) := \int_0^\infty |\hat{f}(t\boldsymbol{\xi})|^2 t^{d-1} dt \;,$$

odnosno za svaki $\phi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1})$ vrijedi:

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{f}(t\boldsymbol{\xi})|^2 \phi\Big(\mathbf{z}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} \;.$$

Zaista, neka je $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$, a $\psi \in \mathrm{C}_0(\mathrm{S}^{d-1})$. Tada niz $\varphi u_n - \varphi(\mathbf{z})u_n$ konvergira jako u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ k nuli, pa je dovoljno prijeći na limes u $\varphi(\mathbf{z})u_n$:

$$\begin{aligned}\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} |\varphi(\mathbf{z})|^2 |\hat{u}_n(\boldsymbol{\xi})|^2 \psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) d\boldsymbol{\xi} &= \lim_n |\varphi(\mathbf{z})|^2 \int_{\mathbf{R}^d} n^{-d} |\hat{f}\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{n}\Big)|^2 \psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) d\boldsymbol{\xi} \\ &= |\varphi(\mathbf{z})|^2 \int_{\mathbf{R}^d} n^{-d} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 \psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) d\boldsymbol{\xi} = \langle \mu, |\varphi|^2 \boxtimes \psi \rangle \;.\end{aligned}$$

∎

2. Kompaktnost kompenzacijom i H-mjere

Kompaktnost kompenzacijom se primjenjuje u situaciji gdje imamo niz (u_n) koji slabo konvergira u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^r)$ prema u_0, a pri čemu je niz $\sum_{k=1}^d \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{u}_n$ sadržan u kompaktnom skupu u prostoru $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^r)$.

Definira se svojstven skup:

$$\mathcal{V} := \left\{ (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^r \times \mathrm{S}^{d-1} : \sum_{k=1}^d \xi_k \mathbf{A}^k \boldsymbol{\lambda} = \mathsf{0} \right\} \;,$$

i njegova projekcija na fizikalni prostor:

$$\Lambda := \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r : (\exists\, \boldsymbol{\xi} \in \mathrm{S}^{d-1})\ (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V} \right\} \;.$$

Osnovni teorem tvrdi da za svaku kvadratičnu formu Q, za koju je $Q(\Lambda) \geqslant 0$, ako je l bilo koje gomilište niza $Q(\mathsf{u}_n)$ u slaboj $*$ topologiji na prostoru mjera, onda je nužno $l \geqslant Q(\mathsf{u}_0)$.

Primjer. Neka je (u_n) niz koji slabo konvergira k u_0 u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$, pri čemu su nizovi $(\partial_1 u_n^1)$ i $(\partial_2 u_n^2)$ omeđeni u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)$ (pa stoga i sadržani u kompaktnim skupovima u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$). Svojstveni skup je $\mathcal{V} = \{(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^2 \times \mathrm{S}^1 : \xi_1 \lambda^1 = \xi_2 \lambda^2 = 0\}$, pa je njegova projekcija $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^2 : \lambda^1 \lambda^2 = 0\}$. Gledamo kvadratnu formu $Q(\boldsymbol{\lambda}) := \lambda^1 \lambda^2$, koja se očigledno poništava na Λ. ∎

Teorem 2. (**lokalizacijsko svojstvo za H-mjere**) *Ako niz (u_n) određuje H-mjeru, a pritom vrijedi:*

$$\sum_{k=1}^d \partial_k (\mathbf{A}^k \mathsf{u}_n) \longrightarrow \mathsf{0} \qquad \textit{u prostoru } \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^r) \;,$$

gdje su $\mathbf{A}^k$ neprekinute matrične funkcije na otvorenom $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, onda, uz definiciju simbola $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{k=1}^d \xi_k \mathbf{A}^k(\mathbf{x})$ na $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}$, vrijedi $\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. ∎

Za razliku od osnovnog teorema o kompaktnosti kompenzacijom, ovdje su matrice $\mathbf{A}^k$ s promjenjivim koeficijentima (neprekinute funkcije od $\mathbf{x}$, a ne konstante).

Primijenivši ovaj teorem na prethodni primjer dobivamo da je

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \xi_1 \mu^{11} & \xi_1 \mu^{12} 0 \\ \xi_2 \mu^{21} & \xi_2 \mu^{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \; ,$$

gdje je simbol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{bmatrix} \; .$$

Time znamo (koristimo hermitičnost, Korolar 1) da je $\operatorname{supp} \mu^{12} = \operatorname{supp} \mu^{21} \subseteq \{\xi_1 = 0\} \cap \{\xi_2 = 0\} = \emptyset$ (na jediničnoj sferi!), pa je $\boldsymbol{\mu}$ dijagonalna. Dobivena informacija je potpunija od one koju smo dobili korištenjem kompaktnosti kompenzacijom, da su stupci $\boldsymbol{\mu}$ u skupu Λ. (Ovaj posljednji zaključak slijedi iz $\mathsf{u}_n \otimes \mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{u}_0 \otimes \mathsf{u}_0 + \mathbf{R}$ slabo $*$ u $\mathcal{M}_b$, pri čemu je $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \in \mathsf{Cl}\,\mathrm{conv}(\Lambda \times \Lambda)$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$), uz odgovarajuću interpretaciju.)

III. Poluklasične mjere

H-mjere su definirane bez karakteristične duljine, što predstavlja prepreku u proučavanju fizikalnih zadaća u kojima se javlja jedna ili čak više karakterističnih duljina.

Prvi korak u rješavanju tog problema je napravio Patrick Gérard uvodeći poluklasične mjere. Sama ideja za proučavanje takvog objekta se često veže uz jedan jednostavan primjer.

Neka je v periodička funkcija i neka je niz (u_n) dan s $\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) = \mathsf{v}(\mathbf{x}\varepsilon_n)$, gdje je ε_n niz pozitivnih brojeva koji teže nuli. Nakon što se funkcija u_n lokalizira (množenjem s glatkom funkcijom s kompaktnim nosačem), djelujemo Fourierovom pretvorbom i opažamo zanimljiv rezultat. Sve značajne vrijednosti $\widehat{\varphi \mathsf{u}_n}(\boldsymbol{\xi})$ se nalaze na udaljenosti $\frac{1}{\varepsilon_n}$ od ishodišta, tj. oko $\boldsymbol{\xi} = O(\frac{1}{\varepsilon_n})$. Time smo naočigled jednostavnom metodom doznali puno o ponašanju funkcije u dualnom prostoru.

Međutim, pojavio se i novi problem. Naime, kad je razlika karakteristične duljine objekta kojega proučavamo i karakteristične duljine same poluklasične mjere značajno velika, dolazi da gubitka svih informacija i zapravo nemamo ništa. Poboljšanje je uveo Luc Tartar tako da je gledao posebniji prostor funkcija. Još jedna zanimljivost u tom njegovom pristupu je to što je polazeći od inačice H-mjera uspio doći do poluklasične mjere i time je ukazano na povezanost tih dviju teorija. Međutim, vidjet ćemo tijekom izlaganja u ovom poglavlju da ipak postoji stanovita razlika između ovih dvaju objekata.

U ovom poglavlju ćemo se držati Tartarovog pristupa, te na kraju dobiti neke tvrdnje za lokalizacijsko načelo, koje je već od ranije poznato za klasične H-mjere.

1. Definicija poluklasične mjere preko H-mjera

Konstruirajmo inačicu H-mjere s jednom karakterističnom duljinom.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ i $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ slabo. Umjesto da promatramo pripadnu H-mjeru odgovarajućeg podniza $\mathsf{u}_{n'}$, definirat ćemo novi niz v_n:

$$\mathsf{v}_n(\mathbf{x}, x^{d+1}) = \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) e^{\frac{2\pi i x^{d+1}}{\varepsilon_n}} \,, \ \mathbf{x} \in \Omega, \ x^{d+1} \in \mathbf{R} \,, \tag{1}$$

gdje je ε_n karakteristična duljina koja teži nuli. Važno je uočiti da i za niz v_n također imamo slabu konvergenciju prema $\mathsf{0}$ u prostoru $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbf{R}; \mathbf{C}^r)$. Zaista, budući da je prostor $(\mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}(\Omega \times \mathbf{R}; \mathbf{C}^r))'$ izomorfan s $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbf{R}; \mathbf{C}^r)$, a skup

$$\Big\{ \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i \boxtimes \theta_i \mid n \in \mathbf{N}, \ \boldsymbol{\varphi}_i \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^r), \ \theta_i \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}; \mathbf{C}) \Big\}$$

gust u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}(\Omega \times \mathbf{R}; \mathbf{C}^r)$ po Lema I.2, dovoljno je pokazati:

$$(\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^r))(\forall \theta \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C})) \quad \lim_n \int_{\Omega \times \mathbf{R}} \mathsf{v}_n \cdot (\boldsymbol{\varphi} \boxtimes \theta) = 0 \,,$$

što slijedi neposredno primjenom Fubinijevog teorema. Također se može uočiti da situaciju ne bismo ništa popravili da smo na početku imali slabu konvergenciju niza u_n u prostoru $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r)$, jer se funkcije $e^{\frac{2\pi i x^{d+1}}{\varepsilon_n}}$ ne nalaze u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, nego u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, pa onda opet moramo uzimati probne funkcije s kompaktnim nosačem, tj. dobili bismo opet slabu konvergenciju u prostoru $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbf{R})$. Bitno je znati koju od te dvije slabe konvergencije imamo, jer će ovisno o tome pripadna H-mjera biti omeđena ili neomeđena Radonova mjera.

Sada po Teoremu II.1 znamo da ima smisla promatrati H-mjeru pridruženu nekom podnizu $(\mathsf{v}_{n'})$.

Teorem 1. *Ako s $\boldsymbol{\mu}$ označimo H-mjeru pridruženu odgovarajućem podnizu $(\mathsf{v}_{n'})$, onda je ta mjera $\boldsymbol{\mu}$ neovisna o posljednjoj varijabli x^{d+1}.*

Dem. Neka je $h \in \mathbf{R}$ po volji odabran, te označimo s τ_h operator translacije za h u smjeru x^{d+1}. Definirajmo $h_{n'}$ kao višekratnik broja $\varepsilon_{n'}$ za koji vrijedi da je $|h - h_{n'}| \leqslant \varepsilon_{n'}$ (očito postoji jedinstven takav višekratnik). Budući da je $\mathsf{v}_{n'}$ periodička po posljednjoj varijabli s periodom $\varepsilon_{n'}$, to su funkcije $\tau_{h_{n'}}\mathsf{v}_{n'}$ i $\mathsf{v}_{n'}$ jednake. Stoga je dovoljno pokazati da $\tau_{h_{n'}}\mathsf{v}_{n'}$ i $\tau_h\mathsf{v}_{n'}$ definiraju istu H-mjeru. Radi dobre definiranosti Fourierove pretvore, nakon što lokaliziramo funkcije $\mathsf{v}_{n'}$ množenjem funkcijom s kompaktnim nosačem, proširimo je nulom van nosača. Ako pokažemo da vrijedi:

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega \times \mathbf{R})) \qquad (\tau_{-h_{n'}}\varphi)\mathsf{v}_{n'} - (\tau_{-h}\varphi)\mathsf{v}_{n'} \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1})} 0\,,$$

onda izravnom primjenom Fourierove pretvorbe kao neprekinutog operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1})$ dobivamo i:

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega \times \mathbf{R})) \qquad \mathcal{F}((\tau_{-h_{n'}}\varphi)\mathsf{v}_{n'}) - \mathcal{F}((\tau_{-h}\varphi)\mathsf{v}_{n'}) \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1})} 0\,. \tag{2}$$

Uzmimo da je $\varepsilon_{n'} < 1$ za svaki n', i računajmo:

$$\begin{aligned}
\Big\|(\tau_{-h_{n'}}\varphi)\mathsf{v}_{n'} - (\tau_{-h}\varphi)\mathsf{v}_{n'}\Big\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1})} &= \int_K |\tau_{-h_{n'}}\varphi - \tau_{-h}\varphi|^2 |\mathsf{v}_{n'}|^2 d\mathbf{x} \\
&\leqslant \|\tau_{-h_{n'}}\varphi - \tau_{-h}\varphi\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{d+1})} \|\mathsf{v}_{n'}\|_{\mathrm{L}^2(K)} \\
&\leqslant \|\tau_{-h_{n'}}\varphi - \tau_{-h}\varphi\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^{d+1})} \limsup_{n'} \|\mathsf{v}_{n'}\|_{\mathrm{L}^2(K)}\,,
\end{aligned}$$

pri čemu nam je K kompakt koji se dobije tako da se $\operatorname{supp}\varphi$ translatira za h u smjeru osi x^{d+1}, te napuhne za 1 (jer smo pretpostavili da je $\varepsilon_{n'} < 1$). Funkcija φ je neprekinuta pa onda i jednoliko neprekinuta, jer joj je nosač kompakt. Kako $h_{n'}$ teži prema h, jednolika neprekinutost daje da prvi član u zadnjoj nejednakosti ide u nulu. Drugi član je konačan, jer je $\mathsf{v}_{n'}$ slabo konvergentan, pa time i omeđen.

Koristeći definiciju H-mjere dobivamo da je apsolutna vrijednost razlike H-mjera podnizova $(\tau_h\mathsf{v}_{n'})$ i $(\tau_{h_{n'}}\mathsf{v}_{n'})$ omeđena s limesom superiorom sljedećeg izraza:

$$\begin{aligned}
\bigg|\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}} \Big(&\mathcal{F}(\varphi_1\tau_h\mathsf{v}_{n'}) \otimes \mathcal{F}(\varphi_2\tau_h\mathsf{v}_{n'}) - \\
&- \mathcal{F}(\varphi_1\tau_{h_{n'}}\mathsf{v}_{n'}) \otimes \mathcal{F}(\varphi_2\tau_{h_{n'}}\mathsf{v}_{n'})\Big)\psi\Big(\frac{(\boldsymbol{\xi},\xi_{d+1})}{|(\boldsymbol{\xi},\xi_{d+1})|}\Big) d(\boldsymbol{\xi},\xi_{d+1})\bigg|\,,
\end{aligned} \tag{3}$$

pri čemu nam $|\cdot|$ predstavlja operatorsku normu induciranu unitarnom normom na $\mathbf{C}^r$. Nakon što dodamo i oduzmemo $\mathcal{F}(\varphi_1\tau_{h_{n'}}\mathsf{v}_{n'}) \otimes \mathcal{F}(\varphi_2\tau_h\mathsf{v}_{n'})$, te primijenimo Minkowskijevu nejednakost za integrale i nejednakost trokuta, (3) ocijenimo s:

$$\begin{aligned}
&\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{S}^d)}\bigg(\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}} \Big|\Big(\mathcal{F}(\varphi_1\tau_h\mathsf{v}_{n'}) - \mathcal{F}(\varphi_1\tau_{h'_n}\mathsf{v}_{n'})\Big) \otimes \mathcal{F}(\varphi_2\tau_h\mathsf{v}_{n'})\Big| d(\boldsymbol{\xi},\xi_{d+1}) \\
&\qquad + \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}} \Big|\mathcal{F}(\varphi_1\tau_{h_{n'}}\mathsf{v}_{n'}) \otimes \Big(\mathcal{F}(\varphi_2\tau_h\mathsf{v}_{n'}) - \mathcal{F}(\varphi_2\tau_{h'_n}\mathsf{v}_{n'})\Big)\Big| d(\boldsymbol{\xi},\xi_{d+1})\bigg) \\
&\leqslant \|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{S}^d)}\bigg(\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}} \Big|\mathcal{F}(\varphi_1\tau_h\mathsf{v}_{n'}) - \mathcal{F}(\varphi_1\tau_{h'_n}\mathsf{v}_{n'})\Big|\Big|\mathcal{F}(\varphi_2\tau_h\mathsf{v}_{n'})\Big| d(\boldsymbol{\xi},\xi_{d+1}) \\
&\qquad + \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}} \Big|\mathcal{F}(\varphi_1\tau_{h_{n'}}\mathsf{v}_{n'})\Big|\Big|\mathcal{F}(\varphi_2\tau_h\mathsf{v}_{n'}) - \mathcal{F}(\varphi_2\tau_{h'_n}\mathsf{v}_{n'})\Big| d(\boldsymbol{\xi},\xi_{d+1})\bigg) \\
&\leqslant \|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{S}^d)}\Big(\|\mathcal{F}(\varphi_1\tau_h\mathsf{v}_{n'}) - \mathcal{F}(\varphi_1\tau_{h'_n}\mathsf{v}_{n'})\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)} \|\varphi_2\tau_h\mathsf{v}_{n'}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)} \\
&\qquad + \|\varphi_1\tau_{h_{n'}}\mathsf{v}_{n'}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)} \|\mathcal{F}(\varphi_2\tau_h\mathsf{v}_{n'}) - \mathcal{F}(\varphi_2\tau_{h'_n}\mathsf{v}_{n'})\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)}\Big)\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

gdje smo u drugoj nejednakosti iskoristili ograničenost operatora oblika $\mathsf{a} \otimes \mathsf{b}$ (Lema I.1), a u trećoj Hölderovu nejednakost i Parsevalovu formulu.

