

Univerzitet u Tuzli
Prirodno-matematički fakultet
Odsjek: Fizika

Hedim Osmanović

STABILNOST ODREĐIVANJA
SINGULARITETA PARCIJALNIH VALOVA
U METODI VEZANIH KANALA

Doktorska disertacija

Tuzla, 2010.

Predgovor

Nakon odbrane magistarskog rada na temu "Određivanje nižih parcijalnih valova $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ raspršenja u oblasti $t > 4m_\pi^2$ ", morao sam se odlučiti u kojem smijeru će ići moja istraživanja u fizici.

Na poziv dr. Mikea Sadlera sam tokom ljeta 2008. godine boravio na Abilene Christian University, pri čemu sam se aktivno uključio u istraživanja na novoj analizi parcijalnih valova na kojoj je moj bliski saradnik i mentor pri izradi magistarskog rada, Profesor Jugoslav Stahov, sa kolegama sa pomenutog Univerziteta već radio.

S druge strane Zagrebačka grupa, koju čine istraživači iz oblasti fizike elementarnih čestica sa Instituta "Ruđer Bošković" iz Zagreba, uspješno je rješavala probleme ekstrakcije rezonantnih parametara koristeći višekanalni formalizam. Imajući te činjenice u vidu postojala je dilema o tome da li nastaviti istraživanja vezana za pion-nukleon raspršenje u elastičnom kanalu ili u istraživanja uključiti i neelastične kanale.

Na jednom od PWA Workshopa, koji se na inicijativu dr. Mikea Sadlera održavaju od 2004. godine, došlo se na ideju o saradnji grupe iz Zagreba i grupe istraživača sa Univerziteta iz Tuzle, kojoj pripadam i ja. Grupa iz Zagreba je tada već odmakla u modifikaciji CMB (Carnegie-Mellon-Berkeley) modela. Obzirom da se pomoću Zagreb CMB modela za ekstrakciju rezonantnih parametara mogu odrediti rezonantni parametri za sve raspoložive analize parcijalnih valova, nametnulo se pitanje stabilnosti samog modela. Trebalo je istražiti kako, odnosno koliko položaji polova ovise o pretpostavkama samog modela.

Imajući u vidu naprijed navedeni problem, odlučio sam da tema moje doktorske disertacije upravo bude *Stabilnost određivanja singulariteta parcijalnih valova u metodi vezanih kanala*.

Tokom istraživanja pojavljivao se veliki broj problema i ovom prilikom moram se zahvaliti onima koji su mi pomogli da ih riješim i da ovo istraživanje uspješno privedem kraju. Profesor Jugoslav Stahov uvijek je znao da li neki postupak (kako on kaže) konvergira i bio je tu da mi da podršku ili pruži pomoć kako bi istraživanja krenula u pravom smjeru. Omogućio je da up-

oznam kompetentne osobe i da počnem postavljati prava pitanja, te sam tako upoznao i profesora Alfreda Švarca, vođu Zagrebačke grupe, koji je moj mentor pri izradi ovog rada. Profesor Švarc me vrlo strpljivo uvodio u problematiku ovog rada i uvijek nalazio vremena da odgovori na svako postavljeno pitanje. Kada bih mislio da imam nerješiv problem i da ne mogu napraviti bilo kakav progres, profesor Švarc bi uvijek, na sebi svojstven način, nalazio izlaz iz takve situacije. Dr. Saša Ceci i dr. Branimir Zauner, koji su dio Zagrebačke grupe, uvijek bi priskočili u pomoć i spremno diskutirali o svakom problemu koji se javljao u toku izrade moje disertacije. Puno su pomogli i pri rješavanju tehničkih problema na koje sam nailazio prilikom korištenja nekih softverskih paketa. Kolega mr. Mirza Hadžimehmedović, koji rješava slične probleme u fizici, bi uvijek prvi saznao za svaki problem na koji bih naišao, te bih s njim prvo diskutirao o svakom. Dr. Mike Sadler pomogao je našoj grupi na mnogo načina, a pomogao je i kritičkim osvrtom koji je dao na ovo istraživanje, pa mu ovom prilikom iskazujem svoju zahvalnost. Nadam se da ćemo u dogledno vrijeme napraviti i novu analizu parcijalnih valova u koju je dr. Sadler jako puno investirao i do koje mu je jako stalo.

Obzirom na podršku i pomoć dragih ljudi, koju sam imao tokom istraživanja, uspješan završetak ovog rada nije mogao izostati.

Hedim Osmanović, Decembar 2010.

Abstract

In this thesis we discuss how sensitive Zagreb CMB method is to model assumptions when our input data set is well defined. We have first chosen the reliable input data set, a data set for which the minimization is fast, stable and unambiguous. Then we have identified our model assumptions, specific ones which we may check, and more general ones which are unfortunately beyond our reach. The general ones like isobar character of the model, two body character of the model, representing the unstable channels with a quasi two body channel with decay properly taken into account could not be checked directly. Other ones, like for instance the form of the channel propagator, its intermediate part, asymptotic part, threshold behavior, background parameterization, number of channels, mass of the effective channel, etc. we could check directly. Instead of taking different recipes for each model assumption, we have simply modified the used functional form with an completely arbitrary function which is just changing the range of interest, and repeated the fit. In this way the stability with respect to different model assumption is performed.

Key words: Partial waves, coupled-channel model, resonance parameters, T -matrix.

Sažetak

U ovom radu diskutiramo osjetljivost Zagreb CMB modela na promjenu pretpostavki modela kada je skup ulaznih podataka dobro definiran. Prvo je izabran pouzdan skup ulaznih podataka, za koji će minimizacija biti brza, stabilna i jednoznačna. Kada definiramo pretpostavke modela, specificirat ćemo one koje možemo provjeriti. U našem modelu je više općih pretpostavki koje su nažalost izvan našeg dosega i u ovom radu ih nećemo moći provjeriti. Opće pretpostavke su isobarni karakter modela, dvo-čestični karakter modela, opis nestabilnih kanala kvazi dvo-čestičnim kanalom sa raspadom koji je ispravno uzet u računu ali se ne može provjeriti direktno. Ostale pretpostavke, kao što su oblik kanalnog propagatora, njegov unutrašnji dio, asimptotski dio i ponašanje na pragu, cut -off parametri, parametrizacija pozadine, broj kanala i masa efektivnog kanala se mogu provjeriti direktno. Umjesto uzimanja različitih recepata za svaku pretpostavku modela, mi ćemo jednostavno koristiti funkcionalni oblik sa potpuno proizvoljnom funkcijom koja mijenja pretpostavke modela u području koje želimo istražiti. Nakon promjene dijela modela koji želimo, napraviti ćemo fit na ulazne podatke i na taj način testirati stabilnost modela obzirom na njegove pretpostavke.

Ključne riječi: Parcijalni valovi, model vezanih kanala, parametri rezonance, T -matrica.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Uvod u barionsku spektroskopiju i načini identifikacije rezonantnih stanja	4
2.1	Uvod u barionsku spektroskopiju	4
2.2	Elastične rezonance	6
2.3	Neelastične rezonance	8
2.3.1	K matrica, vlastita faza i ponašanje na pragu	10
2.4	Parametri nukleonskih rezonanci- Breit-Wignerova rezonantna amplituda	12
2.5	Vremensko zaostajanje	14
2.6	Dijagram brzine	16
3	Ciljevi istraživanja	18
3.1	Kako ostvariti ciljeve	19
4	Zagreb CMB model	20
4.1	Formalizam	20
4.2	Pozadinski doprinos	23
4.3	Procedura ekstrakcije polova	24
4.4	Veza CMB modela sa ostalim modelima	26
4.5	Definicija rezonantnih parametara	28
5	Rezultati i diskusija	31
5.1	Definiranje minimalne baze podataka neophodne za stabilan fit	31
5.2	Oblik kanalnog propagatora $\Phi(s)$	36
5.2.1	Asimptotski dio	36
5.2.2	Unutrašnji dio	37
5.2.3	Ponašanje na pragu	43
5.2.4	Cut off parametri	49
5.3	Parametrizacija pozadinskog doprinosa	53
5.4	Broj kanala uključenih u model	57

5.5	Masa efektivnog kanala	58
5.6	Je li problem stabilnosti Zagreb CMB modela riješen?	63
6	Zaključci:	64
	Dodatak	66
A.1	Analitička struktura parcijalnih valova πN raspršenja	66
A.2	Penalty function (Pietarinen)	67

Poglavlje 1

Uvod

Danas se parametri barionskih rezonanci određuju koristeći različite načine za ekstrakciju. Mnogi od tih načina su model ovisni, tako se događa da isti skup ulaznih podataka daje različite vrijednosti parametara.

Pokušavamo dati odgovor na pitanje kako napraviti najmanju ovisnost o modelu pri poređenju između teorije raspršenja koja analizira eksperimentalne podatke s jedne strane i modele temeljene na kvantnoj kromodinamici (Quantum Chromodynamics-QCD) s druge strane. Drugim rječima, bavimo se problemom kako precizno definirati što je zapravo rezonanca.

Jedan od prvih načina je da se rezonanca definira kao međustanje dvije čestice kada one, zbog atraktivne interakcije, provedu u blizini jedna druge više nego u standardnom procesu raspršenja. U referenci [1] Höhler kaže da se u S -matričnoj teoriji raspršenja rezonance identificiraju sa polovima prvog reda S -matrice na drugoj plohi razrezane kompleksne ravnine energije [2]. Mi se slažemo da rezonance mogu biti identifikovane sa prvim redom polova u drugoj plohi, ali ispostavlja se da identificiranje i kvantificiranje polova matrice raspršenja u kompleksnoj ravnini nije jednostavan problem. Različiti metodi su razvijeni u identifikaciji rezonantnih stanja. Prvo je nagađano da Breit-Wignerova funkcija treba dati dobru reprezentaciju kompleksnog pola. Razvijena je Breit-Wignerova formula za čestice bez spina i njeno poopćenje na čestice sa spinom [3]. Dalitz i Moorhouse [4] su razmatrali vlastitu fazu matrice raspršenja, i njen nagli prolaz kroz $\frac{\pi}{2}$ uzet je kao indikacija pola matrice raspršenja. Onda vlastita vrijednost matrice $K = i(S - 1)/(S + 1)$ ima pol za tu vrijednost energije [5]. Također, petlja oblika kružnice u Argandovom dijagramu kao indikacija rezonance diskutirana je u referenci [4]. Ove metode su zapravo smišljale način kako doći do pola matrice raspršenja u kompleksnoj ravni uz određenu aproksimaciju. Ovim metodama su identifikovane procedure za definicije rezonanci, i ono što je nađeno bilo bi proglašeno rezonantnim stanjem. U navedenim pristupima nerezonantna pozadina (background) je dodana rezonantnom dijelu na unitaran način, ali se pri tome zanemarivala činjenica da je taj postupak ovisan o modelu [2]. Problem vlastite faze, povezan sa manifestnim narušavanjem Neumann-Wignerovog “no -crossing”

teorema [6] kada brzo prolazi kroz $\pi/2$ čak i za slučaj konstantne pozadine, bio je izostavljen uprkos obimnoj elaboraciji koju su dali Dalitz i Moorhouse [4]. Jednokanalne metode traženja polova (izuzev dijagrama brzine koji ima i višekanalni pristup) takođe nisu predstavljale veliki problem, jer eksperimentalni podaci iz neelastičnog kanala su bili jedva dostupni. Činjenica da jednokanalna procedura ne može otkriti mnogo informacija o rezonantnim stanjima obzirom da su rezonance daleko od tog kanala su takođe bile zanemarene.

U referenci [7] smo se vratili korjenu problema. U potpunosti uvažavamo činjenicu da tražeci pol u kompleksnoj energijskoj ravni imamo na raspolaganju samo podatke na realnoj osi. Umjesto korištenja različitih metoda za ekstrakciju polova, i jednog pola po jednoj rezonanci, mi sugeriramo da se koristi samo jedan, Zagreb CMB model, i ekstrakciju svih polova ćemo vršiti istovremeno.

U ovom radu ćemo diskutovati o osjetljivosti Zagreb CMB modela na promjenu pretpostavki modela kada je skup ulaznih podataka dobro definiran.

U drugom poglavlju se govori o uvodu u barionsku spektroskopiju i načinima identificiranja rezonantnih stanja. Navedeni su problemi koji se javljaju u bariionskoj spektroskopiji i detaljno su opisani načini identifikacije rezonanci koji su pomenuti u uvodnom dijelu.

U trećem poglavlju dani su ciljevi istraživanja i odgovor na pitanje kako ostvariti te ciljeve. Najprije treba odrediti skup ulaznih podataka koje ćemo koristiti, a nakon toga treba dati način kako izvršiti ispitivanje stabilnosti modela obzirom na njegove pretpostavke.

U četvrtom poglavlju predstavljen je Zagreb CMB model. Detaljno je dan formalizam samog modela, parametrizacija pozadine kao i način ekstrakcije samih polova. Zagreb CMB model je kompariran sa ostalim modelima koji se koriste za određivanje rezonantnih parametara i navedene su mane i prednosti tih modela. Detaljno su definirani rezonantni parametri.

U petom poglavlju dani su rezultati ovog rada i njihova diskusija. Prvo je izabran pouzdan skup ulaznih podataka, za koji će minimizacija biti brza stabilna i jednoznačna. Kada odredimo pretpostavke modela, specificirat ćemo one koje možemo provjeriti. U našem modelu je više općih pretpostavki koje su nažalost izvan našeg dosega i u ovom radu ih nećemo moći provjeriti. Opće pretpostavke su isobarni karakter modela, dvo-čestični karakter modela, predstavljanje nestabilnih kanala sa kvazi dvo-čestičnim kanalom sa raspadom koji je ispravno uzet u računu ali se ne može provjeriti direktno.

Ostale pretpostavke, kao što su oblik kanalnog propagatora (meson- rezonance vršna funkcija), njegov unutrašnji dio, asimptotski dio i ponašanje na pragu, cut-off parametri, parametrizacija pozadine, broj kanala i masa efektivnog kanala, se mogu provjeriti direktno. Umjesto uzimanja različitih recepata za svaku pretpostavku modela, mi ćemo jednostavno koristiti funkcionalni oblik sa potpuno proizvoljnom funkcijom koja mijenja pretpostavke modela u području koji želimo istražiti. Nakon promjene dijela modela koji želimo, napraviti ćemo fit na ulazne podatke i na taj način testirati stabilnost modela obzirom na njegove pretpostavke.

U šestom poglavlju ponovljeni su svi bitni zaključci iz prethodnih poglavlja i dana je procedura koja bi se ubuduće mogla koristiti za određivanje kanalnog propagatora kako bi ekstrakcija rezonantnih parametara bila pouzdanija.

Poglavlje 2

Uvod u barionsku spektroskopiju i načini identifikacije rezonantnih stanja

2.1 Uvod u barionsku spektroskopiju

Naše trenutno znanje o barionskoj spektroskopiji je još uvijek nepotpuno [8]. Mnogi fundamentalni problemi u barionskoj spektroskopiji nisu dobro svaćeni [9].

S teoretske strane, fundamentalno pitanje koje traži odgovor je: Šta su efektivni stepeni slobode za opisivanje unutrašnje strukture bariona?

Klasični, jednostavni $3q$ konstituentni kvarkovski model, je vrlo uspješan u objašnjenju statičke prirode postojećih osnovnih barionskih stanja predstavljenih $SU(3)$ oktetom i deкуплетom, kao što su masa i magnetni moment. Ovaj model predvidio je postojanje Ω bariona u barionskom deкуплетu. Ova čestica je zaista i eksperimentalno otkrivena na energiji od približno $1670 MeV$. Međutim općento govoreći, predikcije pobuđenih barionskih stanja u gruboj su nesuglasnosti sa eksperimentom.

Drugi problem modela temeljenih na klasičnom $3q$ konstituentnom kvarkovskom modelu je predikcija više N^* stanja na energijama oko $2 GeV$ koja eksperimentima nisu potvrđena [9] [10]. Jedno od mogućih objašnjenja ove nesuglasnosti je eventualno slabo vezanje ovih stanja sa stanjima πN i γN , pa se u sadašnjim πN i γN eksperimentima ne mogu detektirati.

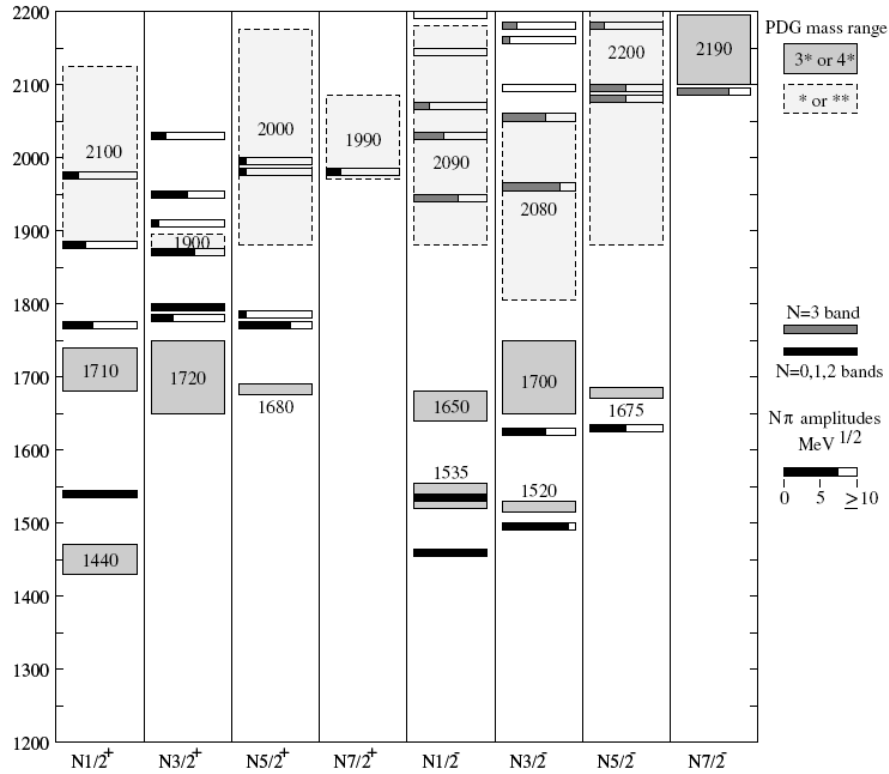
Sljedeće važno pitanje je činjenica da, osim uobičajenih tro-kvarkovskih stanja, QCD predviđa postojanje bariona bogatih gluonima, takozvanih hibridnih bariona. Za razliku od mezona, sve polucije vrijednosti spina i svi kvantni brojevi parnosti su dozvoljeni u barionskom spektru, tako da eksperimenti nisu u mogućnosti jednostavno tražiti barione sa egzotičnim kvantnim brojevima pri identifikaciji hibridnih stanja. Osim toga, niti jedan raspad apriori nije zabranjen.

Ovdje su dvije činjenice koje identifikaciju hibridnih bariona čine iznimno teškim.

Ako se nova barionska stanja otkriju u bilo kojem eksperimentu, ona mogu biti interpretirana ili kao barioni koje predviđa kvarkovski model a eksperimenti ne potvrđuju ili kao neotkrivena hibridna stanja predviđena u QCD.

Ova pitanja u barionskoj fizici su fundamentalna. Ako se ne mogu naći nova pobuđena stanja bariona osim onih koja su određena u eksperimentu, QCD i kvarkovski model će dati netačne predikcije i neophodno je korigirati zablude koje vode do ovih predikcija. Trenutna razumijevanje QCD treba biti modificirano i dinamika unutar kvarkovskog modela bi morala biti promijenjena. Ako je pak moguće naći značajan broj novih pobuđenih barionskih stanja, bilo bi potrebno odrediti da li su to tro-kvarkovska stanja, hibridi ili neka mješavina.

Na slici 2.1 dat je šematski prikaz rezonanci koje predviđaju dosadašnji modeli i rezonanci koje su dane u *Particle Data Group-PDG* [8]. Iz slike (2.1) se jasno



Slika 2.1: Predikcije masa za πN amplitude raspada za nukleonske rezonance ispod 2200MeV iz referenci [10],[9], komparirane sa vrijednostima za rezonantne mase dane u PDG [8] koje su označene sa pravougaonicima. Rezonance sa jednom i dvije zvijezde su označene sa svjetlijim pravougaonicima, dok su rezonance sa tri i četiri zvijezde označeni sa tamnijim pravougaonicima. Predikcije masa su označene tankim pravougaonicima, gdje dužina osjenčenosti crnom bojom indicira veličinu πN amplitude. Slika je preuzeta iz reference [9].

vidi omjer pobuđenih nukleonskih stanja koje predviđaju dosadašnji kvarkovski

modeli i rezonance koje su evidentirane u PDG [8].

Naš zadatak je da istražimo ponašanja kvantne kromodinamike, teorije u asimptotskom području niskih energija (neperturbativni režim) kao perturbativne teorije piona i nukleona u uslovima narušene kiralne simetrije, a u prijelaznom području između eksperimenata i teorije. To ćemo raditi tako da direktno interpretiramo eksperimentalne podatke u mezon-barion reakcijama. Koristeći analizu parcijalnih valova u modelu vezanih kanala (Coupled Channel Partial Wave Analysis) istražujemo singularitetnu strukturu parcijalnih valova, tražeći jedinstveni signal koji bi povezivao eksperimentalno mjerljive veličine s jedne i parametre dobivene bazičnim teorijama i modelima kvantne kromodinamike s druge strane. Obzirom da se, prema Mandelstamovoj hipotezi, sve invarijantne amplitude raspršenja individualnih procesa u s , t , u kompleksnoj ravnini mogu analitički proširiti u jedinstvenu analitičku funkciju koja opisuje sve procese istovremeno, identifikacija rezonantnih stanja u svakoj analizi parcijalnih valova (PWA) je zasnovana na postulatu da se rezonantno stanje predviđeno mikroskopskim kvarkovskim modelom preslikava u pol analitičke funkcije. Da bi identificirali sva rezonantna stanja koja su predviđena kvarkovskim modelima, tražit ćemo maksimalni broj polova dobivenih analitičkih funkcija.

Identificiranje rezonantnih stanja nije nimalo lako i razvijeno je više modela koji se koriste za određivanje rezonanci.

Prije opisa samog modela koji je korišten u ovom radu, treba dati neke osnovne definicije rezonanci i načine na koji su one identificirane.

2.2 Elastične rezonance

Ako imamo proces dvo-čestičnog raspršenja sa samo jednim otvorenim kanalom, onda je parcijalni val- T -matrica za taj kanal data izrazom [13]:

$$T = \sin \delta e^{i\delta}, \quad (2.1)$$

gdje je δ fazni pomak. Jednostavan tip rezonance se pojavljuje kada fazni pomak prolazi kroz $\frac{\pi}{2}$ dovoljno brzo kao funkcija energije dovodeći do pojave maksimuma u udarnom presjeku. Kasnije ćemo vidjeti da je derivacija faznog pomaka δ po energiji obrnuto proporcionalna vremenu zaostajanja (time delay) u procesu raspršenja. Veliko vremensko zaostajanje, povezano sa formiranjem kratkotrajnog stanja, je potreban uvjet za pojavu rezonance. Također želimo definirati rezonancu kao glavnu korespondenciju (vezu) sa česticom. Uradićemo to nametanjem uvjeta da rezonanca, kao i čestica, mora biti povezana sa polom T -matrice. U slučaju rezonance pol je u nefizikalnoj plohi analitičke amplitude raspršenja. Ako su zadovoljena oba uvjeta, da vremenski zaostaje i da postoji povezanost sa polom T -matrice onda rezonanca postoji.

Označimo sa W_π energiju centra masa za $\delta = \frac{\pi}{2}$ i razvijmo $\tan \delta$ kao funkciju

$W_\pi - W$:

$$\tan \delta = \frac{\frac{\Gamma_\pi}{2}}{W_\pi - W} + A + \dots \quad (2.2)$$

Posljednju relaciju možemo napisati kao $\tan \delta = \tan(\phi + \delta')$ gdje su uvedene oznake:

$$\tan \phi = A, \quad \tan \delta' = \frac{\frac{\Gamma}{2}}{W_R - W} \quad (2.3)$$

i

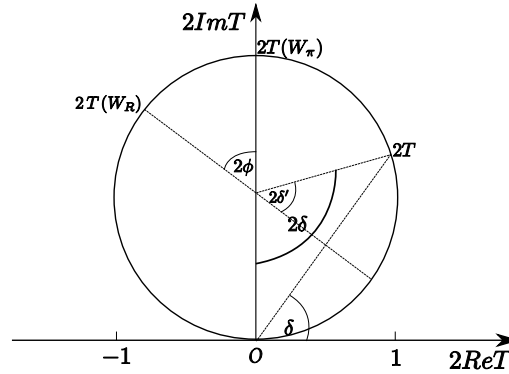
$$W_R = W_\pi + \frac{1}{2}\Gamma_\pi \sin \phi \cos \phi, \quad \Gamma = \Gamma_\pi \cos^2 \phi. \quad (2.4)$$

Poslije sređivanja dobije se:

$$T = e^{2i\phi} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{W_R - W - i\frac{\Gamma}{2}} + e^{i\phi} \sin \phi. \quad (2.5)$$

Jednačinom (2.5) dan je opći oblik Breit-Wignerove formule koja opisuje ponašanje elastične T -matrice u blizini rezonance. Kao funkcija energije, T -matrica ima kompleksni pol za $W = W_R - i\frac{\Gamma}{2}$. Ovaj pol se nalazi se na nefizikalnoj plohi razrezane kompleksne W -ravnine. Rez počinje od praga elastičnog kanala i ide do beskonačnosti.

Na slici 2.2 dan je Argandov dijagram za amplitudu raspršenja sa samo jednim kanalom [11]. Argandov dijagram parametarska je krivulja realnog i imaginarnog dijela matrice T u kompleksnoj ravni.



Slika 2.2: Argandov dijagram za amplitudu raspršenja sa samo jednim kanalom. Grafik je unitarni krug sa centrom $(0, i)$ i radijusom 1. W_R je energija rezonance gdje je $\delta' = \delta - \phi$ jednako $\frac{\pi}{2}$.

Na slici 2.2, δ i δ' imaju vrijednost $\frac{\pi}{2}$ za W_π i W_R , što se vidi iz relacija (2.2) i (2.3). Brzina promjene faze po energiji dana je formulom,

$$\frac{d\delta'}{dW} = \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(W_R - W)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}, \quad (2.6)$$

iz koje slijedi da je najveća brzina promjene faze za $W = W_R$. W_R je energija rezonance i predstavlja realni dio pola T -matrice. Γ je širina rezonance i vrijedi [11]:

$$\left. \frac{d\delta}{dW} \right|_{max} = \left. \frac{d\delta'}{dW} \right|_{max} = \frac{2}{\Gamma} = 2\tau, \quad (2.7)$$

gdje je τ vrijeme života rezonance.

