Vjerojatnost

primjeri i zadaci

Ivana Geček, Julije Jakšetić, Ante Mimica

27. rujna 2008.

Sadržaj

1

Familije skupova

Definicija. Neka je Ω neprazan skup. Familija $\mathcal{A}$ podskupova od Ω je **algebra** skupova na Ω ako vrijedi

(A1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(A2) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,

(A3) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Napomena. Neka su $A, B \in \mathcal{A}$. Tada vrijedi

- $A \cap B = ((A \cap B)^c)^c = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$,
- $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$,
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$,
- $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{A}$.

Primjer 1.1 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ su algebre, tzv. trivijalne algebre.
- $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ je algebra.
- $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega, \{3\}\}$ nije algebra, jer $\{3\}^c = \{1, 2, 4\} \notin \mathcal{A}_4$.

$\triangle$

Definicija. Neka je Ω neprazan skup. Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω je σ**-algebra** skupova na Ω ako vrijedi

(F1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(F2) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$,

(F3) $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Napomena. Ako su $A_n \in \mathcal{F}$, onda je $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = ((\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c)^c = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c \in \mathcal{F}$.

Primjer 1.2 Neka je Ω neprazan skup.

· $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ su σ-algebre, tzv. trivijalne σ-algebre.

△

Napomena. Primjetite da je svaka σ-algebra ujedno i algebra. Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra. Trebamo provjeriti samo svojstvo (A3). Neka su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Ako definiramo $B_1 := A_1, B_2 := A_2, \ldots, B_n := A_n, B_{n+1} := \emptyset, B_{n+2} := \emptyset, \ldots$, onda je $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$ po svojstvu (F3).
Sljedeći primjer pokazuje da obrat općenito ne vrijedi:

Zadatak 1.3 Neka je $\Omega = \mathbb{N}$ i $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega \colon A \text{ konačan ili } A^c \text{ konačan }\}$. Pokažite da je $\mathcal{A}$ algebra, ali nije σ-algebra.

Rješenje: Provjerimo svojstva (A1)-(A3):

(A1) $\emptyset$ je konačan po definiciji,

(A2) $A \in \mathcal{A} \implies A = (A^c)^c$ konačan ili A^c konačan $\implies A^c \in \mathcal{A}$,

(A3) Neka su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Imamo dvije mogućnosti:

1° $A_1, \ldots, A_n$ su svi konačni. Tada je i njihova konačna unija $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ konačna pa je iz $\mathcal{A}$;

2° postoji $1 \leq k \leq n$ takav da je A_k^c konačan
$\implies (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \subseteq A_k^c$ pa je $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$ konačan kao podskup konačnog skupa, odakle slijedi da je $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Pokažimo da $\mathcal{A}$ nije σ-algebra. Uzmimo $A_n := \{2n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $A_n \in \mathcal{A}$, za sve $n \in \mathbb{N}$, ali $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{A}$, jer ni $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ ni $A^c = \{1, 3, 5, \ldots\}$ nisu konačni pa ne vrijedi svojstvo (F3).

$\triangle$

Zadatak 1.4 Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Odredite najmanju σ-algebru na Ω koja sadrži skupove

$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{1, 2\},\ A_3 = \{1, 2, 3\},\ A_4 = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Rješenje: Neka je $\mathcal{F}$ tražena σ-algebra. Zbog $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{F}$ mora vrijediti

$$A_2 \setminus A_1 = \{2\},\ A_3 \setminus A_2 = \{3\},\ A_4 \setminus A_3 = \{4\},\ A_4^c = \{5\} \in \mathcal{F}.$$

Dakle, $\mathcal{F}$ sadrži skupove $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ pa mora sadržavati i sve njihove konačne unije, odakle slijedi da je $\mathcal{P}(\Omega) \subseteq \mathcal{F}$. Jer je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ispunjeno uvijek, vidimo da je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$\triangle$

Zadatak 1.5 Neka je $\{\mathcal{F}_\alpha \colon \alpha \in I\}$ neka familija σ-algebri. Pokažite da je i $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ σ-algebra.

Rješenje: Provjerimo svojstva $(F1) - (F3)$.

(F1) $\emptyset \in F_\alpha, \forall\, \alpha \in I \implies \emptyset \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$

(F2) $A \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha \implies A \in \mathcal{F}_\alpha, \forall\, \alpha \in I \implies A^c \in \mathcal{F}_\alpha,\ \forall \alpha \in I$
$\implies A^c \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$

(F3) $A_n \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha, n \in \mathbb{N} \implies A_n \in \mathcal{F}_\alpha, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, \alpha \in I$
$\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_\alpha,\ \forall \alpha \in I \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha.$

$\triangle$

Definicija. Neka je $\mathcal{S}$ neka familija podskupova od Ω. Definiramo

$$\sigma(\mathcal{S}) := \bigcap_{\{\mathcal{F}\supseteq\mathcal{S},\ \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\}} \mathcal{F}$$

sa $\sigma(\mathcal{S})$ i zovemo **σ-algebra generirana familijom** $\mathcal{S}$. Analogno definiramo i **algebru generiranu familijom** $\mathcal{S}$.

Napomena. Primjetite da je definicija dobra:

(a) gornji presjek je neprazan, jer je $\mathcal{P}(\Omega)$ sigurno jedna σ-algebra koja je uvijek uključena u gornji presjek;

(b) iz Zadatka 1.5 slijedi da je $\sigma(\mathcal{S})$ σ-algebra;

(c) $\sigma(\mathcal{S})$ je najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{S}$. Naime, ako je $\mathcal{F}_0$ neka σ-algebra koja sadrži $\mathcal{S}$, onda je

$$\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap_{\{\mathcal{F}\supseteq\mathcal{S},\ \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\}} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0.$$

Zadatak 1.6 Odredite najmanju algebru na $\mathbb{N}$ koja sadrži skupove oblika $A_n = \{n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje: Neka je $\mathcal{F}$ tražena algebra. Tvrdimo da je

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} =: \{A \subseteq \Omega\colon A \text{ konačan ili } A^c \text{ konačan }\}.$$

Zbog $A_n \in \mathcal{G}$, za $n \in \mathbb{N}$, slijedi da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, jer je po zadatku 1.3 $\mathcal{G}$ algebra. Pokažimo i drugu inkluziju. Neka je $A \in \mathcal{G}$. Tada imamo dvije mogućnosti:

1° A konačan
$\Longrightarrow$ $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ pa je $A = \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{\{a_k\}}_{\in\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

2° A^c konačan
$\Longrightarrow$ iz 1° slijedi da je $A^c \in \mathcal{F}$, odakle je $A = (A^c)^c \in \mathcal{F}$.

Dakle, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ i konačno $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

△

Zadatak 1.7 Neka je $A_1, \ldots, A_n$ konačna particija skupa Ω, tj. $\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$, za $i \neq j$. Nađite najmanju σ-algebru koja sadrži skupove $A_1, \ldots, A_n$.

Rješenje: Neka je $\mathcal{F}$ tražena σ-algebra. Tvrdimo da je $\mathcal{F} = \mathcal{G} =: \{$ sve moguće unije skupova $A_1, \ldots, A_n\} \cup \{\emptyset\}$. Primjetite da $\mathcal{G}$ ima 2^n elemenata. Provjerimo da je $\mathcal{G}$ σ-algebra:

(F1) $\emptyset \in \mathcal{G}$ po deficiji familije $\mathcal{G}$;

(F2) $A \in \mathcal{G} \implies A = A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}$ pa je $A^c = \displaystyle\bigcup_{i \notin \{i_1,\ldots,i_k\}} A_i$=unija nekih od skupova $A_1, \ldots, A_n$ i kao takva je iz $\mathcal{G}$;

(F3) $B_k \in \mathcal{G}$, $k \in \mathbb{N} \implies B_k =$ unija nekih od skupova $A_1, \ldots A_n$, za sve $k \in \mathbb{N}$ pa je $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ unija nekih od skupova $A_1, \ldots A_n$ i kao takva je iz $\mathcal{G}$.

Odavde je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Obratno, ako je $A \in \mathcal{G}$, onda je $A = A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k} \in \mathcal{F}$ pa je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Dakle, $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

$\triangle$

Zadatak 1.8 Neka je $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Nađite najmanju σ-algebru $\mathcal{F}$ koja sadrži skupove $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4\}$.

Rješenje: Ideja je da nađemo "najfiniju moguću" particiju skupa Ω na skupove koji se nalaze u traženoj σ-algebri. U ovom slučaju $\mathcal{F}$ mora sadržavati i skupove:

$A \setminus B = \{1, 2\}$

$A \cap B = \{3\}$

$B \setminus A = \{4\}$

$(A \cup B)^c = \{0, 5\}$

i primijetite da je ovo najfinija particija pa je tražena particija $\Omega = \{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{0, 5\}$. Iz zadatka 1.7 slijedi da je

$$\mathcal{F} = \{ \text{ sve unije skupova } \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{0, 5\}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Primjetite da $\mathcal{F}$ ima $2^4 = 16$ elemenata.

$\triangle$

Definicija. Neka je (A_n) niz podskupova od Ω. Definiramo **limes superior** i **limes inferior** niza podskupova (A_n) redom sa

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,$$

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Zadatak 1.9 Pokažite da vrijedi

$$\limsup_n A_n = \{\omega \in \Omega \colon \omega \text{ se nalazi u beskonačno mnogo skupova } A_n\}.$$

Rješenje: Neka je $B := \{\omega \in \Omega \colon \omega$ se nalazi u beskonačno mnogo skupova $A_n\}$. Pokazat ćemo da je $(\limsup_n A_n)^c = B^c$:

$$\boxed{\subseteq} \ \omega \in (\limsup_n A_n)^c = (\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c$$

$\Longrightarrow$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\omega \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c$
$\Longrightarrow$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $\omega \notin A_n$, $\forall n \geq k$
$\Longrightarrow$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da se ω nalazi samo u nekima od skupova $A_1, \ldots, A_k$
$\Longrightarrow$ ω se nalazi samo u konačno mnogo skupova A_n
$\Longrightarrow$ $\omega \in B^c$.

$\boxed{\supseteq}$ $\omega \in B^c \Longrightarrow$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $\omega \notin A_n$, $\forall n \geq k$
$\Longrightarrow \omega \notin \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Longrightarrow \omega \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \limsup_n A_n$.

$\triangle$

Napomena. Može se pokazati i da je

$$\liminf_n A_n = \{\omega \in \Omega \colon \omega \text{ se nalazi u svim osim konačno mnogo skupova } A_n\}$$

(pogledajte zadatak 1.20) pa uz ove interpretacije skupova $\limsup\limits_n A_n$ i $\liminf\limits_n A_n$ lako vidimo da vrijedi

$$\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n.$$

Zadatak 1.10 Neka su $B, C \subseteq \Omega$. Definiramo niz

$$A_n = \begin{cases} B, & n \text{ paran} \\ C, & n \text{ neparan} \end{cases}.$$

Odredite $\liminf_n A_n$ i $\limsup_n A_n$.

Rješenje:

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} (B \cup C) = B \cup C,$$

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B \cap C) = B \cap C.$$

△

Zadatak 1.11 Neka su $A \in \Omega$ i $B_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Pokažite da vrijedi

$$A \setminus \liminf_n B_n = \limsup_n (A \setminus B_n).$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} A \setminus \liminf_n B_n &= A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} B_n)^c = A \cap (\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^c) \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (A \cap B_n^c) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (A \setminus B_n) = \limsup_n (A \setminus B_n). \end{aligned}$$

△

Zadaci za vježbu

1.12 Pokažite da za $A_n \subseteq \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ vrijede **de Morganovi zakoni**:

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c, \quad (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

1.13 Neka su $A, B \subseteq \Omega$. Pokažite da vrijedi

(a) $A \cup B = A \cap B \iff A = B$,

(b) $A \cap B = A \iff A \subseteq B$,

(c) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B \iff A \cap B = \emptyset$,

(d) $(A \cup B) \cap B^c = A \iff A \cap B = \emptyset$.

1.14 Pokažite da za skupove $A, B, C \subseteq \Omega$ vrijedi

(a) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$,

(b) $A \triangle B = C \iff A = B \triangle C$,

(c) $A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$,

(d) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

1.15 Neka su A, B i C događaji vezani uz neki eksperiment. Prikažite pomoću A, B i C sljedeće događaje:

(a) dogodio se barem jedan gornji događaj,

(b) dogodio se točno jedan gornji događaj,

(c) dogodila su se točno dva gornja događaja,

(d) nije se dogodilo više od dva gornja događaja.

1.16 Neka je $\Omega = \mathbb{R}$ i $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega \colon A \text{ prebrojiv ili } A^c \text{ prebrojiv } \}$. Pokažite da je $\mathcal{F}$ σ-algebra.

1.17 Neka su $A, B \subseteq \Omega$. Nađite najmanju σ-algebru generiranu skupovima A i B.

1.18 Nađite beskonačnu familiju podskupova od $\mathbb{R}$ koja sadrži skup $\mathbb{R}$, zatvorena je na prebrojive presjeke i prebrojive unije, ali nije σ-algebra.

1.19 Neka su $A \in \Omega$ i $B_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Pokažite da vrijedi

$$A \setminus \limsup_n B_n = \liminf_n (A \setminus B_n).$$

1.20 Pokažite da vrijedi

$$\liminf_n A_n = \{\omega \in \Omega \colon \omega \text{ se nalazi u svim osim konačno mnogo skupova } A_n\}.$$

1.21 Neka je $\Omega = [0, 1]$ i $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω koja sadrži sve segmente

$$[a, b], 0 \le a < b \le 1.$$

(a) Pripadaju li skupovi $\langle \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \rangle$ i $\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \rangle \cup [\frac{2}{3}, 1\rangle$ σ-algebri $\mathcal{F}$?

(b) Prikažite skup $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ pomoću familije

$$\mathcal{D} = \{[a, 1] \colon 0 \le a \le 1\}$$

koriteći osnovne skupovne operacije.

1.22 Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Odredite najmanju σ-algebru na Ω koja sadrži skupove

$$A_1 = \{1, 3, 5\},\ A_2 = \{2, 4, 6\},\ A_3 = \{1, 3\},\ A_4 = \{2, 6\},\ A_5 = \{3\} \text{ i } A_6 = \{2\}.$$

1.23 Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Odredite najmanju σ-algebru na Ω koja sadrži skupove A, B i C ako je

(a) $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$, $A = \{2, 5\}$, $A \cap B = \{2\}$, $C = \{3, 6\}$,

(b) $A \setminus B = \{1, 3\}$, $B \setminus A = \{2, 6\}$, $A \cap B = \{4\}$, $C = \{5\}$.

1.24 Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra. Pokažite da $\mathcal{F}$ ne može imati točno 6 elemenata.

1.25 Neka je $\mathcal{F}$ algebra takva da za niz događaja $(A_n) \subseteq \mathcal{F}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ vrijedi $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Pokažite da je $\mathcal{F}$ σ-algebra.

1.26 (a) Neka su $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$. Pokažite da je

$$\limsup_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(b) Neka su $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$. Pokažite da je

$$\liminf_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

1.27 Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pokažite da vrijedi:

(a) $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, a + \frac{1}{n}\rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a - \frac{1}{n}, a]$,

(b) $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, b + \frac{1}{n}\rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a - \frac{1}{n}, b]$,

(c) $\langle a, b\rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a, b - \frac{1}{n}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a - \frac{1}{n}, b\rangle$

1.28 Neka je

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n}\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte u kakvom su odnosu skupovi A_n. Odredite $\liminf_n A_n$ i $\limsup_n A_n$.

1.29 U svakom od sljedećih primjera odredite $\liminf_n A_n$ i $\limsup_n A_n$:

(a) $A_n = [10 + \frac{1}{n}, 15 - \frac{1}{n}]$,

(b) $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{n}\}$,

(c) $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 - \frac{1}{n} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$,

(d) $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq n^2 - 10n\}$.

2

Vjerojatnosni prostor

Definicija. Neka je $\mathcal{F}$ $\sigma-$algebra na $\Omega \neq \emptyset$. Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ zovemo **izmjeriv prostor.**
Definicija. Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Funkciju

$$\mathrm{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

nazivamo **vjerojatnost** ili **vjerojatnosna mjera** ako vrijedi

(P1) $\mathrm{P}(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{F}$ (**pozitivnost**)

(P2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ (**normiranost**)

(P3) $\forall A_n \in \mathcal{F}, A_n \cap A_m = \emptyset,\ m \neq n \Rightarrow$
$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$ ($\sigma-$**aditivnost**)

Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ zovemo **vjerojatnosni** prostor.

- $\mathrm{P}(\emptyset) = ?$
  Stavimo u $(P3)$ $A_1 = \Omega,\ A_n = \emptyset$ za $n \geq 2 \Rightarrow$
  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega,\ A_n \cap A_m = \emptyset,\ m \neq n \Rightarrow$
  $1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = 1 + \mathrm{P}(\emptyset) + \mathrm{P}(\emptyset) + \cdots \Rightarrow$

$$\mathrm{P}(\emptyset) = 0.$$

- $A_1, \ldots A_k \in \mathcal{F},\ A_n \cap A_m = \emptyset,\ m \neq n$
  Stavimo $B_n = \begin{cases} A_n,\ 1 \leq n \leq k \\ \emptyset. \end{cases}$
  $\Rightarrow (B_n)$ su disjunktni događaji i $\bigcup_{n=1}^{k} A_n \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$,pa je
  $\mathrm{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n) = \mathrm{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_n) =$

$$= \sum_{n=1}^{k} \mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}(\emptyset) + \mathrm{P}(\emptyset) \cdots = \sum_{n=1}^{k} \mathrm{P}(A_n), \text{ tj.}$$

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = \sum_{n=1}^{k} \mathrm{P}(A_n) \qquad \textbf{(konačna aditivnost)}$$

- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathrm{P}(A^c) =?$
  $1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(A \cup A^c) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c) \Rightarrow \mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$.
- Neka su $A, B \in \mathcal{F},\ A \subseteq B$. Tada je $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$. (**monotonost**) Računamo:
  $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cup B \backslash A) = (disjunktnost) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \backslash A) \geq \mathrm{P}(A)$.
  Iz zadnje jednakosti također također zaključujemo
  $\mathrm{P}(B \backslash A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$.

$\triangle$

Zadatak 2.1 Neka su $A, B \in \mathcal{F}$. Pokažite da vrijedi

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Rješenje: Koristimo se s tri jednadžbe:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A \backslash B) + \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(B \backslash A) \\ \mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \backslash B) + \mathrm{P}(A \cap B) \\ \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(B \backslash A) + \mathrm{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

Sada je
$\mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) = -P(A \cap B) \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$\triangle$

Zadatak 2.2 Neka su $A, B \in \mathcal{F}$, takvi da je $\mathrm{P}(A \cup B) = 0.8$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0.2$, $\mathrm{P}(A^c) = 0.6$ Izračunajte $\mathrm{P}(A),\ \mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A \backslash B)$.

Rješenje: $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - 0.6 = 0.4$
$\mathrm{P}(B) = $ (**Zad** 2.1) $= \mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A \cap B) = 1 - 0.4 = 0.6$
$\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$.

$\triangle$

Zadatak 2.3 Dokažite **Sylvesterovu formulu**: Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, tada je

$$\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \\ + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^n \mathrm{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k).$$

Rješenje: Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.
Baza: Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi po Zad. 2.1
Pretpostavka: Pretpostavimo da gornja formula vrijedi za sve $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$.
Korak: Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1} \in \mathcal{F}$. Tada je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup A_{n+1}) =& (Zad. 2.1) = \mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k \cap A_{n+1})) = \\
(pretpostavka) =& \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
& - \cdots + (-1)^n \mathrm{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap A_{n+1}) + \cdots \\
(grupiranjem) =& \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1\le i<j\le n+1} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n+1} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
& - \cdots + (-1)^{n+1} \mathrm{P}(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k)
\end{aligned}
$$

$\triangle$

Zadatak 2.4 Neka su $A,\ B,\ C \in \mathcal{F}$. Pokažite da je

(a) $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) \le 2$

(b) $\mathrm{P}(A \cup B)\mathrm{P}(A \cap B) \le \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

Rješenje: (a)Računamo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap B \cap C) &= 1 - \mathrm{P}((A \cap B \cap C)^c) = 1 - \mathrm{P}(A^c \cup B^c \cup C^c) \\
(Sylvester) &= 1 - [\mathrm{P}(A^c) + \mathrm{P}(B^c) + \mathrm{P}(C^c) - \mathrm{P}(A^c \cap B^c) - \\
& - \mathrm{P}(A^c \cap C^c) - \mathrm{P}(B^c \cap C^c) + \mathrm{P}(A^c \cap B^c \cap C^c)] \\
&= 1 - (1 - \mathrm{P}(A)) - (1 - \mathrm{P}(B)) - (1 - \mathrm{P}(C)) + \underbrace{\mathrm{P}(A^c \cap B^c)}_{\ge 0} \\
& + \underbrace{\mathrm{P}(A^c \cap C^c)}_{\ge 0} + [\mathrm{P}(B^c \cap C^c) - \mathrm{P}(A^c \cap B^c \cap C^c)] \\
&\ge -2 + \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}((B^c \cap C^c) \backslash A^c) \\
&\ge -2 + \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C)
\end{aligned}
$$

(b) $\mathrm{P}(A \cup B)\mathrm{P}(A \cap B) = (\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B))\mathrm{P}(A \cap B))$
Trebamo pokazati

$$[\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)]\mathrm{P}(A \cap B)) \le \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{P}(A)[\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B)]+\mathrm{P}(A\cap B)[\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)]\leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\underbrace{(\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B))}_{\geq 0}\underbrace{(\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B))}_{\leq 0}\leq 0.$$

$\triangle$

Zadatak 2.5 Neka su $A,\ B,\ C\in\mathcal{F}$. Pokažite da vrijedi

(a) $|\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)|\leq \mathrm{P}(A\triangle B)$.

(b) $|\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)|\leq \mathrm{P}(B\triangle C)$.

(c) $\mathrm{P}(A\triangle B)\leq \mathrm{P}(A\triangle C)+\mathrm{P}(C\triangle B)$.

(d) Ako je $\mathrm{P}(A\triangle B)=0$ koliko je $\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$?

Rješenje: (a) Vrijedi

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\backslash B)+\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B\backslash A)+\mathrm{P}(B\cap A)$$
$$\Rightarrow |\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)|=|\mathrm{P}(A\backslash B)-\mathrm{P}(B\backslash A)|\leq \mathrm{P}(A\backslash B)+\mathrm{P}(B\backslash A)=\mathrm{P}(A\triangle B).$$

(b) Stavimo $E:=A\cap B,\ F:=A\cap C\Rightarrow$

$$\begin{aligned}E\triangle F=(E\backslash F)\cup(F\backslash E)=&[(A\cap B)\backslash(A\cap C)]\cup[(A\cap C)\backslash(A\cap B)]\\=&[(A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)]\cup[(A\cap C)\cap(A^c\cup B^c)]\\=&[A\cap(B\backslash C)]\cup[A\cap(C\backslash B)]\\=&A\cap[(B\backslash C)\cup(C\backslash B)]\\=&A\cap(B\triangle C)\subseteq B\triangle C\end{aligned}$$

Dakle $E\triangle F\subseteq B\triangle C$. Sada imamo
$|\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)|=|\mathrm{P}(E)-\mathrm{P}(F)|\leq((a)dio)\leq \mathrm{P}(E\triangle F)\leq \mathrm{P}(B\triangle C)$.

(c)

$$\begin{aligned}A\triangle B=A\backslash B\cup B\backslash A\subseteq(*)\subseteq&(A\backslash C)\cup(C\backslash B)\cup(B\backslash C)\cup(C\backslash A)=\\=&A\triangle C\cup C\triangle B\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(A\triangle B)\leq \mathrm{P}(A\triangle C)+\mathrm{P}(C\triangle B),$$

pri čemu smo se u $(*)$ koristili

$$A \backslash B = A \cap B^c = A \cap B^c \cap (C \cup C^c) = (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \subseteq$$
$$\subseteq (B^c \cap C) \cup (A \cap C^c) = (C \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

i analogno, $B \backslash A \subseteq (B \backslash C) \cup (C \backslash A)$.

(d) Ako je $\mathrm{P}(A \triangle B) = 0$ tada je zbog (a)-dijela zadatka
$|\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)| \leq 0 \Rightarrow \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) = 0$.

$\triangle$

Zadatak 2.6 Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i neka su P i Q dvije vjerojatnosne mjere na $(\Omega, \mathcal{F})$.

(a) Da li je $\frac{\mathrm{P}}{2}$ vjerojatnosna mjera?

(b) Da li je P^2 vjerojatnosna mjera?

(c) Odredite $a, b \geq 0$ tako da $a\mathrm{P} + b\mathrm{Q}$ bude vjerojatnosna mjera.

