Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Tomislav Fratrović

ASIMPTOTIČKA ANALIZA TOKA NENEWTONOVSKOG FLUIDA KROZ POROZNU SREDINU

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

Mentor:
Prof.dr.sc. Eduard Marušić-Paloka

Zagreb, 2012.

Zahvala

Zahvaljujem svima koji su svojim savjetima, podrškom i strpljenjem pridonijeli da ovaj rad ugleda svjetlo dana.
Srdačno zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Eduardu Marušiću-Paloki na nesebičnoj pomoći pri oblikovanju teme i realizaciji ovog rada.
Posebno zahvaljujem svojoj obitelji na razumijevanju i bezuvjetnoj potpori.

Sadržaj

Oznake

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ porozna sredina (otvoren, omeđen, povezan skup s Lipschitzovim rubom)

Ω_ε područje toka fluida

T_ε nepropusni dio porozne sredine

T prototip nepropusnog dijela (prepreke)

$\mu(\omega)$ Lebesgueova mjera skupa $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$p, g, \phi \ldots$ skalarne veličine/funkcije (vrijednost je iz $\mathbb{R}$)

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\phi} \ldots$ vektorske veličine/funkcije (vrijednost je iz $\mathbb{R}^n$)

$\Phi, \Psi, \Xi \ldots$ tenzorske veličine/funkcije (vrijednost je iz $\mathbb{R}^{n\times n}$)

$e(\boldsymbol{v}) = \operatorname{sym} \nabla \boldsymbol{v}$ simetrizirani gradijent funkcije $\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{n}$ jedinični vektor vanjske normale zadanog područja

$1 < r < 2$ indeks toka polimernog fluida

$B(x_0, R) = B_R(x_0)$ otvorena kugla u $\mathbb{R}^n$, radijusa $R > 0$, sa središtem u x_0

$S^{n-1} = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ jedinična sfera u $\mathbb{R}^n$

R^ε operator restrikcije s područja Ω na područje Ω_ε

$\mathcal{U}_\eta$ funkcija permeabilnosti

$\mathcal{G}$ funkcija otpornosti

$L^p(\Omega)$, $|\cdot|_{L^p(\Omega)}$ prostor p-integrabilnih funkcija, s pripadajućom normom

$L^p(\Omega)/\mathbb{R}$ kvocijentni prostor, izomorfan prostoru
$L^p_0(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega f\,dx = 0 \right\}$

$W^{m,p}(\Omega)$, $|\cdot|_{W^{m,p}(\Omega)}$ Soboljevljevi prostori, s pripadajućom normom

$H^m(\Omega)$ Soboljevljev prostor $W^{m,2}(\Omega)$

$D^{m,p}(\Omega)$, $|\cdot|_{D^{m,p}(\Omega)}$ homogeni Soboljevljevi prostori, s pripadajućom normom

$W^{m,p}_0(\Omega)$, $D^{m,p}_0(\Omega)$ Soboljevljevi, odn. homogeni Soboljevljevi prostori funkcija s tragom nula

$W^{-m,p'}(\Omega)$, $D^{-m,p'}(\Omega)$ dualni prostori $(W^{m,p}_0(\Omega))'$ odn. $(D^{m,p}_0(\Omega))'$

$W^{m,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$, $D^{m,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ Soboljevljevi, odn. homogeni Soboljevljevi prostori funkcija $W^{m,p}_0(\Omega)$, $D^{m,p}_0(\Omega)$ s divergencijom nula

N_f Nemitskijev operator pridružen funkciji f

Predgovor

Tijekom znanstvenog usavršavanja upoznavao sam razne matematičke discipline i grane, od kojih su neke više privlačile moju pažnju od drugih, no uvijek sam zadržao poseban afinitet prema fizici i praktičnim problemima primijenjene matematike. Smatram da sam utoliko imao veliku sreću što sam u ranoj fazi studija imao čast upoznati mentora, čiji je znanstveni rad spojio fizikalnu disciplinu mehanike fluida s matematičkom formalnošću i egzaktnošću. To je usmjerilo moj interes na proučavanje problema koji uključuju Navier-Stokesov sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i metoda za njihovo rješavanje. Posebno se ovdje radi o problemima čija je priroda takva da se u jednadžbama koje ih opisuju pojavljuje barem jedan mali parametar. Upravo ta činjenica da se on pojavljuje prilikom opisivanja određenog fizikalnog problema omogućava pristup koji se postupno razvijao posljednjih desetljeća i koji je generirao značajne rezultate u primjeni i utjecao na razvoj primijenjene matematike. Naime, radi se o metodama asimptotičke analize, matematičke discipline koja se bavi pročavanjem višedimenzionalnih problema i metodama njihova efektivnog reduciranja za potrebe inženjerskog pristupa. Izvorištem asimptotičkih metoda možemo smatrati proučavanje problema slabo viskoznog fluida, gdje koeficijent viskoznosti kao mali parametar ima značajan učinak na ponašanje fluida, posebno u rubnom sloju uz krutu stijenku. Mali parametar može se pojaviti i zbog prirode područja toka koje se promatra kada su njegove dimenzije različitog reda veličine, kao na primjeru toka krvi kroz arteriju[26].