2.3 Neelastične rezonance

Općenito, u elementarnoj teoriji rezonanci postoje mnogi kanali koji su otvoreni i iz kojih rezonanca može biti formirana, kao i u koje se može raspasti. Razmotrimo višekanalni slučaj sa oznakama $a = 1, 2, \dots, n$ za otvorene kanale u oblasti energije koja je predmet našeg interesovanja i neka svaki kanal uključuje dvije čestice, čiji su impulsi u sistemu centra masa q_a za kanal a . Ako naše razmatranje ograničimo samo na sile kratkog doseg, asimptotska valna funkcija u kanalu b odgovara dolaznom valu u kanalu a (za ukupni angularni moment J i angularni moment l_b u kanalu b) i data je izrazom [11]:

$$\psi_{ba}(r) \sim \delta_{ba} \frac{\sin(q_a r - \frac{l_a \pi}{2})}{q_a r} + \sqrt{\frac{\omega_b q_b}{\omega_a q_a}} T_{ba}^J(W) \frac{1}{q_b r} e^{i(q_b r - \frac{l_b \pi}{2})}, \quad (2.8)$$

Posljednja jednačina definira matricu prijelaza ili T -matricu, $T_{ba}^J(W)$. Na sličan način se definira i S -matrica:

$$\psi_{ba}(r) \sim \delta_{ba} \frac{e^{-iq_a r}}{q_a r} + (-1)^{l_b - 1} \sqrt{\frac{\omega_b q_b}{\omega_a q_a}} S_{ba}^J(W) \frac{1}{q_b r} e^{iq_b r}, \quad (2.9)$$

tako da je:

$$S_{ba}^J = \delta_{ba} + 2iT_{ba}^J(W). \quad (2.10)$$

T matrica za elastične rezonance izvedena je sa prilično elementarne tačke gledišta. Postojanje rezonance dovodi se u vezu sa postojanjem vlastitog stanja kompletnog Hamiltonijana, u kojem u asimptotskom području postoje samo odlazeći valovi. Takva stanja određena su rubnim uvjetima:

$$\left(\frac{\partial \psi_b}{\partial r} - iq_b \psi_b \right) \Big|_{r=\infty} = 0; \quad b = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Rubni uvjeti ne mogu biti zadovoljeni sa prvim članom jednačina (2.8) i (2.9), tako da vlastita vrijednost W ukupnog Hamiltonijana mora odgovarati slučaju kada $T(W)$ i $S(W)$ ima izolirani singularitet. Najjednostavnija mogućnost je da imamo pol za neku vrijednost energije $W = \bar{W}$. Struja vjerovatnoće u kanalu b je data izrazom:

$$\frac{-i}{2\omega_b} (\psi_b^* \nabla \psi_b - (\nabla \psi_b^*) \psi_b) = r_b \frac{q_b}{\omega_b} |\psi_b|^2, \quad (2.12)$$

gdje je r_b jedinični radijalni vektor. Za realnu vrijednost \bar{W} iznad praga kanala, struja vjerovatnoće će biti pozitivna u svim kanalima. Međutim ovo nije u saglasnosti sa očuvanjem vjerovatnoće tako da vlastita vrijednost \bar{W} ne može biti realna, pa se uzima:

$$\bar{W} = W_R - i\frac{\Gamma}{2}, \quad (2.13)$$

gdje je Γ pozitivno. U blizini izoliranog rezonantnog pola, dominantni član T -matričnog elementa je:

$$T_{ba} = \frac{C_b C_a}{W_R - W - i\frac{\Gamma}{2}}, \quad (2.14)$$

gdje su amplitude C_a matrični elementi kompleksne matrice stubca. Pol matrice T_{ba} nalazi se u nefizikalnoj plohi razrezane kompleksne ravnine energije. Za T -matricu definiranu u obliku (2.3) kao i za S -matricu vrijedi:

$$T_{ab} = T_{ba}; \quad S_{ab} = S_{ba}. \quad (2.15)$$

Ova simetrija je posljedica simetrije u odnosu na obrat vremena koju smo prećutno pretpostavili. U općem slučaju, matrici T_{ba} danoj formulom (2.14), dodaje se pozadinski član opisan matricom D_{ba} :

$$T_{ba} = D_{ba} + \frac{C_b C_a}{W_R - W - i\frac{\Gamma}{2}}. \quad (2.16)$$

Po konstrukciji, D je simetrična matrica. Smatra se da je sporo mijenjajuća funkcija energije W . Da bi bio zadovoljen uvjet unitarnosti

$$T_{\gamma a}^* T_{\gamma b} = \frac{i}{2}(T_{ba}^* - T_{ab}) \quad (2.17)$$

potrebno je:

$$D_{\gamma a}^* D_{\gamma b} = \frac{i}{2}(D_{ba}^* - D_{ba}) \quad (2.18)$$

$$C_{\gamma}^* C_{\gamma} = \frac{\Gamma}{2} \quad (2.19)$$

$$D_{\gamma a}^* C_{\gamma} = \frac{1}{2i}(C_a - C_a^*). \quad (2.20)$$

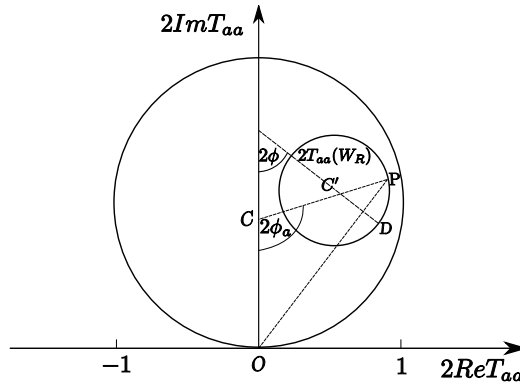
Ako uzmemo $C_a = R_a e^{i\phi_a} \sqrt{\frac{\Gamma}{2}}$, gdje je R_a realno, onda je:

$$T_{ba} = D_{ba} + \frac{R_b R_a e^{i(\phi_a + \phi_b)} \frac{\Gamma}{2}}{W_R - W - i\frac{\Gamma}{2}}, \quad (2.21)$$

$$\sum R_a^2 = 1. \quad (2.22)$$

Gdje je Γ_a parcijalna širina za kanal a : $\Gamma_a = R_a^2 \Gamma$. U elastičnom slučaju (kada su R_a , ϕ_a , Γ i D_{aa} konstante, idealan slučaj) T_{aa} opisuje krug radijusa R_a^2 koji

se čitav nalazi unutar ili na jediničnom krugu. Ako se analizira samo elastični kanal, indikacija postojanja rezonance je petlja u Argandovom dijagramu u smjeru suprotnom kazaljke na satu (Slika 2.3). Ova petlja može biti maskirana uvođenjem promjenjive pozadine. Detaljnije o metodi Argandovih dijagrama može se naći u referenci [12].



Slika 2.3: Argandov dijagram za elastičnu amplitudu raspršenja $T_{aa}(W)$, $P = 2T_{aa}(W)$. Za idealizirane rezonance grafik $P = 2T_{aa}(W)$ je krug sa centrom u C' i radijusom $\frac{\Gamma_a}{\Gamma}$. W_R je energija rezonance, Γ je ukupna širina, Γ_a je parcijalna širina u kanalu a i ϕ_a je faza pridružena kanalu a . U tački D je $T_{aa} = D_{aa}$.

2.3.1 K matrica, vlastita faza i ponašanje na pragu

T -matrica je dana preko K matrice sa:

$$T = K(1 - iK)^{-1}, \quad (2.23)$$

a S matrica sa:

$$S = (1 + iK)(1 - iK)^{-1}. \quad (2.24)$$

Obzirom da je K matrica realna i simetrična, može biti dijagonalizirana sa ortogonalnom matricom R . Ako se uzme da su matricni elementi dijagonalne matrice, $\tan \Delta_A$ ($A = 1, 2, \dots, n$), tada je:

$$K_{ba} = \sum_{A=1}^n R_{Ab}(\tan \Delta_A)R_{Aa}. \quad (2.25)$$

Δ_A je vlastita faza koja pripada vlastitom kanalu A . Jednačine (2.23) i (2.24) pokazuju da su T i S matrice takođe dijagonalizirane sa R , tako da je:

$$T_{ba} = \sum_{A=1}^n R_{Ab}R_{Aa}(e^{2i\Delta_A} - 1), \quad (2.26)$$

$$S_{ba} = \sum_{A=1}^n R_{Ab}R_{Aa}e^{2i\Delta_A}. \quad (2.27)$$

Za jednokanalni slučaj, $n = 1$, K , T i S matrice su nužno dijagonalne i vlastita faza je fazni pomak. Ako jedna od vlastitih faza, recimo $A = R$, prolazi kroz $\frac{\pi}{2}$, i sve ostale veličine su sporo mijenjajuće funkcije energije, onda se jednačba 2.26 može napisati u obliku:

$$T_{ba} = R_{Rb}R_{Ra} \frac{e^{2i\phi} \frac{\Gamma}{2}}{W_R - W - \frac{i\Gamma}{2}} + e^{i\phi} \sin \phi + \sum_A R_{Ab}R_{Aa} e^{i\Delta_A} \sin \Delta_A, \quad (2.28)$$

gdje \sum_A označava da je vlastiti kanal R izostavljen iz sume. Jednačba (2.28) je specijalan slučaj jednačbe (2.21) u kojoj svi C_a imaju iste faze $\phi_a = \phi$. Bitna pretpostavka napravljena pri izvođenju jednačbe (2.28) je da samo jedna vlastita faza se značajno mijenja u blizini rezonance, što je u principu rijedak slučaj.

Rezonantna vlastita faza tada će se povećati za iznos π kada energija prolazi oblašću rezonantnog maksimuma, poprimajući sve moguće vrijednosti nerezonantnih vlastitih faza (mod π) u energijskoj oblasti ove rezonance.

Ova situacija će narušiti Wignerov "no crossing" teorem za vlastitu fazu [17]. Ono što se dešava u normalnim situacijama je da vlastite faze značajno variraju u blizini rezonance tako da se izbjegne narušenje Wignerovog teorema i da različite vlastite faze zauzvrat preuzimaju ulogu rezonantne vlastite faze [18], [4]. Analitičke osobine funkcije ψ koja je funkcija W pokazuju da je:

$$R(W) = q^{-l-\frac{1}{2}} K(W) q^{-l-\frac{1}{2}}, \quad (2.29)$$

analitička funkcija W^2 sa singularnostima za $Re q_a^2 > 0$ [19]. U posljednjoj jednačini $q^{-l-\frac{1}{2}}$ je dijagonalna matrica sa matričnim elementima $q_a^{-l-\frac{1}{2}}$ tako da:

$$K(W) = q^{l+\frac{1}{2}} R(W) q^{l+\frac{1}{2}}, \quad (2.30)$$

ima rez za $q_a^2 = 0$ i ponašanje na pragu je dato izrazom (2.30). Koristeći analitičnost $R(W)$, K matrica može biti analitički produljena ispod jednog ili više pragova n otvorenih kanala. Ako pretpostavimo da je izvršeno produljenje ispod praga b , onda u jednačini (2.30) q_b postaje $i|q_b|$ i mada produljena, K matrica je simetrična, K_{ab} nije više realno.

U energijskoj oblasti u kojoj je p od ukupno n kanala zatvoreno, nova matrica dimenzije $m = n - p$ može biti definirana koristeći jednačbe (2.23) i (2.30) označimo je sa \bar{K} . Veza koja se zahtjeva između \bar{K} i K dobija se iz uvjeta da T matrica za m otvorenih kanala mora imati istu vrijednost bez obzira da li se računa iz \bar{K} ili K . Ako zatvorene kanale označimo sa α, β, \dots imamo da je:

$$\bar{K}_{ba} = K_{ba} + iK_{b\alpha}(1 - iK)_{\alpha\beta}^{-1}K_{\beta\alpha} \quad (2.31)$$

Ova relacija je izvedena za dva kanala, detalji se mogu naći u referenci [20].

U dijelu ovog poglavlja gdje se govori o elastičnim i neelastičnim rezonancama, pokazana je korespodencija rezonance sa polom T matrice u nefizikalnoj oblasti.

U elastičnom slučaju fazni pomak može proći kroz $\frac{\pi}{2}$ na mjestu rezonantne energije ili u njenoj blizini. Jasno je da za dovoljno veliko $|\phi|$ fazni pomak δ ne mora proći kroz $\frac{\pi}{2}$ u blizini rezonance. Ako je ϕ negativno i ima veliku vrijednost, rezonanca se može pojaviti samo za male vrijednosti δ , i δ ne može uopće dostići vrijednost $\frac{\pi}{2}$.

U neelastičnom slučaju, analogno δ , za određenu vrijednost energije W , vlastita faza na energiji W ima ulogu rezonantne faze. Može se desiti da je to energija W za koju vlastita faza prolazi kroz $\frac{\pi}{2}$. Ako, u elastičnom slučaju δ ili u neelastičnom vlastita faza Δ prolazi kroz $\frac{\pi}{2}$ na energiji rezonance ili u blizini nje, onda jednačina (2.25) pokazuje da K matrica ima pol na energiji za koju je δ (ili Δ) jednako $\frac{\pi}{2}$. Ovaj pol K matrice je na realnoj osi. Nadalje, jasno je da postojanje rezonance ne implicira nužno postojanje K matričnog pola na realnoj osi.

Za uske rezonance odgovarajući T matrični pol je blizu K matričnog pola na realnoj osi. S druge strane, pojava pola na jednoj nefizikalnoj plohi implicira pojavu pratećih polova na drugim nefizikalnim ploham [21].

2.4 Parametri nukleonskih rezonanci- Breit-Wignerova rezonantna amplituda

Većina postupaka određivanja rezonantnih parametara temelji se na opće prihvaćenoj pretpostavci da se rezonance mogu opisati polovima parcijalnih valova u nefizikalnij grani razrezane kompleksne ravnine energije (po pravilu energije u sistemu centra masa W). Parcijalni val u blizini rezonance može se na najjednostavniji način parametrizirati jednostavnom Breit-Wignerovom formulom: [13],[14]:

$$T_R(W) = \frac{R_1}{M - W - \frac{i\Gamma}{2}}. \quad (2.32)$$

U ovom slučaju rezonanca je okarakterizirana sa četiri realna parametra: položajem pola u W -ravnini ($M - \frac{i\Gamma}{2}$) i kompleksnim reziduuumom R_1 . $\text{Im}T_R$ i $|T_R|^2$ imaju zvonolik oblik sa maksimumom za $W = M$, pri čemu je Γ njegova poluširina. U slučaju elastičnog raspršenja, zbog uvjeta unitarnosti, $\text{Im}T_R = |T_R|^2$, reziduuum R_1 je realan i vrijedi $R_1 = \frac{\Gamma}{2}$. Pri izučavanju rezonanci uvodi se pojam brzine promjene parcijalnog vala T_R pomoću formule:

$$SP = \left. \frac{dT_R}{dW} \right|_{W=M}. \quad (2.33)$$

”Brzina” ima maksimalnu vrijednost pri $W = M$ i ona oznosi:

$$\left. \frac{dT_R}{dW} \right|_{W=M} = \frac{2}{\Gamma}. \quad (2.34)$$

Ako se T_R posmatra kao funkcija kvadrata energije $s = W^2$, Breit-Wignerova formula se može napisati u obliku

$$T_R(s) = \frac{R}{M^2 - s - i\Gamma M}. \quad (2.35)$$

Za male vrijednosti Γ , parametre interpretiramo na isti način kao i za $T_R(W)$, a za elastično raspršenje, zbog uvjeta unitarnosti S -matrice, vrijedi $R = M\Gamma$. Breit-Wignerove formule koje su ovdje navedene suviše su jednostavne da bi se odredili položaji polova. Nadalje, ove formule nemaju korektnu strukturu rezova koju zahtijeva Mandelstamova hipoteza i ne ispunjavaju uslove analitičnosti. Naime, pri uzimanju u račun doprinosa lijeve strane reza, dodan je pozadinski član koji takođe uključuje ostatke (doprinosi) ostalih rezonanci. Fizikalni rez je obično uveden preuzimanjem podesne ovisnosti R i Γ o impulsu u sistemu centra masa q . Saglasno uvjetima realne analitičnosti, rezonantni polovi se mogu pojaviti samo u paru kao konjugirano kompleksne vrijednosti. Međutim, treba napomenuti da pol $s = M^2 - iM\Gamma$ leži mnogo bliže fizikalnoj oblasti nego pol $s = M^2 + iM\Gamma$. Drugi pol leži u gornjoj polovini druge plohe. Ako krenemo od fizikalne vrijednosti s -a, to se može postići samo ako idemo oko tačke grananja. Stoga, efekt ovog pola može biti posmatran samo kao dio nerezonantne pozadine.

Pozadinska amplituda se mora uvesti na takav način da je osigurana unitarnost. Uobičajena procedura je da se matrica raspršenja predstavi kao proizvod dvije unitarne matrice S_R i S_B :

$$S = 1 + 2iT = S_R S_B \quad (2.36)$$

i da se rezonantni i pozadinski dio matrice T definira na sljedeći način

$$S_R = 1 + 2iT_R; \quad S_B = 1 + 2iT_B. \quad (2.37)$$

Iz ovih relacija se dobija

$$T = T_R S_B + T_B. \quad (2.38)$$

Sve dok ne postoji teorija pion-nukleon rezonanci, odstupanje $T - T_R$ fizikalne amplitude od jednostavnih formula (2.32) i (2.35) se može opisati na različite načine. Općenito problem nastupa zato što nije jasno na koji način kombinirati rezonantni dio T_R i pozadinu T_B . Modificirana verzija jednostavne Breit-Wignerove formule (2.32) ima sljedeći oblik

$$T_R = \frac{R(q)}{M^2 - s - iM\Gamma(q)}. \quad (2.39)$$

Ovaj metod nudi mogućnost uključivanja elastičnog phase space faktora u $R(q)$ i mogućnost uključivanja elastičnog i svih neelastičnih phase space faktora u $\Gamma(q)$. Sada se postavlja pitanje, kako definisati parametre rezonance u ovom slučaju koji se mogu koristiti za poređenje rezultata različitih analiza. Postoje dvije vrste parametara:

- Konvencionalni parametri M , Γ i $x_{el} = \frac{\Gamma_{el}}{\Gamma}$.
Rezonantna masa M je definirana kao energija u sistemu centra masa W za koju realni dio nazivnika rezonantnog dijela jednadžbe (2.39) je jednak nuli.
Rezonantna širina Γ je definirana sa $\Gamma(q)$, uzeta za $W = M$.
 Pretpostavljajući da je energijska ovisnost ostalih članova zanemariva, možemo ocijeniti rezonantne parametre računajući "brzinu" iz jednadžbe (2.33). Njen maksimum se dobija za $W = M$ i ima vrijednost $\frac{4R_1}{\Gamma_i^2}$, $R_1 = \frac{\Gamma_{el}}{2}$. Ako se uzme $R = M\Gamma_{el}$, rezonantni dio amplitude se može napisati kao

$$T_R(s) = \frac{M\Gamma_{el}(q)}{M^2 - s - iM\Gamma(q)}; \quad x_{el} = \frac{\Gamma_{el}(q)}{\Gamma(q)}. \quad (2.40)$$

Omjer grananja x_{el} je treći rezonantni uzet za $W = M$.

- Drugi skup rezonantnih parametara su polarni parametri. To su položaji polova μ matrice raspršenja $T(s)$ i reziduumi u polu r .

Treba napomenuti da neodređenost u određivanju konvencionalnih parametara dolazi zbog različitih parametrizacija pozadine. Pozadina se vrlo često uključivala u model preko raznih glatkih funkcija. Međutim različite parametrizacije nerezonantnog dijela (pozadine) davale su različite rezultate. Danas je jasno da su konvencionalni parametri dobijeni koristeći Breit-Wignerove oblike ovisni o modulu.

Prednost polarnih parametara je što su oni definisani na jedinstven način. Međutim i u ovom slučaju dolazi do neslaganja. Jedan od njih je način kako se izvrši analitičko produljenje u kompleksnu ravninu.

2.5 Vremensko zaostajanje

Najvažnija direktna procedura je dobijanje izraza za vremensko zaostajanje (time delay) između dolaska upadnog vala i odlaska valnog paketa od oblasti sudara. Vremensko zaostajanje je uveo Eisenbud u svojoj doktorskoj tezi [15], i kasnije je primjenio na višekanalni slučaj Smith [16]. Ova procedura koristi samo asimptotsku valnu funkciju i to vodi na direktnu relaciju između vremenskog zaostajanja Δt i matrice $S(W)$ [4],[17],[22]:

$$\Delta t(W) = -i \frac{1}{S(W)} \frac{dS(W)}{dW} = 2 \frac{d\delta(W)}{dW}. \quad (2.41)$$

gdje je $S(W) = e^{2i\delta(W)}$ S -matrica i $\delta(W)$ je fazni pomak. Unitarna S matrica sa polom $W = M - \frac{i\Gamma}{2}$ i konstantnom pozadinskom fazom δ_B je data sa:

$$S(W) = \frac{M + \frac{i}{2}\Gamma - W}{M - \frac{i\Gamma}{2} - W} e^{2i\delta_B} = e^{2i\delta_R(W)} e^{2i\delta_B} = S_R S_B \quad (2.42)$$

gdje je rezonantna faza dana formulom $\delta_R(W) = \arctan[\frac{\frac{1}{2}\Gamma}{M-W}]$. Odgovarajuća T matrica je:

$$T(W) = \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{M - \frac{i}{2}\Gamma - W} e^{2i\delta_B} + \sin \delta_B e^{i\delta_B}. \quad (2.43)$$

Vidjet ćemo kasnije da je jednadžba (2.41) općenita i da vrijedi i za višekanalni slučaj, gdje Δt postaje matrica vremena života Na osnovu relacija (2.41) i (2.42) dobija se jednostavni Breit-Wignerov oblik za vremensko zaostajanje:

$$\Delta t(W) = \frac{\Gamma}{(W - M)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (2.44)$$

Za rezonancu, $W = M$, posljednja relacija daje vrijednost vremenskog zaostajanja

$$\Delta t(W) = \frac{4}{\Gamma}, \quad (2.45)$$

dok njegova srednja vrijednost na energijskom spektru rezonance daje vrijednost $\frac{2}{\Gamma}$. Za usku Breit-Wignerovu rezonancu, vremensko zaostajanje u raspršenju je jednako dvostrukom vremenu njegovog života, $\frac{1}{\Gamma}$, i može biti vrlo dugo. Iz Wignerovog uslova ([17]), ovo indicira da Γ mora biti pozitivno za usku rezonancu, i ovo zahtjeva da rezonantni pol za $W_0 - i\frac{\Gamma}{2}$ treba ležati na nefizikalnoj plohi W -ravnine, ispod fizikalne W -osi. Vremensko zaostajanje Δt je lokalna osobina u smislu da opisuje ponašanje faznog pomaka δ samo u infinitezimalnoj energijskoj oblasti oko energije W . Ako fazni pomak δ varira sa naglim ali malim porastom u okolini neke energije W_0 , vremensko kašnjenje može postati vrlo dugo za W_0 , mada se ostale odlike rezonance ne pojavljuju.

Primjer sasvim različite vrste ponašanja osiguran je sa naglim povećanjem faznog pomaka δ sa energijom W na pragu S -vala W_{th} , kao $a(W - W_{th})^{\frac{1}{2}}$, gdje se vremensko zaostajanje povećava neodređeno kada energija W pada na W_{th} . Dakle, čestice prilikom sudara ostaju zajedno duže vrijeme obzirom na sve niže brzine dostupne za njihovo razdvajanje pri padu energije W na energiju praga za taj kanal.

Dakle, iako uske rezonance daju (vode) na duže vremensko zaostajanje, tu može biti i drugih okolnosti koje mogu dati dugo vremensko zaostajanje. Diskusija vremenskog zaostajanja može biti poopćena i na višekanalni slučaj ([16]). Pokazano je da je matrica vremena života $Q(W)$ povezano sa matricom S istim izrazom koji je dat jednačinom (2.41):

$$Q(W) = -i \frac{dS(W)}{dW} S^\dagger(W) = -i \frac{1}{S(W)} \frac{dS(W)}{dW} \quad (2.46)$$

Posljednji izraz je dobijen koristeći relaciju unitarnosti:

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1. \quad (2.47)$$

Činjenica da je Q hermitska matrica slijedi iz prvog dijela relacije (2.46) i relacije (2.47), tako da Q ima vlastita stanja u kanalnom prostoru kojima odgovaraju realne vlastite vrijednosti q_A . Ovo ukazuje na to da vlastita stanja Q -a odgovaraju

metastabilnim stanjima za sistem, i da vlastita vrijednost q_A daje njihovo karakteristično vrijeme života.

Također, utvrđena je analogija vremenskog zaostajanja za višekanalni sistem sa matricom vremena života $Q(W)$

$$\text{tr}[Q(W)] = 2 \sum_{\alpha} \frac{d\delta_{\alpha(W)}}{dW}, \quad (2.48)$$

gdje je δ_{α} pomak vlastite faze. Realna primjena matrice vremena života zahtijeva znanje svih otvorenih kanala. Pojedine vlastite faze imaju kompliciranu energijsku ovisnost. Stoga, samo suma vlastitih faza pokazuje izrazitu rezonantnu strukturu. Ova metoda je napravljena pod pretpostavkom da je rezonancija uska, tako da je već prva derivacija dovoljna da potisne pozadinu i ostale doprinose u blizini rezonancije. Ako je rezonancija široka, pozadinski dio unutar širine će značajno varirati, rezonantni parametri neće biti dobro određeni.

2.6 Dijagram brzine

Dijagram brzine (speed plot) vrlo je sličan vremenskom zaostajanju, s tim da se umjesto matrice S razmatra ponašanje energetske derivacije matrice T . Dijagram brzine matrice T je definiran na sljedeći način:

$$SP(W) = \left| \frac{dT(W)}{dW} \right|. \quad (2.49)$$

Ovu metodu je koristio Höhler pri ekstrakciji rezonantnih parametara iz Karlsruhe-Helsinki analize parcijalnih valova (KH80) [23, 13]. Obzirom da je analiza KH80 ograničena samo na elastično pion-nukleon raspršenje, višekanalni pristup i konstrukcija matrice vremena života nisu razmatrani.

