

Spoznavanje singularitetne strukture parcijalnih valova metodom vezanih kanala

31. siječnja 2011.

Univerzitet u Tuzli
Prirodno-matematički fakultet
Odsjek: Fizika

Mirza Hadžimehmedović

SPOZNAVANJE SINGULARITETNE STRUKTURE
PARCIJALNIH VALOVA METODOM VEZANIH
KANALA

Doktorska disertacija

Tuzla, 2011.

Ovaj rad urađen je u okviru kolaboracije grupe za fiziku elementarnih čestica sa Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli i grupe sa Instituta "Ruđer Bošković" koju vodi Dr Alfred Švarc, ~~viši~~ savjetnik Instituta "Ruđer Bošković" i redovni profesor Univerziteta u Tuzli. Zavodu za eksperimentalnu fiziku na kojem radi ova grupa dugujem zahvalnost za materijalnu pomoć prilikom mojih dolazaka na Institut "Ruđer Bošković" i za radno i prijateljsko okruženje koje sam tamo uživao.

Profesoru Alfredu Švarcu dugujem zahvalnost što me je strpljivo upućivao u područja fizike elementarnih čestica koja čine sadržaj ovog rada. Dr Saša Ceci i Dr Branimir Zauner, znanstveni saradnici na Institutu "Ruđer Bošković" puno su mi pomogli upućujući me u rad sa programskim paketom koji je bio osnova za proračune koji su provedeni u Tuzli.

Mentoru, Dr Jugoslavu Stahovu, redovnom profesoru Univerziteta u Tuzli, na ovaj način se zahvaljujem na podršci i velikoj pomoći pri izradi ove disertacije

Mr Hedimu Osmanoviću zahvaljujem za svakodnevne diskusije i lojanu podršku pri izradi ovog rada.

Mirza Hadžimehmedović, Januar 2011.

Abstract

In this thesis, we use only one, coupled-channel, unitary, fully analytic method based on the isobar model to extract the pole positions from the each available member of the worldwide collection of partial wave amplitudes understanding them as nothing more but a good energy dependent representation of genuine experimental numbers. In that way, the model dependence related to the different assumption on the analytic form of the partial wave amplitudes is avoided. The way how the method works, and first results are demonstrated for the S_{11} partial wave.

Key words: Partial waves, coupled-channel model, resonance parameters, pole position, T -matrix.

Sažetak

U ovoj disertaciji korišten je, samo jedan, unitaran i analitičan metod vezanih kanala koji se bazira na izobarnom modelu, radi određivanja položaja polova iz svjetski dostupnih analiza parcijalnih valova, shvatajući ih samo kao dobru energijski ovisnu reprezentaciju eksperimentalnih podataka. Na taj način se izbjegava ovisnost o različitim modelima analitičkog produljena parcijalnih valova u kompleksnoj ravnini. Način na koji ovaj metod funkcionira i prvi rezultati, pokazani su za S_{11} parcijalni val.

Ključne riječi: Parcijalni valovi, model vezanih kanala, parametri rezonance, položaj pola, T -matrica.

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Singularitetna struktura parcijalnih valova	4
2.1. Invarijantne amplitude i parcijalni valovi πN raspršenja	4
2.1.1. Analitička struktura invarijantnih amplituda πN raspršenja	5
2.1.2. Analitička struktura parcijalnih valova πN raspršenja	6
2.2. Rezonance i polovi	8
2.3. Breit-Wignerova parametrizacija	9
2.4. Metoda dijagrama brzine (Speed plot)	12
2.5. Tehnika vremenskog kašnjenja (Time delay)	12
2.6. N/D metoda	13
2.7. Upoređivanje parametara rezonance	14
3. Od eksperimenta do položaja pola	16
4. Metode analiza parcijalnih valova i modeli	18
4.1. Prve analize	18
4.1.1. SACLAY analiza parcijalnih valova	19
4.1.2. CERN analiza	19
4.2. Karlsruhe-Helsinki analiza KH80	20
4.3. Carnegie-Melon-Berkeley analiza (CMU-LBL79)	23
4.4. GWU/VPI analiza	24
4.5. GIESSEN model	26
4.6. EBAC model	26
4.7. Dubna-Mainz-Taipei (DMT) model	28
4.8. Jülich model	30
5. Osnovne odlike zagrebačke metode vezanih kanala	31
5.1. Formalizam	31
5.2. Ideja metode	34
5.3. Baza podataka	35
5.4. Procedura fita	35

Sadržaj

6. Rezultati i Diskusija	37
6.1. Metodologija	37
6.2. Fit	38
6.2.1. Fit na podatke iz $\pi N \rightarrow \pi N$ kanala	38
6.2.2. Fit na podatke iz $\pi N \rightarrow \pi N$ i $\pi N \rightarrow \eta N$ kanala	39
6.3. Polovi T -matrice dobiveni CMB modelom, korištenjem rezultata dostupnih analiza parcijalnih valova kao ulaznih podataka	46
6.3.1. Preliminarna razmatranja	46
6.3.2. KH80 analiza	46
6.3.3. GWU-SES i WI08 analize	48
6.3.4. DMT analiza	52
6.3.5. EBAC analize	54
6.3.6. Jülich analiza	56
6.3.7. Giessen analiza	58
6.4. Osnovni rezultati: Srednje vrijednosti	59
6.4.1. Rezultati dobiveni korištenjem samo $\pi N \rightarrow \pi N$ kanala . . .	59
6.4.2. Rezultati dobiveni korištenjem $\pi N \rightarrow \pi N$ i $\pi N \rightarrow \eta N$ kanala	63
7. Zaključci	67
A. Osnovni pojmovi kompleksne analize	69
B. Mandelstamove varijable	71
C. Matrice raspršenja	73

1. Uvod

U svim dosadašnjim analizama parcijalnih valova, pored suštinskog zadatka opisanja procesa πN raspršenja, zasebna pažnja pridavana je ekstrakciji rezonantnih parametara i položaja polova parcijalnih valova. U svakoj analizi parcijalnih valova problem pomenute ekstrakcije je rješavan na način da se pravio model po kome se parametrizira matrica raspršenja za sve otvorene kanale. Ovi modeli se, u principu, razlikuju od analize do analize, te se zbog toga javlja problem usporedbe njihovih rezultata. Naime, svaki model na svoj način definira rezonantne parametre i polove parcijalnih valova, pa možemo reći da parametri nisu određeni na jedinstven način. Pored toga, parametri se ne mogu odrediti na jedinstven način ni ako ih korištenjem različitih metoda odredimo iz istih parcijalnih valova. Ovdje imamo pravo postaviti sebi pitanje: "Da li je uopšte moguće izvršiti usporedbu parametrara dobivenih korištenjem različitih metoda?" Do sada su se ovi parametri uspoređivali prema nekoliko kriterija svrstavanjem u različite grupe rezultata, a o njima će biti riječi u narednim poglavljima.

Da bi riješili problem upoređivanja dobivenih rezultata za položaje polova parcijalnih valova mi smo se odlučili za jedinstvenu metodu njihove ekstrakcije iz svih poznatih analiza parcijalnih valova. Dakle, u ovom radu biće obrađena tematika koja se bavi ekstrakcijom polova iz svjetski priznatih analiza parcijalnih valova radi njihove međusobne usporedbe, te radi davanja svjetskog prosjeka za položaje polova. Izabrana metoda je modifikovana Carnagie-Mellon-Berkeley (CMB) metoda, koja je u principu analitična metoda bazirana na izobarnom modelu. Na ovaj način je izbjegnuta ovisnost o korištenim modelima, nastala zbog različitih tretiranja pozadinskih doprinosa, ili zbog tehničkih pojednostavljenja potrebnih u procesu ekstrakcije. CMB modelom određeni su položaji polova iz svih relevantnih analiza parcijalnih valova, koje smo smatrali samo kao dobru energijski ovisnu reprezentaciju eksperimentalnih rezultata. Način na koji metod funkcioniše i rezultati ovog metoda dani su za S_{11} parcijalni val πN raspršenja.

Ovaj rad je podijeljen u sedam poglavlja u kojima će se obrađivati teme koje su vezane za različite načine ekstrakcije položaja polova i rezonantnih parametara, te načini njihove usporedbe. Zatim, biće riječi o zagrebačkoj modifikaciji CMB modela, i o njenoj upotrebi radi ekstrakcije položaja polova iz različitih analiza

1. Uvod

parcijalnih valova. Na kraju će ti rezultati biti sumarno prezentirani i daće se svjetska srednja vrijednost tih polova.

Već u narednom poglavlju govoriće se o različitim modelima koji su se do danas koristili radi određivanja položaja polova kao i rezonantnih parametara. Svaki model će biti tretiran na način da će se dati njegove najvažnije karakteristike, ko je uveo posmatrani model, te prednosti i nedostaci određenih modela. U ovom poglavlju daje se definicija parcijalnih valova πN raspršenja i opisuje njihova analitička struktura, zajedno sa invarijantnim amplitudama raspršenja.

U trećem poglavlju ovog rada opisan je put koji vodi od eksperimentalno mjerenih veličina pa sve do rezultata za položaje polova parcijalnih valova, koji predstavljaju naš cilj. Zbog toga je bilo pogodno, u ovom dijelu, reći nešto više o svrsi i ciljevima istraživanja, te načinima na koji će biti prezentirani rezultati.

U četvrtom poglavlju se opisuju sve značajne svjetske analize parcijalnih valova, od onih koje su bile preteća svih kasnijih analiza, pa preko onih čiji su rezultati, kao ulazni podaci (parcijalni valovi), korišteni u našoj metodi ekstrakcije položaja polova. Za svaku analizu parcijalnih valova date su osnovne karakteristike i u kratkim crtama dati su opisi tih analiza. Pored toga, spomenuti su načini ekstrakcije rezonantnih parametara i položaja polova, koji se koriste u tim analizama.

U petom poglavlju detaljno je obrađena zagrebačka verzija CMB modela ekstrakcije položaja polova. Prvo je veoma detaljno opisan formalizam na kojem počiva ovaj model, a zatim je prezentirana ideja o upotrebi samo jedne metode ekstrakcije položaja polova iz različitih analiza parcijalnih valova, te su iznesene prednosti ovakve ideje. Navedene su sve analize parcijalnih valova čiji su rezultati korišteni u našoj metodi. Detaljno je opisana procedura fita koja treba biti zadovoljena radi kasnije usporedbe dobivenih rezultata za položaje polova parcijalnih valova.

U šestom poglavlju predstavljeni su svi rezultati za položaje polova dobivenih upotrebom zagrebačke verzije CMB modela. Predstavljena je metodologija određivanja položaja polova u kojoj je poseban akcent stavljen na značaj inelastičnog kanala, a polovi su prezentirani i komentirani sa dva aspekta. Prvi način prezentiranja rezultata se zasniva na tome da je moguće grupirati rezultate na osnovu toga koliko je kanala uključeno u proceduru fita. Drugi način prezentiranja rezultata bazira se na njihovoj klasifikaciji po korištenim ulaznim podacima. Tako su prezentirani rezultati dobiveni korištenjem pojedinačnih analiza parcijalnih valova. Na kraju ovog poglavlja date su srednje vrijednosti i standardne devijacije svih rezultata, klasificiranih po osnovu uključenih kanala i broja golih polova uključenih u proceduru fita.

1. Uvod

U sedmom poglavlju dati su zključci ovog istraživanja. Oni se odnose na prednosti korištenja samo jedne metode ekstrakcije položaja polova kao i na činjenice, da su svi parcijalni valovi konzistentni sa tri S-valna rezonantna stanja i da za njih postoji statistička naznaka o postojanju četvrtog S-valnog stanja.

2. Singularitetna struktura parcijalnih valova

U ovom radu istražujemo πN sistem - raspršenje piona na nukleonu i čestice koje nastaju u konačnom stanju. Procesi raspršenja opisuju se S -matricom odnosno T -matricom. U pion-nukleon raspršenju, T -matrica je opisana sa četiri funkcije - amplitude raspršenja. Centralno mjesto u svim našim razmatranjima zauzima Mandelstamova hipoteza: svi dvočestični procesi mogu se opisati jedinstvenom amplitudom raspršenja Mandelstamovih varijabli s , t i u ¹, u energijskoj kompleksnoj ravnini. Amplituda raspršenja je u cjelosti definirana preko svojih polova i vrijednosti na rezovima [1]. Položaj polova i rezova definiran je dinamikom procesa koje amplituda raspršenja opisuje. Zbog toga, u cilju dobivanja cjelovite informacije o fizikalnom sistemu kojeg posmatramo, moramo u potpunosti usmjeriti svoju pažnju na analiziranje i interpretiranje singulariteta matrice raspršenja. Dok vrijednost amplitude raspršenja na fizikalnom rezu definira fizikalne amplitude u s ili u kanalu ovisno o tome da li prilazimo fizikalnoj osi odozgo ili odozdo, prosti polovi koji se nalaze na fizikalnoj osi ispod praga, povezani su sa vezanim stanjima. Kompleksni polovi² odgovaraju nestabilnim česticama - rezonancama. Kako se vjeruje da ne postoji temeljna razlika između vezanog stanja i rezonance, osim po pitanju stabilnosti, za očekivati je da se prosti polovi amplitude vezanih kanala, koji se nalaze na nefizikalnoj plohi u kompleksnoj energijskoj ravnini, mogu povezati sa rezonantnim stanjima [2]. A izjednačavanje pola matrice raspršenja sa rezonantnim stanjem jeste upravo definicija rezonance.

2.1. Invarijantne amplitude i parcijalni valovi πN raspršenja

Jedna od uspješnijih teorijskih analiza koje opisuju proces πN raspršenja jeste metoda nalaženja amplitude raspršenja neovisnih o modelu, u kojoj se dostupni

¹Pogledati Dodatak B

²Definicije singularnih tačaka kompleksne funkcije dani su u dodatku A.

2. Singularitetna struktura parcijalnih valova

eksperimentalni podaci obrađuju korištenjem osnovnih principa kao što su:

- kauzalnost,
- Lorentzova invarijantnost,
- unakrsna simetrija,
- unitarnost

Iz prva dva principa postulira se analitičnost amplituda raspršenja u topološkom produktu kompleksnih ravnina pogodno izabranih Lorentz-invarijantnih promjenljivih s , t i u (Detalje pogledati u dodatku B).

Princip unakrsne simetrije govori o invarijantnosti amplituda raspršenja pri zamjeni ulazne (izlazne) čestice (antičestice) izlaznom (ulaznom) antičesticom (česticom), sa odgovarajućom zamjenom četvornih impulsa. U πN raspršenju, polazeći od raspršenja

$$\pi^{\pm}p \rightarrow \pi^{\pm}p \quad s - \text{kanal},$$

unakrsnom simterijom dobivaju se dva procesa raspršenja (kanala):

$$\pi^{\mp}p \rightarrow \pi^{\mp}p \quad u - \text{kanal}$$

$$\pi\pi \rightarrow p\bar{p} \quad t - \text{kanal}.$$

Principom unitarnosti u potpunosti je određena analitička struktura invarijantnih amplituda raspršenja.

Invarijantne amplitude πN raspršenja veoma uspješno se određuju analizom parcijalnih valova, jer su članovi u razvoju po parcijalnim valovima prigušeni kratkim dosegom jakih interakcija.

2.1.1. Analitička struktura invarijantnih amplituda πN raspršenja

U okviru Mandelstamove reprezentacije, invarijantne amplitude πN raspršenja su analitičke funkcije invarijantnih promjenljivih s , t i u sa slijedećim singularitetima:

- fizikalni rez s -kanala $s \geq (m + \mu)^2$,
- fizikalni rez u -kanala $u \geq (m + \mu)^2$,

2. Singularitetna struktura parcijalnih valova

- fizikalni rez t -kanala $t \geq 4\mu^2$,
- nukleonski pol za $s = u = m^2$ (samo invarijantne amplitude B^\pm i kombinacije invarijantnih amplituda koje ih sadrže)

U dijelu Mandelstamove ravnine određenom uslovima:

$$t < 4\mu^2; \quad s < (m + \mu)^2; \quad u < (m + \mu)^2$$

invarijantne amplitude πN raspršenja su realne funkcije, što zajedno sa postuliranim analitičnošću, uvjetuje realnu analitičnost invarijantnih amplituda πN raspršenja.

Analitičko produljenje amplituda πN raspršenja u nefizikalnu oblast moguće je ostvariti pomoću razvoja po parcijalnim valovima.

2.1.2. Analitička struktura parcijalnih valova πN raspršenja

Parcijalni valovi πN raspršenja definiraju se na slijedeći način:

$$T_{l\pm}^I(s) = \frac{\eta_{l\pm}^I(s)e^{2i\delta_{l\pm}^I(s)} - 1}{2i},$$

ali se često definiraju i tzv reducirani parcijalni valovi, koji na pragu imaju konačnu vrijednost, na slijedeći način:

$$F_{l\pm}^I(s) = \frac{T_{l\pm}^I(s)}{q^{2l+1}(s)},$$

gdje su

- I izospinski indeks i za πN raspršenje može imati vrijednosti $I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$,
- l orbitalni moment, a oznaka $l\pm$ odnosi se na dvije moguće vrijednosti angularnog momenta: $J = l \pm \frac{1}{2}$,
- $\eta_{l\pm}^I$ koeficijenti inelastičnosti,
- $\delta_{l\pm}^I$ fazni pomaci.

2. Singularitetna struktura parcijalnih valova

Obično se definiraju parne i neparne izospinske kombinacije parcijalnih valova:

$$\begin{aligned} F_{l\pm}^+(s) &= \frac{1}{3} \left(F_{l\pm}^{1/2} + 2F_{l\pm}^{3/2} \right) \\ F_{l\pm}^-(s) &= \frac{1}{3} \left(F_{l\pm}^{1/2} - F_{l\pm}^{3/2} \right). \end{aligned}$$

Na pragu πN raspršenja $s = (m + \mu)^2$, reducirani parcijalni valovi imaju konačne i od nule različite vrijednosti:

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} F_{l\pm}^\pm(s) = a_{l\pm}^\pm,$$

gdje su $a_{l\pm}^\pm$ odgovarjuće dužine raspršenja.

Parcijalne valove moguće je izraziti preko invarijantnih amplituda raspršenja A^\pm i B^\pm pomoću projekcijske formule:

$$\begin{aligned} F_{l\pm}^\pm(s) &= \frac{1}{32\pi s q^{2l}} \int_{-1}^1 dz_s \left\{ P_l(z_s) \left((W + m)^2 - \mu^2 \right) \left(A^\pm(s, t) + (W - \mu) B^\pm(s, t) \right) + \right. \\ &\quad \left. P_{l\pm 1}(z_s) \left((W - \mu)^2 - \mu^2 \right) \left(-A^\pm(s, t) + (W + m) B^\pm(s, t) \right) \right\}, \end{aligned}$$

gdje je z_s kosinus ugla raspršenja u πN sistemu centra masa, W ukupna energija, a P_l Legendreov polinom reda l .

Polazeći od analitičke strukture invarijantnih amplituda raspršenja, može se zaključiti da su parcijalni valovi πN raspršenja analitičke funkcije u razrezanoj s -ravnini sa slijedećim singularitetima:

- rez duž realne s -ose $(m + \mu)^2 \leq s \leq \infty$, koji dolazi od reza s -kanala kod invarijantnih amplituda raspršenja,
- kružni rez $|s| = (m^2 - \mu^2)$ i rez $-\infty < s \leq 0$
kružni rez dolazi projekcijom iz invarijantnih amplituda, premda ga nema u njihovoj analitičkoj strukturi, dok je rez $-\infty < s \leq 0$ posljedica reza t -kanala invarijantnih amplituda raspršenja,
- rez duž realne ose $-\infty < s \leq (m - \mu)^2$, koji dolazi od reza u -kanala invarijantnih amplituda,
- nukleonski pol u u -kanalu projekcijom prelazi u dva reza u kompleksnoj s -ravnini:

$$- \text{ kratki rez: } \left(m + \frac{\mu^2}{m} \right)^2 \leq s \leq m^2 + 2\mu^2,$$

$$- \text{ rez duž realne } s\text{-ose } -\infty < s \leq 0.$$

2.2. Rezonance i polovi

Cilj ovog rada je ispitati singularitetnu strukturu parcijalnih valova dobivenih kao rezultat različitih analiza. U prethodnom dijelu ovog rada upoznali smo se sa analitičkom strukturom invarijantnih amplituda i parcijalnih valova πN raspršenja. Pored toga, detaljnijom analizom, može se zaključiti da parcijalni valovi πN raspršenja pokazuju određena svojstva rezonantnog ponašanja, što se može (ali i ne mora) protumačiti kao postojanje rezonantnog stanja. Radi ispitivanja rezonantnog ponašanja parcijalnih valova napravljeno je dosta modela kojima se vrši ekstrakcija rezonantnih parametara ili singulariteta parcijalnih valova odnosno polova.

Proučavanjem prethodno pomenutih modela, moguće je izvesti neku vrstu kriterija za postojanje rezonance:

1. Trebalo bi biti moguće ovisnost o energiji elastičnih amplituda parcijalnih valova izraziti preko formule Briet-Wignerovskog tipa i pozadinskog člana (background term).
2. Analitičko produljenje amplituda parcijalnih valova u kompleksnu ravninu trebalo bi da dovede do jasnog dokaza postojanja pola.
3. Efekti rezonance moraju također postojati i u drugim kanalima, uključujući i elektromagnetne interakcije.

Činjenica da mi u ovom radu pokušavamo odrediti vrijednosti polova T -matrice koji se nalaze u kompleksnoj energijskoj ravnini dok se ekperimenti odvijaju samo na fizikalnoj osi, objašnjava suštinu problema, i uzrok mnogih nesporazuma koji se pojavljuju u literaturi. Naime, pored toga što je pol smješten u eksperimentalno nedostupnim područjima, na njega utiču i procesi između svih dozvoljenih višečestičnih kanala, istovremeno. Međutim, uobičajeno je da se opservable mjere samo u jednom kanalu, pa je jedino što se iz tih opservabli može odrediti, ustvari, amplituda raspršenja jednog kanala, odnosno položaj pola u jednom kanalu. Međutim, prema Mandelstamovoj hipotezi, ovaj pol utiče na sve kanale. Prema tome potrebno je istovremeno promatrati sve kanale. Da bi promatrali sve kanale iz iste perspektive, moramo kombinirati sva mjerenja i analizirati ih istovremeno. Zbog toga, teorijska podloga, za određivanje matrice amplituda raspršenja, mora počivati na teoriji vezanih kanala, i mora biti analitična i unitarna. Naravno, ovo nisu svi uslovi koji moraju biti ispunjeni. U trenutku kada imamo matricu raspršenja, potrebno je odrediti i parametrizirati sve njene polove. Međutim, ovo nije jednostavno, te stoga svaka analiza parcijalnih valova, čak i ona višekanalna, daje zaseban način (model) parametrizacije polova u kompleksnoj energijskoj ravnini.

2. Singularitetna struktura parcijalnih valova

Ovdje dajemo pregled modela korištenih za parametrizaciju amplituda parcijalnih valova i određivanja položaja njihovih polova u kompleksnoj energijskoj ravnini.

2.3. Breit-Wignerova parametrizacija

Prvi, i u literaturi najčešći, način parametrizacije polova amplituda parcijalnih valova učinjen je sa jednokanalnim analizama parcijalnih valova, i temelji se na konceptu Breit-Wignerove parametrizacije.

Najjednostavniji oblik Briet-Wignerove formule je onaj sa konstantnim parametrima:

$$T_R(W) = \frac{R_1}{M - W - i\Gamma/2}. \quad (2.3.1)$$

Pol T -matrice je određen sa četiri realna parametra: položajem pola u W -ravnini: $M - i\Gamma/2$ i kompleksnim reziduumom R_1 . $Im T_R$ i $|T_R|^2$ imaju izražen maksimum pri $W = M$, čija je cijela širina i poluvisina data preko vrijednosti parametra Γ .