Rješenje: (a) $\frac{\mathrm{P}}{2}$ nije vjerojatnosna mjera jer je $\frac{\mathrm{P}}{2}(\Omega) = 1/2 \neq 1$.

(b) P^2 nije, općenito, vjerojatnosna mjera jer ako uzmemo npr. vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ na kojem su disjunktni događaji $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathrm{P}(A) = 1/3,\ \mathrm{P}(B) = 2/3 \Rightarrow$
$\mathrm{P}^2(A \cup B) = (\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B))^2 = 1$, dok je
$\mathrm{P}^2(A) + \mathrm{P}^2(B) = 1/9 + 4/9 = 5/9 \neq 1$.
Dakle, općenito P^2 nije vjerojatnost jer ne vrijedi konačna aditivnost.

(c) Ako bi $a\mathrm{P} + b\mathrm{Q}$ bila vjerojatnosna mjera nužno mora vrijediti
$1 = (a\mathrm{P} + b\mathrm{Q})(\Omega) = a\mathrm{P}(\Omega) + b\mathrm{Q}(\Omega) = a + b$. Pokažimo da je to dovoljan uvjet da vrijede i ostala dva svojstva iz definicije.
Nenegativnost je očigledna. Neka su dalje $A_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N}$ disjunkni događaji. Tada je

$$
\begin{aligned}
(a\mathrm{P} + b\mathrm{Q})(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) =& a\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) + b\mathrm{Q}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \\
=& a\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) + b\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Q}(A_n) \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} a\mathrm{P}(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b\mathrm{Q}(A_n) \\
\text{(zbroj konverg. redova)} =& \sum_{n=1}^{\infty} (a\mathrm{P}(A_n) + b\mathrm{Q}(A_n)) \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} (a\mathrm{P} + b\mathrm{Q})(A_n)
\end{aligned}
$$

Dakle, uz $a, b \geq 0,\ a + b = 1,\ a\mathrm{P} + b\mathrm{Q}$ jest vjerojatnost.

$\triangle$

Zadaci za vježbu

2.7 Dokažite da za sve $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathrm{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - (n-1).$$

(Uputa: mat. indukcija)

2.8 Dokažite **Booleovu nejednakost**: Za $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k).$$

2.9 Dokažite **Bonferronijevu nejednakost:** Za $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j).$$

2.10 Neka su $A, B \in \mathcal{F}$. Pokažite da vrijedi

$$\mathrm{P}(A \cap B)^2 + \mathrm{P}(A^c \cap B)^2 + \mathrm{P}(A \cap B^c)^2 + \mathrm{P}(A^c \cap B^c)^2 \geq 1/4.$$

Pokažite da vrijedi jednakost ako i samo ako je $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1/2$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 1/4$.
(Uputa: koristite aritmetičko-kvadratnu nejednakost)

2.11 Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$. Pokažite da vrijedi

(a) $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) \leq \min\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(C)\}$,

(b) $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) \geq \max\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(C)\}$.

2.12 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ particija od Ω i $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$. Definirajmo

$$\mathrm{Q} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

sa

$$\mathrm{Q}(B) = \frac{a_1 \mathrm{P}(A_1 \cap B) + \cdots + a_n \mathrm{P}(A_n \cap B)}{a_1 \mathrm{P}(A_1) + \cdots + a_n \mathrm{P}(A_n)}, \; B \in \mathcal{F}.$$

Je li Q vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$?

2.13 U bolničkoj čekaonici 70% ljudi ima polomljene kosti, 75% pati od iscrpljenosti, 80% boli želudac i 85% ima vrućicu. Koliki je minimalni postotak ljudi u čekaonici koji imaju sve simptome? (*Jutarnji list 8.6.2007, str. 61*)

2.14 Neka su A i B događaji. Pokažite da je

$$\max\{\mathrm{P}((A\cup B)^c), \mathrm{P}(A\cap B), \mathrm{P}(A\triangle B)\} \geq \frac{1}{5}.$$

2.15 Neka je $\Omega = \{a,b,c\}$. Ako je $\mathrm{P}(\{a,b\}) = 0.7$, $\mathrm{P}(\{b,c\}) = 0.6$, odredite vjerojatnosti događaja $\{a\}, \{b\}, \{c\}$.

2.16 Neka je $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathrm{P}(\omega) = \frac{1}{\omega(\omega+1)}$, $\omega \in \Omega$. Je li $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor?

2.17 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ niz disjunktnih događaja. Postoji li $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n)$?

2.18 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A_n \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathrm{P}(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$, za $n \in \mathbb{N}$.

(a) Izračunajte $\mathrm{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$.

(b) Izračunajte $\mathrm{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_n)$.

2.19 Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i $B_1, B_2, \ldots, B_n$ događaji na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Pokažite da vrijedi nejednakost

$$\mathrm{P}((\bigcup_{k=1}^{n} A_k)\backslash(\bigcup_{k=1}^{n} B_k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k\backslash B_k).$$

2.20 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor. Postoje li $A, B, C \in \mathcal{F}$ takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(C) &> \frac{3}{4} \\ \mathrm{P}(A\Delta B) + \mathrm{P}(B\Delta C) &< \frac{2}{3}\ ? \end{aligned}$$

2.21 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$. Pokažite nejednakost

$$\mathrm{P}(A\cap B) \leq \sqrt{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}.$$

2.22 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor.

(a) Ako je $(A_n) \subseteq \mathcal{F}$ niz događaja takvih da je $\mathrm{P}(A_n) = 1$, za $n \in \mathbb{N}$, izračunajte

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \ \text{ i } \ \mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n).$$

(b) Neka su A, $B \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{4}$ i $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$. Pokažite da vrijedi

$$\frac{1}{12} \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}.$$

2.23 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je

$$\mathcal{N} = \{E \subseteq \Omega \colon \exists\, F \in \mathcal{F} \text{ takav da je } E \subseteq F \text{ i } \mathrm{P}(F) = 0\}\,.$$

(a) Pokažite da je familija $\mathcal{N}$ zatvorena na prebrojive unije.

(b) Pokažite da je familija

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq \Omega \colon \exists\, B \in \mathcal{F} \text{ takav da je } A \triangle B \in \mathcal{N}\}$$

σ-algebra.

2.24 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B, C \in \mathcal{F}$. Vrijedi li

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A^c \cap B \cap C) - \\ - \mathrm{P}(A \cap B^c \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C^c) - 2\mathrm{P}(A \cap B \cap C)?\end{aligned}$$

3

Klasična definicija vjerojatnosti

Definicija. Za Ω konačan ili prebrojiv $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ zovemo **diskretni vjerojatnosni prostor.**

Zadatak 3.1 Bacamo 2 simetrične kocke. Odredimo vjerojatnost da je suma brojeva na kockama jednaka 7.

1. vjerojatnosni prostor:

$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \quad , \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \ .$$

Zbog simetričosti kocke pretpostavljamo da svi elementarni događaji imaju jednaku vjerojatnost:

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(\{(i,j)\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$$

za svako i, j.

2. $A =\{$ suma brojeva na kockama je 7$\}= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

($(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ = 'povoljni' elementarni događaji)

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}((1,6)) + \mathrm{P}((2,5)) + \ldots + \mathrm{P}((6,1)) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$\triangle$

Klasičan (Laplaceov) model:

Neka je $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i P vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ takva da svi elementarni događaji $\{\omega_k\}$ imaju jednake vjerojatnosti, tj. $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|}$, $\forall\ i =$

$1, \ldots, n$.
Tada za $A \in \mathcal{F}$, iz konačne aditivnosti od P, slijedi:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zadatak 3.2 Simetričnu kocku bacamo 3 puta. Kolika je vjerojatnost da ćemo svaki puta dobiti veći broj?

Rješenje:

$\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
$\mathrm{P}(\{(i, j, k)\}) = \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$
$A =$\{svaki puta dobivamo veći broj\}$= \{(i, j, k) : 1 \leq i < j < k \leq 6\}$
$\Rightarrow \quad |A| = \binom{6}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{3}}{6^3} = \frac{5}{54}.$

$\triangle$

Zadatak 3.3 Lift u nekoj zgradi može stati na 10 katova. Ako je u njemu 7 putnika, kolika je vjerojatnost da svaki od putnika izađe na različitom katu?

Rješenje:

$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_7) \ : \ i_1, \ldots i_7 \in \{1, \ldots, 10\}\} = \{1, \ldots, 10\}^7 \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 10^7$

$A :=$\{svaki putnik izlazi na različitom katu\}

$|A| = \binom{10}{7} \cdot 7! \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{7} \cdot 7!}{10^7} \approx 0.06$

$\triangle$

Zadatak 3.4 U vrećici imamo 550 jabuka, od čega je 2% trulih. Kolika je vjerojatnost da u slučajnom uzorku od 25 jabuka budu točno 2 trule?

Rješenje:

$\Omega =$\{svi 25-člani podskupovi od 550 jabuka\} $\Rightarrow \quad |\Omega| = \binom{550}{25}$

$A :=$\{točno su 2 jabuke u uzorku trule\}

Kako je u vreći $0.02 \cdot 550 = 11$ trulih jabuka

$\Rightarrow \quad |A| = \binom{11}{2} \cdot \binom{550-11}{25-2} = \binom{11}{2} \cdot \binom{539}{23}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{\binom{11}{2} \cdot \binom{539}{23}}{\binom{550}{25}} \approx 0.074$

$\triangle$

Zadatak 3.5 Iz skupa $\{1, 2, \ldots, 100\}$ su nasumce odabrana 2 broja, m i n. Izračunajte vjerojatnost

(a) da je $m^n + n^m$ neparan broj,

(b) da je $m^n \cdot n^m$ paran broj.

Rješenje:

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}^2 \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 100^2$

Vrijedi:
a^b neparan $\Leftrightarrow$ a neparan, a^b paran $\Leftrightarrow$ a paran,
$a + b$ neparan $\Leftrightarrow$ (a paran i b neparan) ili (a neparan i b paran) ,
$a \cdot b$ neparan $\Leftrightarrow$ a i b neparni

(a) $A := \{(m, n) \in \Omega : m^n + n^m \text{neparan}\} =$
$= \{(m, n) \in \Omega : \text{m paran, n neparan ili m neparan, n paran}\}$
$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{50 \cdot 50 + 50 \cdot 50}{100^2} = \frac{1}{2}$.

(b) $B := \{(m, n) \in \Omega : m^n \cdot n^m \text{paran}\}$
$\Rightarrow \quad B^c = \{(m, n) \in \Omega : m^n \cdot n^m \text{neparan}\} = \{(m, n) \in \Omega : \text{i } m \text{ neparan i } n \text{ neparan}\}$
$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(B^c) = 1 - \frac{50 \cdot 50}{100^2} = \frac{3}{4}$.

$\triangle$

Zadatak 3.6 Na slučajan način raspoređujemo 30 jednakih jabuka u 8 različitih kutija (u svaku kutiju može stati proizvoljno mnogo jabuka). Izračunajte vjerojatnost da

(a) se u svakoj kutiji nalaze barem 3 jabuke ,

(b) su 3 kutije ostale prazne.

Rješenje:

$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_8) \quad : \quad x_1 \geq 0, \ldots, x_8 \geq 0 \quad , \quad x_1 + \ldots + x_8 = 30\}$

$|\Omega| = \text{broj rješenja od} \begin{cases} x_1 + \ldots + x_8 = 30 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 8. \end{cases}$

Zamislimo da smo jabuke poredali u red. Tada naš problem raspoređivanja jabuka u 8 kutija odgovara problemu raspoređivanja 7 pregrada među te poredane jabuke. Stoga je $|\Omega| = \binom{30+7}{7} = \binom{37}{7}$.

(a) $A := \{(x_1, \ldots, x_8) \;\; : \;\; x_1 \geq 3, \ldots, x_8 \geq 3 \;\; , \;\; x_1 + \ldots + x_8 = 30\}$

$$\Rightarrow \quad |A| = \text{broj rješenja od} \begin{cases} x_1 + \ldots + x_8 = 30 \\ x_i \geq 3, \quad i = 1, \ldots, 8. \end{cases}$$

Definiramo $y_i := x_i - 3 \quad \Rightarrow \quad |A| =$broj rješenja od $\begin{cases} y_1 + \ldots + y_8 = 30 - 8 \cdot 3 = 6 \\ y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 8. \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad |A| = \binom{6+7}{7} = \binom{13}{7} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{13}{7}}{\binom{37}{7}}$$

(b) $B := \{(x_1, \ldots, x_8) \;\; : \;\;$ točno tri $x_i = 0$, a ostali $x_i \geq 1 \;\; , \;\; x_1 + \ldots + x_8 = 30\}$

Na $\binom{8}{3}$ načina odaberemo 3 prazne kutije, a ostale popunimo tako da niti jedna ne smije ostati prazna, tj. $x_i \geq 1$. Dakle, tražimo broj petorki $(y_1, \ldots, y_5)$ t.d.
$\begin{cases} y_1 + \ldots + y_5 = 30 \\ y_i \geq 1, \quad i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$

Definiramo $z_i = y_i - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1 + \ldots + z_5 = 30 - 5 \cdot 1 = 25 \\ z_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad |B| = \binom{8}{3} \cdot \binom{25+4}{4} = \binom{8}{3} \cdot \binom{29}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{29}{4}}{\binom{37}{7}}.$$

$\triangle$

Zadatak 3.7 Ako je u nekom društvu 30 osoba, kolika je vjerojatnost da 6 mjeseci u godini sadrži po dva njihova rođendana, a preostalih 6 mjeseci po tri?

Rješenje:

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 12\}^{30} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 12^{30}$

A :={6 mjeseci sadrži po 2 rođendana, a preostalih 6 mjeseci po 3 rođendana}

Na $\binom{12}{6}$ načina možemo odabrati 6 (od 12) mjeseca koji će sadržavati po dva rođendana. Time su određeni i preostali mjeseci koji moraju sadržavati po tri rođendana. Onda na $\binom{30}{2}$ načina odaberemo dvije osobe iz društva koje će imati rođendan u prvom od tih mjeseci sa po 2 rođendana pa na $\binom{28}{2}$ sljedeću dvojicu, itd. Dakle:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{12}{6} \cdot \binom{30}{2} \cdot \binom{28}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{20}{2} \cdot \binom{18}{3} \cdot \binom{15}{3} \cdot \ldots \cdot \binom{3}{3}}{12^{30}} = \frac{\binom{12}{6} \cdot \frac{30!}{(2!)^6 \cdot (3!)^6}}{12^{30}}$$

$\triangle$

Zadatak 3.8 (*Problem rođendana*) Izračunajte vjerojatnost da je u grupi od n ljudi barem dvoje rođeno istog dana.

Rješenje:

$A :=$ {barem dvoje od n ljudi je rođeno istog dana}
$A^c =$ {svi su rođeni na različite dane}

$|A^c| = 365 \cdot (365-1) \cdot (365-2) \cdot \ldots \cdot (365-n+1)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$

Neke vrijednosti:

n	10	20	22	23	30	40
$\mathrm{P}(A)$	0.117	0.411	0.476	0.507	0.706	0.891

△

Zadatak 3.9 U kutiji se nalazi n kuglica. Na slučajan način izvučemo neki broj kuglica. Kolika je vjerojatnost da je broj izvučenih kuglica paran?

Rješenje:

$\Omega = \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\}) \setminus \{\emptyset\} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 2^n - 1$

$A :=$ {izvučen je paran broj kuglica}$=\{S \subseteq \Omega : |S| \;\text{ paran}\}$

$\Rightarrow \quad |A| = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$

Binomni teorem $\quad \Rightarrow \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$
za $x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
za $x = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$

Zbrojimo posljednje dvije jednakosti pa dobivamo:
$2 \cdot \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \ldots\right) = 2^n \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \ldots = 2^{n-1} - 1$

$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$

△

Zadatak 3.10 Kutija sadrži 10 kuglica numeriranih brojevima $1, 2, \ldots, 10$. Na slučajan način izvlačimo 5 kuglica. kolika je vjerojatnost da četvrti po veličini od pet brojeva bude baš 8?

Rješenje:

$\Omega = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, 10\} \ : \ |A| = 5\} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = \binom{10}{5}$

Na $\binom{7}{3}$ načina odaberemo prvih tri iz skupa kuglica označenih brojevima $1, 2, \ldots, 7$, potom kao četvrtu 8 i onda još petu iz skupa kuglica označenih sa 9 ili 10. Dakle, tražena vjerojatnost je $\frac{\binom{7}{3}\cdot 1\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{5}}$.

△

Zadatak 3.11 m muškaraca i n žena se na slučajan način raspoređuju na $m+n$ sjedala složenih u redu. Kolika je vjerojatnost da sve žene sjede jedna pored druge?

Rješenje:

$\Omega =$\{sve permutacije od $m+n$ ljudi\} $\quad \Rightarrow \quad |\Omega| = (m+n)!$

Na $m+1$ način odaberemo jedan od blokova od po n uzastopnih stolaca u redu. Potom možemo u tom bloku na $n!$ načina permutirati žene među sobom. Muškarce rasporedimo na preostala slobodna sjedala i možemo ih permutirati među sobom na $m!$ načina. Dakle, tražena vjerojatnost je $\frac{(m+1)\cdot n!\cdot m!}{(m+n)!}$.

△

Zadatak 3.12 Bacamo n simetričnih kocaka. Izračunajte vjerojatnost

(a) da je produkt dobivenih brojeva djeljiv s 5,

(b) da produkt dobivenih brojeva ima zadnju znamenku 5,

(c) da produkt dobivenih brojeva ima zadnju znamenku 0.

Rješenje:

$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_n) \ : \ i_1, \ldots, i_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 6^n$

(a) $A :=$\{produkt je djeljiv s 5\}
$\Rightarrow \quad A^c =$\{produkt nije djeljiv s 5\}=\{nije pala niti jedna petica\}
$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5^n}{6^n} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$

(b) $B :=$\{produkt dobivenih brojeva je djeljiv s 2\}
$C :=$\{produkt dobivenih brojeva ima zadnju znamenku 5\}$= A \cap B^c$
$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(B^c \cap (A^c)^c) = \mathrm{P}(B^c \setminus (A^c \cap B^c)) =$

$= \mathrm{P}(B^c) - \mathrm{P}(A^c \cap B^c) = \frac{|B^c|}{|\Omega|} - \frac{|A^c \cap B^c|}{|\Omega|} = \frac{3^n}{6^n} - \frac{2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$

(c) D :={produkt dobivenih brojeva ima zadnju znamenku 0}=
={produkt je djeljiv i sa 2 i sa 5}=$A \cap B$
$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(A \cap B) = 1 - \mathrm{P}((A \cap B)^c) = 1 - \mathrm{P}(A^c \cup B^c)$ =Sylvesterova form.=
$= 1 - \mathrm{P}(A^c) - \mathrm{P}(B^c) + \mathrm{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} - \frac{|B^c|}{|\Omega|} + \frac{|A^c \cap B^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5^n}{6^n} - \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n}$

$\triangle$

Zadatak 3.13 Set za čaj sastoji se od 4 šalice i 4 tanjurića, pri čemu su po jedna šalica i jedan tanjurić iste boje. Šalice su na tanjuriće raspoređene na slučajan način. Izračunajte vjerojatnost da niti jedna šalica nije na tanjuriću iste boje.

Rješenje:

Fiksirajmo tanjuriće. Tada je Ω ={permutacije skupa{1,2,3,4}}.

A_i :={i-ta šalica je na tanjuriću iste boje} , $i = 1, 2, 3, 4$.

$\mathrm{P}(A_i) = \frac{1 \cdot 3!}{4!} = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2!}{4!} = \frac{1}{12}$,
$\mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{4!} = \frac{1}{24}$, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{4!} = \frac{1}{24}$

Tražimo

$\mathrm{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = 1 - \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ =Sylvesterova form.=
$= 1 - \Big(\sum_{i=1}^4 \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) +$
$+ \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)) =$
$= 1 - \left(4 \cdot \mathrm{P}(A_1) - \binom{4}{2} \cdot \mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + \binom{4}{3} \cdot \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) -\right.$
$\left.- \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\right) =$
$= 1 - \left(4 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{24} - \frac{1}{24}\right) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$

$\triangle$

Zadatak 3.14 U nekoj školi ima 400 učenika. Nogometom se bavi 180, košarkom 130, rukometom 100, nogometom i košarkom 40, nogometom i rukometom 30, košarkom i rukometom 20 i svim sportovima 10 učenika. Kolika je vjerojatnost da se slučajno odabrani učenik bavi

(a) barem jednim sportom,

(b) samo jednim sportom,

(c) s barem dva sporta?

Rješenje:

$A :=$\{slučajno odabrani učenik bavi se nogometom\}
$B :=$\{slučajno odabrani učenik bavi se košarkom\}
$C :=$\{slučajno odabrani učenik bavi se rukometom\}

$\mathrm{P}(A) = \frac{180}{400} = \frac{9}{20}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{130}{400} = \frac{13}{40}$, $\mathrm{P}(C) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$,
$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}$, $\mathrm{P}(A \cap C) = \frac{30}{400} = \frac{3}{40}$, $\mathrm{P}(B \cap C) = \frac{20}{400} = \frac{1}{20}$,
$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{10}{400} = \frac{1}{40}$

(a) $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) =$Sylv.for.$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) -$
$- \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{33}{40}$

(b) $A \cap B^c \cap C^c = A \setminus [(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)] \setminus [(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)] \setminus (A \cap B \cap C)$
$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A \cap B^c \cap C^c) = \mathrm{P}(A) - [\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C)] -$
$- [\mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C)] - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) =$
$= \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{3}{10}$

Analogno

$\mathrm{P}(A^c \cap B \cap C^c) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{5}$
$\mathrm{P}(A^c \cap B^c \cap C) = \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{3}{20}$

Tražena vjerojatnost je

$\mathrm{P}(A \cap B^c \cap C^c) + \mathrm{P}(A^c \cap B^c \cap C) + \mathrm{P}(A^c \cap B \cap C^c) = \frac{26}{40} = \frac{13}{20}$

(c) P(bavi se s bar dva sporta) $=$
$= \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) +$
$+ \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{7}{40}$

$\triangle$

Zadatak 3.15 U kutiji se nalazi 5 crnih, 6 bijelih i 7 zelenih kuglica. Na slučajan način izvučemo 4 kuglice. Izračunajte vjerojatnost da među izvučenim kuglicama nisu zastupljene sve tri boje.

Rješenje:

$\Omega =$\{svi 4-člani podskupovi od 5+6+7=18 kuglica\}$\Rightarrow \quad |\Omega| = \binom{18}{4}$

A :={nije zastupljena crna boja}
B :={nije zastupljena bijela boja}
C :={nije zastupljena zelena boja}

Tražimo
$\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$ =Sylv.for.= $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) -$
$- \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = (*)$.

$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{6+7}{4}}{\binom{18}{4}} = \frac{\binom{13}{4}}{\binom{18}{4}}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{\binom{5+7}{4}}{\binom{18}{4}} = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{18}{4}}$, $\mathrm{P}(C) = \frac{\binom{5+6}{4}}{\binom{18}{4}} = \frac{\binom{11}{4}}{\binom{18}{4}}$,
$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{18}{4}}$, $\mathrm{P}(A \cap C) = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{18}{4}}$, $\mathrm{P}(B \cap C) = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{18}{4}}$,
$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0$

pa je $(*) = \frac{1485}{3060} = \frac{33}{68}$.

△

Zadatak 3.16 Jednog radnog tjedna u nekom gradu 10 ljudi je pozvalo električara u svoje kuće radi popravka nekih električnih uređaja. Svaki čovjek je slučajno odabrao neki radni dan u tom tjednu i pozvao električara. Izračunajte vjerojatnost događaja A :={električar nema posla barem jedan dan}.

Rješenje:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}^{10} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 5^{10}$

A_i :={i-ti radni dan nitko nije zvao električara} , $i = 1, \ldots, 5$.

$\mathrm{P}(A_i) = \frac{4^{10}}{5^{10}}$, $\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \frac{3^{10}}{5^{10}}$, $\mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{2^{10}}{5^{10}}$,
$\mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) = \frac{1}{5^{10}}$, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = 0$.

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$ pa je tražena vjerojatnost

$\mathrm{P}(A)$ =Sylv.form.= $\binom{5}{1} \cdot \mathrm{P}(A_1) - \binom{5}{2} \cdot \mathrm{P}(A_1 \cap A_2) +$
$+ \binom{5}{3} \cdot \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \binom{5}{4} \cdot \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) =$
$= 5 \cdot \frac{4^{10}}{5^{10}} - 10 \cdot \frac{3^{10}}{5^{10}} + 10 \cdot \frac{2^{10}}{5^{10}} - 5 \cdot \frac{1}{5^{10}} =$
$= \frac{5 \cdot 4^{10} - 10 \cdot 3^{10} + 10 \cdot 2^{10} - 5}{5^{10}}$.

△

Zadatak 3.17 Neka je X skup, $|X| = n$. Odredite vjerojatnost da su dva nasumce izabrana neprazna različita podskupa od X disjunktna.

