

željka Bjelanovi Dijani , prof. mentor
prof. matematike i informatike
Srednja zkola azma
zeljka.bjelanovic@bj.t-com.hr

Učenje istraživanjem u GeoGebri po modelu Georga Polya

"To što ste bili prisiljeni sami otkriti, u vašem umu otvara put kojim se možete ponovno koristiti kada se za to ukaže potreba." (Georg Kristof Lichtenberg)

Konstruktivizam

Jedan od ciljeva pouavanja matematike jest nauiti u enike misliti te ih osposobiti za rješavanje problema i donozenje odluka u budućem životu. Nazistaknuti metodi ar Zdravko Kurnik [9] naglašava da su "osnovne smjernice za osuvremenjivanje nastave pobuđivanje i pokretanje mišljenja učenika i nastojanje da dobar dio novih znanja stječu vlastitim snagama i sposobnostima". Za ovakav pristup zalaže se teorija konstruktivizma koja se zasniva na injenici da znanje nastaje aktivno u enika pa je stoga uloga nastavnika kao izvora informacija znatno smanjena u odnosu na ulogu nastavnika koji će voditi i usmjeravati enike na putu stjecanja novih znanja. Pogrešno je misliti kako će sljedeći pristup (pre esto korizten na instrukcijama) u matematici dugorođeno dati rezultata: "ja u vama ispredavati zato morate znati pa vi to naučite" ili "vi nama samo pokazite kako se rješavaju takvi zadaci i mi ćemo onda znati". Tako er, esto se može uti kako taj i taj nastavnik matematike u enicima ne objaznjava dobro pa ga oni ne razumiju, a kada ih se pita zato im to no nije jasno, onda ne znaju zato bi rekli. Nije ni uđudo kada nisu uložili ni minimum truda da bi shvatili o čemu se na satu govori. Znanje se ne može prenosi od nastavnika prema u eniku na način da se informacije koje odazivaju nastavnik "preslikaju" u glave u enika. U enik se mora aktivno uključiti u nastavni proces te samostalnim radom do i do vlastitih spoznaja. Način stjecanja znanja je jedinstven za svakog u enika jer (upravo i samo) on vlastitom aktivnošću "konstruirira" svoje znanje na temelju vlastitog iskustva. A uloga nastavnika je da odabere prikladne oblike rada, nastavne metode, izvore znanja i na taj način oblikuje okolinu za učenje te da potiče i usmjerava enike u samostalnom otkrivanju novih pojmovaca, koncepcija i zakonitosti u sadržajima koje treba usvojiti prema propisanom nastavnom planu i programu.

Učenje otkrivanjem i istraživački usmjerena nastava

Kako bi udovoljio gore postavljenim zahtjevima, nastavnik matematike može se služiti različitim nastavnim strategijama, metodama i oblicima rada. S obzirom da je svaki učenik jedinka za sebe i da svakome neki oblik rada odgovara vize ili manje, preporučljivo je u nastavi zato da se izmjenjivati različite nastavne metode.

Bognar i Matijević [2] navode učenje otkrivanjem kao jednu od nastavnih strategija za koju predlažu tri nastavne metode: istraživanje, simulaciju i projekt. Učenje otkrivanjem (engl. *discovery learning*) je iskustveno učenje koje se odvija u stvarnosti ili zamisljenoj stvarnosti. Ako nam istraživanje u stvarnosti nije dostupno, koristimo se simulacijom pri čemu je u nastavi matematike izuzetno korisna realna simulacija koriztenjem programa dinamične geometrije.