U slučaju elastičnog raspršenja, $R_1 = \Gamma/2$. S porastom energije T_R opisuje krug poluprečnika $1/2$ krećući se u smjeru suprotnog smijera kazaljke na satu (Argandov dijagram). Brzina promjene T -matrice sa energijom $\left|\frac{dT_R}{dW}\right|$ ima dobro definirani maksimum za $W = M$ čiji je iznos:

$$\left|\frac{dT_R}{dW}\right|_{W=M} = \frac{2}{\Gamma}. \quad (2.3.2)$$

Ako se T_R posmatra kao funkcija varijable s , tada se Breit-Wignerova parametrizacija može pisati kao

$$T_R(s) = \frac{R}{M^2 - s - iM\Gamma}. \quad (2.3.3)$$

U slučaju elastičnog raspršenja $R = M\Gamma$.

Za male vrijednosti Γ , pozicija pola i interpretacija Γ je približno ista kao u slučaju za $T_R(W)$ u jednačini (2.3.1).

Usporedba sa svojstvima parcijalnih valova pokazuje da su gornje Breit-Wignerove formule pojednostavljene zbog toga što:

1. nemaju korektnu strukturu reza,

2. Singularitetna struktura parcijalnih valova

2. ne zadovoljavaju uslov realnosti analitičke funkcije

$$f_{l\pm}(s^*) = f_{l\pm}^*(s). \quad (2.3.4)$$

Početni pokušaji korištenja Breit-Wignerove funkcije sa konstantnim parametrima radi predstavljanja T -matrice na fizikalnoj osi odmah su otkrili činjenicu da je ta funkcija prejednostavna.

Ukoliko želimo uzeti u obzir doprinose lijevog reza, možemo dodati pozadinski član, u kojem su također uključeni ostaci ostalih rezonanci. Fizikalni rez se može predstaviti na uobičajen način, pretpostavljajući odgovarajuću ovisnost R i Γ o impulsu u sistemu centra masa.

Dakle, Breit-Wignerova funkcija treba da sadrži još članova. Ti članovi treba da opisuju energijski ovisnu pozadinu i to na unitaran način. Nažalost, dugo vremena je bilo poznato, ali ne i općeprihvaćeno, da u principu, dodavanje unitarnog pozadinskog člana utiče na poziciju maksimuma apsolutne vrijednosti matrice raspršenja na realnoj osi, uprkos činjenici da se pozicija pola nije promijenila. Pozicija pola ovisi o Breit-Wignerovim parametrima ali i o pozadinskom članu. Položaj pola je veličina koja se uobičajeno određuje iz eksperimenata. Zbog toga, kada su Breit-Wignerovi parametri izabrani tako da predstavljaju poziciju pola, oni moraju biti ovisni o pozadini, a jedini slučaj kada oni egzaktno predstavljaju poziciju pola je kada slučajno pogodimo korektnu formu pozadinske energijske ovisnosti. Ukoliko je pozadina pogrešna onda Breit-Wignerovi parametri nisu parametri pola, nego nešto drugo. To je i razlog zašto Breit-Wignerovi članovi uopćeno ne predstavljaju poziciju pola, i zašto su sami po sebi model ovisni.

Postoje dva osnovna načina uključivanja pozadinskih doprinosa: prvi je unitarno dodati energijski ovisan pozadinski član konstantnim parametrima Breit-Wignerove funkcije, kao što je opisano ranije, a drugi je da sami Breit-Wignerovi parametri postanu energijski ovisni. Konkretno to se radi sa Breit-Wignerovom širinom Γ .

Postoji više načina na koji se može uvesti energijski ovisna Breit-Wignerova širina. U [3] energijski ovisna širina je dio rezonantnog člana teorijske funkcije koja je povezana sa T -matricom u okolini rezonance. U referencama [4, 5] širina je povezana sa rezonantnim dijelom S -matrice. U metodi predloženoj u [6] i također primjenjenoj u [7, 8] širina se definira iz funkcije koja se sastoji iz pozadinskog člana i člana koji ima Breit-Wignerov oblik.

Prema formuli (2.3.4) polovi T -matrice dolaze u paru. Svakom polu $s = M^2 - iM\Gamma$, pridružen je i konjugovano kompleksni pol $s = M^2 + iM\Gamma$. Ovaj drugi leži na

2. Singularitetna struktura parcijalnih valova

gornjoj polovini druge plohe. Počevši od fizikalnih vrijednosti varijable s on se može dostići samo ako se zaobiđe tačka grananja. Zbog toga se njegov doprinos može svrstati u dio nerezonantne pozadine.

Pozadinski dio T -matrice može se predstaviti na takav način da je unitarnost osigurana. Uobičajena procedura je da se uzme proizvod dvije unitarne S -funkcije

$$S = 1 + 2iT = S_R S_B \quad (2.3.5)$$

i da se definiraju rezonantni (R) i pozadinski dijelovi (B) T -matrice kao

$$S_R = 1 + 2iT_R; \quad S_B = 1 + 2iT_B, \quad (2.3.6)$$

što daje slijedeću reprezentaciju T -matrice

$$T = T_R S_B + T_B. \quad (2.3.7)$$

Dok god ne postoji teorija nukleonskih rezonanci, odstupanja $T - T_R$ fizikalnih amplituda od jednostavnih rezonantnih formula (2.3.1) ili (2.3.3) mogu se opisati na različite načine. Općenito, koristi se modificirana verzija jednostavne Breit-Wignerove relacije (2.3.3)

$$T_R(s) = \frac{R(q)}{M^2 - s - iM\Gamma(s)} \quad (2.3.8)$$

a preostali dio odstupanja se opisuje pozadinskim članom T_B .

Ovakav metod omogućava da se elastični fazno prostorni faktor (phase space factor) uključi u residuum $R(q)$, a elastični i inelastični fazno prostorni faktor zajedno da se uključe u $\Gamma(q)$.

Jedna od dobro poznatih metoda koja razmatra otvaranje bliskih kanala je Flatteov formalizam. Flatteov metod, predložen 1976. godine [9], prepoznaje činjenicu da parcijalni valovi T matrice registruju otvaranje novog kanala uključujući ga na efektivan način. On je predložio da se tradicionalna Breit-Wignerova forma proširi sa još jednim energijski ovisnim članom za rezonantnu širinu. Polovi amplitude bi onda opet mogli biti predstavljeni kao singulariteti izmjenjene Breit-Wignerove funkcije.

Činjenicu da Breit-Wignerovi članovi u općem slučaju ne predstavljaju položaj pola, i da su sami po sebi model ovisni spominjalo je nekoliko autora [10], ali prvi put ju je naglasio Hoehler u [11, 12] gdje je također uveo definiciju "lokalnog Breit-Wignerovog fita" i koncept "traženja položaja pola" korištenjem tehnike

2. Singularitetna struktura parcijalnih valova

zване "speed plot". Hoehler je pravio jasnu razliku između Breit-Wignerovih parametara koji bi se prema njegovim preporukama trebali dobiti korištenjem lokalnog fita amplituda parcijalnih valova sa Breit-Wignerovom funkcijom plus neki pozadinski član, i parametara pola koji bi se, kako je on sam pretpostavio, u odsustvu boljeg načina, trebali dobiti pomoću tehnike "speed plot". Kako je i sam naglašavao, Breit-Wignerovi parametri su ovisni o modelu, i uporno je odbijao međusobno upoređivati te parametre. Njegovo zadnje upozorenje je objavljeno nedavno [13]. Međutim, zbog nejasnih historijskih razloga, praksa upoređivanja Breit-Wignerovih parametara iz različitih izvora nastavljena je i u Particle Data Group (PDG) publikacijama. Breit-Wignerovi parametri, dobiveni korištenjem različitih parametrizacija pozadine, su do ove godine [14] direktno upoređivani, računate su srednje vrijednosti te se koristila analiza grešaka, uprkos činjenici da su to ustvari na potpuno različite načine definirani parametri. Ovakva praksa konačno treba biti napuštena.

Postoji duga historija vezana za napore da se izbjegne koncept Breit-Wignerovih parametara, i da se direktno ide na traženje pravih pozicija pola.

2.4. Metoda dijagrama brzine (Speed plot)

Prvi, i najviše korišten metod je tehnika "speed plot" koju je uveo Hoehler [11] za jednokanalne amplitude raspršenja. Bazirana je na ranije pomenutoj ideji [2] da se pozicija pola treba tražiti razvojem amplitde raspršenja u okolini pola, a "speed plot" tehnikom se zadržava samo prvi član. Ovaj metod je u principu ispravan ukoliko radimo sa izoliranim polom udaljenim od bilo kakvog praga, u suprotnom ovaj metod nije efektivan. Postoje mnogi primjeri kada je ovaj metod u potpunosti neprimjenjiv, a najbolji je dobro poznata S11(1535) rezonanca. Ograničenost ove metode je diskutirana u [15] gdje je pokazano da je "speed plot" samo prvi član mnogo zahtjevnije "regularizacijske" metode, bazirane na traženju N-te derivacije amplitude raspršenja. Međutim, zbog numeričke nestabilnosti procesa regularizacijska metoda još uvijek nije praktično rješenje.

2.5. Tehnika vremenskog kašnjenja (Time delay)

Druga metoda određivanja pozicije pola jednokanalne amplitude raspršenja je takozvana "time delay" tehnika ili u slobodnom prijevodu tehnika vremenskog kašnjenja. Ova tehnika je početkom pedesetih godina uvedena u teoriju raspršenja od

2. Singularitetna struktura parcijalnih valova

strane nekoliko autora [16, 17, 18, 19], na način da je dana relacija za vremensko kašnjenje u sudarima. Tehnika vremenskog kašnjenja direktno se može povezati sa faznim pomakom T -matrice. Veza između tehnike dijagrama brzine (Speed Plot) i tehnike vremenskog kašnjenja (Time Delay) dana je u referenci [20].

Ukoliko se proces raspršenja posmatra preko valnih paketa, može se računati vremensko kašnjenje (time-delay) poredeći slobodno kretanje upadne čestice sa kretanjem u procesu raspršenja. Interakcija vodi do vremenskog kašnjenja

$$Q = -i\hbar \frac{dS}{dW} S^{-1} = 2\hbar \frac{d\delta}{dW}.$$

Prva verzija ove formule je važeća i za višekanalni slučaj, gdje Q postaje matrica života.

Za rezonantno raspršenje očekuju se velike pozitivne vrijednosti za Q a samim tim i za $d\delta/dW$ i dT/dW , gdje upadna čestica i čestica mete tvore nestabilnu česticu dužeg životnog vijeka (u vremenskoj skali reda 10^{-23} s). Međutim teoretski, ne postoji mehanizam koji daje velike negativne vrijednosti za Q , što bi predstavljalo značajno smanjenje faznog pomaka koji odgovara ponašanju T u Argandovom dijagramu, u kojem se vektor kreće u suprotnom smjeru od smjera kazaljke na satu.

Kvalitativno istraživanje za nerelativističko S -valno raspršenje je proveo Wigner, i dao ocjenu za slučaj gdje interakcija ima doseg poluprečnika a

$$\frac{d\delta}{dq} \geq - \left(a + \frac{1}{2q} \right),$$

gdje je q impuls u sistemu centra masa.

2.6. N/D metoda

N/D metoda koristi se disperzionim relacijama radi konstrukcije amplituda u fizikalnom području. Ideja je predstaviti amplitude parcijalnih valova kao odnos dvije funkcije, brojnika $N(s)$ koji je analitička funkcija u s -ravnini samo na lijevoj strani reza i nazivnika $D(s)$ koji je analitička funkcija samo na desnoj strani reza. Polovi amplituda raspršenja se tada dobivaju kao nule funkcije $D(s)$, a problem sa viškom nula je često veoma teško riješiti. Metod je veoma davno uveden [21], i od tada se uglavnom koristi u mezonskoj fizici, posebno u slučajevima kada je poznata struktura lijevog reza [22, 23].

2.7. Upoređivanje parametara rezonance

Postoje dvije konvencije koje govore o tome na koji način se mogu uspoređivati rezultati iz različitih analiza parcijalnih valova:

1. Većina autora daje tabele sa parametrima M , Γ , i Γ_{el} ili $x_{el} = \Gamma_{el}/\Gamma$, gdje x_{el} predstavlja tzv koeficijent elastičnosti.

Masa rezonance M se definira kao realna vrijednost energije u sistemu centra masa W za koju se realni dio nazivnika rezonantnog člana T_R jednačine (2.3.8) poništava. Treba napomenuti da se neka opšta tvrdnja o poziciji ove tačke na rezonantnom krugu ne može dati, jer postoji kompleksni član RS_B u brojniku prvog člana jednačine (2.3.7).

Širina rezonance Γ se definira preko $\Gamma(q)$ u $W = M$.

Pretpostavljajući energijsku ovisnost ostalih članova zanemarljivom, rezonantni parametri mogu se odrediti brzinom iz jednačine (2.3.2). Njen maksimum se javlja u $W = M$ i ima vrijednost $4R_1/\Gamma_i^2$, $R_1 = \Gamma_{el}/2$.

Iako $R(q)$ može imati kompleksne vrijednosti, obično se biraju realne, jer se faza od $R(q)$ može uključiti u pozadinski član S_B relacije (2.3.7). Uzimajući $R = M\Gamma_{el}$, rezonantni član se može pisati kao

$$T_R(s) = \frac{M\Gamma_{el}(q)}{M^2 - s - iM\Gamma(q)}; \quad x_{el}(q) = \frac{\Gamma_{el}(q)}{\Gamma(q)}. \quad (2.7.1)$$

Treći rezonantni parametar elastičnost x_{el} je uzet u $W = M$.

2. Drugačiji skup rezonantnih parametara se daje preko pozicije kompleksnog pola T -matrice i preko vrijednosti kompleksnog reziduuma. Prednost ovakve parametrizacije je u definiranju parametara na jedinstven način. Međutim, nedostatak ove parametrizacije leži u tome što je potrebno izvršiti analitičko produljenje na drugu plohu preko velike udaljenosti.

Produljenje se može uraditi na nekoliko različitih načina:

1. Prvi način je fitanjem parametrizacije tipa (2.3.7) i (2.7.1) na eksperimentalne amplitude parcijalnih valova i računanjem pozicije pola i njegovog reziduuma.

Za ove svrhe može se uzeti parametrizacija u kojoj je parametar širine u nazivniku od T_R konstantan. U tom slučaju, pozicija pola je data direktno sa dva parametra fita.

Drugi način se bazira na parametrizaciji Breit-Wignerovskog tipa koristeći N/D metod.

2. Singularitetna struktura parcijalnih valova

2. Drugačiji načini produljenja su klasificirani kao model neovisni načini određivanja pozicije polova.

Također se koristi i poboljšana metoda razvoja, koja uzima u obzir uslov stabilizacije.

Ono što bi trebalo uraditi da bi na pravilan način odredili polove parcijalnih valova πN raspršenja jeste potpuno analitičko produljenje amplitude raspršenja u kompleksnu energijsku ravan.

U skorije vrijeme prepoznaje se značaj traženja polova u višekanalnim analizama, pa su tako neke grupe koje se bave višekanalnim analizama ponudile svoje procedure za analitičko produljenje[24, 25]. Drugi su priznali da je složenost analitičkog produljenja svih Feynmanovih amplituda njihovog modela izvan njihovog domašaja i da se oni ustvari u cijelosti oslanjaju na "speed plot" metodu[26]. U svim slučajevima osim jednog, procedura određivanja polova je poprilično robusna.

VPI/GWU kolaboracija pravi jasnu razliku između Breit-Wignerovih parametara i pozicija pola, te tvrde da se "Polovi mogu odrediti produljenjem u kompleksnu energijsku ravninu". Nažalost nisu objasnili ni jednu pojedinost njihove metode. EBAC kolaboracija koja koristi analitičku ekstrapolaciju svojih amplituda, za razliku od VPI/GWU grupe, nedavno je dala detaljnija objašnjenja svoje procedure [25]. Druge grupe, kako je pomenuto ranije, koriste jednokanalne tehnike određivanja pozicija pola, kao što su "speed plot" ili "time delay" [26, 27, 28, 29]. Međutim, prepoznajući značaj direktne analitičke ekstrapolacije, kolaboracija Dubna-Mainz-Taipei (DMT) izvršila je potpuno analitičko produljenje te predstavila vjerodostojne položaje polova[30].

3. Od eksperimenta do položaja pola

Eksperimenti rađeni u proteklim desetljećima u oblasti πN raspršenja čine ovaj proces jednim od najbolje istraženih procesa u području jakih interakcija.

Danas dostupna eksperimentalna građa obuhvata široko područje energija u cijelom opsegu uglova raspršenja, a odnosi se na šest mjerljivih veličina:

- elastični diferencijalni i totalni udarni presjeci:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p) ; \quad \sigma_{tot} (\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p) ,$$

- diferencijalni i totalni udarni presjeci sa izmjenom naboja:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) ; \quad \sigma_{tot} (\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) ,$$

- polarizacije nukleona u konačnom stanju:

$$P (\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p) ; \quad P (\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) .$$

Iz ovih eksperimentalno mjerljivih veličina potrebno je teoretski opisati procese πN raspršenja. Jedna od uspješnijih metoda je Analiza parcijalnih valova (Partial Wave Analysis, PWA). U današnje vrijeme postoji više grupa koje se bave analizom parcijalnih valova, a o samim analizama biće više riječi u narednim poglavljima. U trenutku kada su određeni parcijalni valovi može se pristupiti analizi singularitetne strukture tih parcijalnih valova, što predstavlja cilj ovog rada. Kako smo, u prethodnom poglavlju, vidjeli da postoji veliki broj načina da se analizira singularitetna struktura, odnosno da se izvrši analitičko produljenje u kompleksnu energijsku ravninu, te da rezultati tih analiza općenito nisu veličine koje se mogu upoređivati, postavljamo sebi pitanje: "Kolika je stabilnost, u odnosu na proceduru analitičkog produljenja, položaja pola? "

3. Od eksperimenta do položaja pola

U cilju dobijanja pouzdanog odgovora na ovo pitanje odlučili smo se za upotrebu samo jedne metode radi određivanja položaja pola iz svih objavljenih analiza parcijalnih valova, kako bi mogli uporediti rezultate. Odabrana metoda je T matrični Carnegie-Mellon-Berkeley (CMB) postupak određivanja polova. Drugim riječima, sve skupove amplituda parcijalnih valova uzimamo samo kao dobar energijsko opisan opis eksperimentalnih podataka te iz njih određujemo polove CMB modelom. Prema tome, izbjegnute su sve razlike nastale korištenjem različitih vrsta produženja u kompleksnu ravninu u različitim modelima, a jedina greška jeste ona koja je uslovljena preciznošću samog CMB modela. Također, dobiveni rezultati biće upoređeni sa rezultatima dobivenim drugim metodama i modelima.

Prevažodni cilj ovog rada je određivanje polova matrice raspršenja iz svjetske kolekcije analiza parcijalnih valova. Da bi smo to uradili predstavljamo ideju o korištenju samo jedne, dobro definirane, procedure određivanja položaja polova iz objavljenih analiza parcijalnih valova, shvatajući ih samo kao pouzdan opis eksperimentalnih podataka. Na ovaj način izbjegavamo uključivanje sistematskih grešaka procedura analitičkog produženja, što znatno pojednostavljuje cijeli račun.

U ovom radu će biti prikazano kako CMB model funkcionira za S_{11} parcijalni val. Pokazaće se da se $N(1535)S_{11}$ i $N(1650)S_{11}$ rezonantna stanja nedvojbeno vide u svim korištenim analizama parcijalnih valova, i da se primjenom ove metode može dati jaka naznaka postojanja bar još jednog pola u okolini 1800 MeV [26-28]. Dakle, novo $N(1846)$ stanje primjećeno u fotoprodukcijskom kanalu [27, 31] je konzistentno sa svim objavljenim analizama parcijalnih valova. Pokazaćemo da četvrto S_{11} stanje na oko 2100 MeV nije isključeno niti u jednoj analizi parcijalnih valova, te da je ono favorizirano korištenjem analize parcijalnih valova Dubna-Mainz-Taipei [27, 28]. Dobivene rezultate ćemo uporediti sa objavljenim rezultatima u literaturi, te ćemo donijeti konačni zaključak o stvarnoj poziciji polova parcijalnih valova.

Pored svega navedenog, postavlja se pitanje koliko predložena metoda ekstrakcije polova (CMB model) ovisi o pretpostavkama samog modela. CMB se zasniva na mnogo pretpostavki, i veoma je važno otkriti koliko su stabilni položaji polova, ukoliko se naruši neka od pretpostavki modela. Ispitali smo ovaj problem, a čitaoca upućujemo na detalje ove analize u referenci [32].

4. Metode analiza parcijalnih valova i modeli

Cilj analize parcijalnih valova (PWA) jeste da odredi amplitude parcijalnih valova iz eksperimentalnih podataka za diferencijalne udarne presjeke i polarizacije nukleona. Prethodno navedeni postupak je ekvivalentan sa određivanjem invarijantnih amplituda raspršenja za sve uglove raspršenja.

Ako pretpostavimo tačnost izospinske invarijantnosti, sve elastične reakcije i reakcije sa promjenom naboja (charge-exchange) kod pion-nukolon sistema mogu se opisati sa 4 invarijantne amplitude, npr. $A^\pm(s, t)$, $B^\pm(s, t)$, ili sa 8 realnih funkcija za svaki par (s, t) Mandelstamovih varijabli.

Različite analize parcijalnih valova mogu se klasificirati prema slijedećim kriterijima:

- Način tretiranja viših parcijalnih valova. U većini analiza razvoj parcijalnih valova se zaustavlja na određenoj vrijednosti angularnog momenta $l = l_{max}$. Viši parcijalni valovi, ponekad nisu određeni iz podataka, nego su uzeti iz teorijskih predviđanja.
- Energijski ovisne i neovisne analize parcijalnih valova. U energijski ovisnim analizama ovisnost o energiji svih parcijalnih valova je izražena preko parametrizacije, a parametri se određuju istovremeno fitom na sve podatke u energijskom intervalu koji se posmatra. U energijski neovisnim analizama parcijalnih valova, parcijalni valovi se određuju na svakoj energiji nezavisno.

4.1. Prve analize

Pioniri na polju proučavanja πN sistema jesu SACLAY i CERN grupe koje u periodu 1965-1973 među prvima daju svoje analize parcijalnih valova. Iako rezultati ovih analiza nisu korišteni u našim razmatranjima bitno ih je spomenuti kao analize koje su prethodile danas poznatijim analizama parcijalnih valova.

4.1.1. SACLAY analiza parcijalnih valova

SACLAY metod počinje pripremom relativno koherentnog skupa od oko 6000 eksperimentalnih podataka. Da bi se dobila glatka energijska ovisnost eksperimentalnih podataka, oni su po potrebi renormalizirani za svaku energiju. Legendre-ov razvoj je korišten za prametrizaciju $d\sigma/d\Omega$ i polarizaciju P kao i za interpolaciju na 43 odabrane vrijednosti energije. Eksperimentalne vrijednosti opisane su u ovoj analizi sa ukupno 13 parcijalnih valova ($l \leq 6$), dok su doprinosi viših parcijalnih valova zanemareni. Na nižim energijama opis eksperimentalnih podataka izvršen je sa manjim brojem parcijalnih valova. Glatka rješenja za parcijalne valove dobivena su takozvanom metodom najkraćeg puta (Shortest Path).

Kao dio ulaznih podataka korištene su disperzione relacije pri konstantnoj vrijednosti kvadrata prenesenog impulsa (Forward Dispersion Relations - FDR) za amplitudu $C_{\pm}(s, 0)$. U svrhu testiranja suglasnosti dobivenih parcijalnih valova sa postuliranim Mandelstamovom hipotezom, računata su FDR za amplitude B_{\pm} , pri čemu je računata i πN konstanta vezanja f^2 .