Rješenje:

$\Omega = \{(A,B)\ :\ A,B \subseteq X\ ,\ A \neq B\ ,\ A,B \neq \emptyset\} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = (2^n - 1)\cdot(2^n - 2)$

C :={izabrani podskupovi su disjunktni}=$\{(A,B)\ :\ A \cap B = \emptyset\}$

Neka je $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, t.d. je $|A| = k$, za $1 \leq k \leq n-1$. Tada B mora biti neprazan podskup od $X \setminus A$ pa zbog $|X \setminus A| = n-k$, B biramo na $2^{n-k}-1$ način. Dakle, ako je $|A| = k$, takvih ('povoljnih') parova ima $\binom{n}{k}\cdot(2^{n-k}-1)$.

$\Rightarrow \quad |C| = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot(2^{n-k}-1) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} =$ binomni teorem $=$
$= ((1+2)^n - \binom{n}{0}\cdot 2^n) - ((1+1)^n - \binom{n}{0}) = 3^n - 2^n - 2^n + 1 = 3^n - 2^{n+1} + 1$

$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(C) = \frac{3^n - 2^{n+1}+1}{(2^n-1)\cdot(2^n-2)}$

△

Zadatak 3.18 U kutiji se nalazi 10 crvenih, 8 bijelih i 5 plavih kuglica. Na slučajan način izvlačimo iz kutije 1 kuglicu s vraćanjem. Kolika je vjerojatnost da će crvena kuglica biti izvučena prije bijele?

Rješenje:

P=plava kuglica, B=bijela k., C=crvena k., ukupno ih je 10+8+5=23 u kutiji

Ω ={B, C, PB, PC, PPB, PPC, PPPB, PPPC,...}

$\mathrm{P}(B) = \frac{8}{23}$, $\mathrm{P}(C) = \frac{10}{23}$,
$\mathrm{P}(PB) = \frac{5\cdot 8}{23^2} = \frac{5}{23}\cdot\frac{8}{23}$, $\mathrm{P}(PC) = \frac{5\cdot 10}{23^2} = \frac{5}{23}\cdot\frac{10}{23}$,
$\mathrm{P}(PPB) = \frac{5\cdot 5\cdot 8}{23^3} = \left(\frac{5}{23}\right)^2\cdot\frac{8}{23}$, $\mathrm{P}(PPC) = \frac{5\cdot 5\cdot 10}{23^3} = \left(\frac{5}{23}\right)^2\cdot\frac{10}{23}$, $\ldots$

P(crvena kuglica izvučena prije bijele) =
$= \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(PC) + \mathrm{P}(PPC) + \mathrm{P}(PPPC) + \ldots =$
$= \frac{10}{23} + \frac{5}{23}\cdot\frac{10}{23} + \left(\frac{5}{23}\right)^2\cdot\frac{10}{23} + \ldots = \frac{10}{23}\cdot\left(1 + \frac{5}{23} + \left(\frac{5}{23}\right)^2 + \ldots\right) =$
$= \frac{10}{23}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{23}} = \frac{5}{9}$

△

Zadatak 3.19 Dva igrača naizmjence bacaju novčić. Pobjeđuje onaj kod kojeg se prvog pojavi grb. Modelirajte odgovarajući vjerojatnosni prostor i izračunajte vjerojatnost pobjede za svakog igrača. Kolika je vjerojatnost da igra nikada ne stane?

Rješenje:

Ω ={G, PG, PPG, PPPG, PPPPG, ...} , $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ vjer .pr.

$\mathrm{P}(P) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(PG) = \frac{1}{2^2}$, $\mathrm{P}(PPG) = \frac{1}{2^3}$, ...

A :={1. igrač je pobijedio}={G, PPG, PPPPG, ...}
$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

B :={2. igrač je pobijedio}={PG, PPPG, PPPPPG ...}
$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

P(igra nikada ne stane) $= \mathrm{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B) = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) = 0.$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

3.20 Bacamo dvije simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost da

(a) dobiveni brojevi nemaju zajedničkog djelitelja većeg od 1?

(b) jedan dobiveni broj dijeli drugi?

3.21 Bacamo 6 simetričnih kocaka. Izračunajte vjerojatnost da su dobiveni brojevi međusobno različiti.

3.22 Na slučajan način biramo broj među brojevima $10000, \ldots, 99999$. Izračunajte vjerojatnost

(a) da taj broj ima sve znamenke različite,

(b) da je taj broj oblika $\overline{abcba}$ (npr. 12321, 36663).

3.23 Što je vjerojatnije: da slučajno odabrana osoba ima rođendan u ponedjeljak ili da dvije slučajno odabrane osobe imaju rođendan na isti dan u tjednu?

3.24 U ormaru su 4 para cipela. Slučajno odaberemo 5 cipela. Izračunajte vjerojatnost da među izvučenim cipelama

(a) nema ni jednog para,

(b) ima točno 1 par,

(c) ima točno 2 para.

3.25 Na slučajan način od 52 karte biramo 13 karata. Izračunajte vjerojatnost da u dobivenim kartama neće biti zastupljene sve četiri vrste.

3.26 Na slučajan način od 52 karte biramo 7 karata. Izračunajte vjerojatnost

(a) da u dobivenim kartama imamo točno 5 karata iste vrste,

(b) da u dobivenim kartama imamo barem 5 karata iste vrste.

3.27 Bacamo 3 simetrične kocke. Izračunajte vjerojatnost da je najveći dobiveni broj najmanje dvostruko veći od najmanjeg dobivenog broja.

3.28 Na peronu je vlak koji ima 15 vagona. Ako od 7 putnika svaki nasumce bira vagon, izračunajte vjerojatnost

(a) da je u svakom vagonu najviše jedan putnik,

(b) da je u zadnjem vagonu točno jedan putnik.

3.29 Na peronu je vlak koji ima n vagona. Ako od m, $(m > n)$ putnika svaki nasumce bira vagon, izračunajte vjerojatnost da je u svakom vagonu barem jedan putnik.

3.30 Iz skupa $\{1, 2, \dots, 20\}$ nasumce biramo 5 brojeva, jedan po jedan. Kolika je vjerojatnost da izaberemo

(a) 5 uzastopnih brojeva,

(b) 5 uzasopnih brojeva u rastućem poretku.

3.31 Bacamo n simetričnih kocaka. Izračunajte vjerojatnost da je pao barem jedan paran i barem jedan neparan broj.

3.32 Koliko puta treba baciti simetričnu kocku da bi se s vjerojatnosću 0.99 barem jednom pojavila jedinica?

3.33 Luster ima 5 grla za žarulje, od kojih su 2 ispravna i 3 neispravna. U grla nasumce stavimo 5 žarulja među kojima su 2 ispravne i 3 neispravne. Kolika je vjerojatnost da ćemo uključivanjem lustera u struju dobiti svjetlo?

3.34 Kuglice označene brojevima $1, \dots, n$ su promiješane i poredane u niz $(a_1, \dots, a_n)$. Izračunajte vjerojatnost da će se barem jedan broj s kuglice podudarati s mjestom na kojem se kuglica nalazi.

3.35 Neka je $\Omega = \{1, 2, \dots, 120\}$. Izračunajte vjerojatnost da je nasumce odabrani broj iz Ω

(a) djeljiv s 3 i 4 ,

(b) djeljiv s 3 ili 4, ali ne s oba.

3.36 Na slučajan način bacamo 6 simetričnih kocaka. Kolika je vjerojatnost da će pasti 3 para istih brojeva?

3.37 Što je vjerojatnije: da se u 4 bacanja jedne kocke barem jednom pojavi šestica ili da se u 24 bacanja dviju kocaka barem jednom pojave dvije šestice?

3.38 Prodavačica u robnoj kući je nasumce zahvatila 8 čarapa iz hrpe od 14 pari čarapa. Kolika je vjerojatnost da se među odabranim čarapama nalazi barem jedan isovrsni par čarapa?

3.39 Četiri igrača igraju s 52 karte, pri čemu se svakom igraču podijeli 13 karata. Kolika je vjerojatnost da svaki igrač ima jednog asa?

3.40 Dva igrača, A i B, igraju niz igara. U svakoj pojedinoj igri bez obzira na ishode prethodnih igara svaki igrač pobjeđuje s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Pobjednik igre dobiva 1 bod, a poraženi 0 bodova. Dogovor je da igra traje dok A ne skupi 2 boda ili dok B ne skupi 3 boda. Prije početka igre A ulaže a kuna, a B b kuna, gdje je $a + b = 6$ kuna. Ukupni pobjednik dobiva sav novac. Koliko mora svaki od njih uplatiti kako bi igra bila fair?

3.41 U nekom kraljevstvu se organizira viteški turnir. Dan prije na turnir je došlo n vitezova. Netko je preko noći na slučajan način vitezovima izmiješao koplja.

(a) Kolika je vjerojatnost da je barem jedan vitez na turniru nastupio sa svojim kopljem?

(b) Označimo vjerojatnost iz (a) s p_n. Odredite $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

3.42 Na peronu je vlak koji se sastoji od n vagona. Ako m putnika ($m \leq n$) nasumce bira vagon, izračunajte vjerojatnost

(a) da je u svakom vagonu najviše jedan putnik,

(b) da je u zadnjem vagonu točno jedan putnik.

3.43 Dr. Elmex ima 10 "čudnih" pacijenata koji zbog straha od karijesa dolaze na pregled jednom tjedno. Svatko od njih na slučajan način i nezavisno od ostalih bira jedan od pet radnih dana u tjednu za posjet zubaru. Izračunajte vjerojatnost da dr. Elmexa barem jedan dan neće posjetiti ni jedan "čudni" pacijent.

3.44 Bacamo dvije simetrične kocke i dobivene ishode označimo s A i B. Kolika je vjerojatnost da jednadžba

$$x^2 + Ax + B = 0$$

ima realna rješenja?

3.45 10 kuglica je označeno brojevima $1, 2, \ldots, 10$. Na slučajan način poredamo kuglice u red. Izračunajte vjerojatnost da se mjesto barem jedne kuglice označene parnim brojem podudara s brojem na njoj.

3.46 Nekoć su Ana, Anja i Anita bile najbolje prijateljice. Prije dosta vremena sve tri su se međusobno posvađale i ne pričaju jedna s drugom. Jedne večeri su sve tri bile pozvane na svečanu večeru i, da bude još zanimljivije, sve tri su bile raspoređene za istim okruglim stolom. Za stolom je ukupno sjedilo n ($n \geq 6$) osoba. Ako je razmještaj osoba za stolom bio slučajan, izračunajte vjerojatnost da nikoje dvije posvađane prijateljice nisu sjedile jedna do druge.

3.47 Na automobilskoj utrci se natjecalo prvih $n \geq 1$ vozača svijeta. Večer prije su se izvlačili startni brojevi. Izračunajte vjerojatnost da ni jedan vozač nije imao startni broj koji se podudarao s njegovim mjestom na rang-listi.

Rješenja: **3.20.** (a) 0.638889 (b) 0.611111 **3.21.** $\frac{6!}{6^6}$ **3.22.** (a) 0.3024 (b) 0.01 **3.23.** isto je **3.24.** (a) 0 (b) 0.57429(c) 0.857143**3.25.** 0.051 **3.26.** (a) 0.0285 (b) 0.0306 **3.27.** 0.75 **3.28.** (a) 0.1898 (b) 0.30848 **3.29.** $\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m}{n^m}$ **3.30.** (a) 0.00103 (b) 0.00000859 **3.31.** $1-2^{1-n}$ **3.32.** $n \geq 25$ **3.33.** 0.7 **3.34.** $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}$ **3.35.** (a) 0.08333 (b) 0.41667 **3.36.** 0.039 **3.37.** prvi izbor je vjerojatniji **3.38.** 0.753 **3.39.** 0.105 **3.40.** a=44 kn, b=20 kn **3.41.** (a) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}$ (b) $1-e^{-1}$ **3.42.** (a) $\frac{n!}{(n-m)!\,n^m}$ (b) $\frac{m\,(n-1)^{m-1}}{n^m}$ **3.43.** 0.47745 **3.44.** 0.527778 **3.45.** 0.401819 **3.46.** $\frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}$ **3.47.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

4

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Primjer 4.1 U pokeru se svakom igraču dijeli pet karata. Ako se karte dobro promiješaju i podijele, onda je vjerojatnost događaja

$$\text{R}=\{ \textit{ royal flush}, \text{ tj. desetka, dečko, dama, kralj i as u istoj boji } \}$$

jednaka

$$\mathrm{P}(R) = \frac{4}{\binom{52}{5}} \approx 0.000154.$$

Pretpostavimo da smo pri dijeljenju slučajno vidjeli da je zadnja karta koju smo dobili bila $A_\spadesuit$. Što sada možemo reći o vjerojatnosti događaja R?

- Dobili smo već asa pa se vjerojatnost možda povećala.
- Moramo odobiti *royal flush* u $\spadesuit$ pa se vjerojatnost možda smanjila.

Označimo traženu vjerojatnost sa $\mathrm{P}(R|A_\spadesuit)$. Ako znamo da je posljednja karta $A_\spadesuit$, onda *royal flush* možemo dobiti samo u $\spadesuit$ pa je

$$\mathrm{P}(R|A_\spadesuit) = \frac{1}{\binom{51}{4}}.$$

Sada je

$$\frac{\mathrm{P}(R|A_\spadesuit)}{\mathrm{P}(R)} = \frac{\frac{4}{\binom{52}{5}}}{\frac{1}{\binom{51}{4}}} = \frac{\frac{4}{\frac{52}{5}\binom{51}{4}}}{\frac{1}{\binom{51}{4}}} = \frac{13}{5},$$

tj. vjerojatnost se više nego udvostručila.

$\triangle$

Primjer 4.2 Baca se simetrična kocka. Ako znate da je pao paran broj, kolika je vjerojatnost da je pao broj 2?

Znamo da je prostor elementarnih događaja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Definiramo $A = \{$ pao je broj 2 $\} = \{2\}$, $B = \{$ pao je paran broj $\} = \{2, 4, 6\}$. Označimo traženu vjerojatnost s $\mathrm{P}(A|B)$. Ako znamo da je pao paran broj, onda mogu pasti samo brojevi 2,4 ili 6 pa je $\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{3}$. Primijetimo da je $A \cap B = \{2\}$ pa je

$$\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} = \mathrm{P}(A|B).$$

$\triangle$

Definicija. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in \mathcal{F}$, gdje je $\mathrm{P}(B) > 0$. **Uvjetna vjerojatnost** događaja A uz uvjet B se definira sa

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Napomena. Ako je $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathrm{P}(B) = 0$, onda gornja definicija nema smisla. Međutim, ako gornji izraz zapišemo kao

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B),$$

onda ova jednakost vrijedi i za $B \in \mathcal{F}$, $\mathrm{P}(B) = 0$, jer je $0 \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(B) = 0$. U Primjeru 4.1 imamo

$$\mathrm{P}(R|A_\spadesuit) = \frac{\mathrm{P}(R \cap A_\spadesuit)}{\mathrm{P}(A_\spadesuit)} = \frac{\frac{1}{\binom{52}{5}}}{\frac{1 \cdot \binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}} = \frac{1}{\binom{51}{4}}.$$

Može se dogoditi da su vjerojatnosti $\mathrm{P}(A|B)$ i $\mathrm{P}(A)$ jednake, odakle zaključujemo da vjerojatnost pojavljivanja događaja A ne ovisi o događaju B. Tada je

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

pa je

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Definicija. Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su **nezavisni** ako je

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Familija događaja $\{A_i \colon i \in I\}$, gdje je I neki indeksni skup, je **nezavisna** ako je

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in F} A_i\right) = \prod_{i\in F} \mathrm{P}(A_i),$$

za svaki konačni podskup $F \subseteq I$.
Familija događaja $\{A_i \colon i \in I\}$ je **u parovima nezavisna** ako je

$$\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(A_j), \quad \text{za sve } i, j \in I,\ i \neq j.$$

Napomena.

(a) U parovima nezavisni događaji ne moraju biti nezavisni.

(b) $\emptyset$ i Ω su nezavisni sa svim događajima:

- $\mathrm{P}(A \cap \emptyset) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\emptyset)\mathrm{P}(A)$,
- $\mathrm{P}(A \cap \Omega) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A) \cdot 1 = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(\Omega)$.

Zadatak 4.3 Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Pokažite da su tada nezavisni i događaji:

(a) A i B^c,

(b) A^c i B^c,

(c) A i $B \cup C$,

(d) $A \setminus B$ i C.

Rješenje:

(a) $\mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) \overset{\text{nez.}}{=} \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)$,

(b) $\mathrm{P}(A^c \cap B^c) = \mathrm{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B) =$
$\overset{\text{Sylv.}}{=} 1 - (\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)) \overset{\text{nez.}}{=} 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = (1 - \mathrm{P}(A)) - (1 - \mathrm{P}(A))\mathrm{P}(B) = (1 - \mathrm{P}(A))(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)$,

(c) $\mathrm{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathrm{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$
$\overset{\text{Sylv.}}{=} \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) \overset{\text{nez.}}{=} \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A)(\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)) \overset{\text{nez.}}{=} \mathrm{P}(A)(\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C)) \overset{\text{Sylv.}}{=} \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \cup C)$,

(d) $\mathrm{P}((A \setminus B) \cap C) = \mathrm{P}(A \cap B^c \cap C) = \mathrm{P}((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)) = \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C) \overset{\text{nez.}}{=} \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(C) \overset{\text{(a)}}{=} \mathrm{P}(A \cap B^c)\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \setminus B)\mathrm{P}(C)$.

△

Zadatak 4.4 Nekadašnje školske kolegice Ana i Eva sretnu se u gradu. Ana kroz razgovor sazna da Eva ima dvoje djece i da je jedno od njih sin. Kolika je (po Ani) vjerojatnost da je drugo Evino dijete kći ako

(a) ništa drugo ne zna,

(b) ona još zna da je gore spomenuti sin starije Evino dijete?

Rješenje:
Označimo K=kći i S=sin. Tada je $\Omega = \{(S,S),(S,K),(K,S),(S,S)\}$, gdje npr. (S,K) znači na je starije dijete sin, a mlađe kći. Možemo pretpostaviti da je $\mathrm{P}(\{(x,y)\}) = \frac{1}{4}$, za sve $(x,y) \in \Omega$.

(a) Stavimo $A :=\{$ jedno Evino dijete je kći $\} = \{(K,K),(K,S),(S,K)\}$ i $B_1 := \{$ jedno Evino dijete je sin $\} = \{(S,S),(S,K),(K,S)\}$. Tada je tražena vjerojatnost

$$\mathrm{P}(A|B_1) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B_1)}{\mathrm{P}(B_1)} = \frac{\mathrm{P}(\{(S,K),(K,S)\}}{\mathrm{P}(\{(S,S),(K,S),(S,K)\})} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

(b) Označimo $B_2 := \{$ Evino starije dijete je sin $\} = \{(S,S),(S,K)\}$. Tada tražimo

$$\mathrm{P}(A|B_2) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B_2)}{\mathrm{P}(B_2)} = \frac{\mathrm{P}(\{(S,K)\})}{\mathrm{P}(\{(S,S),(S,K)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

△

Zadatak 4.5 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz događaja takav da je

$$\mathrm{P}(A_n) = \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Rješenje: Definirajmo rastući niz događaja $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $n \in \mathbb{N}$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_n) &= \mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1 - \mathrm{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c) \overset{\text{nez.}}{=} 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k^c) \\
&= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathrm{P}(A_k)) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Nadalje, vrijedi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ pa je

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \overset{\left\{\substack{\text{nepr. vjer. na rastuće} \\ \text{nizove događaja}}\right\}}{=} \lim_n \mathrm{P}(B_n) = \lim_n (1 - \frac{1}{n+1}) = 1.$$

Zadatak 4.6 U ruci imate n ključeva od kolih samo jedan otvara vrata. Odredite vjerojatnost da u k-tom pokušaju otključate vrata ako je $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Rješenje: Definiramo događaje

$$B_k := \{ \text{ u } i\text{-tom pokušaju nismo otključali vrata } \}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Neka je

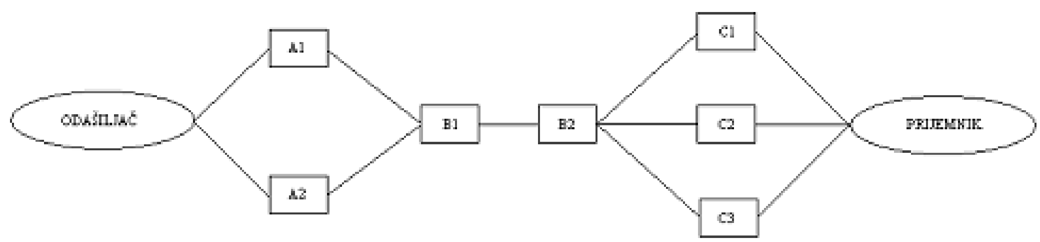
$$A := \{ \text{ vrata su otljučana u } k\text{-tom pokušaju } \}.$$

Tada je $A = B_k^c \cap B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1$ pa je

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) =& \mathrm{P}(B_k^c \cap B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1) = \mathrm{P}(B_k^c | B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1) \mathrm{P}(B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1) = \\
=& \mathrm{P}(B_k^c | B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1) \mathrm{P}(B_{k-1} | B_{k-2} \cap \ldots \cap B_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(B_2 | B_1) \mathrm{P}(B_1) = \\
=& \frac{1}{n-k+1} \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-2}{n-1} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Zadatak 4.7 Informacijski kanal se sastoji od elemenata koji se kvare nezavisno jedan od drugoga i postavljeni su kao na slici:



Vjerojatnost da se pokvare dijelovi A1 i A2 je p_A, B1 i B2 je p_B, C1, C2 i C3 je p_C. Kanal je prekinut ako nema veze između odsšiljača i prijemnika. Izračunajte vjerojatnost da kanal bude prekinut.

Rješenje: Definiramo sljedeće događaje:
$A_i :=$ { element Ai nije ispravan }, $i = 1, 2$
$B_i :=$ { element Bi nije ispravan }, $i = 1, 2$
$C_i :=$ { element Ci nije ispravan }, $i = 1, 2, 3$
Tada je

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\{\text{kanal je prekinut}\}) = 1 - \mathrm{P}(\{\text{kanal nije prekinut}\}) = \\
&= 1 - \mathrm{P}((A_1^c \cup A_2^c) \cap B_1^c \cap B_2^c \cap (C_1^c \cup C_2^c \cup C_3^c)) = \\
&\overset{\text{nez.}}{=} 1 - \mathrm{P}(A_1^c \cup A_2^c)\mathrm{P}(B_1^c \cap B_2^c)\mathrm{P}(C_1^c \cup C_2^c \cup C_3^c) = \\
&= 1 - (1 - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2))(1 - \mathrm{P}(B_1))(1 - \mathrm{P}(B_2))(1 - \mathrm{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3)) = \\
&\overset{\text{nez.}}{=} 1 - (1 - p_A^2)(1 - p_B)^2(1 - p_C^3).
\end{aligned}$$

△

Zadatak 4.8 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Pokažite da je

$$1 - e^{-(\mathrm{P}(A_1)+\ldots+\mathrm{P}(A_n))} \leq \mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_n).$$

Rješenje: Zbog konačne aditivnosti slijedi:

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_n).$$

S druge strane, koristeći nejednakost $1-x \le e^{-x}$, za $x \ge 0$, zaključujemo

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= 1 - \mathrm{P}(A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c) = \\
&\overset{\text{nez.}}{=} 1 - \mathrm{P}(A_1^c) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_n^c) = \\
&= 1 - (1-\mathrm{P}(A_1)) \cdot \ldots \cdot (1-\mathrm{P}(A_n)) \ge \\
&\ge 1 - e^{-\mathrm{P}(A_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-\mathrm{P}(A_n)} = \\
&= 1 - e^{-(\mathrm{P}(A_1)+\ldots+\mathrm{P}(A_n))}.
\end{aligned}$$

△

Zadatak 4.9 n strijelaca nezavisno jedan od drugoga gađaju istu metu jednom, pri čemu je vjerojatnost pogotka za svakog strijelca jednaka $p \in \langle 0,1\rangle$. Za $q \in \langle 0,1\rangle$ odredite n takav da je vjerojatnost da meta bude barem jednom pogođena bude barem q.

Rješenje: Definirajmo događaje
$A_k := \{k\text{-ti strijelac je pogodio metu }\}$, $k = 1, \ldots, n$.
Tada je $\mathrm{P}(A_k) = p$, $k = 1, \ldots, n$. Traženi događaj je
$A = \{\text{ meta je pogođena (barem jednom) }\} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ pa je

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c) &= 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k^c) \\
= 1 - \prod_{k=1}^{n}(1-\mathrm{P}(A_k)) &= 1 - \prod_{k=1}^{n}(1-p) = 1-(1-p)^n.
\end{aligned}$$

Tražimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je
$\mathrm{P}(A) \ge q \implies 1-(1-p)^n \ge q \implies (1-p)^n \le 1-q \implies$
$\implies n\ln(1-p) \le \ln(1-q) \implies n \ge \frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)}$.