Za jednokanalni sistem, vremensko zaostajanje i dijagram brzine su identični do na faktor dva. Posebno, recimo jednačba (2.43) vodi na dijagram brzine

$$SP(W) = \frac{\frac{1}{2}\Gamma_p}{(W - M_p)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_p^2}. \quad (2.50)$$

Kao rezultat, dijagram brzine pokazuje maksimum za $W = M_p$, kojim se definira realni dio položaja pola u kompleksnoj ravni W . Imaginarni dio položaja pola može se dobiti iz relacije:

$$SP(M_p \pm \frac{1}{2}\Gamma_p) = \frac{1}{2}SP(M_p). \quad (2.51)$$

U praktičnoj primjeni ovaj metod je numerički vrlo nestabilan i potpuno otpada za $S_{11}(1535)$ rezonancu, koja je vrlo blizu pragu η kanala ($\pi N \rightarrow \eta N$). Pri uvođenju neelastičnog kanala, matrica T ima oblik:

$$T(W) = \frac{r_p}{M_p - W - \frac{i\Gamma_p}{2}}, \quad (2.52)$$

gdje je r_p kompleksni reziduuum u polu dat izrazom:

$$\text{Res}T(W)|_{W=W_p} = -|r_p|e^{i\theta_p}. \quad (2.53)$$

Poopćenjem jednačine (2.52) dobijamo izraz za dijagram brzine

$$SP(W) = \frac{|r_p|}{(W - M_p)^2 + \frac{\Gamma_p^2}{4}}. \quad (2.54)$$

Ako imamo izolirane rezonance s približno konstantnim parametrima i daleko od otvaranja neelastičnog kanala, ova aproksimacija je prilično dobra. Ako imamo višekanalni pristup, s više otvorenih kanala i više rezonanci ova aproksimacija teško da će raditi dobro. Takođe, ova metoda se ne može primjeniti ako se pozadinski dio mijenja u blizini položaja rezonance.

Poglavlje 3

Ciljevi istraživanja

Ako želimo koristiti CMB formalizam za ekstrakciju rezonantnih parametara iz “svjetske kolekcije” amplituda parcijalnih valova i parcijalno valnih podataka (Partial wave data-PWD), onda moramo dati odgovor na osnovno pitanje:

Koliko je sam formalizam stabilan uvažavajući pretpostavke modela?

Svjesni smo da na ovaj način možemo testirati koliko je model osjetljiv na promjenu njegovih dijelova, ali pouzdanost samog isobarnog modela ne može biti testirana na ovaj način.

Dakle, u ovom trenutku, još uvijek nismo u stanju tvrditi koliko je odgovor ovisan o činjenici da pretpostavljamo da je mehanizam interakcije izobarnih stanja dominirajući.

Naša analiza uključuje još jednu aproksimaciju. Naime, mogući višestručni kanali (s više od dvije čestice u konačnom stanju) aproksimiraju se s dvočestičnim kanalom. Kako god bilo, prije same procedure ispitivanja stabilnosti CMB modela, moramo odgovoriti na netrivialno pitanje:

Koja je minimalna baza podataka neophodna tako da su naši položaji polova jedinstveni?

Kada imamo odgovor na ovo pitanje, moramo analizirati kako (koliko) konačan položaj polova ovisi o pretpostavkama modela. Pretpostavke modela koje u ovom trenutku predstavljaju dodatne sistematske i nekontrolirane neodređenosti:

1. Oblik kanalnog propagatora
 - njegov unutrašnji dio
 - njegov asimptotski dio
 - ponašanje na pragu
 - parametri odsijecanja - cut off parametri
2. Parametrizacija pozadine (background)
3. Broj kanala uključenih u model

4. Masa efektivnog kanala

Dakle, cilj ovog istraživanja je odrediti stabilnost položaja polova mijenjajući pretpostavke modela.

3.1 Kako ostvariti ciljeve

Da bi smo analizirali kako dijelovi modela utiču na položaj samih polova uradit ćemo sljedeće:

Drastično ćemo modificirati samo jedan dio modela, i napraviti fit na izabranu bazu podataka, dakle odrediti položaj polova modificirajući samo jedan dio modela. Odstupanje tako dobijenih položaja polova od polova dobijenih originalnim fitom daće nam informaciju koliko je taj dio modela važan za stabilnost rješenja.

Mi bi smo mogli modificirati sve dijelove ali onda zapravo ne znamo koji dio modela je odgovoran za promjenu položaja pola.

U sljedećem poglavlju je detaljno opisan CMB model kao i svaki od njegovih dijelova. Ideja je da se dozvoli značajna promjena izabranog dijela modela sve dok se ne vidi da se položaji polova počinju mijenjati. Promjena izabranog dijela modela je realizirana množenjem sa slobodno izabranom funkcijom (bez fizikalnog značenja) koja ima za svrhu samo testiranje dijela modela, Parametri su izabrani na takav način da se analizirani dio smanji (poveća) od 10% do 100% njegove originalne vrijednosti.

Međutim, preduvjet za ovu proceduru je da je skup ulaznih podataka takav da osigura uvjerljiv i pouzdan fit. Naime, vjerujemo da će varijacija položaja polova doći zbog drastične promjene dijelova modela i da fit na izabrani skup ulaznih podataka konvergira brzo, tačno i jedinstveno. Stoga, prvo je dan skup ulaznih podataka, a onda je testirano kako promjena dijelova modela utiče na varijaciju položaja polova.

Poglavlje 4

Zagreb CMB model

CMB model je u principu izobarni model više vezanih kanala u kojem se višečestični kanali raspada (s više od dvije čestice u konačnom stanju) aproksimiraju s dvočestičnim kanalom, te dvije se onda mogu raspadati dalje, ali glavni proces raspršenja je dvočestični. Analitičan je i unitaran. Pretpostavlja da je T matrica datog kanala opisana sumom doprinosa više jednočestičnih međustanja. Vezanje asimptotskih stanja sa međustanjima opisano je imaginarnim dijelom kanalnog propagatora.

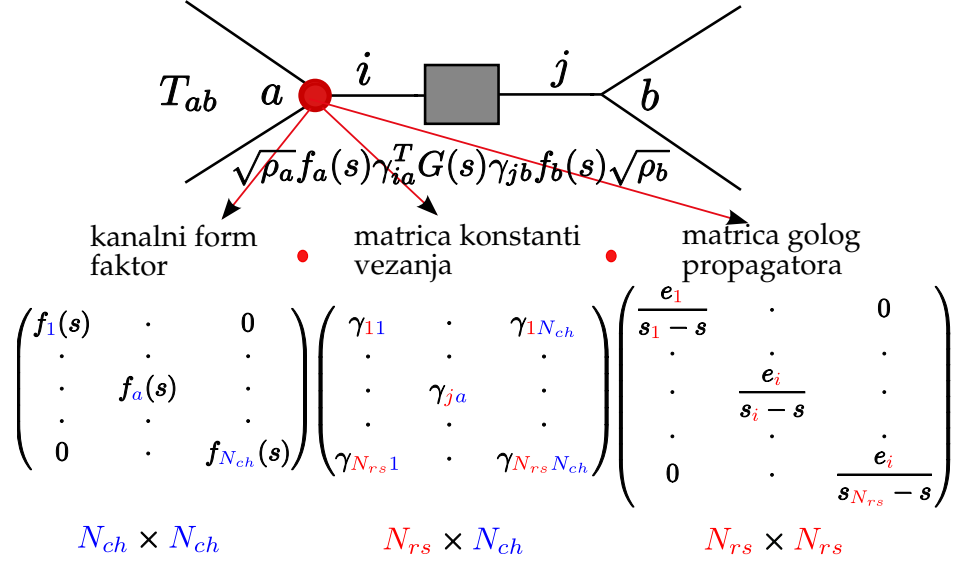
Realni dio kanalnog propagatora izračunat je koristeći disperzionu relaciju, kojom se osigurava analitičnost. Osim poznatih rezonantnih doprinosa, pozadinski doprinosi su opisani sumom doprinosa sa polovima ispod πN praga. Numerički stabilno i pouzdano analitičko produljenje propagatora u kompleksnu ravninu izvršeno je primjenom Pietarinenovog razvoja [24].

4.1 Formalizam

Analiza parcijalnih valova [25] u našem pristupu temeljena je na manifestnoj unitarnosti višekanalnog CBM modela [26], [27]. Najvažnije svojstvo ovog modela je analitičnost parcijalnih valova kompleksne promjenjive s (s kvadrat energije u sistemu centra masa). U svakoj diskusiji o polovima parcijalnih valova, analitičnost igra krucijalnu ulogu obzirom da se polovi nalaze u kompleksnoj ravni, daleko od fizikalne oblasti, a naša mogućnost mjerenja je ograničena samo na realnu osu. Saznati bilo šta o singularnosti parcijalnih valova bilo bi nemoguće ako parcijalni valovi nisu analitični. Mogućnost računanja položaja polova nije samo benefit analitičnosti CMB modela nego je takođe neophodna za ekstrakciju rezonantnih parametara. U ovom pristupu, smatra se da rezonancija postoji ako je povezana sa polom parcijalnog vala u nefizikalnoj ravni.

U višekanalnom slučaju T matrica je povezana sa S matricom na sljedeći način:

$$S_{ab}(s) = \delta_{ab} + 2iT_{ab}(s). \quad (4.1)$$

Slika 4.1: Dijagram pokazuje proces $a \rightarrow b$ i način parametrizacije u CMB modelu

T -matrični element u CMB modelu je dan izrazom:

$$T_{ab}^{JL}(s) = \sum_{i,j=1}^{N_{JL}} f_a^{JL}(s) \sqrt{\rho_a(s)} \gamma_{ai}^{JL} G_{ij}^{JL}(s) \gamma_{jb}^{JL} \sqrt{\rho_b(s)} f_b^{JL}(s), \quad (4.2)$$

gdje $a(b)$ predstavlja izlazni (ulazni) kanal. U našoj analizi je $a, b = \pi, \eta, \pi^2$. Ulazni i izlazni kanal $b(a)$ povezani su preko jednočestičnih međustanja ili rezonanci, označeni indeksima i i j . γ_{ia} su energijski nezavisni parametri koji se pojavljuju grafički u vrhovima između kanala a i jednočestičnih međustanja i , a određuju se pri proceduri fitanja. Vršna funkcija, koja se grafički javlja u vrhu između između kanala a i jednočestičnih međustanja i , određena je parametrima γ_{ia} , form faktorom i faktorom faznog prostora. Takođe, u svakom ulaznom ili izlaznom vrhu pojavljuje se form faktor $f_a^{JL}(s)$:

$$f_a^{JL}(s) = \left(\frac{q_a(s)}{Q_{1a} + \sqrt{Q_{2a}^2 + [q_a(s)]^2}} \right)^L, \quad (4.3)$$

i faktor faznog prostora $\rho_a(s)$

$$\rho_a(s) = \frac{q_a(s)}{\sqrt{s}}, \quad (4.4)$$

gdje je $s = W^2$ Mandelstamova varijabla. $q_a(s)$ je impuls mezona za bilo koji od tri kanala i dat je izrazom

$$q_a(s) = \frac{\sqrt{(s - (m + m_a)^2)(s - (m - m_a)^2)}}{2\sqrt{s}}. \quad (4.5)$$

L je angularni moment u kanalu a , Q_{1a} i Q_{2a} su konstante. Faktor $f_a^{JL}(s)$ osigurava odgovarajuće ponašanje u blizini praga na desnoj strani reza, i takođe producira lijevi rez u kompleksnoj s -ravnini. Parametri Q_{1a} i Q_{2a} određuju položaj lijevog reza kao i veličinu doprinosa ovog reza. U našoj analizi ovi parametri jednaki su masama mezona u odgovarajućim kanalima.

G_{ij}^{JL} je tzv “obučeni” propagator za parcijalni val JL i čestice i i j , i može se napisati preko tzv “golog” propagatora $G_{ij}^{0JL}(s)$ i matrice vlastite energije Σ_{kl}^{JL} koristeći Dysonovu jednačinu:

$$G_{ij}^{JL}(s) = G_{ij}^{0JL}(s) + \sum_{k,l=1}^{NJL} G_{ik}^{0JL}(s) \Sigma_{kl}^{JL}(s) G_{lj}^{JL}(s). \quad (4.6)$$

Goli propagator

$$G_{ij}^{0JL}(s) = \frac{e_i \delta_{ij}}{s_i - s} \quad (4.7)$$

ima pol za realnu vrijednost $s = s_i$. Znak $e_i = \pm 1$ mora biti izabran pozitivan za polove iznad elastičnog praga koji odgovaraju rezonancama. Nerezonantni dio (pozadina) je opisana meromorfnom funkcijom, i u većini slučajeva sadrži dva člana oblika (4.7) sa polovima ispod πN praga. Kod pozadinskih polova predznaci e_i su suprotni. Pozadinski pol sa pozitivnim znakom odgovara odbojnom potencijalu, dok pozadinski pol sa negativnim znakom odgovara privlačnom potencijalu. U principu, broj pozadinskih polova može se povećavati proizvoljno (vidjeti poglavlje o reprezentaciji pozadine), ali praktično se nikada ne uzima broj polova veći od tri.

Σ_{kl}^{JL} je vlastita energija za propagator čestice i i definira se na sljedeći način:

$$\Sigma_{kl}^{JL}(s) = \sum_a \gamma_{ka}^{JL} \cdot \Phi_a^{JL}(s) \cdot \gamma_{la}^{JL} \quad (4.8)$$

gdje su $\Phi_a^{JL}(s)$ kanalni propagatori. Sve veličine u modelu konstruirane su pod pretpostavkom da su ulazni i izlazni kanali dvočestični (quasi two-body aproksimacija). Svaki kanalni propagator je fizikalna funkcija koja daje ponašanje faznog prostora kod otvaranja kanala, osigurava eksplicitnu analitičnost u rezonantnom području, pokriva ostale singularitete daleko od rezonantnog područja.

Mi zahtjevamo da T_{ab}^{JL} ima, u svim kanalima, korektnu unitarnost i analitičke osobine u skladu sa dvočestičnom aproksimacijom. Imaginarni dio kanalnog propagatora $\Phi_a^{JL}(s)$ definiran je proizvodom faktora faznog prostora kanala a i odgovarajućeg form faktora $f_a^{JL}(s)$:

$$\text{Im} \Phi_a^{JL}(s) = [f_a^{JL}(s)]^2 \rho_a(s) \equiv F_a^{JL}(s). \quad (4.9)$$

Zamjenom relacije (4.3) u izraz za imaginarni dio kanalnog propagatora (4.9) dobijamo:

$$\text{Im} \Phi_a^{JL}(s) = \frac{[q_a(s)]^{2L+1}}{\sqrt{s} \{Q_{1a} + \sqrt{Q_{2a}^2 + [q_a(s)]^2}\}^{2L}}. \quad (4.10)$$

Realni dio kanalnog propagatora u modelu se računa koristeći subtrahiranu disperzionu relaciju

$$\operatorname{Re}\Phi(s) = \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_{th}}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(s') ds'}{(s' - s)(s' - s_0)}, \quad (4.11)$$

gdje je $s_{th} = (m + m_a)^2$.

Matrična forma finalne T-matrice date relacijom (4.2) može se napisati u obliku:

$$\hat{T}(s) = \sqrt{\operatorname{Im}\hat{\Phi}(s)} \cdot \hat{\gamma}^T \cdot \frac{\hat{G}_0(s)}{I - [\hat{\gamma} \cdot \hat{\Phi}(s) \cdot \hat{\gamma}^T] \cdot \hat{G}_0(s)} \cdot \hat{\gamma} \cdot \sqrt{\operatorname{Im}\hat{\Phi}(s)} \quad (4.12)$$

4.2 Pozadinski doprinos

U općem slučaju pozadinski doprinos je energijski ovisna funkcija. Aproksimacija koja je često korištena je da se pozadinski član (dio) rasčlani na konačan broj nefizikalnih polova. Ovaj pristup je vrlo pogodan za CMB model, obzirom da se integralne jednačine za pozadinske polove rješavaju na identičan način kao i fizikalne jednačine. Ovakav pristup u svojim publikacijama zagovarala je CMB grupa [26], a preuzela ga je Zagrebačka grupa u njihovoj modifikaciji CMB modela [25].

Ideja je jednostavna. Energijski ovisan, očekivano gladak pozadinski dio je predstavljen kao konačna suma polova neovisno o činjenici da oni apsolutno nemaju fizikalno značenje. Ovaj pristup je vrlo često gledan sa velikim nepovjerenjem, ali niko nije bio u mogućnosti da demonstrira (dokaže) bilo kakvu nedorečenost ovakve aproksimacije. Cutkosky je pretpostavio da se pozadinski dio može opisati meromorfnom funkcijom sa konačnim brojem polova. Ova ideja razmatrana je i prije Cutkoskog [28], ali u referenci [29] jasno je rečeno da pozadina ne može biti adekvatno predstavljena sumom realnih polova i konstanti. Još u starim radovima Kaufmana [30] jasno se kaže da ako ne konačna, onda beskonačna suma polova je dovoljna za uvjerljivu reprezentaciju pozadine. Stoga, iako ne tako rigorozna, ova aproksimacija će dati ideju o karakteru svake rezonance.

Sada ćemo elaborirati što mi zapravo radimo kada pretpostavimo da je pozadina zaista meromorfnu funkcija. U tom slučaju, umjesto rješavanja nelinearne jednačine za položaj polova T -matrice kada pozadina ima opću energijsku ovisnost, mi ustvari u "priču" uvodimo novi tip polova, polove koji aproksimiraju pozadinski dio. Ovdje se oslanjamo na pretpostavku da će rješenje nelinearne jednačine, sa općim tipom pozadine, biti vrlo blizu rješenja "pole-type" jednačine kada meromorfnu funkcija dobro aproksimira pozadinski dio.

To je ekvivalentno iskazu da $K \rightarrow T$ matrična transformacija sa energijski ovisnom pozadinom ima više od jednog rješenja za samo jedan K matrični pol. Dodatna rješenja aproksimiramo kao novi tip T -matričnih polova. To su polovi koji potiču od nefizikalnih K -matričnih polova uvedenih pri opisu energijski ovisne pozadine.

Imamo sada dva tipa polova: *i*) polovi koji odgovaraju stvarnoj unutrašnjoj singularnosti i *ii*) polovi koji odgovaraju pozadini. Prve polove zovemo autentičnim (pravim) polovima dok drugi tip polova zovemo dinamičkim polovima. Naravno postavlja se pitanje: Koliko je realna aproksimacija pozadine meromorfnom funkcijom? Odgovor nije trivijalan, ali se ovo čini kao dobrom i korektnom aproksimacijom.

4.3 Procedura ekstrakcije polova

Polovi T -matrice date jednadžbom (4.12) se nalaze rješavanjem jednadžbe:

$$\det G^{-1} = \det[e_{ij}\delta_{ij}(s_i - s) - \Sigma_{ij}] = 0. \quad (4.13)$$

Ovo je jednadžba u kompleksnoj energijskoj ravnini i može biti riješena samo ako se vrijednost T koja je poznata na realnoj osi (fizikalnom rezu) analitički produlji u kompleksnu nefizikalnu ravninu. U jednačini (4.13) dio koji nije definiran u kompleksnoj ravni je kanalni propagator. On je definiran samo na realnoj osi.

Dakle, problem nalaženja polova jednadžbe (4.12) je sveden na analitičko produljenje kanalnog propagatora. Ovo analitičko produljenje može biti izvedeno na dva načina: Direktnom numeričkom integracijom ili Pietarinenovim razvojem. Numerička integracija kanalnog propagatora korištena u referenci [25] je neposredna procedura, ali zahtjeva puno kompjuterskog vremena. Umjesto toga, mi koristimo elegantniji postupak, Pietarinenov razvoj korišten u radovima Karlruhe-Helsinki grupe [13]. Iz jednadžbe (4.10) je evidentno da $\phi(z)$ ima singularnost tipa kvadratnog korjena iz impulsa u sistemu centra masa i pri analitičkom produljenju u kompleksnu ravan to treba uzeti u obzir. Umjesto računanja disperzionog integrala (4.11) za svaku tačku u kompleksnoj ravni, mi ćemo funkciju $\phi(z)$ razviti u red po novoj varijabli koja ima ista analitička svojstva. Koristimo razvoj sličan Pietarinenovom [24] ili Ciuli [31]

$$\phi_I(z) = \sum_{n=0}^N c_n (Z_I(z))^n, \quad (4.14)$$

gdje su c_n koeficijenti u razvoju. Varijabla Z data je svojom glavnim granom

$$Z_I(z) = \frac{\alpha - \sqrt{x_0 - z}}{\alpha + \sqrt{x_0 - z}}, \quad (4.15)$$

gdje je α parametar koji se može podešavati. Ova funkcija je fitana na skup podataka koji se sastoji od imaginarnog dijela $\phi(x)$ datog jednačinom (4.10) i realnog dijela $\phi(x)$ izračunatog iz disperzione relacije (4.11), oba dijela su poznata na realnoj osi. (Stoga smo ovdje uzeli oznaku x). Opća ideja je da $\phi(z)$ ima istu analitičku strukturu kao $Z(z)$. Parametar α i koeficijente c_n dobijamo za

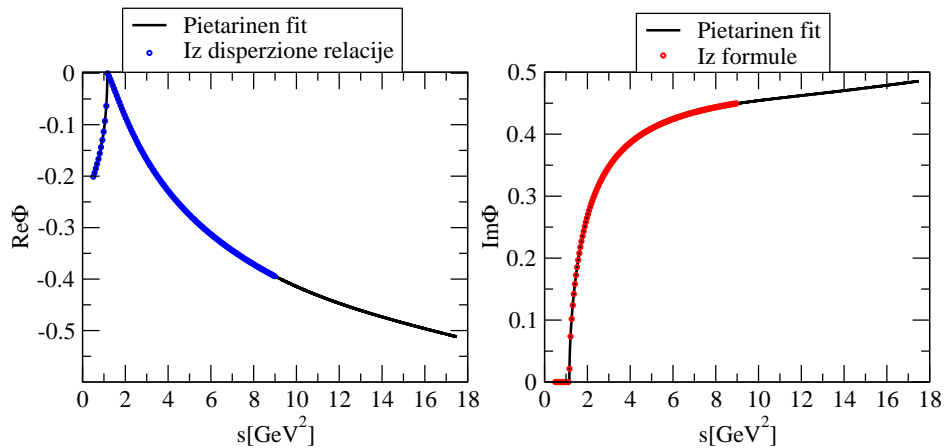
svaki kanal i za svaki analizirani parcijalni val. Primjenjena je metoda najmanjih kvadrata. Smatra se da je fit dobar ako su ispunjeni sljedeći uvjeti: (i) potreban je mali broj koeficijenata da bi se dobila zadovoljavajuća aproksimacija (7 ili 8, najčešće), (ii) Funkcija je fitana na dio podataka, dok je ekstrapolacija izvan fitane oblasti u skladu sa ostatkom podataka, (iii) fitanje samo imaginarnog dijela $\phi(x)$ reproducira realni dio koji je u saglasnosti sa vrijednostima dobijenim iz (4.11), što je neposredna posljedica analitičnosti kanalnog propagatora.

Kanalni propagator je sa dobrom tačnošću i pouzdano određen u blizini realne ose, što je posebno važno u oblasti u kojoj leže barionske rezonance čije mase i širine određujemo koristeći CMB model. Svaki otvoreni kanal je odgovoran za dva Riemannova lista: prvi (fizikalni) list sa fizikalnim parcijalnim valovima i drugi (nefizikalni) list sa rezonantnim polovima. Ako hoćemo dobiti nefizikalni list dovoljno je koristiti drugu granu od $Z(z)$:

$$Z_{II}(z) = \frac{\alpha + \sqrt{x_0 - z}}{\alpha - \sqrt{x_0 - z}}. \quad (4.16)$$

Konačno, evidentno je iz jednačbe (4.3) da polovi svakog parcijalnog vala moraju biti konstruirani na isti način u svim kanalima. Ti su polovi i polovi resolventa $G(z)$.

Kanalni propagator S -vala πN kanala, dobijen Pietarinenovim razvojem dat je na Slici 4.2.



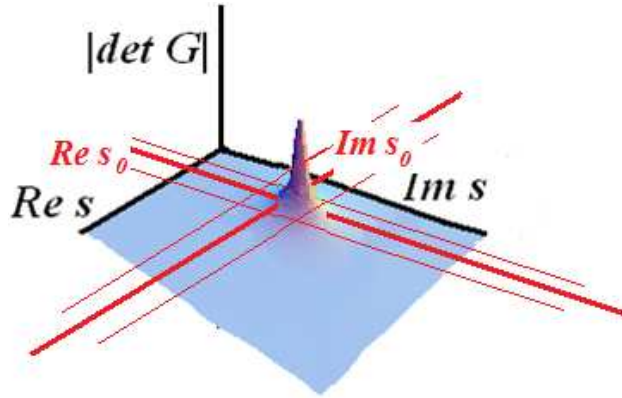
Slika 4.2: Pietarinenov razvoj za S_{11} parcijalni val

Crvene tačke predstavljaju imaginarni dio kanalnog propagatora Φ na realnoj osi i dat je jednačbom (4.10). Plave tačke predstavljaju realni dio kanalnog propagatora Φ na realnoj osi, i izračunate su na osnovu disperzione relacije (4.11). Puna linija predstavlja kompleksnu funkciju $\phi_I(z)$, kompleksnu funkciju definiranu u cijeloj kompleksnoj ravni energije. Ima odgovarajuće tačke grananja i odgovarajuće rezove za svaki kanal.

Kada je poznat kanalni propagator u cijeloj kompleksnoj energijskoj ravni, jednadžba (4.13) se rješava numerički. Umjesto traženja nula jednadžbe (4.13) tražimo vrijednost s -a gdje $\det G(s)$ ima beskonačnu vrijednost:

$$\det G(s) = \det[e_{ij}\delta_{ij}(s_i - s) - \Sigma_{ij}]^{-1} = \infty. \quad (4.17)$$

U praksi mi računamo $|\det G|$ kao funkciju $Re(s)$ i $Im(s)$ - (3D plot). Onda tražimo vrijednosti $Re(s)$ i $Im(s)$ kada $|\det G|$ postaje veće od proizvoljnog broja. Smatramo dobijene vrijednosti $Re(s_0)$ i $Im(s_0)$ položajem polova, a procedura je ilustrirana na slici (4.3)



Slika 4.3: Princip numeričkog nalaženja položaja polova koristeći jednačinu (4.13) sa Pietarinenovim razvojem kanalnog propagatora.

4.4 Veza CMB modela sa ostalim modelima

Kada se govori o parametrima rezonance prvo se pomisli na Breit-Wignerov oblik. Dobra strana ovog oblika je što ga je lako primjeniti na bilo koji parcijalni val, pa čak i na eksperimentalne podatke. Problem sa Breit-Wignerovim oblikom je što ne postoji samo jedna parametrizacija. Osim toga problem nastaje što mnoge amplitude nemaju čisti rezonantni oblik. Nekada dolazi do interferencije sa pozadinom, zatim pojavljuje se problem pri otvaranju neelastičnih kanala. Vjerovatno najveći i najvažniji problem je kako kombinovati rezonantni dio i pozadinu.