4.1.2. CERN analiza

CERN analiza koristi značajno veći broj podataka od SACLAY analize, gotovo 12000 podataka na 84 energije. Metoda započinje slučajnim odabirom, koji vodi do velikog broja rješenja na svakoj energiji, 30 ili više na višim energijama. Zatim se koristi metod najkraćeg puta da se povežu rješenja na različitim energijama.

Ovakva analiza faznih pomaka, proistekla iz pomenutog procesa, još uvijek nije pogodna za određivanje rezonantnih parametara. Kao dodatno ograničenje korištene su disperzione relacije za parcijalne valove (Partial Wave Dispersion Relations - PWDR) čime se nameću analitička svojstva parcijalnih valova koja proističu iz Mandelstamove hipoteze. Nažalost, greške različitih parcijalnih valova su jako korelirane, što kao posljedicu ima to dobiveni parcijalni valovi daju neočekivane rezultate u odnosu na eksperiment.

CERN grupa je dala dva rješenja:

1. "CERN TH" koje zadovoljava disperzione relacije za parcijalne valove, ali ne daje zadovoljavajući opis eksperimentalnih podataka.
2. "CERN EXP" koje je dobiveno iz fita na eksperimentalne podatke i fita na "teorijske" podatke koji su dobiveni iz "CERN TH" rješenja.

4. Metode analiza parcijalnih valova i modeli

Razlika između ova dva rješenja je tehničke prirode i nema nikakve veze sa ispunjavanjem uslova analitičnosti.

Rezultati CERN i SACLAY grupa za parametre nukleonskih rezonanci pokazuju značajno slaganje.

4.2. Karlsruhe-Helsinki analiza KH80

Glavna razlika između Karlsruhe-Helsinki i ostalih analiza jeste da je kao uslov uključena analitičnost amplituda raspršenja pri konstantnoj vrijednosti kvadrata prenesenog impulsa (Fixed- t Dispersion Relations - FTDR). Jednodimenzione disperzione relacije duž linija za $t = const$ u Mandelstamovm diagramu, imaju dvije prednosti u odnosu na ostale disperzione relacije:

1. zbog $s - u$ unakrsne simetrije, ne postoji nepoznati lijevi rez,
2. dostupni su eksperimentalni podaci u velikom intervalu impulsa u laboratorijskom sistemu do 200 GeV/c za vrijednosti varijable t u intervalu $0 \geq t \geq -1 \text{ GeV}^2$. Nedostatak je da se za $t < 0$ disperzijski integral mora računati u nefizikalnoj oblasti, između praga $s = (m + \mu)^2$ i tačke gdje se presjecaju linija $t = const$ i backward hiperbola. Međutim neodređenost je veoma mala sve dok razvoj parcijalnih valova za imaginarne dijelove invarijantnih amplituda A i B konvergira: a to je za vrijednost $t \geq -1 \text{ GeV}^2$.

Pri analizi amplituda raspršenja i analizi parcijalnih valova koriste se tzv hadronske vrijednosti za eksperimentalne podatke. Ove vrijednosti se dobiju kada se iz eksperimentalnih vrijednosti uklone doprinosi elektromagnetskih interakcija. Ti doprinosi su izraženi na niskim energijama i za male vrijednosti uglova raspršenja. Za više vrijednosti momenta impulsa doprinos elektromagnetskih interakcija opisan je samo sa jednofotonskom izmjenom.

Važan dio inputa u KH analizi parcijalnih valova su vrijednosti C^\pm amplituda pri $t = 0$ (Forward Amplitudes). Njihov imaginarni dio dobija se iz eksperimentalnih vrijednosti za totalne udarne presjeke $\pi^\pm p$ a realni primjenom FDR. Analiza se sastoji iz tri faze, u kojima se vrše iteracije sve dok se ne postigne da amplitude odgovaraju podacima i disperzionim relacijama za fiksirane varijable t i ugla θ u sistemu centra masa. U tim fazama, podaci su pomjerani na odabrane vrijednosti od s , t i θ , koristeći postojeća iteraciona rješenja za račun korekcije. Neki podaci su izbačeni jer je potrebnii pomak impulsa prevelik.

4. Metode analiza parcijanih valova i modeli

Kao i obično kod analize faznih pomaka, potrebno je izvršiti korekciju normalizacije dijela udarnih presjeka kako bi se osigurala glatka ekstrapolacija na ulazne podatke i kako bi se izbjegli problemi sa uslovima analitičnosti, unitarnosti i izospina.

U nastavku dajemo kratak opis svake od gore pomenutih faza.

Analiza za stalnu vrijednost kvadrata prenesnog impulsa

U prvoj fazi se koristi Pietarinenov razvoj invarijantnih amplituda po funkcijama koje imaju korektna analitička svojstva. U tu svrhu se izvrši grupiranje podataka (data bining) za unaprijed zadanu vrijednost varijable t . Koeficijenti u Pietarinenovom razvoju određuju se fitom na tako grupirane podatke.

Analiza za fiksiranu vrijednost varijable t je provedena za 40 vrijednosti varijable t u rasponu $0 > t > -1 \text{ GeV}^2$, vodeći računa o preklapanju s i u kanalnih rezova za $t < 4m\mu$. Za $t > -4m\mu$ razvoj je dat sa

$$C^\pm(\nu, t) = C_N^\pm(\nu, t) + H^\pm(Z, t) \sum_{m=0}^M c_m^\pm Z^m,$$

$$B^\pm(\nu, t) = B_N^\pm(\nu, t) + G^\pm(Z, t) \sum_{m=0}^M b_m^\pm Z^m.$$

gdje se nukleonski polovi razmatraju posebno. Faktor Z je konformno preslikavanje kompleksne ravnine u unitarni krug. Faktori ispred suma opisuju asimptotska ponašanja amplituda raspršenja pri velikim energijama.

Koeficijenti razvoja određuju se minimiziranjem χ^2 koji se sastoji od tri dijela:

$$\chi^2 = \chi_{data}^2 + \chi_{p.w.}^2 + \sum_{n=0}^N (n+1)^3 \{ \lambda_1 (c_n^+)^2 + \lambda_2 (c_n^-)^2 + \lambda_3 (b_n^+)^2 + \lambda_4 (b_n^-)^2 \}.$$

c_n^+ i slični, su koeficijenti koji pripadaju invarijantnim amplitudama C^\pm , B^\pm , a λ_i su težinski faktori koji su obabrani tako da se odabere optimalan doprinos funkcije koja testira konvergenciju Pietarinenovog razvoja (Convergence test function). χ_{data}^2 dolazi od odstupanja fita od eksperimentalnih podataka a $\chi_{p.w.}^2$ dolazi od odstupanja fita od amplituda dobivenih iz fixed- s analize. Treći član je kaznena funkcija (penalty function) koja smanjuje velike vrijednosti koeficijenata viših redova u razvoju.

4. Metode analiza parcijalnih valova i modeli

Analiza za fiksiranu vrijednost varijable θ

Kako se fixed- t ograničenje može primjeniti samo za $0 \geq t \gtrsim -1 \text{ GeV}^2$ potrebno je uvesti i drugi uslov analitičnosti kako bi se njime pokrili dijelovi za velike uglove raspršenja srednje i više energije. To se postiže korištenjem analitičnosti amplitude raspršenja po uglu raspršenja u sistemu centra masa. Input se pripremi na način sličan onom pri zadanoj vrijednosti varijable t . U analizi parcijalnih valova KH80 disperzione relacije pri stalnoj vrijednosti ugla raspršenja u sistemu centra masa računane su za ukupno 20 različitih vrijednosti ugla raspršenja.

Disperzione relacije za fiksiranu vrijednost ugla u sistemu centra masa se obično posmatraju u q^2 ravni. U KH analizi, doprinos lijevog reza je opisan razvojem, zbog toga što izračunavanje njegovog bližeg dijela još uvijek nije dostupno. Disperzioni integral u ovom području je računat iz faznih pomaka na niskim energijama. Drugi razvoj je korišten na srednjim i višim energijama. Disperzione relacije za ugao raspršenja $\theta = 180^\circ$ (backward dispersion relations) su tretirane u zasebnoj analizi uzimajući u obzir poznavanje bližeg dijela lijevog reza.

Razvoj je napravljen za kombinaciju invarijantnih amplituda, koje imaju jednostavna analitička svojstva i jednostavnu vezu sa podacima. Ponovo, korišten je Pietarinenov razvoj.

Analiza za fiksiranu vrijednost varijable s

U ovoj fazi, koja ustvari jeste analiza parcijalnih valova, uzimajući u obzir uslov unitarnosti, parcijalni valovi se fitaju na podatke i na forward amplitude dobivene iz totalnog udarnog presjeka i disperzionih relacija. Također, parcijalni valovi su simultano fitani na fixed- t i fixed- θ amplitude.

Ova analiza u stvari je energijski neovisna analiza parcijalnih valova. Eksperimentalni podaci grupirani su na određene vrijednosti energije. U KH80 analizi parcijalnih valova podaci su grupirani na ukupno 88 energija za vrijednost impulsa $20 \text{ MeV}/c \leq k \leq 10 \text{ GeV}/c$. Analiza se nastavlja tako što se vrši nekoliko iteracija svih analiza zajedno, dok se ne dobije stabilno rješenje.

4.3. Carnegie-Melon-Berkeley analiza (CMU-LBL79)

CMU-LBL analiza pokriva impulse u opsegu u kome su dostupni precizni podaci za sve uglove i za sve tri reakcije. Interval CMU-LBL79 verzije je od $0.43 \text{ GeV}/c \leq k \leq 2.0 \text{ GeV}/c$. Rezultati do $2.5 \text{ GeV}/c$ objavljeni su u analizi [6]. Posebna pažnja u CMU-LBL analizi posvećena je određivanju nukleonskih rezonanci.

Analiza se sastoji od četiri faze:

Amalgamacija podataka

Kao priprema za energijski neovisnu analizu parcijalnih valova, eksperimentalni podaci su grupirani na 35 vrijednosti impulsa. Izvršena je takozvana amalgamacija eksperimentalnih podataka čime su dobivene vrijednosti koje su glatke kao funkcija energije. U procesu amalgamacije dana je i procjena grešaka ovako dobivenih podataka.

Cjelokupni intervali impulsa i ugla u sistemu centra masa su podijeljeni u snopove od oko $50 \text{ MeV}/c$ i 3° respektivno. Počevši od originalnih podataka, pravi se glatka, ovisna o impulsu i uglu, interpolacijska ravan. Rezultat ovog postupka je skup podataka za 35 vrijednosti impulsa k i za 61 vrijednost ugla raspršenja u sistemu centra masa θ .

Ovi podaci se statistički kombiniraju, uzimajući u obzir sve vrste grešaka i efekte na pragu raspršenja. Na ovaj način je izračunata matrica grešaka a statističke greške su odvojene od ukupne greške koja potiče od greške ugaono ovisne normalizacije i od greške kalibracije momenta.

Niti jedna analiza prije i poslije CMU-LBL79 nije tako sofisticirano prišla pripremi eksperimentalnih podataka prije početka same analize parcijalnih valova. Nažalost, amalgamirane baze podataka su izgubljene, a niko poslije toga nije bio spreman ponoviti taj proces.

Analiza parcijalnih valova

Za svaki impuls, amalgamirani podaci se analiziraju preko parcijalnih valova, uzimajući u obzir teorijske informacije o singularitetima u $z = \cos \theta$ ravni. Rješenja su višeznačna zbog diskretne i kontinualne višeznačnosti.

4. Metode analiza parcijalnih valova i modeli

Realni i imaginarni dio svake invarijantne amplitude se zasebno parametrizira preko sume Bornovog člana i polinoma, čiji koeficijenti su promjenljivi parametri koje treba odrediti iz fita. Samo fit navedene parametrizacije na podatke ne osigurava unitarnost dobivenih parcijalnih valova. Razvijen je metod koji omogućava slobodno variranje nižih parcijalnih valova uz jedini uslov unitarnosti. Unitarnost viših parcijalnih valova je postignuta uvođenjem kaznene funkcije na χ^2 .

Uslov analitičnosti

U ovoj analizi je uveden uslov da su invarijantne amplitude analitičke duž pet unakrsno simetričnih hiperbola u Mandelstamovoj ravnini, koje prolaze kroz prag s - i u - kanala. Kao dodatni uslov, FDR za C^\pm -amplitude su korištene kao dio inputa. Jedinostveno rješenje se dobije iterativnim postupkom, u kojem se rezultati iz disperzionih relacija duž hiperbola koristi kao input u analizi faznih pomaka. Ispostavlja se da je 5 hiperbola sasvim dovoljno za prevazilaženje svih diskretnih višeznačnosti.

Određivanje rezonantnih parametara

Rezonantni parametri se određuju fitanjem parcijalnih valova odgovarajućom parametrizacijom. U verziji iz 1976 koristi se parametrizacija opisana relacijama (2.3.7) i (2.7.1). Mnogo više truda je uloženo u verziji iz 1979 godine, gdje su fitani parcijalni valovi korištenjem više-kanalne rezonantne šeme. Ovakav pristup je sličan K-matričnom formalizmu, ali je u njemu lakše ugraditi korektna analitička svojstva.

4.4. GWU/VPI analiza

Analizu GWU/VPI pokrenula je grupa sa Virginia Polytechnic Institute - VPI a kasnije Univerziteta George Washington (George Washington University - GWU). To je tzv energijski ovisna analiza parcijalnih valova [3, 24]. U našim proračunima ćemo koristiti njihovo rješenje koje nosi naziv WI08.

Energijski ovisno rješenje se parametrizira sa Chew-Mandelstamovim K-matričnim formalizmom vezanih kanala:

$$T_n = [\rho^{1/2} K (1 - CK)^{-1} \rho^{1/2}]_{11},$$

4. Metode analiza parcijalnih valova i modeli

gdje je T_n elastični T -matrični element, K realna simetrična 2×2 matrica, a C je 2×2 dijagonalna matrica čiji su elementi dobiveni integraljenjem fazno prostornih faktora (phase space factor) preko odgovarajućih unitarnih rezova. Fazno prostorni faktor je $\rho = \text{Im } C$, gdje je C izabran na način da je:

$$C_l = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{x^{l+\frac{1}{2}}}{x-z} dx,$$

gdje je

$$z = \frac{W - W_t}{W - W_z}.$$

U zadnjoj relaciji korištene su slijedeće veličine: W predstavlja energiju u sistemu centra masa, l je orbitalni angularni moment, W_t je energija praga (threshold energy) i W_z tačka subtrakcije.

Energija praga W_t uzima različite vrijednosti za različite kanale. Tako je $W_t = M + \mu$ za elastični kanal, a $W_t = M_\Delta + \mu$, za inelastični kanal¹.

Također se za različite kanale uzimaju različite tačke subtrakcije. Za elastični kanal tačka subtrakcije je $W_z = M + \mu - 150$ MeV, dok je za inelastični kanal $W_z = M + 2\mu$.

Kao inelastični kanal izabrano je najniže $\pi\Delta$ orbitalno stanje sa kojim se elastični π^-p parcijalni val može vezivati. Iznimka je S_{11} stanje koje se vezuje sa drugim inelastičnim S -valom η produkcijskog kanala.

Elastična T -matrica zadovoljava uslov unitarnosti iznad praga pionske produkcije, koji se nalazi na oko $W = 1,13$ GeV. Da bi se postigla unitarnost i ispod praga, korišten je realni dio efektivne K matrice

$$K_{eff} = \text{Re} \left[\frac{T_n}{1 + i T_n} \right].$$

Uz pomoć efektivne K matrice može se dobiti unitarna elastična T matrica oblika

$$T_{elastično} = \frac{K_{eff}}{1 - i K_{eff}}.$$

Matrični elementi K -matrice se parametriziraju kao polinomi po energiji u sistemu centra masa W , a eksplicitno mogu sadržavati i članove koji sadržavaju polove.

Ovakvim načinom parametrizacije je omogućeno da se izvrši analitičko produljenje parcijalnih valova u kompleksnu energijsku ravninu i da se odrede kompleksni polovi parcijalnih valova.

¹ M = masa nukleona, μ = masa piona M_Δ = masa Δ

4.5. GIESSEN model

U Giessenskom modelu [29] rješava se Bethe-Salpeterova jednačina (BSJ) za amplitude raspršenja različitih reakcija koje označavamo sa M :

$$M(p', p; \sqrt{s}) = V(p', p; \sqrt{s}) + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} V(p', p; \sqrt{s}) G_{BS}(q; \sqrt{s}) M(q, p; \sqrt{s}),$$

gdje su $p(k)$ i $p'(k')$ ulazni i izlazni barionski (mezonski) četvero vektori impulsa. Potencijal interakcije je određen uključivanjem s -, u -, i t -kanalnih doprinosa opisanih efektivnim Lagranžijanom. Nakon što se izvrši dekompozicija amplitude M po parcijalnim valovima i projekcija parcijalnih valova, a K -matirca uvede preko realnog dijela Bethe-Salpeterovog propagatora G_{BS} , Bethe-Salpeterova jednačina se može izraziti u jednostavnijem obliku:

$$T_{fi}^{J\pm, I} = \left[\frac{K^{J\pm, I}}{1 - i K^{J\pm, I}} \right]_{fi},$$

gdje je $J\pm, I$ ukupni spin, parnost i izospin početnog i krajnjeg stanja f i i .

U ovom modelu istovremeno se promatraju procesi πN i γN raspršenja u kojima se u izlaznom kanalu dobivaju πN , $\pi\pi N$, ηN , $K\Lambda$, γN , $K\Sigma$ i ωN te se opisuju istim efektivnim Lagranžijanom.

4.6. EBAC model

Detaljniji uvid u metodologiju i formalizam ovog metoda dan je u [33]. U ovom dijelu će biti prezentirane samo osnovne činjenice na kojima počiva ovaj model.

Slično kao kod ranijih radova koji opisuju modele sa mezonskom izmjenom kod pion-nukleon raspršenja [34, 35], i ovaj model počinje sa skupom Lagranžijana koji opisuju interakciju između mezona ($M = \gamma, \pi, \eta, \rho, \omega, \sigma, \dots$) i bariona ($B = N, \Delta, N^*, \dots$). Primjenjujući metod unitarne transformacije, detaljno opisan u [36, 37], iz promatranog Lagranžijana može se odrediti efektivni Hamiltonijan, koji se može napisati u slijedećoj formi:

$$H_{eff} = H_0 + \Gamma_V + v_{22} + h_{\pi\pi N}, \quad (4.6.1)$$

4. Metode analiza parcijanih valova i modeli

gdje je² $H_0 = \sum_{\alpha} \sqrt{m_{\alpha}^2 + \vec{p}_{\alpha}^2}$, i gdje su:

$$\Gamma_V = \left\{ \sum_{N^*} \left(\sum_{MB} \Gamma_{N^* \rightarrow MB} \right) + \sum_{M^*} h_{M^* \rightarrow \pi\pi} \right\} + \{c.c.\}, \quad (4.6.2)$$

$$v_{22} = \sum_{MB, M'B'} v_{MB, M'B'} + v_{\pi\pi}, \quad (4.6.3)$$

$$h_{\pi\pi N} = \sum_{N^*} \Gamma_{N^* \rightarrow \pi\pi N} + \sum_{MB} [(v_{MB, \pi\pi N}) + (c.c.)] + v_{\pi\pi N, \pi\pi N}. \quad (4.6.4)$$

U gornjim jednačinama $\{c.c.\}$ označava konjugovano kompleksne veličine članova koji se nalaze sa lijeve strane jednačine, a $MB = \gamma N, \pi N, \eta N, \pi\Delta, \rho N, \sigma N$ predstavljaju promatrana mezon-barion stanja. Rezonanca, povezana sa golim barionskim stanjem N^* , inducirana je interakcijama $\Gamma_{N^* \rightarrow \pi\pi N}$ i $\Gamma_{N^* \rightarrow MB}$. Na sličan način i gola mezonska stanja $M^* = \rho, \sigma$ mogu se razviti u rezonancu preko interakcije opisane članom $h_{M^* \rightarrow \pi\pi}$ u efektivnom hamiltonijanu. Mase $M_{N^*}^0$ i $m_{M^*}^0$ golih stanja N^* i M^* su parametri modela koji se određuju fitanjem na podatke πN - i $\pi\pi$ - raspršenja. Njihove vrijednosti se razlikuju od onih empirijski određenih vrijednosti položaja rezonancija zbog masenih pomaka (mass shifts) nastalih zbog vezivanja golih stanja sa stanjima raspršenja. Član v_{22} sadrži nerezonantnu interakciju, opisanu članom $v_{MB, M'B'}$ kao i interakciju opisanu članom $v_{\pi\pi}$. Nerezonantna interakcija, koja uključuje $\pi\pi N$ stanja, nalazi se u članu $h_{\pi\pi N}$ efektivnog hamiltonijana.

Polazeći od gore navedenog Hamiltonijana, može se odrediti matrica raspršenja S , preko standardne tehnike projekcije operatora [33].

$$S_{ab}(W) = \delta_{ab} - (2\pi)iT_{ab}(W),$$

gdje je W energija u sistemu centra masa, a matrica raspršenja T je definirana preko:

$$T_{ab}(W) = \langle a | T(W) | b \rangle,$$

sa

$$T(W) = V + V \frac{1}{W - H_0 + i\epsilon} T(E).$$

Na ovakav načine dobivene jednačine raspršenja zadovoljavaju uslov unitarnosti.

² m_{α} označava masu čestice α

4. Metode analiza parcijanih valova i modeli

Potpuno određivanje parametara modela određenog jednačinama (4.6.1-4.6.4) zahtijeva fit na sve podatke πN i γN reakcija, sve do $W \leq 2$ GeV. Procedura fita se može opisati u tri koraka:

1. U prvom koraku se određuju oni parametri koji su povezani sa dijelom Hamiltonijana koji opisuje hadronske interakcije.
2. U drugom koraku potrebno je odrediti opseg parametara interakcija $\Gamma_{N^* \rightarrow MB}$ i $v_{MB, M'B'}$, što se postiže fitanjem na podatke πN raspršenja. Ovim se obezbjeđuju početni parametri kako bi se mogli fitati, kako podaci iz πN raspršenja tako i podaci iz $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ reakcije.
3. U trećem koraku ponovo se traže parametri koji su povezani sa interakcijama $\Gamma_{N^* \rightarrow MB}$ i $v_{MB, M'B'}$, te se određuju parametri vezani za interakciju $h_{\pi\pi N}$.

4.7. Dubna-Mainz-Taipei (DMT) model

U ovom dijelu biće riječi o dva modela koja kao rezultat daju četiri rezonantna stanja za S_{11} parcijalni val. Ti modeli su:

1. Model sa mezonskom izmjenom MEX [38];
2. Dinamički model pionske fotoprodukcije DMT model [39, 40, 41].

MEX model se može opisati kao trodimenzionalna redukcijaska šema Bethe-Salpeterove jednačine za Lagranžijan koji uključuje π , N , Δ , ρ i σ polja. Detaljniji opis formalizma se može vidjeti u [38]. U ovom radu biće prezentirana poopćena šema u kojoj se vidi način proširivanja modela na slučaj vezanih π , η i $\pi\pi$ kanala.

U MEX modelu T -matrica je predstavljena u slijedećem obliku:

$$T_{ij}(W) = v_{ij}(W) + \sum_k v_{ik}(W)g_k(W)t_{kj}(W),$$

gdje i i j označavaju π ili η kanal, a W je ukupna energija u sistemu centra masa. Gornja jednačina predstavlja sistem trodimenzionalnih integralnih jednačina dobivenih iz četverodimenzionalne Bethe-Salpeterove jednačine, korištenjem trodimenzionalne redukcijске šeme. g_k je relativistički propagator za kN sistem, gdje je $k = \pi$ ili η .