Ukoliko u učionici imate računalo s LCD projektorom spojeno na internet, web je kroz Java aplikaciju i sigurno se može naći nešto što bi vam odgovaralo. Ako nemate internet, instalirajte si GeoGebra – program dinamične geometrije koji je besplatan, otvorenog koda (engl. *open source*), prevoden na hrvatski, lako se savlada, a svakim danom u Hrvatskoj i u svijetu sve je vize materijala koji se slobodno mogu mijenjati te

prilago avati potrebama vaze nastave: od radionica, preko stru nih lanaka uglavnom objavljenih upravo u nazem Mi \ddot{z} -u, do gotovih primjera na Geogebra Wiki (www.geogebra.org/en/wiki) i u Riznici matemati kih apleta (<http://apleti.normala.hr>). Tako er, na stranici *Interaktivne matematike* udruge Normala (www.normala.hr/interaktivna_matematika) nalaze se izuzetno kvalitetni digitalni obrazovni materijali u kojima su obra ene kompletne nastavne cjeline uglavnom iz srednjozikske matematike, a namijenjene su samostalnom radu u enika metodom u enja istra0ivanjem. Primjer na kraju ovog rada preuzet je s tih stranica.

Kurnik [9] upozorava na te0inu istra0iva ke nastave i u enicima i nastavnicima. U enici moraju biti primjereno osposobljeni za umni rad zto se mo0e ubla0iti radom u paru, a sama nastava mo0e se kombinirati s heuristi kom. Tijekom rada mogu se pojaviti situacije koje nastavnik nije predvidio, ali na njih mora biti pripravan zto zna i da bi trebao biti dobro osposobljen za izvo enje istra0iva ke nastave. Me utim, to ne zna i da se ipak ne bi trebalo odva0iti i krenuti s uvo enjem novih nastavnih metoda. U enje otkrivanjem biti e uspjeznije ako u enici posjeduju predznanje nu0no za pra enje novih sadr0aja te ako imaju iskustva u ovakovom na inu u enja.

U istra0iva ki usmjerenoj nastavi (engl. *inquiry based learning*) u enike se poti e da samostalnim istra0ivanjem dolaze do odre enih spoznaja uz odgovaraju u pomo nastavnika. Pri tome nastavnik i u enik zajedni ki definiraju problem koji odre uje novi nastavni sadr0aj, zna se da rjezenje problema postoji, ali postupak u pravilu nije zadan i svaki u enik samostalno treba do i do rjezenja. Ovakav na in rada omogu uje visok stupanj diferencijacije nastave jer e nastavnik svakom u eniku pomo i onoliko koliko mu je potrebno. U enik e samostalno otkriti smisao i va0nost informacija zto e ga dovesti do zaklju ka ili razmizljanja o novoste enom znanju. Varozanec [12] isti e kako istra0ivanjem u nastavi matematike u enici prou avaju i rjezavaju probleme pokuzavaju i otkriti matemati ke pravilnosti, zakonitosti i svojstva promatranih objekata s kojima do tada nisu bili upoznati. Kako se na tom putu ne bi izgubili ili zalutali, vodi ih se kroz nekoliko koraka (vo eno u enje otkrivanjem):



Slika 1. Etape istra0iva ki usmjerene nastave (preuzeto i prevedeno s [6])

U metodici prirode i druztva De Zan [4] navodi nekoliko stupnjeva kroz koje se prolazi prilikom usvajanja novih spoznaja u istra0iva ki usmjerenoj nastavi, a koji se jako dobro mogu primijeniti i u nastavi matematike s obzirom na srodnost predmeta:

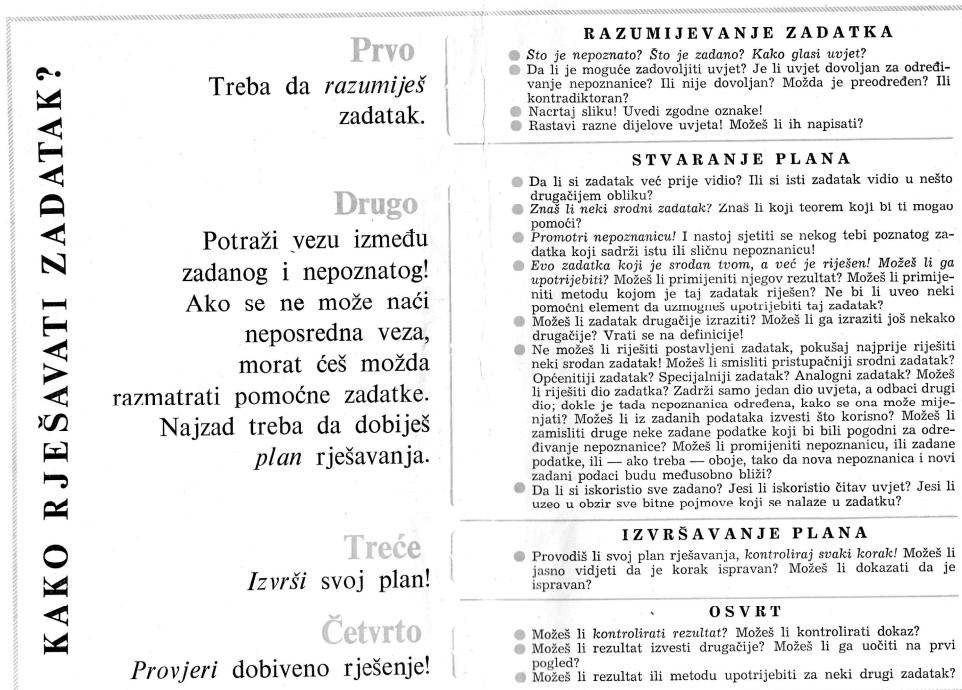
1. stupanj motivacije . odnosi se na stvaranje problemske situacije,
2. stupanj tezko e . upoznavanja problema,
3. stupanj rjezenja . postavljanje hipoteze, izrada plana istra0ivanja,
4. stupanj rada i izvo enja . izvo enje pokusa, mjerjenja, uspore ivanja,
5. stupanj zadr0avanja i vje0banja,
6. stupanj postignu a, provjeravanja i primjene nau enog . postignutog.

Pri tome se prva etiri stupnja odnose na novi spoznajni rad zto odgovara znanstvenom pristupu, dok su preostala dva stupnja vize didakti ka, ona odgovaraju

prirodnom tijeku nastave matematike. Nakon zto se odre eni sadr0aji "obrade", slijedi uvjeObavanje rjezavanja zadatka te primjena usvojenog u novim situacijama.

Polyin model rješavanja problema

George Polya (1887.-1985.) istaknuti ameri ki matemati ar porijeklom iz Ma arske, dao je velik doprinos, kako matematici kao znanosti, tako i metodici matematike. Zalagao se za heuristi ki pristup u enju te tvrdio da postoji umije e otkri a i da ga je mogu e nau iti. Heuristiku je smatrao posebnom granom spoznavanja, a njen cilj je bio istra0iti pravila i metode koje vode do pronalaska i otkri a. Ovu teoriju izlo0io je u knjizi *Kako rješiti matematički zadatak?* (engl. *How to Solve It*) koja je prodana u preko milijun primjeraka i prevedena na 23 jezika. Knjiga je prvi put objavljena 1945. godine, a do danas je do0ivjela nekoliko reizdanja. U hrvatskom izdanju ove knjige [10] s unutraznje strane korica nalazi se tablica s pitanjima i preporukama *Kako rješavati zadatak?*.



Slika 2. Polya: Kako rješavati zadatak?

Polya smatra kako je jedna od najva0nijih nastavnikovih du0nosti pomo i svojem u eniku, ali u tome treba biti umjeren. Ako mu ne pomogne dovoljno, mo0da ne e napredovati. Ako mu poma0e previze, ne e mu ostati nizta da napravi sam. Zbog toga predla0e da se nastavnik postavi u ulogu u enika, sagleda situaciju iz njegovog stajalizta, pokuza razumjeti zto se zbiva u njegovoj glavi te mu postavlja pitanja kojima nastoji pomo i da u enik sam do e do rjezenja problema. Na taj na in pou ava u enika kako da si sam pomogne sli nim pitanjima kod idu eg problema, odnosno u i ga misliti i priprema za rjezavanje problema u svakodnevnom 0ivotu.

Pitanja i preporuke koje Polya predla0e su stoga op enita, uporabljiva u bilo kojem podru ju matematike, ali i drugih znanosti, u teoriji i u praksi. Da bi se u enik lakze snalazio i zto manje puta morao vra ati korak unatrag, proces rjezavanja zadatka dijeli se u etiri etape.