Zamjenom varijabli dobivamo

$$\|\varphi_2 \tau_h \mathsf{v}_{n'}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)} \leqslant \|\tau_{-h}\varphi_2\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^{d+1})} \limsup_{n'} \|\mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)} ,$$

što je konačno. Analogno dobivamo i da je $\|\varphi_1 \tau_{h_{n'}} \mathsf{v}_{n'}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)}$ omeđeno. Koristeći formulu djelovanja Fourierove pretvorbe na translacije

$$\mathcal{F}(\varphi \tau_h \mathsf{v}_{n'})(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) = e^{-2\pi i h \xi_{d+1}} \mathcal{F}((\tau_{-h}\varphi)\mathsf{v}_{n'})(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) ,$$

lako sredimo i preostale izraze u (4). Time dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{F}(\varphi_1 \tau_h \mathsf{v}_{n'}) - \mathcal{F}(\varphi_1 \tau_{h_n} \mathsf{v}_{n'})\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)} = \\
&= \bigg(\int_{\mathbf{R}^{d+1}} \Big| e^{-2\pi i h \xi_{d+1}} \mathcal{F}((\tau_{-h}\varphi_1)\mathsf{v}_{n'})(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) - \\
&\qquad - e^{-2\pi i h_{n'} \xi_{d+1}} \mathcal{F}((\tau_{-h_{n'}}\varphi_1)\mathsf{v}_{n'})(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) \Big|^2 d(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) \bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \Big\| e^{-2\pi i h \cdot\,\cdot} - e^{-2\pi i h_{n'} \cdot\,\cdot} \Big\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})} \Big\|\mathcal{F}((\tau_{-h}\varphi_1)\mathsf{v}_{n'})\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)} + \\
&\qquad + \Big\| e^{-2\pi i h \cdot\,\cdot} \Big\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})} \Big\|\mathcal{F}((\tau_{-h}\varphi_1)\mathsf{v}_{n'}) - \mathcal{F}((\tau_{-h_{n'}}\varphi_1)\mathsf{v}_{n'})\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)} \\
&\leqslant C_1 \Big\| e^{-2\pi i h \cdot\,\cdot} - e^{-2\pi i h_{n'} \cdot\,\cdot} \Big\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})} + C_2 \Big\|\mathcal{F}((\tau_{-h}\varphi_1)\mathsf{v}_{n'}) - \mathcal{F}((\tau_{-h_{n'}}\varphi_1)\mathsf{v}_{n'})\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{C}^r)} ,
\end{aligned}$$

gdje su C_1 i C_2 konačne konstante redom zbog periodičnosti i neprekinutosti funkcije $e^{-2\pi i h \cdot\,\cdot}$, pa time i omeđenosti na $\mathbf{R}$, odnosno zbog slabe konvergentnosti niza $\varphi_1 \mathsf{v}_{n'}$. Također koristimo neprekinutost i periodičnost funkcije $e^{-2\pi i h \cdot\,\cdot} - e^{-2\pi i h_{n'} \cdot\,\cdot}$ kako bismo uočili da je jednoliko neprekinuta, što povlači da cijeli prvi član posljednje nejednakosti ide u nulu kada n' ide u beskonačnost, dok za drugi član iskoristimo (2). Sada se vratimo u (4) i zaključujemo da izraz ide u nulu kada n' ide u beskonačnost, čime smo pokazali da se H-mjere podudaraju.

Q.E.D.

Prethodna lema nam omogućuje da dodamo varijablu ξ_{d+1}, ali bez pravog dodavanja varijable x^{d+1}, jer pripadna H-mjera ne ovisi o toj varijabli. Navodimo općeniti rezultat za distribucije iz [14, str. 55–59]:

Lema 1. *Neka je $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$, te neka postoji $i \in 1..d$ takav da za svaki $h \in \mathbf{R}$ vrijedi da je $\tau_{h\mathsf{e}_i} T = T$. Tada postoji $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{d-1})$ za koju vrijedi*

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_0, \varphi_0 \rangle ,$$

pri čemu je $\varphi_0(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^d) := \int_{\mathbf{R}} \varphi(x^1, \dots, x^i, \dots, x^d)\, dx^i$. ∎

Budući da je Radonova mjera upravo distribucija reda nula, to možemo primijeniti prethodnu lemu te zaključiti da postoji $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d)$ takva da je

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \varphi \boxtimes \psi \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}_0, \varphi_0 \boxtimes \psi \rangle ,$$

gdje je $\varphi_0(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}} \varphi(\mathbf{x}, x^{d+1})\, dx^{d+1}$.

H-mjeru koju definira niz v_n zadan s (1) zvat ćemo *inačica H-mjere s jednom karakterističnom duljinom niza* u_n.

Već je ranije navedeno kako se poluklasične mjere mogu definirati preko H-mjera čime je ukazano na povezanost tih dvaju objekata. Pokazat ćemo da se upravo inačica H-mjere s jednom karakterističnom duljinom može shvatiti kao poluklasična mjera. Slijedi egzistencijski rezultat za poluklasične mjere bez dokaza, ali koji se može pronaći u [7].

Teorem 2. (postojanje poluklasičnih mjera) *Ako je* (u_n) *niz u prostoru* $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)$, *takav da* $\mathsf{u}_n \xrightharpoonup{\mathrm{L}^2} \mathsf{0}$ *(slabo), onda postoji podniz* $(\mathsf{u}_{n'})$ *i hermitska nenegativna Radonova mjera* $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ *na* $\Omega\times\mathbf{R}^d$ *takva da za svaki* $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ *i* $\psi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ *vrijedi:*

$$\lim_{n'}\int_{\mathbf{R}^d}\mathcal{F}(\varphi\mathsf{u}_{n'})\otimes\mathcal{F}(\varphi\mathsf{u}_{n'})\psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} = \langle\boldsymbol{\mu}_{sc},|\varphi|^2\boxtimes\psi\rangle\ . \tag{5}$$

∎

Međutim, poluklasične mjere i inačica H-mjere s jednom karakterističnom duljinom jesu vrlo slični, ali ne i posve identični objekti. Razlika se lijepo može uočiti u sljedećem primjeru.

Primjer. Neka je η_n niz brojeva koji konvergiraju k nuli i e po volji odabran jedinični vektor, $\mathsf{e}\in\mathrm{S}^{d-1}$. Definirajmo kompleksni niz funkcija na $\mathbf{R}^d$

$$u_n(\mathbf{x}) := e^{\frac{2\pi i\mathbf{x}\cdot\mathsf{e}}{\eta_n}}\ .$$

Niz (u_n) se ne nalazi u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, ali se lako pokaže da je u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, te u tom prostoru slabo konvergira k nuli. Zaista, za $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbf{R}^d}e^{\frac{2\pi i\mathbf{x}\cdot\mathsf{e}}{\eta_n}}\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\Big| &\leqslant \eta_n\int_{\mathbf{R}^d}|e^{2\pi i\mathbf{y}\cdot\mathsf{e}}||\varphi(\eta_n\mathbf{y})|\,d\mathbf{x}\\ &\leqslant \eta_n C\|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\ ,\end{aligned}$$

gdje je $C=\mathsf{vol}(\operatorname{supp}\varphi)$.

Sada možemo promatrati pripadnu poluklasičnu mjeru i inačicu H-mjera. Lako se vidi da za $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ vrijedi

$$\widehat{\varphi u_n}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\varphi}\Big(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathsf{e}}{\eta_n}\Big)\ ,$$

pa kad to uvrstimo u (5) dobivamo:

$$\int_{\mathbf{R}^d}\Big|\widehat{\varphi}\Big(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathsf{e}}{\eta_n}\Big)\Big|^2\psi(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|^2\psi\Big(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}+\frac{\varepsilon_n\mathsf{e}}{\eta_n}\Big)\,d\boldsymbol{\xi}\ .$$

Ako uzmemo funkciju $\psi\in\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, onda podintegralna funkcija konvergira po točkama i omeđena je sumabilnom funkcijom $\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}|\widehat{\varphi}(\cdot)|^2$, pa po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji dobivamo sljedeće rezultate za μ_{sc} ovisno o ponašanju $\frac{\varepsilon_n}{\eta_n}$:

- ako $\frac{\varepsilon_n}{\eta_n}\to\infty$, $\mu_{sc}=0$,
- ako $\frac{\varepsilon_n}{\eta_n}\to 0$, $\mu_{sc}=\lambda\boxtimes\delta_0$,
- ako $\frac{\varepsilon_n}{\eta_n}\to\kappa\in\langle 0,\infty\rangle$, $\mu_{sc}=\lambda\boxtimes\delta_{\kappa\mathsf{e}}$,

  gdje je λ Lebesgueova mjera na prostoru $\mathbf{R}^d$.

Definirajmo sada novi niz

$$v_n(\mathbf{x},x^{d+1}) := u_n(\mathbf{x})e^{2\pi i\frac{x^{d+1}}{\varepsilon_n}}\ ,$$

i pogledajmo njemu pridruženu H-mjeru, tj. inačicu H-mjere s jednom karakterističnom duljinom niza u_n.

Imamo

$$\widehat{\varphi v_n}(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) = \widehat{\varphi}((\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) - \mathsf{p}_n) \ ,$$

gdje je $\mathsf{p}_n = \frac{\mathsf{e}}{\eta_n} + \frac{\mathsf{e}_{d+1}}{\varepsilon_n}$. Nakon uvrštavanja u formulu iz teorema o postojanju H-mjera dobijemo:

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\widehat{\varphi}((\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) - \mathsf{p}_n)|^2 \psi\Big(\frac{(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1})}{|(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1})|}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbf{R}^d} |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1})|^2 \psi\Big(\frac{(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) + \mathsf{p}_n}{|(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) + \mathsf{p}_n|}\Big)\, d\boldsymbol{\xi} \ .$$

Sada analagno kao i u prethodnom slučaju primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji zaključujemo da je H-mjera μ jednaka tenzorskom produktu Lebesgueove mjere i Diracove mase koncentrirane u limesu $\frac{\mathsf{p}_n}{|\mathsf{p}_n|}$, tj.

- ako $\frac{\varepsilon_n}{\eta_n} \to \infty$, $\mu = \lambda \boxtimes \delta_{\mathsf{e}}$,
- ako $\frac{\varepsilon_n}{\eta_n} \to 0$, $\mu = \lambda \boxtimes \delta_{\mathsf{e}_{d+1}}$,
- ako $\frac{\varepsilon_n}{\eta_n} \to \kappa \in \langle 0, \infty \rangle$, $\mu = \lambda \boxtimes \delta_{\mathsf{m}_\kappa}$,
  gdje je $\mathsf{m}_\kappa = \frac{\kappa \mathsf{e} + \mathsf{e}_{d+1}}{\sqrt{\kappa^2 + 1}}$.

∎

Uočavamo da ni poluklasična mjera niti inačica H-mjere ne vide što se događa kada η_n teži nuli puno brže od ε_n, dok u obrnutoj situaciji, kada ε_n teži nuli puno brže od η_n, inačica H-mjere (za razliku od poluklasične mjere) ne gubi informaciju. Ona se nalazi na ekvatoru S^d, što je skup S^{d-1} ($\mathsf{e} \in \mathrm{S}^{d-1}$). Ova činjenica opravdava povezanost ovih dvaju pristupa, s tim da se u drugom promatra skup S^d, a u prvom $\mathbf{R}^d$, što zapravo predstavlja tangencijalnu ravninu na S^d u smjeru okomitom na e_{d+1}. Poslije ćemo vidjeti da drugačijim izborom prostora iz kojeg uzimamo probnu funkciju ψ možemo riješiti gubitak informacije koji se javlja kod poluklasične mjere i time dobiti ekvivalentan pristup s inačicom H-mjere.

U svrhu uzimanja što većeg prostora za funkciju ψ u definiciji H-mjere, trebamo drugačiji oblik Prve komutacijske leme. U verziji koju ćemo iskazati i dokazati funkcija ψ bit će iz skupa jednoliko neprekinutih i ograničenih funkcija na $\mathbf{R}^d$, koji ćemo označiti s $\mathrm{BUC}(\mathbf{R}^d)$. Lako se vidi da je taj skup vektorski prostor, a uz supremum normu ujedno i Banachov prostor.

Prije poopćene prve komutacijske leme, podsjetimo se definicije operatora množenja M_b i Fourierovog množitelja P_a za $b, a \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} &M_b : \mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega) \ , \ M_b v = bv \ , \\ &P_a : \mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega) \ , \ \widehat{P_a w} = a\widehat{w} \ ; \end{aligned} \tag{6}$$

dakle, $P_a = \bar{\mathcal{F}} M_a \mathcal{F}$. Očito vrijedi:

$$\begin{aligned} &\|M_b\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\Omega);\mathrm{L}^2(\Omega))} = \|b\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \ , \\ &\|P_a\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\Omega);\mathrm{L}^2(\Omega))} = \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Lema 2. **(poopćena prva komutacijska lema)** *Ako $\varepsilon_n \to 0$, $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, $\psi \in \mathrm{BUC}(\mathbf{R}^d)$ i ψ_n je definiran s $\psi_n(\boldsymbol{\xi}) = \psi(\varepsilon_n \boldsymbol{\xi})$ za $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$, tada komutator $C_n = [M_b, P_\psi] = M_b P_{\psi_n} - P_{\psi_n} M_b$ teži nuli u operatorskoj normi.*

Dem. Postoji niz (b_m) u $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ koji jednoliko konvergira prema b i takav da $\widehat{b_m}$ ima kompaktan nosač. Naime, prostor $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ je gust u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, pa postoji niz (f_k) iz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ koji jednoliko konvergira prema b. Fourierova pretvorba $\mathcal{F}$ neprekinuto preslikava $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ u samog sebe pa je $\widehat{f_k}$ opet u $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, a onda posebno i u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$. Kako je $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ gust u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ s pripadnom topologijom, postoji niz $(g_{k,m})$ iz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ koji aprokosimira $(\widehat{f_k})$ u topologiji $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$. Budući da je $\bar{\mathcal{F}} : \mathrm{L}^1 \to \mathrm{L}^\infty$ neprekinuto, $(g_{k,m})^\vee$ konvergira prema f_k u topologiji prostora L^∞, a to je upravo jednolika konvergencija. Sada Cantorovim dijagonalnim postupkom dobivamo iz niza $(g_{k,m})^\vee$ traženi niz b_m.

Odaberimo podniz niza (b_m) (radi jednostavnosti niz i dalje indeksiramo s m) tako da je ispunjeno $\|b - b_m\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \frac{1}{m}$ i da je nosač $\mathcal{F}(b_m)$ unutar $\mathrm{K}[0, \rho_m]$.

