SVEUČILIŠTE U RIJECI

FILOZOFSKI FAKULTET U RIJECI

DINO ARBULA

GÖDELOV DOKAZ NEPOTPUNOSTI ZA ELEMENTARNU ARITMETIKU

DIPLOMSKI RAD

RIJEKA, 2010

SVEUČILIŠTE U RIJECI

FILOZOFSKI FAKULTET U RIJECI

GÖDELOV DOKAZ NEPOTPUNOSTI ZA ELEMENTARNU ARITMETIKU

DIPLOMSKI RAD

Mentor: dr. sc. Majda Trobok

Student: Dino Arbula

Smjer: Filozofija – informatika

Matični broj: 14457

RIJEKA, 2010

SADRŽAJ:

1. Uvod

Tema ovog diplomskog rada je, kao što naslov kaže, Gödelov dokaz nepotpunosti za elementarnu aritmetiku. Cilj ovog diplomskog rada nije samo prezentacija ovog intelektualno virtuoznog i povijesno gledano revolucionarnog dokaza, fascinacija kojim i želja za razumijevanjem istog mi je bila i inicijalna motivacija za hvatanje u koštac sa problematikom. Međutim, kako se moje razumijevanje samog dokaza povećavalo, rasla je i potreba za razumijevanjem pozadinske teorije na kojoj je dokaz baziran. Naime, počeo sam stjecati dojam da sam diplomski rad neće imati previše smisla uspijem li prezentirati intelektualno zahtjevan dokaz i zatim ga pustim da „visi u zraku”, odnosno ukoliko ne postavim teorijski okvir u koji je sam dokaz smješten te na taj način pružim jasniju perspektivu na sam dokaz. Dakle, postavljanje dokaza u teorijski okvir drugi je cilj ovog diplomskog rada.

Sam diplomski rad podijeljen je u tri velike cjeline (isključno uvod, biografija i zaključak). To su: „Smullyanovi problemi”, „Pojam potpunosti” i „Gödelovi dokazi”.

Cilj prvog poglavlja jest, prije nego se krene na detaljno izlaganje glavne problematike rada, čitatelja na ilustrativan način upoznati sa glavnom idejom Gödelovog dokaza, mehanikom istoga te ključnim pojmovima kao što su autoreferencijalnost i Gödelova numeracija (ili pridruživanje brojeva).

Cilj drugog poglavlja jest postavljanje teorijskog okvira u koji ćemo smjestiti sam dokaz. Postavljanje teorijskog okvira za Gödelov dokaz nepotpunosti za elementarnu aritmetiku podrazumijeva detaljnu analizu pojma potpunosti, jer kako ćemo vidjeti, definicija pojma potpunosti ovisi o sustavu na koji ju primjenjujemo, a ti sustavi su uređeni na način da je za konstrukciju svakog višeg sustava (fundiranog) potreban niži sustav (fundirajući). Automatski se i potpunosti koje referiraju na određene sustave isto tako odnose: definicija potpunosti višeg sustava podrazumijeva u sebi onu nižeg sustava. Možemo reći da konstrukcija podsjeća na koncentrične krugove. Kroz definicije pojma potpunosti detaljno ćemo objasniti relaciju između teorije dokaza i teorije modela te način na koji ih je Gödel razgraničio. Konačno, istaknut ćemo koju je to nepotpunost Gödel zapravo dokazao.

Cilj trećeg poglavlja jest prezentacija samog Gödelovog dokaza nepotpunosti za elementarnu aritmetiku i to na način da se prvo prezentira Richardov paradoks – osnova na kojoj Gödel gradi dokaz, koji u sebi sadrži grešku koju Gödel uspijeva ispraviti u dokazu koji se sastoji od tri dijela: „Gödelovo pridruživanje brojeva”, koje uz drugi dio nazvan „Aritmetizacija metamatematike” objašnjava jedan od ključnih pojmova dokaza, što je preslikavanje metamatematičkih iskaza na čisto aritmetičke putem pridruživanja Gödelovih brojeva, dok u trećem dijelu nazvanom „Srž Gödelova argumenta” primjenom pojma autoreferenciranja prezentiramo zašto elementarna aritmetika nije potpuna.

2. Smullyanovi problemi

2.1. Uvod

Autor dva problema koje koristim radi ilustrativnog upoznavanja čitatelja s idejom Gödelova dokaza, kao i mehanikom te ključnim pojmovima kao što su autoreferencijalnost i Gödelovo numeriranje, je Raymond M. Smullyan (1919-), doktor matematike (doktorirao na Princetonu 1959.) i renesansni čovjek (profesionalni pijanist, mađioničar, pasionirani šahist i tvorac mnogih poznatih matematičkih problema (tkz. Knights and Knaves). Jedna od Smullyanovih fascinacija u životu svakako su i Gödelovi dokazi nepotpunosti, čijem je razumijevanju znatno doprinio kada je 1957. godine u „*Journal of Symbolic Logic*" objavio članak „*Languages in which self reference is possible"*. Primjeri ovdje korišteni posuđeni su iz Smullyanove knjige „*Gödel's incompleteness theorems"*, Oxford University Press Inc., 1992.

U prvom primjeru vidjet ćemo na koji način primjenom principa autoreferencijalnosti možemo za mašinu koja ispisuje samo istinite rečenice konstruirati jednu takvu rečenicu, a da pritom ne bude ispisiva, što je, kako ćemo vidjeti, slučaj analogan onome koji je konstruirao sam Gödel, dok u drugom primjeru na postojeću problematiku uvodimo princip Gödelovog numeriranja koji je ključan za potpuno razumijevanje Gödelova dokaza nepotpunosti za elementarnu aritmetiku.

2.2. Prvi Smullyanov problem:

Dakle, zamislimo mašinu koja ispisuje različite izraze koji se sastoje od sljedećih simbola:

$\backsim$ P N ( )

Izrazom se smatra bilo koji konačan niz navedenih simbola;

Ako je izraz **printabilan (ispisiv)**, smatramo da ga mašina može ispisati;

Norma izraza X definira se kao sljedeći izraz: X(X) – npr. norma od ∾P jest ∾P(∾P);

Rečenicom smatramo bilo koji izraz koji zadovoljava jednu od sljedeće četiri forme:

(1) P(X)
(2) PN(X)
(3) ∾P(X)
(4) ∾PN(X)

Neformalno, P interpretiramo kao "printabilno", N kao "norma od", a ∾ kao negaciju.

Definirajmo:

P(X) je **istinito** akko je X **ispisivo**;

PN(X) je **istinito** akko je norma od X **ispisiva**;

∾P(X) je **istinito** akko X **nije ispisivo**;

∾PN(X) je **istinito** akko norma od x **nije ispisiva**.

Ovime smo precizno definirali što to znači da je rečenica istinita. Bilo bi interesantno primijetiti zanimljiv slučaj auto-referenciranja, s obzirom da mašina ispisuje razne rečenice o vlastitom ponašanju!