1. Razumijevanje zadatka

Koliko god nam se ova etapa inila trivijalnom, nekim u enicima to nije tako. Koliko puta ste se susreli sa zadatkom kojeg je u enik rjezavao, a da nije imao pojma zto se u

zadatku tra0i. Nazao je neku formulu, uvrstio zto mu se u inilo da bi odgovaralo i dobio rjezenje koje nema nikakve veze s postavljenim problemom. Takav u enik zadatak nije ni pro itao, samo je bezglavo krenuo.

Dakle, zadatak treba pro itati s razumijevanjem. U enik treba prepoznati glavne dijelove zadatka: nepoznanicu, zadane podatke i uvjet. Nastavnik mo0e pomo i s pitanjima: *Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet zadatka? Da li je moguće zadovoljiti uvjet? Je li uvjet dovoljan za određivanje nepoznanice?* Ako se mo0e, treba nacrtati sliku i uvesti zgodne oznake.

2. Stvaranje plana

Nakon zto smo razumjeli zadatak treba osmisliti plan rjezavanja zadatka. U lakzim zadacima obi no se lako mo0e uo iti neka zakonitost koja povezuje poznate i nepoznate varijable. To mo0e biti pravilo, formula, teorem i sl. Te0e zadatke e mo0da trebati raz laniti na nekoliko lakzih.

Ponekad plan mo0e iznenada sinuti kao "sjajna ideja", ali ako se to ne dogodi onda u eniku treba pomo i da do e na tu ideju. U enik koji je redovitije samostalno rjezavao zadatke u zkoli i kod ku e prije e osmisliti plan, odnosno lakze mu se mo0e pomo i pitanjima: *Jesi li već prije vido sličan zadatak? Znaš li neki srodnii zadatak? Promotri nepoznanicu! Pokušaj se sjetiti nekog tebi poznatog zadatka koji ima istu ili sličnu nepoznanicu! Jesi li iskoristio sve zadano? Jesi li iskoristio čitav uvjet? Možda možemo uvesti neki pomoćni element?*

3. Izvrzavanje plana

Izvrzavanje plana puno je lakze od prethodne faze i za to je potrebno samo strpljenje i tehnika ra unanja. Pri tome u enik treba paziti da to no izvede svaki korak, odnosno da sam sebe kontrolira kako ne bi napravio pogrešku i dobio krivo rjezenje.

4. Osrvt

Posljednju fazu nikako ne smijemo zanemariti. Mo0da dobiveno rjezenje nije to no. U enika treba navesti da provjeri svoj rezultat: *Možeš li izvršiti provjeru rezultata? Možeš li rezultat dobiti na drugačiji način? Možeš li rezultat uočiti na prvi pogled? Ima li rezultat smisla?*

Tako er, iz rijezenog zadatka na kraju se mo0e joz ztotza nau iti. Nastavnik kod u enika treba pobuditi utisak kako su matemati ki problemi povezani te kako imaju veze i s problemima iz drugih nastavnih predmeta ili iz svakodnevног 0ivota. U enika se mo0e potaknuti pitanjem: *Možeš li rezultat ili metodu rješavanja upotrijebiti za neki drugi zadatak?*

Geogebrino dinamično okruženje za učenje

Ve sam spomenula kako nam moderna tehnologija pru0a virtualno okru0enje za istra0ivanje, a kao jedan od potencijala primjene ra unala u nastavi matematike Glasnovi Gracin [5] navodi upravo eksperimentalni rad kojeg (prema Schneider) opisuje kao "*aktivno, samostalno, otkrivajuće učenje koje prvenstveno cilja na razvoj intuitivnih predodžbi i ideja, te na dublje i opsežnije osnovno razumijevanje matematičkih koncepta*". Tako er naglazava da je eksperimentalni rad usko povezan s Polyinim heuristi kim idejama. Pri rjezavanju nekog problema potrebno je eksperimentirati, isprobavati razne mogu nosti, koristiti vlastitu intuiciju da bi dozli do odre enih prepostavki i ideja na temelju kojih se potom izvode zaklju ci.