Definirajmo $C_{m,n} := [M_{b_m}, P_{\psi_n}]$; koristeći (6) i (7) lako ocjenjujemo razliku komutatora:

$$\|C_n - C_{n,m}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d),\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))} \leqslant 2\|\psi_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\|b - b_m\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)} \leqslant \frac{2\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}}{m} . \tag{8}$$

Za $v \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ računajmo:

$$\begin{aligned}(C_{m,n}v)^\wedge(\boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{F}((M_{b_m}P_{\psi_n} - P_{\psi_n}M_{b_m})v)(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \mathcal{F}(b_m\bar{\mathcal{F}}(\psi_n\mathcal{F}(v)))(\boldsymbol{\xi}) - \psi_n(\xi)\mathcal{F}(b_m v)(\boldsymbol{\xi}) .\end{aligned} \tag{9}$$

Budući da su sve funkcije na koje $\mathcal{F}$ djeluje iz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, možemo koristiti integralni zapis Fourierove pretvorbe. Raspišimo prvi sumand iz (9):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(b_m\bar{\mathcal{F}}(\psi_n\mathcal{F}(v)))(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} b_m(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{x}}\psi_n(\boldsymbol{\eta})\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \psi_n(\boldsymbol{\eta})\widehat{v}(\boldsymbol{\eta}) \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i\mathbf{x}\cdot(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})} b_m(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} d\boldsymbol{\eta} \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \psi_n(\boldsymbol{\eta})\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta} .\end{aligned} \tag{10}$$

Korištenje Fubinijevog teorema u drugoj jednakosti je korektno, jer je podintegralna funkcija lokalno integrabilna, a područje integracije je kompakt. Pogledajmo sada drugi pribrojnik iz (9). Formula $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ vrijedi kada je barem jedno preslikavanje iz prostora $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, a drugo može biti i temperirana distribucija. Budući da je $\widehat{b_m} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ i $\widehat{v} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, možemo je primijeniti, čime dobivamo:

$$\widehat{b_m} * \widehat{v} = (\tilde{b_m}\tilde{v})^\vee = (\widetilde{b_m v})^\vee = \widehat{b_m v} ,$$

te dobiveni izraz možemo iskoristiti u raspisivanju drugog pribrojnika iz (9):

$$\psi(\boldsymbol{\xi})(\widehat{b_m} * \widehat{v})(\boldsymbol{\xi}) = \psi(\boldsymbol{\xi}) \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} . \tag{11}$$

Konačno, iz (9), (10) i (11) dobivamo:

$$(C_{m,n}v)^\wedge(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} (\psi_n(\boldsymbol{\eta}) - \psi_n(\boldsymbol{\xi}))\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta} . \tag{12}$$

Funkcija ψ je jednoliko neprekinuta, pa postoji modul njezine jednolike neprekinutosti ω za koji vrijedi:

$$|\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y})| \leqslant \omega(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) ,$$

pa za ψ_n imamo:

$$|\psi_n(\mathbf{x}) - \psi_n(\mathbf{y})| \leqslant \omega(\varepsilon_n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) .$$

Ocijenimo $(C_{m,n}v)^\wedge$ pomoću formule (12):

$$|(C_{m,n}v)^\wedge(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \omega(\varepsilon_n\rho_m)\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})|\,|\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|\,d\boldsymbol{\eta}\,, \tag{13}$$

gdje je $|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}| \leqslant \rho_m$, jer je nosač $\widehat{b_m}$ sadržan u $\mathrm{K}[0,\rho_m]$. Nakon kvadriranja i integriranja dobivamo:

$$\|(C_{m,m}v)^\wedge\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} \leqslant \omega(\varepsilon_n\rho_m)\|\widehat{b_m}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\|\widehat{v}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\,, \tag{14}$$

što primjenom Plancharelove formule povlači

$$\|C_{m,n}v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} \leqslant \omega(\varepsilon_n\rho_m)\|\widehat{b_m}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\,. \tag{15}$$

Provedimo račun s kojim ćemo opravdati (14). Najprije razmotrimo slučaj kad je L^1 norma funkcije $\mathcal{F}(b_m)$ jednaka nuli. Budući da to povlači da je $\mathcal{F}(b_m)$ skoro svuda jednako nula, iz (13) imamo

$$\|C_{m,n}v\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} = 0\,,$$

iz čega slijedi

$$\|C_{m,n}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d),\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))} = 0 \leqslant \omega(\varepsilon_n\rho_m)\|\widehat{b_m}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\,,$$

a što je upravo (15). Neka je sada $\|\widehat{b_m}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}$ različito od nule:

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|\,|\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})|d\boldsymbol{\eta}\Big)^2 &= \|\widehat{b_m}\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|\,\frac{|\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})|}{\|\widehat{b_m}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}}d\boldsymbol{\eta}\Big)^2\\ &= \|\widehat{b_m}\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\varphi\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\hat{v}(\boldsymbol{\eta})|d\nu\Big)\,,\end{aligned}$$

gdje je $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ kvadratna funkcija, koja je time i konveksna, a ν definiran s

$$\nu(X) = \int_X \frac{|\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})|}{\|\widehat{b_m}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}}d\boldsymbol{\eta}$$

je vjerojatnosna mjera. Po Jensenovoj nejednakosti slijedi:

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|\,|\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})|d\boldsymbol{\eta}\Big)^2 &\leqslant \|\widehat{b_m}\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\Big(\int_{\mathbf{R}^d}\varphi\Big(|\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|\Big)d\nu\Big)\\ &= \|\widehat{b_m}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2|\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})|d\nu\,.\end{aligned}$$

Dobiveni izraz integriramo po $\boldsymbol{\xi}$:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^d}\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|\,|\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})|d\boldsymbol{\eta}\Big)^2 d\boldsymbol{\xi} \leqslant\\ &\qquad\leqslant \|\widehat{b_m}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2|\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})|\,d\nu d\boldsymbol{\xi}\\ &\qquad= \|\widehat{b_m}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{b_m}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})|\,d\boldsymbol{\xi}d\nu\\ &\qquad= \|\widehat{b_m}\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{v}(\boldsymbol{\eta})|^2\,d\nu\\ &\qquad= \|\widehat{b_m}\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\|\widehat{v}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

Nakon korjenovanja dobivamo upravo nejednakost koju smo iskoristili u (14).

Relacija (15) nam daje ocjenu norme operatora na gustom skupu pa onda imamo da ona vrijedi i na cijelom prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$:

$$\|C_{m,n}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d),\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))} \leqslant \omega(\varepsilon_n \rho_m)\|\widehat{b_m}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)} ,$$

što zajedno s (8) daje tvrdnju.

Q.E.D.

Iako je prostor $\mathrm{BUC}(\mathbf{R}^d)$ uz supremum normu Banachov prostor, poteškoću nam predstavlja to što nije separabilan, a što se može vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer. Promatramo neprekinute funkcije na $\mathbf{R}$ koje su afine na svakom intervalu $\langle n, n+1\rangle$ i $f(n) \in \{-1, 1\}$. Takve funkcije su jedinstveno određene odabirom cijelih brojeva u kojima poprimaju vrijednost 1, pa takvih funkcija ima koliko i podskupova skupa $\mathbf{Z}$, a to je ($2^{\aleph_0} = c$) neprebrojivo. Označimo takav skup funkcija s A. One su očito omeđene, a dokazat ćemo da su i Lipschitzove, pa time i jednoliko neprekinute. Neka su x i y po volji odabrani realni brojevi. Ako vrijedi $|x-y| \geqslant 1$, onda je očito $|f(x) - f(y)| \leqslant 2 \leqslant 2|x-y|$. Za $|x-y| < 1$ razlikujemo dva slučaja:

(a) Točke se nalaze u istom intervalu $\langle n, n+1\rangle$. Tada računamo:

$$|f(x) - f(y)| = |ax + b - ay - b| = |a||x-y| = 2|x-y| ,$$

jer je koeficijent smjera a jednak ili 2 ili -2.

(b) Točke x i y se ne nalaze u istom intervalu, nego u susjednim. Budući da restrikcija funkcije na dva susjedna intervala nikad nije injekcija, to postoji točka y' koja se nalazi u istom intervalu kao i x, a za koju vrijedi da je $f(y) = f(y')$. Kako je $|x-y'| \leqslant |x-y|$, to vrijedi:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(y')| = 2|x-y'| \leqslant 2|x-y| .$$

Ovime smo pokazali da takve funkcije leže u prostoru $\mathrm{BUC}(\mathbf{R}^d)$. Za svake dvije različite funkcije f_1 i f_2 tog oblika je $\|f_1 - f_2\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})} = 2$, pa je skup

$$\{\mathrm{K}(f, 1) \ : \ f \in A\}$$

takav da se nikoje dvije kugle ne sijeku, pa svaki gust podskup prostora $\mathrm{BUC}(\mathbf{R}^d)$ mora imati barem onoliko elemenata kolika je kardinalost tog skupa. Budući da kugli ima neprebrojivo mnogo, svaki gust podskup je neprebrojiv. ∎

Neseparabilnost nam nikako ne odgovara za teoriju H-mjera, jer upravo je seprarabilnost ključna u konstrukciji H-mjere. Od traženog skupa funkcija zahtijevamo da ne bude komplicirane strukture (tako da ćemo se držati neprekinutih funkcija), da je separabilan, ali i da nam omogućuje da ne gubimo informaciju u beskonačnosti što se događalo kod poluklasičnih mjera (v. raniji primjer). Iz tog razloga kompaktificiramo $\mathbf{R}^d$ tako da dodamo sferu Σ_∞ u beskonačnosti. Također će nam biti od koristi da izbjegnemo ishodište pa ćemo gledati $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ i dodati sferu Σ_0 u nuli.

Kompaktifikaciju prostora $\mathbf{R}^d$ koju ostvarujemo dodavanjem sfere Σ_∞ u beskonačnosti označit ćemo s $\mathrm{K}_\infty(\mathbf{R}^d)$. Tada se prostor neprekinutih funkcija $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ sastoji od neprekinutih funkcija na $\mathbf{R}^d$ za koje postoji $f_\infty \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$ takva da

$$f(\boldsymbol{\xi}) - f_\infty\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) \to 0, \text{ kad } |\boldsymbol{\xi}| \to \infty .$$

Ukoliko želimo izdvojiti ishodište tada $\mathbf{R}^d\backslash\{0\}$ kompatificiramo tako da pored Σ_∞, dodamo još i sferu Σ_0 oko ishodišta i taj prostor označavamo s $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$. Prostor $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}\mathbf{R}^d)$ se sastoji od neprekinutih funkcija na $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ za koje postoje funkcije $f_0, f_\infty \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$ takve da

$$f(\boldsymbol{\xi}) - f_0\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) \to 0,\ \text{kad } |\boldsymbol{\xi}| \to 0\ ,$$
$$f(\boldsymbol{\xi}) - f_\infty\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) \to 0,\ \text{kad } |\boldsymbol{\xi}| \to \infty\ .$$

Teorem 3. **(postojanje inačice H-mjera)** *Neka niz* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$ *slabo konvergira u* $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *i neka je* ε_n *niz pozitivnih brojeva koji konvergiraju nuli. Tada postoje podniz* $\mathsf{u}_{n'}$ *i* $r \times r$ *hermitska matrična Radonova mjera* $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)}$ *na* $\Omega \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ *takva da za svaki* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ *i svaki* $\psi \in \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ *vrijedi:*

$$\lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_{n'}} \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_{n'}} \psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi \rangle\ . \tag{16}$$

Dem. Označimo s $\boldsymbol{\pi}$ projekciju koja $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ preslikava na jediničnu sferu duž zraka kroz ishodište:

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\ .$$

Kako je $\psi \in \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$, to postoje funkcije $\psi_0, \psi_\infty \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1})$ takve da

$$\psi(\boldsymbol{\xi}) - (\psi_0 \circ \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\xi}) \to 0\ ,\ \text{za } |\boldsymbol{\xi}| \to 0\ ,$$
$$\psi(\boldsymbol{\xi}) - (\psi_\infty \circ \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\xi}) \to 0\ ,\ \text{za } |\boldsymbol{\xi}| \to \infty\ .$$

Ako je $\psi = \psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}$, onda se (16) poklapa s definicijom H-mjere, tako da limes postoji i $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ odgovara pripadnoj H-mjeri podniza niza u_n. Inače, bez smanjenja općenitosti promatramo funkciju $\psi - \psi_0 \circ \boldsymbol{\pi}$, jer ako pokažemo da za takvu funkciju gornji limes postoji, onda će po prethodnom zaključku i po linearnosti integrala i limesa postojati i limes za ψ. Funkcija takvog oblika je neprekinuta u $\mathsf{0}$, i njezino se ponašanje u beskonačnosti i dalje može opisati homogenom funkcijom reda nula (dapače, isti ψ_∞ je dobar kao i za ψ), pa se nalazi u $\mathrm{K}_\infty(\mathbf{R}^d)$, što je sadržano u prostoru $\mathrm{BUC}(\mathbf{R}^d)$. Iz Leme 2 dobivamo da limes ovisi samo o $\varphi_1\bar{\varphi}_2$. Dokaz bi se mogao nastaviti kao i za postojanje H-mjera, ali mi ćemo ovdje dati novi pristup.

Neka je v_n kao u (1), te prijeđimo na podniz koji definira H-mjeru $\boldsymbol{\nu}$. Po Teoremu 1, ona je neovisna o zadnjoj varijabli x^{d+1} pa ima smisla promatrati njenu projekciju $\boldsymbol{\nu}_0$, koja je oblika kao u Lemi 1.

Definirajmo najprije probne funkcije Φ_1, Φ_2 i Ψ na kojima će biti definirana H-mjera $\boldsymbol{\nu}$, a pomoću kojih ćemo moći povezati (16) s limesom kojim se definira $\boldsymbol{\nu}$. Uzmimo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ tako da je $\widehat{\varphi} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ i $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-\rho, \rho]$. To možemo napraviti tako da uzmemo standarni izglađivač, skaliran tako da mu nosač bude unutar traženog segmenta i onda na njega djelujemo inverznom Fourierovom pretvorbom. Definirajmo sada Φ_1 i Φ_2 na $\mathbf{R}^d$, te Ψ na $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, na sljedeći način:

$$\Phi_j(\mathbf{x}, x^{d+1}) = \varphi_j(\mathbf{x})\varphi(x^{d+1})\ ,\ j = 1, 2,$$
$$\Psi(\boldsymbol{\xi}, \xi^{d+1}) = \psi(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_{d+1}})\ ,\ \xi_{d+1} \neq 0,\ \text{te } \Psi(\boldsymbol{\xi}, 0) = \psi_\infty(\boldsymbol{\xi}),\ \boldsymbol{\xi} \neq \mathsf{0}\ .$$

Iz definicije se može uočiti da je Ψ neprekinuta i homogena reda nula na području definicije, dok za funkcije Φ_1 i Φ_2 uočavamo da su neprekinute, s kompaktnim nosačem u prvih d

varijabli. Budući da $\boldsymbol{\nu}$ nije omeđena Radonova mjera, funkcije na koje djeluje moraju imati kompaktan nosač. Za funkcije Φ_1 i Φ_2 se javlja problem u posljednjoj varijabli, ali argument spašava činjenica da $\boldsymbol{\nu}$ možemo definirati preko $\boldsymbol{\nu}_0$, za koju je potrebno samo da funkcija bude sumabilna po posljednjoj varijabli, što je u nas slučaj, pa je $\langle \boldsymbol{\nu}, \Phi_1\bar{\Phi}_2 \boxtimes \Psi\rangle$ dobro definirano. Iskoristimo definiciju H-mjere:

$$\lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^{d+1}} \widehat{\Phi_1 \mathsf{v}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) \otimes \widehat{\Phi_2 \mathsf{v}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) \Psi(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1})\, d\boldsymbol{\xi} d\xi_{d+1} = \langle \boldsymbol{\nu}, \Phi_1\bar{\Phi}_2 \boxtimes \Psi\rangle \;.$$

Sređivanjem izraza pod integralom dobivamo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi_i \mathsf{v}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) &= \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}} e^{-2\pi i(\boldsymbol{\xi},\xi_{d+1})\cdot(\mathbf{x},x^{d+1})} \varphi_i(\mathbf{x})\varphi(x^{d+1})\mathsf{u}_{n'}(\mathbf{x}) e^{\frac{2\pi i x^{d+1}}{\varepsilon_{n'}}}\, d(\mathbf{x}, x^{d+1}) \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})\mathsf{u}_{n'}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i x^{d+1}\left(\xi_{d+1}-\frac{1}{\varepsilon_{n'}}\right)} \varphi(x^{d+1}) dx^{d+1} \\
&= \widehat{\varphi_i \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\varphi}\Big(\xi_{d+1} - \frac{1}{\varepsilon_{n'}}\Big) \\
&= \widehat{\varphi_i \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \tau_{\frac{1}{\varepsilon_{n'}}} \widehat{\varphi}(\xi_{d+1}) \;,
\end{aligned}$$