Potpuni CMB model sadrži disperzionu relaciju koja obezbjeđuje analitičnost. Imaginarni dio kanalnog propagatora je relativistička funkcija prostornog stanja, a realni dio je izračunat iz disperzione relacije. Modeli koji nisu analitički [32] uključuje samo prostornu fazu, tako da je $Re\phi(0) = 0$ za svako s . CMB model koristi Dyson-ovu jednačinu kako bi dozvolio konverziju u otvorena međustanja (rezonantna ili ne rezonantna) i otvorene asimptotske kanale. Goli propagator je "obučen" sa svim otvorenim međustanjima i asimptotskim stanjima. U K -matričnoj formulaciji [33, 32, 34, 35] koristi se goli propagator CMB modela na

mjestu obučenog propagatora uzimajući K matricu, a ne T matricu, i identifi-
cira rezonantne osobine sa njegovim parametrima. Koristeći relativističku Breit-
Wignerovu formu [35] za reakciju između početnog stanja i i konačnog stanja j ne
analitička, unitarna K -matrica može se napisati u obliku:

$$K_{ij}^R(s) = \frac{\sqrt{\text{Im}\phi_i(s)}\gamma_{R,i}\gamma_{R,j}\sqrt{\text{Im}\phi_j(s)}}{s_R - S}, \quad (4.18)$$

gdje $\text{Im}\phi_i(s)$ je proizvod form faktora i faznog prostora za kanal i . M_R i $\Gamma_{R,i}$ su
mase i parcijalne širine za raspad u i -tom kanalu, totalna širina je Γ_R . Ove veličine
su definirane na slijedeći način:

$$M_R = \sqrt{s_R}, \quad (4.19)$$

$$\Gamma_{R,i} = \frac{\text{Im}\phi_i(s_R)(\gamma_{R,i})^2}{M_R}, \quad (4.20)$$

$$\Gamma_R = \sum_i \Gamma_{R,i}. \quad (4.21)$$

Za ne-relativistički Breit-Wignerov slučaj, K -matrični elementi se definiraju pomoću:

$$K_{ij}^R = \frac{\sqrt{\text{Im}\phi_i(s)}\gamma_{R,i}\gamma_{R,j}\sqrt{\text{Im}\phi_j(s)}}{M_R - W}, \quad (4.22)$$

gdje je Γ_R

$$\Gamma_R = 2 \sum_i \text{Im}\phi_i(s_R)(\gamma_{R,i}^2). \quad (4.23)$$

U oba slučaja, odgovarajuća T matrica može biti nađena koristeći standardnu
definiciju

$$T = K(I - iK)^{-1}. \quad (4.24)$$

Ipak ne postoji jednostavan izraz za T matricu koji odgovara izrazima (4.18) i
(4.22) izuzev za jednokanalni slučaj. Nerezonantna K matrica takođe mora biti
definirana. Za održavanje unitarnosti, potpuna K matrica je dobijena dodavan-
jem svih rezonantnih i nerezonantnih K matrica [36]. Odgovarajuća T matrica
je uključivala efekte interferencije i vezivanja nerezonantnih procesa, ali samo na
ljusci.

Razlike između CMB i K matričnog modela su od ranije poznate. Zajednički
problem sa svim K matričnim metodama je problem kako nametnuti analitičnost.
Dok CMB model ima potpuno tretiranje dvojnog raspršenja, samo imaginarni dio
kanalnog propagatora je uključen u K -matričnom modelu. K -matrični model može
biti direktno inkorporiran u efektivnu Lagrangianovu formulaciju [37]. K -matrični
model ima praktičnih prednosti. On je obično više korišten i u ovom slučaju je
manje komplikovano tretiranje interferencije i efekta dvojnog raspršenja pojednos-
tavljujući fitove amplituda parcijalnih valova. K matrica se može formirati kao

suma rezonance i pozadinskih polova.

Takođe razlika između CMB i K-matričnog formalizma može se vidjeti kada se pojavi interakcija između rezonanci i nerezonantnih amplituda. Ove razlike će biti maksimalne blizu praga kanala. Najbolji primjer za to je $S_{11}(1535)$ rezonanca koja je blizu ηN praga. U ovom slučaju očekujemo da će CMB model dati pouzdanije rezultate.

4.5 Definicija rezonantnih parametara

Ovdje je dana definicija rezonantnih parametara u CMB modelu, kako je to rađeno u referencama [26], [25] i [27]. Rezonance u jednokanalnim analizama su opisane sa rezonantnom masom, širinom i omjerom grananja, ili sa položajem pola u kompleksnoj ravni i njegovim reziduomom. Analiza vezanih kanala ima komplikovan matematički aparat, ali se traži definicija rezonantnih parametara tako da bi se oni mogli porediti sa parametrima definisanim u jednokanalnoj analizi. Najprije uvedimo T matricu koja ima unitarnu normalizaciju

$$T_{ab} = \sqrt{\rho_a} t_{ab} \sqrt{\rho_b}, \quad (4.25)$$

a matrica S je dana izrazom

$$S = 1 + 2iT. \quad (4.26)$$

K matrica se definira preko matrica S i T na sljedeći način:

$$K = i \frac{1 - S}{1 + S} = \frac{T}{1 + iT}. \quad (4.27)$$

Standardni jednokanalni rezonantni parametri su često definirani preko Breit-Wignerove parametrizacije parcijalnog vala.:

$$T = \frac{\frac{\Gamma_e}{2}}{M - W - \frac{i\Gamma_{tot}}{2}}, \quad (4.28)$$

gdje je M rezonantna masa, Γ_e elastična širina i Γ_{tot} je ukupna širina rezonance. Omjer grananja rezonance je definiran na sljedeći način:

$$x_e = \frac{\Gamma_e}{\Gamma_{tot}}. \quad (4.29)$$

Komplikacije dolaze zbog činjenice da je Γ ovisno o energiji. Također, u blizini rezonance mala promjena pozadine može deformirati oblik rezonance. Alternativne definicije rezonantnih parametara su istražene u analizi vezanih kanala. One uključuju definiranje rezonantnih parametara koristeći pol K matrice i pol T matrice.

Pol K matrice je određen iz uslova

$$\det(1 + S) = \det(1 + iT) = 0. \quad (4.30)$$

U blizini pola, K matrica može biti parametrizirana kao

$$K \sim \frac{\Gamma}{W_R - W} \chi \chi^\dagger \quad (4.31)$$

gdje χ predstavlja normirani vektor vezanja koji zadovoljava uslov $\chi^\dagger \chi = 1$. Treći metod definisanja rezonantnih parametara je pridruživanje rezonance polu T matrice. Koristeći jednažbe (4.12) i (4.9) i uvodeći oznaku $H^{-1} = G$, T matrica se može napisati u obliku

$$T_{ab} = \sum_{ij} \gamma_{ai} \sqrt{F_a} H_{ij}^{-1} \gamma_{jb} \sqrt{F_b}. \quad (4.32)$$

Uslov da matrica T_{ab} ima pol svodi se na uvjet

$$\det H_{ij} = \det[e_{ij} \delta_{ij}(s_i - s) - \Sigma_{ij}] = 0. \quad (4.33)$$

Masa M i širina Γ mogu se definirati preko položaja pola $s_{pol} = (M - \frac{i\Gamma}{2})^2$. U blizini pola H^{-1} se može parametrizirati na sljedeći način

$$H_{ij}^{-1} = \frac{\chi_i \chi_j}{h(s)}. \quad (4.34)$$

Vektor vezanja χ je vlastiti vektor matrice H za $s = s_{pol}$:

$$\sum_j H_{ij}(s_{pol}) \chi_j = 0 \quad (4.35)$$

i

$$\sum_{ij} \chi_i H_{ij} \chi_j = h(s). \quad (4.36)$$

Korištenjem jednažbi (4.8) i (4.33) dobijamo

$$h(s) = \sum_i e_{ij} \chi_i^2 (s_i - s) - \sum_c \eta_c^2 \Phi_c, \quad (4.37)$$

gdje je

$$\eta_c = \sum_i \gamma_{ic} \chi_i. \quad (4.38)$$

η_c definiše vezu i -te rezonance sa kanalom c . Reziduum za T_{ab} je:

$$R_{ab} = \sqrt{F_a F_b} \frac{\eta_a \eta_b}{h'(s)}, \quad (4.39)$$

gdje je $h' = \frac{dh}{ds}$. Omjer grananja se može definirati preko reziduuma R_{ee} elastične amplitude,

$$x_e = \frac{R_{ee}}{-Im(s_{pol})}. \quad (4.40)$$

Ovo pravilo za identifikaciju rezonanci i rezonantnih parametara se preferira kod K -matričnog postupka. Problem ovog metoda je što je ponekad teško interpretirati rezultate kada se faktor faznog pomaka naglo promjeni.

Energijska ovisnost $F_a(s)$, općenito istisne pol iz konvencionalno prihvatljivog položaja pola. Stoga, u više kanalnom formalizmu, jednoj rezonanci obično odgovara nekoliko polova T matrice na različitim plohama Riemannove površi. To ovisi o tome kako se tačka grananja u faktoru faznog pomaka izbjegne u analitičkom produljenju od realne osi s .

K -matrični polovi su na realnoj osi, tako da dvojba pri analitičkom produljenju ne postoji. Međutim, sasvim različiti rezultati su dobijeni uzimanjem u obzir različit broj otvorenih kanala.

Mi kombinujemo prvi i treći korak. Prvo, identifikujemo rezonancu lociranjem pola T matrice. Onda razmatramo širinu koja će biti energijski ovisna veličina uključujući faktor faznog pomaka:

$$\Gamma \sim \sum_c F_c(s) \quad (4.41)$$

gdje je

$$y_c = |\eta_c|^2. \quad (4.42)$$

U blizini rezonance, matrica T se parametrizira kao

$$T_{ab} = \frac{(B_{ab} - \delta_{ab})}{2i} + \sum_{cd} B_{ac}^{\frac{1}{2}} F_c^{\frac{1}{2}} \eta_c D^{-1} \eta_d F_d^{\frac{1}{2}} B_{db}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.43)$$

gdje je B_{ab} pozadina matrice S i općenito Breit-Wignerov nazivnik je:

$$D(s) = r - s - c \sum_c y_c \Phi_c(s). \quad (4.44)$$

Realne konstante r i c su izabrane tako da je $D(s_{pol}) = 0$. $D(s)$ će biti proporcionalno sa $h(s)$ ako svi χ_i i otuda i svi η_c bi imali istu fazu. Ovo nije općenito tačno, ako je s_{pol} blizu tačke grananja nekog $\Phi_c(s)$, očekujemo da nule od $D(s)$ na drugim plohama će još uvijek dati adekvatnu aproksimaciju unutar skupa polova T_{ab} koji su pridruženi rezonancama. Rezonantna masa, širina i omjer grananja su dati izrazima:

$$ReD(M^2) = 0, \quad (4.45)$$

$$\Gamma = \frac{ImD(M^2)}{M ReD'(M^2)}, \quad (4.46)$$

$$\Gamma_c = \frac{y_c F_c(M^2) \Gamma}{\sum_a y_a F_a(M^2)} \equiv x_c \Gamma \quad (4.47)$$

gdje je D' derivacija općeg Breit-Wignerovog nazivnika.

Poglavlje 5

Rezultati i diskusija

U ovom poglavlju su dati rezultati koje smo dobili analizom predikcija modela. Najprije je definiran skup ulaznih podataka koji je korišten i detaljno je opisan način kreiranja ulaznih podataka. Nakon toga je svaki od dijelova modela analiziran odvojeno i date su slike i tabele za sve promjene koje su dobivene. Nakon svake promjene dati su zaključci.

5.1 Definiranje minimalne baze podataka neophodne za stabilan fit

Ako želimo testirati stabilnost modela moramo izabrati takvu bazu ulaznih podataka za koju će procedura fitanja sa originalnim modelom biti brza, jedinstvena i reproducibilna. U tom slučaju, možemo mijenjati detalje (dijelove) modela i interpretirati rezultirajuće pomjeranje položaja polova kao rezultat promjene dijelova modela, a ne neadekvatnog skupa ulaznih podataka.

Kao ulazne podatke u ovom radu smo izabrali amplitude parcijalnih valova dobivene primjenom Zagrebačkog modela. [25]. Kada su ulazni parametri izabrani i fiksirani (goli polovi i kanal-resonance konstante vezanja γ) na raspolaganju imamo sve parcijalne valove. U ovom poglavlju ćemo testirati stabilnost fita za prva tri najniža parcijalna vala sa izospinom $I = \frac{1}{2}$. To su parcijalni valovovi S_{11} , P_{11} i D_{13} .

Zagrebačko rješenje sastoji se od amplituda parcijalnih valova (PWA) odgovarajućih kanala: $\pi N \rightarrow \pi N$, $\pi N \rightarrow \eta N$ i $\pi N \rightarrow \pi^2 N$. Sve amplitude parcijalnih valova Zagrebačke analize su energijski ovisne funkcije, energijski glatke. Mi smo mogli fitati ova rješenja direktno, ali smo bili mišljenja da bi direktno fitanje energijski ovisnih rješenja uvelo jaka analitička ograničenja koja dolaze zbog činjenice da rješenja "memoriraju" analitičku funkcionalnu formu CMB formalizma korištenog pri dobijanju PWA. Mi smo željeli eliminirati ovo dodatno ograničenje, tako da smo "razmazali" energijski glatko Zagreb rješenje po receptu datom u [38].

Umjesto korištenja glatkih teorijskih krivih dobivenih u modelu, kontruirali smo "eksperimentalne" tačke sa greškom (standardnom devijacijom) $\sigma = 0.02$. To odgovara srednjoj vrijednosti grešaka parcijalnih valova koje u svojim analizama parcijalnih valova daje GWU grupa Na taj način smo dobili "eksperimentalne" parcijalne valove za tri kanala: $\pi N \rightarrow \pi N$, $\pi N \rightarrow \eta N$ i $\pi N \rightarrow \pi\pi N$. Na taj način eksplicitna CMB funkcionalna forma je izgubljeno i pri fitu dobijamo realistične vrijednosti χ^2 koje su uporedive sa onim dobijenim kod fitova GWU/VPI grupe za njihovo energijski neovisno rješenje (Single energy solutions-SES) [39].

Parametri korišteni za dobijanje skupa ulaznih podataka su dati u Tabeli 5.1. Ulazni podaci zajedno sa našim fitom tih podataka koristeći standardni CMB model su pokazani na Slikama 5.1-5.3.

Da bi smo pojednostavili oznake, slijedeći preporuke date u referenci [8], za svaki pol T -matrice koristit ćemo generičko ime: **PW(Masa u MeV)** za svaki položaj pola dobijen u Zagrebačkom modelu. Na primjer, val S_{11} ima pol na energiji $W = 1518 MeV$. Označavamo ga sa $S_{11}(1518)$. To je u našem radu oznaka za rezonancu $N(1535)$ spina $\frac{1}{2}$ i izospina $\frac{1}{2}$ koju navodi *PDG*. Sva Zagreb rješenja odgovaraju postojećim *PDG* rezonantnim stanjima, sa izuzetkom dva rješenja za P_{11} val na srednjim energijama. U Zagreb modelu imamo dva P_{11} rješenja: $P_{11}(1708)$ [25], [40] koje je identificirano sa $N(1710)$ rezonantnim stanjem za P_{11} val u *PDG*, i novo rješenje $P_{11}(1728)$ koje nije potvrđeno u *PDG*. U Tabelama 5.2-5.4 su pokazani rezultati testa kada pokušavamo reducirati broj fitanih kanala. Iz tabela se vidi da položaji polova koje smo dobili fitom dobro odgovaraju originalnim ulaznim parametrima (inputu). Reducirani χ^2 je stabilan već pri fitu dva od tri kanala, a naravno fitanjem tri od tri kanala namećemo dodatno ograničenje i reducirani χ^2 je najmanji.

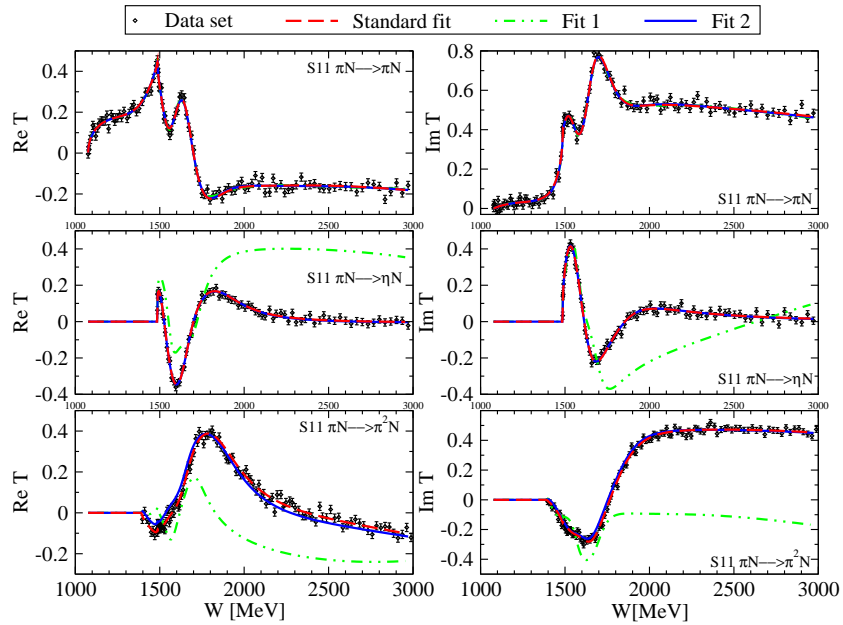
Rezultati dobijeni fitanjem samo elastičnog kanala označeni sa *Fit 1*. Sa *Fit 2* su označeni rezultati koji su dobijeni kada smo pri fitu, elastičnom ($\pi N \rightarrow \pi N$) kanalu dodali i neelastični ($\pi N \rightarrow \eta N$) kanal. *Standard fit* je dobijen fitajući sva tri kanala istovremeno.

Reducirani χ^2 za ograničeni skup ulaznih podataka (jedan kanal za *Fit 1* i dva kanala za *Fit 2*) je označen sa χ^2 . Međutim, nismo dobili odgovor na pitanje kako rješenja u slučaju fita jednog i dva kanala reproduciraju sva tri uključena kanala. Stoga je izračunat novi χ^2 koji je dobijen kada se rješenja *Fit 1* i *Fit 2* primjene na treći kanal bez njegovog fitanja. Odgovarajući χ^2 je označen sa $^{tot}\chi^2_R$, i označava koliko dobro fitovi jednog i dva kanala reproduciraju sve kanale istovremeno.

U svrhu testiranja stabilnosti modela u ovom radu fitali smo ulazne podatke sva tri kanala.

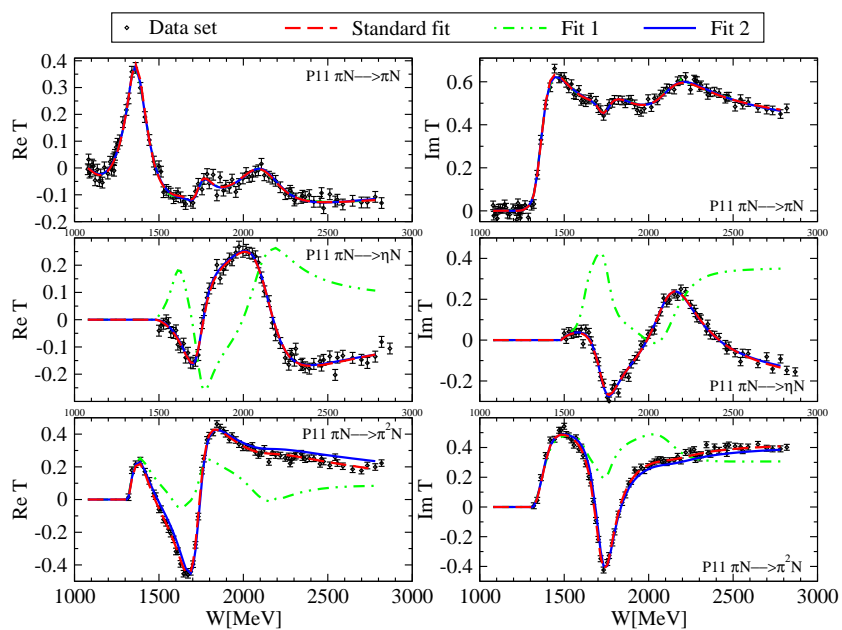
Tablica 5.1: Originalni parametri rješenja Zagrebačkog modela za S_{11} , P_{11} i D_{13} parcijalne valove.

Parcijalni valovi	Goli polovi				Obučeni polovi			
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	W_{s_4}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$
	<i>MeV</i>				<i>MeV</i>			
S_{11}	1523	1640	1837		$\begin{pmatrix} 1518 \\ 191 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 205 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1784 \\ 424 \end{pmatrix}$	
P_{11}	1607	1771	2186	2852	$\begin{pmatrix} 1360 \\ 161 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 175 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1728 \\ 138 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2114 \\ 345 \end{pmatrix}$
D_{13}	1582	1880	2497		$\begin{pmatrix} 1507 \\ 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1805 \\ 128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1942 \\ 471 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2699 \\ 558 \end{pmatrix}$

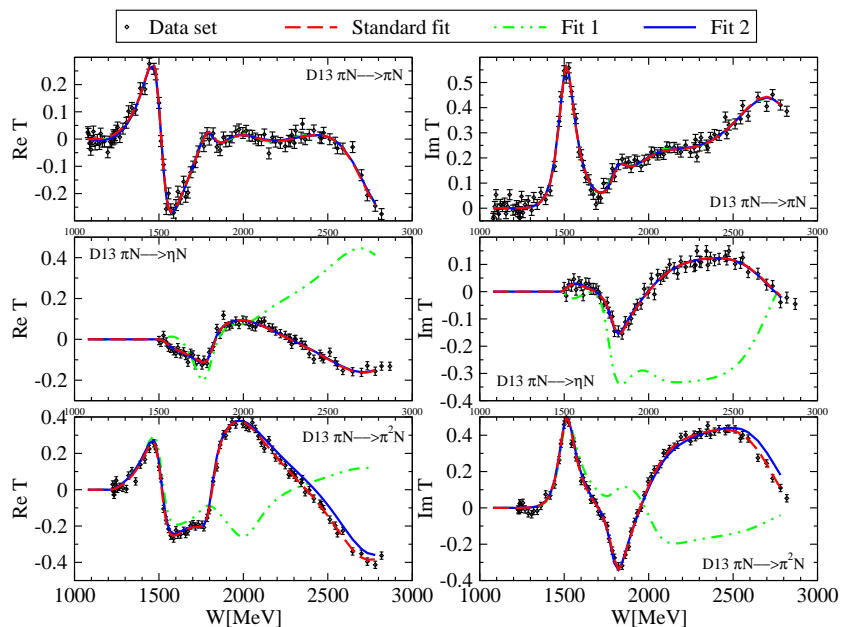


Slika 5.1: Skup ulaznih podataka i fitovi tih podataka dobiveni koristeći standardan CMB model za S_{11} parcijalni val

5.1 Definiranje minimalne baze podataka neophodne za stabilan fit



Slika 5.2: Skup ulaznih podataka i fitovi tih podataka dobiveni koristeći standardan CMB model za P_{11} parcijalni val



Slika 5.3: Skup ulaznih podataka i fitovi tih podataka dobiveni koristeći standardan CMB model za D_{13} parcijalni val

5.1 Definiranje minimalne baze podataka neophodne za stabilan fit

35

Tablica 5.2: Stabilnost rješenja dobivenih fitanjem ulaznih podataka koristeći standardni model za S_{11} parcijalni val.

	Broj kanala	Broj rezonanci	Fitirani kanali	Goli polovi			Obučeni polovi			χ_R^2	$^{tot}\chi_R^2$
				W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$		
<i>Fit 1</i>	3	3	1	1455	1654	2860	$\begin{pmatrix} 1562 \\ 100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1684 \\ 179 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4090 \\ 2450 \end{pmatrix}$	1.094	117.186
<i>Fit 2</i>	3	3	2	1522	1635	1823	$\begin{pmatrix} 1516 \\ 185 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1640 \\ 207 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1790 \\ 435 \end{pmatrix}$	1.004	1.711
<i>Standard fit</i>	3	3	3	1523	1640	1834	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1779 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.016	1.016

Tablica 5.3: Stabilnost rješenja dobivenih fitanjem ulaznih podataka koristeći standardni model za P_{11} parcijalni val.

	Broj kanala	Broj rezonanci	Fitirani kanali	Goli polovi				Obučeni polovi				χ_R^2	$^{tot}\chi_R^2$
				W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	W_{s_4}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$		
<i>Fit 1</i>	3	4	1	1712	1781	2172	3162	$\begin{pmatrix} 1416 \\ 69 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1701 \\ 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1788 \\ 128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2118 \\ 321 \end{pmatrix}$	0.872	99.866
<i>Fit 2</i>	3	4	2	1734	1923	2191	2330	$\begin{pmatrix} 1360 \\ 169 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1695 \\ 216 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1745 \\ 112 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2120 \\ 350 \end{pmatrix}$	1.048	1.739
<i>Standard fit</i>	3	4	3	1607	1772	2182	2841	$\begin{pmatrix} 1365 \\ 157 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2117 \\ 345 \end{pmatrix}$	0.958	0.958

Tablica 5.4: Stabilnost rješenja dobivenih fitanjem ulaznih podataka koristeći standardni model za D_{13} parcijalni val.

	Broj kanala	Broj rezonanci	Fitirani kanali	Goli polovi			Obučeni polovi				χ_R^2	$^{tot}\chi_R^2$
				W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$		
<i>Fit 1</i>	3	3	1	1589	1998	2537	$\begin{pmatrix} 1500 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1765 \\ 200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1980 \\ 232 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2720 \\ 597 \end{pmatrix}$	1.295	137.071
<i>Fit 2</i>	3	3	2	1589	1880	2557	$\begin{pmatrix} 1507 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1800 \\ 126 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1932 \\ 508 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2700 \\ 595 \end{pmatrix}$	1.070	1.555
<i>Standard fit</i>	3	3	3	1582	1880	2499	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1939 \\ 485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2691 \\ 583 \end{pmatrix}$	1.027	1.027

5.2 Oblik kanalnog propagatora $\Phi(s)$

U ovom dijelu analize stabilnosti predikcija modela mijenjan je funkcionalni oblik kanalnog propagatora. Da bi smo to uradili, prvo moramo definirati vršnu funkciju i kombinirati je sa faktorom faznog prostora koji određuje je analitička svojstva kanalnog propagatora. Preuzeli smo recept koji je opsežno koristila CMB grupa [26]. Definicija veličina od interesa za analizu dana je formulama (4.3), (4.10) i (4.11). Međutim, vrlo je teško potvrditi opravdanost ovih pretpostavki. Umjesto definiranja fizikalnih razloga, mi ćemo testirati kako (koliko) je naš model osjetljiv na velike ali vještačke promjene oblika kanalnog propagatora.