Dakle, mo0emo uo iti kako se istra0iva ki usmjerena nastava izvrsno uklapa u Polyin model rjezavanja problema:



Slika 3. Istraživački usmjerena nastava i Polya

Kanadski znanstvenici Karadag i McDougall [7] koji se, između ostalog, bave istraživanjem primjene GeoGebre u poučavanju matematike, napravili su još jedan korak dalje. Polyin model rješavanja problema ugradili su u GeoGebrino dinamično okruženje za učenje (engl. *dynamic learning environment*). Zbog mogunosti dinamičnog prikaza te interaktivnosti matematičkih objekata GeoGebra se kao kognitivni alat u nastavi može koristiti u tri različite situacije:

1. pri objasnjavanju matematičkih koncepta i njihovih međusobnih odnosa,
2. za istraživanje matematičkih koncepta i odnosa, te
3. za modeliranje.

Stoga su Karadag i McDougall sva tri modela razradili u obliku tablice slijedeće i Polyina načela heurističkog pristupa učenju.

	objasniti (explaining)	istražiti (exploring)	modelirati (modelling)
razumijevanje problema	opisati zadane podatke, što je nepoznato	osigurati radni materijal za učenike, navesti učenike da istraže problem, voditi učenike da utvrde što je nepoznato	ponuditi poučak kojeg treba istražiti, utvrditi zadane podatke, opisati nepoznato
stvaranje plana	postoji li veza među varijablama, izložiti strategiju	pitati učenike za vezu među varijablama, voditi učenike u kreiranju strategije	kreirati matematičke objekte, analizirati veze među objektima
izvođenje plana	sakupiti nove podatke manipulirajući matematičkim objektima kako bi se dozložilo rješenje, postaviti vrednost pitanja	voditi učenike kroz interakciju matematičkih objekata da sakupi dovoljno podataka, voditi učenike da uoči zakonitosti na temelju prikupljenih podataka	manipulirati objektima kako bi provjerili valjanost konstrukcije, postaviti pretpostavku, testirati pretpostavku
osvrt	ponoviti postupak postaviti pitanja zato-ako	poticati učenike da mijenjaju problem, poticati učenike da postavljaju zato-ako pitanja	promijeniti varijable, osmisli problem koji opisuje trenutno stanje, postaviti novi problem

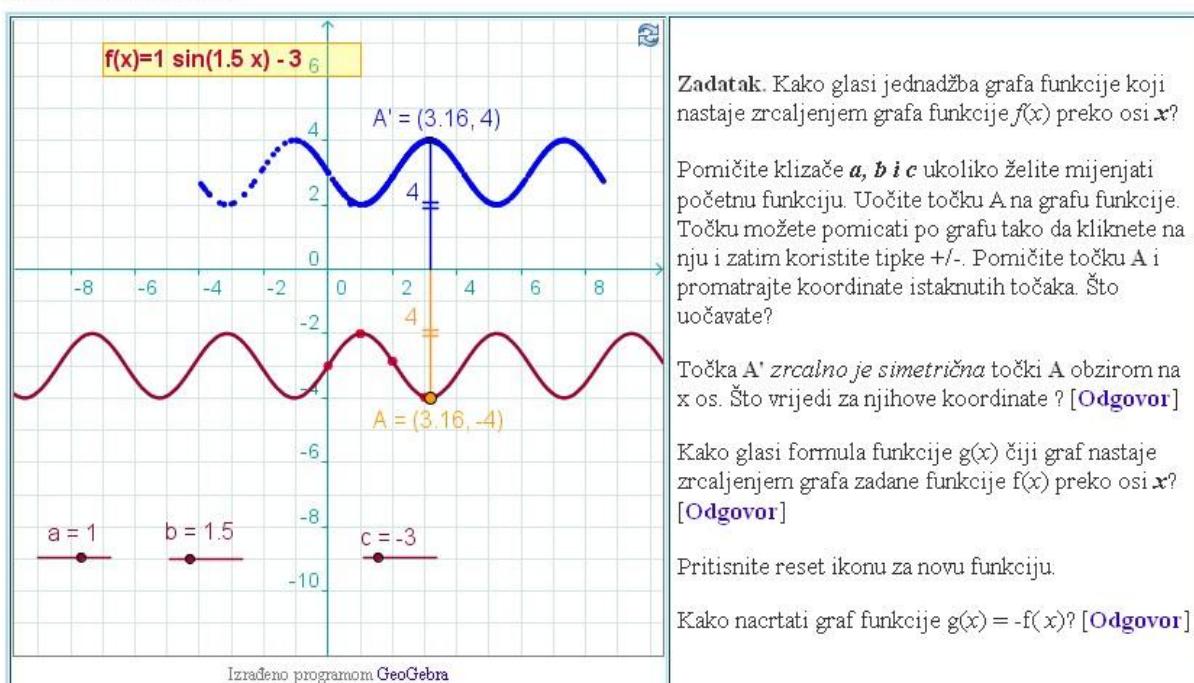
Slijedi primjer u kojem u detaljno analizirati srednji stupac tablice koji se odnosi na istraživanje.