što uvrštavanjem u gornju definiciju H-mjere daje:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^{d+1}} \Big(\widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_{n'}} \tau_{\frac{1}{\varepsilon_{n'}}} \widehat{\varphi}\Big) \otimes \Big(\widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_{n'}} \tau_{\frac{1}{\varepsilon_{n'}}} \widehat{\varphi}\Big) \Psi(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) d\boldsymbol{\xi} d\xi_{d+1} = \\
&\qquad = \int_{\mathbf{R}^{d+1}} |\tau_{\frac{1}{\varepsilon_{n'}}} \widehat{\varphi}(\xi_{d+1})|^2 \widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \Psi(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) d\boldsymbol{\xi} d\xi_{d+1} \;.
\end{aligned}$$

Pomnožimo (16) s

$$\int_{\mathbf{R}} |\tau_{\frac{1}{\varepsilon_{n'}}} \widehat{\varphi}(\xi_{d+1})|^2 d\xi_{d+1} \;,$$

i oduzmimo od prethodne jednakosti kako bismo dobili:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \widehat{\varphi_1 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \widehat{\varphi_2 \mathsf{u}_{n'}}(\boldsymbol{\xi}) \int_{\mathbf{R}} |\tau_{\frac{1}{\varepsilon_{n'}}} \widehat{\varphi}(\xi_{d+1})|^2 \Big(\Psi(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) - \psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi})\Big) d\xi_{d+1} d\boldsymbol{\xi} \;. \tag{17}$$

Budući da je nosač funkcije $\tau_{\frac{1}{\varepsilon_{n'}}} \widehat{\varphi}(\xi_{d+1})$ sadržan u $[\frac{1}{\varepsilon_{n'}} - \rho, \frac{1}{\varepsilon_{n'}} + \rho]$, dovoljno je pokazati da za svaki ξ_{d+1} iz tog segmenta i svaki $\boldsymbol{\xi}$ iz $\mathbf{R}^d$ vrijedi ocjena:

$$|\Psi(\boldsymbol{\xi}, \xi_{d+1}) - \psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi})| \leqslant \alpha_{n'} \;, \tag{18}$$

gdje $\alpha_{n'}$ teži k nuli. Iz toga bismo dobili da (17) teži k nuli, tj. da je $\langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi\rangle$ dobro definirana i da vrijedi:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\nu}, \Phi_1\bar{\Phi}_2 \boxtimes \Psi\rangle &= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}} |\tau_{\frac{1}{\varepsilon_{n'}}} \widehat{\varphi}(\xi_{d+1})|^2 d\xi_{d+1} \langle\, \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} \mid \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi \,\rangle \\
&= \int_{\mathbf{R}} |\varphi|^2 dx^{d+1} \langle\, \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} \mid \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi \,\rangle \;.
\end{aligned}$$

Nadalje, koristeći definiciju mjere $\boldsymbol{\nu}_0$ dobivamo

$$\langle \boldsymbol{\nu}, \Phi_1\bar{\Phi}_2 \boxtimes \Psi\rangle = \int_{\mathbf{R}} |\varphi|^2 dx^{d+1} \langle \boldsymbol{\nu}_0, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \Psi\rangle \;.$$

Konačno dobivamo

$$\langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \psi \rangle = \langle \boldsymbol{\nu}_0, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \boxtimes \Psi \rangle \ ,$$

što povlači da je $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} \in \mathcal{M}(\Omega \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

Dokažimo sada (18). Neka je n' dovoljno velik da vrijedi $\varepsilon_{n'}\rho < \frac{1}{2}$; tada je

$$\Big|\frac{1}{\xi_{d+1}} - \varepsilon_{n'}\Big| \leqslant \frac{\rho\varepsilon_{n'}^2}{1-\rho\varepsilon_{n'}} \leqslant 2\rho\varepsilon_{n'}^2 \ ,$$

pa kad dobiveni izraz pomnožimo s $|\boldsymbol{\xi}|$ dobivamo

$$\Big|\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_{d+1}} - \varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi}\Big| \leqslant 2\rho\varepsilon_{n'}^2|\boldsymbol{\xi}| \ .$$

Razmotrimo odvojeno dva slučaja, ovisno o tome je li $|\boldsymbol{\xi}|\varepsilon_{n'}^{3/2} \leqslant 1$ ili ne. U prvom slučaju iz prethodne nejednakosti dobivamo novu

$$\Big|\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_{d+1}} - \varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi}\Big| \leqslant 2\rho\varepsilon_{n'}^{1/2} \ ,$$

iz koje vidimo da za dovoljno veliki n' imamo ocjenu:

$$|\Psi(\boldsymbol{\xi},\xi_{d+1}) - \psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi})| = \Big|\psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_{d+1}}\Big) - \psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi})\Big| \leqslant \omega(2\rho\varepsilon_{n'}^{1/2}) \ ,$$

gdje jednakost vrijedi po definiciji funkcije Ψ, dok nejednakost vrijedi zbog jednolike neprekinutosti funkcije ψ, pri čemu je ω modul jednolike neprekinutosti, čime je tvrdnja pokazana. U drugom slučaju izvedimo dvije jednostavne nejednakosti koje će nam trebati:

$$\varepsilon_{n'}|\boldsymbol{\xi}| > \frac{1}{\varepsilon_{n'}^{1/2}} \ , \tag{19}$$

i

$$\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{|\xi_{d+1}|} > \frac{|\boldsymbol{\xi}|}{\frac{1}{\varepsilon_{n'}}+\rho} > \frac{1}{\varepsilon_{n'}^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon_{n'}\rho)} \ . \tag{20}$$

Pri ocjenjivanju smo koristili da se ξ_{d+1} nalazi u segmentu $[\frac{1}{\varepsilon_{n'}}-\rho, \frac{1}{\varepsilon_{n'}}+\rho]$. Ponašanje funkcije ψ u bekonačnosti se može opisati s neprekinutom funkcijom ψ_∞ koja je homogena reda nula, točnije vrijedi:

$$|\psi(\boldsymbol{\xi}) - \psi_\infty(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \beta(\boldsymbol{\xi}) \ , \tag{21}$$

pri čemu β u beskonačnosti ide u nulu:

$$\begin{aligned}\Big|\psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_{d+1}}\Big) - \psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi})\Big| &\leqslant \Big|\psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_{d+1}}\Big) - \psi_\infty\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_{d+1}}\Big)\Big| + \Big|\psi_\infty(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi}) - \psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi})\Big| \\ &\leqslant \beta\Big(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{|\xi_{d+1}|}\Big) + \beta(\varepsilon_{n'}|\boldsymbol{\xi}|) \ ,\end{aligned}$$

a po (19), (20) i (21) posljednji član u nejednakosti ide u nulu. Ovime smo dobili da vrijedi (17), a time i samu tvrdnju.

Q.E.D.

2. Lokalizacijsko načelo

Lokalizacijsko načelo nam često omogućuje dobiti relaciju između komponenti mjera, odnosno odrediti skupove na kojima je mjera nula.

Teorem 4. *Neka je ε_n niz pozitivnih brojeva koji konvergiraju prema nuli, u_n niz u $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)$ koji slabo konvergira prema nuli, te $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ pripadna $r\times r$ hermitska matrica omeđenih Radonovih mjera na $\Omega\times\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ kao u Teoremu 3. Ako je ispunjeno*

$$\sum_{1\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n)=\mathsf{f}_n\;, \tag{22}$$

gdje su $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\in\mathrm{C}(\Omega;\mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$, a f_n je niz funkcija koje zadovoljavaju

$$(\forall\,\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\Omega))\qquad\lim_n\frac{\mathcal{F}(\varphi\mathsf{f}_n)}{1+\sum_{s=1}^m\varepsilon_n^{s-1}|\boldsymbol{\xi}|^s}=0 \tag{23}$$

u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ jako, onda za $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ vrijedi:

$$\left\langle\mathbf{P}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}},\varphi\boxtimes\psi\right\rangle=\mathbf{0}\;, \tag{24}$$

na prostoru

$$\Big\{\varphi\boxtimes\psi\mid\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\Omega),\ \psi\in\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))\ \&\ (\exists\,\eta>0)(\forall\,\boldsymbol{\xi}\in\mathrm{K}(0,\eta))\quad\psi(\boldsymbol{\xi})=0\Big\}\;,$$

pri čemu je

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}):=\sum_{1\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}(2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\frac{|\boldsymbol{\xi}|^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|+|\boldsymbol{\xi}|^m}\;.$$

Dem. Uočimo da za $1\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m$ imamo da je $\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|+|\boldsymbol{\xi}|^r}\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$. Iskoristimo Leibnizovu formulu, koja kaže da za svaki multiindeks $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{N}_0^d$ te za svaku funkciju $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ i distribuciju $S\in\mathcal{D}'(\Omega)$ vrijedi:

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\varphi S)=\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}S\;.$$

Pokažimo da vrijedi i relacija:

$$\varphi\partial_{\boldsymbol{\alpha}}S=\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}(-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}((\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi)S). \tag{25}$$

Raspišimo desnu stranu koristeći Leibnizovu formulu:

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}\ \sum_{0\leqslant\boldsymbol{\gamma}\leqslant\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}&(-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\binom{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\gamma}}(\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}}\varphi)(\partial_{\boldsymbol{\gamma}}S)=\\
&=\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}\ \sum_{0\leqslant\boldsymbol{\gamma}\leqslant\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}(-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\gamma}}\binom{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\beta}}(\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}}\varphi)(\partial_{\boldsymbol{\gamma}}S)\\
&=\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\gamma}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}(\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}}\varphi)(\partial_{\boldsymbol{\gamma}}S)\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}(-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\binom{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\gamma}}\\
&=\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\gamma}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}(\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}}\varphi)(\partial_{\boldsymbol{\gamma}}S)(1-1)^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}}\\
&=\varphi(\partial_{\boldsymbol{\alpha}}S)\;,
\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili

$$\binom{\alpha_i}{\beta_i}\binom{\alpha_i-\beta_i}{\gamma_i}=\binom{\alpha_i}{\gamma_i}\binom{\alpha_i-\gamma_i}{\beta_i}\,,$$

što se lako dokaže kobinatornim argumentom.

Pomnožimo (22) s $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ i iskoristimo (25):

$$\varphi\mathsf{f}_n=\sum_{1\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}(-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}((\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi)\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n)\,,$$

te zatim primijenimo Fourierovu pretvorbu:

$$\mathcal{F}(\varphi\mathsf{f}_n)=\sum_{1\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}}(-1)^{|\boldsymbol{\beta}|}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}(2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}\mathcal{F}((\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi)\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n)\,. \tag{26}$$

Očito je $\frac{|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^m}{1+\sum_{s=1}^m\varepsilon_n^{s-1}|\boldsymbol{\xi}|^s}$ odozgo ograničeno s 1. Za ocjenu odozdo ćemo uzeti da je $|\boldsymbol{\xi}|>1$. Budući da je $\varepsilon_n^{s-1}|\boldsymbol{\xi}|^{s-1}\leqslant\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^{m-1}$ za $|\boldsymbol{\xi}|>1$ i $s\in 1..m$, to imamo:

$$\frac{|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^m}{1+\sum_{s=1}^m\varepsilon_n^{s-1}|\boldsymbol{\xi}|^s}\geqslant\frac{|\boldsymbol{\xi}|(1+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^{m-1})}{1+m|\boldsymbol{\xi}|(1+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^{m-1})}\geqslant\frac{1}{1+m}\,.$$

Naime, funkcija $x\mapsto\frac{x}{1+mx}$ je padajuća za $x>0$ pa uz očitu nejednakost

$$|\boldsymbol{\xi}|(1+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^{m-1})\geqslant 1$$

slijedi gornja ocjena. Ovim smo dobili da je

$$1<\frac{1+\sum_{s=1}^m\varepsilon_n^{s-1}|\boldsymbol{\xi}|^s}{|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^m}\leqslant 1+m$$

za $|\boldsymbol{\xi}|\geqslant 1$, što nam uz (23) daje da $\frac{\mathcal{F}(\varphi\mathsf{f}_n)}{|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^m}$ konvergira prema 0 u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d\setminus\mathrm{K}(\mathsf{0},1))$ jako. Uzmimo $\psi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ takvu da je nula na $\mathrm{K}(0,\eta)$, $\eta>0$, i $\varphi_1\in\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$. Pomnožimo tenzorski (26) s

$$\frac{\psi(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^m}\mathcal{F}(\varphi_1\mathsf{u}_n)\,,$$

integriramo i uzmimo limes po n. Integral na lijevoj strani ide u nulu na $\mathbf{R}^d\setminus\mathrm{K}(\mathsf{0},1)$, a za dovoljno veliki n je $\psi(\varepsilon_n\cdot)$ nula na $\mathrm{K}(\mathsf{0},1)$ pa dobivamo da je lijeva strana na limesu jednaka 0. Na desnoj strani se integrali

$$\int_{\mathbf{R}^d}\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}\mathcal{F}\left((\partial^{\boldsymbol{\beta}}\varphi)\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n\right)\otimes\mathcal{F}(\varphi_1\mathsf{u}_n)\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}\psi(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^m}\,d\boldsymbol{\xi} \tag{27}$$

javljaju pod sumom. Pogledajmo čemu su jednaki limesi tih integrala u ovisnosti o $\boldsymbol{\beta}$. Već smo ranije komentirali da su funkcije $\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}}{|\boldsymbol{\xi}|+|\boldsymbol{\xi}|^m}$ iz $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ za sve dopuštene $\boldsymbol{\beta}$ manje od $\boldsymbol{\alpha}$. Ako ih komponiramo s funkcijom množenja s ε_n dobivamo:

$$\frac{\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}}{\varepsilon_n|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon_n^m|\boldsymbol{\xi}|^m}=\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\beta}|}\frac{\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}}{|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^m}\,,$$

iz čega zaključujemo da postoji funkcija $\tilde{\psi} \in \mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ takva da je:

$$\frac{\varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}\psi(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^m} = \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\beta}|}\tilde{\psi}(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}) \; .$$

Ovo nam izravno daje da (27) teži k nuli za $1 \leqslant |\boldsymbol{\beta}| < |\alpha|$. Za $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$ se pod integralom javlja singularitet oko ishodišta, ali kako je ψ nula u okolini ishodišta, to nam taj singularitet ne predstavlja problem, tako da i u ovom slučaju (27) ide u nulu. Ostaje nam još pogledati slučaj kada je $\boldsymbol{\beta} = 0$:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varepsilon_n^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}\mathcal{F}(\varphi\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n) \otimes \mathcal{F}(\varphi_l\mathsf{u}_n)\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|+\varepsilon_n^{m-1}|\boldsymbol{\xi}|^m}\,d\boldsymbol{\xi} \; ,$$

pa je (i,j) komponenta gornjeg integrala jednaka

$$\sum_{k=1}^{r}\int_{\mathbf{R}^d}\mathcal{F}(\varphi A^{\boldsymbol{\alpha}}_{i,k}u^k_n)\overline{\mathcal{F}(\varphi_1 u^j_n)}\frac{(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\varepsilon_n\boldsymbol{\xi})}{|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|+|\varepsilon_n\boldsymbol{\xi}|^m}d\boldsymbol{\xi} \; ,$$

što po Teoremu 3, kada n pustimo u beskonačnost daje:

$$\sum_{k=1}^{r}\Big\langle \boldsymbol{\mu}^{k,j}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi A^{\boldsymbol{\alpha}}_{i,k}\bar{\varphi}_1 \boxtimes \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi}{|\boldsymbol{\xi}|+|\boldsymbol{\xi}|^m}\Big\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{r} A^{\boldsymbol{\alpha}}_{i,k} \boxtimes \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|+|\boldsymbol{\xi}|^m}\boldsymbol{\mu}^{k,j}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi\bar{\varphi}_1 \boxtimes \psi\Big\rangle \; .$$

Budući da je φ_1 po volji odabrana funkcija, odaberimo je tako da bude jednaka 1 na nosaču φ. Zapišimo sada dobiveni izraz u nešto sažetijem obliku.

$$\Big\langle\Big(\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}} \boxtimes \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|+|\boldsymbol{\xi}|^m}\Big)\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}, \varphi \boxtimes \psi\Big\rangle \; .$$

Nakon što gornji izraz pomnožimo s $(2\pi i)^{|\boldsymbol{\alpha}|}$ i prosumiramo po $\boldsymbol{\alpha}$ dobivamo tvrdnju.