4. Metode analiza parcijanih valova i modeli

Potencijal v_{ij} je predstavljen kao suma nerezonantnog (pozadinskog) i rezonantnog člana³:

$$v_{ij}(W) = v_{ij}^B(W) + v_{ij}^R(W)$$

Doprinosi golih rezonancija se mogu izraziti na slijedeći način:

$$v_{ij}^R(q, q'; W) = \frac{f_i(\tilde{\Lambda}_i, q; W) g_i^0 g_j^0 f_i(\tilde{\Lambda}_j, q'; W)}{W - M_R^{(0)} + i\frac{1}{2}\Gamma_{\pi\pi}^R(W)},$$

gdje je $q(q')$ impulsi od $\pi(\eta)$ u početnom i konačnom stanju. $g_{i(j)}^0$ je propagator gole rezonance, M_R^0 je gola masa, f_i je kovarijantni form faktor a $\tilde{\Lambda}_i$ je parametar odsijecanja (cut-off parameter) za česticu i .

Detaljniji opis formalizma za DMT model dan je u [41]. Ovdje će biti riječi samo o osnovnim karakteristikama DMT modela. Rezultujuća T -matrica je data u obliku

$$T_{\gamma\pi}(W) = T_{\gamma\pi}^B(W) + T_{\gamma\pi}^R(W),$$

gdje je

$$T_{\gamma\pi}^B(W) = v_{\gamma\pi}^B + \sum_k v_{\gamma k}^B g_k(W) T_{k\pi}(W), \quad T_{\gamma\pi}^R(W) = v_{\gamma\pi}^R + \sum_k v_{\gamma k}^R g_k(W) T_{k\pi}(W).$$

Parametri i konstante vezanja određuju se analizom nerezonantnih multipola. Standardni fizikalni multipoli u kanalu $\alpha = \{l, j, I\}$ se izražavaju preko relacije:

$$T_{\gamma\pi}^{B,\alpha} = v_{\gamma\pi}^{B,\alpha}(q, k) [1 + i q F_{\pi\pi}^{(\alpha)}(q, q; W)] - \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{q'^2 dq'}{\mathcal{M}(q')} \frac{F_{\pi\pi}^{(\alpha)}(q, q'; W) v_{\gamma\pi}^{B,\alpha}(q', k)}{W - W_{\pi N}(q')},$$

gdje $F_{\pi\pi}^{(\alpha)}$ predstavlja amplitudu raspršenja a $\mathcal{M}(q)$ relativističku reduciranu masu.

Rezonantni doprinos $T_{\gamma\pi}^{R,\alpha}(W)$ se opisuje Breit-Wignerovom formom, na slijedeći način:

$$T_{\gamma\pi}^{B,\alpha}(W) = \bar{\mathcal{A}}_\alpha^R \frac{f_{\gamma R}(W) \Gamma_R M_R f_{\pi R}(W)}{M_R^2 - W^2 - i M_R \Gamma_R},$$

gdje je $f_{\pi R}$ uobičajeni Breit-Wignerov faktor, M_R je masa a Γ_R je širina rezonance. $\bar{\mathcal{A}}_\alpha^R$ je elektromagnetni form faktor.

³Ovaj član ustvari predstavlja doprinose golih rezonancija.

4.8. Jülich model

Jülich model je unitaran i analitičan višekanalni model baziran na izmjeni mezona. Ovaj model je razvijen u proteklih nekoliko godina i detalji ovog modela dani su u [48], a ovdje će biti govora o njegovim osnovnim idejama. Rješenja jednačina raspršenja vezanih kanala u JLS bazama data su sa:

$$\begin{aligned} \langle L'S'k' | T_{\mu\nu}^{IJ} | LSk \rangle &= \langle L'S'k' | V_{\mu\nu}^{IJ} | LSk \rangle + \sum_{\gamma L''S''} \int_0^{\infty} k''^2 dk'' \langle L'S'k' | V_{\mu\gamma}^{IJ} | L''S''k'' \rangle \\ &\times \frac{1}{Z - E_{\gamma}(k'') + i\epsilon} \langle L''S''k'' | T_{\gamma\nu}^{IJ} | LSk \rangle, \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

gdje je $J(L)$ ukupni angularni(orbitalni) impuls, $S(I)$ ukupni spin(izospin), $k(k', k'')$ upadni(izlazni, međustanje) impuls, i μ, ν, γ su indeksi koji određuju kanal. Član koji sadrži integral uključuje sumu preko svih mogućih kvantnih brojeva međustanja i kanala uključenih u ovom modelu. Integral iz relacije (4.8.1) se može šematski prikazati u obliku proizvoda tri veličine VGT gdje G predstavlja mezon-barion propagator međustanja za kanale sa stabilnim cesticama πN i ηN , koji je u jednačini (4.8.1) prikazan u obliku razlomka. Za kanale sa kvazicesticama σN , ρN i $\pi\Delta$ propagator je neznatno komplikovaniji. Potencijal V je dobiven preko Lagranžijana kojem su dodani članovi kojima se uključuju $\Delta, \omega, \eta, a_0$ mezoni. Matrica raspršenja se zatim piše u obliku $T = T^P + T^{NP}$, gdje je T^P dio matrice raspršenja koji sadrži doprinose polova, a T^{NP} dio koji se odnosi na ostale doprinose. Sve u svemu, Jülich model je izveden sa teorijskom podlogom zasnovanom na Lagranžijanu a analitičnost je zadovoljena konstrukcijom Lagranžijana.

5. Osnovne odlike zagrebačke metode vezanih kanala

Zagrebački model ekstrakcije položaja polova parcijalnih valova πN raspršenja zas-niva se na CMB modelu. CMB model je u principu izobarni model sa N vezanih kanala, analitičan i unitaran, gdje je pretpostavljeno da je T matrica u datom kanalu suma doprinosa određenog broja međustanja. Grupiranje kanalnih asimptotskih stanja sa ovim međustanjima određuje imaginarni dio kanalne funkcije, a efektivno je predstavljeno razdvojenim funkcijama. Realni dio kanalne funkcije određuje se preko disperzionih relacija koje osiguravaju analitičnost. Pored poznatih rezonantnih doprinosa, uključeni su i pozadinski doprinosi uključivanjem dodatnih članova u obliku polova ispod πN praga. Kako je CMB model analitičan, određivanje pozicija polova je svedeno na ekstrapolaciju disperzijskog integrala za kanalni propagator sa realne osi na kompletnu kompleksnu energijsku ravninu, što je dobro definiran proces. U praksi koristimo mnogo stabilniji i numerički brži metod analitičkog produljenja baziranom na Pietarinenovom razvoju [42] kako bi ekstrapolirali realne vrijednosti kanalnog propagatora u energijsku kompleksnu ravninu.

5.1. Formalizam

Zagrebačka analiza parcijalnih valova opisana u referenci [43] bazira se na manifestno unitarnom višekanalnom CMB pristupu opisanom u [44]. Jedna od najvažnijih osobina ovog pristupa je analitičnost parcijalnih valova u odnosu na Mandelstamovu s varijablu. U svakoj diskusiji o polovima parcijalnih valova, analitičnost igra najvažniju ulogu jer se polovi nalaze u kompleksnoj ravnini, daleko od fizičkog područja, a mogućnost naših mjerenja je sužena samo na realnu energijsku osu. Bilo bi nemoguće bilo šta saznati o prirodi singulariteta parcijalnih valova ukoliko oni ne bi bili analitični. Prednost CMB modela nije samo u tome što možemo računati pozicije polova nego i u tome što možemo odrediti i rezonance.

5. Osnovne odlike zagrebačke metode vezanih kanala

U ovom pristupu postojanje rezonance je povezano sa polom parcijalnog vala u nefizikalnoj oblasti.

Koristimo višekanalnu T matricu koja je povezana sa S -matricom na slijedeći način:

$$S(s) = I + 2iT(s). \quad (5.1.1)$$

U CMB modelu, T matrični element je dat sa:

$$T_{ab}^{JL}(s) = \sum_{i,j=1}^{N^{JL}} f_a^{JL}(s) \sqrt{\rho_a(s)} \gamma_{ai}^{JL} G_{ij}^{JL}(s) \gamma_{jb}^{JL} \sqrt{\rho_b(s)} f_b^{JL}(s), \quad (5.1.2)$$

gdje a (b) predstavlja izlazni (ulazni) kanal, a N^{JL} je broj polova. U našoj analizi $a, b = \pi, \eta, \pi^2$. Ulazni i izlazni kanali b (a) se grupiraju preko međustanja ili rezonancija označenih indeksima i i j . Faktor γ_{ia} je energijski neovisan parametar koji se pridružuje verteksu između kanala a i čestice međustanja i , a određuje se procedurom fita. Također na svakom ulaznom odnosno izlaznom verteksu pojavljuju se i form faktor

$$f_a^{JL}(s) = \left(\frac{q_a}{Q_{1a} + \sqrt{Q_{2a} + q_a^2}} \right)^L, \quad (5.1.3)$$

i faktor faznog prostora (phase space factor)

$$\rho_a(s) = \frac{q_a(s)}{\sqrt{s}}, \quad (5.1.4)$$

gdje je $s = W^2$ Mandelstamova varijabla, a $q_a(s)$ impuls mezona u sistemu centra masa za bilo koji od tri kanal, dat sa

$$q_a(s) = \frac{\sqrt{(s - (m + m_a)^2)(s - (m - m_a)^2)}}{2\sqrt{s}}. \quad (5.1.5)$$

L je angularni moment u kanalu a , Q_{1a} , Q_{2a} su konstante. Faktor $f_a^{JL}(s)$ opisuje ponašanje na pragu desnog reza, te proizvodi lijevi rez grananja (left hand branch cut). Parametri Q_{1a} i Q_{2a} se biraju tako da određuju tačku grananja i jačinu lijevog reza grananja. U našoj analizi oni su određeni masom mezona kanala a .

G_{ij}^{JL} je obučeni propagator parcijalnog vala JL i čestica i i j , i može se izraziti preko članova dijagonalnog golog propagatora i matrice vlastite energije Σ_{kl}^{JL} koristeći Dysonovu jednačinu:

$$G_{ij}^{JL}(s) = G_{ij}^{0JL}(s) + \sum_{k,l=1}^{N^{JL}} G_{ik}^{0JL}(s) \Sigma_{kl}^{JL}(s) G_{lj}^{JL}(s). \quad (5.1.6)$$

5. Osnovne odlike zagrebačke metode vezanih kanala

Goli propagator

$$G_{ij}^{0JL}(s) = \frac{e_i \delta_{ij}}{s_i - s} \quad (5.1.7)$$

ima pol za realnu vrijednost s_i . Znak $e_i = \pm 1$ se bira na način da mora biti pozitivan za polove koji se nalaze iznad praga elastičnog kanala, koji ustvari predstavljaju rezonance. Ove polove zovemo "golim" polovima. Nerezonantna pozadina se opisuje meromorfnom funkcijom koja sadrži nekoliko članova oblika (5.1.7) sa položajem polova ispod πN praga. Pozitivan znak odgovara odbojnom a negativan privlačnom potencijalu. U principu broj polova je proizvoljan, ali u praktičnoj primjeni on nikada ne prelazi tri.

Σ_{kl}^{JL} je vlastita energija čestičnog propagatora:

$$\Sigma_{kl}^{JL}(s) = \sum_a \gamma_{ka}^{JL} \cdot \Phi_a^{JL} \cdot \gamma_{ia}^{JL}. \quad (5.1.8)$$

$\Phi_a^{JL}(s)$ je kanalni propagator koji se dobija u aproksimaciji koja svaki kanal tretira kao dvočestični kanal. Zahtjeva se da T_{ab}^{JL} ima u svim kanalima korektna svojstva unitarnosti i analitičnosti koja su u suglasnosti sa kvazi dvočestičnom aproksimacijom. Imaginarni dio od $\Phi_a^{JL}(s)$ je efektivni faktor faznog prostora za kanal a :

$$Im \Phi_a^{JL}(s) = [f_a^{JL}(s)]^2 \rho_a(s) \equiv F_a^{JL}(s). \quad (5.1.9)$$

Radi preglednosti uvodimo varijablu x koja će ubuduće označavati Mandelstamovu kompleksnu varijablu s , ali samo na realnoj osi.

U stvarnosti, kanalni propagator se računa samo na realnoj osi, i ovom formalizmu ima slijedeću formu:

$$Im \Phi(x) = \frac{[q(x)]^{2L+1}}{\sqrt{x} \left\{ Q_1 + \sqrt{Q_2^2 + [q(x)]^2} \right\}^{2L}}. \quad (5.1.10)$$

Realni dio od $\Phi_a^{JL}(s)$ se računa koristeći subtrahiranu disperzionu relaciju

$$Re \Phi(s) = \frac{s - x_0}{\pi} P \int_{x_a}^{\infty} \frac{Im \Phi(x') dx'}{(x' - s)(x' - x_0)}, \quad (5.1.11)$$

gdje je $x_a = (m + m_a)^2$.

5. Osnovne odlike zagrebačke metode vezanih kanala

Radi boljeg razumijevanja dajemo matricnu formu konačne T matrice definirane relacijom (4.6.2):

$$\hat{T}(s) = \sqrt{Im \hat{\Phi}(s)} \cdot \hat{\gamma}^T \cdot \frac{\hat{G}_0(s)}{I - [\hat{\gamma} \cdot \hat{\Phi}(s) \cdot \hat{\gamma}^T] \cdot \hat{G}_0(s)} \cdot \hat{\gamma} \cdot \sqrt{Im \hat{\Phi}(s)}. \quad (5.1.12)$$

Ekstrakcija polova se vrši traženjem vrijednosti kompleksne varijable s , numeričkim putem, za koju je

$$\det G(s) = \det [e_{ij} \delta_{ij} (s_i - s) - \Sigma_{ij}]^{-1} = \infty.$$

Ovako određen realni i imaginarni dio kompleksne varijable s smatramo položajem pola.

5.2. Ideja metode

U ovom radu predlažemo korištenje samo jedne metode koja se bazira na formalizmu sa vezanim kanalima, te njenom primjenom na podatke i amplitude parcijalnih valova dostupnih u svjetskoj literaturi, na način da se istovremeno analiziraju njihove analitičke strukture. Korištenje samo jedne metode ekstrakcije položaja polova iz objavljenih analiza parcijalnih valova ima sljedeće prednosti:

- Izbjegnute su ovisnosti o različitim modelima koji se koriste u pojedinačnim pristupima pri određivanju položaja polova
- Moguće je uspoređivati dobivene rezultate iako su oni dobiveni korištenjem parcijalnih valova iz različitih izvora.

Sve amplitude parcijalnih valova prihvaćamo samo kao dobru, energijski ovisnu reprezentaciju eksperimentalnih podataka te određujemo polove zagrebačkom metodom. Na ovaj način možemo izbjeći greške proizašle iz korištenja različitih analitičkih produljenja u različitim modelima. Jedine preostale greške posljedica su preciznosti samo zagrebačkog modela (vidjeti [32]). Dobivene polove uporedit ćemo sa polovima svake pojedinačne publikacije, te također dati određene zaključke o značajkama pojedinih metoda.

5.3. Baza podataka

Počinjemo sa kolekcijom podataka koji su u cijelosti dostupni iz literature [11, 24, 45] ili iz privatne komunikacije sa odgovarajućim autorima [28, 29, 46, 47, 48].

Analizirane su slijedeće analize parcijalnih valova:

- Krlsruhe-Helsinki (KH80) [11] - elastični $\pi N \rightarrow \pi N$;
Uticaj inelastičnog kanala u KH80 formalizmu opisan je preko FDR. Eksplicitno su fitani samo podaci iz elastičnog kanala. KH80 ne daje ni jedan inelastični kanal koji bi se mogao fitati. Međutim, kako bi se osigurala stabilnost rješenja u CMB formalizmu (pogledati [49]), potrebno je imati i podatke iz inelastičnog kanala. U ovom slučaju uzete su $\pi N \rightarrow \eta N$ WI08 amplitude koje dobro opisuju prihvaćene vrijednosti za ηN kanal na niskim energijama.
- VPI/GWU - elastični $\pi N \rightarrow \eta N$ i inelastični $\pi N \rightarrow \eta N$;
Koriste se Single Energy Solutions (GWU_SES) [45] i energijski ovisna rješenja (WI08) [24, 45].
- GIESSEN [29] - elastični $\pi N \rightarrow \eta N$ i inelastični $\pi N \rightarrow \eta N$.
- EBAC - Koristili smo dva skupa PW rješenja. Jednokanalno rješenje (πN -elastični) - EBAC07 [46] i dvokanalno rješenje (πN -elastični i $\pi N \rightarrow \eta N$) - EBAC08 [47] ali sa normaliziranim $\pi N \rightarrow \eta N$ u saradnji sa M. Döring i B. Diaz [50].
- JULICH [48] - elastični $\pi N \rightarrow \eta N$ i inelastični $\pi N \rightarrow \eta N$.
- Dubna - Mainz - Taipei (DMT) [27, 28] - elastični $\pi N \rightarrow \eta N$ i inelastični $\pi N \rightarrow \eta N$.

5.4. Procedura fita

Koristi se trokanalni CMB formalizam u kojem πN i ηN predstavljaju fizikalne kanale, dok je treći efektivni dvočestični kanal kojim se osigurava unitarnost. Počinje se sa minimalnim brojem golih polova čiji se broj zatim povećava sve dok se ne osigura da se kvalitet fita, koji se mjeri vrijednošću reduciranog χ^2 , više ne može poboljšati. Pored toga kao kriterij za povećanje broja golih polova bio je i vizualno slaganje krive fita sa cijelim skupom fitanih podataka. Kada na ovakav način

5. Osnovne odlike zagrebačke metode vezanih kanala

dođemo do maksimalnog broja golih polova tada možemo tvrditi da smo našli sve polove parcijalnog vala za dati skup podataka. Kako gore pomenuti kriterij nije previše strog moramo praviti razliku između dvije kategorije polova: oni koji se vide kao sigurno tačni polovi, te oni koji su konzistentni sa izabranim skupom podataka. Polovi čije dodavnje u proceduru fita značajno poboljšavaju reducirani χ^2 spadaju u prvu kategoriju dok polovi koji reducirani χ^2 poboljšavaju veoma malo ili nikako spadaju u drugu kategoriju polova.

6. Rezultati i Diskusija

Kako je ranije rečeno cilj ovog rada je da se koristi samo jedna metoda, Zagrebačka verzija CMB modela, kako bi se odredile pozicije polova iz svih svjetski relevantnih amplituda parcijalnih valova odnosno iz podataka za parcijalne valove. Kao testni slučaj uzet je S_{11} parcijalni val. Koristimo trokanalni model u kojem fitamo πN i ηN kanale dok treći $\pi^2 N$ kanal efektivno predstavlja sve ostale inelastične kanale i kojim se osigurava unitarnost.

Želimo da odredimo položaje polova iz svih relevantnih analiza parcijalnih valova, te da izvršimo analizu o broju polova koji su potrebni za odgovarajući parcijalni val. Također ćemo diskutirati o važnosti inelastičnog kanala.

6.1. Metodologija

Glavna odlike CMB modela jesu veoma dobra kontrola broja golih polova T -matrice, te što omogućuje jednostavno uključivanje dodatnih kanala i efektivnu analizu njihovih doprinosa.

Značaj inelastičnog kanala

Elastični πN kanal je eksperimentalno najbolje istražen kanal te većina informacija o energijski ovisnoj strukturi svih mogućih rješenja dolazi iz ovog kanala. Iz drugih kanala se mogu očekivati samo određene korekcije. Prema tome, najpouzdanije informacije, pri dobivanju krajnjih rezultata, daje elastični kanal.

Međutim uzimajući samo elastični kanal u proceduri fita postoji mogućnost da neka rezonantna stanja ostanu neotkrivena. Iz tog razloga se u proceduri fita mora uključiti što je više moguće kanala. U ovom radu korištena je slijedeća strategija:

1. Određivane su pozicije polova fitanjem samo elastičnog kanala.

6. Rezultati i Diskusija

2. Pozicije polova su zatim određivane istovremenim fitanjem πN elastičnog i $\pi N \rightarrow \eta N$ kanala, te su praćene promjene vrijednosti polova.

Problem sa kojim smo se suočavali prilikom fitanja jeste loša kvaliteta samog inelastičnog $\pi N \rightarrow \eta N$ kanala. Bez obzira na to prihvatili smo ona rješenja za koja su oba kanala dobro fitana uprkos lošoj kvaliteti ηN kanala.

Određivanje optimalnog broja polova

Broj polova u CMB formalizmu predstavlja početni parametar. Praktično to znači da je minimaln broj parametara tri, od kojih je $N_R = 1$ jedan rezonantni a dva pozadinska. Tada se broj rezonantnih parametara može povećavati, sve dok se ne postigne zadovoljavajući fit. Upravo na ovakav način vršimo procjenu o broju polova koje treba naš model. Broj polova potrebnih u modelu u većini slučajeva odgovara broju rezonantnih stanja. Prema tome, ono što se uspoređuje nije broj golih polova nego broj obučenih polova.

6.2. Fit

Prvo je fitan samo πN elastični kanal. Iz gore navedenih razmatranja vidi se da je prvo potrebno odrediti polove koji se vide analizom podataka u ovom kanalu, da bi se kasnije moglo vidjeti na koji način utiče uključivanje u analizu i ηN inelastičnog kanala.

6.2.1. Fit na podatke iz $\pi N \rightarrow \pi N$ kanala

Procedura određivanja polova započinje izborom broja golih polova u fizikalnom području i brojem kanala koji trebaju biti fitani. U ovom dijelu ćemo predstaviti rezultate dobivene fitom na samo elastični kanal sa uključena tri i četiri gola pola u fizikalnoj oblasti. Zamišljeno je da rezultati ovog fita budu referentne vrijednosti, kako bi se mogle vidjeti sve moguće promjene ukoliko u proceduru fita ubacimo i inelastični kanal.

Rezultati fita su dati u Tabeli 6.1. Kvalitet fita prikazan je na slikama 6.2.1 i 6.2.2. Sve dobivene položaje polova predstavljene su na slici 6.2.4.

6.2.2. Fit na podatke iz $\pi N \rightarrow \pi N$ i $\pi N \rightarrow \eta N$ kanala

Parcijalni valovi $\pi N \rightarrow \eta N$ određeni su analizom eksperimentalnih podataka od prije desetak godina. Sve analize parcijalnih valova, koje smo koristili u našoj metodi, osim KH80, daju vlastite rezultate za ovaj kanal kojeg smo koristili u slučaju fita sa dva kanala. Zbog nedostaka inputa za ηN kanal u KH80 analizi parcijalnih valova htjeli smo je izostaviti iz naših razmatranja, ali zbog značaja same analize to nije urađeno. Da bi bili dosljedni metodologiji i strategiji fita morali smo odabrati neki input za ηN kanal iz postojećih parcijalno valnih analiza. Odabran je input za ηN kanal iz WI08 analize od VPI/GWU analiza iz razloga što vjerujemo da input za taj kanal, za energije $s < 3\text{GeV}^2$, predstavlja veoma dobru numeričku reprezentaciju svih ostalih korištenih ηN kanala.

U ovom dijelu biće prezentirani rezultati dobiveni istovremenim fitom na $\pi N \rightarrow \pi N$ kanal i $\pi N \rightarrow \eta N$ kanal. Dobili smo dvije grupe rezultata: Prva grupa rezultata odnosi se na fit u kome su uključena tri gola pola u fizikalnoj oblasti, a druga grupa odnosi se na fit sa uključena četiri gola pola u fizikalnoj oblasti.

Rezultati dobiveni sa prethodno opisanom procedurom mogu se sada upoređivati sa rezultatima dobivenim fitom na jedan kanal. Detaljnija analiza dobivenih rezultata, kao i zaključci izvedeni iz poređenja fitova na jedan odnosno dva kanala dani su u slijedećem poglavlju. U ovom trenutku dovoljno je napomenuti da se linija fita, dobivena procedurom u kojoj imamo uključena dva kanala, bolje slaže sa ulaznim podacima. Također uključivanjem drugog kanala u proceduru fita, χ^2 se smanji ili ostaje nepromijenjen.