Definicija. Niz događaja $\{H_i \colon i \in I\}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{N}$, zovemo **potpun sistem događaja** ako je

$$\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega \quad \text{i} \quad H_i \cap H_j = \emptyset, \text{ za sve } i, j, \in \mathbb{N},\ i \neq j.$$

Napomena. Za $A \in \mathcal{F}$ je

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) =& \mathrm{P}(A \cap \Omega) = \mathrm{P}(A \cap (\bigcup_{i \in I} H_i)) = \\ =& \mathrm{P}(\bigcup_{i \in I}(A \cap H_i)) \overset{(\sigma)\text{-ad.}}{=} \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A \cap H_i) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i). \end{aligned}$$

Tada formulu

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)$$

zovemo **formula potpune vjerojatnosti**.

Zadatak 4.10 U nekoj trgovini se prodaju 3 vrste žarulja: $\check{Z}_1$, $\check{Z}_2$, $\check{Z}_3$. Vjerojatnosti da se slučajno odaberu žarulje $\check{Z}_1$, $\check{Z}_2$, $\check{Z}_3$ su 0.25, 0.5, 0.25, dok su vjerojatnosti da će one doživjeti 1 200 h redom jednake 0.1, 0.2, 0.4. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odarana žarulja u trgovini doživi 1 200 h?

Rješenje: Definirajmo potpun sistem događaja

$$H_i := \{ \text{ odabrana je žarulja } \check{Z}_i \ \},\ i = 1, 2, 3.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(H_1) = 0.25,\ \mathrm{P}(H_2) = 0.5,\ \mathrm{P}(H_3) = 0.25.$$

Ako stavimo

$$A := \{ \text{ slučajno odabrana žarulja je doživjela 1 200 h } \},$$

onda je

$$\mathrm{P}(A|H_1) = 0.1,\ \mathrm{P}(A|H_2) = 0.2,\ \mathrm{P}(A|H_3) = 0.4.$$

Koristeći formulu potpune vjerojatnosti dobijemo

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) =& \mathrm{P}(A|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A|H_2)\mathrm{P}(H_2) + \mathrm{P}(A|H_3)\mathrm{P}(H_3) \\ =& 0.1 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.25 = 0.225. \end{aligned}$$

$\triangle$

Zadatak 4.11 U kutiji se nalazi n kuglica od kojih je m bijelih $(m \leq n)$. Izučemo prvo jednu kuglicu bez vraćanja, a zatim drugu. Izračunajte vjerojatnost da je druga izvučena kuglica bijela.

Rješenje: Definirajmo potpun sistem događaja:

$$H_1 :=\{ \text{ prva izvučena kuglica je bijela } \},$$
$$H_2 :=\{ \text{ prva izvučena kuglica nije bijela } \}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{m}{n}, \quad \mathrm{P}(H_2) = \frac{n-m}{n}.$$

Traženi događaj je

$$A := \{ \text{ druga izvučena kuglica je bijela } \}$$

i tada je

$$\mathrm{P}(A|H_1) = \frac{m-1}{n-1}, \ \mathrm{P}(A|H_2) = \frac{m}{n-1}.$$

Iz formule potpune vjerojatnosti je

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A|H_2)\mathrm{P}(H_2)\\ &= \frac{m-1}{n-1} \cdot \frac{m}{n} + \frac{m}{n-1} \cdot \frac{n-m}{n} = \frac{m}{n}.\end{aligned}$$

△

Zadatak 4.12 Lutrija je izdala n srećki, od kojih je m dobitnih ($m \leq n$). Ovisi li vjerojatnost dobitka za pojedinog igrača o broju preostalih srećki, tj. je li bitan redoslijed izvlačenja?

Rješenje: Ako igrač izvlači prvi, onda je vjerojatnost dobitka $\frac{m}{n}$. Promotrimo što se događa kada igrač ne izvlači prvi. Za $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ definiramo događaje

$$A_k := \{ \text{ izvukli smo dobitnu srećku nakon } k \text{ prodanih srećki } \}$$

i pripadne potpune sisteme događaja

$$H_{k,j} := \{ \text{ od prvih } k \text{ prodanih srećki, } j \text{ je bilo dobitnih } \}, \ j \in \{0, \ldots, k\}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(H_{k,j}) = \frac{\binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{k}} \quad \text{i} \quad \mathrm{P}(A_k|H_{k,j}) = \frac{m-j}{n-k}.$$

Koristeći formulu potpune vjerojatnosti vidimo da je

$$\mathrm{P(A—H}_{k,j})\mathrm{P}(H_{k,j}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{m-j}{n-k} \cdot \frac{\binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{k}}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{m-j}{n-k} \cdot \frac{\binom{m}{m-j}\binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{n-k}} = \sum_{j=0}^{k} \frac{m-j}{n-k} \cdot \frac{\frac{m}{m-j}\binom{m-1}{m-1-j}\binom{n-m}{k-j}}{\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{n-1-k}}$$
$$= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \sum_{j=0}^{\min\{k,m\}} \binom{m-1}{j}\binom{n-m}{k-j} = \left\{\begin{matrix}\text{Vandermondeova}\\ \text{konvolucija}\end{matrix}\right\} =$$
$$= \frac{m}{n} \frac{\binom{(m-1)+(n-m)}{k}}{\binom{n-1}{k}} = \frac{m}{n}.$$

Dakle, vjerojatnost je ista za sve igrače.

△

Zadatak 4.13 Kutija sadrži n kuglica od kojih su neke bijele boje. Sve pretpostavke o broju bijelih kuglica su jednako vjerojatne. U kutiju ubacimo bijelu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da nakon toga izvučemo bijelu kuglicu?

Rješenje: Definiramo potpun sistem događaja

$$H_i := \{ \text{ u kutiji je } i \text{ bijelih kuglica } \},\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Sva pretpostavke o broju bijelih kuglica su jednake pa je

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{1}{n+1},\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Tražimo vjerojatnost događaja

$$A := \{ \text{ nakon ubačene bijele kuglice, izvučena je bijela kuglica } \}$$

i

$$\mathrm{P}(A|H_i) = \frac{i+1}{n+1}.$$

Iz formule potpune vjerojatnosti dobijemo

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i+1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+1)(2+2)}{2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

△

Zadatak 4.14 Bacamo 5 simetričnih nočića. Nakon prvog bacanja bacamo ponovo one novčiće koji pokazuju glavu. Kolika je vjerojatnost da ćemo nakon drugog bacanja pasti ukupno barem 3 pisma?

Rješenje: Definiramo potput sistem događaja

$$H_i := \{ \text{ u prvom bacanju je palo } i \text{ pisama } \},\ i \in \{0, \ldots, 5\}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{\binom{5}{i}}{2^5},\ i \in \{0, \ldots, 5\}.$$

Traženi događaj je

$$A := \{ \text{ palo je ukupno barem 3 pisma } \}$$

i

$$A^c := \{ \text{ palo je ukupno 0, 1 ili 2 pisma } \}.$$

Računamo

$$\mathrm{P}(A^c|H_0) = \frac{\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2}}{2^5} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(A^c|H_1) = \frac{\binom{4}{0} + \binom{4}{1}}{2^4} = \frac{5}{16},$$

$$\mathrm{P}(A^c|H_2) = \frac{\binom{3}{0}}{2^3} = \frac{1}{8}, \qquad \mathrm{P}(A^c|H_i) = 0,\ i \in \{3, 4, 5\}.$$

Tada nam formula potpune vjerojatnosti daje

$$\mathrm{P}(A^c) = \sum_{i=0}^{5} \mathrm{P}(A^c|H_i)\mathrm{P}(H_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{5}{0}}{2^5} + \frac{5}{16} \cdot \frac{\binom{5}{1}}{2^5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{53}{512}.$$

i

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = \frac{459}{512} \approx 0.896.$$

△

Zadatak 4.15 U svakoj od n kutija se nalazi a bijelih i b crnih kuglica. Iz prve kutije nasumce izvučemo jednu kuglicu i prebacimo je u drugu kutiju (bez gledanja kuglice) pa onda iz druge kutije nasumce izvučemo jednu kuglicu i prebacimo je u treću kutiju i tako dalje. Izračunajte vjerojatnost da iz n-te kutije izvučemo bijelu kuglicu?

Rješenje: Definiramo događaj

$$A_n := \{ \text{ iz } n\text{-te kutije je izvučena bijela kuglica } \}.$$

- $n = 1$

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{a}{a+b}$$

- $n = 2$

$$H_1 := \{ \text{ prebacili smo bijelu kuglicu } \} \qquad \mathrm{P}(H_1) = \frac{a}{a+b}$$

$$H_2 := \{ \text{ prebacili smo crnu kuglicu } \} \qquad \mathrm{P}(H_2) = \frac{b}{a+b}$$

$$\mathrm{P}(A_2|H_1) = \frac{a+1}{a+b+1} \qquad \mathrm{P}(A_2|H_1) = \frac{a}{a+b+1}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_2) =& \mathrm{P}(A_2|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A_2|H_2)\mathrm{P}(H_2) \\ =& \frac{a+1}{a+b+1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b+1} \cdot \frac{b}{a+b} == \frac{a}{a+b}. \end{aligned}$$

- Pokažimo da je tražena vjerojatnost $\frac{a}{a+b}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ matematičkom indukcijom:
Baza je provjerena na početku.
Pretpostavimo da nakon prebacivanja sve do n-te kutije iz n-te kutije izvučemo bijelu kuglicu jednaka $\frac{a}{a+b}$. Tada je vjerojatnost da izvučemo crnu kuglicu jednaka $1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$. Računamo:

$$H_1 := \{ \text{ iz } n\text{-te kutije smo prebacili bijelu kuglicu u } (n+1)\text{-vu kutiju } \}$$
$$H_2 := \{ \text{ iz } n\text{-te kutije smo prebacili crnu kuglicu u } (n+1)\text{-vu kutiju } \}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{a}{a+b} \qquad \mathrm{P}(H_2) = \frac{b}{a+b}$$

$$\mathrm{P}(A_{n+1}|H_1) = \frac{a+1}{a+b+1} \qquad \mathrm{P}(A_{n+1}|H_1) = \frac{a}{a+b+1}$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_{n+1}) =& \mathrm{P}(A_{n+1}|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A_{n+1}|H_2)\mathrm{P}(H_2) \\
=& \frac{a+1}{a+b+1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b+1} \cdot \frac{b}{a+b} == \frac{a}{a+b}.
\end{aligned}
$$

△

Zadatak 4.16 Ljut na dvorskog matematičara, car naredi da se donese n urni, n crnih i n bijelih kuglica. Matematičar mora rasporediti kuglice u urne tako da u svakoj urni bude barem jedna kuglica . Dvorski krvnik na slučajan način odabire urnu i iz nje izvlači kuglicu. Ako izvuče bijelu kuglicu, matematičaru će život biti pošteđen, a ako izvuče crnu kuglicu, neće. Pomozite nesretnom matematičaru rasporediti kuglice tako da s najvećom vjerojatnošću ostane živ.

Rješenje: Definirajmo potpun sustem događaja:

$$
H_i := \{ \text{ odabrana je } i\text{-ta urna } \}, \quad \mathrm{P}(H_i) = \frac{1}{n}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.
$$

Neka je $A := \{$ izvučena je bijela kuglica $\}$. Promotrimo sljedeći raspored:

- u svaku urnu stavimo po jednu kuglicu,
- u n-tu urnu stavimo još n crnih kuglica.

Tada je za ovaj raspored vjerojatnost jednaka:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i) = \sum_{i=1}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Tvrdimo da se radi o optimalnom rasporedu:

- ako bi postojala urna koja ne sadrži bijelu kuglicu, onda je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|H_i) \leq & \left\{ \begin{array}{c} \text{ako } j\text{-ta urna ne sadrži bijelu kuglicu,} \\ \text{onda je } \mathrm{P}(A|H_j) = 0 \end{array} \right\} \leq \\
\leq 0 \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Dakle, u svakoj urni mora biti pa jedna bijela kuglica.

- ako bi postojale barem 2 urne s crnim kuglicama, onda je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A|H_i) \leq \\
&\leq \left\{ \begin{array}{c} \text{ako } j\text{-ta i } k\text{-ta urna sadrže barem jednu crnu kuglicu,} \\ \text{onda je} \mathrm{P}(A|H_j) \leq \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A|H_k) \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \leq \\
&\leq \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(n-2)}{n} = \frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Dakle, sve crne kuglice moraju biti u jednoj urni.

△

Neka je $\{H_i\colon i \in I\}$ potpun sistem događaja i neka je $A \in \mathcal{F}$ događaj. Tada je

$$
\mathrm{P}(H_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)}{\sum_{j\in I}\mathrm{P}(A|H_j)\mathrm{P}(H_j)}.
$$

Pokazali smo **Bayesovu formulu**:

$$
\mathrm{P}(H_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)}{\sum_{j\in I}\mathrm{P}(A|H_j)\mathrm{P}(H_j)}.
$$

Primjer 4.17 Krv se testira na neku rijetku bolest, koja se u prosjeku pojavljuje jednom na 100 000 ljudi. Ako netko stvarno ima tu bolest, test će to pokazati s vjerojatnošću 0.95, a ako netko nema tu bolest, test to neće pokazati s vjerojatnošću 0.005. Pretpostavimo da smo testirali neku osobu i da je test je pokazao da ona ima tu bolest. Pokušajmo odrediti vjerojatnost da je dijagnoza točna.

Definiramo potpun sistem događaja:

$$
H_0 := \{\text{ osoba ima bolest }\},\quad H_1 := \{\text{ osoba nema bolest }\}.
$$

Tada je

$$
\mathrm{P}(H_0) = \frac{1}{100000},\quad \mathrm{P}(H_1) = \frac{99999}{100000}.
$$

Definirajmo

$$
T := \{\text{ test pokazuje da osoba ima bolest }\}
$$

pa je

$$
\mathrm{P}(T|H_0) = 0.95,\quad \mathrm{P}(T|H_1) = 0.005.
$$

Vjerojatnost da je dijagnoza točna je

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(H_0|T) = \text{ Bayesova formula } &= \frac{\mathrm{P}(T|H_0)\mathrm{P}(H_0)}{\mathrm{P}(T|H_0)\mathrm{P}(H_0)+\mathrm{P}(T|H_1)\mathrm{P}(H_1)} = \\
&= \frac{0.95\cdot\frac{1}{100000}}{0.95\cdot\frac{1}{100000}+0.005\cdot\frac{99999}{100000}} \approx 0.002.
\end{aligned}$$

Dakle, ako je test pokazao da osoba ima bolest, onda je vjerojatnost da osoba zaista ima tu bolest jako mala. Drugim riječima, ovaj test je beskoristan za rijetke bolesi.

$\triangle$

Zadatak 4.18 U nekom gradu na aeordrom vozi 30 % taksija plave boje, 20 % taksija zelene boje i 50 % taksija žute boje. Oni putnike na aerodrom dovedu prekasno na let s vjerojatnostima 0.1, 0.2, 0.3. Jednog dana, žureći na aerodrom, neki putnik je zaustavio taksi na ulici i rekao vozaču da vozi na aerodrom. Na kraju putnik nije zakasnio na avion. Izračunajte vjerojatnost da se putnik vozio u žutom taksiju.

Rješenje: Definiramo potpun sistem događaja:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{\text{ putnik je zaustavio plavi taksi }\},\\
H_2 &= \{\text{ putnik je zaustavio zeleni taksi }\},\\
H_r &= \{\text{ putnik je zaustavio žuti taksi }\}.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(H_1)=0.1,\quad \mathrm{P}(H_2)=0.2,\quad \mathrm{P}(H_3)=0.5$$

Neka je

$$A=\{\text{ putnik nije zakasnio na avion }\}$$

pa je

$$\mathrm{P}(A|H_1)=0.9,\quad \mathrm{P}(A|H_2)=0.8,\quad \mathrm{P}(A|H_3)=0.7.$$

Tražena vjerojatnost je

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(H_3|A) = \text{ Bayes } &= \frac{\mathrm{P}(A|H_3)\mathrm{P}(H_3)}{\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)}\\
&= \frac{0.7\cdot 0.5}{0.9\cdot 0.3+0.8\cdot 0.2+0.7\cdot 0.5} = \frac{35}{73}.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Zadatak 4.19 Nekim kanalom se prenose podaci zapisani pomoću 0 i 1. Vjerojatnost da se pošalje 1 je 0.6, a vjerojatnost da se pošalje 0 je 0.4. Na izlazu se 10 % znakova pogrešno interpretira. Ako je primljen znak 1, izraǔnajte vjerojatnost da je on i poslan.

Rješenje: Potpun sistem događaja je

$$\begin{aligned} H_0 &:= \{ \text{ poslan je znak 0 } \} & \mathrm{P}(H_0) &= 0.4, \\ H_1 &:= \{ \text{ poslan je znak 1 } \} & \mathrm{P}(H_1) &= 0.6. \end{aligned}$$

Ako je

$$A := \{ \text{ primljen je znak 1} \},$$

onda je

$$\mathrm{P}(A|H_0) = 0.1, \quad \mathrm{P}(A|H_1) = 0.9$$

pa traženu vjerojatnost izračunamo koristeći Bayesovu formulu:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(H_1|A) &= \frac{\mathrm{P}(A|H_1)\mathrm{P}(H_1)}{\mathrm{P}(A|H_0)\mathrm{P}(H_0) + \mathrm{P}(A|H_1)\mathrm{P}(H_1)} = \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.6}{0.1 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.6} = 0.931. \end{aligned}$$

△

Zadatak 4.20 U košari je 10 banana, među kojima je 7 zrelih. Pohlepni majmun je iz košare zgrabio 3 banane i pojeo ih. Vlasnik majmuna je nakon toga iz košare nasumce uzeo još jednu bananu i vidio je da je ona zrela. Kolika je vjerojatnost da je majmun pojeo barem jednu zrelu bananu?

Rješenje: Potpun sistem događaja je

$$H_i := \{ \text{ majmun je pojeo } i \text{ zrelih banana } \}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{\binom{7}{i}}{\binom{3}{3-i}\binom{10}{3}}.$$

Neka je

$$A := \{ \text{ vlasnik je izvukao zrelu bananu } \}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(A|H_i) = \frac{7-i}{7}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Tražimo vjerojatnost

$$\mathrm{P}(\{ \text{ majmun pojeo barem jednu zrelu bananu } \}|A) = \mathrm{P}(H_1 \cup H_2 \cup H_3|A) =$$
$$= \mathrm{P}(H_0^c|A) = 1 - \mathrm{P}(H_0|A) = \boxed{\text{Bayes}} = 1 - \frac{\mathrm{P}(A|H_0)\mathrm{P}(H_0)}{\sum_{i=0}^{3} \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i)} = \frac{83}{84}.$$

△

Zadatak 4.21 Simetrična kocka A ima 2 zelene i 4 bijele strane, a simetrična kocka B 4 zelene i 2 bijele strane. Bacamo simetrični novčić. Ako padne pismo, bacamo kocku A, a inače bacamo kocku B. Izračunajte da smo bacali kocku A, ako znamo da je kocka pala na zeleno.

Rješenje: Potpun sistem događaja je i

$$H_1 := \{ \text{ palo je pismo } \}, \quad H_2 := \{ \text{ pala je glava } \}$$

i

$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{1}{2} = \mathrm{P}(H_2).$$

Neka je

$$Z = \{ \text{ kocka je pala na zeleno } \}.$$

Tada je

$$\mathrm{P}(Z|H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(Z|H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

pa iz Bayesove formule slijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(H_1|Z) &= \frac{\mathrm{P}(Z|H_1)\mathrm{P}(H_1)}{\mathrm{P}(Z|H_1)\mathrm{P}(H_1)+\mathrm{P}(Z|H_2)\mathrm{P}(H_2)} = \\
&= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$\triangle$

Zadatak 4.22 U kutiji se nalazi 91 bijelih i crnih kuglica. Iz kutije je izvučeno 19 kuglica: 7 bijelih i 12 crnih. Nađite najvjerojatniji sastav kutije.

Rješenje: Pretpostavimo da su svi sastavi kutije jednako vjerojatni. Definiramo potpun sistem događaja:

$$H_k := \{\text{ u kutiji je k bijelih kuglica }\},\ k \in \{0,1,\ldots,91\}.$$

Tada je $\mathrm{P}(H_k) = \frac{1}{92}$ za sve k. Za

$$A := \{\text{ izvučeno je 7 bijelih i 12 crnih kuglica }\}$$

je

$$\mathrm{P}(A|H_k) = \frac{\binom{k}{7}\binom{91-k}{12}}{\binom{91}{19}},\ \text{ za } k \in \{7,8,\ldots,78,79\},$$

i

$$\mathrm{P}(A|H_k) = 0,\ \text{ za } k \in \{0,1,2,\ldots,6\} \cup \{80,81,\ldots,91\}.$$

Najvjerojatniji sastav kutije ćemo odrediti maksimiziranjem funkcije

$$k \mapsto \mathrm{P}(H_k|A),\quad k \in \{0,1,\ldots,91\}.$$

Iz Bayesove formule slijedi

$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_k)\mathrm{P}(H_k)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{1}{92\binom{91}{19}\mathrm{P}(A)}\binom{k}{7}\binom{91-k}{12}$$

odakle vidimo da trebamo načni najveći član niza $(a_k)_{7\le k\le 79}$, gdje je

$$a_k := \binom{k}{7}\binom{91-k}{12}.$$

Za $k \in \{7,8,\ldots,78\}$ računamo

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\binom{k+1}{7}\binom{90-k}{12}}{\binom{k}{7}\binom{91-k}{12}} = \frac{(k+1)(79-k)}{(k-6)(91-k)}$$

pa je

$$a_{k+1} \leq a_k \iff \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1 \iff \frac{(k+1)(79-k)}{(k-6)(91-k)} \iff 19k \geq 625 \iff k \geq 32.89.$$

Dakle,

$$a_7 \leq a_8 \leq a_9 \leq \ldots \leq a_{33} \geq a_{34} \geq \ldots \geq a_{79}$$

pa je a_{33} najveći član, odakle zaključujemo da su u kutiji najvjerojatnije 33 bijele kuglice.

△

Zadatak 4.23 U kutiji je 5 kuglica(različitih!) od kojih svaka može biti bijela ili crna s jednakom vjerojatnošću. Ako smo izvukli bijelu kuglicu, koji je najvjerojatniji broj crnih kuglica u kutiji?

Rješenje: Potpun sistem događaja:

$$H_i := \{ \text{ u kutiji je } i \text{ crnih kuglica } \}, \quad i \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{\binom{5}{i}}{2^5}$$

Za

$$A := \{ \text{ izvučena je bijela kuglica } \}$$

je

$$\mathrm{P}(A|H_i) = \frac{5-i}{5}$$

Ideja je maksimizirati funkciju

$$i \mapsto \mathrm{P}(H_i|A), \quad i \in \{0,1,2,3,4,5\},$$

a iz

$$\mathrm{P}(H_i|A) = \text{ Bayes } = \frac{1}{\mathrm{P}(A)}(5-i) \cdot \binom{5}{i}$$

vidimo da treba promatrati samo izraz oblika $(5-i) \cdot \binom{5}{i}$:

i	0	1	2	3	4	5
$(5-i) \cdot \binom{5}{i}$	5	20	30	20	5	0

Dakle, u kutiji su najvjerojatnije 2 crne kuglice.

△

Formulu potpune vjerojantosti možemo malo i poopćiti.

Neka je $\{H_i \colon i \in I\}$ potpun sistem događaja i $A, B \in \mathcal{F}$, takvi da je $\mathrm{P}(B) > 0$. Primjenimo li formulu potpune vjerojatnosti na vjerojatnosnu mjeru definiranu sa $\mathrm{P}_B(\cdot) = \mathrm{P}(\cdot|B)$ (vidite Zadatak 4.28), onda vidimo da vrijedi

$$\mathrm{P}_B(A) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}_B(A|H_i)\mathrm{P}_B(H_i) = (*)$$

$$\mathrm{P}_B(A|H_i) = \frac{\mathrm{P}_B(A \cap H_i)}{\mathrm{P}_B(H_i)} = \frac{\frac{\mathrm{P}(A \cap H_i \cap B)}{\mathrm{P}(B)}}{\frac{\mathrm{P}(B \cap H_i)}{\mathrm{P}(B)}} = \mathrm{P}(A|B \cap H_i)$$

$$\Longrightarrow (*) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A|B \cap H_i)\mathrm{P}(H_i|B).$$

Dakle, vrijedi proširena formula potpune vjerojantosti:

$$\mathrm{P}(A|B) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A|B \cap H_i)\mathrm{P}(H_i|B).$$

Zadatak 4.24 Kutija sadrži n kuglica. Sve pretpostavke o broju bijelih kuglica u kutiji su jednako vjerojatne. Ako je bez vraćanja izvučena kuglica bijele boje, kolika je vjerojatnost da će i sljedeća izvučena kuglica biti bijele boje?