Q.E.D.

Za $m = 1$, uvjet konvergencije na niz funkcija f_n je upravo da $\mathsf{f}_n \to \mathsf{0}$ u prostoru $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Kako nam je vrlo često od interesa samo ponašanje u beskonačnosti u Fourierovom prostoru, to je zanimljivo gledati restrikciju $\boldsymbol{\mu}_\infty \in \mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega \times \Sigma_\infty; \mathrm{M}_{\mathrm{r}}(\mathbf{C}))$ mjere $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ iz Teorema 3 na Σ_∞, a koju definiramo na sljedeći način: neka su $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}(\Sigma_\infty)$, tada postoji niz funkcija (ψ_n) iz $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ koje su jednoliko omeđene i konvergiraju k nuli na $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R})^d \setminus \Sigma_\infty$ i k ψ na Σ_∞. Primjer takvog niza će biti dan u sljedećem korolaru. Mjera $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ je omeđena, pa po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji dobijemo da je definicija korektna, tj. limes postoji i ne ovisi o izboru niza (ψ_n).

Sada možemo provjeriti vrijedi li dobiveni rezultat iz Teorema 4 i za restrikciju $\boldsymbol{\mu}_\infty$.

Korolar 1. *Uz iste pretpostavke kao u Teoremu 4, restrikcija $\boldsymbol{\mu}_\infty$ mjere $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ na sferu Σ_∞ nalazi se u prostoru $\mathcal{M}(\Omega \times \Sigma_\infty; \mathrm{M}_{\mathrm{r}}(\mathbf{c}))$ i zadovoljava u $\Omega \times \Sigma_\infty$:*

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} = \mathbf{0} \; ,$$

pri čemu je

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{e} \boxtimes \frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^m} \; .$$

Dem. Definirajmo niz funkcija ψ_n na $\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R})^d$ formulom:

$$\psi_n(\boldsymbol{\xi}) := \begin{cases} 0 & , \quad \boldsymbol{\xi} \in \Sigma_0 \\ \psi(\boldsymbol{\xi}) & , \quad \boldsymbol{\xi} \in \Sigma_\infty \\ \psi\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) \mathrm{th}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{n}\right) & , \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\} \ . \end{cases}$$

Budući da $\mathrm{th}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{n}\right) \to 0$ kada $|\boldsymbol{\xi}| \to 0$, te $\mathrm{th}\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{n}\right) \to 1$ kada $|\boldsymbol{\xi}| \to \infty$, funkcije ψ_n su uistinu iz $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ za svaki n. Uvrstimo ψ_n u (23). Funkcije

$$\frac{|\boldsymbol{\xi}|^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\xi}|^m}\psi_n$$

su iz $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$ za svaki n, te konvergiraju k nuli na $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, a na Σ_∞ k funkciji $\frac{\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\xi}|^m}\psi$ za $|\boldsymbol{\alpha}| = m$, dok za $|\boldsymbol{\alpha}| < m$ k nuli, što nam daje traženu tvrdnju.

Q.E.D.

Slijedi još jedan rezultat kojeg nećemo dokazivati, a dokaz se može naći u [17].

Teorem 5. *Neka je ε_n niz pozitivnih brojeva koji konvergiraju prema nuli, (u_n) niz u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r)$ koji slabo konvergira prema nuli, te $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ pripadna $r \times r$ hermitska matrica omeđenih Radonovih mjera na $\Omega \times \mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d)$ kao u Teoremu 3. Neka je (f_n) omeđeni niz u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ i (g_n) jako kompaktan u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Ako je za svaku $\mathbf{A} \in \mathrm{C}(\Omega; \mathrm{M_r}(\mathbf{c}))$ ispunjeno*

$$\varepsilon_n \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\mathsf{u}_n) = f_n + \varepsilon_n g_n \ ,$$

tada restrikcija $\boldsymbol{\mu}_\infty$ mjere $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ na sferu Σ_∞ zadovoljava

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{K}_{0,\infty}} \mathsf{p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \ ,$$

pri čemu je

$$\mathsf{p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \mathbf{A}^*(\mathbf{x}) \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \ .$$

∎

IV. Poluklasični limes

U prethodnom poglavlju smo definirali poluklasične mjere koristeći H-mjere, te smo dali neke analogone rezultata koji vrijede za H-mjere. U ovom poglavlju ćemo proučavati drugi pristup koji su uveli Pierre-Louis Lions i Thierry Paul, a zasniva se na korištenju *Wignerove pretvorbe*. Međutim, sam tehnički dio izvođenja rezultata će se razlikovati od njihovog.

Ovaj način se pokazao prikladnijim za primjenu kod računanja poluklasičnog limesa parcijalnih diferencijalnih jednadžbi pa ćemo korištenjem njega proučiti ponašanje *Schrödingerove jednadžbe*, te posebno i jednadžbe provođenja.

Teorija razvijena u prethodnom i u ovom poglavlju se pokazala jako dobrom kod proučavanja zadaća s jednom karakterističnom duljinom. Međutim, već kod primjera s dvije karakteristične duljine nastaje problem, a poznati su primjeri s čak beskonačno mnogo njih. Iz tog razloga ćemo na kraju poglavlja dati komentar i primjer na tu temu.

1. Wignerova pretvorba

Wignerova pretvorba funkcije $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ je funkcija $\mathbf{W}$ na $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ definirana formulom:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d} \mathsf{u}\Big(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2}\Big) \otimes \mathsf{u}\Big(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{2}\Big) e^{-2i\pi \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\mathbf{y}\ .$$

$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ je linearan operator na prostoru $\mathbf{C}^r$, pa ga možemo promatrati i kao kvadratnu matricu dimenzije $r \times r$; za $\mathsf{v} \in \mathbf{C}^r$ odabran po volji,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\mathsf{v}| &= \Big| \int_{\mathbf{R}^d} \Big(\mathsf{u}\Big(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2}\Big) \otimes \mathsf{u}\Big(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{2}\Big)\Big) \mathsf{v}\, e^{-2i\pi \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, d\mathbf{y} \Big| \\
&\leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \Big| \Big(\mathsf{u}\Big(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2}\Big) \otimes \mathsf{u}\Big(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{2}\Big)\Big) \mathsf{v} \Big| d\mathbf{y} \\
&\leqslant |\mathsf{v}| \|\mathsf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)}\ .
\end{aligned}$$

Budući da gornja nejednakost vrijedi za skoro svaki $\mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}$, dobivamo da je

$$\|\mathbf{W}\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \|\mathsf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2}\ .$$

Kako je svaka komponenta $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ integral L^1 funkcije, to je ona neprekinuta po komponentama.

Za $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r) \cap \mathcal{F}\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ vrijedi:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \mathsf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathsf{u}(\mathbf{x})\ .$$

Naime, ako za fiksan $\mathbf{x}$ definiramo $\mathbf{F}_\mathbf{x} = \mathsf{u}(\mathbf{x} + \frac{\cdot}{2}) \otimes \mathsf{u}(\mathbf{x} - \frac{\cdot}{2})$, onda je $\mathbf{F}_\mathbf{x} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d; \mathrm{M_r}(\mathbf{C})) \cap \mathcal{F}\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d; \mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$, jer je $\mathcal{F}\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d; \mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$ multiplikativna algebra, pa je $\widehat{\mathbf{F}} \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d) \cap \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$. Budući da je $\mathbf{F}_\mathbf{x}(0) = \mathsf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathsf{u}(\mathbf{x})$, i $\widehat{\mathbf{F}}_\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ to nam relacija

$$\int_{\mathbf{R}^d} \widehat{\mathbf{F}}_x(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}_\mathbf{x}(0)$$

(v. I.3) povlači gornju tvrdnju. Također, za $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r) \cap \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ imamo i

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} = \hat{\mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \hat{\mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi})\ .$$

Gornju tvrdnju opravdavamo sljedećim računom:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{W}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mathsf{e}_j\cdot\mathsf{e}_i d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\Big(\mathsf{u}\Big(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{y}}{2}\Big)\otimes\mathsf{u}\Big(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}}{2}\Big)\mathsf{e}_j\cdot\mathsf{e}_i\Big)e^{-2i\pi\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{x}d\mathbf{y}\\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\Big(\mathsf{e}_j\cdot\mathsf{u}\Big(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}}{2}\Big)\Big)\Big(\mathsf{u}\Big(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{y}}{2}\Big)\cdot\mathsf{e}_i\Big)e^{2i\pi(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}}{2})\cdot\boldsymbol{\xi}}e^{-2\pi i(\mathbf{x}+\frac{y}{2})\cdot\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{x}d\mathbf{y}\\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\overline{u^j\Big(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}}{2}\Big)e^{-2i\pi(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}}{2})\cdot\boldsymbol{\xi}}}u^i\Big(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{y}}{2}\Big)e^{-2i\pi(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{y}}{2})\cdot\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{x}d\mathbf{y}\\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\Big(\overline{u^j(\mathbf{s})e^{-2i\pi\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\xi}}}\Big)\Big(u^i(\boldsymbol{\sigma})e^{-2\pi i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\xi}}\Big)d\boldsymbol{\sigma}d\mathbf{s}\\
&= \overline{\widehat{u^j}(\boldsymbol{\xi})}\widehat{u}^i(\boldsymbol{\xi})\ ,
\end{aligned}
$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili zamjenu varijabli

$$
\mathbf{s} := \mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}}{2}\ ,\quad \boldsymbol{\sigma} := \mathbf{x}+\frac{\mathbf{y}}{2}\ ,
$$

za koju je determinanta Jacobijeve matrice jednaka 1.

Wignerovu mjeru s karakterističnom duljinom ε_n ($\varepsilon_n \to 0$) definiramo koristeći funkcije:

$$
\mathbf{W}_n(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d}\mathsf{u}\Big(\mathbf{x}+\frac{\varepsilon_n\mathbf{y}}{2}\Big)\otimes\mathsf{u}\Big(\mathbf{x}-\frac{\varepsilon_n\mathbf{y}}{2}\Big)e^{-2i\pi\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{y}\ .
$$

Pokazat ćemo da pomoću niza $(\mathbf{W}_n)$ možemo opisati pripadnu poluklasičnu mjeru niza (u_n). Neka u_n slabo konvergira k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$. Tada je za svaki $\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{R}^d$ niz $\mathsf{u}_n(\cdot+\varepsilon_n\mathbf{y})\otimes\mathsf{u}_n(\cdot+\varepsilon_n\mathbf{z})$ omeđen u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d;\mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$, što povlači:

$$
(\forall\,\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{R}^d)(\exists\,n'=p(n))\qquad \mathsf{u}_{n'}(\cdot+\varepsilon_{n'}\mathbf{y})\otimes\mathsf{u}_{n'}(\cdot+\varepsilon_{n'}\mathbf{z})\xrightarrow{\ *\ }\mathbf{C}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}\ ,
$$

slabo $*$ u $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\mathbf{R}^d;\mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$. Problem s kojim se moramo suočiti je ovisnost podniza o $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$ (varijable su iz $\mathbf{R}^d$ koji je neprebrojiv pa ne možemo samo iskoristiti Cantorov dijagonalni postupak). $\mathbf{C}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ je invarijantan na translacije po $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$, tj. isti podniz koji definira $\mathbf{C}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ je konvergentan i kada $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$ zamijenimo s $\mathbf{y}+\mathbf{h}$, odnosno $\mathbf{z}+\mathbf{h}$, za $\mathbf{h}\in\mathbf{R}^d$ po volji:

$$
\langle\tau_{-\varepsilon_{n'}(\mathbf{y}+\mathbf{h})}\mathsf{u}_{n'}\overline{\tau_{-\varepsilon_{n'}(\mathbf{z}+\mathbf{h})}\mathsf{u}_{n'}},\varphi\rangle = \langle\tau_{-\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}\mathsf{u}_{n'}\overline{\tau_{-\varepsilon_{n'}\mathbf{z}}\mathsf{u}_{n'}},\tau_{\varepsilon_{n'}\mathbf{h}}\varphi\rangle\ .
$$

Kako za svaki $\varphi\in\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ imamo da $\tau_{\varepsilon_{n'}\mathbf{h}}\varphi$ jednoliko konvergira prema φ, to vrijedi

$$
(\forall\,h\in\mathbf{R}^d)\quad \mathbf{C}_{\mathbf{y}+\mathbf{h},\mathbf{z}+\mathbf{h}} = \mathbf{C}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}\ . \tag{1}
$$

Cilj nam je pokazati da je $\mathbf{C}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ po komponentama Fouirerova pretvorba nenegativne Radonove mjere. Kada bismo imali neprekinutu ovisnost $\mathbf{C}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ o $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$, tj. kada bismo ipak mogli prijeći na univerzalan podniz za sve $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$, bila bi valjana definicija $\mathbf{\Gamma}(h) := \mathbf{C}_{\frac{h}{2},\frac{-h}{2}}$. Može se pokazati da je $\mathbf{\Gamma}$ pozitivno definitna u sljedećem smislu:

$$
(\forall\,n\in\mathbf{N})(\forall\,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n\in\mathbf{R}^d)(\forall\,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{C})\quad \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\bar{\lambda}_j\mathbf{\Gamma}(\mathbf{y}_i-\mathbf{y}_j)\geqslant 0\ .
$$

Bôchnerov teorem kaže da je svaka pozitivno definitna funkcija Fourierova pretvorba nenegativne omeđene Radonove mjere, pa tada izravno slijedi da je $\mathbf{\Gamma}$, pa time i $\mathbf{C}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$, slika nenegativne Radonove mjere po Fourierovoj pretvobi. Budući da nemamo takvu lijepu ovisnost o $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$, moramo koristiti drugačiji pristup.

Definiramo na $\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$ funkciju $\mathbf{C}_n(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) := \mathsf{u}_n(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\otimes\mathsf{u}(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{z})$. Budući da je $\mathsf{u}\in\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, to je $\mathbf{C}_n\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d;\mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$, pa postoji podniz $(\mathbf{C}_{n'})$ koji konvergira k $\mathbf{C}\in\mathcal{M}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d;\mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$, te vrijedi:

$$(\forall\,\mathbf{h}\in\mathbf{R}^d)\qquad \tau_{0,\mathbf{h},\mathbf{h}}\mathbf{C}=\mathbf{C}\;,$$

što slijedi iz sljedećeg računa:

$$\langle\tau_{(0,\mathbf{h},\mathbf{h})}\mathbf{C}_{n'},\varphi\rangle=\langle\tau_{(\varepsilon_{n'}\mathbf{h},0,0)}\mathbf{C}_{n'},\varphi\rangle=\langle\mathbf{C}_{n'},\tau_{(-\varepsilon_{n'}\mathbf{h},0,0)}\varphi\rangle\to\langle\mathbf{C},\varphi\rangle\;,$$

jer je $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ jednoliko neprekinuto.