Za samu mašinu uzmimo da je u potpunosti ispravna, pritom misleći na to da je svaka ispisana rečenica nužno istinita. Npr. ispiše li mašina P(X), slijedi da je X također ispisivo. Također, ako je PN(X) ispisivo, tada je i X(X). Međutim, ustanovi li se da je X ispisivo na način da X bude ispisan, možemo li iz toga zaključiti da je P(X) također ispisivo? Svakako možemo zaključiti je da je P(X) istinito, ali kada smo definirali

ispravnost stroja, učinili smo to tako da kaženo da ispisuje samo istinite rečenice, ali pritom nije rečeno da je u stanju ispisati apsolutno sve istinite rečenice (pritom je nebitno kakve izraze mašina ispisuje, dokle god su izrazi prepoznati kao rečenice istiniti).
Pitanje koje bi si čitatelj mogao postaviti je sljedeće: Da li je moguće da mašina ispiše sve istinite rečenice?

Odgovor glasi: NE!

Ovakav odgovor svakako zahtijeva objašnjenje.

Cilj je, dakle, pronaći rečenicu koja je istinita, a da pritom nije ispisiva.

U ovom trenutku trebalo bi se prisjetiti kakve smo izraze definirali kao rečenice te također auto-referencijanosti koja se pritom pojavljuje. Budući da rečenice koje mašina ispisuje govore o tome što mašina može ispisati, rečenica koju bi trebalo konstruirati da se objasni negativan odgovor jest ona koja tvrdi vlastitu neispisivost, jer ako je ta rečenica istinita, tada je istinito ono što ona tvrdi, a to je da ona sama nije ispisiva.

Prisjetimo se kako smo definirali normu izraza X. Dakle, za neki izraz X njegova norma glasi X(X). Sada treba biti precizan. Želimo li konstruirati rečenicu koja tvrdi vlastitu neprintabilnost, a pritom imati na umu definiciju norme, kao X upotrijebimo sljedeći izraz: ∾PN. Ono što smo pritom dobili je rečenica ∾PN(∾PN). Pogledamo li malo bolje dobivenu rečenicu, primjećujemo da je ono što ona tvrdi sljedeće: nije ispisiva norma od izraza “nije ispisiva norma”. Međutim, norma izraza “nije ispisiva norma” je upravo ona rečenica koja tvrdi da “nije ispisiva norma” nema ispisivu normu, tj. tvrdi da ona sama nije ispisiva. Slijedi da ako je rečenica ∾PN(∾PN) istinita, tada nije ispisiva, jer da jest, tada bi imali slučaj lažne printabilne rečenice, što je kontradiktorno s postavljenim uvjetom da mašina ispisuje samo istinite rečenice.

2.3. Drugi Smullyanov problem (varijanta prvoga)

Ovaj put zamislimo mašinu koja ispisuje sljedećih pet simbola:

∾ P N 1 0

Definicije izraza i printabilnosti ostaju iste kao i u prvom problemu. Prirodni brojevi su, za potrebu problema, prikazani u binarnoj notaciji. Svakom izrazu pridružujemo njegov Gödelov broj i to prema sljedećoj shemi: simbolima ∾, P, N, 1, 0 redom se pridružuju Gödelovi brojevi 10,100,1000,10000,100000. Gödelov broj određenog izraza dobivamo tako da zamijenimo simbole odgovarajućim Gödelovim brojevima, npr. izrazu PNP pripada Gödelov broj 1001000100.

Normu izraza redefiniramo kao izraz nakon kojeg slijedi njegov Gödelov broj. Npr. norma od PNP bit će PNP1001000100.

Neki je izraz rečenica ako zadovoljava neku od sljedeće četiri forme: PX, PNX, ∾PX, ∾PNX, gdje je X bilo koji prirodan broj zapisan u binarnoj notaciji.

(1) PX smatramo istinitom akko je X Gödelov broj ispisivog izraza;

(2) PNX smatramo istinitom akko je X Gödelov broj izraza čija je norma ispisiva;

(3) ∾PX smatramo istinitom akko X nije Gödelov broj ispisivog izraza (PX nije istinito);

(4) ∾PNX smatramo istinitom akko PNX nije istinita (X nije Gödelov broj izraza čija je norma ispisiva).

Kao i u ranijem problemu, mašina nikada neće ispisati lažnu rečenicu.

Zadatak je jednak kao i u prethodnom problemu, tj. treba pronaći rečenicu koja je istinita, a da pritom nije ispisiva od strane mašine.

Rješenje glasi ∾PN101001000. Pogledamo li rješenje, možemo uočiti da se radi o izrazu koji glasi "nije ispisiva norma izraza čiji je Gödelov broj 101001000", što je

Gödelov broj izraza ∾PN (sada rješenje postaje evidentno analogno onome iz prvog problema), a norma tog izraza je upravo rečenica ∾PN101001000, što znači da ta rečenica, ako je istinita, tvrdi vlastitu neispisivost.

3. Pojam potpunosti

3.1. Uvod

Pojam potpunosti, kao što ćemo vidjeti, kompleksan je pojam i ima različita značenja u različitim kontekstima. Potpunosti o kojima ćemo govoriti su semantička potpunost za formalnu logiku prvog reda i deduktivna potpunost za sustav elementarne aritmetike, tj. sustav koji koristi formalni logički sustav kao sredstvo dokazivanja svojih teorema. Pojmovi deduktivne i semantičke potpunosti nisu nužno vezani uz sustave prvog reda, ali u ovom poglavlju se nećemo micati od te razine. Kao što ćemo vidjeti, sustavi na koje referiraju semantička i deduktivna potpunost međusobno se odnose kao fundirajući i fundirani sustavi, što znači da sintaksa i semantika jednog jezika služe kao temelj gradnje drugog jezika koji uvodi specifične predikate, funkcije i konstante te na temelju toga i skup aksioma baziran na takvoj sintaksi, dok u semantičkom smislu specificiramo značenja dotičnih predikata, funkcija i konstanti te na temelju njih tvorimo modele koji čine istinitima teoreme derivirane putem formalnih pravila zaključivanja.

Kada govorimo o pojmu istine, određenu rečenicu čini istinitom određeni model. Sljedeća stvar o kojoj raspravljam u ovom poglavlju je semantički aspekt logike prvog reda i sustava baziranih na logici prvog reda.

No pogledajmo najprije ukratko Gödelovu biografiju.

3.2. Nekoliko riječi o Kurtu Gödelu...

Kurt Gödel se rodio u Brnu 24. travnja 1906. dok je grad bio pod austrougarskom vladavinom. Nakon osnovne i srednje škole u Brnu 1924. seli u Beč, gdje studira matematiku do 1929. godine. Nakon königsberških rezultata postaje docent na Bečkom sveučilištu 1933. godine. Godine 1940., nakon što mu je život u Beču postao neugodan zbog nacističkog režima, seli u SAD, kamo stiže 4. ožujka 1940. godine. Tamo se zapošljava na Institutu za napredne studije (IAS) na Princetonu.