Primjer: Transformacije grafova na *Interaktivnoj matematici Normale*

Na web stranicama *Interaktivne matematike* udruge Normala (www.normala.hr/interaktivna_matematika) nalaze se izuzetno kvalitetni digitalni obrazovni materijali koje su članovi udruge vrijedno izrađivali paze i na metodići pristup i didaktičko oblikovanje matematičkih sadržaja namijenjenih samostalnom radu u enika pri učenju istraživanjem. Svaki materijal kreiran je od desetaka i više Java aplata osmislimenih u GeoGebri, a koji kompletno pokriva neku od nastavnih tema iz redovnog programa srednjoškolske matematike s dodanim zanimljivim izbornim sadržajima. Najnovije i najpozornije djelo nastalo je suradnjom kolega Sanje Grabusin, Milana Kabića, Ele Rac Marini Kragić te Šime Šuljića, a obraća uže temu *Transformacije grafova funkcija i krivulja*.

Za analizu sam odabrala *mathlet* koji se odnosi na *zrcaljenje grafa preko osi x* te u pokazati kako su se autori pri izradi vodili Polyinom idejom heurističkog učenja, odnosno kako su etape učenja istraživanjem ugradili u mathlete. Da se podsetimo, *mathlet* je manji objekt učenja koji obraća uže određenu matematičku temu ili problemu namijenjen demonstraciji nastavnika ili samostalnom učenju učenika. Konstruira se kao interaktivna web stranica koja se sastoji od dinamičnih elemenata (interaktivnih aplata) te statičnih elemenata (objašnjenja, pitanja i zadataka za učenike) [1] kao što se vidi na Slici 4.

Zrcaljenje preko osi x



Slika 4. Mathlet - Zrcaljenje preko osi x (sinusoida)