Primijetimo da se kod gornje konvergencije ne nalazimo u prostoru omeđenih Radonovih mjera. To je posljedica toga što je $\mathbf{C}_n$ samo lokalno integrabilna funkcija. Relaciju (1) ćemo izostaviti tako da ćemo na neki način pocijepati prostor funkcija uzevši da su nam φ_1 i φ_2 jednake ako

$$(\exists\,\mathbf{h}\in\mathbf{R}^d)\quad \varphi_1=\tau_{(\mathbf{h},\mathbf{h},0)}\varphi_2\;.$$

Da je $\mathbf{C}$ funkcija, (1) bi povlačilo da je $\mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{z})$ za neku funkciju $\mathbf{D}$. Međutim, $\mathbf{C}$ je Radonova mjera, pa onda imamo:

$$(\forall\,\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d))\qquad\langle\mathbf{D},\psi_\varphi\rangle:=\langle\mathbf{C},\varphi\rangle\;,\tag{2}$$

gdje je $\psi_\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ dano s

$$\psi_\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\int_{\mathbf{R}^d}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{h},\mathbf{h})d\mathbf{h}\;.$$

Provjerimo da je $\mathbf{D}$ dobro definirano. To ćemo učiniti tako da ćemo definirati novu distribuciju $\widetilde{C}$ koja će biti invarijantna na translacije po posljednjoj varijabli, što će nam omogućiti da primijenimo Lemu I.1. Definirajmo

$$\langle\widetilde{\mathbf{C}},\widetilde{\varphi}\rangle:=\langle\mathbf{C},\varphi\rangle\;,$$

gdje je $\widetilde{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}',\mathbf{z})$ i $\mathbf{y}'=\mathbf{y}+\mathbf{z}$. Pokažimo da je $\widetilde{\mathbf{C}}$ uistinu invarijantna na translacije po posljednjih d varijabli. Zaista

$$\langle\tau_{(0,0,\mathbf{h})}\widetilde{\mathbf{C}},\widetilde{\varphi}\rangle=\langle\widetilde{\mathbf{C}},\tau_{(0,0,-\mathbf{h})}\widetilde{\varphi}\rangle=\langle\mathbf{C},\tau_{(0,0,-\mathbf{h})}\varphi\rangle=\langle\mathbf{C},\varphi\rangle=\langle\widetilde{\mathbf{C}},\widetilde{\varphi}\rangle\;,$$

jer je

$$\tau_{(0,0,-\mathbf{h})}\widetilde{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\widetilde{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}+\mathbf{h})=\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{h},\mathbf{z}+\mathbf{h})=\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}'+\mathbf{h},\mathbf{z}+\mathbf{h})\;.$$

Sada po Lemi I.1 znamo da postoji mjera $\mathbf{D}\in\mathcal{M}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d;\mathrm{M_r}(\mathbf{C}))$ takva da vrijedi

$$\langle\mathbf{C},\varphi\rangle=\langle\widetilde{\mathbf{C}},\widetilde{\varphi}\rangle=\langle\mathbf{D},\psi_{\widetilde{\varphi}}\rangle=\langle\mathbf{D},\psi_\varphi\rangle\;,$$

pri čemu je

$$\psi_{\widetilde{\varphi}}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\int_{\mathbf{R}^d}\widetilde{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})d\mathbf{z}=\int_{\mathbf{R}^d}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z},\mathbf{z})d\mathbf{z}=\psi_\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})\;,$$

pa smo dobili da je $\mathbf{D}$ dobro definirana. Neka su $\varphi,\psi\in\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$, dokažimo da je bilinearna forma

$$\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}\mathsf{u}_n(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\otimes\mathsf{u}_n(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{z})\varphi(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{z})\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\mathbf{z}$$

nenegativna. Uzmimo $\mathsf{v} \in \mathbf{C}^r$ i računajmo:

$$\Big(\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \mathsf{u}_n(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\otimes\mathsf{u}_n(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{z})\varphi(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{z})\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\mathbf{z}\Big)\mathsf{v}\cdot\mathsf{v} =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^d}\Big(\int_{\mathbf{R}^d}\varphi(\mathbf{y})\mathsf{u}(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\cdot\mathsf{v}\,d\mathbf{y}\Big)\Big(\int_{\mathbf{R}^d}\varphi(\mathbf{z})\mathsf{v}\cdot\mathsf{u}(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{z})\,d\mathbf{z}\Big)\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^d}\Big|\int_{\mathbf{R}^d}\varphi(\mathbf{y})\mathsf{u}(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\cdot\mathsf{v}\,d\mathbf{y}\Big|^2\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\geqslant 0\ .$$

Gornji integral konvergira kada n teži k beskonačnosti, a limes mu je jedank $\langle\mathbf{C}\mathsf{v}\cdot\mathsf{v},\psi\boxtimes\varphi\boxtimes\bar\varphi\rangle$, što je jednako $\langle\mathbf{D}\mathsf{v}\cdot\mathsf{v},\psi\boxtimes\Phi\rangle$, za

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{R}^d}\varphi(\mathbf{y}+\mathbf{h})\bar\varphi(\mathbf{h})d\mathbf{h}\ .$$

Izravnim računom se dobije da za svaki $\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{R}^d$ vrijedi

$$\int_{\mathbf{R}^d}|\mathbf{C}_n(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})|d\mathbf{x}\leqslant\|u_n\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\leqslant\limsup_n\|u_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}\ ,$$

što zapravo znači da je $\mathbf{C}_n\in\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d_{\mathbf{y}}\times\mathbf{R}^d_{\mathbf{z}};\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d;\mathrm{M_r}(\mathbf{C})))$ iz čega slijedi da je $\mathbf{D}$ temperirana distribucija. Pretpostavimo da postoji mjera $\boldsymbol{\mu}$ koja zadovoljava $\boldsymbol{\mu}=\bar{\mathcal{F}}_{\mathbf{y}}\mathbf{D}$, što povlači $\mathbf{D}=\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\mu}$, jer smo uzeli da je $\boldsymbol{\xi}$ dualna varijabla varijabli $\mathbf{y}$. Dakle

$$0\geqslant\langle\mathbf{D},\psi\boxtimes\Phi\rangle=\langle\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\mu},\psi\boxtimes\Phi\rangle=\langle\boldsymbol{\mu},\psi\boxtimes\mathcal{F}\Phi\rangle\ .$$

Izračunajmo $\mathcal{F}\Phi$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\Phi(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbf{R}^d}e^{-2\pi i\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}\Phi(\mathbf{y})d\mathbf{y}\\ &= \int_{\mathbf{R}^d}\overline{e^{-2\pi i\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\xi}}\varphi(\mathbf{h})d\mathbf{h}}\int_{\mathbf{R}^d}e^{-2\pi i(\mathbf{y}+\mathbf{h})\cdot\boldsymbol{\xi}}\varphi(\mathbf{y}+\mathbf{h})d\mathbf{y}\\ &= |\mathcal{F}\varphi(\boldsymbol{\xi})|^2\ ,\end{aligned}$$

i uvrstimo nazad u jednadžbu, pa dobivamo

$$\langle\boldsymbol{\mu},\psi\boxtimes|\mathcal{F}\varphi|^2\rangle\geqslant 0\ .$$

Budući da je je $\mathcal{F}\varphi$ proizvoljna funkcija iz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, njen kvadrat može aproksimirati po volji odabranu funkciju iz $\mathrm{C_c}(\mathbf{R}^d)$, pa je time $\boldsymbol{\mu}$ nenegativna matrična Radnonova mjera (sličnu konstrukciju aproksimirajućih nizova smo imali u Lemi III.2).

Još nam je ostalo pokazati da takav $\boldsymbol{\mu}$ zaista i postoji. U tu svrhu definirajmo novi niz $\mathbf{D}_{n'}(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\mathbf{C}_{n'}(\mathbf{x},\frac{\mathbf{y}}{2},\frac{-\mathbf{y}}{2})$ na $\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$. Budući da je $\mathbf{D}_{n'}$ omeđen u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$, to ima smisla promatrati njegov slabi $*$ limes u prostoru $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$. Pokazat ćemo da $\mathbf{D}_{n'}$ slabo $*$ konvergira prema $\mathbf{D}$ (bez prelaska na podniz). Označimo s $\mathbf{D}_\infty$ slabi $*$ limes nekog podniza. Koristeći zamjenu varijabli

$$\mathbf{x}'=\mathbf{x}+\varepsilon_{n'}\mathbf{h}\ ,\ \mathbf{y}'=\mathbf{y}-\mathbf{z}\ ,\ \mathbf{h}=\frac{\mathbf{y}+\mathbf{z}}{2}\ ,$$

računamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{n'}(\mathbf{x}',\mathbf{y}') &= \mathbf{D}_{n'}(\mathbf{x}+\varepsilon_{n'}\mathbf{h},\mathbf{y}-\mathbf{z})=\mathbf{C}_{n'}(x+\varepsilon_{n'}\mathbf{h},\frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}}{2},\frac{\mathbf{z}-\mathbf{y}}{2})\\ &= \tau_{(0,\mathbf{h},\mathbf{h})}\mathbf{C}_{n'}(\mathbf{x}+\varepsilon_{n'}\mathbf{h},\mathbf{y},\mathbf{z})=\tau_{(\varepsilon_{n'}\mathbf{h},0,0)}\mathbf{C}_{n'}(\mathbf{x}+\varepsilon_{n'}\mathbf{h},\mathbf{y},\mathbf{z})\\ &= \mathbf{C}_{n'}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\ .\end{aligned}$$

Po (2) imamo da je $\lim_{n'}\langle \mathbf{C}_{n'}, \varphi\rangle = \langle \mathbf{C}, \varphi\rangle = \langle \mathbf{D}, \psi_\varphi\rangle$ za ψ_φ definiranu kao i prije. S druge strane, imamo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n'}\langle \mathbf{C}_{n'}, \varphi\rangle &= \lim_{n'} \int\int\int \mathbf{C}_{n'}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\
&= \lim_{n'} \int\int\int \mathbf{D}_{n'}(\mathbf{x}',\mathbf{y}')\varphi\Big(\mathbf{x}' - \varepsilon_{n'}\mathbf{h}, \frac{\mathbf{y}'}{2} + \mathbf{h}, \frac{-\mathbf{y}'}{2} + \mathbf{h}\Big)d\mathbf{x}'d\mathbf{y}'d\mathbf{h} \\
&= \lim_{n'} \int\int\int \mathbf{D}_{n'}(\mathbf{x}',\mathbf{y}')\varphi\Big(\mathbf{x}', \frac{\mathbf{y}'}{2} + \mathbf{h}, \frac{-\mathbf{y}'}{2} + \mathbf{h}\Big)d\mathbf{x}'d\mathbf{y}'d\mathbf{h} \\
&= \lim_{n'} \int\int \mathbf{D}_{n'}(\mathbf{x}',\mathbf{y}')\Big(\int \varphi\Big(\mathbf{x}', \frac{\mathbf{y}'}{2} + \mathbf{h}, \frac{-\mathbf{y}'}{2} + \mathbf{h}\Big)d\mathbf{h}\Big)d\mathbf{x}'d\mathbf{y}' \\
&= \lim_{n'}\langle \mathbf{D}_{n'}, \psi_\varphi\rangle \\
&= \langle \mathbf{D}_\infty, \psi_\varphi\rangle \ ,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili istu zamjenu varijabli kao u prethodnom računu, a treću jednakost opravdavamo time što je φ jednoliko neprekinuta na kompaktu. Ovime je pokazano da je $\mathbf{D}$ jedinstveno gomilište niza $\mathbf{D}_{n'}$ pa je time i limes.

Fourierova pretvorba funkcije $\mathbf{D}_{n'}$ u varijabli $\mathbf{y}$ je dobro definirana i jednaka je $\mathbf{W}_{n'}$ (Wignerova mjera s karakterističnom duljinom). Budući da $\mathbf{D}_{n'}$ slabo konvergira prema $\mathbf{D}$ u $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ i $\mathcal{F}$ je neprekinuto na prostoru temperiranih distribucija, $\mathbf{W}_{n'}$ konvergira slabo prema $\mathcal{F}_\mathbf{y}\mathbf{D} = \boldsymbol{\mu}$ u $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, gdje je $\boldsymbol{\mu}$ $r\times r$ matrica kojoj su elementi nenegativne Radonove mjere. Ostalo nam je pokazati da je $\boldsymbol{\mu}$ upravo poluklasična mjera $\boldsymbol{\mu}_{sc}$. Kako $\mathbf{W}_{n'} \xrightarrow{*} \boldsymbol{\mu}$ u $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, za svaki $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\mu}, |\varphi|^2 \boxtimes \psi\rangle &= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \mathbf{W}_{n'}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta})|\varphi(\mathbf{x})|^2\psi(\boldsymbol{\eta})d\mathbf{x}d\boldsymbol{\eta} \\
&= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \mathsf{u}_{n'}\Big(\mathbf{x} + \frac{\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}{2}\Big) \otimes \mathsf{u}_{n'}\Big(\mathbf{x} - \frac{\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}{2}\Big) e^{-2\pi i \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\eta}}|\varphi(\mathbf{x})|^2\psi(\boldsymbol{\eta})d\mathbf{x}d\boldsymbol{\eta} \ .
\end{aligned} \tag{3}
$$

Za poluklasičnu mjeru uzimamo $\varphi, \psi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$:

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\mu}_{sc}, |\varphi|^2 \boxtimes \psi\rangle &= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(\varphi\mathsf{u}_{n'})(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathcal{F}(\varphi\mathsf{u}_{n'})(\boldsymbol{\xi})\psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \\
&= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i(\mathbf{x}'-\mathbf{y}')\cdot\boldsymbol{\xi}}\varphi(\mathbf{x}')\overline{\varphi(\mathbf{y}')}\mathsf{u}_{n'}(\mathbf{x}) \otimes \mathsf{u}_{\mathbf{y}'}\psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi})d\mathbf{x}'d\mathbf{y}'d\boldsymbol{\xi} \\
&= \lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\eta}}\varphi\Big(\mathbf{x} + \frac{\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}{2}\Big)\overline{\varphi\Big(\mathbf{x} - \frac{\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}{2}\Big)}\mathsf{u}_{n'}\Big(\mathbf{x} + \frac{\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}{2}\Big) \\
&\qquad \otimes \mathsf{u}_{n'}\Big(\mathbf{x} - \frac{\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}{2}\Big)\psi(\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi})d\mathbf{x}'d\mathbf{y}'d\boldsymbol{\xi} \ ,
\end{aligned} \tag{4}
$$

gdje smo koristili zamjenu varijabli $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}{2}$, $\mathbf{y}' = \mathbf{x} - \frac{\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}{2}$ i $\varepsilon_{n'}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}$. Uočavamo da se (3) i (4) razlikuju samo u tome što se u (3) javlja član $|\varphi(\mathbf{x})|^2$, dok u (4) imamo član $\varphi\left(\mathbf{x} + \frac{\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}{2}\right)\overline{\varphi\left(\mathbf{x} - \frac{\varepsilon_{n'}\mathbf{y}}{2}\right)}$. Međutim, razlika je zamjetna, jer je $\mathbf{y}$ neomeđen pa ne možemo iskoristiti jednoliku konvergenciju. Naravno, kad bi φ bio jednak 1, onda bismo imali jednakost tih dvaju izraza. Da ne izgubimo na općenitosti, izaberimo $\varphi_0 \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ i gledajmo od početka $\varphi_0\mathsf{u}_{n'}$ što možemo, jer φ_0 ne utječe na konvergenciju tako da i dalje imamo sva potrebna svojstva koja je imala $\mathsf{u}_{n'}$. Ovime se $\mathbf{C}$ zamjenjuje s $|\varphi_0|^2\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ s $|\varphi_0|^2\mathbf{D}$, $\boldsymbol{\mu}$ s $|\varphi_0|^2\boldsymbol{\mu}$, kao i $\boldsymbol{\mu}_{sc}$ s $|\varphi_0|^2\boldsymbol{\mu}_{sc}$. Sada izaberimo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ takvu da je jednaka

1 na nosaču φ_0. Na kraju smo dobili da je $\langle \boldsymbol{\mu}, |\varphi_0|^2 \boxtimes \psi\rangle = \langle \boldsymbol{\mu}_{sc}, |\varphi_0|^2 \boxtimes \psi\rangle$ za svaki $\varphi_0 \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})^d$ i svaki $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, što povlači $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{sc}$.

S ovim smo dobili novi način računanja poluklasične mjere koji će se pokazati prikladan za naše zahtjeve.

2. Poluklasični limes

U prethodnoj točki smo izveli metodu za računanje poluklasične mjere, prikladniju za naše probleme. Za početak proučavamo slobodnu Schrödingerovu jednadžbu s parametrom (karakterističnom duljinom) koji teži nuli.