Za Kurta Gödela možemo reći da koliko god njegovi profesionalni rezultati bili revolucionarni i dramatični, toliko za njegov život izvan tih okvira vrijedi upravo suprotno. Čak i najintrigantniji trenutak Gödelova života, njegova smrt, i nije naročito intrigantan događaj. Umro je naime od neishranjenosti. jer je bio paranoičan do te mjere da nije vjerovao čak ni najboljim prijateljima i doktorima te je odbijao hranu i medicinsku pomoć misleći da ga se sistematski truje. To je u konačnici dovodi do smrti od anoreksije 14. siječnja 1978. godine.

Gödelova paranoja bila je posljedica njegovog vrlo specifičnog osjećaja nesigurnosti, koji možemo okarakterizirati kao strah od izlaska iz nekakvih zacrtanih okvira. Dok bi se nalazio u zadanim okvirima, njegova briljantna inteligencija dolazila bi do izražaja, čega je, uostalom, posljedica i tema ovog diplomskog rada. Postoji jedna zanimljiva anegdota vezana uz tu Gödelovu sposobnost. Naime, kad je aplicirao za državljanstvo SAD-a, morao je naučiti Ustav SAD-a. Ustav SAD-a predstavlja zadani okvir unutar kojeg je Gödel mogao razmišljati i naravno, uspjelo mu je dokazati neku vrstu nepotpunosti u Ustavu SAD-a, tj. način kako SAD pretvoriti u diktatorsku državu, bez da se prekrši Ustav. Naravno, nikakvo pretvaranje SAD-a u diktatorsku državu Gödelu nije bilo na umu. Ono što je njega zanimalo je samo kako na formalan način na temelju onoga što piše u Ustavu dokazati da je tako nešto ipak moguće. Prijatelji, među kojima je bio i Albert Einstein, su ga savjetovali da to ne spominje pred sucem jer vjerojatno ne bi shvatio, no na sučev spomen nemogućnosti razvijanja diktature na temelju Ustava SAD-a prilikom Gödelovog apliciranja, Gödel je, naravno, morao reći da to nije istina i da ima dokaz za to. Recimo samo da su se Gödelovi prijatelji iz IAS-a morali dobro potruditi da uvjere suca da Gödel nema nikakvog interesa prema ideji pretvaranja SAD-a u diktatorsku državu te da mu se odobri državljanstvo.

3.3. Različiti aspekti potpunosti (semantička vs. deduktivna)

Prije nego prijeđemo na sam Gödelov dokaz, potrebno je upoznati se s terminologijom. Da bi uopće mogli definirati nepotpunost i raspravljati o njoj, treba odgovoriti na pitanje što je to potpunost.

O čemu se zapravo radi?

Ono što bi moglo biti pomalo zbunjujuće na prvi pogled je to da je sam Gödel na Königsberškom simpoziju, čija su tema bili temelji matematike (5.-7.10.1930.), u razmaku od jednog dana (6. i 7.) iznio, prividno, dva potpuno oprečna rezultata. Naime, prvo je prezentirao dokaz potpunosti, koji je ujedno bio i rezultat njegove doktorske disertacije iz 1929., a potom je sljedeći dan u raspravi natuknuo ono što je izašlo 1931. u časopisu *Monatshefte für Mathematik und Physik* pod naslovom "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme", a što je postalo poznato kao dokaz nepotpunosti.

Pretpostavljam da je jedna od prvih stvari koju je potrebno istaknuti da bi, kada govorimo o pojmu potpunosti, to da su potpunost koju je Gödel dokazao u prvom navedenom radu i (ne)potpunost koju je dokazao u drugom navedenom radu zapravo dva različita pojma. Na što se odnosi koji od ta dva različita pojma?

3.3.1. Semantička potpunost

Pojam potpunosti na koji se Gödel referira u svojoj doktorskoj disertaciji možemo definirati na sljedeći način: neka je T skup rečenica nekog jezika prvog reda L i neka je S rečenica tog jezika. Ako je S posljedica prvog reda od T, onda T $\vdash$[1] S (http://www.vusst.hr/~logika/pilot, str. 237). Da bi definirali posljedicu prvog reda, prvo moramo uvesti pojam potreban za njezino definiranje. To je pojam valjane rečenice prvog reda. Valjana rečenica prvog reda je ona koja je istinita samo na temelju značenja istinosno–funkcionalnih veznika, kvantifikatora i predikata identiteta. Treba istaknuti da značenje predikata, funkcija i konstanti nije bitno za utvrđivanje istinitosti valjanih rečenica prvog reda, što znači da bi neka rečenica nekog jezika prvog reda bila valjana rečenica prvog reda, tada mora biti istinita pod bilo kakvom interpretacijom predikata, funkcija ili konstanti, tj. mora biti istinita u svakom modelu. Posljedica prvog reda S je ona koja slijedi iz skupa premisa T bez potrebe da znamo značenja predikata ili funkcija koje se javljaju u njima. Oblik potpunosti koja se zove **semantička potpunost** za logiku prvog reda jest svojstvo aksiomatizacije određenog dijela logike, u ovom slučaju logike prvog reda[2], a znači da su sve valjane rečenice prvog reda derivabilne iz aksioma pomoću pravila dokazivanja (Hintikka, „The principles of mathematics revisited", str. 91). Znači„ semantički nepotpun sustav trebao bi imati barem jednu tzv. formalno neodlučivu valjanu

---

[1] Sintaktička posljedica – ako za S postoji formalni dokaz iz seta formula T, kažemo da je S sintaktička posljedica iz T.

[2] Što je logika prvog reda? Logika prvog reda (LPR) je dio logike koju su formulirali Frege, Russell i Whitehead. LPR je prvi put izolirana od strane Hilberta 1917.godine, a prezentirana je javno prvi put u knjizi Grundzüge der theoretischen Logik 1928. od strane Hilberta i Ackermana. (Hintikka, „On Gödel", str. 11).

Logika prvog reda je formalni sustav, što znači da sadrži formalni jezik koji se sastoji od primitivnih simbola koji se organiziraju prema određenim pravilima tvorenja. Logika prvog reda predstavlja proširenje sustava propozicijske logike tako da nam omogućava zaključivanje o članovima nekog nepraznog prostora (*old.tel.fer.hr/files/peta/FORMAL/firstorder.pdf*). To znači da sustav logike prvog reda ima sintaksu koja sadrži *terme* (što mogu biti *varijable, konstante i/ili funkcije*) koji predstavljaju objekte kojima se dodjeljuju određena svojstva putem *predikata* te *kvantifikatore* (egzistencijalni (postoji barem jedan...) i univerzalni (vrijedi za svaki...)) čiji je doseg u sustavu logike prvog reda ograničen na individualne konstante. Kvantifikacija nad predikatima, klasama objekata i funkcijama nije dozvoljena u sustavu logike prvog reda te spada u logiku drugog reda. Kvantifikacija nad klasama klasa spadala bi u rang logike trećeg reda, itd. Naravno, sintaksa logike prvog reda sadrži i logičke veznike koji mogu povezivati terme, kao i atomarne formule te pravila dokazivanja koja uključuju eliminaciju i introdukciju veznika i kvantifikatora.

rečenicu prvog reda, što znači da barem za jednu rečenicu istinitu u svakom modelu nije moguće ponuditi formalni dokaz. Ono što je Gödel dokazao u svojoj doktorskoj disertaciji jest nepostojanje takve rečenice, tj. utvrdio je semantičku potpunost logike prvog reda.