Rezultati fita dani su u tabeli 6.2, a kvalitet fita prikazan je na slici 6.2.3. Sve dobivene pozicije polova predstavljene su na slici 6.2.4.

6. Rezultati i Diskusija

Tablica 6.1.: Rezultati za položaje polova korištenjem fita na jedan kanal za trorezonantni i četverorezonantni slučaj.

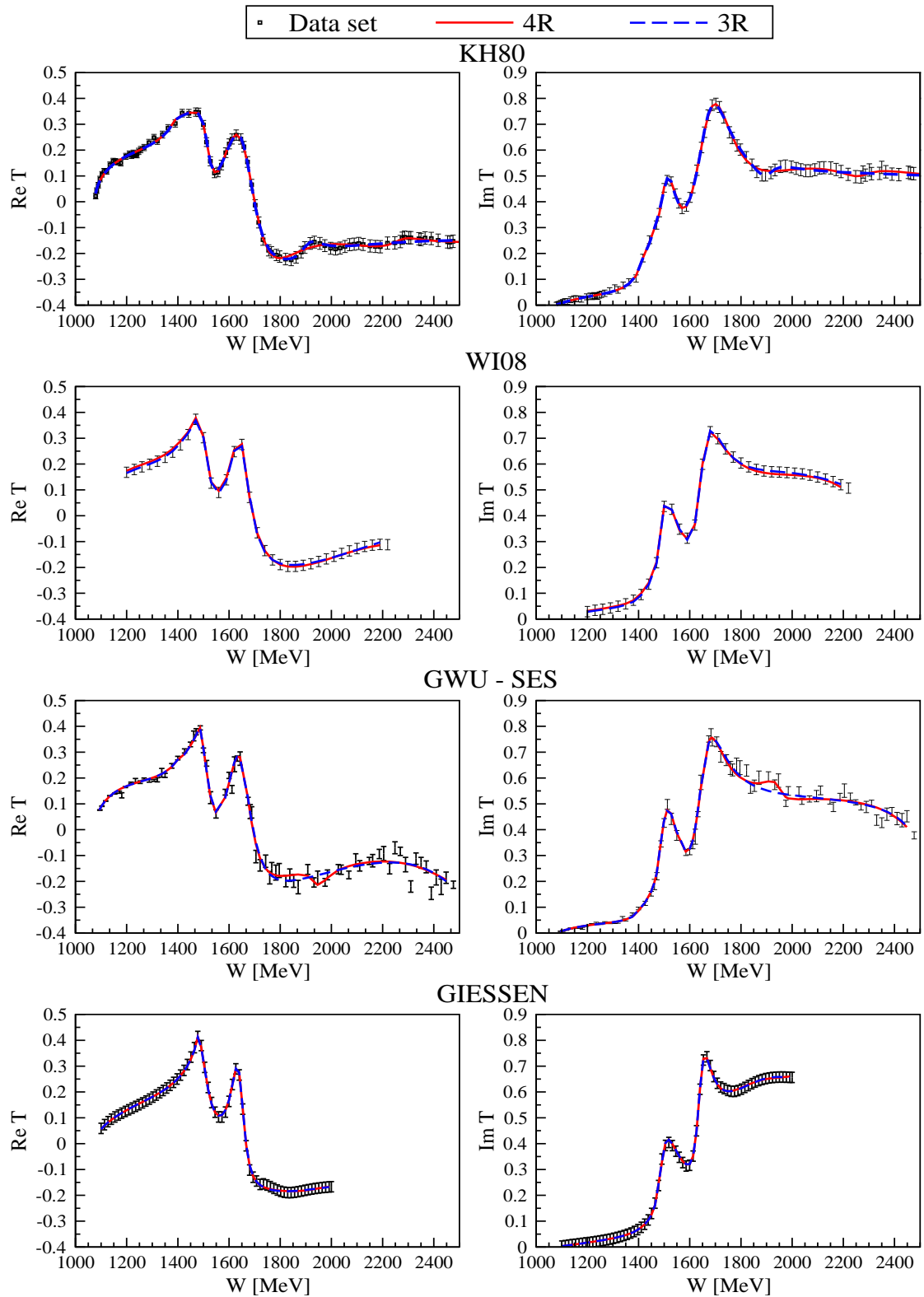
Analiza (fitani kanal)	Broj rezonancija	Goli polovi						Obučeni polovi						χ^2_R
		MeV			MeV			MeV			MeV			
		W_{s1}	W_{s1}	W_{s1}	W_{s1}	W_{s1}	W_{s1}	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	
KH80 ($\pi N \rightarrow \pi N$)	3	1516	1638	1880	-	-	1513	1661	1903	-	-	0.209		
	4	1488	1656	1713	2266	-	71	148	90	(2633)	(138)	0.206		
WI08 ($\pi N \rightarrow \pi N$)	3	1481	1657	3767	-	-	1492	1646	2684	-	-	0.043		
	4	1513	1624	1686	2517	-	89	95	822	(2633)	(345)	0.012		
GWU-SES ($\pi N \rightarrow \pi N$)	3	1514	1645	2919	-	-	1500	1646	2598	-	-	2.252		
	4	1517	1650	1928	3768	-	106	119	210	(2633)	(345)	2.116		
GIESSEN ($\pi N \rightarrow \pi N$)	3	1464	1616	1731	-	-	1484	1641	1861	-	-	0.062		
	4	1474	1635	1718	2674	-	82	65	811	(2249)	(287)	0.061		
JÜLICH ($\pi N \rightarrow \pi N$)	3	1518	1656	2177	-	-	1528	1653	2335	-	-	0.046		
	4	1511	1636	1719	2241	-	95	110	372	(2335)	(403)	0.018		
EBAC07 ($\pi N \rightarrow \pi N$)	3	1466	1641	2518	-	-	1498	1641	2215	-	-	0.028		
	4	1483	1643	1702	2237	-	123	89	767	(1862)	(691)	0.012		
EBAC08 ($\pi N \rightarrow \pi N$)	3	1515	1673	1826	-	-	1483	1662	1873	-	-	0.029		
	4	1512	1667	1980	3784	-	123	80	219	(2189)	(637)	0.027		
DMT ($\pi N \rightarrow \pi N$)	3	1495	1643	2047	-	-	1492	1661	1804	-	-	0.246		
	4	1507	1647	1850	2100	-	114	81	1113	(2100)	(212)	0.083		
Srednje vrijednosti	3	1498(16)						1649(9)						-
	4	96(20)						101(25)						-
		1502(12)						1651(11)						(2253(224))
		114(20)						109(42)						(356(212))

6. Rezultati i Diskusija

Tablica 6.2.: Rezultati za položaje polova korištenjem fita na dva kanala za trorezonantni i četverorezonantni slučaj.

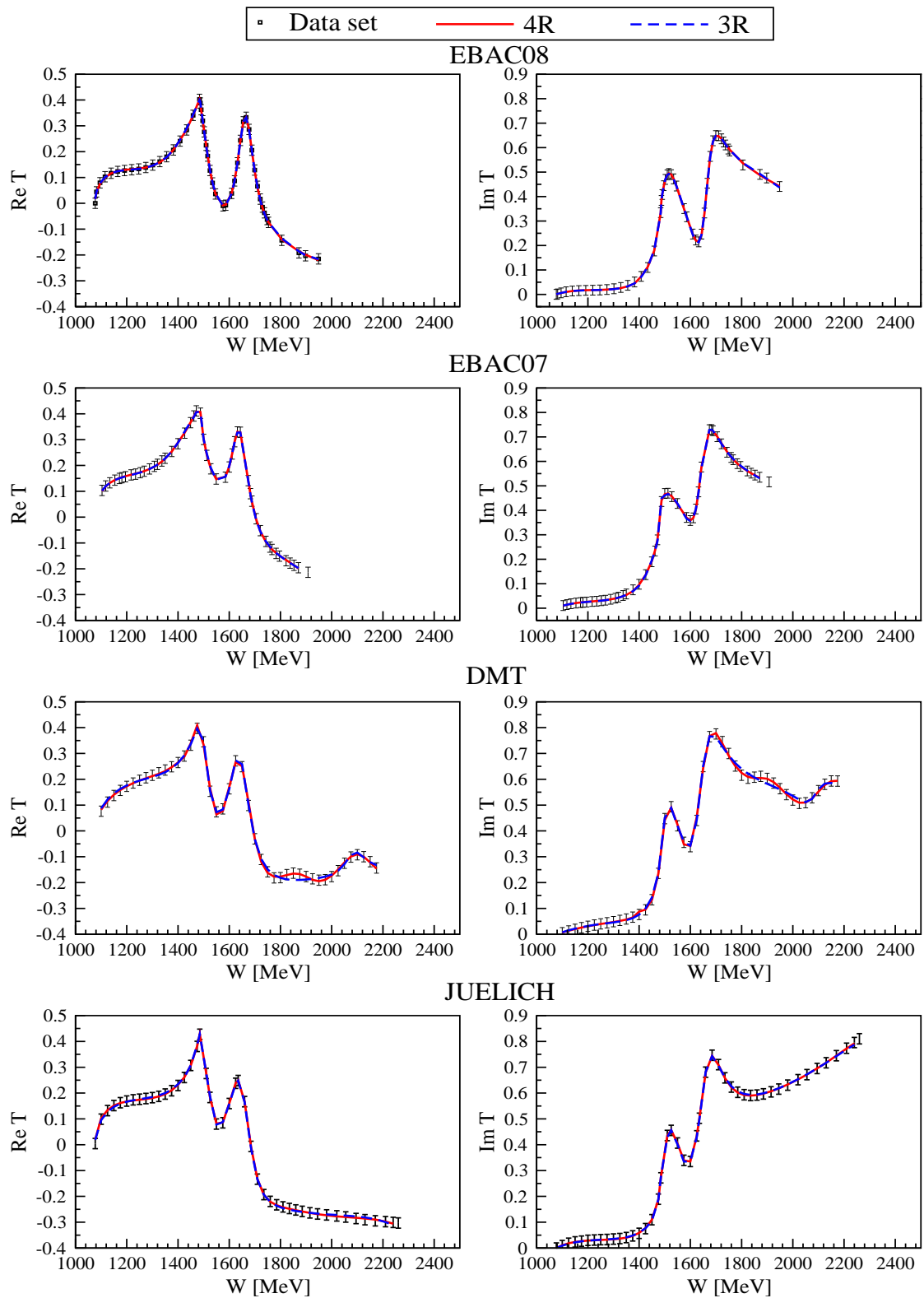
Analize (fitani kanali)	Broj rezonancija	Goli polovi						Obučeni polovi						χ^2_R	
		MeV			MeV			MeV			MeV				
		W_{s_1}	W_{s_1}	W_{s_1}	W_{s_1}	W_{s_1}	W_{s_1}	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$	$\text{Re } W$ $-2\text{Im } W$		
KH80 $(\pi N \rightarrow \pi N)$	3	1517	1637	1865	-	-	1511	1670	1923	113	163	328	-	-	0.391
		1504	1610	1751	2045	-	1492	1650	1892	122	163	235	1951	555	0.307
WI08 $(\pi N \rightarrow \pi N)$	3	1514	1626	1722	-	-	1499	1652	1718	114	102	449	-	-	0.127
		1513	1630	1701	2611	-	1495	1651	1697	113	87	204	2422	241	0.031
GWU-SES $(\pi N \rightarrow \pi N)$	3	1519	1662	3190	-	-	1503	1642	2618	172	127	270	-	-	2.451
		1512	1643	1743	2827	-	1503	1659	1756	97	111	210	2569	173	2.011
GIESSEN $(\pi N \rightarrow \pi N)$	3	1515	1636	1720	-	-	1472	1650	1692	176	81	191	-	-	0.437
		1509	1632	1728	2202	-	1471	1640	1738	212	73	263	2215	246	0.351
JÜLICH $(\pi N \rightarrow \pi N)$	3	1514	1601	1725	-	-	1521	1649	1643	212	127	644	-	-	0.198
		1513	1566	1663	2048	-	1514	1633	1645	142	141	112	2197	977	0.074
EBAC08 $(\pi N \rightarrow \pi N)$	3	1518	1670	1833	-	-	1526	1665	1927	179	126	347	-	-	0.651
		1495	1618	1693	1888	-	1493	1672	1696	174	87	122	1911	107	0.216
DMT $(\pi N \rightarrow \pi N)$	3	1516	1657	2169	-	-	1551	1638	2378	160	158	1070	-	-	1.186
		1476	1606	1705	2104	-	1546	1640	1790	151	158	396	2171	445	1.047
Srednje vrijednosti	3	1512(25)	1652(12)	1986(373)	-	-	1512(25)	1652(12)	1986(373)	161(36)	126(29)	471(301)	-	-	-
		1502(23)	1649(13)	1745(80)	-	-	1502(23)	1649(13)	1745(80)	144(39)	117(37)	220(95)	2191(241)	392(301)	-

6. Rezultati i Diskusija



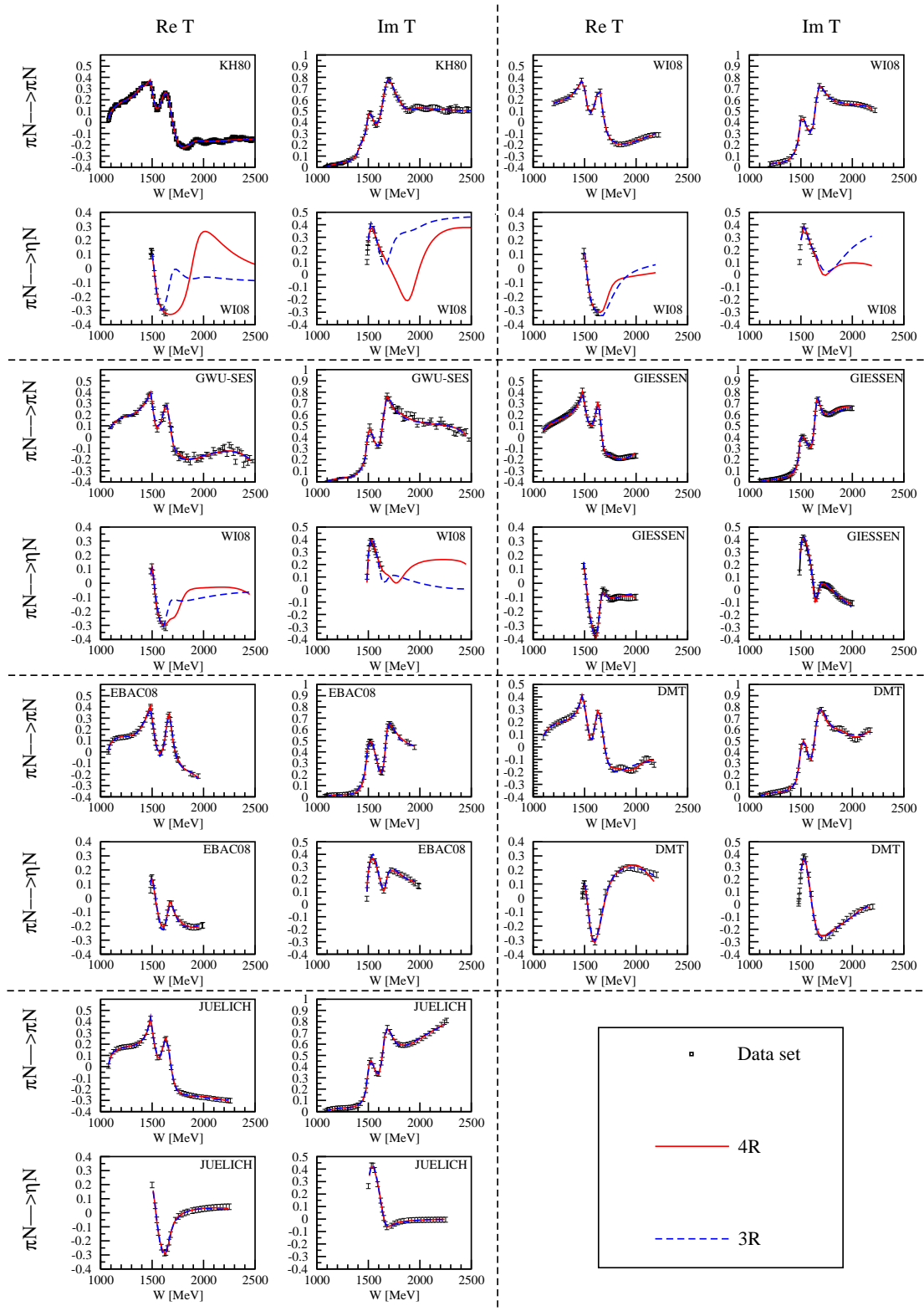
Slika 6.2.1.: Poređenje trorezonantnog i četverorezonantnog CMB fita na jedan kanal sa korištenim ulaznim podacima.

6. Rezultati i Diskusija



Slika 6.2.2.: Poređenje trorezonantnog i četverorezonantnog CMB fita na jedan kanal sa korištenim ulaznim podacima.

6. Rezultati i Diskusija



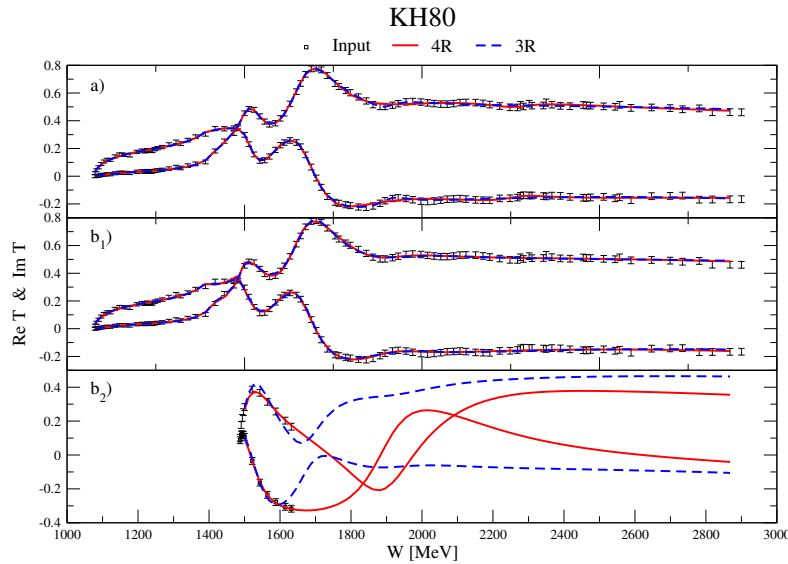
Slika 6.2.3.: Poređenje trorezonantnog i četverorezonantog CMB fita na dva kanala sa korištenim ulaznim podacima.

6.3. Polovi T -matrice dobiveni CMB modelom, korištenjem rezultata dostupnih analiza parcijalnih valova kao ulaznih podataka

6.3.1. Preliminarna razmatranja

Položaji polova T -matrice su opšteprihvaćeni singulariteti koji se mogu porediti sa predikcijama QCD. Određivanje polova T -matrice podrazumijeva njeno analitičko produljenje u kompleksnu energijsku ravninu poznavajući samo vrijednosti T -matrice za realne vrijednosti energije. Analitičko produljenje po definiciji mora biti neovisno o korištenom modelu. Iz tog razloga, pozicije polova koje smo dobili korištenjem modifikovanog CMB modela moraju biti različite od pozicija polova u originalnim publikacijama, jer se u svakoj publikaciji daje zaseban način analitičkog produljenja fizikalnih vrijednosti T -matrice. Ipak, potreban broj polova određen u našem formalizmu se slaže sa onim iz originalnih publikacija. Također, može se ustanoviti da li je određeni pol samo rezultat lokalne nekonzistentnosti eksperimentalnih podataka ili je on uistinu posljedica izvornog singulariteta.

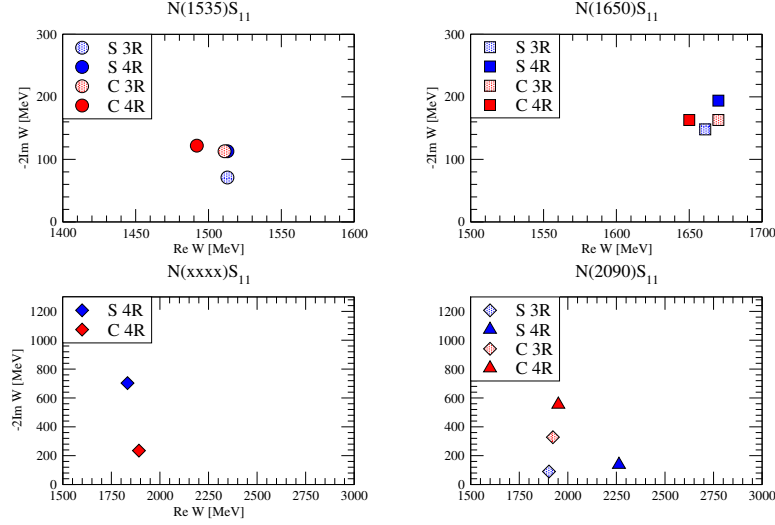
6.3.2. KH80 analiza



Slika 6.3.1.: Poređenje CMB fita sa ulaznim podacima: a) samo elastični kanal, b) elastični i inelastični kanal istovremeno.

6. Rezultati i Diskusija

KH80



Slika 6.3.2.: Polovi dobiveni korištenjem KH80 podataka. Korštene su slijedeće oznake: S (C) označava da su prikazani rezultati dobiveni korištenjem fita sa jednim (dva) kanala, a 3R (4R) označava da su prikazani rezultati dobiveni sa uključena tri (četiri) gola pola u fizikalnoj oblasti.

Položaji polova određeni korištenjem KH80 parcijalnih valova, dobivenih fitom na dva i tri kanala za slučaj kada su u model uključene tri odnosno četiri rezonance dani su na slici 6.3.2. Kvalitet fita predstavljen je na slici 6.3.1, sa koje se mogu vidjeti CMB fitovi, kako za slučajeve kada su u proceduru fita uključene tri (plava isprekidana linijia), odnosno četiri rezonance (puna crvena linija), tako i za slučajeve kada je u proceduru fita uključen jedan (grafik pod a) odnosno dva kanala (grafici b_1 i b_2).

Parcijalni valovi dobiveni u KH80 analizi rezultat su analize eksperimentalnih podataka iz samo jednog, elastičnog $\pi N \rightarrow \pi N$ kanala. Informacije o inelastičnim kanalima sadržane su u koeficijentu inelastičnosti parcijalnih valova kao i u disperzionim relacijama pri konstantnoj vrijednosti kvadrata prenesenog impulsa odnosno u Pietarinenovom razvoju [42] invarijantnih amplituda raspršenja. Određivanje rezonantnih parametara u analizi KH80 je odvojeno od procedure fita. Breit-Wignerovi parametri u ovoj analizi parcijalnih valova se dobivaju kao lokalni fit u području rezonance sa unitarno dodanim pozadinskim članom na nivou S-matrice. Polovi se određuju korištenjem jednokanalnih metoda za ekstrakciju polova, kao što su Speed Plot i Argand-ov diagram. Originalna publikacija daje dva pola za s-val.