Rješenje: Potpun sistem događaja je

$$H_i := \{ \text{ u kutiji je } i \text{ bijelih kuglica } \}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

i

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{1}{n+1}.$$

Neka su

$$\begin{aligned} A :=& \{ \text{ prvi put je izvučena bijela kuglica } \}, \\ B :=& \{ \text{ drugi put je izvučena bijela kuglica } \}. \end{aligned}$$

Tražena vjerojatnost je

$$\mathrm{P}(A|B) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(A|B \cap H_i)\mathrm{P}(H_i|B) = (*)$$

Računamo

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A|B\cap H_0) &= 0 \\ \mathrm{P}(A|B\cap H_i) &= \frac{i-1}{n-1}, \quad i\in\{1,2,\ldots,n\}, \\ \mathrm{P}(B|H_i) &= \frac{i}{n}, \quad i\in\{0,1,\ldots,n\} \end{aligned}$$

i iz Bayesove formule dobijemo

$$\mathrm{P}(H_i|B) = \frac{\mathrm{P}(B|H_i)\mathrm{P}(H_i)}{\sum_{j=0}^{n}\mathrm{P}(B|H_j)\mathrm{P}(H_j)} = \frac{\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sum_{j=0}^{n}\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{2i}{n(n+1)}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ (*) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n-1}\cdot\frac{2i}{n(n+1)} = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{n}i\right) = \\ &= \frac{2}{(n-1)n(n+1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

△

Zadatak 4.25 Na ispitu je 10 pitanja. Student prolazi ako točno odgovori na dva proizvoljno odabrana pitanja ili ako točno odgovori na jedno od njih i zatim odgovori točno i na treće postavljeno pitanje. Na koliko pitanja student treba znati odgovor da bi s vjerojatnošću 0.8 položio ispit?

Rješenje: Pretpostavimo da student zna odgovor na n pitanja. Definiramo potpun sistem događaja

$$\begin{aligned} H_0 &:= \{\text{ od prva dva pitanja, student nije odgovorio ni na jedno }\}, \\ H_1 &:= \{\text{ od prva dva pitanja, student je odgovorio na jedno pitanje }\}, \\ H_2 &:= \{\text{ od prva dva pitanja, student je odgovorio na oba }\}. \end{aligned}$$

Tražimo vjerojatnost događaja

$$A := \{\text{ student je položio ispit }\}.$$

$$\mathrm{P}(H_0) = \frac{(10-n)(9-n)}{10 \cdot 9} \qquad \mathrm{P}(A|H_0) = 0$$
$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{\binom{2}{1} n(10-n)}{10 \cdot 9} \qquad \mathrm{P}(A|H_1) = \frac{n-1}{8}$$
$$\mathrm{P}(H_2) = \frac{n(n-1)}{10 \cdot 9} \qquad \mathrm{P}(A|H_2) = 1$$

$$\Longrightarrow \mathrm{P}(A) \sum = i = 0^2 \mathrm{P}(A|H_i)\mathrm{P}(H_i) = \ldots = \frac{n(n-1)(14-n)}{360} =: f(n).$$

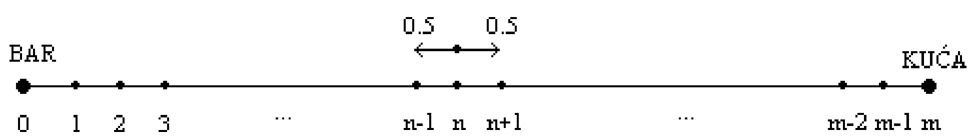
Tada je

n	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	0.5	0.67	0.82	0.93	1	1

Dakle, student treba znati odgovor na barem 7 pitanja.

△

Zadatak 4.26 Pijanac šeta ulicom duljine m blokova i trenutno se nalazi n blokova od bara ($1 \leq n \leq m-1$). On s jednakom vjerojatnošću ide lijevo ili desno sve dok ne dođe do bara ili kuće.



Izračunajte vjerojatnost da pijanac dođe kući prije nego što završi u baru.

Rješenje: Neka je

$$A := \{ \text{ pijanac je stigao kući prije nego u bar } \}$$

i

$$B_n := \{ \text{ pijanac se nalazi n blokova od bara } \}, \quad 0 \leq n \leq m.$$

Neka je

$$H_1 := \{ \text{ pijanac ide lijevo } \} \quad H_2 := \{ \text{ pijanac ide desno } \}$$

potpun sistem događaja i neka je$p_n := \mathrm{P}(A|B_n)$. Iz proširene formule potpune vjerojatnosti za $1 \leq n \leq m-1$ slijedi

$$\begin{aligned} p_n &= \mathrm{P}(A|B_n \cap H_1)\mathrm{P}(H_1|B_n) + \mathrm{P}(A|B_n \cap H_2)\mathrm{P}(H_2|B_n) \\ &= \mathrm{P}(A|H_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} + \mathrm{P}(A|H_{n+1}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{p_{n-1} + p_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Na rubovima je $p_0 = \mathrm{P}(A|B_0) = 0$, $p_m = \mathrm{P}(A|B_m) = 1$ pa smo dobili (homogenu) rekurziju s rubnim uvjetima: $\begin{cases} 2p_n &= p_{n+1} + p_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq m-1 \\ p_0 &= 0 \\ p_m &= 1 \end{cases}$ Karakteristična jednadžba je $r^2 - 2r + 1 = 0$, odakle vidimo da je rješenje oblika $p_n = An + B$. Iz rubnih uvjeta dobijemo $A = \frac{1}{m}$ i $B = 0$ pa je $p_n = \frac{n}{m}$, za $0 \leq n \leq m$.

$\triangle$

Zadatak 4.27 Simetrična kocka se baca n puta. Izračunajte vjerojatnost da šestica padne neparan broj puta.

Rješenje: Označimo s p_n vjerojatnost da šestica padne neparan broj puta u n bacanja. Definirajmo događaj $A := \{$ šestica je pala neparan broj puta $\}$ i potpun sistem događaja:

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{ \text{ u prvom bacanju je pala šestica } \}, \\ H_2 &:= \{ \text{ u prvom bacanju nije pala šestica } \} \\ &. \end{aligned}$$

Tada je iz formule potpune vjerojatnosti:

$$p_n = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|H_1)\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A|H_2)\mathrm{P}(H_2) = (1 - p_{n-1}) \cdot \frac{1}{6} + p_{n-1} \cdot \frac{1}{6},$$

odakle dobijemo rekurziju

$$6p_n - 4p_{n-1} - 1 = 0.$$

Pripadna homogena rekurzija je

$$6p_n - 4p_{n-1} = 0$$

pa je karakteristična jednadžba

$$6r - 4 = 0,$$

odakle je $r = \frac{2}{3}$ pa je rješenje homogene rekurzije

$$p_n^h = A\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Rjesenje početne(nehomogene) rekurzije je tada

$$p_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^n + B,$$

gdje su A i B neke konstante koje odredimo iz početnih uvjeta:

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{\binom{2}{1}\cdot 5 \cdot 1}{6^2} = \frac{5}{18}.$$

Dakle, iz

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= p_1 = A \cdot \frac{2}{3} + B \\ \frac{5}{3} &= p_2 = A \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + B \end{aligned}$$

dobijemo

$$p_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2}.$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

4.28 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $\mathrm{P}(B) > 0$. Pokažite da je funkcija $\mathrm{P}_B \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$\mathrm{P}_B(A) := \mathrm{P}(A|B), \quad A \in \mathcal{F}$$

vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$.

4.29 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathrm{P}(B) > 0$. Pokažite da je

$$\mathrm{P}(A|B) \geq \frac{\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1}{\mathrm{P}(B)}.$$

4.30 U kutiji je n kuglica označenih brojevima $1, 2, \ldots, n$. Iz kutije na slučajan način izvučemo jednu kuglicu. Ako je kuglica bila oznažena brojem 1, ne vraćamo je u kutiju, a inače je vraćamo. Nakon toga izvučemo još jednu kuglicu. Izračunajte vjerojatnost da je druga kuglica označena brojem 2?

4.31 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Jesu li događaji $A \Delta B$ i C nezavisni?

4.32 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Pokažite da je

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B^c) \iff A \text{ i } B \text{ su nezavisni.}$$

4.33 U kutiji se nalazi 4 plave, 5 bijelih i 6 crnih kuglica. Izvlačimo tri kuglice, jednu po jednu bez vraćanja. Promotrimo sljedeće događaje:

$$A = \{\text{sve tri kuglice su različitih boja}\}, \ B = \{\text{prva kuglica je bijela}\}$$

$$C = \{\text{prve dvije kuglice su različitih boja.}\}$$

Izračunajte $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$. Jesu li događaji A i B nezavisni?

4.34 Neka je $E \in \mathcal{F}$ događaj koji je nezavisan sa samim sobom. Koje vrijednosti može poprimiti $\mathrm{P}(E)$?

4.35 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in \mathcal{F}$ događaji takvi da je

$$\mathrm{P}(A \Delta B) = 0, \ \mathrm{P}(A \cup B) = p \ \text{ za neki } p \in [0, 1].$$

(a) Izračunajte $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A \cap B)$, $\mathrm{P}(A \setminus B)$ i $\mathrm{P}(B \setminus A)$.

(b) Jesu li događaji A i B nezavisni?

4.36 Tvornica čokolade organizira nagradnu igru u kojo treba sakupiti određeni broj kupona koji se nalaze u čokoladama. U tvornici u svaku od velikih kutija koje sadrže po 200 čokolada stavljaju 50 čokolada s nagradnim kuponom. Mali Ivica želi dobiti nagradu pa je nagovorio oca da mu kupi čitavu veliku kutiju s 200 čokolada i počeo otvarati čokolade jednu za drugom. Izračunajte vjerojatnost da će mali Ivica u 128. pregledanoj čokoladi pronaći nagradni kupon.

4.37 Na stolu su 3 kutije:

- u prvoj kutiji su 2 žute, 4 zelene i 6 plavih kuglica;
- u drugoj kutiji su 4 žute, 6 zelenih i 8 plavih kuglica;
- u prvoj kutiji su 6 žutih, 8 zelenih i 10 plavih kuglica.

Bacamo simetričnu kocku i ako padne 1,2 ili 3 biramo prvu kutiju, ako padne 4 biramo drugu kutiju, a inače biramo treću kutiju.

(a) Iz tako odabrane kutije je izvučena kuglica i ona je bila zelene boje. Ako kuglice ne vraćamo u kutiju, izračunajte vjerojatnost da će sljedeća izvučena kuglica biti plava.

(b) Ako su izvučene dvije žute kuglice, odredite kutiju iz koje su one najvjerojatnije izvučene.

4.38 U ponoć su na parkiralištu bila 2 siva i 1 crni Ford, 3 siva i 4 crna BMW-a i 3 sive i 1 crna Toyota. Te noći je kradljivac automobila nasumce odabrao automobil i ukrao ga. Ako je ukraden automobil sive boje, koja je vjerojatnost da je to bio BMW?

4.39 Marko je ozbiljan student koji uči petkom navečer. Međutim, njegov cimer ide van petkom navečer; 40 % puta ode van s djevojkom, a 60 % puta ode do obližnjeg bara. Ako ode van s djevojkom, onda kod nje prespava 30 % puta, a ako otiđe u bar, onda u 40 % puta izazove tuču i noć provede u zatvoru. Jedne subote Marko se probudio i vidio da mu cimer nije u sobi. Izračunajte vjerojatnost da je Markov cimer u zatvoru.

4.40 Tri prijateljice, Dunja, Lidija i Tina, prijavile su se kao ekipa na kviz znanja. One se za odgovor na pitanje prijavljuju s vjerojatnostima $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$. Na pitanje odgovaraju točno s vjerojatnostima $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{5}$. Ako pitanje nije točno odgovoreno, nađite vjerojatnost da je na pitanje odgovarala Tina.

4.41 Nekim kanalom se prenose podaci zapisani pomoću znakova 0 i 1. Vjerojatnost da se pošalje 1 je 0.3, a vjerojatnost da se pošalje 0 je 0.7. Na izlazu se 15% znakova pogrešno interpretira. Ako je primljen znak 1, izračunajte vjerojatnost da je poslan znak 0.

4.42 Na stolu su dvije kutije. U prvoj kutiji su plava, zelena i crvena kuglica, a u drugoj kutiji je p plavih, z zelenih i c crvenih kuglica $(p, z, c \geq 1)$. Slučajno odaberemo dvije kuglice iz prve kutije i prebacimo ih u drugu kutiju. Nakon toga iz druge kutije izvučemo kuglicu. Ako je izvučena kuglica zelene boje, izračunajte vjerojatnost da u prvoj kutiji nema crvene kuglice.

4.43 Simetrična kocka A ima 4 crvene i 2 bijele strane, dok simetrična kocka B ima 2 crvene i 4 bijele strane. Bacamo simetrični novčić. Ako padne pismo, onda se igra kockom A, a inače se igra kockom B. Na kocki je dva puta zaredom palo crveno. Izračunajte vjerojatnost da će i treći put pasti crveno.

4.44 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor.

(a) Neka su $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathrm{P}(A) = 0.9$ i $\mathrm{P}(B) = 0.8$. Pokažite da je $\mathrm{P}(A \cap B) \geq 0.7$.

(b) Pokažite da za $C, D \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathrm{P}(C | C \cup D) \geq \mathrm{P}(C | D).$$

Rješenja: **4.30.** $\frac{n^2-n+1}{n^3-n^2}$ **4.34.** 0 ili 1 **4.36.** 0.25 **4.37 (a) 0.496 (b) iz treće kutije. 4.38. 0.375 4.39. 0.6666 4.40. 0.2222 4.41. 0.291 4.42.** $\frac{2z+1}{3z+2}$ **4.43. 0.6**

5

Geometrijske vjerojatnosti

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ograničen, izmjeriv skup i $\lambda(\Omega) < +\infty$ gdje je λ- **Lebesgueova mjera:**

$$\begin{aligned} n = 1 \ldots \lambda &= \text{duljina} \ldots && \textit{npr. } \lambda([1,5]) = 5 - 1 = 4 \\ n = 2 \ldots \lambda &= \text{površina} \ldots && \textit{npr. } \lambda([1,5] \times [-1,4] = (5-1)(4-(-1))) = 20 \\ n = 3 \ldots \lambda &= \text{volumen} \ldots && \textit{npr. } \lambda([2,3] \times [-1,4] \times [1,5]) = 20 \end{aligned}$$

Želimo modelirati vjerojatnosni prostor koji odgovara slučajnom odabiru točke iz $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Primjer 5.1 Slučajno biramo točku iz kvadrata stranice duljine 1. Kolika je vjerojatnost da ta točka upadne u krug upisan tom kvadratu?

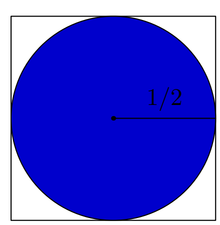
$\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$\mathcal{F} = \{\text{podskupovi od } \Omega \text{ kojima možemo odrediti površinu}\}$

$A = \{\text{krug upisan } [0,1]^2\}$

$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$

$P(A) = \frac{(\frac{1}{2})^2 \pi}{1 \cdot 1} = \frac{\pi}{4}$



Općenito , s

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$$

je izražena vjerojatnost da slučajnim odabirom točke iz Ω odaberemo točku baš iz izmjerivog skupa $A \subseteq \Omega$.

Zadatak 5.2 Iz segmenta $[0,1]$ se slučajno i nezavisno biraju dva broja x i y. Izračunajte vjerojatnost događaja:

(a) $A = \{(x,y): \; x = a, y = b\}$

(b) $B = \{(x,y): \; x = a\}$

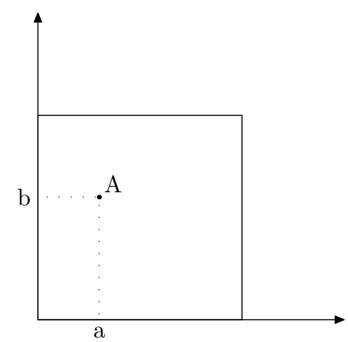
(c) $C = \{(x,y): \; x = y\}$

(d) $D = \{(x,y): \; x \leq y\}$

Rješenje: $\Omega = [0,1] \times [0,1] \Longrightarrow \lambda(\Omega) = 1$.

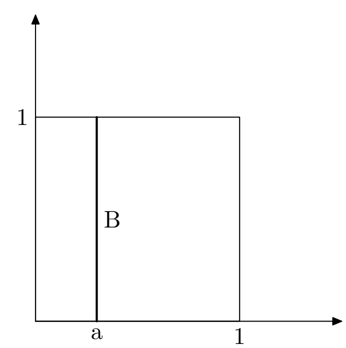
(a)

$P(A) = \frac{\lambda(\{(a,b)\})}{\lambda(\Omega)} = \frac{0}{1} = 0$



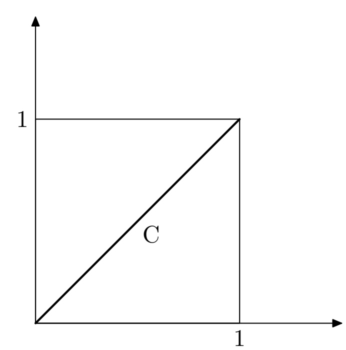
(b)

$P(B) = \frac{\lambda(B)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\lambda(\{a\}\times[0,1])}{\lambda([0,1]\times[0,1])} = \frac{(a-a)(1-0)}{(1-0)(1-0)} = 0$



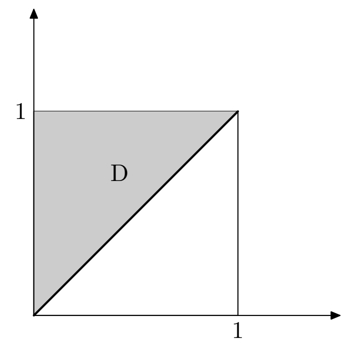
(c)

$P(C) = \frac{\lambda(C)}{\lambda(\Omega)} = \frac{0}{1} = 0$



(d)

$P(D) = \frac{\lambda(D)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$



$\triangle$

Zadatak 5.3 Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabran broj iz $[0,1]$ bude racionalan.

Rješenje: $\Omega = [0,1],\ \cap[0,1] = \cup_{n=1}^{\infty}\{q_n\}, \mathrm{P}(\{q_n\}) = \frac{\lambda(\{q_n\})}{\lambda(\Omega)} = \frac{0}{1} = 0 \Longrightarrow$

$$\mathrm{P}(\cap[0,1]) = \mathrm{P}(\cup_{n=1}^{\infty}\{q_n\}) = (\sigma - aditivnost) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(\{q_n\}) = 0$$

$\triangle$

Zadatak 5.4 Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz $[0,1]\times[0,1]$ ima barem jednu racionalanu koordinatu.

Rješenje: Tražena vjerojatnost je

$$\begin{aligned} 0 \le \mathrm{P}(([0,1]\times) \cup (\times[0,1])) &\le (\text{subaditivnost}) \le \\ &\le \mathrm{P}([0,1]\times) + \mathrm{P}(\times[0,1]) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

jer je
$\mathrm{P}([0,1]\times) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}([0,1]\times\{q_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-0)(q_n - q_n) = 0.$
Analogno je $\mathrm{P}(\times[0,1]) = 0$

$\triangle$

Zadatak 5.5 Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz $[0,1]$ upadne u **Cantorov skup**.

Rješenje:

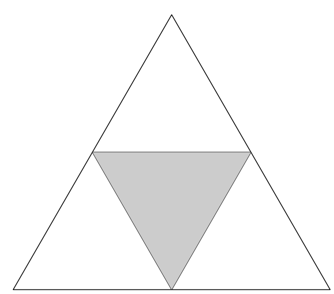
$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\lambda(C)}{\lambda([0,1])} = \lambda(C) = 1 - \lambda(C^c) \\ &= 1 - (\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3^2} + 2^2\cdot\frac{1}{3^3} + 2^3\frac{1}{3^4}\cdots) \\ &= 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

△

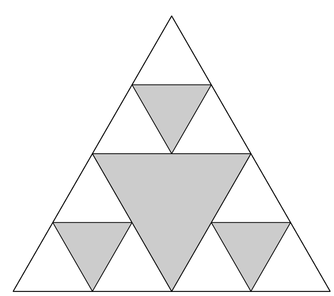
Zadatak 5.6 Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka unutar jednakostraničnog trokuta A upadne u **trokut Sierpinskog**.

Rješenje: Označimo s S trokut Sierpinskog kojeg konstuiramo po koracima:

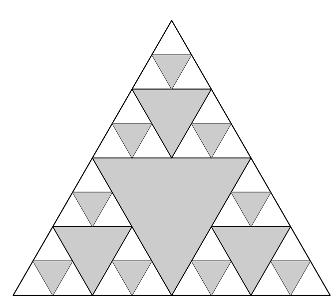
Prvo iz trokuta izbacimo središnji istostranični trokut A_1:
$\lambda(A_1) = \frac{\lambda(A)}{4}$



Potom izbacimo izbac
središnja istostranična
$\lambda(A_2) = 3\frac{\lambda(A_1)}{4} = \frac{3}{4^2}\lambda($

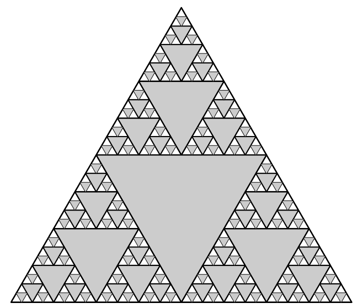


Proceduru ponovljamo u svakom od preostalih istostranični trokuta:
$\lambda(A_3) = 3 \cdot \frac{1}{4}\lambda(A_2) = \frac{3^2}{4^3}\lambda(A)$



Općenito
$\lambda(A_n) = 3 \cdot \frac{1}{4}\lambda(A_{n-1}) = \frac{3^{n-1}}{4^n}\lambda(A)$
$S = A\backslash(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A\backslash S) &= \mathrm{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(A_n)}{\lambda(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 1 = 1 \\
\Longrightarrow \mathrm{P}(S) &= 0.
\end{aligned}$$



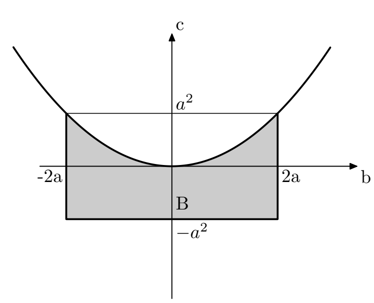
$\triangle$

Zadatak 5.7 Dana je kvadratna jednadžba $x^2 + bx + c = 0$, pri čemu je b slučajno odabran iz $[-2a, 2a]$, c slučajno odabran iz $[-a^2, a^2]$, $a > 0$. Ako znamo da su rješenja jednadžbe $x_{1,2}$ realna izračunajte vjerojatnost da je $|x_{1,2}| \leq a$.

Rješenje: Točku (b, c) biramo iz $[-2a, 2a] \times [-a^2, a^2] = \Omega$
Označimo

$$\begin{aligned}
B &= \{(b,c) \in \Omega : \; x_{1,2} \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(b,c) \in \Omega : \; b^2 - 4c \geq 0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda(B) &= a^2 \cdot 4a + \int_{-2a}^{2a} \frac{b^2}{4} db \\
&= 4a^3 + (\frac{b^3}{12})|_{-2a}^{2a} = 4a^3 + \frac{8a^3}{6} \\
&= \frac{16a^3}{3}.
\end{aligned}$$



Označimo dalje $A = \{(b,c) \in \Omega : \; |x_{1,2}| \leq a\}$.

$$|x_{1,2}| \leq a \Longleftrightarrow |\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}| \leq a$$

$$-2a \leq -b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \leq 2a$$

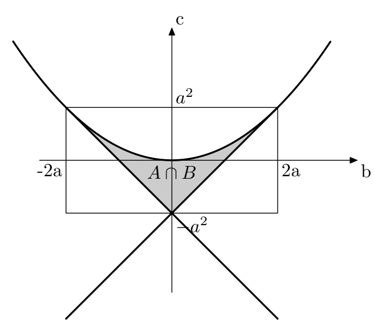
$$\underbrace{b - 2a}_{\leq 0} \leq \pm\sqrt{b^2 - 4c} \leq \underbrace{b + 2a}_{\geq 0}$$

$$\begin{aligned} b - 2a &\leq -\sqrt{b^2 - 4c}/(-1) \\ 2a - b &\geq \sqrt{b^2 - 4c}/^2 \\ 4a^2 - 4ab + b^2 &\geq b^2 - 4c \\ &\boxed{c \geq ab - a^2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sqrt{b^2 - 4c} &\leq b + 2a \\ \sqrt{b^2 - 4c} &\leq b + 2a/^2 \\ b^2 - 4c &\leq b^2 + 4ab + 4a^2 \\ &\boxed{c \geq -ab - a^2}. \end{aligned}$$

Cilj nam je odrediti

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{\lambda(A\cap B)}{\lambda(\Omega)}}{\frac{\lambda(B)}{\lambda(\Omega)}} = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(B)}.$$

$$\begin{aligned} \lambda(A \cap B) &= \lambda(B) - \frac{2a \cdot 2a^2}{2} - \frac{2a \cdot 2a^2}{2} \\ &= \frac{16a^3}{3} - 4a^3 = \frac{4a^3}{3}. \\ \Longrightarrow \mathrm{P}(A|B) &= \frac{\frac{4a^3}{3}}{\frac{16a^3}{3}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



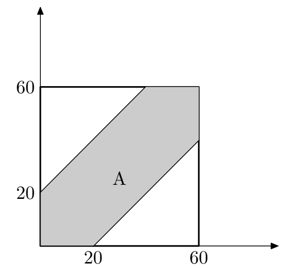
△

Zadatak 5.8 Dva prijatelja se dogovore da će se naći na Trgu bana Jelačića kraj sata u 8h navečer. Tko prvi dođe čekat će najviše 20 minuta. Obojica će sigurno doći na trg između 8 i 9h. Izračunajte vjerojatnost da se dva prijatelja sastanu.