Postupak se sastoji iz tri koraka:

- (i) Izabrat ćemo potpuno vještačku funkciju modifikacije, zahtjevajući da ja promjena kanalnog propagatora lokalizirana samo na jedan njegov dio i da je prelaz od modificiranog dijela na nemodificirani dio gladak.
- (ii) Izračunat ćemo imaginarni dio kanalnog propagatora.
- (iii) Realni dio ćemo računati koristeći disperzionu relaciju datu jednačinom (4.11).

Promjenit ćemo kanalne propagatore u svim kanalima istovremeno koristeći istu funkciju modifikacije.

5.2.1 Asimptotski dio

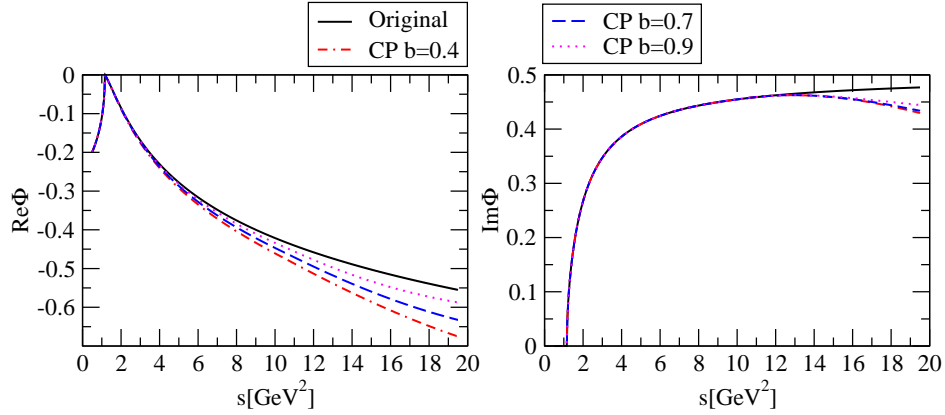
U ovom dijelu je analizirano kako asimptotska promjena imaginarnog dijela kanalnog propagatora (za energije veće od 10GeV^2) utiče na promjenu položaja polova. Imaginarni dio kanalnog propagatora je zadržan nepromjenjen ispod $s = 10\text{GeV}^2$ kvadrata energije. Iznad $s = 10\text{GeV}^2$ uvedena je korekcijska funkcija $g(s)$ koja mijenja asimptotsko ponašanje kanalnog propagatora:

$$g(s) = b + c \cdot e^{-d \cdot (s-10.5)^2}. \quad (5.1)$$

Parametri b , c i d su određeni tako da se osigura neprekidnost kanalnog propagatora i njegove prve derivacije za $s = 10\text{GeV}^2$. Korigirani imaginarni dio kanalnog propagatora (izostavljajući indekse) glasi:

$$Im\Phi_{corr} = \begin{cases} Im\Phi(s) & \text{for } s \leq 10 \text{ GeV}^2 \\ Im\Phi(s) \cdot g(s) & \text{for } s > 10 \text{ GeV}^2 \end{cases} \quad (5.2)$$

Realni dio kanalnog propagatora je izračunat koristeći jednačinu (4.11). Imaginarni i realni dio kanalnog propagatora su dati na slici (5.4) za nekoliko vrijednosti parametra b . Kako se može vidjeti sa slike (5.4) imaginarni i realni dio kanalnog propagatora nisu promjenjeni u relevantnom području $s \leq 10\text{GeV}^2$ gdje leže nukleonske rezonance. Obzirom na ovu činjenicu zaključujemo da su položaji polova takođe nepromjenjeni.



Slika 5.4: Imaginarni i realni dio kanalnog propagatora. Korišteno je nekoliko vrijednosti parametra b .

5.2.2 Unutrašnji dio

Kao unutrašnji dio kanalnog propagatora definirali smo oblast energije iznad praga, ali koja ne prelazi energije veće od $s = 10\text{GeV}^2$. Naime, u energijskoj oblasti $1\text{GeV}^2 < s < 10\text{GeV}^2$, kako je rečeno, nalazi se većina poznatih nukleonskih rezonanci. U ovom dijelu naše analize uvodimo funkciju

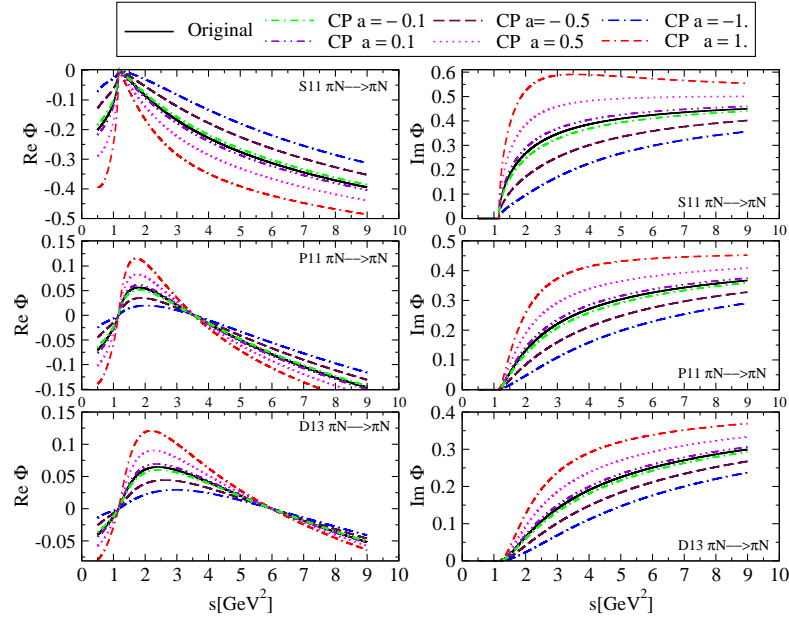
$$g_1(s) = \frac{1 + a \cdot s + s^2}{1 + s^2} \quad (5.3)$$

koja mijenja oblik kanalnog propagatora, ali zadržava asimptotsko ponašanje i ponašanje na pragu. Ovisno o veličini i znaku slobodnog parametra a , vrijednost kanalnog propagatora u srednjem dijelu $2\text{GeV}^2 < s < 5\text{GeV}^2$ može biti povećana ili smanjena za čak 100%. Imaginarni dio kanalnog propagatora u ovom slučaju dat je izrazom:

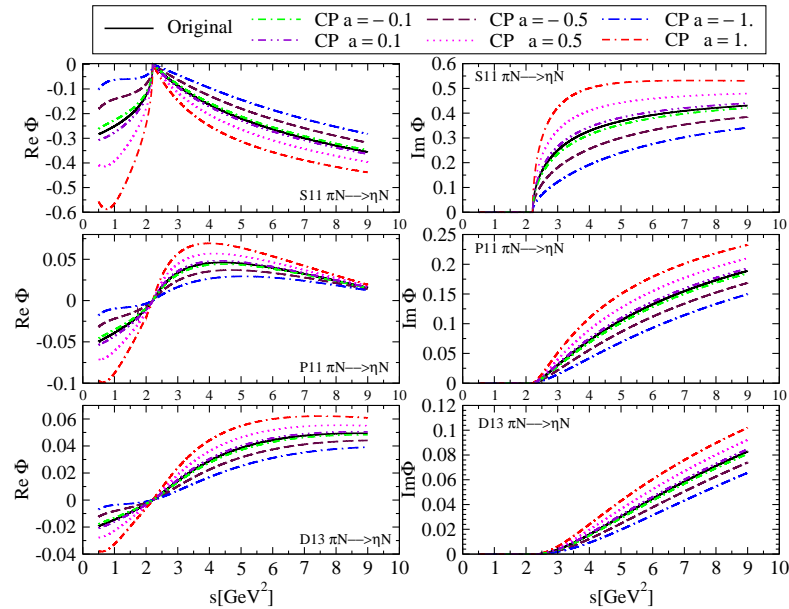
$$\text{Im}\Phi_{corr} = \text{Im}\Phi \cdot [g_1(s)]^2, \quad (5.4)$$

a realni dio je izračunat koristeći disperzionu relaciju (4.11).

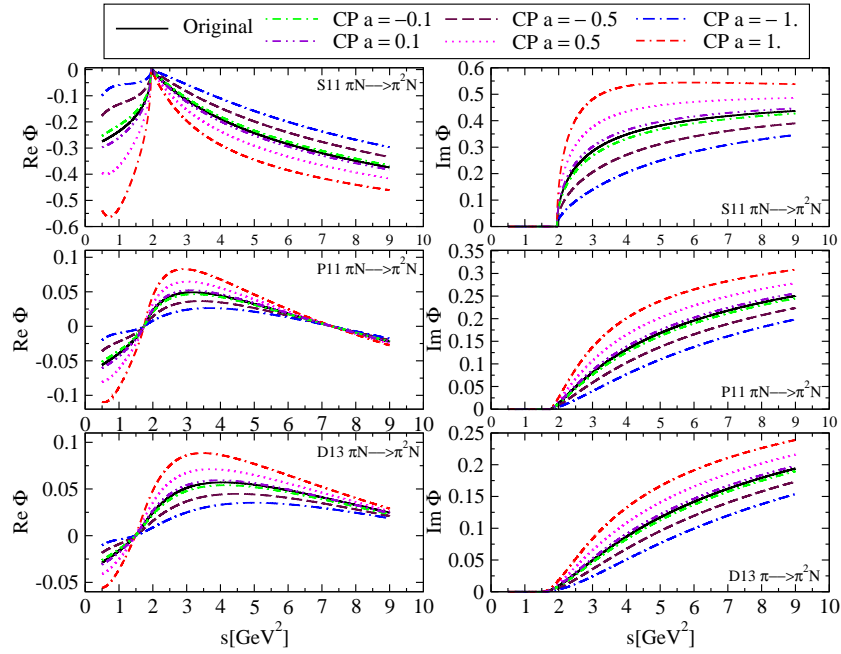
Kako se vidi na Slikama 5.5 - 5.7, mijenjajući parametar a u intervalu $-1 < a < 1$ u izabranoj funkciji datoj jednačinom (5.3), promjena imaginarnog dijela kanalnog propagatora iznosi do 100% u srednjem dijelu $2\text{GeV}^2 < s < 5\text{GeV}^2$.



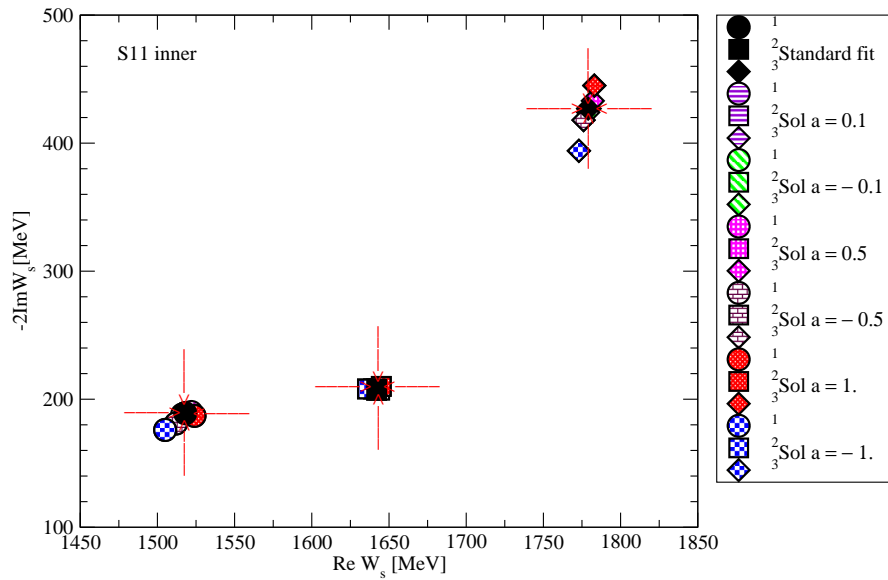
Slika 5.5: Realni i imaginarni dio kanalnog propagatora dobiveni promjenom unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora za S_{11} , P_{11} i D_{13} parcijalne valove u elastičnom kanalu ($\pi N \rightarrow \pi N$).



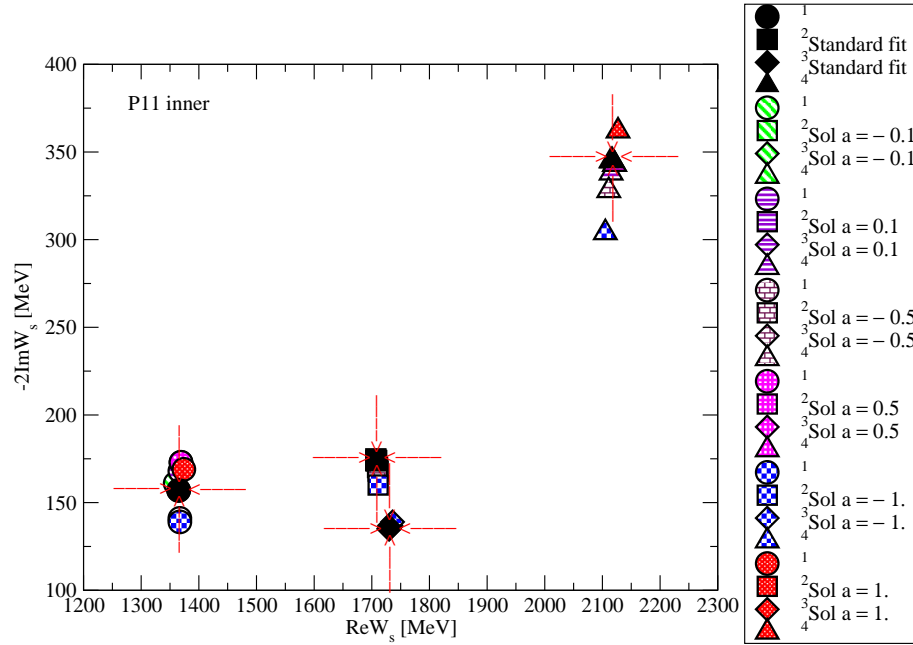
Slika 5.6: Realni i imaginarni dio kanalnog propagatora dobiveni promjenom unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora za S_{11} , P_{11} i D_{13} parcijalne valove u neelastičnom kanalu ($\pi N \rightarrow \eta N$).



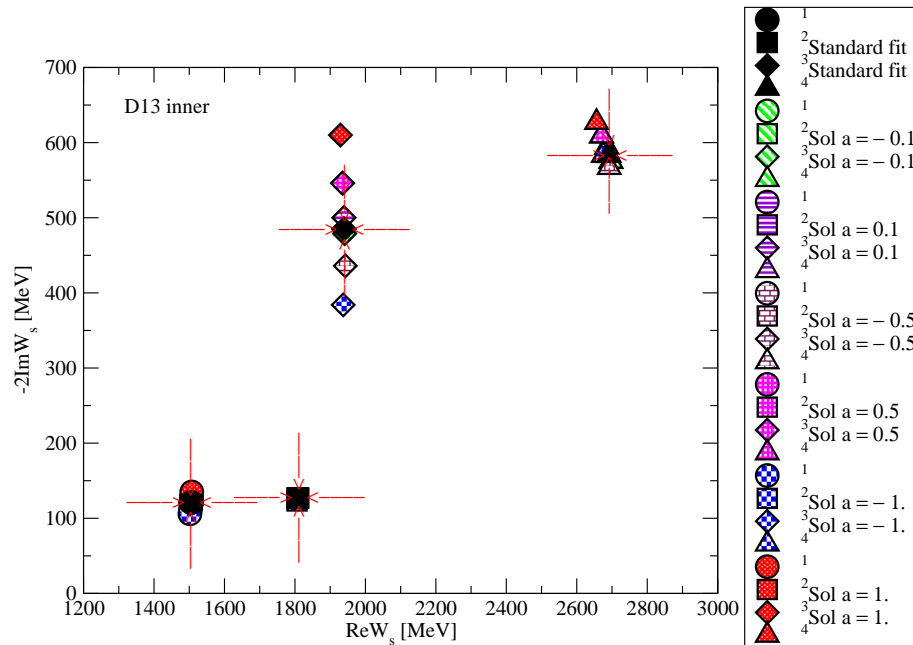
Slika 5.7: Realni i imaginarni dio kanalnog propagatora dobiveni promjenom unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora za S_{11} , P_{11} i D_{13} parcijalne valove u efektivnom kanalu ($\pi N \rightarrow \pi^2 N$).



Slika 5.8: Položaji obučenih polova za S_{11} parcijalni val dobiveni promjenom unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora. Promjena je ista za sva tri fitana kanala.



Slika 5.9: Položaji obučenih polova za P_{11} parcijalni val dobijeni promjenom unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora. Promjena je ista za sva tri fitana kanala.



Slika 5.10: Položaji obučenih polova za D_{13} parcijalni val dobijeni promjenom unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora. Promjena je ista za sva tri fitana kanala.

Tablica 5.5: Goli i obučeni T -matični polovi za S_{11} parcijalni val dobiveni koristeći različita rješenja kanalnog propagatora. Izvršena je promjena unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora i ista je za sva tri korištena kanala.

	Goli polovi			Obučeni polovi			χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
	MeV			MeV			
Sol $a = -1.0$	1522	1640	1837	$\begin{pmatrix} 1505 \\ 176 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1636 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1773 \\ 394 \end{pmatrix}$	1.198
Sol $a = -0.5$	1523	1641	1835	$\begin{pmatrix} 1512 \\ 181 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1640 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1776 \\ 418 \end{pmatrix}$	1.048
Sol $a = -0.1$	1523	1640	1834	$\begin{pmatrix} 1516 \\ 188 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 207 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1779 \\ 424 \end{pmatrix}$	1.031
Standard fit	1523	1640	1834	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1779 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.016
Sol $a = 0.1$	1523	1640	1834	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 207 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1780 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.037
Sol $a = 0.5$	1523	1639	1833	$\begin{pmatrix} 1522 \\ 190 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1644 \\ 207 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1782 \\ 433 \end{pmatrix}$	1.062
Sol $a = 1.0$	1523	1638	1831	$\begin{pmatrix} 1524 \\ 187 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1645 \\ 210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1783 \\ 445 \end{pmatrix}$	1.105

Tablica 5.6: Goli i obučeni T -matični polovi za P_{11} parcijalni val dobiveni koristeći različita rješenja kanalnog propagatora. Izvršena je promjena unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora i ista je za sva tri korištena kanala.

	Goli polovi				Obučeni polovi				χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	W_{s_4}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
	MeV				MeV				
Sol $a = -1.0$	1603	1772	2181	2929	$\begin{pmatrix} 1367 \\ 139 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1711 \\ 160 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1736 \\ 139 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2105 \\ 304 \end{pmatrix}$	1.137
Sol $a = -0.5$	1606	1772	2182	2874	$\begin{pmatrix} 1367 \\ 141 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1710 \\ 170 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1733 \\ 137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2111 \\ 328 \end{pmatrix}$	0.971
Sol $a = -0.1$	1606	1772	2182	2849	$\begin{pmatrix} 1359 \\ 161 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2115 \\ 345 \end{pmatrix}$	0.955
Standard fit	1607	1772	2182	2841	$\begin{pmatrix} 1365 \\ 157 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2117 \\ 345 \end{pmatrix}$	0.958
Sol $a = 0.1$	1606	1772	2182	2796	$\begin{pmatrix} 1367 \\ 168 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1711 \\ 168 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1732 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2115 \\ 338 \end{pmatrix}$	1.001
Sol $a = 0.5$	1607	1772	2184	2811	$\begin{pmatrix} 1369 \\ 173 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1707 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1730 \\ 135 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2121 \\ 343 \end{pmatrix}$	0.973
Sol $a = 1.0$	1607	1772	2186	2784	$\begin{pmatrix} 1374 \\ 169 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1707 \\ 175 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1730 \\ 135 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2127 \\ 362 \end{pmatrix}$	0.995

Tablica 5.7: Goli i obučeni T -matični polovi za D_{13} parcijalni val dobiveni koristeći različita rješenja kanalnog propagatora. Izvršena je promjena unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora i ista je za sva tri korištena kanala.

	Goli polovi			Obučeni polovi				χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
	<i>MeV</i>			<i>MeV</i>				
Sol $a = -1$.	1578	1881	2503	$\begin{pmatrix} 1502 \\ 106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1806 \\ 123 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1937 \\ 384 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2675 \\ 583 \end{pmatrix}$	1.396
Sol $a = -0.5$	1579	1881	2500	$\begin{pmatrix} 1504 \\ 113 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 125 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1943 \\ 436 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2692 \\ 567 \end{pmatrix}$	1.087
Sol $a = -0.1$	1581	1880	2498	$\begin{pmatrix} 1505 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1941 \\ 479 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2697 \\ 575 \end{pmatrix}$	1.027
Standard fit	1582	1880	2499	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1939 \\ 485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2691 \\ 583 \end{pmatrix}$	1.027
Sol $a = 0.1$	1582	1879	2497	$\begin{pmatrix} 1505 \\ 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1939 \\ 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2685 \\ 594 \end{pmatrix}$	1.032
Sol $a = 0.5$	1584	1878	2495	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1935 \\ 546 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2670 \\ 609 \end{pmatrix}$	1.084
Sol $a = 1.0$	1585	1876	2493	$\begin{pmatrix} 1507 \\ 135 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1811 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1929 \\ 610 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2656 \\ 627 \end{pmatrix}$	1.183

Analizom dobivenih rezultata zapažamo sljedeće:

1. Jaka promjena imaginarnog dijela kanalnog propagatora se preko disperzione relacije (4.11) prenosi na realni dio kanalnog propagatora, uzrokujući suprotan efekt za S_{11} val i kombinirani efekt za ostale parcijalne valove.
2. Goli polovi su stabilni obzirom na promjenu unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora. Položaji obučenih polova su nešto malo promjenjeni (Tabele 5.5-5.7). Promjena je izraženija u širini rezonance.
3. Obučeni polovi se mogu klasificirati u dvije kategorije:
 - a) Polove čiji položaji slabo ovise o jakoj promjeni unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora - stabilni polovi
 $S_{11}(1518)$, $S_{11}(1642)$, $P_{11}(1731)$, $D_{13}(1506)$ i $D_{13}(1807)$.
 - b) Polove koji umjereno i uglavnom ovise o jakoj promjeni unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora - nestabilni polovi
 $S_{11}(1779)$, $P_{11}(1365)$, $P_{11}(1708)$, $P_{11}(2117)$, $D_{13}(1939)$ i $D_{13}(2691)$.
4. Možemo povezati kategoriju polova sa njihovom vlastitom energijom:
 - a) Za stabilne polove korekcija vlastite energije golim masama je mala.

- b) Za nestabilne polove, korekcija vlastite energije golim masama je ili jaka (kao što je kod $S_{11}(1779)$, $P_{11}(1731)$, $P_{11}(2117)$ i $D_{13}(2691)$), ili su polovi potpuno dinamički generirani što znači da u blizini nemaju odgovarajuće gole polove. (kao što su $P_{11}(1365)$ -Roper rezonanca i $D_{13}(1939)$).
5. Različita promjena položaja golih i obučenih polova može biti uzeta kao kriterij za pouzdanost određivanja položaja polova obzirom na jaku promjenu unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora. Ako je manja korekcija vlastite energije golim masama tada se dobiju stabilniji položaji polova.
6. Reducirani χ_R^2 kvantitativno predstavlja mjeru sposobnosti našeg modela da reproducira ulazne podatke (Tabele 5.5-5.7). Najmanji χ_R^2 je za nemodificirano rješenje. Drugim rječima, naš model lošije fita ulazne podatke kada se uvede bilo kakva promjena unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora.

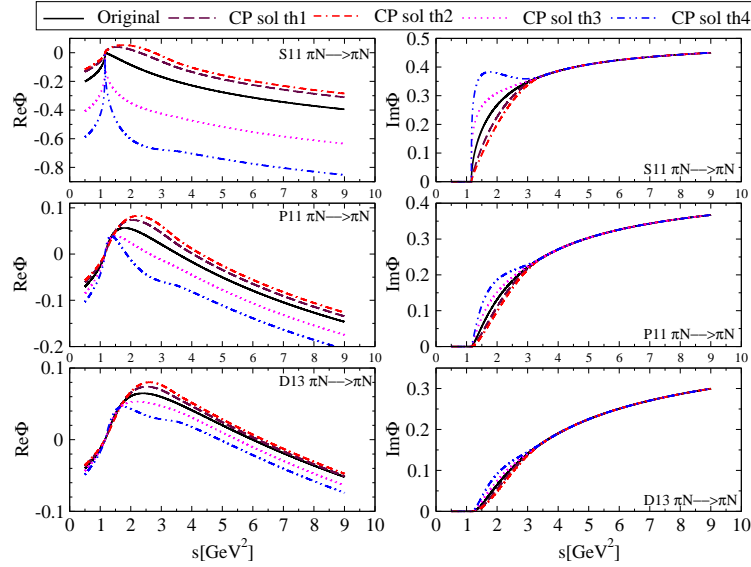
5.2.3 Ponašanje na pragu

U ovom dijelu naše analize, promjenjeno je ponašanje na pragu imaginarnog dijela kanalnog propagatora. Za vrijednosti $s > 3.5\text{GeV}^2$ kanalni propagator je ostao nepromjenjen. Ponašanje imaginarnog dijela kanalnog propagatora na pragu proporcionalno je sa q^{2L+1} . Obzirom na tu činjenicu jasno je da ćemo promijeniti to ponašanje ako pomnožimo imaginarni dio sa nekom potencijom od q . Korigirani imaginarni dio kanalnog propagatora je dat izrazom:

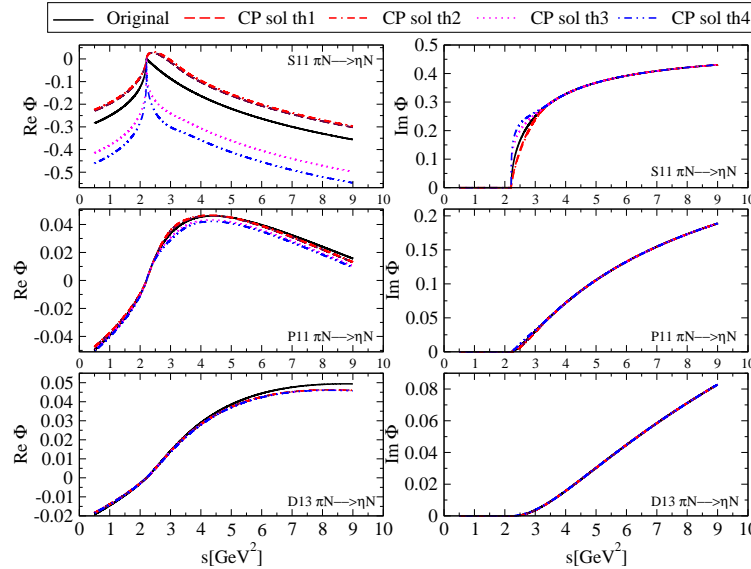
$$\text{Im}\Phi_{thcorr} = \text{Im}\Phi \cdot q_a^\lambda \cdot (a + b \cdot s + c \cdot s^2), \quad (5.5)$$

gdje je $\lambda = \pm 0.5$. Parametri a , b i c su određeni na takav način da se osigura neprekidnost imaginarnog dijela kanalnog propagatora i njegove derivacije za $s = 3.5\text{GeV}^2$. Realni dio kanalnog propagatora je izračunat koristeći disperzionu relaciju datu jednačinom (4.11).