3.3.2. Metoda supstitucije predikata

Kako ustanoviti da li je neka rečenica valjana rečenica prvog reda? Rekli smo da bi neka rečenica bila valjana rečenica prvog reda, mora biti istinita bez obzira na značenje predikata, funkcija ili konstanti. Pogledajmo nekoliko jednostavnih primjera iz Tarski svijeta koji bi trebali razliku učiniti jasnijom. Primjeri su posuđeni iz sljedećeg izvora: *www.cs.pitt.edu/~utp/cs1502/notes/ch10-logic-of.../s13-FO-**validity**.ppt.*

Razmotrimo sljedeću rečenicu:

∀x IstiOblik(x,x).

Sada treba ustanoviti da li ukoliko zamijenimo predikat "IstiOblik" besmislenim predikatom, što znači da je na mjesto takvoga moguće staviti bilo koji drugi predikat, postoji takva interpretacija predikata za koju data rečenica neće biti istinita. Ustanovimo li takav slučaj, možemo zaključiti da data rečenica nije valjana rečenica prvog reda.

Uzmimo sljedeću interpretaciju:

∀x VećiOd(x,x)

Očito je da nije moguće da je neki objekt veći od samog sebe te smo na taj način ustanovili slučaj za koji određena rečenica nije istinita. Stoga možemo zaključiti da data rečenica nije valjana rečenica prvog reda.

Razmotrimo sada sljedeću rečenicu:

$\forall x\ Tet(x) \vee \exists x\ {\sim}Tet(x)$

Prirodnim jezikom rečeno: svaki je objekt tetraedar ili postoji objekt koji nije tetraedar. Oduzmemo li značenje predikata "biti tetraedar" - zamijenimo ga besmislenim - K, dobivamo rečenicu $\forall x\ K(x) \vee \exists x\ {\sim}K(x)$ ili prirodnim jezikom rečeno, Nešto jest uvijek slučaj ili postoji situacija kada nije. Kojim god predikatom zamijenili "K", rečenica će uvijek biti istinita. Ova rečenica je, stoga, primjer valjane rečenice prvog reda.

3.3.3. Deduktivna potpunost

Pogledajmo sada o kakvoj je potpunosti Gödel govorio u radu iz 1931. godine. Ovaj oblik potpunosti nazivamo **deduktivna potpunost**, a radi se o svojstvu ne-logičkih aksiomatskih sustava[3] (prvog reda) T, u našem slučaju, elementarne aritmetike, zajedno s aksiomatizacijom logike odgovarajućeg reda, odnosno metodom formalnog dokaza. To konkretno znači da je iz T, pomoću pravila dokazivanja postavljenih unutar formalnog sustava logike na kojem se bazira ne-logički aksiomatski sustav, derivabilno C ili $\neg$ C za svaku rečenicu C jezika u pitanju (Hintikka, „The principles of mathematics revisited", str. 91). Koji uvjet mora biti zadovoljen želimo li ustanoviti nepotpunost elementarne aritmetike? Potrebno je identificirati rečenicu takvu da iz skupa aksioma elementarne aritmetike nije moguće deducirati niti tu rečenicu niti njezinu negaciju, tj. treba pronaći

[3] Ne-logički aksiomatski sustavi su oni čiji su aksiomi istiniti na temelju značenja predikata i funkcija koje sadrže. Rečenice derivabilne iz takvog seta aksioma mogu biti logičke istine (čije negacije su kontradikcije) te kontingentne rečenice (rečenice istinite ovisno o značenjima predikata i funkcija koje sadrže), čije su negacije opet kontingentne rečenice.

takvu rečenicu koja ako je istinita, tada nije formalno dokaziva. Na taj način dobivamo sustav u kojem svaka istinita rečenica nije ujedno i formalno dokaziva, što je upravo ono što je Gödel ustanovio u radu iz 1931.

3.3.4. Fundirajući i fundirani sustavi

Pojasnimo raziku između sustava na koje se odnose semantička i deduktivna potpunost. Ono što bi valjalo primijetiti jest to da smo prilikom definiranja deduktivne potpunosti, tj. pojma koji se odnosi na tzv. ne-logičke aksiomatske sustave kao sredstvo dokazivanja, postavili formalni sustav dokazivanja, tj. sustav nad kojim smo uveli pojam semantičke potpunosti. To je ono što Berislav Žarnić naziva fundirajućim i fundiranim sustavima. Njegovim riječima: ”Logička aksiomatska teorija i ne-logička aksiomatska teorija odnose se kao fundirajući i fundirani sustavi. Fundirajući logički sustavi imaju svoja pravila dokaza. S druge strane, fundirana teorija u svojim dokazima polazi od svojih ekstralogičkih aksioma i koristi logičke teoreme kao svoja pravila dokaza.” (http://www.vusst.hr/~logika/pilot, str. 28).

3.4. Teorija modela

Vratimo se na definiciju semantičke potpunosti. Kada smo rekli da je Gödel u svojoj doktorskoj disertaciji dokazao potpunost, mislili smo na semantičku potpunost logike prvog reda. Podsjetimo se što se tvrdi ako kažemo da je logika prvog reda semantički potpuna. Time tvrdimo da je apsolutno svaka valjana rečenica prvog reda (logička istina na razini logike prvog reda) formalno dokaziva iz seta aksioma, a kako je valjana rečenica prvog reda po definiciji ona koja je istinita u svakom modelu, slijedi da je svaka rečenica koja je istinita u svakom modelu ujedno i formalno dokaziva. Gödel je time samo potvrdio ono što se već odavno pretpostavljalo i uzimalo zdravo za gotovo, a to je da je teorija modela filozofski beznačajna s obzirom da se do svih teorema može doći čisto formalnim metodama dokazivanja (Hintikka, „On Gödel”, str. 17).

Što je to uopće teorija modela i po čemu se razlikuje od teorije dokaza? Pod teorijom dokaza podrazumijevamo proučavanje čisto formalnih dokaza i „logičke sintakse”, općenito proučavanje formalnih svojstava nekog jezika. (Hintikka, „On Gödel”, str. 17). Ono što pak podrazumijevamo pod teorijom modela nema nikakve veze s bilo kakvim formalnim metodama deriviranja, već se radi o metodi kojom ocrtavamo (*to delineate*) određeni razred interpretacija (drugim riječima, modele) jezika i to takve u kojima je određena rečenica (npr. konjunkcija aksioma) istinita (Hintikka, „On Gödel”, str. 17).