Naši rezultati za prva dva pola se podudaraju sa rezultatima dobivenim ovom

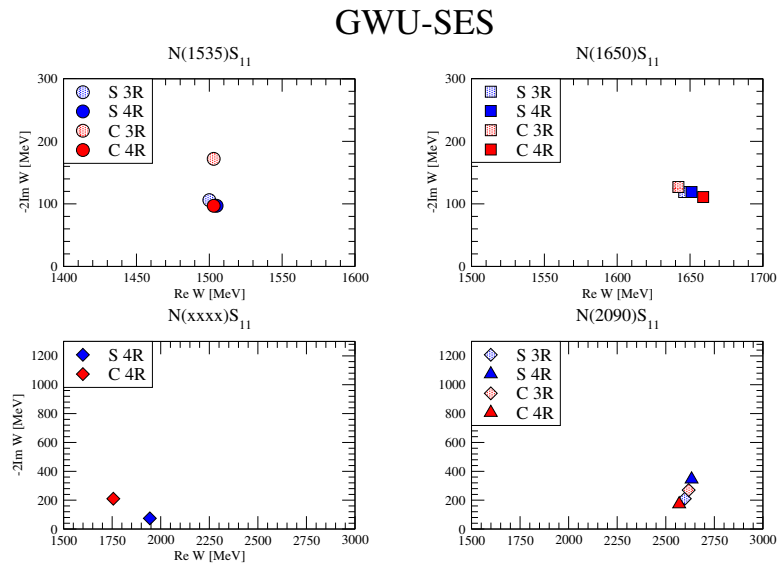
6. Rezultati i Diskusija

analizom, što pokazuje da je elastični kanal dominantan, kada su u pitanju prva dva pola.

Sa slike 6.3.2 je jasno uočljivo da su prva dva pola $N(1535)S_{11}$ i $N(1650)S_{11}$ grupirana u uskom intervalu energije, dok se to isto ne može reći za treći $N(\text{xxxx})S_{11}$ i četvrti $N(2090)S_{11}$ pol. CMB fit se dobro slaže sa ulaznim podacima kako za slučaj kada su u proceduru fita uključene tri, tako i za slučaj kada su u proceduru fita uključene četiri rezonance - Slika 6.3.1.

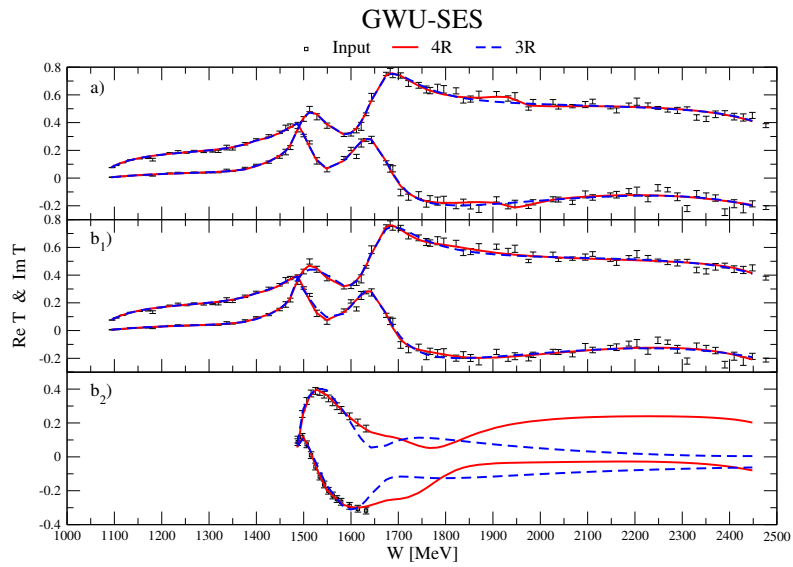
Pored toga, u našem pristupu jasno se vidi potreba uvođenja trećeg $N(2090)S_{11}$ pola. Također naš fit dozvoljava uvođenje četvrtog pola, kako za slučaj jednog kanala tako za slučaj kada su uključena dva kanala, ali je iz dobivenih rezultata primjetno da je potrebno uključiti više inelastičnih kanala nego samo ηN . U oba slučaja parametri trećeg i četvrtog pola nisu dovoljno dobro određeni. To se vidi iz disperzije dobivenih vrijednosti za realni dio pola T -matrice, kao i za imaginarni dio.

6.3.3. GWU-SES i WI08 analize

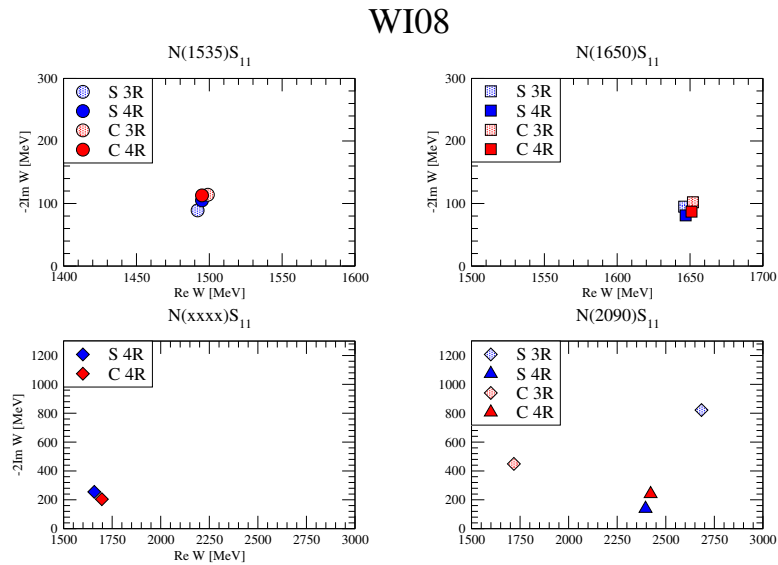


Slika 6.3.3.: Polovi dobiveni korištenjem GWU-SES podataka. Korštene su slijedeće oznake: S (C) označava da su prikazani rezultati dobiveni korištenjem fita sa jednim (dva) kanala, a 3R (4R) označava da su prikazani rezultati dobiveni sa uključena tri (četiri) gola pola u fizikalnoj oblasti.

6. Rezultati i Diskusija

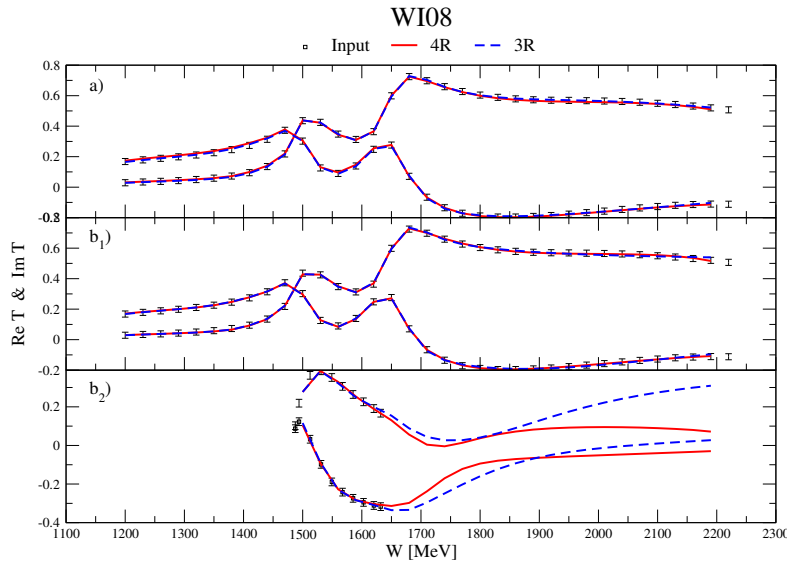


Slika 6.3.4.: Poređenje CMB fita sa ulaznim podacima: a) samo elastični kanal, b) elastični i inelastični kanal istovremeno.



Slika 6.3.5.: Polovi dobiveni korištenjem WI08 amplituda. Korštene su slijedeće oznake: S (C) označava da su prikazani rezultati dobiveni korištenjem fita sa jednim (dva) kanala, a 3R (4R) označava da su prikazani rezultati dobiveni sa uključena tri (četiri) gola pola u fizikalnoj oblasti.

6. Rezultati i Diskusija



Slika 6.3.6.: Poređenje CMB fita sa ulaznim podacima: a) samo elastični kanal, b) elastični i inelastični kanal istovremeno.

Položaji polova određeni koristeći kao ulazne podatke rezultate analize parcijalnih valova GWU-SES (WI08), dobivenih fitom na dva i tri kanala za slučaj kada su u proceduru fita uključena tri odnosno četiri pola, dani su na slikama 6.3.3 i 6.3.5. Kvalitet fita predstavljen je na slikama 6.3.4 i 6.3.6, sa kojih se mogu vidjeti CMB fitovi, kako za slučajeve kada su u proceduru fita uključene tri (plava isprekidana linija), odnosno četiri rezonance (puna crvena linija), tako i za slučajeve kada je u proceduru fita uključen jedan (grafik pod *a*) odnosno dva kanala (grafici *b*₁ i *b*₂).

U originalnim publikacijama se određivanje položaja polova svodi na analitičko produljenje energijski ovisnih rješenja u energijsku kompleksnu ravninu. Prednost pristupa korištenog u ovom radu je ta što se mogu koristiti oba tipa rješenja za određivanje polova. Mi možemo koristiti kako energijski neovisna rješenja GWU-SES tako i energijski ovisna rješenja WI08 kao ulazne podatke. Polovi T -matrice u VPI/GWU analizama određeni su korištenjem analitičke forme određene Chew-Mandelstamov-im K -matričnim pristupom kojim se podaci fitaju direktno, pri čemu se ne koriste rezultati analize parcijalnih valova VPI/GWU. Prema tome položaji polova koji odgovaraju njihovim rješenjima, u literaturi poznatim pod imenom Single Energy Solution (SES), još uvijek nisu određeni. U ovom radu koristimo isti formalizam kako za single energy rješenja tako i za energijski neovisna rješenja i možemo ih tretirati kao neovisne ulazne podatke. Iz tog razloga imamo dva skupa rješenja.

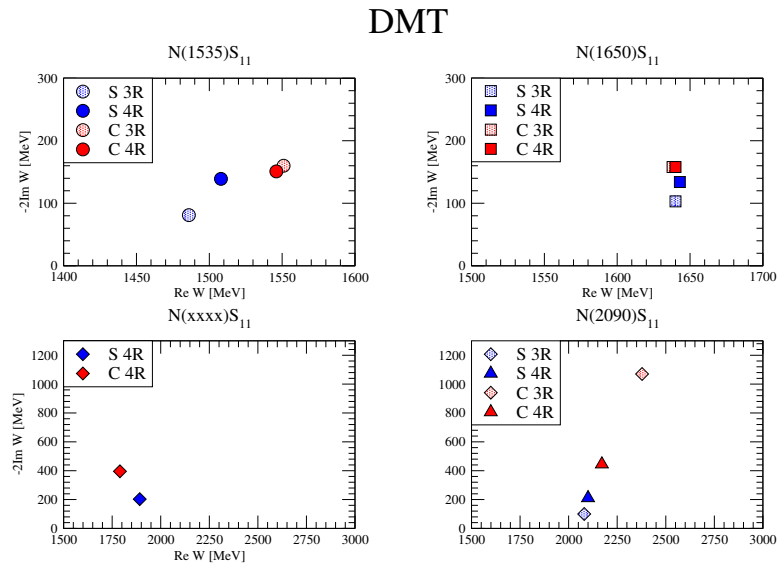
6. Rezultati i Diskusija

Generalni zaključci pri korištenju dva GWU/VPI rješenja su ista i slična zaključcima izvedenim pri korištenju KH80 podataka. Pri određivanju polova T -matrice dominantan je doprinos elastičnog $\pi N \rightarrow \pi N$ kanala. Kvalitet fita se značajno poboljšava uvođenjem trećeg $N(2090)S_{11}$ pola, što se jasno vidi sa slika 6.3.4 i 6.3.6. Naš formalizam dozvoljava uvođenje i četvrtog pola ali za njegovo preciznije određivanje potrebno je imati više informacija u inelastičnim kanalima nego što daje korištenje samo ηN kanala.

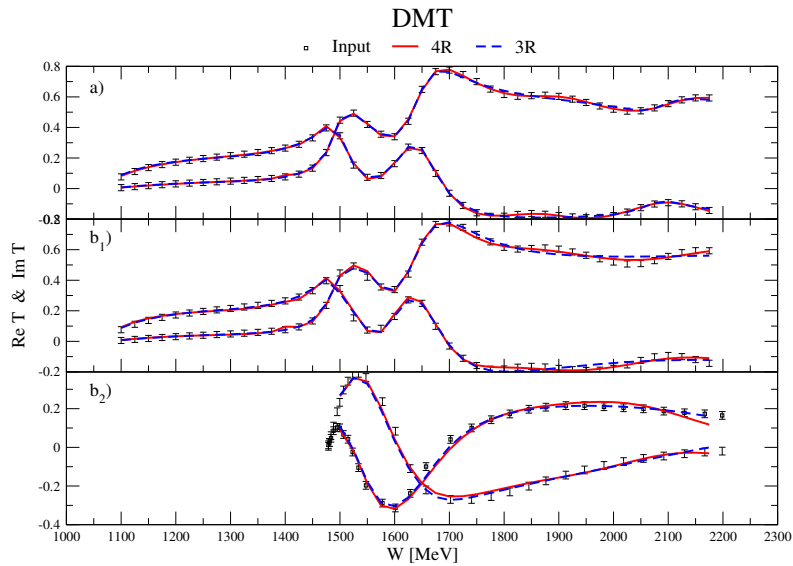
Pored svega gore navedenog od interesa je napraviti usporedbu pri korištenju GWU-SES i WI08 parcijalnih valova kao ulaznih podataka u našem formalizmu. Bez obzira na činjenicu da je WI08 rješenje prilično glatko iznad energije prve rezonance, a definitivno puno glade nego što je to GWU-SES rješenje, oba rješenja zahtijevaju uvođenje trećeg i četvrtog pola na skoro identičan način. Potreba uvođenja trećeg i četvrtog pola pri korištenju enegrijski neovisnog rješenja WI08 nije bila očekivana. Numeričke vrijednosti položaja polova su slične za oba rješenja. Dobro su definirana prva dva pola, prvenstveno određena elastičnim kanalom. Uključivanjem inelastičnog kanala položaj prva dva pola neznatno je promijenjen dok je njegov uticaj na položaje trećeg i četvrtog pola značajan.

6. Rezultati i Diskusija

6.3.4. DMT analiza



Slika 6.3.7.: Polovi dobiveni korištenjem DMT amplituda. Korštene su slijedeće oznake: S (C) označava da su prikazani rezultati dobiveni korištenjem fita sa jednim (dva) kanala, a 3R (4R) označava da su prikazani rezultati dobiveni sa uključena tri (četiri) gola pola u fizikalnoj oblasti.



Slika 6.3.8.: Poređenje CMB fita sa ulaznim podacima: a) samo elastični kanal, b) elastični i inelastični kanal istovremeno.

6. Rezultati i Diskusija

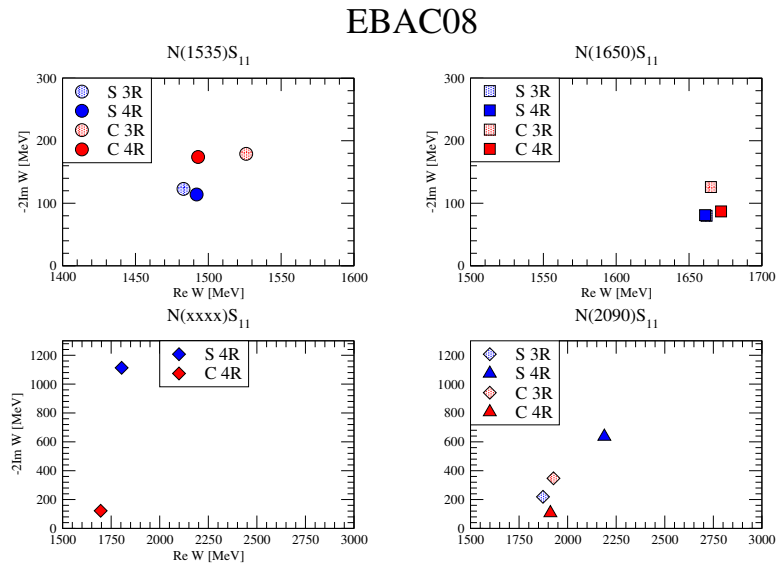
Pozicije polova određene korištenjem DMT parcijalnih valova, dobivenih fitom na dva i tri kanala za trorezonantni i četverorezonantni slučaj dani su na Slici 6.3.7. Kvalitet fita predstavljen je na slici 6.3.8, sa koje se mogu vidjeti CMB fitovi, kako za slučajeve kada su u proceduru fita uključene tri (plava isprekidana linija), odnosno četiri rezonance (puna crvena linija), tako i za slučajeve kada je u proceduru fita uključen jedan (grafik pod a) odnosno dva kanala (grafici b_1 i b_2).

DMT kolaboracija koristi se "speed plot" tehnikom pri određivanju pozicije polova. Ovim načinom uspjeli su odrediti tri pola. Prva dva su $N(1535)S_{11}$ i $N(1650)S_{11}$ dok treći odgovara $N(2090)S_{11}$ (vidjeti [28]). Međutim, potaknuti svojim istraživanjima na polju fotoprodukcije gdje su ustanovili veliku vjerojatnost postojanja novog S-valnog rezonantnog stanja na oko 1846 MeV [27, 31], ponovili su svoju analizu i potvrdili postojanje ovog novog stanja na oko 1800 MeV[30].

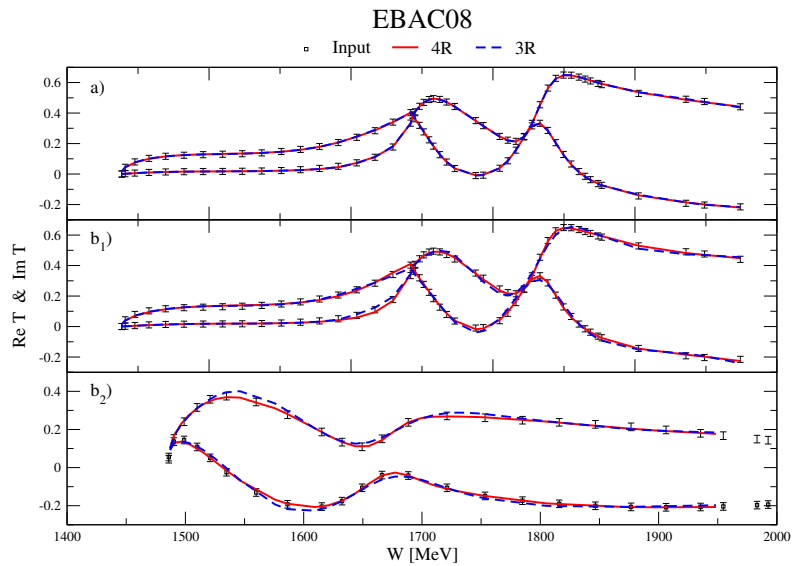
Interesantno je napomenuti da korištenjem DMT amplituda u našem pristupu potvrđujemo postojanje četiri pola. Kako se vidi iz slike 6.2.3 naš 3-rezonantni fit, kako se vidi sa slike 6.3.8, ne opisuje na najbolji način strukturu elastičnog parcijalnog vala na višim energijama iz čega zaključujemo da je potrebno povećati broj parametara fita. Fitanjem sa četiri rezonance rješavamo ovaj problem i u isto vrijeme primjetno je poboljšanje reduciranog χ^2 . Dakle, našom procedurom se potvrđuju njihovi rezultati dobiveni ujedinjenjem hadronske i fotoprodukcijske analize te se vidi podudaranje sa činjenicom da njihovo S_{11} rješenje zaista sadrži četiri pola[30].

6. Rezultati i Diskusija

6.3.5. EBAC analize



Slika 6.3.9.: Polovi dobiveni korištenjem EBAC08 amplituda. Korštene su slijedeće oznake: S (C) označava da su prikazani rezultati dobiveni korištenjem fita sa jednim (dva) kanala, a 3R (4R) označava da su prikazani rezultati dobiveni sa uključena tri (četiri) gola pola u fizikalnoj oblasti.



Slika 6.3.10.: Poređenje CMB fita sa ulaznim podacima: a) samo elastični kanal, b) elastični i inelastični kanal istovremeno.

6. Rezultati i Diskusija

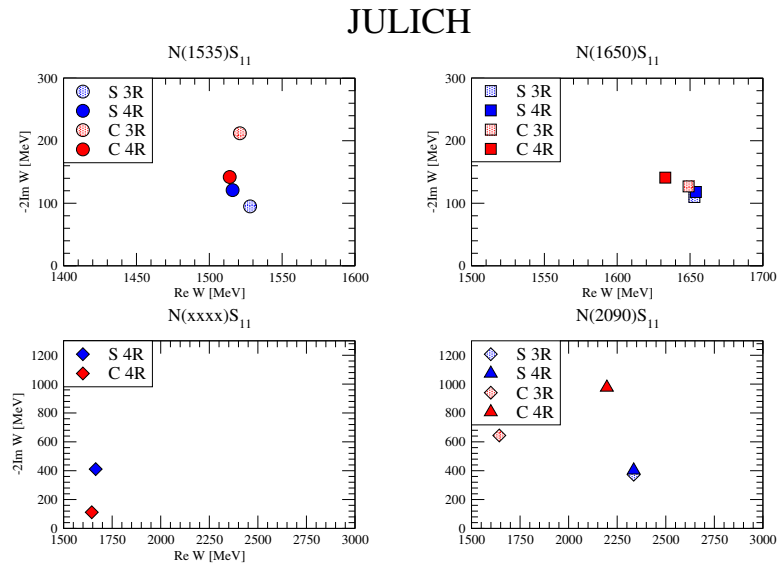
Pozicije polova određene korištenjem EBAC parcijalnih valova, dobivenih fitom na dva i tri kanala za trezozonantni i četverorezonantni slučaj dani su na Slici 6.3.9. Kvalitet fita predstavljen je na slici 6.3.10, sa koje se mogu vidjeti CMB fitovi, kako za slučajeve kada su u proceduru fita uključene tri (plava isprekidana linija), odnosno četiri rezonance (puna crvena linija), tako i za slučajeve kada je u proceduru fita uključen jedan (grafik pod a) odnosno dva kanala (grafici b_1 i b_2).

EBAC kolaboracija je dala tri skupa amplituda parcijalnih valova, od kojih je jedan (EBAC07) [46] dobiven fitanjem na πN elastične podatke a druga dva (EBAC08 [47] i EBAC10 [51]) su dobivena korištenjem podataka kako iz πN elastičnog tako i iz ηN inelastičnog kanala. Najnoviji parcijalni valovi (EBAC10) još uvijek nisu zvanično objavljeni u referentnim časopisima. Kako nismo imali odgovarajuće numeričke rezultate za ove parcijalne valove, pokušali smo ih očitati direktno sa grafova prezentiranih u [51], što je uzrokovalo veoma nestabilan fit korištenjem naše metode ekstrakcije polova. Iz tog razloga preliminarne EBAC10 podatke smo odlučili izostaviti iz naših razmatranja sve dok ne budu objavljeni konačni rezultati za ovu analizu. EBAC grupa je u sve tri analize koristila dva gola pola smještena, energijski, veoma visoko ($M \geq 1.8$ GeV), a dobiveni obučeni polovi ugrubo odgovaraju rezonantnim stanjima $N(1535)S_{11}$ i $N(1650)S_{11}$. Treći i četvrti pol u ovoj analizi nisu određeni.

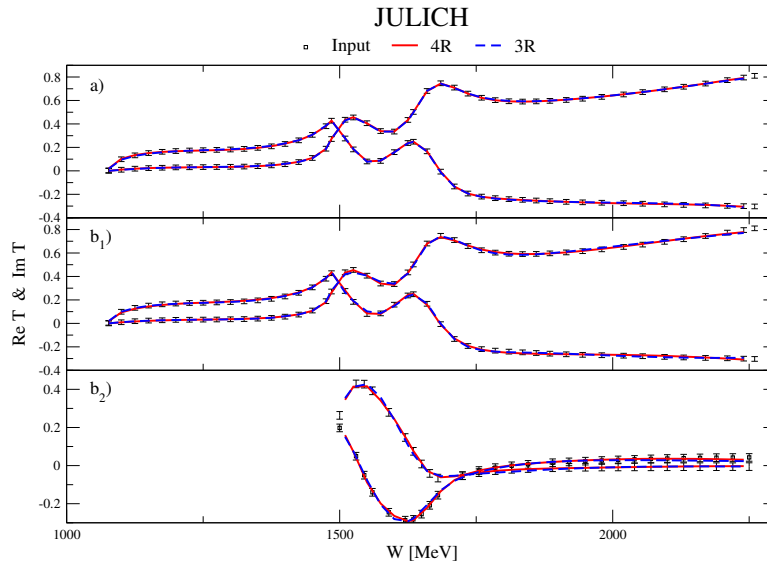
Sva tri EBAC skupa podataka ponašaju se veoma slično pri njihovom korištenju u našim analizama. Tako možemo potvrditi postojanje prva dva pola, koja su uslovljena samo πN elastičnim kanalom. Pored toga, uvođenjem treće i četvrte rezonance u našu analizu, primjetno je poboljšanje redukovanog χ^2 . Međutim, iako se vidi da naš fit zahtijeva uvođenje trećeg i četvrtog pola u proceduru fita, oni nisu tako dobro određeni korištenjem samo dva inelastična kanala.