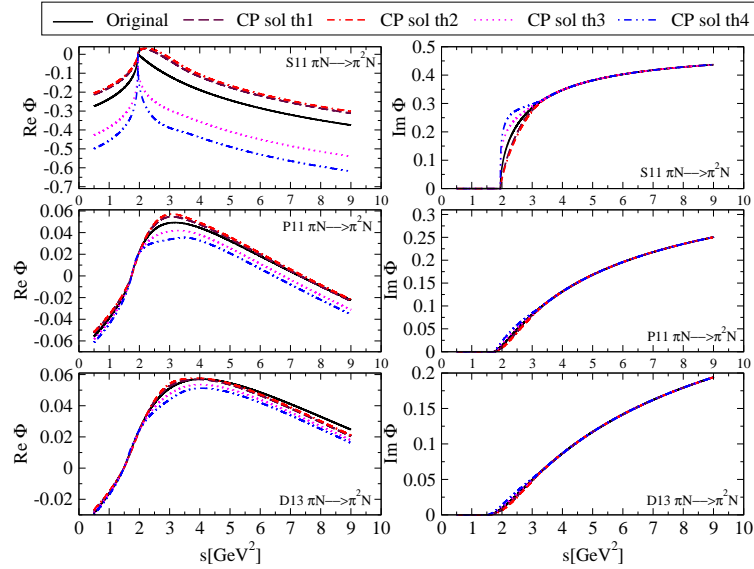
Kao što se vidi na slikama (5.11)-(5.13) ponašanje kanalnog propagatora na pragu je modificirano sa neprekidnom i proizvoljnom funkcijom datom jednačinom (5.5). Izabrali smo četiri mogućnosti (slučaja), dva koje ponašanje na pragu čine plićim (th1 i th2) i za preostala dva koja ga čine strmijim (th3 i th4).



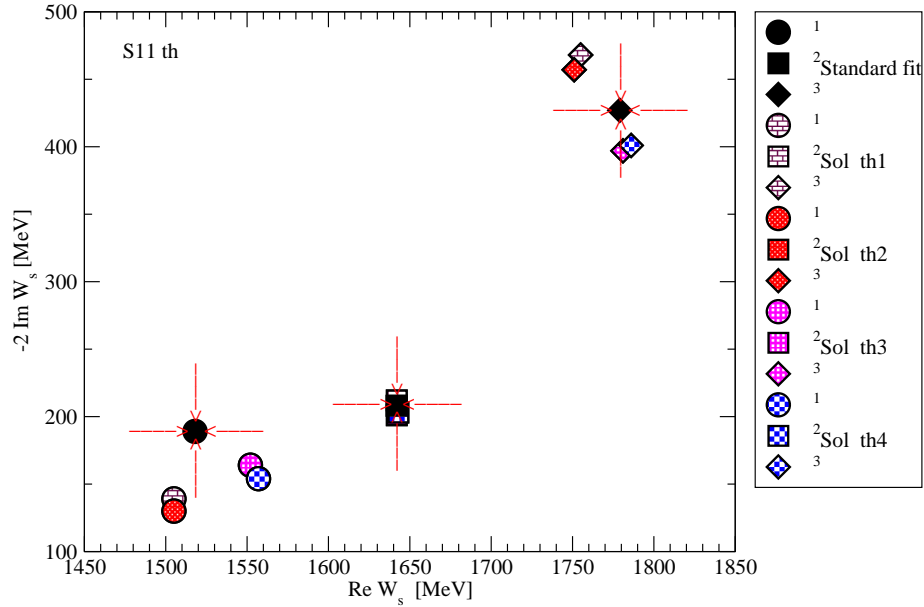
Slika 5.11: Imaginarni i realni dio kanalnog propagatora za elastični kanal ($\pi N \rightarrow \pi N$). Ponašanje na pragu. Sol th1: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot \sqrt{q}(a + cs^2)$, Sol th2: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot \sqrt{q}(a + 0.5s + cs^2)$, Sol th3: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot (\frac{1}{\sqrt{q}})(a + cs^2)$, Sol th4: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot (\frac{1}{\sqrt{q}})(a - 0.5s + cs^2)$.



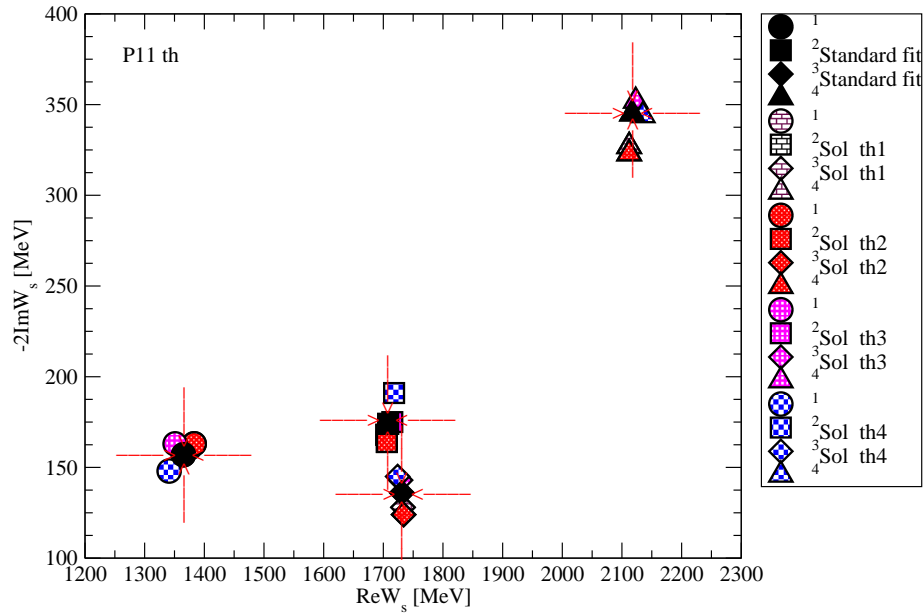
Slika 5.12: Imaginarni i realni dio kanalnog propagatora za neelastični kanal ($\pi N \rightarrow \eta N$). Ponašanje na pragu. Sol th1: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot \sqrt{q}(a + cs^2)$, Sol th2: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot \sqrt{q}(a + 0.5s + cs^2)$, Sol th3: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot (\frac{1}{\sqrt{q}})(a + cs^2)$, Sol th4: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot (\frac{1}{\sqrt{q}})(a - 0.5s + cs^2)$.



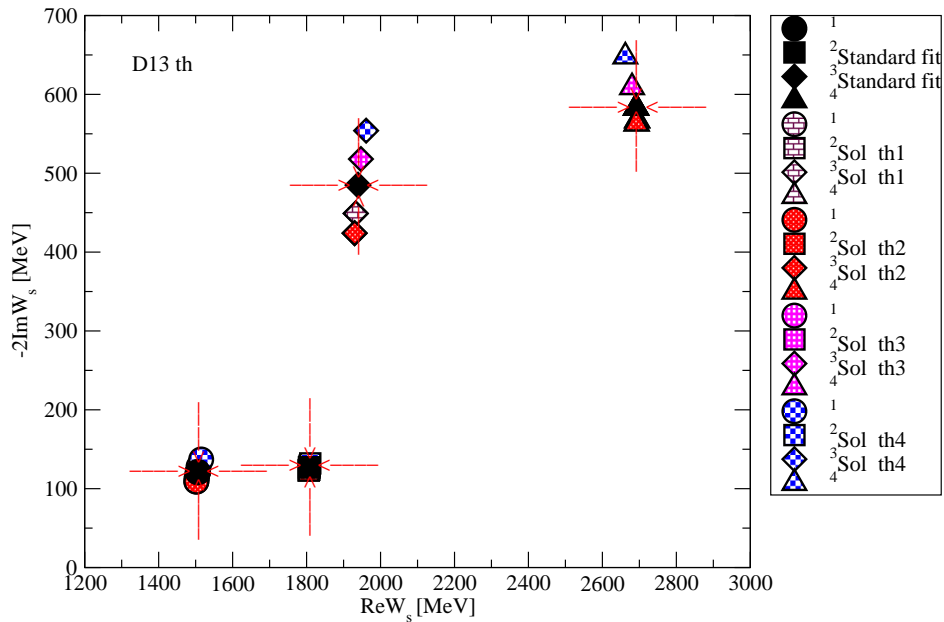
Slika 5.13: Imaginarni i realni dio kanalnog propagatora za efektivni kanal ($\pi N \rightarrow \pi^2 N$). Ponašanje na pragu. Sol th1: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot \sqrt{q}(a + cs^2)$, Sol th2: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot \sqrt{q}(a + 0.5s + cs^2)$, Sol th3: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot (\frac{1}{\sqrt{q}})(a + cs^2)$, Sol th4: $Im\Phi_{thcorr} = Im\Phi \cdot (\frac{1}{\sqrt{q}})(a - 0.5s + cs^2)$.



Slika 5.14: Položaji obučenih polova za S_{11} parcijalni val dobijeni korištenjem različitih rješenja kanalnog propagatora. Izvršena je promjena ponašanja kanalnog propagatora na pragu i modifikacija je ista za sva tri kanala.



Slika 5.15: Položaji obučenih polova za P_{11} parcijalni val dobijeni korištenjem različitih rješenja kanalnog propagatora. Izvršena je promjena ponašanja kanalnog propagatora na pragu i modifikacija je ista za sva tri kanala.



Slika 5.16: Položaji obučenih polova za D_{13} parcijalni val dobijeni korištenjem različitih rješenja kanalnog propagatora. Izvršena je promjena ponašanja kanalnog propagatora na pragu i modifikacija je ista za sva tri kanala.

Tablica 5.8: Goli i obučeni T -matični polovi za S_{11} parcijalni val dobiveni koristeći različita rješenja kanalnog propagatora. Izvršena je promjena ponašanja kanalnog propagatora na pragu i ista je za sva tri korištena kanala.

	Goli polovi			Obučeni polovi			χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
	MeV			MeV			
Standard fit	1523	1640	1834	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1779 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.016
Sol th1	1551	1673	1899	$\begin{pmatrix} 1505 \\ 139 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 212 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1755 \\ 468 \end{pmatrix}$	1.289
Sol th2	1557	1683	1915	$\begin{pmatrix} 1505 \\ 130 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1751 \\ 457 \end{pmatrix}$	1.372
Sol th3	1477	1575	1728	$\begin{pmatrix} 1552 \\ 164 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 212 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1781 \\ 397 \end{pmatrix}$	1.409
Sol th4	1453	1540	1678	$\begin{pmatrix} 1557 \\ 154 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1643 \\ 203 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1786 \\ 401 \end{pmatrix}$	1.587

Tablica 5.9: Goli i obučeni T -matični polovi za P_{11} parcijalni val dobiveni koristeći različita rješenja kanalnog propagatora. Izvršena je promjena ponašanja kanalnog propagatora na pragu i ista je za sva tri korištena kanala.

	Goli polovi				Obučeni polovi				χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	W_{s_4}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
	MeV				MeV				
Standard fit	1607	1772	2182	2841	$\begin{pmatrix} 1365 \\ 157 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2117 \\ 345 \end{pmatrix}$	0.957
Sol th1	1629	1780	2192	2802	$\begin{pmatrix} 1376 \\ 161 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1705 \\ 168 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1733 \\ 128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2112 \\ 327 \end{pmatrix}$	1.157
Sol th2	1639	1784	2196	2801	$\begin{pmatrix} 1383 \\ 163 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1706 \\ 164 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1734 \\ 124 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2112 \\ 323 \end{pmatrix}$	1.335
Sol th3	1572	1763	2174	2712	$\begin{pmatrix} 1351 \\ 163 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1715 \\ 175 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1729 \\ 143 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2123 \\ 352 \end{pmatrix}$	1.010
Sol th4	1534	1753	2168	2546	$\begin{pmatrix} 1341 \\ 148 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1718 \\ 191 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1724 \\ 145 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2135 \\ 344 \end{pmatrix}$	1.274

Tablica 5.10: Goli i obučeni T -matični polovi za D_{13} parcijalni val dobiveni koristeći različita rješenja kanalnog propagatora. Izvršena je promjena ponašanja kanalnog propagatora na pragu i ista je za sva tri korištena kanala.

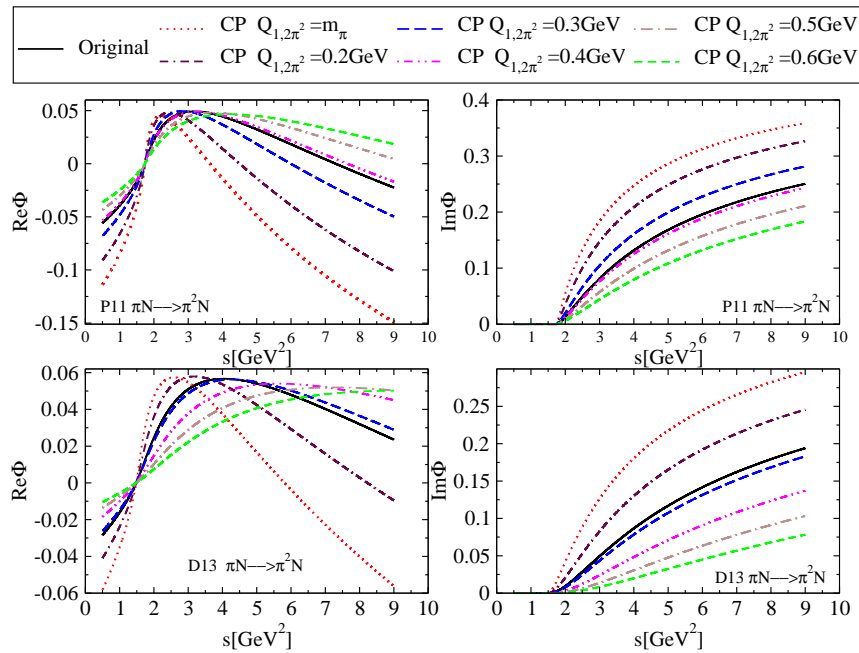
	Goli polovi			Obučeni polovi				χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
	<i>MeV</i>			<i>MeV</i>				
Standard fit	1582	1880	2499	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1939 \\ 485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2691 \\ 583 \end{pmatrix}$	1.027
Sol th1	1589	1881	2500	$\begin{pmatrix} 1503 \\ 114 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 124 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1933 \\ 449 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2694 \\ 567 \end{pmatrix}$	1.057
Sol th2	1593	1882	2505	$\begin{pmatrix} 1502 \\ 109 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1806 \\ 123 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1930 \\ 424 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2692 \\ 563 \end{pmatrix}$	1.148
Sol th3	1573	1875	2481	$\begin{pmatrix} 1508 \\ 128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 129 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1947 \\ 518 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2680 \\ 609 \end{pmatrix}$	1.119
Sol th4	1563	1871	2468	$\begin{pmatrix} 1515 \\ 137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1810 \\ 132 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1961 \\ 554 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2662 \\ 648 \end{pmatrix}$	1.363

Analizom dobivenih vrijednosti za gole i obučene polove pri promjeni kanalnog propagatora u blizini praga, zaključujemo:

1. Velika promjena imaginarnog dijela kanalnog propagatora na pragu se prenosi preko disperzione relacije (4.11) na realni dio, uzrokujući značajnu promjenu realnog dijela kanalnog propagatora u cijeloj energijskoj oblasti.
2. Suprotno prethodnom slučaju, kada je analizirana promjena unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora, goli polovi se značajno promjene za sve parcijalne valove.
3. Obučeni polovi pokušavaju kompenzirati jako pomjeranje golih polova, ali ne uvijek uspješno.
4. Uz neke slučajne iznimke, položaji svih obučenih polova se značajno promjene.
5. Reducirani χ_R^2 , kvantitativno predstavlja mjeru sposobnosti našeg modela da reproducira ulazne podatke i najmanji je za nemodificirano rješenje (Tabele 5.8-5.10). Drugim rječima, naš model lošije fita ulazne podatke kada se promjeni ponašanje kanalnog propagatora na pragu.
6. Korektno ponašanje kanalnog propagatora na pragu je bitno za upotrebljivost CMB modela.

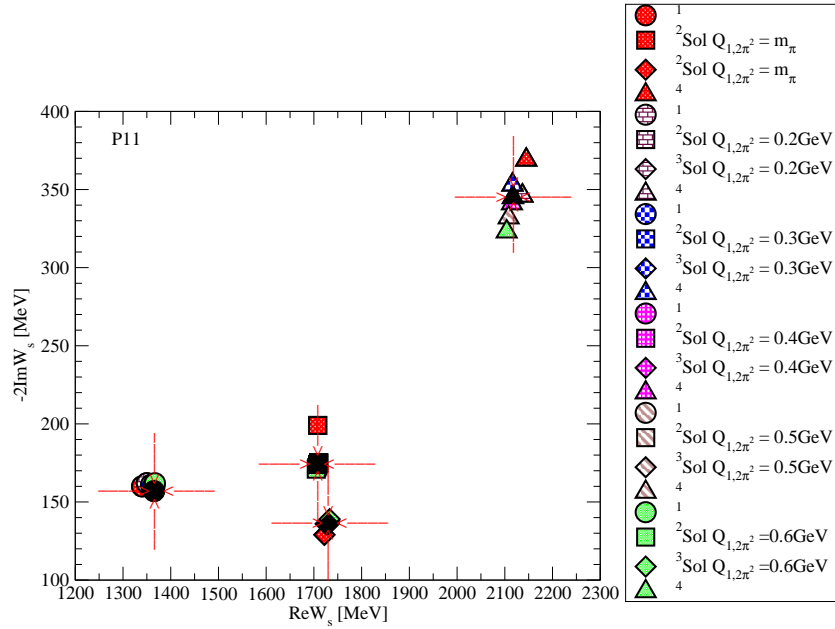
5.2.4 Cut off parametri

U ovom dijelu analize, form faktor efektivnog kanala je promijenjen izmjenom parametara Q_{1EF} i Q_{2EF} . U originalnom (ne promjenjenom) kanalnom propagatoru, ovi parametri imaju vrijednosti 0.380GeV za P_{11} val i 0.280GeV za D_{13} val. Vrijednost form faktora za S_{11} val je jednaka jedinici obzirom da je orbitalni angularni moment L jednak nuli (vidjeti jednačinu (4.3)). Parametri Q_{1EF} i Q_{2EF} nam govore koliko brzo se efektivni kanal otvara. Cutkosky [26] je u svojoj analizi uzeo za sve kanale da su parametri Q_{1a} i Q_{2a} jednaki masi piona (a je odgovarajući kanal). Originalni parametri Q_{1EF} i Q_{2EF} u našem slučaju ovise o parcijanom valu, a određeni su koristeći Argandov dijagram. Naime, na Argandovom dijagramu se nacrtala realni i imaginarni dio parcijalnog vala i na mjestu gdje se Argandov dijagram odvajala od unitarne kružnice kazemo da imamo otvaranje neelastičnog kanala. Promjena kanalnog propagatora efektivnog kanala za P_{11} i D_{13} parcijalne valove data je na slici (5.17).

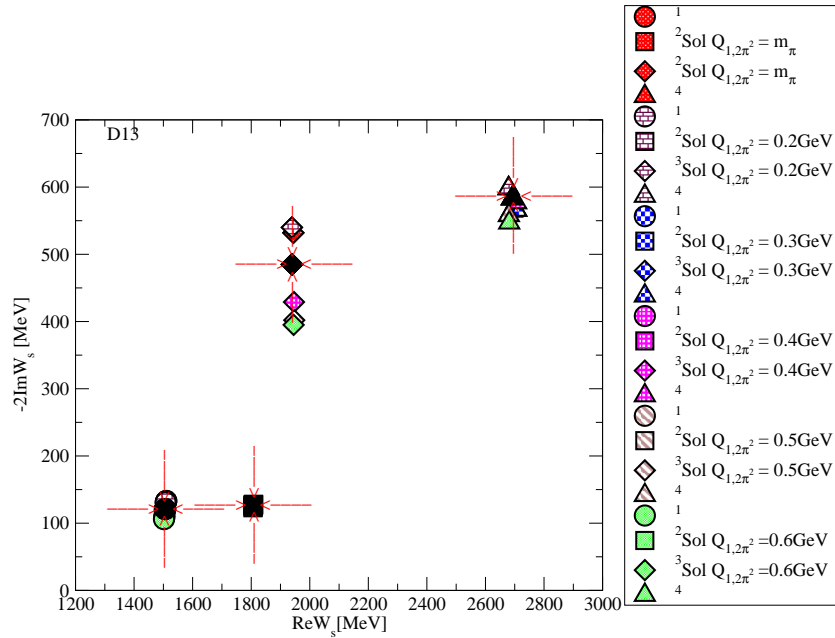


Slika 5.17: Realni i imaginarni dio kanalnog propagatora za P_{11} i D_{13} parcijalne valove dobivene promjenom cutt-off parametara u efektivnom kanalu.

Kao što se vidi na slici (5.17) promjena cut off parametara Q_{EF} u form faktoru efektivnog kanala zapravo mijenja nagib imaginarnog dijela kanalnog propagatora.



Slika 5.18: Položaji obučenih polova za P_{11} parcijalni val dobiveni promjenom cut-off parametara u efektivnom kanalu.



Slika 5.19: Položaji obučenih polova za D_{13} parcijalni val dobiveni promjenom cut-off parametara u efektivnom kanalu.

Tablica 5.11: Goli i obučeni polovi T matrice za P_{11} parcijalni val dobiveni promjenom parametara Q_{1EF} i Q_{2EF} u form faktoru efektivnog kanala.

	Goli polovi				Obučeni polovi				χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	W_{s_4}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
Sol $m = m_\pi$	1575	1757	2202	2405	$\begin{pmatrix} 1340 \\ 160 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 199 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1722 \\ 129 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2145 \\ 369 \end{pmatrix}$	1.504
Sol $m = 0.2$	1584	1762	2190	2480	$\begin{pmatrix} 1350 \\ 162 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1710 \\ 180 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1725 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2137 \\ 346 \end{pmatrix}$	1.098
Sol $m = 0.3$	1598	1768	2185	2684	$\begin{pmatrix} 1359 \\ 161 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1710 \\ 175 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1729 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2116 \\ 353 \end{pmatrix}$	0.974
Standard fit $m = 0.380$	1607	1772	2182	2841	$\begin{pmatrix} 1365 \\ 157 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2117 \\ 345 \end{pmatrix}$	0.958
Sol $m = 0.4$	1608	1773	2181	2878	$\begin{pmatrix} 1364 \\ 161 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 173 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2115 \\ 341 \end{pmatrix}$	0.959
Sol $m = 0.5$	1616	1777	2179	3059	$\begin{pmatrix} 1366 \\ 160 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1706 \\ 172 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1732 \\ 138 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2108 \\ 332 \end{pmatrix}$	0.983
Sol $m = 0.6$	1621	1781	2176	3237	$\begin{pmatrix} 1367 \\ 162 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1705 \\ 171 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1733 \\ 139 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2104 \\ 323 \end{pmatrix}$	1.021

Tablica 5.12: Goli i obučeni polovi T matrice za D_{13} parcijalni val dobiveni promjenom parametara Q_{1EF} i Q_{2EF} u form faktoru efektivnog kanala.

	Goli polovi			Obučeni polovi				χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
Sol $m = m_\pi$	1564	1862	2411	$\begin{pmatrix} 1510 \\ 133 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1944 \\ 532 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2690 \\ 565 \end{pmatrix}$	1.307
Sol $m = 0.2$	1572	1869	2453	$\begin{pmatrix} 1508 \\ 131 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 126 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1939 \\ 540 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2679 \\ 598 \end{pmatrix}$	1.152
Standard fit $m = 0.280$	1582	1880	2499	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1939 \\ 485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2691 \\ 583 \end{pmatrix}$	1.027
Sol $m = 0.3$	1584	1882	2507	$\begin{pmatrix} 1505 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1940 \\ 485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2705 \\ 566 \end{pmatrix}$	1.027
Sol $m = 0.4$	1598	1892	2547	$\begin{pmatrix} 1504 \\ 112 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 124 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1946 \\ 429 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2705 \\ 577 \end{pmatrix}$	1.095
Sol $m = 0.5$	1641	1901	2575	$\begin{pmatrix} 1503 \\ 108 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1806 \\ 123 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1947 \\ 402 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2680 \\ 558 \end{pmatrix}$	1.187
Sol $m = 0.6$	1628	1909	2597	$\begin{pmatrix} 1502 \\ 106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 125 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1945 \\ 395 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2681 \\ 547 \end{pmatrix}$	1.259

Na osnovu grafika i tabela zaključujemo sljedeće:

1. Promjena imaginarnog dijela kanalnog propagatora se preko disperzione relacije (4.11) prenosi na realni dio, uzrokujući značajnu promjenu realnog dijela u kompletnoj energijskoj oblasti.
2. Iz Tabela 5.11 i 5.12 vidimo da se goli polovi značajno promjene pri promjeni Cut-off parametara, dok je promjena položaja obučenih polova manje izražena.
3. Obučeni polovi se mogu klasificirati u dvije kategorije:
 - a) Polovi čiji se položaji slabo (malo) promjene pri jakoj promjeni cut-off parametara
 $P_{11}(1731)$, $D_{13}(1506)$ i $D_{13}(1807)$
 - b) Polovi čiji položaji polova ovise o promjeni cut-off parametara
 $P_{11}(1365)$, $P_{11}(1708)$, $P_{11}(2117)$ i $D_{13}(2691)$.
4. Možemo povezati (dovesti u kontekst) polove i njihove vlastite energije:
 - a) Za stabilne polove korekcija vlastite energije golim masama je manja nego za running poles.
 - b) Za nestabilne polove korekcija vlastite energije golim masama je jaka, posebno za polove ($P_{11}(2117)$ i $D_{13}(2691)$). Polovi koji su dinamički generirani nemaju uopće odgovarajuće gole mase (kao što je $P_{11}(1365)$ i $D_{13}(1939)$).
5. Promjena položaja golih i obučenih polova može biti uzeta kao kriterij za pouzdanost određivanja položaja polova obzirom na jaku promjenu unutrašnjeg dijela kanalnog propagatora. Možemo reći ako je manja korekcija vlastite energije golim masama tada se dobiju stabilniji položaji polova.
6. Kao što se može vidjeti u Tabelama 5.11 i 5.12, reducirani χ_R^2 , kvantitativno predstavlja mjeru sposobnosti našeg modela da reproducira ulazne podatke (input data) i najmanji je za nemodificirano rješenje. Drugim rječima, naš model će lošije fitati ulazne podatke kada se promjene cut-off parametri u form faktoru (4.3) efektivnog kanala.