Definirajmo nekoliko pojmova vezanih uz teoriju modela za logiku prvog reda (*old.tel.fer.hr/files/peta/FORMAL/firstorder.pdf):*

- Skup formula *S* je valjan (*valid*) ako svaka interpretacija skupa *S* zadovoljava svaku formulu u *S*.
- Skup formula *S* je zadovoljiv ili konzistentan, dosljedan (*satisfiable* ili *consistent*) ako postoji interpretacija skupa *S* koja zadovoljava svaku formulu u *S*.
- Skup formula *S* je nezadovoljiv ili nekonzistentan, nedosljedan (*unsatisfiable* ili *inconsistent*) ako nije zadovoljiv.
- Model skupa *S* je interpretacija koja zadovoljava svaku formulu u *S*. Također, razmatramo modele koji zadovoljavaju pojedinačnu formulu.

4. Gödelovi dokazi

4.1. Uvod

U ovome ćemo dijelu pogledati instancu Gödelovih dokaza koju nude Nagel i Newman u knjizi *Gödelov dokaz*

Argumentacija koju iznose Newman i Nagel sastoji se od tri koraka: 1. Gödelovo pridruživanje brojeva, 2. Aritmetizacija metamatematike te 3. Srž Gödelova argumenta, te od jednog predkoraka, što je upoznavanje čitatelja sa strukturom koju sama argumentacija prati, što i sam Gödel tvrdi, a koja je sadržana u jednoj logičkoj antinomiji poznatoj kao "Richardov paradoks".

4.2. Richardov paradoks

Richardov paradoks logička je antinomija koju je prvi 1905. iznio francuski matematičar Jules Richard, a argumentacija slijedi.

Uzmimo jezik u kojem je moguće definirati čisto aritmetička svojstva kardinalnih brojeva. Možemo pretpostaviti da razumijemo što znači npr. 'neki cijeli broj djeljiv je s drugim'. Tada svojstvo biti primbroj definiramo kao 'ne biti djeljiv ni s jednim cijelim brojem osim s 1 i samim sobom', dok potpuni kvadrat možemo definirati kao 'biti umnožak nekog cijelog broja sa samim sobom'.

Svaka takva definicija sadrži konačan broj riječi, te stoga i konačan broj slova abecede, što nam omogućava da složimo definicije u uređeni poredak po sistemu manjeg broja slova u rečenici, a u slučaju da dvije rečenice imaju jednak broj slova, sortiramo ih po abecednom redu slova u rečenici te svakoj rečenici pridružujemo jedinstveni kardinalni broj i to tako da rečenici s najmanjim brojem slova pridružujemo broj 1, sljedećoj broj 2, i tako dalje.

Uočimo da se, s obzirom da je svaka definicija povezana s jedinstvenim brojem, u nekim slučajevima može dogoditi da broj posjeduje svojstvo označeno definicijom s kojom sam taj broj stoji u korelaciji. Primjerice, neka svojstvo 'ne biti djeljiv ni s jednim cijelim brojem osim s 1 i samim sobom' bude pridruženo broju 17, a svojstvo 'biti umnožak nekog cijelog broja sa samim sobom' broju 15. Očito je da broj 17 ima svojstvo definicije s kojom je u korelaciji, dok broj 15 to nema. Potonje svojstvo nazvat ćemo 'biti rišarovski'. Općenitije, svojstvo 'biti rišarovski' definiramo kao kraći način za iskazivanje 'x nema svojstvo označeno definicijskim izrazom s kojim je x u korelaciji u skupu definicija poredanih u niz'.

Sada dolazimo do problema: svojstvo 'biti rišarovski' naizgled opisuje svojstvo cijelih brojeva te stoga i sam pripada listi, tj. u korelaciji je s nekim brojem s te liste, npr. brojem n. Slijedi pitanje: da li je n rišarovski broj? Ako n jest rišarovski, to znači da ne posjeduje svojstvo s kojim je u korelaciji, međutim, to je upravo svojstvo da sam taj broj ne posjeduje svojstvo s kojim je u korelaciji, tj. za slučaj kada n jest rišarovski broj, tada upravo to nije. Vrijedi i obrnuto: Ako n nije rišarovski, tj. ako nije da ne posjeduje svojstvo s kojim je korelaciji (primjenom dvostruke negacije dobivamo da ako posjeduje to svojstvo), tada je to svojstvo upravo biti rišarovski, tj. ne posjedovati svojstvo broja s kojim je u korelaciji.

Ovakvo zaključivanje, koliko god fascinantno bilo, u sebi sadrži pogrešku. Kakvu? Na prvi pogled izgleda da nema problema sa pridodavanjem rečenice 'biti rišarovski' na listu svojstava, tj. koreliranja te rečenice s jednim od brojeva na listi. Međutim, moramo se prisjetiti da smo na početku odredili da s cijelim brojevima koreliramo samo aritmetička svojstva, tj. sudove koji govore o aritmetičkim svojstvima cijelih brojeva. Sada pogledajmo rečenicu 'biti rišarovski'. 'Nepostojanje svojstva s kojim je broj u korelaciji' ne govori ni o kakvim aritmetičkim svojstvima broja (što je na početku određeno), već upućuje na notaciju upotrijebljenu prilikom formuliranja aritmetičkih sudova, odnosno govori o aritmetičkim sudovima koji se odnose na aritmetička svojstva broja. Dakle, radi se o metamatematičkom sudu, za razliku od matemetičkih (aritmetičkih) sudova, kakvi su dozvoljeni.

Sama činjenica da ovakva argumentacija sadrži opisanu grešku dovoljna je da se postavi pitanje o mogućnosti njezinog otklanjanja na način da metamatematički sud uspijemo nekako preslikati u aritmetički, u kojem bi slučaju taj sud zadovoljavao zadane uvjete. U zadanom sustavu to nije moguće, međutim, da li bi to možda bilo moguće u dostatno obuhvatnom formalnom sustavu? To je pitanje na koje je Gödel pronašao odgovor te koje za posljedicu ima sud da je aritmetika nepotpuna.

4.3. Gödelovo pridruživanje brojeva (numeracija)

4.3.1. Uvod

Unutar formaliziranog računa koji je Gödel opisao izrazive su sve uobičajene aritmetičke notacije te je moguće utvrditi poznate aritmetičke odnose. Formule računa konstruirane su iz klase elementarnih znakova koji čine osnovni rječnik. Klasa **elementarnih znakova** sastoji se od dvije podklase, i to **konstantnih znakova** i **varijabli**. Sustav funkcionira na način da se pomoću pomno nabrojanih **transformacijskih pravila** za izvođenje iz klase **primitivnih formula** (**aksioma**) izvode **teoremi,** tj. **derivirane formule**.

Godel je pokazao da je svakom znaku, formuli ili dokazu moguće pridružiti jedinstveni broj koji ćemo do daljnjega nazivati Gödelovim brojem.

