Optimizacija portfelja

Dušan Munđar, dipl.ing.

(Objavljeno u Matematičko-fizičkom listu, Godina LIX, br 4/236, 2008./2009.)

UVOD

U ovom članku pokazat ćemo kako su statistički parametri (očekivanje i standardna devijacija) portfelja određeni statističkim parametrima (očekivanjem, standardnom devijacijom i korelacijom) imovina u portfelju. Navedeno će nam pomoći da shvatimo zašto diversifikacija smanjuje rizik portfelja. Spomenute pojmove ćemo definirati.

DEFINICIJA POJMOVA

Portfelj u financijama je skup različitih vrijednosnih papira u vlasništvu pojedinca ili poduzeća. Pod vrijednosnim papirom mogu se smatrati dionice, obveznice, komercijalni zapisi i slični pisani dokumenti. Rizik nastaje u prisustvu neizvjesnosti, odnosno u mogućnosti ostvarenja različitih ishoda, a smatra se stanjem koje nije poželjno, nosi gubitke ili ima katastrofalne posljedice. Najčešće se mjeri vjerojatnošću nastanka i posljedicama koje ostvarenje takvog ishoda može prouzročiti. Diversifikacijom smatramo kombiniranje različitih vrijednosnih papira u portfelj u cilju smanjenja vjerojatnosti ili posljedica ostvarenja rizika. Očekivanjem se smatra prosječan povrat kroz duži period, dok je standardna devijacija mjera odstupanja od očekivanja. Korelacija imovina mjeri smjer i jakost zajedničkog kretanja povrata dviju imovina, a mjeri se koeficijentom korelacije.

ODREĐIVANJE PARAMETARA IMOVINA U PORTFELJU

Na parametre se može promatrati iz dvije perspektive: povijesne, ostvareni prosječni povrati i odstupanje od prosječnog povrata u prošlosti te buduće kroz očekivanje povrata i odstupanja od očekivanog povrata u budućnosti. Ovdje ćemo pretpostaviti da će prosječni povrati, standardna devijacija te korelacija imovina ostati isti onima ostvarenima u prošlosti.

Neka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ označavaju povrate određene imovine X. Primjerice, ako su $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ cijene određene imovine, povrate možemo izračunati pomoću formule

$$x_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n$$

Očekivani povrat tada izračunamo kao aritmetičku sredinu povrata iz prošlosti

$$\mu_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Standardna devijacija s_X jednaka je kvadratnom korijenu varijance koja se izračuna pomoću formule

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Za određivanje korelacije između povrata dviju imovina (x_i) i (y_i) poslužit će nam kovarijanca koju možemo izračunati formulom

$$s_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Koeficijent korelacije tada iznosi

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

Koeficijent r_{XY} je pozitivan ukoliko povrati (x_i) i (y_i) imaju tendenciju istovremenog poprimanja pozitivnih, odnosno negativnih vrijednosti.

ODREĐIVANJE PARAMETARA PORTFELJA

Neka se portfelj sastoji od samo dvije imovine, nazovimo ih X i Y. Neka nadalje, udio imovine X iznosi ω, a udio imovine Y od $1-\omega$, gdje je $\omega \in [0,1]$. Ukoliko se portfelj na kraju svakog mjeseca presloži tako da udio imovina ostane jednak tada će povrat portfelja na kraju svakog mjeseca iznositi

$$\pi_i = \omega x_i + (1-\omega)y_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Time će i očekivani povrat biti jednak

$$\mu_\Pi = \omega\, \mu_X + (1-\omega)\, \mu_Y$$

Standardna devijacija, za razliku od očekivanog povrata ne može se izračunati kao linearna kombinacija standardnih devijacija. Dakle, općenito je

$$s_\Pi \neq \omega s_X + (1-\omega)s_Y$$

Isto vrijedi i za varijancu portfelja. Ona se pak može izračunati pomoću formule

$$s_\Pi^2 = \omega^2 s_X^2 + (1-\omega)^2 s_Y^2 + 2\omega(1-\omega)s_X s_Y r_{XY}$$

Nadalje, pošto je $r_{XY} \leq 1$, slijedi

$$s_\Pi^2 \leq \omega^2 s_X^2 + (1-\omega)^2 s_Y^2 + 2\omega(1-\omega)s_X s_Y$$

odnosno,

$$s_\Pi^2 \leq (\omega s_X + (1-\omega)s_Y)^2$$

Iz navedenog proizlazi da je standardna devijacija portfelja od dvije imovine manja ili jednaka linearnoj kombinaciji standardnih devijacija imovina koje čine portfelj. Intuitivno, pošto manja standardna devijacija znači manje odstupanje od očekivanog povrata to povlači manje izglede za nepoželjne ishode čime se smanjuje rizik.

Da bi ipak izmjerili uspješnost diversifikacije možemo se poslužiti koeficijentom varijacije portfelja koji je jednak omjeru standardne devijacije i očekivanja povrata.

$$CV = \frac{s_\Pi}{\mu_\Pi}$$

Uočavamo da je koeficijent varijacije proporcionalan standardnoj devijaciji, a obrnuto proporcionalan očekivanom povratu pa zaključujemo da veći koeficijent označava rizičniji portfelj.

PRIMJER

Pretpostavimo da se portfelj Π sastoji od samo dvije imovine, X i Y. Udio imovine X iznosi $\omega = 0{,}6$, a udio imovine Y od $1 - \omega = 0{,}4$. Očekivani povrat imovine X iznosi $8\,\%$, a imovine Y $12\,\%$. Standardna devijacija imovine X iznosi $14\,\%$, a imovine Y $18\,\%$. Koeficijent korelacije r_{XY} neka je $0{,}3$. Odredimo očekivani povrat portfelja koji se sastoji od tih dviju imovina te njegovu standardnu devijaciju.

Očekivani povrat portfelja iznosi

$$\mu_\Pi = \omega\, \mu_X + (1-\omega)\, \mu_Y = 0{,}6 \cdot 8\,\% + 0{,}4 \cdot 12\,\% = 9{,}6\,\%$$

Varijanca portfelja iznosi

$$s_\Pi^2 = 0{,}6^2 (14\%)^2 + 0{,}4\, (18\,\%)^2 + 2\ 0{,}6\ 0{,}4\ (14\%)(18\%)\ 0{,}3 \approx 0{,}008237$$

Tada proizlazi da je standardna devijacija portfelja $s_\Pi \approx 9{,}08\,\%$.

Da bi provjerili uspješnost diversifikacije pogledajmo tri različita koeficijenta varijacije, za imovinu X, za imovinu Y te za portfelj Π.

$$CV_X = \frac{14\,\%}{8\,\%} = 1{,}75 \qquad CV_Y = \frac{18\,\%}{12\,\%} = 1{,}5 \qquad CV_\Pi \approx \frac{9{,}08\,\%}{9{,}6\,\%} \approx 0{,}95\,.$$

Zaključujemo da portfelj koji se sastoji od dviju imovina ima manji koeficijent varijacije od imovina gledanih individualno, odnosno mjera odstupanja od očekivanog povrata po jedinici očekivanog povrata za njega je najmanja.

LITERATURA

[1.] Alexader, C., Sheedy, E., *The Professional Risk Managers' Handbook: A Comprehensive Guide to Current Theory and Best Practices,* PRMIA Publications, 2005.

[2.] Sarapa, N., *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb,1992.