5.3 Parametrizacija pozadinskog doprinosa

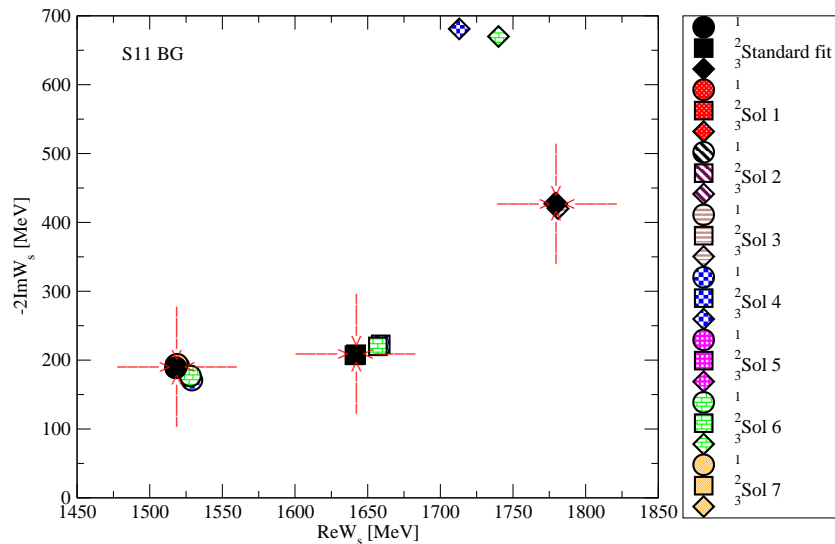
U primjeni CMB modela pretpostavljamo da se gladak energijski ovisan pozadinski doprinos može opisati sa dva pola izvan fizikalne oblasti. U našem slučaju dva pola ispod praga πN raspršenja. U ovom dijelu analize stabilnosti CMB modela tražimo odgovor na pitanja:

1. Jesu li dva pola u nefizikalnoj oblasti ispod praga πN raspršenja dovoljna za opis polova?
2. Da li dodavanje dodatnih polova ispod praga πN raspršenja ili dodavanje dalekih polova u fizikalnoj oblasti dovodi do značajne promjene položaja polova.

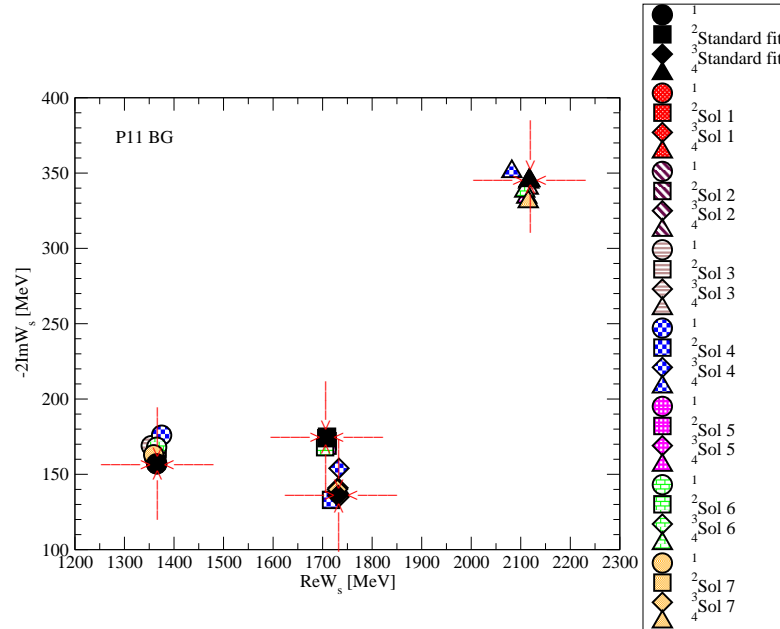
Analizu ovisnosti predikcija CMB modela o opisu pozadinskih doprinosa uradili smo na sljedeći način:

1. U nefizikalnoj oblasti, ispod praga πN raspršenja, dodali smo prvo jedan pol, a zatim dva pola različitih predznaka. Dodavali smo pozadinske polove koji predstavljaju i privlačni i odbojni potencijal.
2. U fizikalnoj oblasti, daleko iznad oblasti gdje leže rezonance, dodali smo po jedan a zatim i dva pozadinska pola sa različitim predznacima.

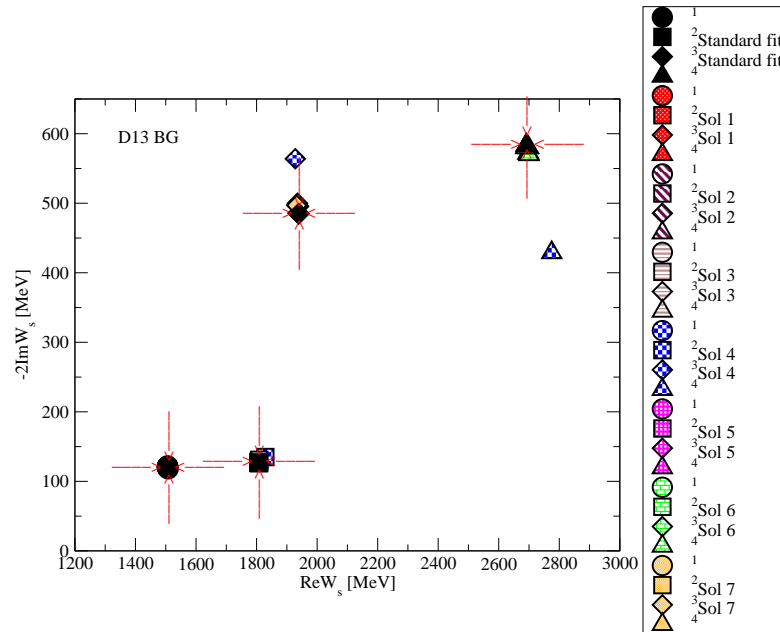
Rezultati analize prikazani su na Slikama 5.20-5.22 i Tabelama 5.13-5.15.



Slika 5.20: Položaji obučenih polova za S_{11} parcijalni val dobiveni različitom kombinacijom pozadinskih polova.



Slika 5.21: Položaji obučeni polova za P_{11} parcijalni val dobiveni različitom kombinacijom pozadinskih polova.



Slika 5.22: Položaji obučeni polova za D_{13} parcijalni val dobiveni različitom kombinacijom pozadinskih polova.

Tablica 5.13: Goli i obučeni polovi T matrice za S_{11} parcijalni val dobiveni dodavanjem pozadinskih polova ispod i iznad fizikalne oblasti.

	Goli polovi			Obučeni polovi			χ_R^2
	$B1$ $B2$ GeV^2	$B3$ $B4$ GeV^2	s_1 s_2 s_3 MeV	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
Standard fit	-1.256 0.210(459)		1523 1640 1834	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1779 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.016
Sol 1 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = +1(Ispod)$	-1.382 0.460(679)	-1.851	1523 1640 1835	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1779 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.016
Sol 2 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = -1(Ispod)$	-2.508 -6.794	0.419(647)	1523 1640 1834	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1780 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.019
Sol 3 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = -1(Ispod)$ $e4 = +1(Below)$	-0.0049 0.103(322)	-1.078 -0.0024	1523 1640 1835	$\begin{pmatrix} 1520 \\ 191 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1641 \\ 207 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1781 \\ 420 \end{pmatrix}$	1.019
Sol 4 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Iznad)$	-46594 36.17(6015)		1525 1646 1844	$\begin{pmatrix} 1529 \\ 171 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1659 \\ 223 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1713 \\ 681 \end{pmatrix}$	2.461
Sol 5 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = +1(Iznad)$	-1.694 0.344(587)	7536(75742)	1523 1640 1834	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 193 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1779 \\ 428 \end{pmatrix}$	1.018
Sol 6 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Iznad)$ $e3 = +1(Iznad)$	-7725 12.85(3586)	12.80(3578)	1525 1645 1844	$\begin{pmatrix} 1528 \\ 177 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1657 \\ 220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1740 \\ 670 \end{pmatrix}$	2.211
Sol 7 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = -1(Iznad)$ $e4 = +1(Iznad)$	-1.897 0.410(640)	51.69(7190) 73.95(8600)	1523 1640 1835	$\begin{pmatrix} 1519 \\ 194 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1641 \\ 207 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1780 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.018

Tablica 5.14: Goli i obučeni polovi T matrice za P_{11} parcijalni val dobiveni dodavanjem pozadinskih polova ispod i iznad fizikalne oblasti.

	Goli polovi				Obučeni polovi				χ_R^2
	$B1$ $B2$ GeV^2	$B3$ $B4$ GeV^2	W_{s_1} W_{s_2} W_{s_3} W_{s_4} MeV	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$		
Standard fit	0.814(902) 0.9886(993)		1607 1772 2182 2841	$\begin{pmatrix} 1365 \\ 157 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2117 \\ 345 \end{pmatrix}$	0.958	
Sol 1 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = +1(Ispod)$	0.749(866) 0.945(972)	0.928(963)	1606 1772 2181 2859	$\begin{pmatrix} 1364 \\ 162 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2116 \\ 344 \end{pmatrix}$	0.964	
Sol 2 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = -1(Ispod)$	0.612(782) -11285	1.241(1114)	1606 1772 2180 2816	$\begin{pmatrix} 1361 \\ 161 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1709 \\ 172 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1730 \\ 138 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2118 \\ 345 \end{pmatrix}$	0.960	
Sol 3 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = +1(Ispod)$ $e4 = -1(Ispod)$	0.530(728) 1.145(1070)	0.668(817) 0.195(442)	1605 1772 2177 2859	$\begin{pmatrix} 1354 \\ 169 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1710 \\ 172 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 141 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2115 \\ 340 \end{pmatrix}$	0.957	
Sol 4 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Iznad)$	0.030(174) 95.24(9759)		1597 1768 2207 3508	$\begin{pmatrix} 1375 \\ 176 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1717 \\ 133 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1733 \\ 154 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2082 \\ 351 \end{pmatrix}$	2.696	
Sol 5 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = +1(Iznad)$	0.354(595) 0.351(593)	$0.961 \cdot 10^{10}$	1606 1772 2182 2801	$\begin{pmatrix} 1364 \\ 165 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1710 \\ 169 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1732 \\ 137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2112 \\ 334 \end{pmatrix}$	1.010	
Sol 6 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = +1(Iznad)$	0.169(411) 79.84(8936)	1746(41788)	1606 1773 2201 2860	$\begin{pmatrix} 1365 \\ 168 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1705 \\ 168 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1733 \\ 135 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2108 \\ 338 \end{pmatrix}$	1.019	
Sol 7 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = -1(Iznad)$ $e4 = +1(Iznad)$	0.793(890) 0.885(941)	33.64(5800) 5954(77165)	1606 1773 2177 2901	$\begin{pmatrix} 1359 \\ 163 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1709 \\ 175 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1730 \\ 140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2115 \\ 331 \end{pmatrix}$	0.956	

Tablica 5.15: Goli i obučeni polovi T matrice za D_{13} parcijalni val dobiveni dodavanjem pozadinskih polova ispod i iznad fizikalne oblasti.

	Goli polovi			Obučeni polovi				χ^2_R
	$B1$ $B2$ GeV^2	$B3$ $B4$ GeV^2	W_{s1} W_{s2} W_{s3} MeV	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
Standard fit	0.729(854) -14628.0		1582 1880 2499	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1939 \\ 485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2691 \\ 583 \end{pmatrix}$	1.027
Sol 1 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = +1(Ispod)$	-0.254 -254	1.077 (1037)	1582 1882 2500	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1937 \\ 486 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2699 \\ 572 \end{pmatrix}$	1.019
Sol 2 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = -1(Ispod)$	0.669(818) -12317	0.677 (823)	1582 1879 2498	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 122 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1938 \\ 495 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2698 \\ 580 \end{pmatrix}$	1.038
Sol 3 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = +1(Ispod)$ $e4 = -1(Ispod)$	0.446(669) 0.310(557)	0.201(449) -109.7	1583 1884 2499	$\begin{pmatrix} 1505 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1934 \\ 498 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2696 \\ 572 \end{pmatrix}$	1.034
Sol 4 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Iznad)$	-0.89 · 10 ⁷ 15.839(3980)		1577 1880 2507	$\begin{pmatrix} 1508 \\ 118 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1829 \\ 135 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1928 \\ 564 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2775 \\ 429 \end{pmatrix}$	2.142
Sol 5 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = +1(Iznad)$	0.517(719) -10037	0.1 · 10 ⁹	1582 1879 2498	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 122 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1938 \\ 496 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2698 \\ 580 \end{pmatrix}$	1.039
Sol 6 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Iznad)$ $e3 = +1(Iznad)$	$\frac{1.125(1061)}{6626(81405)}$	220 (14853)	1581 1880 2498	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1809 \\ 131 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1935 \\ 500 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2700 \\ 570 \end{pmatrix}$	1.0349
Sol 7 $e1 = +1(Ispod)$ $e2 = -1(Ispod)$ $e3 = -1(Iznad)$ $e4 = +1(Iznad)$	0.564(751) 0.563(750)	90.68(9523) 656.6(25628)	1583 1899 2500	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 119 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 126 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1933 \\ 497 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2689 \\ 580 \end{pmatrix}$	1.038

Iz tabela (5.13-5.15) i slika (5.20-5.22) vidimo da su dobiveni goli i obučeni polovi praktično identični izuzev rješenja 4 i 6. U ovim rješenjima imamo samo jedan pol ispod praga. U standardnom CMB modelu pozadina je opisana sa dva pola ispod praga. U svim rješenjima osim 4 i 6 imamo dva pola ispod πN praga kao i u standardnom CMB modelu.

Dakle, zaključujemo da:

1. Najmanje dva pozadinska pola su neophodna za adekvatno predstavljanje energijski ovisne pozadine.
2. Dva pola ispod praga su dovoljna za adekvatnu reprezentaciju pozadine. Opravdana je aproksimacija pozadine sa dva meromorfna pola.

5.4 Broj kanala uključenih u model

Nije očito da uvođenje novih kanala, npr. novog doprinosa vlastite energije u nazivniku jednačine (4.12), ne utiče uopće na položaj polova. Naime, matrica vlastite energije je višeg reda, i vlastita energija je distribuirana na drugačiji način. Na postojeće procese $\pi N \rightarrow \pi N$ (elastični kanal) i $\pi N \rightarrow \eta N$ (eta kanal) dodali smo treći kanal koji se otvara na $W = 1612 MeV$ ($K\Lambda$ kanal)

Masa efektivnog kanala je ostala ista. Efektivni kanal opisuje doprinose neelastičnih kanala koji nisu uključeni pri ekstrakciji rezonantnih parametara. Novi neelastični $K\Lambda$ kanal koji smo uveli će preuzeti određeni doprinos efektivnog kanala.

Rezultati su dati u tabelama 5.16 - 5.18.

Tablica 5.16: Goli i obučeni polovi T matrice za S_{11} parcijalni val dobiveni uključivanjem tri i četiri kanala u modelu. Novi neelastični $K\Lambda$ kanal je uključen u model.

	Goli polovi			Obučeni polovi			χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
				MeV			
Sol 3CH	1523	1640	1834	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1779 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.016
Sol 4CH	1523	1640	1836	$\begin{pmatrix} 1516 \\ 190 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 211 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1776 \\ 418 \end{pmatrix}$	1.013

Tablica 5.17: Goli i obučeni polovi T matrice za P_{11} parcijalni val dobiveni uključivanjem tri i četiri kanala u modelu. Novi neelastični $K\Lambda$ kanal je uključen u model.

	Goli polovi				Obučeni polovi				χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	W_{s_4}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
					MeV				
Sol 3CH	1607	1772	2182	2841	$\begin{pmatrix} 1365 \\ 157 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2117 \\ 345 \end{pmatrix}$	0.958
Sol 4CH	1607	1772	2182	2841	$\begin{pmatrix} 1363 \\ 161 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2117 \\ 343 \end{pmatrix}$	0.970

Tablica 5.18: Goli i obučeni polovi T matrice za D_{13} parcijalni val dobiveni uključivanjem tri i četiri kanala u modelu. Novi neelastični $K\Lambda$ kanal je uključen u model.

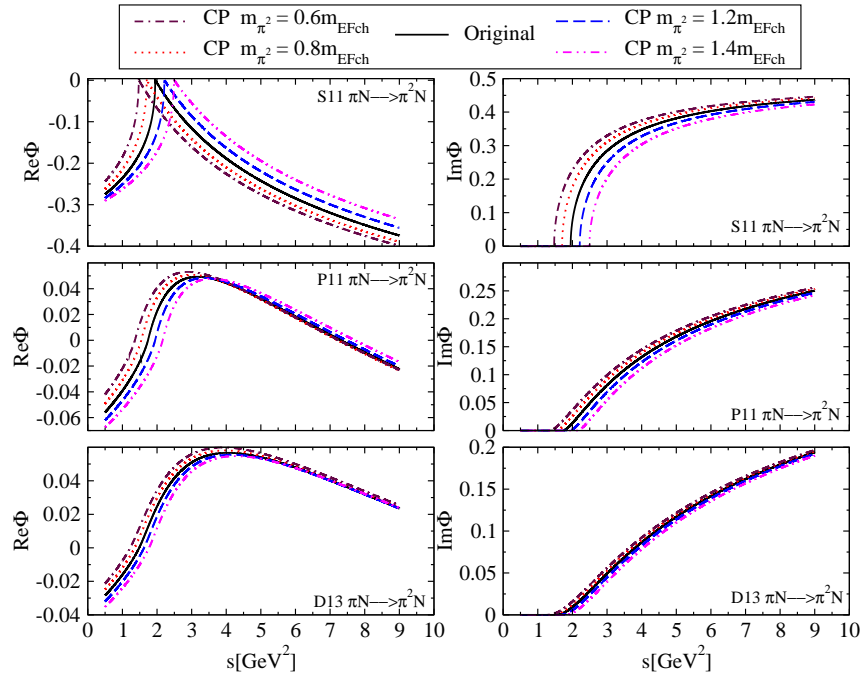
	Goli polovi			Obučeni polovi				χ^2_{R}
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
				MeV				
Sol 3CH	1582	1880	2499	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1939 \\ 485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2691 \\ 583 \end{pmatrix}$	1.027
Sol 4CH	1581	1890	2499	$\begin{pmatrix} 1500 \\ 169 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 131 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1944 \\ 492 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2689 \\ 586 \end{pmatrix}$	1.035

Na osnovu rezultata danih u tabelama 5.16-5.18 zaključujemo da su položaji polova jako stabilni.

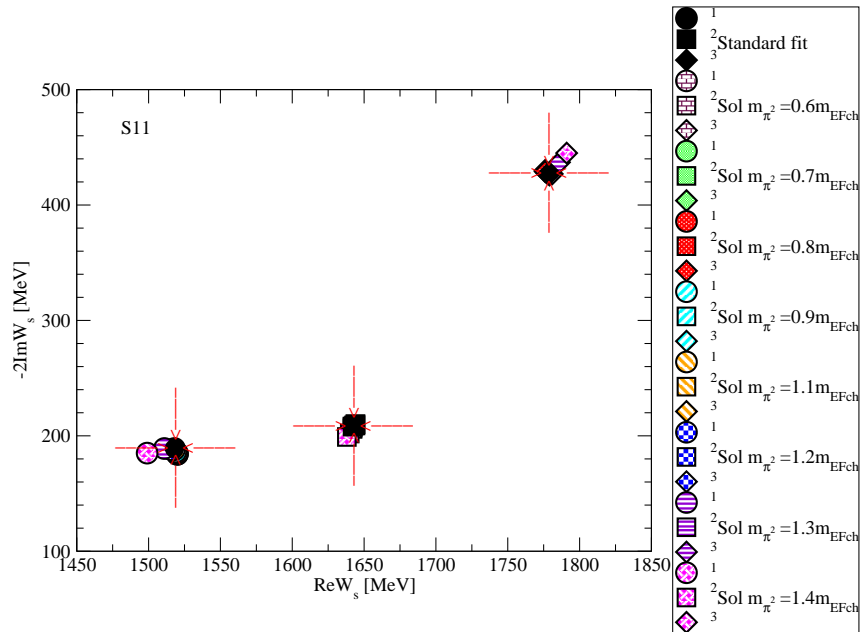
5.5 Masa efektivnog kanala

Uprkos traženju sličnosti sa ostalim testovima koje smo napravili u ovom radu, izbor mase efektivnog kanala podvrgnut je jakim fizikalnim ograničenjima:

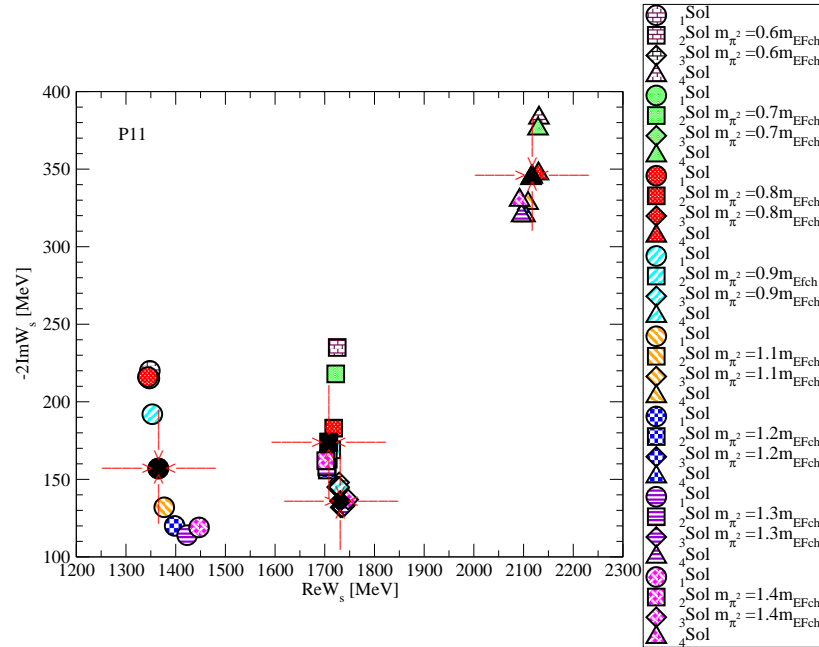
1. Obzirom da efektivni kanal predstavlja gubitak fluksa na sve neelastične kanale, njegova masa nemože biti niti previsoka niti preniska. Ako je masa efektivnog kanala previsoka, gubitak fluksa neelastičnih kanala nametnut prema podacima za energije ispod praga efektivnog kanala neće biti kompenziran sa trećim kanalom. U tom slučaju T-matrične vrijednosti će biti previsoke pri fitanju podataka. Ako su mase preniske, onda vještački otvaramo nove stepene slobode gdje oni zapravo ne postoje. Dakle, masa efektivnog kanala će biti precizno definisana sa svim neelastičnim kanalima.
2. Kada se promjeni masa efektivnog kanala, prag efektivnog kanala T-matrice se takođe pomjeri. Stoga, naš program će bezuspješno pokušavati da reproducira doprinose neelastičnih kanala koji su generirani sa različitim pragom, i pomjerit će rezonance.



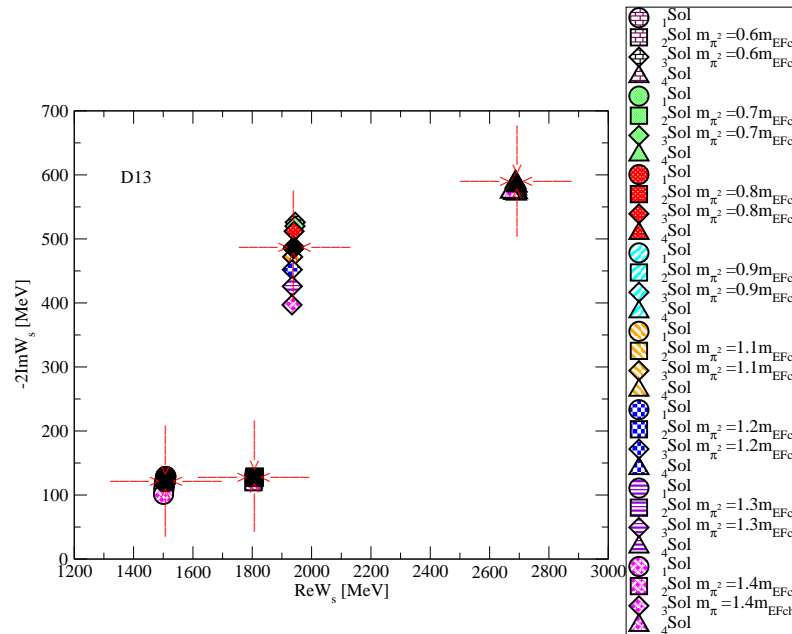
Slika 5.23: Imaginarni i realni dio kanalnog propagatora za efektivni kanal



Slika 5.24: Položaji obučenih polova za S11 parcijalni val dobijenih pri promjeni mase efektivnog kanala



Slika 5.25: Položaji obučenih polova za P_{11} parcijalni val dobivenih pri promjeni mase efektivnog kanala.



Slika 5.26: Položaji obučenih polova za D_{13} parcijalni val dobivenih pri promjeni mase efektivnog kanala.

Tablica 5.19: Goli i obučeni polovi T matrice za S_{11} parcijalni val dobiveni koristeći različite mase efektivnog kanala.