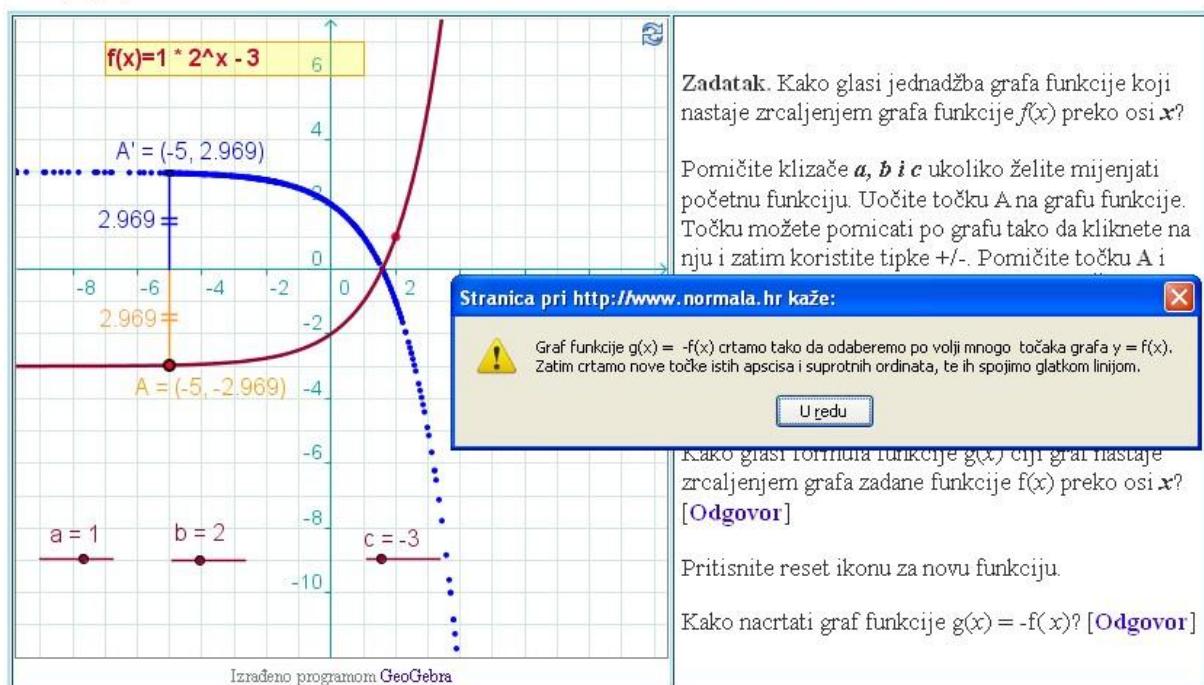
Nastavnik u enicima nudi ovaj gotovi digitalni materijal na kojem rade u informatici koji učenici, a mogu ponoviti i kod kuće jer je dostupan putem interneta (to je naročito zgodno za učenike koji mogu da nisu bili prisutni na nastavi).

Prvi korak je **razumijevanje problema**. Učenika se navodi na problem koji je jasno iskazan pri vrhu desnog dijela prozora: *Kako glasi jednadžba grafa funkcije koji nastaje zrcaljenjem grafa funkcije $f(x)$ preko osi x ?* Dakle, zadana je funkcija, u Java apletu u lijevom dijelu prozora prikazan je i graf jedne funkcije na kojoj će učenik eksperimentirati. A nepoznato je, odnosno traži se graf funkcije osnosimetričan zadanoj obzirom na os x .

Drugi korak odnosi se na **stvaranje plana** i na in prikupljanja podataka kako bi u enik mogao izvesti neki zaklju ak. Dana je uputa kako se po etna funkcija moe mijenjati koriztenjem kliza a. Svaka promjena vidljiva je i na grafu i u jednad0bi. U enika se time poti e da uo ava interakciju dvaju prikaza: grafi kog i simboli kog. Tako er, na grafu funkcije $f(x)$ moe uo iti istaknutu to ku A s nazna enim koordinatama koju treba pomicati i promatrati zto se doga a.

Tre i korak odnosi se na **izvođenje plana**, odnosno analizu sakupljenih podataka. Pomicanjem to ke A na apletu se uo ava njena zrcalna slika A' koja ostavlja trag, a koordinate obiju to aka dinami ki se mijenjaju. U enika se pita: *Što vrijedi za njihove koordinate?*, a zahvaljuju i dinami nosti GeoGebre on bez problema moe uo iti zakonitost. Ipak, kako bi bili sigurni da je shvatio, nudi mu se provjera odgovora klikom na dugme: *A i A' imaju jednake apscise, a ordinate su im suprotni brojevi tj. ako je $A(x,y)$ onda je $A'(x,-y)$* . Obzirom da zrcalna to ka A' ostavlja trag, u enik moe uo iti postupno nastajanje grafa zrcalne funkcije. Stoga se postavlja joz jedno pitanje: *Kako glasi formula funkcije $g(x)$ čiji graf nastaje zrcaljenjem grafa zadane funkcije $f(x)$ preko osi x?* na koje se opet nudi provjera odgovora: $g(x) = -f(x)$.