Rješenje: $\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$ = vrijeme dolaska 1og i 2og prike između 8 i 9h. Npr. $\omega = (15, 22)$ znači da se prvi pojavio u $20 : 15$ a drugi u $20 : 22$. Definirajmo

$$\begin{aligned} A &= \{\text{dva prijatelja su se susrela}\} \\ &= \{(x, y) \in \Omega : \ |x - y| \leq 20\}. \end{aligned}$$

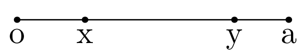
$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} \\
&= \frac{60^2 - \frac{(60-20)^2}{2} - \frac{(60-20)^2}{2}}{60^2} \\
&= \frac{5}{9}.
\end{aligned}
$$

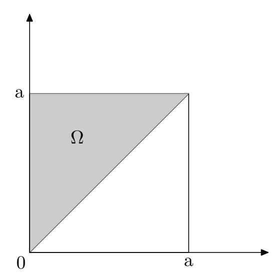


△

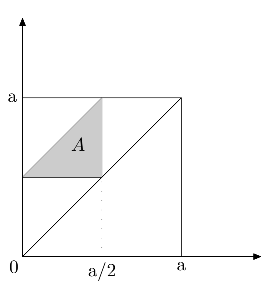
Zadatak 5.9 Dužina duljine a je podjeljena na 3 dijela. Izračunajte vjerojatnost da se iz tih dijelova može sastaviti trokut.

Rješenje:





$$
\begin{aligned}
\Omega &= \{(x,y):\ 0 \le x \le y \le a\} \\
A &= \{\text{moguće sastaviti trokut iz ta tri dijela}\} \\
&= \{(x,y) \in \Omega:\ x + (y-x) > a - y,\ x + (a-y) > y - x,\ (a-y) + (y-x) > x)\} \\
&= \{(x,y) \in \Omega:\ y > a/2,\ y < x + a/2,\ x < a/2)\}
\end{aligned}
$$



$$
\mathrm{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\frac{(\frac{a}{2})^2}{2}}{\frac{a^2}{2}} = 1/4.
$$

△

Zadatak 5.10 Neka su $0 < a < b$ duljine dviju stranica trokuta. Duljina treće stranice trokuta se bira slučajno (tako da trokut bude moguć). Izračunajte vjerojatnost da trokut nema tupi kut.

Rješenje:

$$\begin{aligned} c \in \Omega &\Longleftrightarrow \\ a + b &> c \\ i\ a + c > b &\Longrightarrow c > b - a \\ i\ b + c > a &\Longrightarrow c > \underbrace{a - b}_{<0}(\text{uvijek vrijedi!}) \\ &\Longleftrightarrow b - a < c < a + b. \end{aligned}$$

Dakle

$$\Omega = \langle b - a, b + a \rangle.$$

Definirajmo događaj

$$A = \{\triangle \text{ nema tupi kut}\}.$$

Koristeći kosinusov teorem za trokut

$$\begin{aligned} c \in A &\Longleftrightarrow \\ a^2 &\leq b^2 + c^2 \\ b^2 &\leq a^2 + c^2 \\ c^2 &\leq a^2 + b^2 \end{aligned}$$

tj .

$$b^2 - a^2 \leq c^2 \leq b^2 + a^2 \Longleftrightarrow \sqrt{b^2 - a^2} \leq c \leq \sqrt{b^2 + a^2}.$$

Dakle

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2} - \sqrt{b^2 - a^2}}{(b + a) - (b - a)} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2} - \sqrt{b^2 - a^2}}{2a}.$$

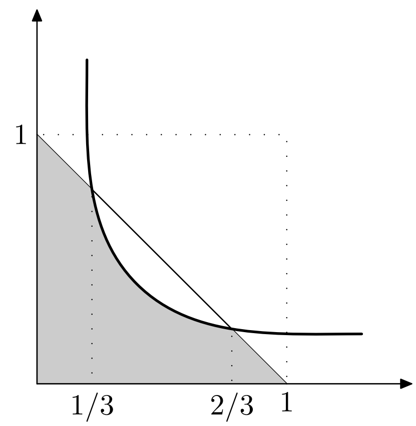
$\triangle$

Zadatak 5.11 Iz segmenta $[0, 1]$ su slučajno odabrani brojevi x i y. Izračunajte vjerojatnost da je

$$x + y \leq 1 \qquad xy \leq 2/9.$$

Rješenje: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1], \qquad A = \{(x, y) \in \Omega :\ x + y \leq 1 \qquad xy \leq 2/9\}$

$\triangle$



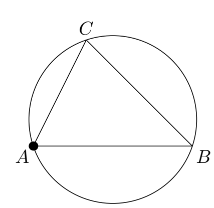
Presjek krivulja $x+y=1$, $xy=1/9$ u prvom kvadrantu su točke $(1/3,2/3)$ i $(2/3,1/3)$.

$$P(A)=\frac{\lambda(A)}{1\cdot 1}=\lambda(A)=\int_0^{1/3}(1-x)dx+\int_{1/3}^{2/3}\frac{2}{9x}dx+\int_{2/3}^{1}(1-x)dx$$
$$=\frac{5}{18}+\frac{2}{9}\ln 2+\frac{1}{18}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln 2.$$

Zadatak 5.12 Na kružnici polumjera r su slučajno odabrane 3 točke A,B,C. Izračunajte vjerojatnost da je $\triangle ABC$ šiljastokutan.

Rješenje:

Fiksirajmo jedan od vrhova trokuta npr. vrh A.
Trokut ABC je određen duljinom lukova $l_1=\overset{\frown}{AB},\ l_2=\overset{\frown}{AC}$, pri čemu je $l_1+l_2\leq 2r\pi$.
Dakle
$\Omega=\{(l_1,l_2)\in[0,2r\pi]^2:\ l_1+l_2\leq 2r\pi\}$.

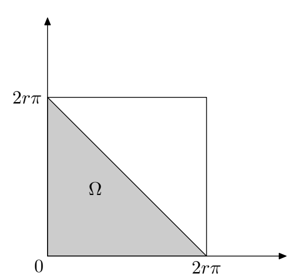


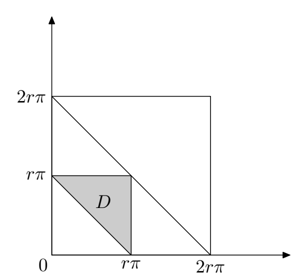
Označimo $D=\{\triangle ABC \text{ je šiljastokutan}\}$.

$$\begin{aligned}(l_1, l_2) \in D \iff& \\ &l_1 \leq 2r\pi \\ &l_2 \leq 2r\pi \\ &2r\pi - l_1 - l_2 \leq 2r\pi \iff\end{aligned}$$

$\iff$

$$\begin{aligned}&l_1 \leq 2r\pi \\ &l_2 \leq 2r\pi \\ &l_1 + l_2 \geq r\pi\end{aligned}$$





$$\Longrightarrow P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\frac{(r\pi)^2}{2}}{\frac{(2r\pi)^2}{2}} = \frac{1}{4}.$$

$\triangle$

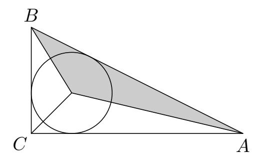
Zadatak 5.13 Kolika je vjerojatnost da za slučajno odabrani kut $\alpha \in [0, 2\pi]$ vrijedi $\frac{1}{2} \leq \sin\alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$?

Rješenje: $\Omega = [0, 2\pi]$, $A = \{\alpha \in \Omega : \frac{1}{2} \leq \sin\alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\} = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$.

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{1}{6}.$$

Zadatak 5.14 Izračunajte da je slučajno odabrana točka u pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ bude bliže hipotenuzi $\overline{AB}$ nego katetama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.

Rješenje: Neka je r radijus upisane kružnice u $\triangle ABC$.
Tražena vjerojatnost je
$\frac{\frac{c\cdot r}{2}}{\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}} = \frac{c}{a+b+c}$.

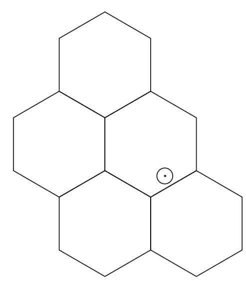


△

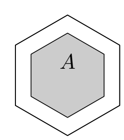
Zadatak 5.15 Novčić polumjera r je bačen na ravninu $\mathbb{R}^2$ koja je popločana pravilnim šesterokutima stranice $5r$. Izračunajte vjerojatnost da novčić ne siječe niti jedan od šesterokuta.

Rješenje:

Uočimo gdje god novčić pao, ishod je da je njegovo središte u šesterokutu stranice $5r$. Dakle Ω je šesterokut stranice 5r.



Neka je
$A = \{$novčić ne siječe niti jedan od šesterokuta$\}$
Udaljenost šesterokuta stranice $5r$ i osjenčanog šesterokuta na slici je r.



$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = (D.Z.) = (1 - \frac{2\sqrt{3}}{15})^2.$

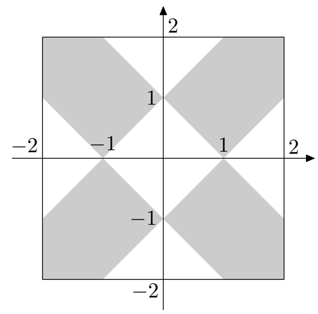
△

Zadatak 5.16 Slučajno biramo dvije točke x i y iz $[-2, 2]$. Izračunajte vjerojatnost da je

$$|x| + |y| \geq 1,$$

$$||x| - |y|| \leq 1.$$

Rješenje:



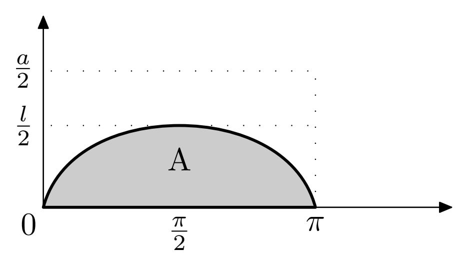
Tražena je vjerojatnost $\frac{5}{8}$.

$\triangle$

Zadatak 5.17 (**Buffonov problem**)Igla duljine ℓ je bačena na ravninu koja podjeljena paralelnim linijama međusobno udaljenim za a ($\ell < a$). Izračunajte vjerojatnost da igla siječe neku od linija.

Rješenje: Položaj igle je jedinstveno određen udaljenošću središta igle do najbliže linije te kutem koji igla zatvara s linijama:

$$\Omega = [0, \ell] \times [0, \pi] \Longrightarrow \lambda(\Omega) = \tfrac{a \cdot \pi}{2}$$
$$A = \{\text{igla siječe neku od linija}\} \Longrightarrow$$
$$A = \{(d, \varphi) \in \Omega : \ d \leq \tfrac{\ell}{2} \sin\varphi\} \Longrightarrow$$
$$\lambda(A) = \int_0^\pi \tfrac{\ell}{2} \sin\varphi d\varphi = \ell$$
$$P(A) = \tfrac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \tfrac{2\ell}{\pi a}.$$



$\triangle$

Napomena. Aproksimacija broja π (uz $a = 2l$):

bacač	godina	broj bacanja	aproksimacija broja π
Buffon	1777.	10 000	3.15
Wolf	1850.	5 000	3.1596
Smith	1855.	3 204	3.1553
Fox	1894.	1 120	3.1419
Lazarini	1901.	3 408	3.1415929

Zadaci za vježbu

5.18 Unutar intervala $[0, 10]$ na slučajan način biramo 5 točaka. Izračunajte vjerojatnost da dvije točke padnu u interval $[0, 2]$, dvije u interval $[2, 6]$ i jedna u interval $[6, 10]$.

5.19 Iz intervala $[-1, 1]$ na slučajan način biramo 2 točke x i y. Ako je poznato da je $x > -0.5$, izračunajte vjerojatnost da je $|x + y| \leq 2|x|$.

5.20 Štap duljine L je slučajno razlomljen na tri dijela. Izračunajte vjerojatnost da je duljina najduljeg dijela manja od $\frac{L}{2}$.

5.21 Svemirska stanica ima oblik prstena koji je spojen sa središtem O. Svemirski brodovi mogu sletjeti samo na vanjski dio koji je oblika prstena. Dva broda A i B komuniciraju ako je kut $\angle AOB < \frac{\pi}{2}$. Ako su na stanicu slučajno i nezavisno sletjela tri broda, izračunajte vjerojatnot da oni komuniciraju. (Ako dva broda ne mogu komunicirati direktno, oni još uvijek možda mogu komunicirati preko trećeg broda.)

5.22 Na žicu duljine 20 m između dva telefonska stupa su slučajno i nezavisno sletjela 2 vrapca. Izračunajte vjerojatnost da je udaljenost vrabaca od stupova, kao i njihova međusobna udaljenost, barem 2 m.

5.23 Slučajno i nezavisno biramo točku iz kocke $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Izračunajte vjerojatnost da koordinate točke zadovoljavaju sljedeće nejednakosti

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

$$|x| + |y| + |z| \geq 1.$$

5.24 Iz segmenta $[-2, 2]$ na slučajan način i nezavisno jedan od drugoga biramo dva broja x i y. Izračunajte vjerojatnost da za x i y vrijedi

$$1 \leq |x| + |y| \leq 2 \ \text{ ili } \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

5.25 Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka u kvadratu stranice a bude bliža nekoj dijagonali nego stranicama kvadrata.

5.26 Iz segmenta $[0, 5]$ su na slučajan način odabrana dva broja a i b. Izračunajte vjerojatnost da je

$$a + b \geq 5, \ |a - b| \leq 1.$$

5.27 Iz Na slučajan način biramo broj x iz segmenta $[0, 1]$. Odredite vjerojatnost da je broj $\lfloor 100x \rfloor$ djeljiv s 3. ($\lfloor y \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od y.)

5.28 Iz Na kružnici polumjera R slučajno su odabrane dvije točke A i B i zatim su spojene s središtem S. Kolika je vjerojatnost da je površina trokuta $\triangle ABS$ veća od $R^2/4$?

5.29 Unutar pravilnog n-terokuta bira se točka na slučajan način. Izračunajte vjerojatnost p_n da se točka nalazi bliže rubu n-terokuta nego nekoj njegovoj dijagonali. Izračunajte

$$\lim_{n} np_n^2.$$

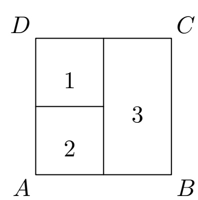
5.30 Na ravninu $\mathbb{R}^2$ je bačen novčić polumjera 0.5. Izračunajte vjerojatnost da novčić prekrije neku točku s cjelobrojnim koordinatama.

5.31 $\mathbb{R}^2$ je popločan s jednakostraničnim trokutima duljine stranice 1, te je svakom od trokuta upisana kružnica. Na slučajan način na $\mathbb{R}^2$ je bačen novčić polumjera 1/12. Izračunajte vjerojatnost da novčić siječe neku od upisanih kružnica.

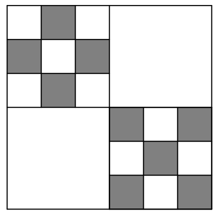
5.32 Unutar dužine duljine 11 slučajno su izabrane 2 točke koje zadanu dužinu dijele na 3 dijela. Kolika je vjerojatnost da je duljina najkraćeg od njih veća od 3 ?

5.33 Duljine stranice pravokutnika su 3 i 4. Na slučajan način biramo točku unutar pravokutnika, te imamo 4 udaljenosti te točke do svake od stranica. Kolika je vjerojatnost da je druga po veličini udaljenost manja od 2?

5.34 Na slučajan način bacamo točku unutar kvadrata $ABCD$(slika). Ako je točka pala unutar sektora označenog s i, $i = 1, 2, 3$, bacamo simetričnu kocku i puta te zbrojimo dobijene brojeve. Ako je poznato da je zbroj na kockama bio 3, izračunajte vjerojatnost da je točka pala u sektor 2.



5.35 Na slučajan način bacamo točku unutar kvadrata (slika). Ako je točka pala unutar bijelog sektora bacamo simetričnu kocku 2 puta te zbrojimo dobijene brojeve, a ako je pala unutar crnog sektora kocku bacamo 3 puta i brojeve zbrojimo. Ako je poznato da je zbroj na kockama bio 3, izračunajte vjerojatnost da je točka pala u crni sektor .



5.36 Unutar jednakokračog trapeza, čija veća baza ima duljinu 2 a krakovi i kraća baza duljinu 1, odabire se na sreću točka i opisuje krug čije je središte u odabranoj točki, a dodiruje najbližu stranicu trapeza. Odredite vjerojatnost da je duljina polumjera takvog kruga manja od 1/7.

5.37 Iz segmenta $[0,1]$ se slučajno i nezavisno biraju točke x i y. Izračunajte vjerojatnost da za x i y vrijedi

$$\mathrm{arctg} x \leq \frac{\pi}{2} y, \; x \leq \sqrt{2(1-y)}, \; 3x^2 - 2y \geq -1.$$

5.38 Ana i Mile se dogovore da će se naći na Trgu bana Jelačića kraj sata u 8h navečer. Ako Ana stigne prva, čekat će najviše 10 minuta, dok će Mile čekati 20 minuta. Oboje će sigurno doći na trg između 8 i 9h. Izračunajte vjerojatnost da se Ana i Mile sastanu.

6

Slučajne varijable

Primjer 6.1 Bacamo dva simetrična novčića. Označimo s X broj pisama koji su pali. Znamo da je

$$\Omega = \{PP, PG, GP, GG\} \text{ i } \mathrm{P}(\omega) = \frac{1}{4},\ \forall \omega \in \Omega.$$

Također je

$$X(PP) = 2,\ X(PG) = X(GP) = 1,\ X(GG) = 0.$$

Vjerojatnost da X poprimi vrijednost 2 je $\mathrm{P}(\{PP\}) = \frac{1}{4}$, vrijednost 1 je $\mathrm{P}(\{PG, GP\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ i vrijednost 3 je $\mathrm{P}(\{GG\}) = \frac{1}{4}$.

Definicija. Neka je $\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ diskretni vjerojatnosni prostor. Funkcija

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

se zove **slučajna varijabla**.
Napomena.

(a) Ako je $g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija i X slučajna varijabla, onda je i $g \circ X$ slučajna varijabla, jer je

$$g \circ X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Kraće pišemo: $g(X)$
Npr. $7X$, X^2 i $\sin X$ su slučajne varijable.

(b) Ako je $h \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija i X i Y slučajne varijable, onda je i $h \circ (X, Y)$ slučajna varijabla, jer je

$$h \circ (X, Y) \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Kraće pišemo: $h(X, Y)$
Npr. $7X + 17Y$, X^2Y i $\sin X \cdot e^{X+Y}$ su slučajne varijable.

Slučajna varijabla je veličina koja se dobije mjerenjem vezanim uz neki slučajni pokus. Kod slučajne varijable nas najviše zanima vjerojatnost da ona poprimi neku vrijednosti, a ne vrijednosti koje poprima u pojedinim točkama iz skupa Ω. Dakle, za $a \in \mathbb{R}$ nas zanimaju vjerojatnosti događaja

$$\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = a\} = X^{-1}(\{a\}) = \{X = a\}$$

ili općenitije, za $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) = \{X \in B\}.$$

Tako je npr. u prethodnom primjeru

$$\{X = 0\} = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = 0\} = \{GG\}$$

pa je $\mathrm{P}(X = 0) = \mathrm{P}(\{GG\}) = \frac{1}{4}$. Slično dobijemo $\mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ i $\mathrm{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$. To kraće možemo zapisati u **tablicu distribucije**

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Također,

$$\{X \geq 1\} = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \geq 1\} = \{GP, PG, PP\}$$

pa je $\mathrm{P}(X \geq 1) = \mathrm{P}(\{GP, PG, PP\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Općenito, ako je $X(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ i $\mathrm{P}(X = a_i) = p_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, onda pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je

$$1 = \mathrm{P}(X \in X(\Omega)) = \mathrm{P}(X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X = a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n,$$

zbog međusobne disjunktnosti događaja $\{X = a_n\}$. Dakle, da bi gornja tablica bila tablica distribucije, mora vrijediti:

$$p_i > 0, \text{ za sve } i,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Zadatak 6.2 Bacamo simetričnu kocku. Označimo s X broj koji je pao na kocki. Odredite razdiobu slučajnih varijabli

(a) X,

(b) X^2,

(c) $|X-3|$.

Rješenje: (a)

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

(b) Vidimo da X^2 poprima vrijednosti $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ i da je $\mathrm{P}(X^2 = k^2) = \mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{6}$, za $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$ pa je

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

(c) $|X-3|$ poprima vrijednosti $|1-3|, |2-3|, |3-3|, |4-3|, |5-3|, |6-3|$, tj. 0, 1, 2, 3. Npr. $\mathrm{P}(|X-3|=1) = \mathrm{P}(\{X=2\} \cup \{X=4\}) = \mathrm{P}(X=2) + \mathrm{P}(X=4)$ pa je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/6 & 1/6+1/6 & 1/6+1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

Napomena. Ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

i $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(\{a_1, a_2, \dots\}) = \{b_1, b_2, \dots\}$, onda je

$$g(X) \sim \left(\begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & \dots & b_n & \dots \\ \displaystyle\sum_{j\colon g(a_j)=b_1} p_j & \displaystyle\sum_{j\colon g(a_j)=b_2} p_j & \dots & \displaystyle\sum_{j\colon g(a_j)=b_n} p_j & \dots \end{array} \right).$$

Specijalno, ako je g injekcija, onda je

$$g(X) \sim \begin{pmatrix} g(a_1) & g(a_2) & \dots & g(a_n) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Zadatak 6.3 Slučajna varijabla X ima distribuciju

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ c & 2c & 2c & 3c & c^2 & 2c^2 & 7c^2+c \end{pmatrix}.$$

(a) Odredite konstantu c.

(b) Izračunajte $\mathrm{P}(2 \leq X \leq 5)$.

(c) Odredite najmanji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\mathrm{P}(X \leq k) \geq 0.5$.

Rješenje: (a) Mora vrijediti:

$$\begin{aligned} & c + 2c + 2c + 3c + c^2 + 2c^2 + 7c^2 + c = 1 \\ & c \geq 0, \end{aligned}$$

odakle dobijemo $c = \frac{1}{10}$.
(b) $\mathrm{P}(2 \leq X \leq 5) = \mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3) + \mathrm{P}(X = 4) + \mathrm{P}(X = 5) = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{100} = \frac{71}{100}$
(c)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leq 1) &= \mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{10} < \frac{1}{2} \\ \mathrm{P}(X \leq 2) &= \mathrm{P}(X \leq 1) + \mathrm{P}(X = 2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10} < \frac{1}{2} \\ \mathrm{P}(X \leq 3) &= \mathrm{P}(X \leq 2) + \mathrm{P}(X = 3) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

pa je traženi k jednak 3.