Teorem 1. *Neka je (u_n) niz u $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\langle 0,T\rangle \times \Omega)$, $u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\langle 0,T\rangle \times \Omega)$ slabo, te neka zadovoljavaju Schrödingerove jednadžbe*

$$\partial_t u_n + i\kappa\varepsilon_n \Delta u_n = f_n \;, \tag{5}$$

gdje niz f_n konvergira nuli u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\langle 0,T\rangle \times \Omega)$ jako, te neka je ε_n pozitivan niz brojeva koji konvergira nuli. Tada pripadna poluklasična mjera μ_{sc} niza (u_n) zadovoljava

$$\Big(\partial_t + 4\pi\kappa \sum_{j=1}^d \xi_j \partial_{x^j}\Big)\mu_{sc} = 0 \;.$$

Dem. Neka je $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^d$ po volji odabran. Napišimo sada jednadžbu (5) za argument $(t,\mathbf{x})$ i $(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})$, gdje su $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, $t \in \langle 0,T\rangle$, s tim da jednadžbu u argumentu $(t,\mathbf{x})$ još i konjugiramo:

$$\begin{aligned}
&\partial_t\overline{u_n(t,\mathbf{x})} - i\kappa\varepsilon_n\Delta\overline{u_n(t,\mathbf{x})} = \overline{f_n(t,\mathbf{x})} \;,\\
&\partial_t u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) + i\kappa\varepsilon_n\Delta u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) = f_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) \;.
\end{aligned}$$

Prvu jednadžbu pomnožimo s $u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})$, a drugu s $\overline{u_n(t,\mathbf{x})}$ i zbrojimo ih:

$$\begin{aligned}
\partial_t\Big(u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})}\Big) &+ i\kappa\varepsilon_n\Delta u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})}\\
- i\kappa\varepsilon_n\Delta\overline{u_n(t,\mathbf{x})}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) &= f_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})} + \overline{f_n(t,\mathbf{x})}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) \;.
\end{aligned} \tag{6}$$

Budući da je (u_n) omeđen, imamo opet da desna strana konvergira u nulu jako. Sada ćemo gledati $\mathbf{y}$ kao varijablu i pokušati srediti prethodnu jednakost tako da nam se pojavi član $u(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})}$ koji je u uskoj vezi s pripadnom poluklasičnom mjerom niza (u_n), što se pokazalo u prethodnoj točki. Dakle

$$\begin{aligned}
\partial_{y^j}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) &= \varepsilon_n\partial_{x^j}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\\
\partial_{y^j}u_n(t,\mathbf{x}) &= 0 \;,
\end{aligned}$$

gdje su derivacije u smislu distribucija. Računamo:

$$i\kappa\varepsilon_n\Delta u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})} = i\kappa\sum_{j=1}^d \partial_{y^j}\Big(\partial_{x^j}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})}\Big) \;. \tag{7}$$

Koristeći formulu za derivaciju produkta dviju funkcija, dobivamo:

$$\begin{aligned}
-i\kappa\varepsilon_n\Delta\overline{u_n(t,\mathbf{x})}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) &= -i\kappa\varepsilon_n\Delta\Big(\overline{u_n(t,\mathbf{x})}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\Big)\\
&+ i\kappa\varepsilon_n\Delta u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})} + 2i\kappa\varepsilon_n\sum_{j=1}^d \partial_{x^j}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\partial_{x^j}\overline{u_n(t,\mathbf{x})} \;,
\end{aligned} \tag{8}$$

pri čemu za drugi član imamo formulu (7), dok posljednji član još malo sredimo:

$$
\begin{aligned}
2i\kappa\varepsilon_n \sum_{j=1}^{d} \partial_{x^j} u_n(t, \mathbf{x}+\varepsilon_n \mathbf{y}) \partial_{x^j} \overline{u_n(t,\mathbf{x})} &= 2i\kappa \sum_{j=1}^{d} \partial_{y^j} u_n(t, \mathbf{x}+\varepsilon_n \mathbf{y}) \partial_{x^j} \overline{u_n(t,\mathbf{x})} \\
&= 2i\kappa \sum_{j=1}^{d} \partial_{y^j} \Big(u_n(t, \mathbf{x}+\varepsilon_n \mathbf{y}) \partial_{x^j} \overline{u_n(t,\mathbf{x})} \Big) \; . \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Primjenjujući (7)–(9) na (6), dobivamo:

$$
\Big(\partial_t - i\kappa\varepsilon_n \Delta + 2i\kappa \sum_{j=1}^{d} \partial_{x^j} \partial_{y^j} \Big) (u_n(t, \mathbf{x}+\varepsilon_n \mathbf{y}) \overline{u_n(t,\mathbf{x})}) \to 0 \; ,
$$

u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\langle 0, T\rangle \times \Omega \times \mathbf{R}^d)$ jako.

Neka u_n definira poluklasičnu mjeru μ_{sc} (zbog jednostavnosti zapisa, nećemo prelaziti na podniz); tada $u_n(t, \mathbf{x}+\varepsilon_n \mathbf{y}) \overline{u_n(t,\mathbf{x})}$ konvergira slabo $*$ prema $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}} \mu_{sc}$ pa prethodna formula daje:

$$
\Big(\partial_t + 2i\kappa \sum_{j=1}^{d} \partial_{x^j} \partial_{y^j} \Big) \mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}} \mu_{sc} = 0 \; ,
$$

odnosno

$$
\Big(\partial_t + 4\pi\kappa \sum_{j=1}^{d} \xi_j \partial_{x^j} \Big) \mu_{sc} = 0 \; .
$$

Q.E.D.

Jednadžba provođenja i Schrödingerova jednadžba su po strukturi vrlo slične, tako da se isti postupak može primijeniti i za jednadžbu provođenja, s tim da će nam se parametar ε_n javiti s potencijom 2, za razliku od Schrödingerove jednadžbe gdje se pojavio linearno. U računu će se vidjeti zašto se tako uzelo.

Teorem 2. *Neka vrijede sve pretpostavke kao u Teoremu 1, osim što jednadžbu (5) zamijenimo s jednadžbom provođenja*

$$
\partial_t u_n - \kappa\varepsilon_n^2 \Delta u_n = f_n \; .
$$

Tada pripadna poluklasična mjera μ_{sc} niza (u_n) zadovoljava

$$
\Big(\partial_t + 8\pi\kappa |\boldsymbol{\xi}|^2 \Big) \mu_{sc} = 0 \; .
$$

Dem. Neka je $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^d$. Analogno kao u prethodnom primjeru dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\partial_t \Big(u_n(t, \mathbf{x}+\varepsilon_n \mathbf{y}) \overline{u_n(t,\mathbf{x})} \Big) &- \kappa\varepsilon_n^2 \Delta u_n(t, \mathbf{x}+\varepsilon_n \mathbf{y}) \overline{u_n(t,\mathbf{x})} \\
&- \kappa\varepsilon_n^2 \Delta \overline{u_n(t,\mathbf{x})} u_n(t, \mathbf{x}+\varepsilon_n \mathbf{y}) \to 0 \; ,
\end{aligned}
$$

u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\langle 0, T\rangle \times \Omega \times \mathbf{R}^d)$ jako. Sredimo ovu jednadžbu kao u prethodnom teoremu:

$$
\begin{aligned}
&-\kappa\varepsilon_n^2\Delta u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})}-\kappa\varepsilon_n^2\Delta\overline{u_n(t,\mathbf{x})}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\\
&\qquad=-\kappa\varepsilon_n^2\Delta\Big(u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})}\Big)+2\kappa\varepsilon_n^2\sum_{j=1}^d\partial_{x^j}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\partial_{x^j}\overline{u_n(t,\mathbf{x})}\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\kappa\varepsilon_n^2\sum_{j=1}^d\partial_{x^j}u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\partial_{x^j}\overline{u_n(t,\mathbf{x})}=2\kappa\varepsilon_n\sum_{j=1}^d\partial_{y^j}\Big(u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\partial_{x^j}\overline{u_n(t,\mathbf{x})}\Big)\\
&=2\kappa\varepsilon_n\sum_{j=1}^d\partial_{x^j}\partial_{y^j}\Big(u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})}\Big)-2\kappa\sum_{j=1}^d\partial_{y^j}^2\Big(u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})}\Big)\ ,
\end{aligned}
$$

Kombinirajući prethodne tri jednadžbe, dobivamo:

$$
\Big(\partial_t-\kappa\varepsilon_n^2\sum_{j=1}^d\partial_{x^j}\partial_{y^j}-2\kappa\sum_{j=1}^d\partial_{y^j}^2\Big)(u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})})\to 0
$$

u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\langle 0,T\rangle\times\Omega\times\mathbf{R}^d)$ jako, pa ako u_n definira poluklasičnu mjeru, za nju vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\Big(\partial_t-2\kappa\Delta_{\mathbf{y}}\Big)\mathcal{F}_\xi\mu_{sc}&=0\ ,\\
\Big(\partial_t+8\pi\kappa|\boldsymbol{\xi}|^2\Big)\mu_{sc}&=0\ .
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Sada ćemo se vratiti Schrödingerovoj jednadžbi, ali sada u nešto malo kompliciranijem obliku. Dodat ćemo potencijal V u jednadžbu i početni uvjet tako da ćemo dobiti Cauchyjevu zadaću

$$
\begin{cases} ih\partial_t\psi^h=-\frac{h^2}{2}\Delta\psi^h+V\psi^h\\ \psi^h(0,\cdot)=\psi_0^h\in\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\end{cases}, \tag{10}
$$

gdje je h parametar koji teži nuli (npr. Planckova konstanta). Znamo da ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $\psi^h\in\mathrm{C}(\mathbf{R};\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$ s ocjenom $\|\psi^h(t,\cdot)\|_{\mathrm{L}^2}=\|\psi_0\|_{\mathrm{L}^2}$. Sada kada znamo da imamo rješenje (10), možemo promatrati vremensku evoluciju poluklasične mjere generirane nizom rješenja (ψ^h). Inače je ova jednadžba i ovaj pristup vrlo česta pojava kod problema u kojima se iz mikro skale prelazi na makro skalu. Jednadžba koja se dobije na limesu je klasična Liouvilleova jednadžba.

Teorem 3. *Neka je $V\in\mathrm{C}^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{R})$ i ψ^h rješenje jednadžbe (10). Tada pripadna poluklasična mjera μ_{sc} niza ψ^h zadovoljava*

$$
\begin{cases}\big(\partial_t+\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}-\nabla_{\mathbf{x}}V\cdot\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\big)\mu_{sc}=0\\ \mu_{sc}|_{t=0}=\mu_{sc}^0\end{cases}, \tag{11}
$$

gdje je μ_{sc}^0 poluklasična mjera pridružena nizu početnih uvjeta (ψ_0^h).

Dem. Da iskoristimo račun proveden u Teoremu 1, svest ćemo ovu jednadžbu na prijašnje oznake:

$$
\kappa=1\ ,\quad \varepsilon_n=\frac{h}{2}\ ,\quad u_n:=\psi^h\ ,\quad f_n=0\ ,
$$

te dobijemo jednadžbe

$$\partial_t u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) - i\varepsilon_n\Delta u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) + \frac{i}{2\varepsilon_n}V(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) = 0\ ,$$

$$\overline{\partial_t u_n(t,\mathbf{x})} + i\varepsilon_n\overline{\Delta u_n(t,\mathbf{x})} - \frac{i}{2\varepsilon_n}V(\mathbf{x})\overline{u_n(t,\mathbf{x})} = 0\ .$$

Zbrajanjem tih dviju jednadžbi, sve se dobije isto kao u Teoremu 1, osim zadnjeg člana kojeg moramo posebno izanalizirati, tj. zanima nas postoji li, i ako da, čemu je jednak slabi $*$ limes sljedećeg izraza

$$\frac{i}{\varepsilon_n}\left(V(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) - V(\mathbf{x})\right)u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})}\ .$$

Pomnožimo gornji izraz s $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, te integrirajmo po $\mathbf{x}$:

$$i\int_{\mathbf{R}^d}\frac{V(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) - V(\mathbf{x})}{\varepsilon_n}\varphi(\mathbf{x})u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}\ .$$

Budući da je derivacija V neprekinuta, a integracija se vrši po kompaktu, imamo da

$$\frac{V(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) - V(\mathbf{x})}{\varepsilon_n} \rightrightarrows \nabla_{\mathbf{y}}V$$

na nosaču φ. Sada je onda limes cijelog integrala jednak

$$i\int_{\mathbf{R}^d}\nabla V\cdot\mathbf{y}\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}}\mu_{sc}\varphi\,d\mathbf{x}\ ,$$

pa konačno imamo

$$\frac{i}{\varepsilon_n}\left(V(\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y}) - V(\mathbf{x})\right)u_n(t,\mathbf{x}+\varepsilon_n\mathbf{y})\overline{u_n(t,\mathbf{x})} \xrightarrow{*} \nabla V\cdot\mathbf{y}\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}}\mu_{sc}\ .$$

Sada sredimo dobiveni limes:

$$\nabla V\cdot\mathbf{y}\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}}\mu_{sc} = \sum_{k=1}^{d}\partial_k V\mathcal{F}_{\boldsymbol{\xi}}(\partial_{y^k}\mu_{sc}) = \nabla_{\mathbf{x}}V\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\mu_{sc}\ ,$$

što skupa s rezultatom iz Teorema 1 daje tvrdnju.

Q.E.D.

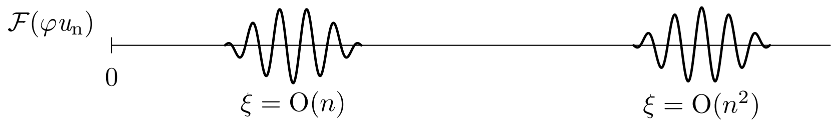
3. Dvije karakteristične duljine

U realnim primjerima se vrlo često javljaju pojave koje se opisuju s više od jedne karakterističke duljine (čak ponekad i s beskonačno njih), pa je zanimljivo pogledati kako se ovaj pristup ponaša u takvim slučajevima.

Primjer. Definirajmo niz funkcija (u_n) na $\mathbf{R}$ formulom

$$u_n(x) := \begin{cases} \sqrt{n} & , \quad \frac{k}{n} < x < \frac{k}{n} + \frac{1}{n^2} \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}\ ,$$

za $k \in 0..n-1$, dok je na cijeli $\mathbf{R}$ proširimo po periočinosti. Ovo je problem s dvije karakteristične duljine: $1/n$, što je period funkcije u_n, i $1/n^2$. Moglo bi se reći da je to jednostavan matematički model, koji u jednoj dimenziji pokazuje strukturu magnetskih zidova i domena, što je vrlo zahtjevno fizikalno pitanje koje su proučavali Bloch, Landau i Néel. Pripadne karakteristične duljine u Fourierovom prostoru su tada n i n^2, pa očekujemo da će se masa u Fourierovom prostoru koncentrirati na udaljenosti $O(n)$, odnosno $O(n^2)$ od ishodišta. Pogledajmo je li uistinu to i slučaj.



Slika 1. Očekivana skala u Fourierovom prostoru.