4.3.2. Pridruživanje Gödelovih brojeva elementarnim znakovima

Ustanovili smo da postoje dvije vrste elementarnih znakova – konstantni znakovi i varijable. Za potrebe argumentacije koju ovdje razvijamo, ustanovit ćemo točno **deset konstantnih znakova** kojima ćemo, kao Gödelove brojeve pridružiti prirodne brojeve od 1 do 10 i to na sljedeći način:

Konstantni znakovi	Gödelov broj	Značenje
∾	1	Negacija
∨	2	Ili
⊃	3	Ako…onda
∃	4	Postoji neki...
=	5	Jednako
0	6	Nula
s	7	Neposredni sljedbenik od
(	8	Interpunkcijski znak
)	9	Interpunkcijski znak
,	10	Interpunkcijski znak

Što se tiče **varijabli**, među njima razlikujemo **brojevne** (**'x', 'y', 'z' –** za njih supstituiramo numerale ili numeričke izraze), **rečenične** (**'p', 'q', 'r' –** za njih supstituiramo formule (rečenice)) i **predikatske** (**'P', 'Q', 'R' –** za njih supstituiramo predikate kao npr. 'veće od' ili 'primbroj') varijable, a Gödelove im brojeve pridružujemo prema sljedećem pravilu:

1. - Svakoj brojevnoj varijabli pridružuje se primbroj veći od 10
2. - Svakoj rečeničnoj varijabli pridružuje se kvadrat primbroja većeg od 10
3. - Svakoj predikatskoj varijabli pridružuje se kub primbroja većeg od 10

Brojevna varijabala	Gödelov broj	Moguća supstitucija
x	11	0
y	13	s0
z	17	Y
Rečenična varijabla		
p	11^2	0=0
q	13^2	(∃x) (x = sy)

r	17^2	p⊃q
Predikatska varijabla		
P	11^3	Prim broj
Q	13^3	Složeni broj
R	17^3	Veći od

Razmotrimo sada sljedeću formulu:

$(\exists x)(x = sy)$

Kako ovoj formuli pridružiti njezin Gödelov broj?

Ono što prvo trebamo učiniti jest pridružiti svakom pojedinom elementarnom znaku pripadajući Gödelov broj. To činimo na način da Gödelove brojeve potpišemo pripadajućim elementarnim simbolima.

$$\begin{array}{cccccccccc} (& \exists & x &) & (& x & = & s & y &) \\ 8 & 4 & 11 & 9 & 8 & 11 & 5 & 7 & 13 & 9 \end{array}$$

Međutim, ono što mi želimo je to da cijeloj formuli pridružimo jedinstveni Gödelov broj, a ne niz brojeva. Princip konstrukcije takvog Gödelovog broja je da se pomnoži onoliko primbrojeva, koji su sortirani od najmanjeg ka najvećem, koliko je elementarnih simbola u formuli i to na način da je svaki potenciran na odgovarajući Gödelov broj dotičnog elementarnog simbola. S obzirom da se dotična formula sastoji od 10 simbola, za potrebu konstrukcije njezinog Gödelovog broja uzimamo prvih 10 primbrojeva, potenciramo ih odgovarajućim Gödelovim brojevima, te međusobno množimo. To bi na konkretnom primjeru izgledalo ovako:

$$m = 2^8 \text{ x } 3^4 \text{ x } 5^{11} \text{ x } 7^9 \text{ x } 11^8 \text{ x } 13^{11} \text{ x } 17^5 \text{ x } 19^7 \text{ x } 23^{13} \text{ x } 29^9$$

Još nam je preostalo utvrditi kako određenom nizu formula dodijeliti Gödelov broj. Naime, jednako kao što bi bilo nepraktično određenu formulu promatrati kroz niz Gödelovih brojeva njezinih pripadnih elementarnih simbola, tako i niz formula nije praktično promatrati kroz niz Gödelovih brojeva formula toga niza. Iz tog razloga potrebno je utvrditi Gödelov broj niza formula.

Pretpostavimo da imamo niz od *n* formula koje predstavljaju dokaz za neku formulu *m.* Naravno, svaka od tih *n* formula ima svoj Gödelov broj. Neka je Gödelov broj prve formule n1, druge n2, itd. Princip kojim se služimo da bi utvrdili Gödelov broj niza formula je zapravo sličan onome kod pridruživanja Gödelovog broja formulama, a to je da prvih *n* prirodnih brojeva potenciramo na odgovarajuće Gödelove brojeve formula i to tako da 2 potenciramo na n1, 3 na n2, itd. te da ih potom međusobno pomnožimo.

Dakle, do sada smo se bavili potpunom aritmetizacijom zadanog formalnog računa. S obzirom da svaki Gödelov broj predstavlja točno određeni elementarni simbol, formulu ili niz formula, rastavljanjem određenog broja na proste faktore možemo ustanoviti radi li se uopće o Gödelovom broju nekog izraza i ako da, o kojem. Naime, nije svaki prirodni broj Gödelov broj. Da bi neki broj bio Gödelov broj, kada ga rastavimo na proste faktore morao bi u sebi sadržati sve primbrojeve do najvećeg kojeg smo dobili rastavljanjem. Primjerice, rastavljanjem broja 100 na primfaktore dobijemo 2^2 x 5^2, dok se broj 3 ne pojavljuje kao primfaktor te stoga uvjet koji je potreban da bi broj bio Gödelov broj nije zadovoljen.

Kako ustanoviti koji izraz stoji iza određenog Gödelovog broja? Ako se radi o nekom broju do 10, jednostavno utvrđujemo koji simbol stoji iza tog broja. Ako smo ustanovili da se radi o Gödelovom broju formule ili niza formula (broj smo rastavili na proste faktore te utvrdili da niti jedan primbroj u nizu do najvećeg ne fali), moguće je točno odrediti o kojoj se formuli ili nizu radi. Uzmimo sljedeći primjer radi ilustracije principa:

A	243 000 000
B	64 x 243 x 15625
C	2^6 x 3^5 x 5^6
D	6 5 6 0 = 0
E	0 = 0

Dakle, ustanovili smo da se aritmetičkoj formuli ‘nula jednako nula’ pridružuje Gödelov broj 243 000 000. Čitamo li tablicu odozgo prema dolje, ustanovljujemo kako određeni broj prevesti u izraz koji predstavlja, dok obrnuto možemo saznati jednostavno čitanjem tablice odozdo prema gore.

4.4. Aritmetizacija metamatematike

4.4.1. Uvod

Ovaj korak je ono što razlikuje Richardov paradaoks od Gödelovog zaključivanja, tj. ključan je za ispravljanje greške koja se pojavljuje u Richardovom paradoksu. Prisjetimo se: greška u Richardovom paradoksu zasnovana je na činjenici da smo metamatematički sud tretirali kao aritmetički, te tako stvorili paradoksalnu situaciju. Ono što Gödel čini je to da metamatematičke izraze o strukturalnim svojstvima sudova preslikava na sam račun.

Princip je sljedeći: s obzirom da je svakom izrazu u računu pridružen određeni Gödelov broj, a s obzirom da metamatematički sudovi govore o izrazima u računu, moguće je metamatematički iskaz o izrazima i njihovim međusobnim odnosima preslikati u iskaze o Gödelovim brojevima i njihovim međusobnim aritmetičkim odnosima te na takav način u potpunosti “aritmetizirati” metamatematiku.