$\triangle$

Neke slučajne varijable

(A) **Bernoullijeva slučajna varijabla** s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$
X = ishod slučajnog pokusa: 1=”uspjeh”, 0=”neuspjeh”, gdje je vjerojatnost uspjeha jednaka p
$q := 1 - p$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

odnosno

$$\mathrm{P}(X = 0) = q, \ \mathrm{P}(X = 1) = p.$$

(B) **Binomna slučajna varijabla** s parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0, 1 \rangle$.
$X \sim B(n, p)$

X = broj uspjeha u nizu od n nezavisnih pokusa, pri čemu je vjerojatnost uspjeha u pojedinom pokusu jednaka p

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ \binom{n}{0}p^0\,q^n & \binom{n}{1}p^1\,q^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n}p^n\,q^0 \end{pmatrix},$$

odnosno

$$\mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k\,q^{n-k},\ k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$$

Naravno, vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\,q^{n-k} = \text{ binomni teorem } = (p+q)^n = 1.$$

(C) **Diskretna uniformna slučajna varijabla** na skupu $\{1,2,\ldots,n\}$
Npr., za $n=6$, X= broj koji je pao na simetričnoj kocki

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

odnosno

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{1}{n},\ k \in \{1,2,\ldots,n\}$$

(D) **Geometrijska slučajna varijabla** s parametrom $p \in \langle 0,1\rangle$
$X \sim G(p)$
X=vrijeme prvog uspjeha u nizu nezavisnog ponavljanja pokusa, pri čemu je vjerojatnost uspjeha jednaka p

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots \\ p & qp & q^2p & \cdots & q^{k-1}p & \cdots \end{pmatrix},$$

odnosno

$$\mathrm{P}(X=k) = q^{k-1}p,\ k \in \mathbb{N}.$$

Naravno,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

(E) **Hipergeometrijska slučajna varijabla** s parametrima $r,m,n \in \mathbb{N}$, gdje je $r \le m$ i $n \le m$
Ako imamo ukupno m proizvoda, od kojih ke r defektnih, onda je X= broj defektnih proizvoda među n slučajno izabranih proizvoda

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ \frac{\binom{r}{0}\binom{m-r}{n-0}}{\binom{m}{n}} & \frac{\binom{r}{1}\binom{m-r}{n-1}}{\binom{m}{n}} & \cdots & \frac{\binom{r}{n}\binom{m-r}{0}}{\binom{m}{n}} \end{pmatrix},$$

odnosno
$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}},\ k\in\{0,1,\dots,n\}.$$

Naravno,
$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X=k)=\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}=\text{Vandermondeova konvolucija}=\frac{\binom{r+(m-r)}{n}}{\binom{m}{n}}=1.$$

(F) **Poissonova slučajna varijabla** s parametrom $\lambda>0$
$X\sim P(\lambda)$
X=broj telefonskih poziva u telefonskoj centrali u jediničnom vremenskom intervalu, pri čemu je λ prosječan broj poziva u jediničnom vremenskom intervalu

$$X\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots \\ \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} & \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix},$$

odnosno
$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k\in\{0,1,2,3,\dots\}.$$

Naravno,
$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}(X=k)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$$

(G) **Logaritamska slučajna varijabla** s parametrom $p\in\langle 0,1\rangle$

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots \\ \frac{-q}{\ln p} & \frac{-q^2}{2\ln p} & \frac{-q^3}{3\ln p} & \dots & \frac{-q^k}{k\ln p} & \dots \end{pmatrix},$$

odnosno
$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{-q^k}{k\ln p},\ k\in\mathbb{N}.$$

Naravno,
$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(X=k)=\frac{-1}{\ln p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}=(*)$$

$$1+t+t^2+\ldots=\frac{1}{1-t}\qquad\qquad /\int_0^x dt$$
$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots=-\ln|t-1|\,|_0^x=-\ln(1-x)$$

pa je $(*)=\frac{-1}{\ln p}(-\ln(1-q))=1.$

Definicija. Slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ su **nezavisne** ako vrijedi

$$\mathrm{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n) = \mathrm{P}(X_1 \in B_1)\mathrm{P}(X_2 \in B_2)\mathrm{P}(\ldots, X_n \in B_n),$$

za sve $B_1, B_2, \ldots B_n \subseteq \mathbb{R}$.)

Zadatak 6.4 Neka su $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ nezavisne Poissonove slučajne varijable. Odredite distribuciju od $X + Y$.

Rješenje: $X + Y$ poprima vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ pa za n iz tog skupa računamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X+Y=n) &= \mathrm{P}(X+Y=n, \bigcup_{k=0}^{\infty}\{X=k\}) = \mathrm{P}(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{X+Y=n, X=k\}) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X+Y=n, X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(k+Y=n, X=k) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(Y=n-k, X=k) = \text{nez.} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(Y=n-k)\mathrm{P}(X=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda}\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} = \\
&= \text{binomni teorem} = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}
\end{aligned}$$

Dakle, $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$.

$\triangle$

Zadatak 6.5 U svakom od slučajnih pokusa koje nezavisno ponavljamo događaj A se pojavljuje s vjerojatnošću p. Izračunajte vjerojatnost da će se događaj A u n izvođenja pokusa pojaviti paran broj puta.

Rješenje:

X=broj pojavljivanja događaja A u n nezavisnih ponavljanja pokusa $\Longrightarrow X \sim B(n, p)$

Tražena vjerojatnost je

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \in \{0, 2, 4, 6, \ldots\}) &= \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=2) + \mathrm{P}(X=4) + \ldots \\
&= \binom{n}{0}p^0q^n + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \binom{n}{4}p^4q^{n-4} + \ldots = (*)
\end{aligned}$$

Zbrajanjem izraza

$$1 = (p+q)^n = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} p^n q^0$$
$$(1-2p)^n = (p+q)^n = \binom{n}{0} p^0 q^n - \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} p^n q^0$$

dobijemo

$$(*) = \frac{1}{2}(1 + (1-2p)^n).$$

$\triangle$

Zadatak 6.6 Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots & \frac{1}{2^k} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = \sin(\frac{\pi X}{2})$.

Rješenje:

Uočimo da je

$$\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k-3 \\ -1, & n = 4k-1 \end{cases}, (k \geq 1)$$

pa Y poprima vrijednosti $-1, 0, 1$. Računamo:

$$\mathrm{P}(Y=0) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=2k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$
$$\mathrm{P}(Y=1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=4k-3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k-3}} = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} = 8 \frac{1}{16} \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$$
$$\mathrm{P}(Y=-1) = 1 - (\mathrm{P}(Y=0) + \mathrm{P}(Y=1)) = \frac{2}{15}.$$

Dakle,

$$Y \sim \begin{pmatrix} \text{-1} & 0 & 1 \\ 2/15 & 1/3 & 8\ /15 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

Zadatak 6.7 Na nekom matematičkom fakultetu je u istom uredu 8 postdiplomskih studenata. Svaki od njih s jednakom vjerojatnošću uči kod kuće i u uredu. Nađite najmanji broj stolova koje treba staviti u ured tako da svaki postdiplomand ima slobodan stol u uredu barem 90 % vremena.

Rješenje:

X =broj postdiplomanada koji uče u uredu $\implies X \sim B(8, \frac{1}{2})$
Tražimo najmanji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathrm{P}(X \leq k) \geq 0.9$, odnosno da je $\mathrm{P}(X > k) \leq 1 - 0.9 = 0.1$. Računamo:

$$\mathrm{P}(X > 7) = \mathrm{P}(X = 8) = \binom{8}{8}\frac{1}{2^8} \approx \underbrace{0.0039}_{\leq 0.1}$$

$$\mathrm{P}(X > 6) = \mathrm{P}(X = 7) + \mathrm{P}(X = 8) = \binom{8}{7}\frac{1}{2^8} + \binom{8}{8}\frac{1}{2^8} \approx \underbrace{0.0351}_{\leq 0.1}$$

$$\mathrm{P}(X > 5) = \mathrm{P}(X = 6) + \mathrm{P}(X = 7) + \mathrm{P}(X = 8) = \binom{8}{6}\frac{1}{2^8} + \binom{8}{7}\frac{1}{2^8} + \binom{8}{8}\frac{1}{2^8} \approx \underbrace{0.144}_{>0.1}.$$

Dakle, $k = 6$.

$\triangle$

Zadaci za vježbu

6.8 Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \frac{c}{3} & \frac{c}{3^2} & \frac{c}{3^3} & \cdots & \frac{c}{3^n} & \cdots \end{pmatrix}.$$

(a) Odredite c.

(b) Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = \ln\left(2 + \sin\frac{(2X-1)\pi}{2}\right)$.

6.9 Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\ \frac{c}{4} & \frac{c}{4^2} & \frac{c}{4^3} & \cdots & \frac{c}{4^n} & \cdots \end{pmatrix}.$$

(a) Odredite c.

(b) Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = \sqrt{1 + \cos\frac{\pi}{X}}$.

6.10 Neka su X, Y i Z nezavisne diskretne slučajne varijable.

(a) Pokažite da su $X + Y$ i Z nezavisne slučajne varijable.

(b) Pokažite da su $X \cdot Y$ i Z nezavisne slučajne varijable.

6.11 Neka su $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable takve da je

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo slučajne varijable

$$S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Izračunajte

(a) $\mathrm{P}(S_3 = 3 | S_2 \in \{-2, 0, 2\})$,

(b) $\mathrm{P}(S_3 = 3 | S_2 \in \{-2, 0, 2\}, S_1 = -1)$,

(c) $\mathrm{P}(S_4 \in \{-2, 0, 2\})$.

6.12 Odredite konstantu c tako da tablica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \frac{cq}{1\cdot 2} & \frac{cq^2}{2\cdot 3} & \frac{cq^3}{3\cdot 4} & \cdots & \frac{cq^n}{n\cdot(n+1)} & \cdots \end{pmatrix}$$

bude razdioba neke slučajne varijable, pri čemu je $q \in \langle 0, 1\rangle$.

6.13 Neka su $X \sim B(n,p)$ i $Y \sim B(m,p)$ nezavisne binomne slučajne varijable. Odredite distribuciju od $X+Y$.

Rješenja: **6.8.** (a) 2 (b) $\mathrm{P}(Y=0)=0.25,\ \mathrm{P}(Y=\ln 3)=0.75$ **6.8.** (a) 3 (b) $\mathrm{P}(Y=0)=0.8,\ \mathrm{P}(Y=\sqrt{2})=0.2$ **6.11.** (a) 0.125 (b) 0 (c) 0.875 **6.12.** $\frac{1}{1+\frac{(1-q)\ln(1-q)}{q}}$ **6.13.** $B(m+n,p)$

7

Granični teoremi u Bernoullijevoj shemi

Promatramo Bernoullijevu shemu. Neka je X slučajna varijabla koja predstavlja broj uspjeha u n Bernoullijevih pokusa, $X \sim B(n,p)$.
$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots n$.
U primjenama je najčešće potrebno izračunati vjerojatnost da se taj broj uspjeha nalazi između nekih realnih brojeva a i b, tj. $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq k \leq b} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{a \leq k \leq b} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. To je za velike n vrlo teško izračunati, no teoremi koji slijede (granični teoremi u Bernoullijevoj shemi) nam omogućuju da ove vjerojatnosti za velike n na jednostavan način približno izračunamo:

1. POISSONOV TEOREM:

Teorem. Neka je $X_n \sim B(n, p_n)$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ za $0 < \lambda < \infty$ fiksan broj. Tada za svako $k = 0, 1, \dots, n$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Teorem najčešće koristimo u obliku:
za velike n ($n \geq 20$) i male p_n ($n \cdot p_n < 10$) je

$$\mathrm{P}(X_n = k) \approx \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \quad , \quad \lambda_n = n \cdot p_n.$$

Zadatak 7.1 U telefonskoj centrali registrirano je 400 korisnika. Svaki korisnik u nekom određenom vremenskom intervalu poziva centralu s vjerojatnošću 0.01. Izračunajte vjerojatnost da je u promatranom vremenskom intervalu
(a) točno 5 korisnika pozvalo centralu,
(b) barem 3 korisnika pozvalo centralu.

Rješenje:

$n = 400$, $p = 0.01$, X =broj korisnika koji pozovu centralu u tom vrem.intervalu $\Rightarrow X \sim B(400, 0.01)$, $\lambda = 400 \cdot 0.01 = 4 < 10$

(a) $\mathrm{P}(X = 5) \approx \frac{4^5}{5!} \cdot e^{-4} \approx 0.156$

(b) $\mathrm{P}(X \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) - \mathrm{P}(X = 1) - \mathrm{P}(X = 2) \approx 1 - (1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}) \cdot e^{-\lambda} \approx$
≈ 0.76

$\triangle$

Zadatak 7.2 U neko je skladište došlo 1000 porculanskih vaza. Vjerojatnost da se neka razbije tijekom transporta od tvornice do skladišta je 0.002. Neovisno o tome neke se vaze razbiju i unutar samog skladišta i to se događa s vjerojatnošću 0.0015 (vaze su u kutijama pa ista vaza može biti dva puta razbijena, ne znamo je li razbijena ili ne dok ne otvorimo kutije). Nađite vjerojatnost da je broj vaza razbijen u ukupnom procesu veći od 3.

Rješenje:

A :={vaza je razbijena u transportu} , B :={vaza je razbijena u skladištu}

Vjerojatnost da je vaza uništena je

$p = \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0.002 + 0.0015 - 0.002 \cdot 0.0015 = 0.00349$

X =broj oštećenih vaza $\Rightarrow X \sim B(1000, p)$, $\lambda = 1000 \cdot 0.00349 < 10$.

$\Rightarrow \mathrm{P}(X > 3) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 3) \approx 1 - (1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!}) \cdot e^{-\lambda} \approx 0.4627$

$\triangle$

Primjer 7.3 (*Bombardiranje Londona u II. svjetskom ratu*) Njemačka vojska je raketama V_2 gađala London. Zabilježeni su pogotci za južni dio Londona koji je bio razdijeljen na 576 dijelova (svaki površine 0.25 km^2). Dobiveni su podaci:

broj raketa (k)	0	1	2	3	4	5 ili više
broj dijelova u koji je palo točno k raketa	229	211	93	35	7	1

Je li London zaista gađan slučajno?

Rješenje:

Ako je London zaista gađan slučajno, onda je vjerojatnost pogotka bilo kojeg dijela jednaka i iznosi $p = \frac{1}{576}$.

$n = 0 \cdot 229 + 1 \cdot 211 + 2 \cdot 93 + 3 \cdot 35 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 1 = 535$

X =broj raketa koje su pale na neki dio južnog Londona $\Rightarrow \quad X \sim B(n, p)$

$\lambda = n \cdot p = 535 \cdot \frac{1}{576} \approx 0.93 < 10 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$.

Tada su očekivani rezultati:

broj raketa (k)	0	1	2	3	4	5 ili više
$\mathrm{P}(X = k)$	0.395	0.366	0.17	0.053	0.012	0.004
očekivani rezultati ($576 \cdot \mathrm{P}(X = k)$)	237.52	210.82	97.92	30.3	7.03	2.3
stvarni rezultati	229	211	93	35	7	1

Usporedbom zadnja dva retka u tablici, vidimo da su očekivani rezultati bliski stvarnima pa možemo reći da je južni dio Londona gađan slučajno.

$\triangle$

2. LOKALNI MOIVRE-LAPLACEOV TEOREM:

Teorem. Neka je $0 < p < 1$, $X_n \sim B(n, p)$ i $x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Tada vrijedi:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2\pi npq} \cdot \mathrm{P}(X_n = k)}{e^{-\frac{x_k^2}{2}}} = 1$$

Teorem najčešće koristimo u obliku:

za dovoljno velike n i $X_n \sim B(n, p)$

$$\mathrm{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

Zadatak 7.4 Simetrični novčić bacamo 100 puta. Kolika je vjerojatnost da će pismo pasti točno 50 puta?

Rješenje:

$n = 100$, $p = \frac{1}{2}$

X =broj pisama koja padnu $\quad \Rightarrow \quad X \sim B(100, \frac{1}{2})$

$n \cdot p \cdot q = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$, $x_k = \frac{50-100 \ \ cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{25}} = 0$

$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(X = 50) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{\frac{-x_k^2}{2}} \approx 0.079.$

$\triangle$

Zadatak 7.5 U seriji od 10000 proizvoda je 6000 prvoklasnih. Odredite vjerojatnost da među 100 odabranih proizvoda bude 70 prvoklasnih.

Rješenje:

$p = \frac{6000}{10000} = 0.6$, $X \sim B(100, 0.6)$

$\lambda = n \cdot p = 60 > 10$
$npq = 100 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 24$
$x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{70-60}{\sqrt{24}} \approx 2.041$

$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(X = 70) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{x_k^2}{2}} \approx 0.0101.$

$\triangle$

3. INTEGRALNI MOIVRE-LAPLACEOV TEOREM:

Teorem. Neka je $0 < P < 1$ i $X_n \sim B(n, p)$. Tada za proizvoljne a,$b \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Ovo je specijalni slučaj tzv. centralnog graničnog teorema.

Definirajmo funkciju $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2} 2dt.$$

Tada je za velike n i $a, b \in \mathbb{R}$

$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \mathrm{P}(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X_n-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b-np}{\sqrt{npq}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}} e^{-x^2/2} dx =$
$= \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}),$

a vrijednosti od Φ čitamo iz tablice.

Zadatak 7.6 Kolika je vjerojatnost da među 1000 novorođenčadi bude barem 490 dječaka, ako je za svako novorođenče jednako vjerojatno da bude dječak ili djevojčica?

Rješenje:

$n = 1000$, $p = \frac{1}{2}$, $X =$broj dječaka $\Rightarrow$ $X \sim B(1000, \frac{1}{2})$

$np = 500$, $npq = 250$

$\mathrm{P}(490 \leq X \leq 1000) \approx \Phi(\frac{1000-500}{\sqrt{250}}) - \Phi(\frac{490-500}{\sqrt{250}}) = \Phi(31.63) - \Phi(-0.63) =$
$= 1 - 0.2643 = 0.7357$

pri čemu smo koristili da je $\Phi(-0.63) = 1 - \Phi(0.63) = 1 - 0.7357 = 0.2643$.

$\triangle$

Zadatak 7.7 Nađite vjerojatnost da u 1000 bacanja simetrične kocke broj 2 padne
(a) barem 200 puta,
(b) ne više od 150 puta.

Rješenje:

$n = 1000$, $p = \frac{1}{6}$, $X \sim B(1000, \frac{1}{6})$

$np = \frac{500}{3} \approx 166.67$, $npq = \frac{1250}{9} \approx 138.89$

(a) $\mathrm{P}(200 \leq X \leq 1000) \approx \Phi(\frac{1000-166.67}{\sqrt{138.89}}) - \Phi(\frac{200-166.67}{\sqrt{138.89}}) =$
$= \Phi(70.71) - \Phi(2.28) = 1 - 0.9887 = 0.0113$

(b) $\mathrm{P}(0 \leq X \leq 150) \approx \Phi(\frac{150-166.67}{\sqrt{138.89}}) - \Phi(\frac{0-166.67}{\sqrt{138.89}}) = \Phi(-1.414) - \Phi(-14.14) =$
$= (1 - \Phi(1.414)) - 0 = 1 - 0.9207 = 0.0793.$

$\triangle$

Zadatak 7.8 Zadana su dva kruga, K(0,r) i K(0,2r), $r > 0$. Na slučajan način odabiremo 1000 točaka unutar većeg kruga. Izračunajte
(a) vjerojatnost da će se točno 700 točaka nalaziti unutar kružnog vijenca određenog tim krugovima,
(b) vjerojatnost da će se barem 720 točaka nalaziti u tom kružnom vijencu.

Rješenje:

$n = 1000$, $p = \frac{\lambda(K(0,2r)\setminus K(0,r))}{\lambda(K(0,2r))} = \frac{4r^2\pi - r^2\pi}{4r^2\pi} = \frac{3}{4}$

$X \sim B(1000, \frac{3}{4})$, $np = 750 > 10$, $npq = 187.5$

(a) $x_k = \frac{700-750}{\sqrt{187.5}} = -3.651$

$\mathrm{P}(X = 700) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 187.5}} \cdot e^{-3.651^2/2} \approx 0.000371.$

(b) $\mathrm{P}(X \geq 720) = \mathrm{P}(720 \leq X \leq 1000) \approx \Phi(\frac{1000-750}{\sqrt{187.5}}) - \Phi(\frac{720-750}{\sqrt{187.5}}) =$
$= \Phi(18.25) - \Phi(-2.19) = 1 - 0.0143 = 0.9857.$

$\triangle$

Zadatak 7.9 Prosjak dobije novčić od prolaznika s vjerojatnošću 0.05. Koliko prolaznika treba proći ulicom da bi prosjak sakupio barem 150 novčića s vjerojatnošću 0.95?

Rješenje:

$n =$broj prolaznika , $X =$broj novčića prosjak skupi $\Rightarrow$ $X \sim B(n, 0.05)$

$np = 0.05 \cdot n = \frac{n}{20}$, $npq = \frac{19 \cdot n}{20 \cdot 20}$

Tražimo n t.d. je

$0.95 \leq \mathrm{P}(X \geq 150) = \mathrm{P}(150 \leq X \leq n) = \Phi(\frac{n-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{150-np}{\sqrt{npq}}) =$
$= \Phi(\sqrt{n} \cdot \frac{1-p}{\sqrt{pq}}) - \Phi(\frac{150-\frac{n}{20}}{\sqrt{\frac{19n}{20\cdot 20}}}) \approx$ za velike $n \approx 1 - \Phi(\frac{3000-n}{\sqrt{19n}})$

$\Rightarrow \quad \Phi(\frac{3000-n}{\sqrt{19n}}) \leq 1 - 0.95 = 0.05 = \Phi(-1.64)$

$\Rightarrow \quad \frac{3000-n}{\sqrt{19n}} \leq -1.64 \Rightarrow \quad n \geq 3429.$

△

Vrijedi:

za $\varepsilon > 0$

$\mathrm{P}(|\frac{X}{n} - p| < \varepsilon) = \mathrm{P}(np - n\varepsilon < X < np + n\varepsilon) = \mathrm{P}(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}} < \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}) =$
$= \mathrm{P}(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} < \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) \approx \Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) - \Phi(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}})$

Zadatak 7.10 Simetričnu kocku bacamo 4500 puta. Odredite interval u kojem možemo s vjerojatnošću 0.9 očekivati relativnu frekvenciju šestica.

Rješenje:

$n = 4500$, $p = \frac{1}{6}$, X =broj šestica koje padnu=frekvencija šestica
$\Rightarrow X \sim B(4500, \frac{1}{6})$, $\frac{X}{n}$ =relativna frekvencija šestica

Tražimo $\varepsilon > 0$ t.d.

$$0.9 \leq \mathrm{P}(|\frac{X}{n} - p| < \varepsilon) \approx 1 - 2 \cdot \Phi(-\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}})$$

$\Rightarrow \quad \Phi(-\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}) \leq 0.05 = \Phi(-1.64)$

$\Rightarrow \quad \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}} \geq 1.64 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \geq \frac{1.64 \cdot 0.3726}{\sqrt{4500}} = 0.0091$

$\Rightarrow \quad$ traženi interval je $< p - \varepsilon, p + \varepsilon > = < 0.1575, 0.1757 >$.

△

Zadatak 7.11 Koliko najmanje puta moramo baciti par simetričnih kocaka da bi se s vjerojatnošću 0.95 dogodilo da je barem 100 puta zbroj brojeva na kockama jednak 7?

Rješenje:

$p =$ vjerojatnost da je zbroj na kockama $7 = \frac{6}{36} = 16$
$X =$ broj puta kad je na kockama bio zbroj 7 $\Rightarrow X \sim B(n, \frac{1}{6})$

Tražimo $n \in \mathbb{N}$ t.d. je

$0.95 \leq \mathrm{P}(X \geq 100) = \mathrm{P}(100 \leq X \leq n) \approx \Phi(\frac{n-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{100-np}{\sqrt{npq}}) =$

$= 1 - \Phi(\frac{100-np}{\sqrt{npq}}) \quad \Rightarrow \quad \Phi(\frac{100-np}{\sqrt{npq}}) \leq 0.05 = \Phi(-1.64) \Rightarrow \quad \frac{100-np}{\sqrt{npq}} \leq -1.64 \Rightarrow \quad n \geq 698.$

△

Zadatak 7.12 Na prijemnom ispitu rješava se 40 zadataka i za svaki su ponuđena 4 odgovora, od kojih je samo jedan točan. Za točno zaokružen odgovor dobije se 15 bodova, a za pogrešno zaokružen se gubi 5 bodova. Kolika je vjerojatnost da se slučajnim odabirom ponuđenih odgovora prođe kvalifikacijski prag od 120 bodova?

Rješenje:

$X =$ broj točno odgovorenih pitanja $\quad \Rightarrow \quad X \sim B(40, \frac{1}{4})$

$Y =$ broj ostvarenih bodova $= 15 \cdot X - 5 \cdot (40 - X) = 20 \cdot X - 200$

$\mathrm{P}(Y \geq 120) = \mathrm{P}(20X - 200 \geq 120) = \mathrm{P}(X \geq 16)) = \mathrm{P}(16 \leq X \leq 40) \approx$
$\approx 1 - \Phi(\frac{16-40\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{40\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}}) = 0.0143$

△

Zadatak 7.13 Kazalište koje prima 529 gledatelja ima dva ulaza i pored svakoga se nalazi jedna garderoba s n vješalica za kapute. Ako posjetitelji ulaze nezavisno jedan od drugoga i jednako vjerojatno na oba ulaza, koliki je najmanji n t.d. s vjerojatnošću 0.95 bude mjesta kapute svih posjetitelja baš u onoj garderobi pored ulaza na koji je taj posjetitelj ušao?