Budući da je $\|u_n^2\|_{\mathrm{L}^1([0,1])} = 1$ i u_n^2 je periodička, niz (u_n^2) je omeđen u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, međutim nije konvergenta u tom prostoru. Ono što imamo je slaba $*$ konvergencija u prostoru $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ i limes je upravo jednak srednjoj vrijednosti integrala, tj. $u_n^2 \xrightarrow{*} 1$. Ponašanje kvadrata funkcije u_n nam je bitno, jer su i H-mjere i poluklasične mjere kvadratični objekti (pojavljuje se član $|\widehat{\varphi u_n}|^2$). S druge strane, $u_n \to 0$ u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ (jako), što povlači slabu konvergenciju u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. Uistinu, za po volji izabrani $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R})$ imamo:

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^d} u_n(x)\varphi(x)dx\Big| \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})} \int_{\operatorname{supp}\varphi} |u_n(x)|dx \;,$$

što teži u nulu zbog jake konvergencije u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. Time smo dobili i da ima smisla promatrati pripadnu poluklasičnu mjeru niza (u_n). Normirat ćemo period funkcije u_n tako da ćemo definirati niz funkcija (f_n) formulom $f_n(x) := u_n(x/n)$. Budući da je niz (f_n) 1-periodički, a restringiran niz na $[0,1]$ leži u prostoru $\mathrm{L}^2([0,1])$, možemo funkcije f_n razviti u Fourierov red

$$f_n(x) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} C_{m,n} e^{-2\pi i m x} \;,$$

pri čemu su Fourierovi koeficijenti dani formulom

$$C_{m,n} = \int_0^1 e^{-2\pi i m y} f_n(y)dy = \sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{n}} e^{-2\pi i m y}dy \;,$$

i zadovoljavaju sljedeću relaciju:

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} |C_{m,n}|^2 = \|f_n\|_{\mathrm{L}^2([0,1])} = 1 \;.$$

Iz $u_n(x) = f_n(nx)$ dobivamo

$$u_n(x) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} C_{m,n} e^{-2\pi i m n x} \;,$$

a kako je $u_n \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbf{R})$, definirana je Fourierova pretovrba i jednaka je:

$$\widehat{u}_n = \sum_{m\in\mathbf{Z}} C_{m,n}\delta_{mn} \;,$$

što je posebno Radonova mjera. Koristeći formulu kojom su zadani Fourierovi koeficijenti dobivamo

$$C_{m,n} = \begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{2\pi i m}(1 - e^{-2\pi i \frac{m}{n}}) & , \quad m \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & , \quad m = 0 \end{cases} ,$$

pa iz toga imamo ocjenu za $m \neq 0$

$$|C_{m,n}| = \frac{\sqrt{n}}{\pi|m|}\left|\sin\left(\frac{\pi|m|}{n}\right)\right| \leqslant \min\left\{\frac{\sqrt{n}}{\pi|m|}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} ,$$

dok je $|C_{0,n}| = 1/\sqrt{n}$. Uzmimo funkciju $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ takvu da je $\widehat{\varphi} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subseteq [-\rho, \rho]$ za $\rho > 0$, te izračunajmo $|\widehat{\varphi u_n}|^2$, što nam treba za računanje poluklasične mjere:

$$\widehat{\varphi u_n} = \widehat{\varphi} * \widehat{u_n} = \sum_{m\in\mathbf{Z}} C_{m,n}\tau_{m,n}\widehat{\varphi} ,$$

gdje je τ_{mn} translacija za mn. Sada uzmimo da je $n \geqslant 2\rho$ tako da se nosači funkcija φ i $\tau_{mn}\varphi$ ne sijeku i nastavimo s računom:

$$|\widehat{\varphi u_n}|^2 = \sum_{k,n\in\mathbf{Z}} C_{m,n}\overline{C_{k,n}}\tau_{mn}\widehat{\varphi}\overline{\tau_{kn}\widehat{\varphi}} = \sum_{m\in\mathbf{Z}} |C_{m,n}|^2|\tau_{mn}\widehat{\varphi}|^2 , \tag{12}$$

zbog pretpostavke na n. Neka je $\psi \in \mathrm{C_c}(\mathbf{R})$ s nosačem sadržanim u $[-M, M]$ za pozitivni cijeli broj M, te izračunajmo poluklasičnu mjeru niza u_n. Pogledajmo najprije kako se taj niz ponaša kada uzmemo za karakterističnu duljinu $1/n$.

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbf{R}} |\widehat{\varphi u_n}|\psi\left(\frac{\xi}{n}\right)d\xi\right| &\leqslant \|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|C_{m,n}|^2\int_{-nM}^{nM}|\tau_{mn}\widehat{\varphi}(\xi)|^2d\xi \\ &\leqslant \|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}^2\sum_{m=-M}^{M}|C_{m,n}|^2 \\ &\leqslant \|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}^2\frac{2M+1}{n} , \end{aligned} \tag{13}$$

gdje smo koristili $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \in [-\rho, \rho]$ i $n \geqslant 2\rho$, te izračunate ocjene za $C_{m,n}$. Gornji izraz teži nuli kada n ide u beskonačnost, pa je onda pripadna poluklasična mjera jednaka 0, iako je karakteristična duljina koju smo koristili ($\varepsilon_n = 1/n$) jednaka periodu. Pogledajmo razlog ovom rezultatu. Za $k, K \in \mathbf{N}$, pogledajmo gdje se nalaze najznačajnije vrijednosti reda $\sum_{m\in\mathbf{Z}}|C_{m,n}|^2$:

$$\sum_{|m|\leqslant k}|C_{m,n}|^2 \leqslant \frac{2k+1}{n} ,$$

$$\sum_{|m|\geqslant K}|C_{m,n}|^2 \leqslant \frac{2n}{\pi^2}\sum_{m=K}^{+\infty}\frac{1}{m^2} \leqslant \frac{2n}{\pi^2(K-1)} .$$

Granice sumacije u (13) su određene s $M/(n\varepsilon_n) = nM/n = M$, a iz prve formule gornjeg računa vidimo da granica sumacije mora biti reda n da limes, tj. poluklasična mjera, ne bude 0. U tom slučaju kod poluklasične mjere se javlja ipak određeni gubitak informacije u nuli, ali zato poboljšanje koje smo uveli inačicom H-mjere $\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}}$ nema tog gubitka. Iz tog razmatranja se kao dobar izbor karakteristične duljine čini $1/n^2$.

Jednolika neprekinutost funkcije ψ povlači da u $\psi(\xi/n^2)$ možemo mijenjati ξ za neku konstantu, a da se limes ne mijenja, što uz (12) povlači da $\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}|\widehat{\varphi u_n}|^2\psi\Big(\frac{\xi}{n^2}\Big)d\xi$ ima isti limes kao i izraz

$$\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R})}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|C_{m,n}|^2\psi\Big(\frac{mn}{n^2}\Big)\ ,$$

koju možemo napisati kao Riemannov integralni red

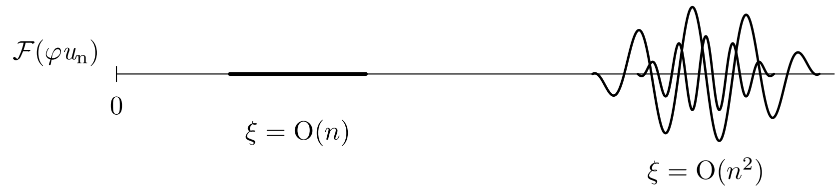
$$\frac{1}{n}\psi(0)+\sum_{m\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}\frac{n}{\pi^2m^2}\sin^2\Big(\frac{\pi m}{n}\psi\Big(\frac{m}{n}\Big)\Big)\ ,$$

koji je za $n\to\infty$ jednak

$$\int_{\mathbf{R}}\frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}\psi(\xi)d\xi\ ,$$

pa je pripadna poluklasična mjera apsolutno neprekinuta s obzirom na Lebesgueovu mjeru λ na $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, s gustoćom $\frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}$:

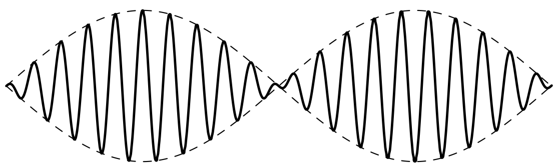
$$\mu_{sc}=\frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}\lambda\ .$$



Slika 2. Stvarno stanje u Fourierovom prostoru

Razlog ovakom rezultatu nije to što se odgovarajuća skala za $1/n$ ne vidi. Ono se ne vidi na udaljenosti $\xi=O(n)$ od ishodišta, ali se pojavljuje na skali reda n^2 od ishodišta u Fourierovom prostoru. Problem nastaje u tome što su se doprinosi k/n i $k/n+1/n^2$ poništili i dali samo rezultat koji odgovara $1/n^2$.

Slična se pojava javlja u akustici; prilikom ugađanja glazbenih struna, koristi se glazbena viljuška. Pobudi se na titranje i ako je njena frekvencija značajno različita (npr. za 1 Hz) od strune čujemo čudan i jak zvuk, te mijenjanjem zategnutosti strune, te tako mijenjamo i popravljamo zvuk dok ne dobijemo harmoniju. Naravno, na početku moramo glazbenu viljušku namjestiti dovoljno blizu da se vibracije upare i dođe do međudjelovanja.



Slika 3. Klasična slika *udara* iz fizičke knjige.

Trigonometrijske formule

$$\cos ax-\cos bx=-2\sin\frac{a-b}{2}x\sin\frac{a+b}{2}x\ ,$$
$$\cos ax+\cos bx=2\cos\frac{a-b}{2}x\cos\frac{a+b}{2}x\ ,$$

nam govore kako se odvija to međudjelovanje. Fourierova pretvorba umnožak funkcija preslika u konvoluciju tako da se djelovanja tih dviju funkcija međusobno miješaju.

Dakle, ako karakteristične duljine unutar funkcije nisu izolirane, doći će do međudjelovanja i teško ćemo moći predvidjeti kako će izgledati slika u Fourierovom prostoru. Tu pojavu fizičari zovu *udar*. S druge strane, u slučaju kad imamo samo zbroj funkcija, npr.

$$f(x/\varepsilon_n) + g(x/\delta_n) ,$$

tad se lijepo vidi $\widehat{f}$ na udaljenosti $O(1/\varepsilon_n)$, i $\widehat{g}$ na $O(1/\delta_n)$.

Slika 4. Fourierov prostor s dvije različite skale.

∎

Primjer je pokazao da se kod više karaktersitičnih duljina ne možemo osloniti na intuiciju, a ni metoda koju smo razvili nije općenito uspješna tako da je potrebno razviti nov poboljšani pristup.

Literatura

[1] NENAD ANTONIĆ: *H-measures applied to symmetric systems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **126A** (1996) 1133–1155.

[2] NENAD ANTONIĆ, KREŠIMIR BURAZIN: *On certain properties of spaces of locally Sobolev functions*, *Proceedings of the Conference on applied mathematics and scientific computing*, pp. 109–120, Z. Drmač et al. (eds.), Springer, 2005.

[3] NENAD ANTONIĆ, MARKO VRDOLJAK: *Mjera i integral*, PMF—Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[4] HAÏM BREZIS: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[5] LAWRENCE CRAIG EVANS: *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.

[6] F. GERARD FRIEDLANDER, MARK JOSHI: *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, 1998.

[7] PATRICK GÉRARD: *Mesures semi-classiques et ondes de Bloch*, *Sem. EDP 1990–91 (exp. 16)*, EP Palaiseau, 1991.

[8] PATRICK GÉRARD: *Microlocal defect measures, Communications in Partial Differential Equations* **16** (1991) 1761–1794.

[9] PIERRE-LOUIS LIONS, THIERRY PAUL: *Sur les mesures de Wigner*, *Revista Matemática Iberoamericana* **9** (1993) 553-618.

[10] ANDRÉ MARTINEZ: *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*, Springer, 2002.

[11] SIGERU MIZOHATA: *The theory of partial differential equations*, Cambridge University Press, 1973.

[12] LAWRENCE NARICI, EDWARD BECKENSTEIN: *Topological vector spaces*, CRC Press, 2011.

[13] JEFREY RAUCH: *Partial differential equations*, Springer, 1991.

[14] LAURENT SCHWARTZ: *Théorie des distributions,* Hermann, 1957.

[15] LUC TARTAR: *H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **115A** (1990) 193–230.

[16] LUC TARTAR: *Beyond Young measures*, *Meccanica* **30** (1995) 505–526.

[17] LUC TARTAR: *Mathematical tools for studying oscillations and concentrations: from* YOUNG *measures to H-measures and their variants*, *Multiscale problems in science and technology*, pp. 1–84, N. Antonić et al. (eds.), Springer, 2002.

[18] LUC TARTAR: *The general theory of homogenization: A personalized introduction*, Springer, 2009.

[19] KÔSAKU YOSIDA: *Functional analysis*, Springer, 1980.

[20] PING ZHANG: *Wigner measure and semiclassical limits of nonlinear Schrödinger equations*, American Mathematical Society, 2008.

Sažetak

U radu se bavimo proučavanjem *poluklasičnih mjera* i njihovih primjena na neke parcijalne diferencijalne jednadžbe, s posebnim naglaskom na *Schrödingerovu jednadžbu*.

U prvom poglavlju dajemo pregled korištenih oznaka i tvrdnji. Često su korišteni prostori lokalno sumabilnih funkcija ($\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$), te prostori funkcija s kompaktnim nosačem ($\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$, $\mathrm{L}^1_{\mathrm{c}}(\Omega)$,...), pa smo najprije proučili pripadne *lokalno konveksne topologije*, te posebno *topologiju strogog induktivnog limesa*, njihova svojstva, te dualne prostore.

U drugom poglavlju definiramo *H-mjere* koje je uveo Luc Tartar 80-tih godina dvadesetog stoljeća. Dan je glavni rezultat o postojanju H-mjera, te neka druga svojstva. Lokalizacijsko načelo i kompaktnost kompenzacijom su neki od primjera gdje je H-mjera našla svoju primjenu, pa su navedeni neki bitni rezultati iz tog područja.

Treće poglavlje započinje s konstrukcijom inačice H-mjere s jednom karakterističnom duljinom, koju ćemo poslije uspjeti dovesti u vezu s Gérardovim poluklasičnim mjerama. Time je dobivena poveznica između tih dvaju pojmova. Za inačicu (tj. poluklasičnu mjeru) smo pokazali da vrijedi analogon lokalizacijskog načela kao i za H-mjere.

U četvrtom poglavlju dajemo drugačiji pristup definiranju poluklasičnih mjera, koji su koristili Pierre-Louis Lions i Thierry Paul, preko *Wignerove pretvorbe*. Ovaj pristup nam se pokazao prikladnijim za primjenu kod proučavanja poluklasičnog limesa, pa smo njegovim korištenjem analizirali ponašanje Schrödingerove jednadžbe, te posebno i jednadžbe provođenja. Istaknuto je kako se problemi s više karakterističnih duljina ne mogu proučavati u okviru ove teorije, tako da se trebaju razviti novi matematički objekti.

Zadnje spomenuto je samo mali dio otvorenih pitanja koji se javljaju u ovom području matematike, tako da motivacije za daljnji rad i istraživanje ne dostaje.

Summary

In this thesis we study *semi-classical measures* and their applications to some partial differential equations, with emphasis to the *Schrödinger equation*.

In the first chapter an overview of notation and well known results is given. The spaces of locally summable functions ($L^1_{loc}(\Omega)$), as well as the spaces of functions with compact support (such as $C^\infty_c(\Omega)$, $L^1_c(\Omega)$, etc.), are often used, so we started by the study of corresponding *locally convex topologies*, in particular the *strict inductive limit topology*, of their properties and dual spaces.

H-measures, which were introduced by Luc Tartar in the eighties of the last century, are defined in the second chapter. The main existence result is presented, as well as some other properties. The localisation principle and compactness by compensation are some of the examples of potential applicability of H-measures, so some important related results are mentioned.

The third chapter starts by the construction of a variant of H-measures with one characteristic length, which will be related to Gérard's semi-classical measures. This gives us a link between these two notions. For the variant (i.e. the semi-classical measure) we show a similar localisation principle, as it was shown for the H-measures.

In the last chapter we give an alternative approach to semi-classical measures via the *Wigner transform*, as it was done by Pierre-Louis Lions and Thierry Paul. This approach turned out to be better adapted to applications in the study of semi-calssical limit, so we used it in the analysis of the Schrödinger equation, as well as for the heat equation. It is mentioned that the problems with several characteristic lengths are not amenable to this approach, but one should sought new mathematical objects for that purpose.

Finally, only a fraction of open questions in this mathematical discipline has been mentioned, so there is no paucity of stimuli for further work and research.

Životopis

Rođen sam 6. kolovoza 1987. godine u Splitu, gdje sam završio osnovnu školu i prirodoslovno-matematičku gimnaziju. Već od četvrtog razreda osnovne škole redovito sudjelujem na matematičkim natjecanjima na kojima sam bio više puta nagrađivan. Učestvovao sam na nekoliko matematičkih ljetnih škola, te pripremama za Matematičku olimpijadu.

2006. godine upisao sam Preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, te sam tokom studija bio demonstrator iz više kolegija. Tijekom studija također sudjelujem na više međunarodnih matemtičkih natjecanja (*Vojtech Jarnik*, IMC).

2009. godine upisao sam Diplomski studij Primijenjena matematika.

Član sam Veslačkog kluba PMF-a, te sam svake godine do sad predstavljao fakultet na veslačkim natjecanjima. U zadnje dvije godine intezivno učestujem u vođenju kluba. 2009. godine sam se učlanio u studnetsku udrugu AEGEE (Association des Etats Generaux des Etudiants de l'Europe), u kojoj trenutno obnašam dužnost potpredsjednika zagrebačkog ogranka udruge.

Bio sam sudionik 3 međunarodna matematička skupa i na jednom sam imao i vlastito izlaganje. Iskustvo i znanje stečeno na tim skupovima mi je puno pomoglo oko odabira specijaliziranog područja u matematici, pa time i u odabiru teme diplomskog rada. Tijekom druge godine diplomskog studija sudjelujem u radu poslijediplomskog *Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu*.

Iduću akademsku godinu namjeravam upisati Poslijediplomski znanstveni studij matematike na Sveučilištu u Zagrebu, te nastaviti s procesom valastitog usavršavanja i napredovanja.