4.4.2. Analogija s kazališnom predstavom

Sada bi bilo dobro malo se zamisliti nad Gödelovim numeriranjem. Promatramo li ga kao čisto formalnu tehniku, ne bi trebalo biti problema s razumijevanjem. Međutim, pogledamo li nakon provedenog numeriranja odnos brojeva i aritmetičkih sudova, situacija postaje sve samo ne jednostavna i odmah razumljiva. O čemu li sada govore aritmetički izrazi? Govore li o brojevima ili o aritmetičkim formulama? Možemo li uopće Gödelove brojeve tretirati kao brojeve ili kao formule pod krinkom?

Poslužimo se analogijom: Gödelovo numeriranje shvatimo kao postavljanje kazališnog komada. Glumci vode život izvan predstave, ali također imaju ulogu u predstavi te što god glumac kaže u predstavi, može biti shvaćeno na dva načina: na način na koji bi to bilo shvaćeno u svakodnevnom životu izvan predstave ili kao liniju teksta u predstavi. Analogno, određena aritmetička propozicija može biti shvaćena na dva različita načina: kao propozicija o brojevima tretiranima upravo tako ili kao izjava o formulama koje ti isti brojevi reprezentiraju. Ako je određena propozicija istinita, tada je istinita na obje semantičke razine: aritmetičkoj ili sintaktičkoj.

Svaki je, dakle, metamatematički sud predstavljen jednoznačnom formulom unutar aritmetike, a što je puno bitnije, odnosi logičke ovisnosti među aritmetičkim formulama u potpunosti su reflektirani u numeričkim odnosima Gödelovih brojeva koji su sadržaj zrcaljenih metamatematičkih sudova.

Učinimo sada ovu zanimljivu analogiju još zanimljivijom. Ponekad se u filmovima neka osoba pojavljuje u tzv. *cameo* ulozi, tj. ima ulogu sebe iz stvarnog života. To znači da nešto što ta osoba kaže u filmu moramo protumačiti kao riječi te iste osobe u stvarnom životu. Sada zamislimo da ta osoba u filmu kaže nešto o sebi samoj. Tada se to odnosi i na tu osobu u stvarnom životu. Odnosno, ako u jeziku aritmetike neka propozicija govori o nekom broju, ona govori jednako tako o propoziciji čiji je to Gödelov broj pod uvjetom da taj broj zadovoljava svojstvo 'biti Gödelov broj', a ako je taj broj Gödelov broj upravo te propozicije, ispada da ona referira na sebe samu.

4.4.3. Tehnička elaboracija aritmetizacije metamatematike

Najbolje da to ilustriramo na primjeru: uzmimo propoziciju: ‘(p v p) $\supset$ p’. Pripadajući Gödelov broj je 2^8 x 3^{121} x 5^2 x 7^{121} x 11^9 x 13^3 x 17^{121} te ga označimo slovom ‘a’. Tada uzmimo propoziciju ‘(p v p)’, čiji je Gödelov broj 2^8 x 3^{121} x 5^2 x 7^{121} x 11^9 te ju označimo sa ‘b’. Sada tvrdimo da je ‘(p v p)’ početni dio od ‘(p v p) $\supset$ p’ te na taj način dajemo metamatematički iskaz. Sada demonstrirajmo mehaniku prevođenja metamatematičkih iskaza na aritmetičke. Iskazi ‘(p v p) $\supset$ p’ i ‘(p v p)’ enkodirani su kao Gödelovi brojevi ‘a’ i ‘b’. Metamatematički iskaz “ ‘(p v p)’ početni dio od ‘(p v p) $\supset$ p’ ” sada postaje iskaz o brojevima, što zapravo znači da postaje aritmetički iskaz. Ali koji? Ako postaje početni iskaz, tada predikat ‘biti prvi dio’ mora biti prikladno transkribiran u jezik aritmetike. Rješenje nalazimo u predikatu ‘je faktor od’ koji je prikladno definiran u jeziku aritmetike te tada tražena propozicija glasi “ ‘b’ je faktor od ‘a’ ”. Vrijedi i obrnuto: ako ‘b’ zaista i je faktor od ‘a’, tada slijedi da je i ona formula koju broj ‘b’enkodira ujedno i prvi dio one formule koju ‘a’ enkodira.

Pogledajmo sada sljedeći metamatematički iskaz: ‘Niz formula s Gödelovim brojem x jest dokaz formule s Gödelovim brojem z’. Taj iskaz moguće je preslikati u jezik aritmetike na način da postavimo odgovarajući čisto aritmetički odnos između brojeva x i z. Zapišimo taj odnos kao formulu ‘Dem (x,z)’. S obzirom da se radi o aritmetičkom iskazu koji je slika određenog metamatematičkog iskaza, metamatematički je iskaz istinit akko Gödelov broj dokaza prema Gödelovom broju konkluzije stoji u odnosu ‘Dem’. Dakle, istinitost ili lažnost navedenog metamatematičkog iskaza utvrdili smo ako smo utvrdili da vrijedi relacija ‘Dem’ između Gödelovih brojeva x i z. Vrijedi i obrnuto: da bi utvrdili vrijedi li određeni aritmetički odnos između dva Gödelova broja, dovoljno je utvrditi da li je metamatematički iskaz, čija je taj odnos slika, istinit.

Na isti način je metamatematički iskaz ‘Niz formula s Gödelovim brojem x nije dokaz formule s Gödelovim brojem z’ zrcaljen u aritmetičkom jeziku i to na sljedeći način: ‘~Dem (x,z)’.

Da bi iznijeli srž argumenta, moramo našoj notaciji dodati još nešto. Uzmimo primjer: formula ‘(∃x) (x = sy)’ ima Gödelov broj m, dok varijabla ‘y’ ima Gödelov broj 13. Supstituiramo li u toj formuli varijablu s Gödelovim brojem 13 numeral za m, dobijemo ‘(∃x) (x = sm)’ koja kaže da postoji x takav da je x neposredni sljedbenik od m. Taj broj je moguće izračunati ili mu dati sljedeću metamatematičku karakterizaciju: Gödelov broj za formulu koja je dobivena iz formule s Gödelovim brojem m supstituiranjem varijable s Gödelovim brojem 13 numeral za m. Ova karakterizacija jednoznačno određuje broj koji je neka aritmetička funkcija brojeva m i 13, što nam omogućuje da broj označimo i unutar aritmetičkog računa i to kao ‘sub (m,13,m), što je u aritmetiku preslikana navedena metamatematička karakterizacija broja. Sada možemo uočiti da je izraz ‘sub (y,13,y)’ slika metamatematičke karakterizacije ‘Gödelov broj za formulu koja je dobivena iz formule s Gödelovim brojem y supstituiranjem varijable s Gödelovim brojem 13 numeral za y’.

4.5. Srž Gödelova argumenta

Formulu ’~Dem (x,z)’ već smo ustanovili te sada na nju dodajmo prefiks ‘(x)’, što je oznaka univerzalne kvantifikacije. Dobivamo ’(x) ~Dem (x,z)’. Nova formula transkribirana u metamatematički jezik glasi: ‘Formula s Gödelovim brojem z ne može se demonstrirati’, tj. ‘Za formulu s Gödelovim brojem z nemoguće je navesti ijedan dokaz’.