Rješenje:

$X =$ broj posjetitelja koji su ušli na prvi ulaz $\quad \Rightarrow \quad X \sim B(529, \frac{1}{2}$

Da bi bilo mjesta, mora vrijediti: $\quad 529 - n \leq X \leq n$, tj.

$0.95 \leq \mathrm{P}(529 - n \leq X \leq n) \approx \Phi(\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}) - \Phi(\frac{529-n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}) =$

$= \Phi(\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{2}}}) - \Phi(-\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{4}}}) = 1 - 2\cdot\Phi(-\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{4}}})$

$\Rightarrow \quad -\frac{2n-529}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{4}}} \leq -1.96 \quad \Rightarrow \quad n \geq 287.4$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

7.14 U prosjeku je 2% ljudi ljevoruko. Nađite vjerojatnost da je među 100 ljudi barem troje ljevaka.

7.15 Lord Farquaad organizira svečanu večeru u svom dvorcu. Pozvano je građanstvo i plemstvo. Građani moraju za večeru izdvojiti po 1 zlatnik, a plemići po 2 zlatnika. Čuvari na ulazu u dvorac puštaju jednog po jednog čovjeka, pri čemu je 3 puta vjerojatnije da se na ulazu pojavi građanin nego plemić. Koliko najmanje ljudi treba pustiti u dvorac da s vjerojatnošću većom od 0.95 lord Farquaad sakupi barem 500 zlatnika?

7.16 U nekom gradu su dva kina, koja imaju jednak broj sjedala. Svakog dana kina posjeti 1000 ljudi. Oba kina su jedako popularna pa svaki čovjek s jednakom vjerojatnošću i nezavisno od drugih bira bilo koje. Odredite najmanji broj sjedala u svakom kinu tako da bi s vjerojatnošću barem 0.95 u njima bilo mjesta za sve ljude?

7.17 Neka kompanija ima jeftine avionske letove iz Amsterdama za London. U avionu je 150 mjesta, a svaki putnik koji rezervira kartu se zaista vozi avionom s vjerojatnošću 0.9. Kompanija u svakom slučaju želi napuniti avion pa uvijek proda 160 rezervacija. Izračunajte vjerojatnost da u avionu neće biti mjesta.

7.18 Koliko puta treba baciti 3 simetrične kocke da bi s vjerojatnošću od barem 0.9 barem 50 puta dobili barem 2 šestice u jednom bacanju?

7.19 Promatramo sljedeći slučajni pokus: Marko baca kocku čije su stranice označene brojevima 2, 4, 6, 8, 10, 12, a Ana baca kocku čije su stranice označene brojevima 1, 3, 5, 7, 9, 11. Koliko puta treba ponoviti gore opisani slučajni pokus da bi s vjerojatnošću od barem 0.8 bili sigurni da će Marko u barem 120 pokusa dobiti na kocki veći broj od Ane?

7.20 Nadaleko poznata vještica Bellatrix bavi se vrlo unosnim poslom: čarolijom pretvara vjeverice u neke druge životinje koje se dobro prodaju na tržištu. Pošto još uvijek nije usavršila čaroliju, Bellatrix pretvara vjevericu u pegaza, jednoroga ili konja redom s vjerojatnostima 0.2, 0.3 ili 0.5. Trenutna cijena pegaza na tržistu je 5 zlatnika, dok jednorog i konj vrijede po 2 zlatnika. Koliko vjeverica Bellatrix treba naručiti da bi s vjerojatnošću od barem 0.95 zaradila barem 1000 zlatnika?

7.21 Turist dolazi u Las Vegas i odlučuje igrati kockarsku igru, takvu da u svakoj partiji ulaže 1 dolar, te ako dobije, osvaja 2 dolara plus što mu se vraća ulog od 1 dolara, a ako izgubi partiju gubi 1 uloženi dolar. Poznato je da je vjerojatnost dobitka u ovoj igri $\frac{1}{4}$. Naš je turist, vođen kockarskom groznicom, odigrao 240 partija. Kolika je vjerojatnost da turist nije na gubitku?

7.22 1920. godine su u Chicagu bila dva vlaka koja su se borila za 1000 putnika koji su u isti sat kretali iz Chicaga u Los Angeles. Pretpostavimo da putnici s jednakom vjerojatnošću odabiru svaki od vlakova. Koliko minimalno sjedala mora imati svaki vlak da bi s vjerojatnošću 0.99 bili sigurni da će svaki putnik imati svoje sjedalo?

7.23 Neki trgovac je glavni distributer porculanskih vaza za neki grad. On svaku od vaza naruči iz tvornice po cijeni od 80 kn, a prodaje ih trgovinama specijaliziranim za porculansko posuđe po cijeni od 90 kn. Međutim, pri prijevozu od tvornice do njegovog skladišta se razbije 5% vaza. Sve vaze koje stignu do njegovog skladišta uvijek uspješno proda trgovinama. Koliko vaza trgovac treba naručiti iz tvornice da s vjerojatnošću od barem 0.975 zaradi barem 10 000 kn?

7.24 Morsko dno u Zaljevu Bisera je bogato školjkama. Poznato je da se u prosjeku u svakoj četvrtoj školjci nalazi biser. Ronioc pri svakom zaronu izroni samo jednu školjku. Ako je ronioc izronio 150 školjaka, izračunajte vjerojatnost da je među školjkama barem dvostruko više školjaka sa biserom nego onih bez bisera.

7.25 U nekom gradu su se jednog kišnog dana na glavnom trgu prodavale dvije vrste kišobrana; jedna vrsta po 30 kn, a druga po 50 kn. Prodavač je na kraju dana zaključio da je svaki peti kupac kišobrana kupio skuplji kišobran. Ako je tog dana bilo 200 kupaca, izračunajte vjerojatnost da je prodavač zaradio barem 7 000 kn.

7.26 Rulet ima 18 crvenih polja, 18 crnih polja i jednu nulu. Pretpostavite da u svakoj igri igrate na crveno. Ako kuglica padne na crveno, onda dobijete 1 kn, a inače gubite 1 kn. Približno odredite vjerojatnost da ste nakon 50 igara na dobitku.

Rješenja: **7.14.** 0.323 **7.15.** 424 **7.16.** 531 **7.17.** 0.0571 **7.18.** 804 **7.19.** 217 **7.20.** 400 **7.21.** ? **7.22.** ? **7.23.** 2142 **7.24.** 0 **7.25.** 0.0392 **??.** 0.4247

8

Matematičko očekivanje

Zadaci za vježbu

8.1 Slučajna varijabla X može poprimiti dvije vrijednosti: a i b $(a < b)$ s vjerojatnostima, redom, 0.3 i 0.7 . Nađite a i b ako je $\mathrm{E}X = 2.7$ i $\mathrm{Var}X = 0.21$.

8.2 Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathrm{P}(X = 1) = p = 1 - \mathrm{P}(X = -1)$. Nađite $c \neq 1$ takav da je $\mathrm{E}[c^X] = 1$.

8.3 Jednom bacamo simetričnu kocku. Ako slučajna varijabla X predstavlja broj koji je pao na kocki, nađite matematičko očekivanje slučajnih varijabli $Y = X^2 - 3X + 4$ i $Z = |X - 2|$.

8.4 Slučajna varijabla ima razdiobu: $P(X = n) = \frac{c}{n(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}$. Odredite konstantu c i izračunajte $\mathrm{E}X$.

8.5 Iz skupa od 100 proizvoda, od kojih je 10 neispravno, izabran je na slučajan način uzorak od 5 proizvoda. Ako sa X označimo broj neispravnih proizvoda u uzorku, nađite razdiobu, očekivanje i varijancu od X .

8.6 Nađite parametar p slučajne varijable X s geometrijskom distribucijom ako za nju vrijedi: $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X^2 > n) = 1$.

8.7 Diskretna slučajna varijabla može poprimiti vrijednosti $x_1, \ldots, x_n$ koje su dane u rastućem poretku. Pokažite da je $x_1 \leq \mathrm{E}X \leq x_n$.

8.8 Neka je X geometrijska slučajna varijabla s parametrom p. Pokažite da je

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{-p \ln p}{1-p}.$$

8.9 Neka je $X \sim P(\lambda)$. Pokažite da je

$$\mathrm{E}[X^n] = \lambda \mathrm{E}[(X+1)^{n-1}]$$

i izračunajte $\mathrm{E}[X^3]$.

8.10 Pretpostavite da igrate igru u kojoj pobjeđujete s vjerojatnošću p. Igrate 5 igara i ako pobijedite u petoj igri, nastavljate igrati sve dok ne izgubite.

(a) Nađite očekivani broj igara koje ćete odigrati.

(b) Nađite očekivani broj igara koje ćete izgubiti.

Rješenja: **8.10.** (a) $4 + \frac{1}{1-p}$ (b) $4(1-p) + 1$

9

Neprekidne slučajne varijable

Definicija. Slučajna varijabla X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ je **neprekidna slučajna varijabla** ako postoji funkcija $f \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ takva da je

$$\mathrm{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt, \quad \text{za sve } a \in \mathbb{R}.$$

Funkciju f se zove **funkcija gustoće** slučajne varijable X.
Napomena.

(a) Može se pokazati da je

$$\mathrm{P}(X \in B) = \int_{B} f(t)\, dt, \text{ za izmerivi podskup } B \subseteq R.$$

Npr.

$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)\, dt, \text{ za } a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

(c) Za $B = \mathbb{R}$ iz (a) slijedi

$$1 = \mathrm{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt.$$

Dakle, da bi f bila funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable, mora vrijediti:

- $f(x) \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

(d) Vrijedi

$$\mathrm{P}(X = a) = \int_{a}^{a} f(t)\, dt = 0 \text{ pa je}$$

$$\mathrm{P}(X \leq a) = \mathrm{P}(X < a) + \mathrm{P}(X = a) = \mathrm{P}(X < a) + 0 = \mathrm{P}(X < a)$$

i slično je

$$\mathrm{P}(a \leq X \leq B) = \mathrm{P}(a < X \leq B) = \mathrm{P}(a \leq X < B) = \mathrm{P}(a < X < B).$$

(d) Ako je f neprekidna funkcija, onda je

$$\mathrm{P}(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta X} \underbrace{f(t)}_{\approx f(x)}\, dt \approx f(x)\Delta x \text{ za male } \Delta x.$$

Definicija. **Funkcija distribucije** neprekidne slučajne varijable X je definirana sa

$$F(x) := \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Napomena.

(a) Ako je f neprekidna, onda je

$$f = F'.$$

(b) Vrijedi:

$$F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$
$$F(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Zadatak 9.1 Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odredite c.

(b) Izračunajte $\mathrm{P}(X > 1)$.

Rješenje:
(a) Mora vrijediti:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = c \int_0^2 (4x - 2x^2)\, dx = c(2x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2 = \frac{8c}{3}$$

pa je $c = \frac{3}{8}$.
(b)

$$\mathrm{P}(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x)\, dx = \frac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)\, dx = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

$\triangle$

Definicija. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. **Matematičko očekivanje** slučajne varijable X je definirano sa

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

ukoliko gornji integral apsolutno konvergira.
Napomena. Općenito, za funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx,$$

ukoliko gornji integral apsolutno konvergira. Tako je **varijanca** slučajne varijable X definirana sa

$$\mathrm{Var}X := \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}X)^2 f(x)\, dx.$$

Zadatak 9.2 Slučajna varijabla X ima neprekidnu **uniformnu razdiobu** na intervalu $\langle a, b\rangle$ i pišemo $X \sim U(a,b)$ ako joj je funkcija gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite očekivanje, varijancu i funkciju distribucije slučajne varijable X.

Rješenje:

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathrm{Var}X = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a}\, dt, & x > b \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$\triangle$

Zadatak 9.3 Slučajna varijabla X ima **eksponencijalnu razdiobu** s parametrom $\lambda > 0$ i pišemo $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ako joj je funkcija gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite očekivanje, varijancu i funkciju distribucije slučajne varijable X.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda}\,dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = 0 + \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathrm{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \ldots = \frac{2}{\lambda^2} \\ \mathrm{Var}X &= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = (*)$$

1. $x < 0$

$$(*) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0;$$

2. $x \geq 0$

$$(*) = \int_0^{x} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

pa je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$\triangle$

Zadatak 9.4 Pretpostavite da slučajna varijabla ima funkciju distribucije

$$F(x) = C - e^{-x^2},\ x > 0.$$

(a) Odredite C.

(b) Izračunajte $\mathrm{P}(X > 2)$ i $\mathrm{P}(1 < X < 3)$.

(c) Odredite funkciju gustoće f.

(d) Izračunajte $\mathrm{E}X$.

Rješenje:

(a) $1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(c - e^{-x^2}) = C \implies C = 1.$

(b) $\mathrm{P}(X > 2) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2^2}) = e^{-4}$
$\mathrm{P}(1 < X < 3) = \mathrm{P}(\{X < 3\} \setminus \{X \leq 1\}) = \mathrm{P}(X < 3) - \mathrm{P}(X \leq 1) = vj(X \leq 3) - \mathrm{P}(X \leq 1) = F(3) - F(1) = (1 - e^{-3^2}) - (1 - e^{-1^2}) = e^{-1} - e^{-9}$

(c)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{\infty} x \cdot 2xe^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx = \\ &= -xe^{-x^2}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{r} x = \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \implies \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} = \\ &= 0 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 1.$$

$\triangle$

Slučajna varijabla X ima **normalnu razdiobu** s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ i pišemo $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ako joj je funkcija gustoće

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Nađite distribuciju slučajne varijable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Rješenje:
Računamo:

$$
\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathrm{P}(Z \le x) = \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \le x) = \mathrm{P}(X \le \mu + \sigma x) = \\
&= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left\{ \implies \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ dx = \frac{dy}{\sigma} \end{array} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, \sigma\, dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy
\end{aligned}
$$

pa je Z neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$
f_Z(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, y \in \mathbb{R},
$$

odnosno $Z \sim$N$(0,1)$.

△

Napomena. Ako je $X \sim$N$(0,1)$, onda je

$$
F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \Phi(x)
$$

i Φ čitamo iz tablice.

Zadatak 9.5 Neka je $X \sim$N$(0,1)$. Odredite EX i Var$X$.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \\
\mathrm{Var}X &= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}[X^2] - 0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-xe^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [0 + \sqrt{2\pi}] = 1
\end{aligned}
$$

△

Zadatak 9.6 Neka je $X \sim$N(μ, σ^2). Odredite EX i Var$X$.

Rješenje:
Iz zadatka **??** slijedi da je

$$
Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)
$$

pa iz zadatka 9.5 slijedi

$$0 = \mathrm{E}Z = \mathrm{E}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}\mathrm{E}X - \frac{\mu}{\sigma} \qquad \Longrightarrow \mathrm{E}X = \mu$$
$$1 = \mathrm{Var}Z = \mathrm{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}X \qquad \Longrightarrow \mathrm{E}X = \sigma^2$$

△

Zadatak 9.7 Vijek trajanja neke automobilske gume je normalno distribuiran s očekivanjem 34 000 km i standardnom devijacijom od 4 000 km.

(a) Izračunajte vjerojatnost da guma traje više od 40 000 km.

(b) Ako je guma prešla 30 000 km, izračunajte vjerojatnost da će guma trajati još 10 000 km.

Rješenje:
$X =$vijek trajanja gume $\Longrightarrow$ $X \sim$N$(34000, 4000^2)$
$\mu = 34000$, $\sigma = 4000$
Zadatak **??** $\Longrightarrow$ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim$N$(0,1)$

(a)

$$\mathrm{P}(X > 40000) = \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{40000-\mu}{\sigma}) = \mathrm{P}(Z > 1.5)$$
$$= 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9333 = 0.0668$$

(b)

$$\mathrm{P}(X > 40000 | X > 30000) = \frac{\mathrm{P}(X > 40000, X > 30000)}{\mathrm{P}(X > 30000)} = \frac{\mathrm{P}(X > 40000)}{\mathrm{P}(X > 30000)} = (*)$$
$$\mathrm{P}(X > 30000) = \mathrm{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{30000-\mu}{\sigma})$$
$$= \mathrm{P}(Z > -1) = 1 - \Phi(-1) = 1 - 0.1587 = 0.8413$$
$$\Longrightarrow (*) = \frac{0.0668}{0.8413} = 0.0794$$

Zadatak 9.8 Pretpostavite da je vrijeme putovanja nekog studenta od kuće do fakulteta približno normalno distribuirano s očekivanjem 40 minuta i standardnom devijacijom od 7 minuta. Student želi stići na predavanje koje počinje u 12:15 sati.

(a) Ako je student krenuo od kuće u 11:40, izračunajte vjerojatnost da on zakasni na predavanje.

(b) Kada bi student trebao krenuti od kuće da s vjerojatnošću od barem 0.95 bude siguran da će stići na vrijeme na predavanje?

Rješenje:
X =vrijeme putovanja $\implies X \sim$N$(40, 7^2)$

(a) $\mathrm{P}(X > 35) = \mathrm{P}(\frac{X-40}{7} > \frac{35-40}{7}) = \mathrm{P}(\frac{X-40}{7} > -0.7142) = 1 - \Phi(-0.7142) = 1 - 0.7611 = 0.2389$

(b) Tražimo a takav da je $0.95 \leq \mathrm{P}(X \leq a) = \mathrm{P}(\frac{X-40}{7} \leq \frac{a-40}{7}) = \Phi(\frac{a-40}{7})$, odakle slijedi
$$\frac{a-40}{7} \geq 1.64 \implies a \geq 51.48.$$
Dakle, student bi trebao krenuti 51.48 minuta prije, tj. otprilike u 11 sati 33 min i 30 s.

△

Zadatak 9.9 Autobus dolazi na stanicu svakih 15 minuta počevši od 7:00 ujutro. Ako neki putnik dolazi na stanicu u neko slučajno vrijeme između 7:00 i 7:30, izračunajte da on čeka autobus

(a) manje od 5 minuta,

(b) više od 10 minuta.

Rješenje:
X =vrijeme kada putnik stiže na stanicu $\implies X \sim$U$(0, 30)$

(a) $\mathrm{P}(X \in \langle 10, 15\rangle \cup \langle 25, 30\rangle) = \mathrm{P}(10 < X < 15) + \mathrm{P}(25 < X < 30) = \int_{10}^{15} \frac{dx}{30} + \int_{25}^{30} \frac{dx}{30} = \frac{1}{3}$

(b) $\mathrm{P}(X \in \langle 0, 5\rangle \cup \langle 15, 25\rangle) = \mathrm{P}(0 < X < 5) + \mathrm{P}(15 < X < 20) = \int_{0}^{5} \frac{dx}{30} + \int_{15}^{20} \frac{dx}{30} = \frac{1}{3}$

△

Zadatak 9.10 Neka je $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Pokažite da X ima svojstvo **memorijske odsutnosti**:
$$\mathrm{P}(X < s + t | X > s) = \mathrm{P}(X > t),\ s,\ t \geq 0.$$

Rješenje:

$$\mathrm{P}(X > s + t | X > s) = \frac{\mathrm{P}(X > s + t, X > s)}{\mathrm{P}(X > s)} = \frac{\mathrm{P}(X > s + t)}{\mathrm{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}$$
$$= e^{-\lambda t} = \mathrm{P}(X > t)$$

△

Zadatak 9.11 Pretpostavite da je duljina telefonskog poziva u minutama eksponencijalno distribuirana s parametrom $\lambda = \frac{1}{10}$. Ako je netko prije vas došao u telefonsku govornicu, izračunajte vjerojatnost da ćete čekati

(a) više od 10 minuta,

(b) između 10 i 20 minuta.

Rješenje:
X=duljina telefonskog poziva u minutama $\implies X \sim$Exp($\frac{1}{10}$).
$F_X(t) = \text{P}(X \le t) = 1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot t}$, $t \ge 0$.

(a) $\text{P}(X > 10) = 1 - F_X(10) = 1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot 10} = 1 - e^{-1} = 0.368$

(b) $\text{P}(10 < X < 20) = F_X(20) - F_X(10) = e^{-\frac{1}{10}\cdot 20} - e^{-\frac{1}{10}\cdot 10} = e^{-2} - e^{-1} = 0.233$

△

Zadatak 9.12 Neka je $X \sim \text{N}(70, 4)$. Izračunajte $\text{P}((X - 68)^2 \ge 9)$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\text{P}((X-68)^2 \ge 9) &= \text{P}(|X-68| \ge 3) = 1 - \text{P}(|X-68| < 3) = \\
&= 1 - \text{P}(-3 < X - 68 < 3) = 1 - \text{P}(65 < X < 71) = \\
&= \text{P}(\frac{65-70}{2} < \frac{X-70}{2} < \frac{71-70}{2}) \\
&= 1 - (\Phi(0.5) - \Phi(-2.5)) = 1 - (\Phi(0.5) + \Phi(2.5)) = \\
&= 1 - (0.1915 + 0.4937) = 0.3148
\end{aligned}$$

△

Zadatak 9.13 Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Izračunajte:

(a) $\text{P}(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$,

(b) $\text{P}(X^2 - 2\mu X \ge \sigma^2 - \mu^2)$.

Rješenje:
(a) $\text{P}(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = \text{P}(-3 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 3) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9973$
(b) $\text{P}(X^2 - 2\mu X \ge \sigma^2 - \mu^2) = \text{P}((X-\mu)^2 \ge \sigma^2) = \text{P}(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \ge 1) = \text{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge 1) + \text{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \le -1) \approx (1 - \Phi(1)) + \Phi(-1) = (1 - \Phi(1)) + (1 - \Phi(1)) = 2(1 - \Phi(1)) = 0.3173$

△

Zadaci za vježbu

9.14 Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} cx^n, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odredite c.

(b) izračunajte $\mathrm{P}(X > x)$, za $0 < x < 1$.

9.15 Neprekidna slučajna varijabla X ima funkciju gustoće

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

i vrijedi $\mathrm{E}X = 0.5$.

(a) Izračunajte $\mathrm{P}(X < 0.5)$.

(b) Izračunajte $\mathrm{Var}X$.

9.16 Na nekom ispitu su bodovi normalno distribuirani s očekivanjem 76 i standardnom devijacijom 15. Najboljih 15 % studenata dobije ocjenu 5, a najlošijih 10 studenata ocjenu 1. Nađite:

(a) najmanji broj bodova potreban za ocjenu 5,

(b) najmanji broj bodova potreban za prolaz.

9.17 Neka je $X \sim \mathrm{N}(0,1)$. Pokažite da za $a \in \mathbb{R}$ vrijedi:

(a) $\mathrm{P}(X > a) = \mathrm{P}(X < -a)$,

(b) $\mathrm{P}(|X| > a) = 2\mathrm{P}(X > a)$,

(c) $\mathrm{P}(|X| < a) = 2\mathrm{P}(X < a) - 1$.

9.18 Neprekidna slučajna varijabla ima jediničnu **Cauchyevu razdiobu** ako joj je gustoća

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Postoji li $\mathrm{E}X$?

(b) Pokažite da $Y = \frac{1}{X}$ također ima jediničnu Cauchyevu razdiobu.

9.19 Ako je X normalna slučajna varijabla s očekivanjem 5 i takva da je $\mathrm{P}(X > 0.9) = 0.2$, izračunajte $\mathrm{Var}X$.

9.20 Godišnje padaline (u cm) u nekom području su normalno distribuirane s očekivanjem 40 i standardnom devijacijom 4. Izračunajte vjerojatnost da će trebati barem 10 godina da količina padalina prijeđe 50 cm.

9.21 Zadana je funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^2 \cdot e^{-a \cdot x} & \text{ako je } x > 0 \\ 0 & \text{ako je } x \leq 0 \end{cases}$$

Odredite c i izračunjate vjerojatnost da X poprimi vrijednosti u intervalu $\langle 0, \frac{1}{a} \rangle$.

9.22 Neki čovjek čeka na stanici vlak. Vrijeme u minutama koje provede čekajući je slučajna varijabla s funkcijom distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{4} \cdot x, & 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

Odredite funkciju gustoće i nađite vjerojatnost da čovjek do dolaska vlaka čeka između 1 i 3 minuta. Također odredite vjerojatnost da čovjek čeka do dolaska vlaka više od 3 minute ako znamo da već stoji na stanici više od 1 minute .

9.23 Pretpostavimo da X ima jediničnu normalnu razdiobu. Izračunajte $\mathrm{E}[e^{tX}]$, $t \in \mathbb{R}$.

Rješenja: **9.14.** (a) $n+1$ (b) $1 - x^{n+1}$ **9.17.** (a) 0.35 (b) 0.06 **9.16.** (a) 92 (b) 57 **9.18.** (a) ne **9.19.** 22.66 **9.20.** $(0.9938)^{10}$ **9.23.** $e^{t^2/2}$