6. Rezultati i Diskusija

6.3.6. Jülich analiza



Slika 6.3.11.: Polovi dobiveni korištenjem Jülich amplituda. Korštene su slijedeće oznake: S (C) označava da su prikazani rezultati dobiveni korištenjem fita sa jednim (dva) kanala, a 3R (4R) označava da su prikazani rezultati dobiveni sa uključena tri (četiri) gola pola u fizikalnoj oblasti.



Slika 6.3.12.: Poređenje CMB fita sa ulaznim podacima: a) samo elastični kanal, b) elastični i inelastični kanal istovremeno.

6. Rezultati i Diskusija

Pozicije polova određene korištenjem Jülich parcijalnih valova, dobivenih fitom na dva i tri kanala za trorezonantni i četverorezonanti slučaj dani su na Slici 6.3.11. Kvalitet fita predstavljen je na slici 6.3.12, sa koje se mogu vidjeti CMB fitovi, kako za slučajeve kada su u proceduru fita uključene tri (plava isprekidana linija), odnosno četiri rezonance (puna crvena linija), tako i za slučajeve kada je u proceduru fita uključen jedan (grafik pod a) odnosno dva kanala (grafici b_1 i b_2).

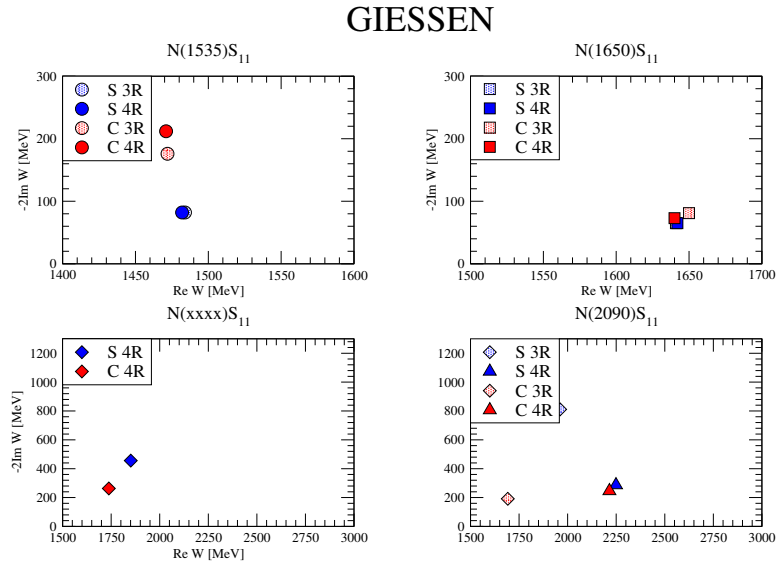
Jülich grupa fita GWU-SES podatke (WI08 skup [45]), a za rezultat imaju, slično kao za WI08, veoma glatke parcijalne valove za energije, u sistemu centra masa, iznad 1800 MeV (slika 6.3.12). Jedina razlika u odnosu na WI08 jeste ponašanje na višim energijama. Kod Jülich amplituda se realni dio parcijalnog vala smanjuje, a imaginarni dio povećava, sa povećanjem energije, dok se kod WI08 amplituda dešava upravo suprotno. Prema tome razlika među njima ne može proizilaziti iz mjerenja udarnih presjeka nego samo iz polarizacije. Ova grupa u svojim publikacijama daje rezultate za dva S_{11} pola.

Bez obzira na gore pomenute razlike između Jülich i WI08 amplituda, mi smo očekivali da su pozicije polova Jülich amplituda slične onima za WI08 amplitude. Iz naših analiza jasno je vidljivo da je to i ispunjeno. Zaključak koji je izveden našim postupkom određivanja polova S_{11} parcijalnog vala, koristeći kao input WI08 parcijalne valove, potvrđen je i u slučaju kada kao input koristimo Jülich parcijalne valove - potrebno je uvesti više od dva pola kako bi se fitao ulazni skup podataka.

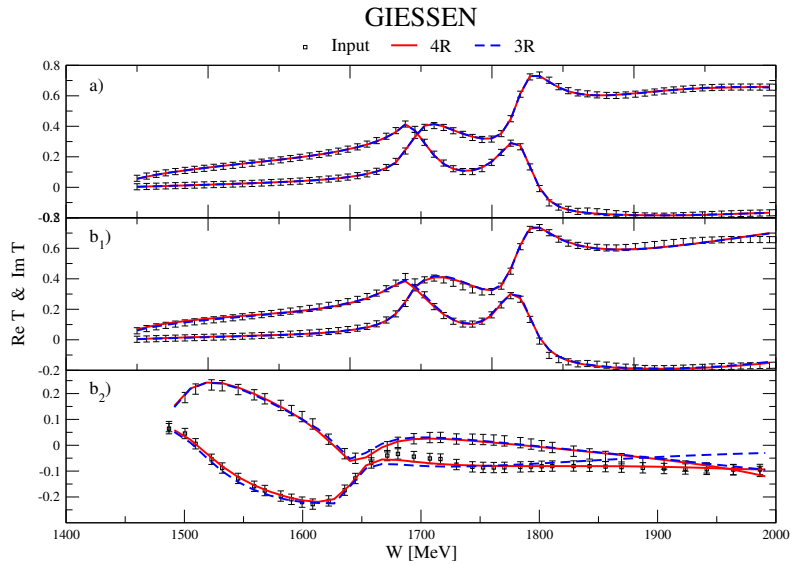
Posve je jasno da su potrebna bar tri pola, uključena u proceduru fita naše analize, da bi se na zadovoljavajući način opisao oblik parcijalnih valova. Rezultat naših analiza Jülich parcijalnih valova jeste da su one konzistentne sa četiri S_{11} pola. Slično kao kod korštenja drugih analiza, za treći i četvrti pol možemo reći da nisu sasvim pouzdano određeni.

6. Rezultati i Diskusija

6.3.7. Giessen analiza



Slika 6.3.13.: Polovi dobiveni korištenjem Giessen amplituda. Korštene su slijedeće oznake: S (C) označava da su prikazani rezultati dobiveni korištenjem fita sa jednim (dva) kanala, a 3R (4R) označava da su prikazani rezultati dobiveni sa uključena tri (četiri) gola pola u fizikalnoj oblasti.



Slika 6.3.14.: Poređenje CMB fita sa ulaznim podacima: a) samo elastični kanal, b) elastični i inelastični kanal istovremeno.

6. Rezultati i Diskusija

Pozicije polova određene korištenjem Giessen parcijalnih valova, dobivenih fitom na dva i tri kanala za trorezonantni i četverorezonantni slučaj dani su na Slici 6.3.13. Kvalitet fita predstavljen je na slici 6.3.14, sa koje se mogu vidjeti CMB fitovi, kako za slučajeve kada su u proceduru fita uključene tri (plava isprekidana linija), odnosno četiri rezonance (puna crvena linija), tako i za slučajeve kada je u proceduru fita uključen jedan (grafik pod a) odnosno dva kanala (grafici b_1 i b_2).

Giessen grupa dobija amplitude fitajući GWU-SES podatke za πN elastični kanal. Njihove amplitude za πN kanal se slažu sa amplitudama ostalih analiza, dok se za amplitude ηN kanala može reći da na višim energijama odstupaju od rezultata ostalih analiza. Međutim, ono što je zasigurno uočljivo kod ovih amplituda je da se one slažu sa ostalim amplitudama u okolini $N(1535)S_{11}$ rezonantnog stanja. Pored gore pomenutog problema neslaganja sa amplitudama ostalih analiza, postoji još jedan, možda značajniji problem kod amplituda Giessenske analize. Taj problem očituje se u narušenju analitičnosti. Naime, kako se Giessenski model zasniva na K -matričnoj Bornovoj aproksimaciji, gdje se realni dio Greenove funkcije zanemaruje, analitičnost je očigledno narušena. Iz tog razloga, rezultati našeg fita mogu biti dovedeni u pitanje, jer glavna pretpostavka za korektno analitičko produljenje nije zadovoljena.

6.4. Osnovni rezultati: Srednje vrijednosti

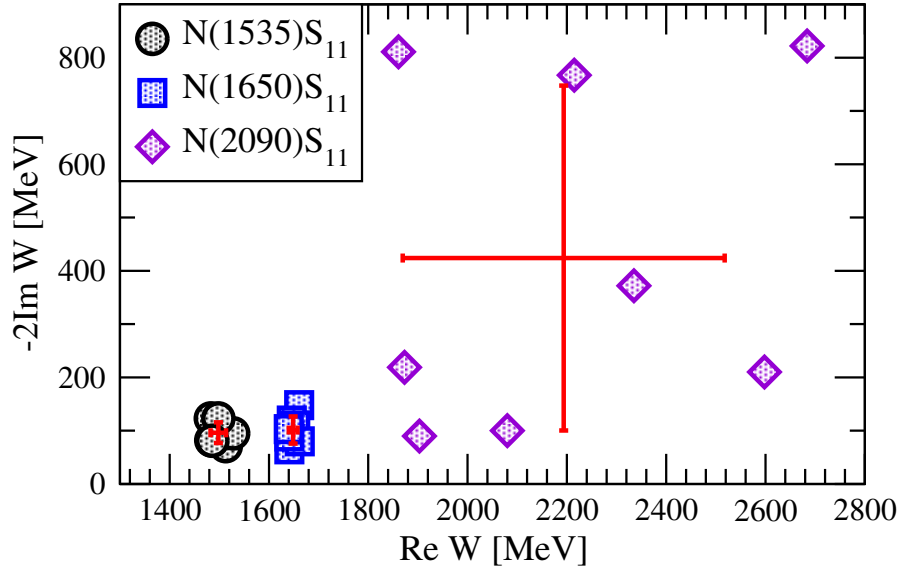
Glavni cilj ovog rada je da se korištenjem samo jednog metoda ekstrakcije polova izbjegniju sistematske greške pri određivanju pozicije polova. U ovom poglavlju sumiraćemo sve rezultate dobivene korištenjem naše metode ekstrakcije polova.

6.4.1. Rezultati dobiveni korištenjem samo $\pi N \rightarrow \pi N$ kanala

Fitani su podaci samo iz $\pi N \rightarrow \pi N$ kanala. Rezultate koje ćemo razmatrati u ovom dijelu dobili smo prvo fitom sa uključena tri gola pola, a zatim smo fit ponovili sa dodatnim golim polom u fizikalnoj oblasti. Prvo ćemo razmatrati rezultate sa uključena tri gola pola, koje smo nazvali trorezonantni slučaj, a zatim ćemo razmatrati rezultate dobivene sa četiri uključena gola pola, koje smo nazvali četverorezonantni slučaj.

Pozicije polova, te njihove srednje vrijednosti sa standarnom devijacijom prikazane su na slici 6.4.1 za trorezonantni slučaj, te na slici 6.4.2 za četverorezonantni slučaj.

6. Rezultati i Diskusija



Slika 6.4.1.: Rezultati za položaje polova pri fitu na jedan kanal, trorezonantni slučaj

Trorezonantni slučaj

Kako je sugerirano u publikaciji Particle Data Group (PDG) [14] da postoje tri S_{11} barionske rezonance, prezentaciju naših rezultata počnemo sa uključena tri gola pola u proceduru fita.

Razmatrajući rezultate za trorezonantni slučaj iz tabele 6.1 i slike 6.4.1 možemo izvesti određene zaključke vezane za svaki pol pojedinačno. Prva dva pola $N(1535)S_{11}$ i $N(1650)S_{11}$ su precizno određena našom metodom. To se posebno odnosi na realne dijelove polova koji odgovaraju ovim rezonancama. Koristeći rezultate dobivene korištenjem gore opisanih analiza parcijalnih valova, dobivene su srednje vrijednosti realnih i imaginarnih dijelova prve dvije rezonance; standardne devijacije navedene su u zagradama:

$$\begin{aligned}\overline{N(1535)S_{11}} &= 1498 (16) + i 96 (20); \\ \overline{N(1650)S_{11}} &= 1649 (9) + i 101 (25).\end{aligned}$$

Pri korištenju svake analize parcijalnih valova kao ulaznih podataka odmah je uočljiva potreba za uvođenjem dodatnog, trećeg pola u našu proceduru fita. Iako je uvođenjem trećeg pola postignuto poboljšanje u slaganju fita sa ulaznim podacima, iz priloženih rezultata nije moguće zaključiti da je treći pol, po preciznosti, određen na način kako su to određena prva dva pola. Na prvi pogled se može

6. Rezultati i Diskusija

uočiti da realni dio trećeg pola uzima vrijednosti od 1800 MeV pa sve do nekih 2700 MeV. Detaljnijom analizom možemo izdvojiti određene rezultate vezane za neke od analiza. Tako imamo da se realni dio trećeg pola za analize kao što su KH80, Giessen i EBAC08 kreće u nešto užem rasponu od 1800 MeV do 2000 MeV dok za ostale analize uzima vrijednost veću od 2000 MeV. Kada je u pitanju imaginarni dio pola, možemo reći da se interval u kojem se dobivaju rezultati kreće od 90 MeV pri korištenju KH80 parcijalnih valova pa sve do 822 MeV za WI08 parcijalne valove.

Rezultujuće srednje vrijednosti i greške trećeg pola su:

$$\overline{N(2090)S_{11}} = 2194 (324) + i 424 (324).$$

Iz svega gore navedenog izvodi se jasan zaključak da je neophodno uvođenje četvrtog golog pola u proceduru.

Četverorezonantni slučaj

U narednom koraku, ponovili smo fit, ali sada sa četiri uključena gola pola u proceduru. Numeričke vrijednosti polova su prikazane u tabeli 6.1, a grafički prikaz položaja polova dan je na slici 6.4.2.

Detaljnijom analizom rješenja sa četiri uključene rezonance iz tabele 6.1 i slike 6.4.2 došli smo do zaključaka vezanih za ovaj slučaj.

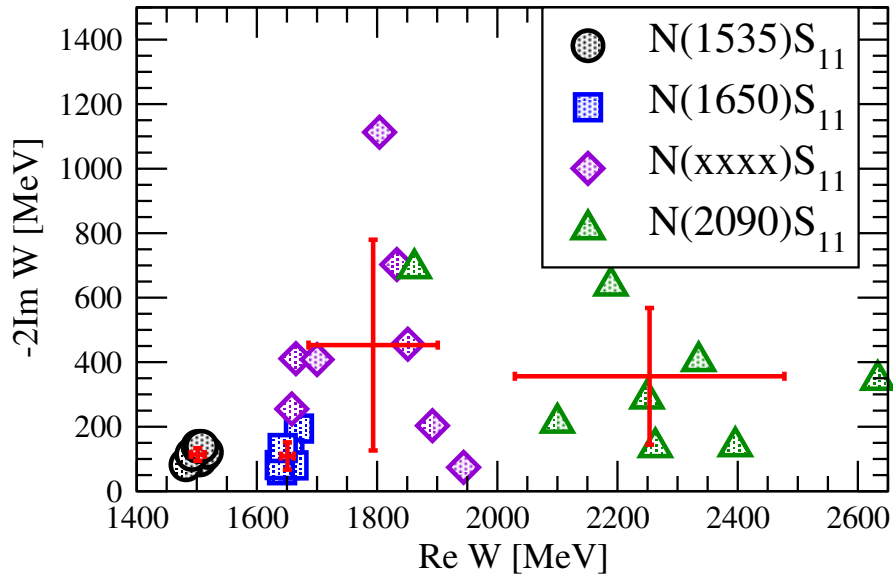
Kao prvo ustanovili smo da neke analize parcijalnih valova, koje smo koristili kao ulazne podatke, zahtijevaju uvođenje četvrtog golog pola u našu proceduru fita, dok za ostale analize, uvođenjem četvrtog pola, možemo samo ustanoviti da su konzistentne sa četiri S_{11} pola.

Druga stvar koja se vidi u rješenjima je poboljšanje reduciranog χ^2 u slučaju fita sa četiri gola pola u odnosu na njegovu vrijednost u slučaju fita sa tri gola pola. Reducirani χ^2 kod fita sa uključena četiri pola je, ili znatno poboljšan, kao što je to slučaj sa analizama WI08, Jülich, EBAC07 i DMT, ili u najgorem slučaju, uzima nešto manju ali ipak približno istu vrijednost kao kod fita sa uključena tri gola pola, za slučaj preostalih fitanih analiza KH80, GWU-SES, GIESSEN i EBAC08.

I u ovom slučaju nalazimo da su prva dva pola $N(1535)S_{11}$ i $N(1650)S_{11}$ određena sa veoma velikom preciznošću. Njihove srednje vrijednosti i greške su:

$$\begin{aligned}\overline{N(1535)S_{11}} &= 1502 (12) + i 114 (20); \\ \overline{N(1650)S_{11}} &= 1651 (11) + i 109 (42).\end{aligned}$$

6. Rezultati i Diskusija



Slika 6.4.2.: Rezultati za položaje polova pri fitu na jedan kanal, četverorezonantni slučaj

Suprotno našim očekivanjima i usprkos poboljšanju reduciranog χ^2 ne možemo reći da je došlo do preciznijeg određivanja trećeg i četvrtog pola. Iako je za poziciju trećeg pola došlo do sužavanja intervala u kojem se on nalazi, što se posebno odnosi na njegov realni dio, disperzija rezultata za imaginarne dijelove još uvijek je neprihvatljiva, što se vidi iz standardnih devijacija koje su navedene u zagradama. Srednje vrijednosti i standardne devijacije za treći i četvrti pola su:

$$\begin{aligned} \overline{N(\text{XXXX})S_{11}} &= 1793 (108) + i 453 (327); \\ \overline{N(2090)S_{11}} &= 2253 (224) + i 356 (212). \end{aligned}$$

Iz prethodno navedenog nije moguće izvesti zaključak o egzistenciji četvrtog pola.

Kako je veoma teško, na precizan način, ustanoviti postojanje trećeg i četvrtog pola korištenjem samo elastičnog kanala, koji je u ovom dijelu istraživanja jedini korišteni kanal, naša razmišljanja bila su usmjerena na uvođenje dodatnih kanala u proceduru fita. Kako skoro sve korištene analize parcijalnih valova daju svoja rješenja za ηN kanal, smatrali smo da bi istovremenim fitanjem na parcijalne valove iz πN i ηN kanala mogli poboljšati vrijednosti parametara trećeg i četvrtog pola.

6.4.2. Rezultati dobiveni korištenjem $\pi N \rightarrow \pi N$ i $\pi N \rightarrow \eta N$ kanala

Veoma neprecizno određeni treći i četvrti polovi u slučaju fita sa jednim kanalom nedvojbeno potvrđuju naše zaključke u vezi inelastičnog kanala kao neophodnog dijela inputa pri određivanju rezonantnih stanja odnosno polova matrice raspršenja (pogledati [49]). I pored svega, uvođenje podataka iz ηN kanala u proceduru fita, ima i svojih nedostataka. Parcijalni valovi u ηN kanalu temeljeni su na dosta starim, oskudnim i nepreciznim eksperimentalnim podacima, što ih čini nepouzdanim. Ali i takvi, nepouzdati, podaci iz ηN kanala, ipak u sebi sadrže veoma važne informacije, koje zajedno sa podacima iz elastičnog πN kanala mogu doprinjeti preciznijoj analizi singularitetne strukture matrice raspršenja.

Kao i u slučaju fita sa jednim kanalom, i ovdje ćemo rezultate analizirati odvojeno za trorezonantni i četverorezonantni slučaj.

Numeričke vrijednosti dobivenih polova dane su tabeli 6.2, a grafički prikaz položaja polova dani su na slici 6.4.3 za trorezonantni slučaj, te na slici 6.4.4 za četverorezonantni slučaj.

Trorezonantni slučaj

Naša prva razmatranja počinju sa analizom fita u čiju proceduru su uključena tri gola pola.

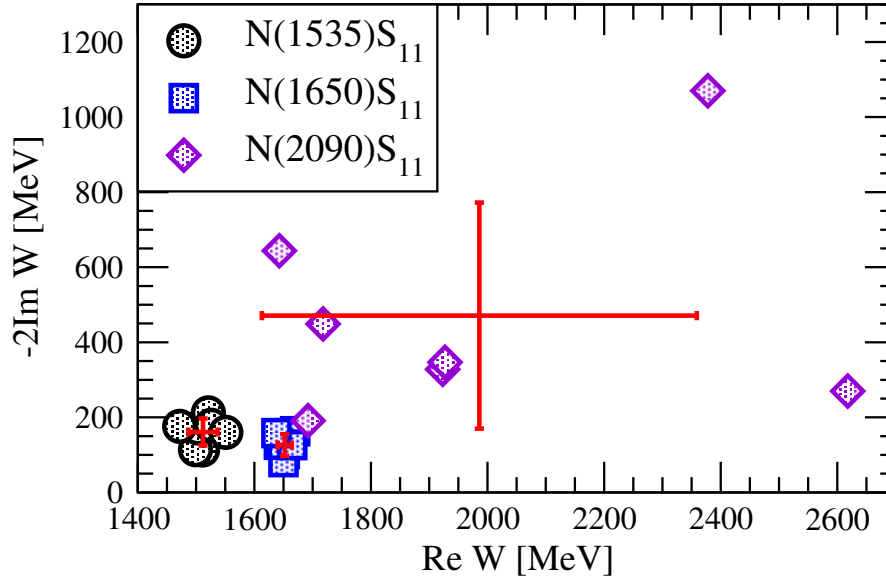
Kako se vidi iz tabele 6.2 i slike 6.4.3, za prva dva pola $N(1535)S_{11}$ i $N(1650)S_{11}$ možemo reći da su veoma precizno određena za sve korištene analize parcijalnih valova. Njihove srednje vrijednosti i greške su:

$$\begin{aligned} \overline{N(1535)S_{11}} &= 1512 (25) + i 161 (36); \\ \overline{N(1650)S_{11}} &= 1652 (12) + i 126 (29). \end{aligned}$$

Upoređujući ove rezultate sa rezultatima dobivenim u slučaju trorezonantnog jednokanalnog fita

$$\begin{aligned} \overline{N(1535)S_{11}} &= 1498 (16) + i 96 (20); \\ \overline{N(1650)S_{11}} &= 1649 (9) + i 101 (25), \end{aligned}$$

6. Rezultati i Diskusija



Slika 6.4.3.: Rezultati za položaje polova pri fitu na dva kanala, trorezonantni slučaj

možemo primijetiti da je razlika između njih u okvirima standardne devijacije. Realni dio je skoro u potpunosti ponovljen dok se za imaginarni dio može konstatirati da uzima nešto niže vrijednosti.