Zrcaljenje preko osi x



Slika 5. Mathlet - Zrcaljenje preko osi x (eksponencijalna)

Ovaj mathlet je izvrstan primjer koji pokazuje koliko je etvrti korak bitan te kako u digitalni materijal kvalitetno ugraditi **osvrt** i izvo enje kona nog zaklju ka. Da cijela pri a ne bi ostala na primjeru samo jedne vrste funkcija (na po etku je bila sinusoida), u enika se upu uje da klikom na dugme za resetiranje apleta promijeni funkciju. Slu ajnim odabirom moe se pojavit logaritamska, eksponencijalna, funkcija absolutne vrijednosti, funkcija korijena ili kubna funkcija koja se pomo u kliza a moe dodatno prilagoditi. U enik se pomicanjem to ke A i promatranjem zrcalne slike joz nekoliko puta moe uvjeriti u ispravnost svojih slutnji prije nego doneše kona an zaklju ak. Na kraju se u eniku postavlja joz jedno pitanje: *Kako nacrtati graf funkcije $g(x) = -f(x)$?* Ovo nije novi problem, ovo je samo druga ije (obrnuto) iskazan po etni problem. Ukoliko u enik uspjezno odgovori i na ovo posljednje pitanje (ako ne, tu je dugme za odgovor, vidi Sliku 5.), moemo smatrati da je usvojio pojma zrcaljenja funkcije preko osi x.

Nakon ovoga slijedi idu i mathlet u kojem se u enika opet vodi od razumijevanja zadatka, preko stvaranja i izvo enja plana, prikupljanja i analize podataka do donozenja zaklju aka i osvrta. Napominjem da je ovdje prikazan samo jedan od ukupno tridesetak mathleta koliko ih ima u radu *Transformacije grafova funkcija i krivulja*, a kojeg je kolega Kabi detaljnije predstavio u Mi¥-u br. 51. [7] Tako er vas pozivam da, ukoliko joz niste, posjetite web stranicu *Interaktivne matematike* i sami se uvjerite koliko cijela ova pri a ima smisla.

Za kraj, zto vize re i osim citirati Polyu [10]: "Najbolji način da se nešto nauči jest da to sami otkrijete."

Literatura:

- [1] Bjelanovi Dijani , ž. (2009), *Mathlet – interaktivni digitalni materijal namijenjen samostalnom učenju*. Pogled kroz prozor, br 6, <http://pogledkrozprozor.wordpress.com/2009/03/31/mathlet-interaktivni-digitalni-materijal-namijenjen-samostalnom-ucenju/>
- [2] Bognar, L., Matijevi , M. (2002), *Didaktika*. Zagreb: Ÿkolska knjiga.
- [3] Carnet, Metodika i komunikacija e-obrazovanja, www.carnet.hr/referalni/obrazovni/mkod/pedagogikonstr.html
- [4] De Zan, I. (2005), *Metodika nastave prirode i društva*. Zagreb: Ÿkolska knjiga.
- [5] Glasnovi Gracin D. (2008), *Računalo u nastavi matematike – Teorijska podloga i metodičke smjernice*. Matematika i zkola, god X, br 46, str. 10-15.
- [6] Inquiry-based Learning, <http://www.worksheetlibrary.com/teachingtips/inquiry.html>
- [7] Kabi M. (2009), *Transformacije grafova funkcija i krivulja*. Matematika i zkola, god XI, br 51, str. 38-44.
- [8] Karadag, Z., McDougall, D. (2009), *Dynamic worksheets: visual learning with guidance of Polya*. MSOR Connections, vol 9, no 2, http://mathstore.ac.uk/headocs/9213_karadag_z_and_mcdougall_d_polya.pdf
- [9] Kurnik, Z. (2008), *Istraživačka nastava*. Matematika i zkola, god X, br 47, str. 52-59.
- [10] Polya, G. (2003), *Matematičko otkriće*, Zagreb, HMD
- [11] Polya, G. (1966), *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Zagreb: Ÿkolska knjiga
- [12] Varozanec, S. (2006), *Učenje otkrivanjem*. <http://web.math.hr/nastava/mnm1/ucenje.doc> (dostupno 8.8.2008)