Ono što je Gödel dokazao je da se određeni slučaj te formule ne može formalno demonstrirati. Da bismo konstruirali taj slučaj, prvo izložimo sljedeću formulu:

(1) (x) ~Dem (x, sub (y,13,y))

Koji metamatematički iskaz predstavlja ova formula? Prisjetimo se da izraz sub (y,13,y) predstavlja broj i to, metamatematički okarakteriziran, ‘broj formule dobivene iz formule sa Gödelovim brojem y supstituiranjem varijable s Gödelovim brojem 13 numeral za y'. Dakle, odgovor na postavljeno pitanje jest: 'formula s Gödelovim brojem sub (y,13,y) ne može se dokazati'.

Gödelov broj formule (1) je naravno izračunljiv. Pretpostavimo da je to broj n. Sada u formuli (1) varijablu s Gödelovim brojem 13 (varijabla y) supstituirajmo numeralom za n. Novu formulu nazovimo 'G', a glasi ovako:

(2) (G) (x) ~Dem (x, sub (n,13,n))

Formula G je, naime, taj poseban slučaj formule (x) ~Dem (x, z) za koji smo rekli da ćemo ga konstruirati. Ona također ima Gödelov broj. Koji? Naime, ako kao što kaže G, formula s Gödelovim brojem sub (n,13,n) nije dokaziva, tada nije dokaziva ona formula koja je nastala iz formule s Gödelovim brojem n (što je (x) ~Dem (x, sub (y,13,y))) supstitucijom varijable s Gödelovim brojem 13 (što je y) numeral za n. Kao rezultat dobivamo da je to formula (x) ~Dem (x, sub (n,13,n)), tj. G. Dakle, ako se G može demonstrirati, tada, kako G sama tvrdi, ne može se demonstrirati. Međutim, ako se G ne može demonstrirati, tada ispada da se može demonstrirati, čime bi se narušila korektnost sustava, s obzirom da bi imali dokazivu lažnu rečenicu, te konzistentnost aksioma aritmetike, s obzirom da bi bile dokazive određena propozicija i njezina negacija.

Slijedi, ako su aksiomi formalnog sustava aritmetike konzistentni, nemoguće je demonstrirati ni G ni negaciju od G, tj. formula G je formalno neodlučiva.

5. Zaključak

Gödelov dokaz nepotpunosti za elementarnu aritmetiku podijeljen je u ovome radu u tri veće cjeline od kojih prve dvije predstavljaju uvod u treću koja je u potpunosti posvećena samome dokazu.

U prvoj cjelini nazvanoj "Smullyanovi problemi" pomoću dva ilustrativna problema osmišljena od strane Raymonda Smullyana prikazuje se mehaniku dokaza, te se uvode pojmove autoreferenciranja i Gödelovog numeriranja.

U oba problema imamo mašinu koja ispisuje izraze koristeći se zadanim skupom znakova među kojima ispisuje i one nizove znakova koji se karakteriziraju kao rečenice (koje mogu biti istinite ili lažne, tj. poprimaju istinosnu vrijednost). Uvjet za ispisati rečenicu jest taj da ona bude istinita. Dakle, ako je rečenica ispisava, tada mora biti istinita. Postavlja se pitanje vrijedi li suprotno, tj. jesu li sve istinite rečenice ujedno i ispisive? Odgovor na to pitanje je negativan. U prvom primjeru za demonstraciju nemogućnosti ispisa svih istinitih rečenica uvodi se princip autoreferenciranja, dok ga se u drugom primjeru obogaćuje i principom Gödelovog numeriranja, čime se konstruira situacija analogna onoj u samom Gödelovom dokazu u kojoj umjesto pojma ispisivosti imamo pojam dokazivosti formalnim putem.

Druga cjelina u potpunosti je posvećena pojmu potpunosti i razumijevanju istoga u različitim kontekstima. Za pojam potpunosti nije moguće dati jednu definiciju koja će se odnositi na sve sustave, već, ovisno o sustavu na koji ga primijenjujemo, definiramo i pripadajuću potpnunost. Vidjeli smo da kada govorimo o potpunosti koja se odnosi na sustav logike prvog reda, govorimo o semantičkoj potpunosti, tj. slučaju kada je svaka valjana rečenica prvog reda (rečenica istinita u svakom modelu, neovisno o interpretaciji predikata i funkcija) ujedno i dokaziva. Kada smo govorili o potpunosti ne-logičkih sustava, govorili smo o deduktivnoj potpunosti, tj. onoj gdje je svaka logička istina takvog sustava - (rečenica za koju postoji barem jedan model koji ju čini istinitom) ujedno i formalno dokaziva, tj.da se radi o teoremu. Konačno, nepotpunost koju je Gödel dokazao je deduktivna nepotpunost sustava elementarne aritmetike te naravno i svakog neprotuslovnog sustava koji sadrži elementarnu aritmetiku.

Treći dio u potpunosti je posvećen samom Gödelovom dokazu nepotpunosti za elementarnu aritmetiku. Sastoji se od tri podcjeline. Prva podcjelina nazvana "Gödelovo pridruživanje brojeva (numeriranje)" detaljno prezentira tehniku jedinstvenog pridruživanja (Gödelovog) broja svakom znaku, formuli ili dokazu. Druga podcjelina nazvana "Aritmetizacija metamatematike" demonstrira kako metamatematičke sudove (one koji govore o matematici), nakon što je provedeno Gödelovo numeriranje, pretvoriti u aritmetičke sudove – one o kojima sami metamatematički sudovi i govore. U trećem dijelu, nazvanom "Srž Gödelova argumenta", konstruira se aritmetički sud koji je istinit, no nedokaziv.

Motivacija za pristupnje ovako kompleksnoj temi bila je želja za što boljim razumijevanjem Gödelovih rezultata kao jednih od najfascinatnijih i najbitnijih u povijesti logike. Iako zbog nedostataka u predznanju, kao i ograničenjima u vremenu i broju stranica, u radu mnogi detalji nisu obrađeni, nadam se mogućnosti da u daljnjem školovanju dodatno proširim i nadopunim svoje znanje o toj temi.

6. Literatura:

Knjige:

1. Hintikka,J: The principles of mathematics revisited, Cambridge University Press, 1996.
2. Hintikka, J.: On Gödel, Wadsworth, a divison of Thomas Learning, Inc., 2000.
3. Nagel, E., Newman, J. R.: Gödelov dokaz, Kruzak, Zagreb, 2001.
4. Smullyan, R. M.: Gödel's Incompleteness Theorems, Oxford University Press, 1992.

Internet izvori:

1. http://www.vusst.hr/~logika/pilot
2. *old.tel.fer.hr/files/peta/FORMAL/firstorder.pdf*
3. www.cs.pitt.edu/~utp/cs1502/notes/ch10-logic-of.../s13-FO-**validity**.ppt