Sve analize parcijalnih valova zahtijevaju da budu fitane sa uključena tri gola pola. Iako se trećim polom u proceduri fita dobiva poboljšanje u opisivanju parcijalnih valova svake od korištenih analiza, rješenja koja su dobivena za treći pol u našem modelu kreću se u širokom energijskom rasponu, počevši približno od 1700 MeV za Giessen analizu, pa sve do nekih 2650 MeV, za WI08 analizu. Srednja vrijednost i greška za treći pol su:

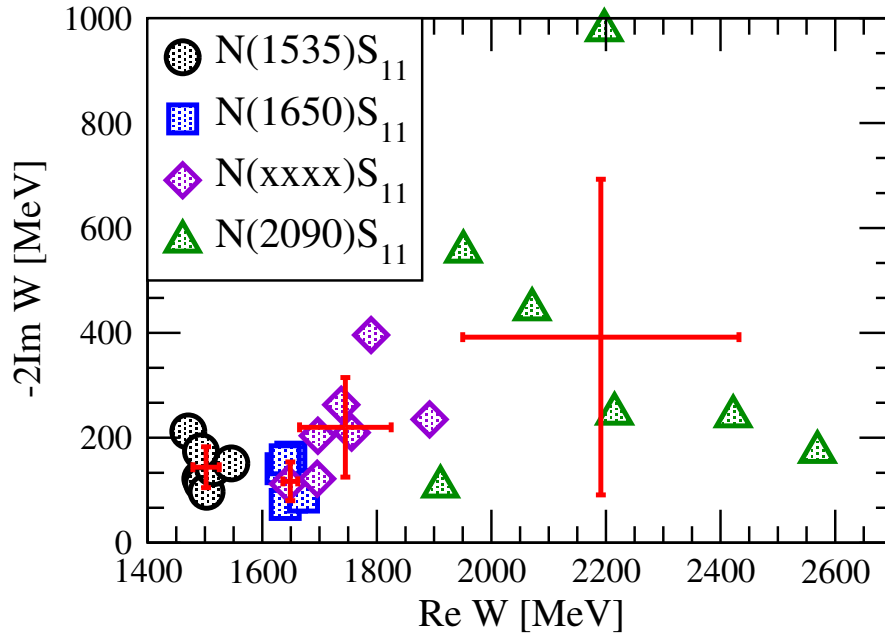
$$\overline{N(2090)S_{11}} = 1986 (373) + i 471 (301).$$

Jasno je da ni u ovom slučaju treći pol nije određen sa zadovoljavajućm preciznošću.

Kao i u slučaju fita samo na elastični kanal, i ovdje se mogu izdvojiti analize, za koje u našem modelu, realni dio trećeg pola uzima vrijednosti do 2000 MeV, kao što su KH80, WI08, GIESSEN, Jülich i EBAC08, te one za koje realni dio trećeg pola poprma vrijednosti veće od 2000 MeV kao što su GWU-SES i DMT.

Naravno, zaključak je da bi se uvođenjem četvrtog pola u proceduru fita mogla stabilizirati pozicija trećeg pola.

6. Rezultati i Diskusija



Slika 6.4.4.: Rezultati za položaje polova pri fitu na dva kanala, četverorezonantni slučaj

Četverorezonantni slučaj

Ponavljanjem procedure fita, ali sada sa uključena četiri gola pola dobili smo numeričke vrijednosti polova koje su predstavljene u tabeli 6.2, a grafički prikazane na slici 6.4.4.

Zaključci koji slijede iz ovih rješenja su identični onim u slučaju jednokanalnog fita sa uključena četiri gola pola.

Sve analize parcijalnih valova, ili zahtijevaju, ili su konzistentna sa četiri S_{11} pola.

Reducirani χ^2 je za neke analize poboljššan, dok za neke ima manju ali približno jednaku vrijednost.

Prva dva pola $N(1535)S_{11}$ i $N(1650)S_{11}$ su određena sa velikom preciznošću i njihove srednje vrijednosti i greške su:

$$\begin{aligned}\overline{N(1535)S_{11}} &= 1502 (23) + i 144 (39); \\ \overline{N(1650)S_{11}} &= 1649 (13) + i 117 (37).\end{aligned}$$

Za razliku od fita samo sa elastičnim kanalom, gdje nije bilo značajnijeg poboljšanja u stabilizaciji trećeg pola ukoliko u proceduru fita uključimo i četvrti goli pol,

6. Rezultati i Diskusija

u ovom slučaju se opseg u kojem se vidi treći pol znatno smanjuje u odnosu na trorezonantni slučaj, ali i pored toga, jedino što za sada možemo reći je da imamo samo naznaku o postojanju trećeg pola. Što se tiče četvrtog pola, naznaka o njegovom postojanju je veoma slaba. Srednje vrijednosti i greške za treći i četvrti pol su:

$$\begin{aligned}\overline{N(\text{xxxx})S_{11}} &= 1745 (80) + i 220 (95); \\ \overline{N(2090)S_{11}} &= 2191 (241) + i 392 (301).\end{aligned}$$

Poredeći ova rješenja sa onim dobivenim za jednokanalni četverorezonantni slučaj

$$\begin{aligned}\overline{N(1535)S_{11}} &= 1502 (12) + i 114 (20); \\ \overline{N(1650)S_{11}} &= 1651 (11) + i 109 (42); \\ \overline{N(\text{xxxx})S_{11}} &= 1793 (108) + i 453 (327); \\ \overline{N(2090)S_{11}} &= 2253 (224) + i 356 (212).\end{aligned}$$

možemo izvesti zaključak da ηN kanal, ipak ne daje potrebne informacije da bi se opseg trećeg i četvrtog pola dovoljno suzio, pa je prema tome potrebno uključiti i druge kanale u proceduru fita, kako bi se to postiglo.

7. Zaključci

U ovom radu opisano je korištenje samo jedne, zagrebačke verzije, CMB metode za ekstrakciju pozicije polova iz dostupnih analiza parcijalnih valova tretirajući ih kao parcijalno-valne ulazne podatke. Pozicije polova su određivane iz svake analize parcijalnih valova pojedinačno. Korištenje samo jedne metode nam je omogućilo da napravimo statističku analizu za dobivene vrijednosti pozicije polova a da pri tome izbjegnemo sistematske greške proizišle iz različitih pretpostavki vezanih za metode ekstrakcije polova T -matrice. Do detalja smo objasnili ovu ideju i prezentirali rezultate za S_{11} parcijalni val.

- Analizirali smo fit sa uključenim podacima u samo jednom kanalu i detaljno smo istražili koje su posljedice uključivanja podataka u dodatnom ηN kanalu. Naši rezultati sugeriraju da je i veoma loša kvaliteta podataka u drugom kanalu dovoljna da se poprave rezultati za slabije određene pozicije polova. Međutim za preciznije određivanje trećeg i četvrtog pola, naše je stanovište da je ηN kanal nedovoljan.
- Korištenjem samo elastičnog kanala dobijamo veoma precizno određena prva dva pola, a dodavanje i ηN kanala, u proceduru fita, rezultuje samo malim modifikacijama rezultata dobivenih korištenjem samo elastičnog kanala.
- Pokazali smo da su parcijalni valovi iz svih korištenih analiza parcijalnih valova, usprkos činjenici da neke od njih svoje modele ekstrakcije polova ili ekstrakcije rezonantnih parametara baziraju na postojanju samo dva S-valna rezonantna stanja, konzistentni bar sa tri T-matrična pola.
- Također smo pokazali da za sve parcijalne valove postoji jaka naznaka o postojanju četvrtog pola, iako to do sada niko nije uspio utvrditi. Jedini izuzetak je posljednja DMT analiza [51]. Ovaj pol se može poistovjetiti sa $S_{11}(1846)$ polom određenim u fotoprodukijskom kanalu DMT kolaboracije [38].

Na kraju svega možemo tvrditi da se dvokanalni fit u slučaju uključena četiri gola pola može smatrati finalnim rezultatom ove doktorske disertarije, te da on

7. Zaključci

predstavlja neku vrstu svjetske srednje vrijednosti

$$\begin{aligned}\overline{N(1535)S_{11}} &= 1502 (23) + i 144 (39); \\ \overline{N(1650)S_{11}} &= 1649 (13) + i 117 (37); \\ \overline{N(\text{xxxx})S_{11}} &= 1745 (80) + i 220 (95); \\ \overline{N(2090)S_{11}} &= 2191 (241) + i 392 (301).\end{aligned}$$

A. Osnovni pojmovi kompleksne analize

Def 1. Funkcija $f : D \rightarrow F$, $D, F \subset \mathbb{C}$ naziva se funkcija kompleksne promjenjljive.

Def 2. Kompleksna funkcija f je neprekidna u tački z_0 ako je

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Def 3. Funkcija f je diferencijabilna u tački z_0 ako postoji $f'(z)$.

Def 4. Funkcije f je analitička u tački z_0 ako postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je f diferencijabilna $\forall z$ iz okoline tačke z_0 .

Def 5. Funkcija f je analitička na oblasti D ako je diferencijabilna u svakoj tački te oblasti.

Def 6. Tačke u kojima funkcija $f(z)$ nije analitička zovu se singularne tačke ili singulariteti.

Def 7. Singularna tačka z_0 naziva se izolovani singularitet ako postoji ε -okolina tačke z_0 koja ne sadrži druge singularitete osim z_0 .

Tip izolovanih singulariteta:

1. Otklonjivi singularitet,
2. Pol,
3. Esencijalni singularitet.

Def 8. Izolovani singularitet z_0 je otklonjivi singularitet ako postoji

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0.$$

A. Osnovni pojmovi kompleksne analize

Def 9. Izolovani singularitet z_0 zove se pol ako je

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

Specijalno, pol z_0 zove se pol reda n ako je

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = \omega_0 \neq 0.$$

Def 10. Izolovani singularitet z_0 zove se esencijalni singularitet ako ne postoji granična vrijednost funkcije $f(z)$ kada z teži ka z_0 (konačna ili beskonačna).

Teorema 1. Ako je $f(z)$ analitička na jednostruko povezanoj oblasti D i ako je $G \subset D$ kontura oko $z_0 \in D$ onda je

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Teorema 2. Neka je funkcija $f(z)$ analitička na jednostruko povezanoj oblasti D ograničenoj konuturom C i na konturi C . Tada na D postoje svi izvodi funkcije f u svakoj tački z_0 iz oblasti D :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

B. Mandelstamove varijable

Razmotrimo proces raspršenja

$$a + b \rightarrow c + d \quad \text{ili} \quad 1 + 2 \rightarrow 3 + 4,$$

gdje je svakoj čestici pripisan četiri vektor impulsa p_1, p_2, p_3, p_4 . Amplitude raspršenja invarijantne na Lorentz-ove transformacije, uobičajeno se prikazuju preko dva nezavisna invarijantna parametra koja se mogu konstruirati preko četiri vektora impulsa p_1, p_2, p_3, p_4 :

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2; \\ t &= (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2; \\ u &= (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2. \end{aligned}$$

Kako je za dva četiri vektora a i b skalarni produkt defirniran sa

$$a \cdot b = a_\mu b_\mu = a_4 b_4 - \vec{a} \cdot \vec{b},$$

možemo pisati

$$\begin{aligned} p_1^2 &= E_1^2 - q_{s12}^2 = m_1^2; \\ p_2^2 &= E_2^2 - q_{s12}^2 = m_2^2; \\ p_3^2 &= E_3^2 - q_{s34}^2 = m_3^2; \\ p_4^2 &= E_4^2 - q_{s34}^2 = m_4^2, \end{aligned}$$

kao i

$$s = (E_1 + E_2)^2 = W^2,$$

gdje je W energija u sistemu centra masa.

Iz prethodno pomenutog možemo dati vezu između s, t i u :

$$s + t + u = \sum_i m_i^2 = \Sigma.$$

B. Mandelstamove varijable

Također iz prethodno pomentog možemo dati veoma korisne relacije:

$$\begin{aligned} p_i \cdot p_j &= \frac{1}{2} (s - m_i^2 - m_j^2); \\ m_i^2 + p_i \cdot p_j &= p_i \cdot (p_i + p_j) = E_i \sqrt{s}; \\ E_i &= \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_i^2 - m_j^2). \end{aligned}$$

gdje (i, j) mogu uzimati slijedeće vrijednosti: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$ i $(4, 3)$.

Pored toga možemo izvesti da vrijedi:

$$\begin{aligned} q_{s12}^2 &= \frac{1}{4s} [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2]; \\ q_{s34} &= \frac{1}{4s} [s - (m_3 + m_4)^2] [s - (m_3 - m_4)^2]. \end{aligned}$$

Neka je θ_s ugao raspršenja u sistemu centra masa. Tada imamo da je:

$$\cos \theta_s = \frac{s^2 + s(2t + \Sigma) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{4sq_{s12}q_{s34}}.$$

Ukoliko su sve mase jednake, tada je

$$q_s^2 = \frac{s - 4m^2}{4},$$

a ugao raspršenja dat je sa

$$\cos \theta_s = 1 + \frac{t}{2q_s^2} = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2},$$

ili

$$t = 2q_s^2(1 - \cos \theta_s).$$

C. Matrice raspršenja

Vjerovatnoća P_{ba} da se sistem nađe u stanju b nakon raspršenja iz stanja a može se dati sa

$$P_{ba} = |\mathcal{S}_{ba}|^2,$$

gdje je \mathcal{S}_{ba} element matrice raspršenja ili S -matrice.

Element \mathcal{S}_{ba} se može napisati u obliku

$$\mathcal{S}_{ba} = \langle b | S | a \rangle,$$

gdje je S operator koji iz početnog stanja čestice generira njeno konačno stanje.

Stanje čestice se bira tako da je normalizacija invarijantna, te su P_{ba} i \mathcal{S}_{ba} invarijantni na Lorentz-ova transformacije. Normalizacija za vektor satnja $|\vec{p}; m\rangle$ koji opisuje samo jednu česticu mase M , impulsa \vec{p} i z -komponente spina m data je sa:

$$\langle \vec{p}'; m' | \vec{p}; m \rangle = \delta_{mm'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') E(p),$$

gdje je $E(p)$ energija čestice ($\hbar = c = 1$)

$$E(p) = \sqrt{p^2 + M^2}.$$

Koristeći činjenicu da vjerovatnoća nekog konačnog stanja sistema dostiže jedinicu, možemo pisati

$$\sum_b P_{ba} = 1,$$

gdje suma ide po svim mogućim konačnim stanjima. Iz prethodno rečenog, kao i iz činjenice da stanja slobodne čestice formiraju kompletan skup, slijedi da je S -matrica unitarna:

$$S^\dagger S = S S^\dagger = 1,$$

ili

$$\sum_c \langle b | S^\dagger | c \rangle \langle c | S | a \rangle = \delta_{ab}.$$

C. Matrice raspršenja

Ukoliko nema interakcije između čestica sistema, početno i konačno stanje se ne mogu razlikovati, te se S reducira na jedinični operator. Iz ovoga vidimo da se vjerovatnoća prelaza uzrokovana interakcijom može odrediti operatorom $S - I$, dok se odgovarajući operator prelaza definiše sa

$$T = \frac{1}{2i}(S - I).$$

Relacija unitarnosti koja važi za S -matricu, u slučaju T -matrice postaje:

$$T^\dagger T = \frac{1}{2}i(T^\dagger - T).$$

Matrični element T -matrice može se pisati kao

$$\langle b|T|a\rangle = \delta^4(P_a - P_b)T_{ba}.$$

Element T_{ba} reducirane matrice prelaza se definiše samo za ona stanja b i a koja imaju istu ukupnu energiju i impuls, što se realizira preko 4-dimenzionalne δ funkcije.

Kada se početno stanje sistema sastoji od dvije čestice koje se kreću kolinearno, udarni presjek raspršenja se definiše kao

$$\sigma = \sum_b \frac{1}{F} W_{ba},$$

gdje suma ide po konačnim stanjima posmatranim u eksperimentu, a F je upadni fluks, koji definiše broj čestica koje prolaze kroz jedinični poprečni presjek, normalan na snop čestica, u jedinici vremena.

Najvažniji slučaj jeste onaj kod koga se i početno stanje a i konačno stanje b , sastoje od dvije čestice. U sistemu centra masa ($\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{q}_a$, $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4 = \vec{q}_b$) imamo da je

$$\sigma_{ba}(W) = \frac{16\pi^2}{q_a W} \int \delta(W - E_3 - E_4) |T_{ba}|^2 \frac{d\vec{q}_b}{E_3 E_4} = \frac{16\pi^2}{W^2} \frac{q_b}{q_a} \int d\Omega_b |T_{ba}|^2,$$

gdje je $d\Omega_b$ ugao u pravcu \vec{q}_b definiran polarnim uglovima (θ_b, ϕ_b) .

Diferencijalni udarni presjek za raspršenje u određenom pravcu, definiše se kao:

$$\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega_b} = \frac{16\pi^2}{W^2} \frac{q_b}{q_a} |T_{ba}|^2.$$

Bibliografija

- [1] S. Mandelstam, Phys. Rev. 112 (1958) 1344.
- [2] A. D. Martin, T. D. Spearman, *Elementary particle theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970.
- [3] R. A. Arndt et al., Phys. Rev. **C 74** (2006) 045205.
- [4] D. M. Manley and E. M. Salesky, Phys. Rev D 45 (1992) 4002.
- [5] M. Manley, Phys. Rev. D 51 (1995) 4837.
- [6] R. E. Cutkosky et al., Phys. Rev. D 20 (1979) 2804.
- [7] M. Batinić, et al., Phys. Rev. C 51, 2310 (1995); M. Batinić, et al., Physica Scripta 58, 15, (1998).
- [8] T. P. Vrana, S. A. Dytman, T. -S. H. Lee, Phys. Rep. 328 (2000) 181.
- [9] S. M. Flatte, Phys. Lett. B 63, 224 (1976).
- [10] N. G. Kelkar, M. Nowakowski, K. P. Khemchandani, Sudhir R. Jain, Nucl.Phys. A 730 (2004) 121-140.
- [11] G. Höhler, in Pion-Nucleon Scattering, Landolt-Börnstein, Vol I/9b2 (Springer-Verlag, Berlin, 1983); G. Höhler, A. Schulte, πN Newsletter, 7 (1992) 407.
- [12] G. Höhler, *Against Breit-Wigner parameters - a pole-emic*, in C. Caso et al. [Particle Data Group], Eur. Phys. J. C 3, 624 (1998).
- [13] G. Höhler, RESULTS ON $\Delta(1232)$ RESONANCE PARAMETERS: A NEW πN PARTIAL WAVE ANALYSIS, in NSTAR2001, Proceedings of the Workshop on the Physics of Excited Nucleons, Edts. D. Drechsel, L. Tiator, World Scientific Publishing Co. (2001), Pg.185.

Bibliografija

- [14] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), *J. Phys. G* 37, 075021 (2010).
- [15] S. Ceci, J. Stahov, A. Svarc, S. Watson and B. Zauner, *Phys. Rev. D* 77, 116007 (2008).
- [16] L. Eisenbud, dissertation, Princeton, June 1948 (unpublished)
- [17] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* 98, 145 (1955)
- [18] E. P. Wigner, L. Eisenbud *Phys. Rev.* 72, 29 (1947)
- [19] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, New York, 1951
- [20] N. Suzuki, T. Sato, T. -S. H. Lee, *Proceedings of the Menu2007 11th International Conference on Meson-nucleon Physics and the structure of the Nucleon, Juelich 2007*, edited by H. Machner, S Krewald, eConf C070910 (2007) 407
- [21] G. F. Chew and S. Mandelstam, *Phys. Rev.* 119, 467 (1960).
- [22] J. A. Oller and E. Oset, *Phys. Rev. D* 60, 074023 (1999).
- [23] V.V. Anisovich, *International Journal of Modern Physics, A* 21, 3615 (2006).
- [24] R. A. Arndt, W.J. Briscoe, I.I. Strakovsky, R.L. Workman, and M.M. Pavan, *Phys. Rev. C* 69, 035213 (2004).
- [25] N. Suzuki, T. Sato and T. -S. H. Lee, *Phys. Rev. C* 79, 025205 (2009).
- [26] T. Feuster and U. Mosell, *Phys. Rev. C* 58, 457 (1998).
- [27] Guan-Yeu Chen, Sabit Kamalov, Shin Nan Yang, Dieter Drechsel, Lothar Tiator, *Nuclear Physics A* 723, 447 (2003).
- [28] Guan Yeu Chen, S. S. Kamalov, Shin Nan Yang, D. Drechsel and L. Tiator, *Phys. Rev. C* 76, 035206 (2007).
- [29] V. Shklyar, H. Lenske, U. Mosel, *Phys. Rev. C* 72, 015210 (2005), and private communication.
- [30] L. Tiator, S.S. Kamalov, S. Ceci, G. Y. Chen, D. Drechsel, A. Svarc and S. N. Yang, *Phys. Rev. C* 82, 055203 (2010).
- [31] S. N. Yang, G.-Y. Chen, S. S. Kamalov, D. Drechsel and L. Tiator, *Nucl. Phys. A* 721 401c (2003); S. N. Yang, G.-Y. Chen, S. S. Kamalov, D. Drechsel and L. Tiator, *Int. Journal of Modern Physics, A* 20 1656 (2005).

Bibliografija

- [32] H. Osmanović, S. Ceci, A. Švarc, M. Hadžimehmedović and J. Stahov, submitted to Phys. Rev. C.
- [33] A. Matsuyama, T. Sato, and T. -S. H. Lee, Phys. Rep **439**, 193 (2007).
- [34] R. Aaron, R. D. Amado, and J. E. Young, Phys. Rev. **174**, 2022 (1968).
- [35] R. Aaron, D. C. Tepliz, R. D. Amado, and J. E. Young, Phys. Rev. **187**, 2047 (1969).
- [36] T. Sato and T. -S. H. Lee, Phys. Rev C **54**, 2660 (1996)
- [37] M. Kobayashi, T. Sato, and H. Ohtsubo, Prog. Theor. Phys **98**, 927 (1997).
- [38] C. T. Hang, S. N. Yang, and T. -S. H. Lee, J. Phys. G20, (1994) 1531; C. T. Hang, S. N. Yang, and T. -S. H. Lee, Phys. Rev. C64 (2001) 034309.
- [39] S. N. Yang, J. Phys. G11 (1985) L205.
- [40] S. S. Kamalov and S. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 4494.
- [41] S. S. Kamalov, S. N. Yang, D. Drechsel, O. Hanstein, and L. Tiator, Phys. Rev. C64 (2001) 032201(R).
- [42] E. Pietarinen, Nuovo Cimento, 12A, 522 (1972).
- [43] M. Batinić, et al., Phys. Rev. C 51, 2310 (1995); M. Batinić, et al., Physica Scripta 58, 15, (1998).
- [44] R. E. Cutkosky et al., Phys. Rev. D 20, 2839 (1979).
- [45] [http://gwdac.phys.gwu.edu/analysis/pin analysis.html](http://gwdac.phys.gwu.edu/analysis/pin%20analysis.html).
- [46] B. Juliá-Díaz, T.-S. H. Lee, A. Matsuyama, and T. Sato, Phys. Rev. C 76, 065201 (2007).
- [47] J. Durand, B. Juliá-Díaz, T.-S. H. Lee, B. Saghai, and T. Sato, Rev. C 78, 025204 (2008).
- [48] M. Döring, C. Hanhart,, F. Huang, S. Krewald, U.-G. Meissner, Nucl.Phys, A 829, 170 (2009); C. Schütz, J. Haidenbauer, J. Speth and J. W. Durso, Phys. Rev. C 57 1464 (1998); O. Krehl, C. Hanhart, S. Krewald and J. Speth, Phys. Rev. C 62 025207 (2000); A. M. Gasparyan, J. Haidenbauer, C. Hanhart and J. Speth, Phys. Rev. C 68 045207 (2003).

Bibliografija

- [49] S. Ceci, A. Švarc, and B. Zauner, Phys. Rev. Lett. 97, 062002 (2006).
- [50] M. Döring, B. Diaz private communication.
- [51] B. Saghai, et al, EBAC meeting on "Extraction of nucleon resonances", May 24 - 26, 2010, JLab, Virginia, USA; <http://ebac-theory.jlab.org/workshop/meeting/m2010/talks/Saghai-ebac-m2010.pdf>.