	Goli polovi			Obučeni polovi			χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
	<i>MeV</i>			<i>MeV</i>			
Sol $0.6m_{EF}$	1522	1637	1823	$\begin{pmatrix} 1520 \\ 184 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1644 \\ 210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1776 \\ 430 \end{pmatrix}$	1.028
Sol $0.7m_{EF}$	1523	1638	1825	$\begin{pmatrix} 1520 \\ 184 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1644 \\ 209 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1777 \\ 430 \end{pmatrix}$	1.024
Sol $0.8m_{EF}$	1523	1638	1827	$\begin{pmatrix} 1520 \\ 185 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1644 \\ 210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1776 \\ 429 \end{pmatrix}$	1.020
Sol $0.9m_{EF}$	1523	1639	1830	$\begin{pmatrix} 1519 \\ 186 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1643 \\ 209 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1779 \\ 426 \end{pmatrix}$	1.014
Standard fit	1523	1640	1834	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 208 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1779 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.016
Sol $1.1m_{EF}$	1524	1641	1837	$\begin{pmatrix} 1518 \\ 188 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 207 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1778 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.003
Sol $1.2m_{EF}$	1524	1643	1842	$\begin{pmatrix} 1516 \\ 188 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1642 \\ 206 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1781 \\ 427 \end{pmatrix}$	1.016
Sol $1.3m_{EF}$	1523	1643	1846	$\begin{pmatrix} 1511 \\ 189 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1640 \\ 202 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1786 \\ 437 \end{pmatrix}$	1.062
Sol $1.4m_{EF}$	1522	1644	1850	$\begin{pmatrix} 1499 \\ 185 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1638 \\ 199 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1791 \\ 445 \end{pmatrix}$	1.172

Tablica 5.20: Goli i obučeni polovi T matrice za P_{11} parcijalni val koristeći različite mase efektivnog kanala.

	Goli polovi				Obučeni polovi				χ_R^2
	W_{s_1}	W_{s_2}	W_{s_3}	W_{s_4}	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Re}W \\ -2\text{Im}W \end{pmatrix}$	
	<i>MeV</i>				<i>MeV</i>				
Sol $0.6m_{EF}$	1574	1775	2204	2826	$\begin{pmatrix} 1348 \\ 220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1725 \\ 235 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1729 \\ 148 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2131 \\ 383 \end{pmatrix}$	1.827
Sol $0.7m_{EF}$	1582	1774	2199	2811	$\begin{pmatrix} 1347 \\ 215 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1722 \\ 218 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1728 \\ 144 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2129 \\ 376 \end{pmatrix}$	1.587
Sol $0.8m_{EF}$	1595	1772	2182	2773	$\begin{pmatrix} 1344 \\ 216 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1718 \\ 183 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1725 \\ 145 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2130 \\ 347 \end{pmatrix}$	1.272
Sol $0.9m_{EF}$	1600	1772	2178	2799	$\begin{pmatrix} 1353 \\ 192 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1714 \\ 169 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1729 \\ 145 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2115 \\ 344 \end{pmatrix}$	1.002
Standard fit	1607	1772	2182	2841	$\begin{pmatrix} 1365 \\ 157 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1708 \\ 174 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1731 \\ 136 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2117 \\ 345 \end{pmatrix}$	0.958
Sol $1.1m_{EF}$	1614	1773	2184	2811	$\begin{pmatrix} 1377 \\ 132 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1707 \\ 163 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1732 \\ 132 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2109 \\ 328 \end{pmatrix}$	1.182
Sol $1.2m_{EF}$	1615	1775	2182	2809	$\begin{pmatrix} 1399 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1705 \\ 156 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1735 \\ 132 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2103 \\ 320 \end{pmatrix}$	2.215
Sol $1.3m_{EF}$	1608	1777	2175	2832	$\begin{pmatrix} 1423 \\ 114 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1704 \\ 158 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1735 \\ 132 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2103 \\ 320 \end{pmatrix}$	4.166
Sol $1.4m_{EF}$	1592	1779	2166	2883	$\begin{pmatrix} 1447 \\ 119 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1702 \\ 162 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1747 \\ 137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2092 \\ 330 \end{pmatrix}$	7.021

Tablica 5.21: Goli i obučeni polovi T matrice za D_{13} parcijalni val dobiveni koristeći različite mase efektivnog kanala.

	Goli polovi			Obučeni polovi				χ_R^2
	s_1	s_2	s_3	$\begin{pmatrix} \text{ReW} \\ -2\text{ImW} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{ReW} \\ -2\text{ImW} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{ReW} \\ -2\text{ImW} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{ReW} \\ -2\text{ImW} \end{pmatrix}$	
	MeV			MeV				
Sol $0.6m_{EF}$	1580	1878	2496	$\begin{pmatrix} 1509 \\ 129 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 129 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1945 \\ 526 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2687 \\ 588 \end{pmatrix}$	1.096
Sol $0.7m_{EF}$	1580	1878	2496	$\begin{pmatrix} 1508 \\ 129 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1808 \\ 128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1944 \\ 520 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2687 \\ 589 \end{pmatrix}$	1.069
Sol $0.8m_{EF}$	1580	1879	2499	$\begin{pmatrix} 1507 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 128 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1941 \\ 512 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2688 \\ 589 \end{pmatrix}$	1.041
Sol $0.9m_{EF}$	1582	1880	2499	$\begin{pmatrix} 1507 \\ 124 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1940 \\ 488 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2691 \\ 578 \end{pmatrix}$	1.044
Standard fit	1582	1880	2499	$\begin{pmatrix} 1506 \\ 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1939 \\ 485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2691 \\ 583 \end{pmatrix}$	1.027
Sol $1.1m_{EF}$	1583	1880	2499	$\begin{pmatrix} 1505 \\ 118 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1807 \\ 127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1936 \\ 472 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2694 \\ 572 \end{pmatrix}$	0.996
Sol $1.2m_{EF}$	1584	1881	2501	$\begin{pmatrix} 1503 \\ 113 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1806 \\ 126 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1935 \\ 452 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2690 \\ 570 \end{pmatrix}$	1.031
Sol $1.3m_{EF}$	1586	1882	2504	$\begin{pmatrix} 1502 \\ 108 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1805 \\ 123 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1935 \\ 426 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2681 \\ 571 \end{pmatrix}$	1.127
Sol $1.4m_{EF}$	1589	1883	2507	$\begin{pmatrix} 1501 \\ 101 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1804 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1934 \\ 397 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2670 \\ 573 \end{pmatrix}$	1.325

Na osnovu rezultata danih tabelama 5.19-5.21 i na slikama 5.24-5.26 zapažamo sljedeće:

1. Povećanje mase efektivnog kanala previše iznad praga prvog neelastičnog kanala doprinosi kod pojedinih parcijalnih valova nerealnom pomjeranju položaja polova.
2. Smanjivanje mase efektivnog kanala do 40% dovodi do nekih pomjeranja položaja polova, ali ne značajnih.

Ponovo polove T -matrice možemo klasificirati u dvije klase:

- Prva klasa - skoro stabilni polovi
($S_{11}(1518)$, $S_{11}(1642)$, $P_{11}(1731)$, $D_{13}(1506)$ i $D_{13}(1807)$)
- Druga klasa - više osjetljivi polovi
($S_{11}(1779)$, $P_{11}(1365)$, $P_{11}(1708)$, $P_{11}(2117)$, $D_{13}(1939)$ i $D_{13}(2691)$).

3. Položaji polova su manje osjetljivi na promjenu parametara modela ako je manja korekcija vlastite energije, dok su dinamički polovi su jako osjetljivi na promjenu parametara (korekcija vlastite energije je velika).
4. Pri povećanju mase efektivnog kanala do 40% dolazi do velike promjene položaja polova.

5. Reducirani χ^2 , kvantitativno predstavlja mjeru sposobnosti našeg modela da reproducira ulazne podatke i najmanji je za nemodificirano rješenje (Tabele 5.19-5.21). Reducirani χ^2 pri povećanju mase efektivnog kanala mnogo je veći nego pri smanjenju mase. Drugim rječima, naš model lošije fita ulazne podatke kada se promjeni masa efektivnog kanala.
6. Reducirani χ^2 je značajno veći pri povećanju mase efektivnog kanala nego pri smanjenju mase za iste iznose. Razlog za to je sljedeći. Ako povećamo masu neelastičnog kanala previše, onda fit, kome je nametnuta unitarnost, neće imati dodatni kanal na raspolaganju da se riješi neželjenog fluksa i program će biti prisiljen da fita ulazne podatke koji su mnogo više "elastični" nego što je to u stvarnosti. Jednostavno, neće biti prostora za odlazak (gubljenje) fluksa na neelastične kanale koji su otvoreni na ovim energijama, tako da fit producira nerealan pomjeranja položaja polova. S druge strane, ako se smanji masa efektivnog kanala za 40%, dozvolit ćemo fitu da šalje fluks u neelastični kanal ako je to potrebno. Međutim, fit odbija ovu mogućnost jer su ulazni podaci u osnovi elastični.

5.6 Je li problem stabilnosti Zagreb CMB modela riješen?

Analizirana je stabilnost određivanja položaja polova koristeći Zagreb CMB model. Razmatrano je kako (koliko) konačan položaj polova ovisi o pretpostavkama modela. Izvršena je promjena samo jednog dijela modela i za svaku promjenu su određeni položaji polova. Analizirana je modifikacija svakog dijela modela i mislim da je problem stabilnosti određivanja singulariteta parcijalnih valova u CMB modelu riješen.

U narednom poglavlju su sažeto dani svi zaključci koji su izvedeni u ovom radu. Predložena je i procedura koja bi se mogla ubuduće koristiti pri određivanju nekih od pretpostavki modela.

Poglavlje 6

Zaključci:

Na osnovu analiza koje smo napravili, pri ispitivanju stabilnosti Zagreb CMB modela, zaključujemo da imamo dvije vrste polova. Prva vrsta su polovi jako određeni sa golim polovima, a druga vrsta polova su oni na koje jako utječe promjena vlastite energije. U prvu klasu polova spadaju S_{11} (1518), S_{11} (1642), P_{11} (1731), D_{13} (1506) i D_{13} (1807), a u drugoj klasi pripadaju polovi S_{11} (1779), P_{11} (1365), P_{11} (1708), P_{11} (2117), D_{13} (1939) and D_{13} (2691).

Promjena ponašanja kanalnog propagatora na pragu jako utiče na položaj golih polova. Ponašanje na pragu je proporcionalno sa q^{2L+1} . Ako zadržimo ovo ponašanje na pragu, položaji golih polva su vrlo stabilni bez obzira na promjene ostalih pretpostavki modela.

“Razlika” između golih i obučenih polova može biti uzeta kao mjera ovisnosti određenog pola o korekciji vlastite energije. Manja razlika između polova nam govori da je ekstrakcija polova pouzdanija.

Redukovani χ^2 , kvantitativno predstavlja mjeru sposobnosti našeg modela da reproducira ulazne podatke. Redukovani χ^2 je najmanji za nemodificirano rješenje. (U našim tabelama i graficima to rješenje je označeno sa *Standard fit*)

Drugim rječima, naš model nije u mogućnosti korektno fitati ulazne podatke kada uvedemo značajnu promjenu dijelova modela. To zapravo znači da je naš model osjetljiv na analitičku strukturu nametnutu ulaznim podacima pri postupku njihovog generiranja. Naime, kreiranjem ulaznih podataka raspodjelom Zagrebačkih teoretskih krivulja pri simuliranju statističke prirode realnih mjerljivih podataka, osnovna analitička struktura modela je prenesena na podatke. Ako je analitička struktura loša, realni podaci koji dolaze iz eksperimenta neće biti idealno fitani sa našim krivuljama. U tom slučaju položaji polova će biti pomjereni.

Međutim, mogli bismo barem načelno koristiti ovu činjenicu kako bi testirali oblik dijelova modela uključujući korekciju vlastite energije. Kad govorimo o dijelovima modela u ovom slučaju mislimo na kanalni propagator. Stoga, može se provesti sljedeća procedura:

1. Najprije fitamo dobijene ulazne podatke i odredimo položaje polova sa stan-

dardnim kanalnim propagatorom, i zabilježimo odgovarajući redukovani χ^2

2. Mijenjamo oblik kanalnog propagatora, ponavljamo fit, i poredimo novi χ_R^2 sa prethodnom vrijednošću.
3. Ako je χ_R^2 bolji, zadržavamo novi (promjenjeni) oblik kanalnog propagatora jer zaključujemo da naša nametnuta analitička struktura nije adekvatna i da smo našli bolji kanalni propagator.
4. Kada dostignemo najbolji χ_R^2 možemo reći da smo našli optimalnu vrijednost kanalnog propagatora za naš formalizam i kažemo da smo pronašli ispravne položaje polova.
5. Možemo u principu, biti u mogućnosti vidjeti koji polovi su promjenjeni, a koji stabilni i na osnovu toga donijeti zaključke o greškama.

Naravno, ovo je procedura koju predlažemo i koja se nameće na osnovu ovog rada, ali nije cilj ove disertacije. Dakle, na osnovu gore navedenog u zaključku možemo podcrtati: Zagreb CMB model može se koristiti za ekstrakciju položaja polova ili iz parcijalnih valova ili parcijalno valnih podataka (PWD). Ovisno o korekciji vlastite energije dobijamo dvije vrste polova: Stabilne polove, kada je korekcija vlastite energije mala, i polove čiji se položaji umjereno promjene kada je korekcija vlastite energije jaka (velika). Ovo automatski znači da će dinamičke rezonance biti jako model ovisne.

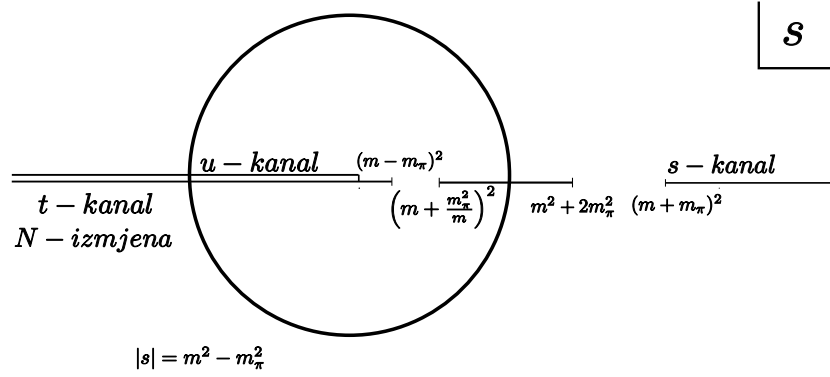
Dodatak

A.1 Analitička struktura parcijalnih valova πN raspršenja

Polazeći od analitičke strukture invarijantnih amplituda raspršenja, koja sljedi iz Mandelstamove reprezentacije, može se zaključiti da su parcijalni valovi πN raspršenja analitičke funkcije u razrezanoj s -ravnini sa sljedećom analitičkom strukturom [41]:

- rez duž realne s -osi $(m + m_\pi)^2 \leq s < \infty$, koji dolazi od reza s -kanala kod invarijantnih amplituda raspršenja;
- kružni rez $|s| = (m^2 - m_\pi^2)$ i rez $-\infty < s \leq 0$ Kružni rez dolazi projekcijom iz invarijantnih amplituda, premda ga nema u njihovoj analitičkoj strukturi, dok je rez $-\infty < s \leq 0$ posljedica reza t -kanala invarijantnih amplituda raspršenja;
- rez duž realne osi $-\infty < s \leq (m - m_\pi)^2$, koji dolazi od reza u -kanala invarijantnih amplituda;
- nukleonski pol u u -kanalu projekcijom prelazi u dva reza u kompleksnoj s -ravnini:
 1. kratki rez: $(m + \frac{m_\pi^2}{m})^2 \leq s \leq m^2 + 2m_\pi^2$,
 2. rez duž realne s -osi: $-\infty < s \leq 0$.

Pored ovih rezova, nukleonski pol invarijantnih amplituda u s -kanalu prelazi u pol u parcijalnom valu $P_{11} \left(F_{1-}^{\frac{1}{2}} \right)$, dok se kod ostalih parcijalnih valova ne javlja. Kao što se vidi, parcijalni valovi imaju sve rezove koji su prisutni u analitičkoj strukturi invarijantnih amplituda πN raspršenja. Dodatni kružni rez, kao i rez koji dolazi od projekcije nukleonskog pola u u -kanalu dolaze korištenjem projekcione formule, gdje se kao rezultat integracije po kosinusu ugla raspršenja, pojavljuju Legendreove funkcije druge vrste $Q_l(x)$. Legendreove funkcije druge vrste analitičke su funkcije u razrezanoj kompleksnoj ravnini argumenta x , s rezom duž realne x osi: $-1 \leq x \leq 1$. Singularnosti parcijalnih valova πN raspršenja date su na slici



Slika A.1:

A.2 Penalty function (Pietarinen)

Posmatrajmo proizvoljnu amplitudu koja ima sljedeće analitičke osobine:

- $F(\nu)$ je realna i analitička u ν -ravnini sa rezom od ν_{th} do ∞ ;
- $|F(\nu)|$ je uniformno ograničena u kompleksnoj ν -ravnini uključujući rez

$$\nu_{th} \leq \nu < \infty;$$

- $F(\nu)$ zadovoljava osobine regularnosti na rezovima. Često se pretpostavlja da $F(\nu)$ na rezu ima tačke grananja tipa kvadratnog korijena ili logaritma;
- Realni dio $F(\nu)$ može se mjeriti u M tačaka ν_1, \dots, ν_M dajući vrijednosti f_1, \dots, f_M sa greškama $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M$;
- Imaginarni dio $F(\nu)$ može biti mjereno u $(N-M)$ tačaka ν_{M+1}, \dots, ν_N dajući vrijednosti f_{M+1}, \dots, f_N sa greškama $\varepsilon_{M+1}, \dots, \varepsilon_N$.

Pretpostavimo da funkcija $\phi(\nu)$ zadovoljava gore navedene osobine. Obično se definiše

$$\chi^2(\phi) = \sum_{k=1}^M \left(\frac{\operatorname{Re}\phi(\nu_k) - f_k}{\varepsilon_k} \right)^2 + \sum_{k=M+1}^N \left(\frac{\operatorname{Im}\phi(\nu_k) - f_k}{\varepsilon_k} \right)^2. \quad (\text{A.1})$$

Izbor kaznene funkcije nije jednoznačan, ali ćemo ovdje pokazati kako je to najzgodnije uraditi. Bilo koja funkcija ϕ koja zadovoljava navedene uslove može se razviti u Taylorov red

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n \quad (\text{A.2})$$

koji konvergira unutar i na krugu $|z| = 1$. Pietarinen je sugerirao sljedeći izraz za funkcional $\Phi(\phi)$:

$$\Phi(\phi) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^3 \phi_n^2, \quad (\text{A.3})$$

gdje je λ parametar koji treba odrediti. Koristeći jednačine (A.1-A.3), funkcional $\bar{\chi}^2$ možemo pisati u obliku:

$$\bar{\chi}^2(\phi) = \sum_{l,m=0}^{\infty} A_{l,m} \phi_l \phi_m + 2 \sum_{l=0}^{\infty} B_l \phi_l + \sum_{k=1}^N \frac{f_k^2}{\varepsilon_k^2} + \lambda \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^3 \phi_l^2, \quad (\text{A.4})$$

gdje je

$$A_{l,m} = \sum_{k=1}^M \frac{\text{Re}(z_k)^l \text{Re}(z_k)^m}{\varepsilon_k^2} + \sum_{k=M+1}^N \frac{\text{Im}(z_k)^l \text{Im}(z_k)^m}{\varepsilon_k^2}, \quad (\text{A.5})$$

$$B_l = - \sum_{k=1}^M \frac{f_k \text{Re}(z_k)^l}{\varepsilon_k^2} - \sum_{k=M+1}^N \frac{f_k \text{Im}(z_k)^l}{\varepsilon_k^2}. \quad (\text{A.6})$$

Uobičajeno je koristiti matricnu notaciju i uvesti matricu \underline{A} sa matricnim elementima $(A_{l,m})$, vektore stubce \underline{B} i $\underline{\phi}$ i vektore redke \underline{B}^T , $\underline{\phi}^T$ sa komponentama (B_l) i (ϕ_l) . Takoće se definiše i dijagonalna matrica \underline{D} sa dijagonalnim elementima

$$\underline{D}_{ll} = (\delta_{lm} (l+1)^3), \quad (\text{A.7})$$

tako da se izraz (A.4) može napisati u matricnom obliku:

$$\bar{\chi}^2(\phi) = \underline{\phi}^T \underline{A} \underline{\phi} + 2 \underline{\phi}^T \underline{B} + \sum_{k=1}^N \frac{f_k^2}{\varepsilon_k^2} + \lambda \underline{\phi}^T \underline{D} \underline{\phi}. \quad (\text{A.8})$$

Koeficijenti $\{\bar{\phi}_n\}$ odrede se iz uslova minimuma funkcionala $\bar{\chi}^2(\phi)$:

$$\frac{\partial \bar{\chi}^2(\phi)}{\partial \phi_l} = 0 \quad , \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Koeficijenti $\{\bar{\phi}_n\}$ koji minimiziraju $\bar{\chi}^2(\phi)$ dobiju se kao rješenja matricne jednačine:

$$\underline{E}^{-1} \cdot \underline{\bar{\phi}} + \underline{B} = 0, \quad (\text{A.9})$$

gdje je :

$$\underline{E}^{-1} = \underline{A} + \lambda \underline{D} \quad (\text{A.10})$$

inverzna matrica matrici grešaka. Jednadžbe (A.5) i (A.6) pokazuje da su $A_{l,m}$ i B_l ograničeni. Stoga iz jednačine (A.10) sljedi $|\bar{\phi}_n| n^{-3}$, kada je $n \gg 1$, tako da

niz može biti prekinut uzimajući konačan broj članova N_{MAX} u izrazima (A.2) i (A.3). Optimalni aproksimant funkcije ϕ je:

$$\bar{\phi}(z) = \sum_{n=0}^{N_{MAX}} \bar{\phi}_n z^n. \quad (\text{A.11})$$

Numerički se ovaj red može sumirati jednim od postupaka pri kojem ne dolazi do nagomilavanja grešaka.

Bibliografija

- [1] G. Höhler, In NSTAR2001, Proceedings of the Workshop on The Physics of Excited Nucleons, ed. D. Drechsel and L. Tiator, World Scientific 2001, 185.
- [2] G. Höhler, D.E. Groom et al., Particle Data Group, Eur. Phys. Jour. **C 15**, 1 (2000).
- [3] W. N. Cottingham, D. A. Greenwood, “An Introduction to Nuclear Physics”, Cambridge University Press, Cambridge 1986 and 2001.
- [4] R. H. Dalitz and R. G. Moorhouse, Proc. R. Soc. Lond. **A 318**, 279-298 (1970).
- [5] R. H. Dalitz, Ann. Rev. Nucl. Science **13**, 471 (1961).
- [6] J. von Neumann, E. P. Wigner, Z. Physik **30**, 467 (1929).
- [7] M. Hadžimehmedović, S. Ceci, A. Švarc, H. Osmanović and J. Stahov, submitted for publication to Phys. Rev. C.
- [8] K. Nakamura *et al.*, J. of Phys. G **33**, 1 (2010).
- [9] S. Capstick and W. Robert, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45**, S241 (2000).
- [10] S. Capstick and N. Isgur, *Phys. Rev.*, **D 34**, 2089 (1986).
- [11] B. H. Bransden and R. G. Moorhouse, *The pion-nucleon system*, (Princeton University Press, 1973).
- [12] R. S. Longacre *et al.*, PHYS. Rev. **D 17**, 1795 (1978).
- [13] G. Höhler, *Pion-Nucleon Scattering*, Landolt-Börnstein, Vol **II/9b2** (Springer-Verlag, Berlin, 1983).
- [14] , S. Ceci, Ph.D. dissertation, (Zagreb, 2007).
- [15] L. Eisenbud, Ph. D. dissertation, (Princeton University, 1948).
- [16] F. T. Smith, Phys. Rev. **98**, 145 (1955).

-
- [17] E. P. Wigner, Phys. Rev. **98**, 145 (1955).
- [18] C. J. Goebel and K. W. McVoy, Phys. Rev. **164**, 1932, (1967).
- [19] R. H. Dalitz and S. F. Tuan, Ann. Physics (New York), **10**, 307, (1960).
- [20] R. H. Dalitz and G. Rajasekaran, Phys. Letters, **7**, 273, (1963).
- [21] T. Davies and R. G. Moorhouse, Nuovo Cimento **52 A**, 1112, (1967).
- [22] N. Suzuki, T. Sato and T.-S.H. Lee, Phys. Rev. **C 79**, 025205 (2009).
- [23] G. Höhler and A. Schulte, PiN Newsletter, **7**, 94 (1992).
- [24] E. Pietarinen, Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. **12A**, 522 (1972).
- [25] M. Batinić, *et al.*, Phys. Rev. **C 51**, 2310 (1995); M. Batinić, *et al.*, Physica Scripta **58**, 15, (1998).
- [26] R. E. Cutkosky *et al.*, Phys. Rev. **D 20**, 2839 (1979).
- [27] T. P. Vrana, S. A. Dytman, T.-S. H. Lee, Phys. Rep. **328** 181 (2000).
- [28] D. Van Neck and M. Waroquier, Phys.Lett. **B510** (2001) 89-97.
- [29] C.R. Brune, Nucl. Phys. **596**, 122 (1996).
- [30] A.M. Kaufman, Nuovo Cimento **27**, 804 (1963).
- [31] I. Ciulli, S. Ciulli and J. Fisher, Il Nuovo Cimento **23**, 1129 (1962)
- [32] D. M. Manely i E. M. Saleski, Phys. Rep. **D 20**, 4002 (1992).
- [33] R. A. Arndt *et al.*, Phys. Rev. **C 52**, 2120 (1995).
- [34] T. Feuster, U. Mosel, Phys. Rev. **C 58**, 457 (1998).
- [35] R. G. Moorhouse, H. Oberlack, A. H. Rosenfeld, Phys. Rev. **D 9**, 1 (1979).
- [36] M. Benmerrouche, Nimai C. Mukhopadhyay, J. F. Zhang, Phys. Rev. **D 51**, 3237 (1995).
- [37] G. Penner i U. Mosel, Phys. Rev. **C 66**, 93 (2002).
- [38] S. Ceci, A. Švarc, and B. Zauner, Phys. Rev. Lett. **97**, 062002 (2006)
- [39] Center for Nuclear Studies (Data Analysis Center) Service SAID:
<http://gwdac.phys.gwu.edu>
- [40] M. Batinić, S. Ceci, A. Švarc, and B. Zauner, Phys. Rev. **C 82**, 038203 (2010).
- [41] J. Hamilton *at al.*, Phys. Rev. **128**, 1881, (1962).