Široku primjenu asimptotičkih metoda nadalje nalazimo u proučavanju kompozitnih materijala u modernoj industriji u kojima je, za razliku od rubnog sloja, utjecaj mikrostrukture na makrostanje puno kompleksniji i prisutan u cijelom području domene. Kada je promatrano područje homogeno, ono se modelira kao neprekinuta sredina, što kod kompozitnih materijala nije moguće. Ona predstavljaju heterogenu sredinu, u pravilu sastavljenu od više različitih homogenih materijala pomiješanih periodično s periodom koji je mali u odnosu na dimenziju cijelog područja. Pretpostavka o periodičkoj strukturi ima fundamentalno značenje za asimptotičku metodu koju nazivamo homogenizacija i koju ćemo u nastavku koristiti.

Posebno ističemo problem protjecanja fluida kroz poroznu sredinu, sastavljenu od propusnog i nepropusnog dijela, čije je proučavanje glavna tema ovog rada. Osnovne ideje asimptotičke analize, kao što su višestruko skaliranje (engl. *multi-scaling*) i asimptotički razvoj po potencijama malog parametra, ovdje se koriste za proučavanje utjecaja mikrostrukture na globalnom nivou, nastojeći ne ulaziti u rješavanje nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi mehanike fluida u tako kompliciranoj geometriji kao što je ona porozne sredine. Za potrebe simuliranja toka kroz poroznu sredinu potrebno je odrediti takozvani zakon filtracije, kojeg čine efektivne odnosno usrednjene jednadžbe u kojima su podaci o poroznoj strukturi sadržani kroz usrednjene parametarske veličine kao što su poroznost ili permeabilnost. Upravo je određivanje tih efektivnih koeficijenata i jednadžbi, kao i ocjena njihovih pogrešaka u odnosu na početne jednadžbe, zadaća postupka homogenizacije. Naime, u originalnim jednadžbama toka pojavljuju se dvije duljinske skale:

makroskala ili skala čitavog područja toka reda veličine 1, te mikroskala reda veličine ε koja mjeri veličinu jedinke porozne sredine (ćelije) i veličinu oscilacija. Razlika u redu veličine tih dviju skala osigurava nam postojanje malog parametra $\varepsilon > 0$ i u ovisnosti o njemu dobivamo niz rješenja čije ponašanje promatramo na limesu kada $\varepsilon \to 0$. Motivacija za to je činjenica da na limesu nestaje mikrostrukture koja generira oscilacije visoke frekvencije, odnosno, bolje rečeno, dolazi do usrednjenja njenog utjecaja.

Sam postupak homogenizacije detaljno je opisan u klasičnim udžbenicima, na primjer u Bensoussan - Lions - Papanicolaou[12] ili u Sanchez-Palencia[51], gdje se u dodatku može pronaći rezultat L. Tartara[54] vezan uz dokaz konvergencije homogenizacijskog procesa, te nešto novijeg datuma u udžbeniku Hornung[33]. Što se tiče rezultata o homogenizaciji u poroznoj sredini, postoji članak G. Allairea [2] iz 1991. godine, koji u svom uvodu vrlo pregledno i sistematično opisuje dotadašnje rezultate, koje ćemo ovdje ukratko ponoviti. Taj se rad bavi homogenizacijom Stokesove i Navier-Stokesove jednadžbe s Dirichletovim rubnim uvjetom koja je postavljena na otvorenom skupu s mnoštvom periodično raspoređenih "rupa". Taj slučaj odgovara toku newtonovskog fluida kroz polje fiksnih čvrstih prepreka, odnosno nepropusnih dijelova. Ako je domena sastavljena periodično od ćelija reda veličine ε, u kojoj je nepropusni dio također reda veličine ε, tada se kao rezultat dobije dobro poznati Darcyjev zakon (v. [35], [41] i [51] kao primjer primjene dvoskalne metode). Autor tom rezultatu dodaje izvod također dobro poznatog Brinkmanovog zakona u slučaju kada je veličina nepropusnog dijela (prepreke) kritična, što za trodimenzionalni slučaj znači da je reda veličine ε^3. Nadalje, pokazuje se da je Brinkmanov zakon prijelazni oblik između dva tipa rezultata koji se postižu homogenizacijom Stokesove jednadžbe. S jedne strane stoji Darcyjev zakon kao zakon filtracije u slučaju kada je veličina prepreka asimptotički veća od kritične vrijednosti, dok se u slučaju kada je ona asimptotički manja od kritične vrijednosti kao homogenizirani problem opet pojavljuje Stokesova jednadžba. U [1] nalazimo još precizniji rezultat o neprekinutosti Darcyjevog zakona u slučaju kada je udio nepropusnog dijela mali u odnosu na veličinu propusnog dijela - to je rezultat o takozvanom limesu malog krutog dijela (engl. *low-volume-fraction limit*).

Namjera nam je u ovome radu, korištenjem spomenutih metoda, doći do analognih rezultata za nenewtonovske fluide. Na početku vršimo pregled nenewtonovskih fluida i njihovog modeliranja, te odabiremo one fluide koji zadovoljavaju zakon potencije. Zatim modeliramo poroznu sredinu sastavljenu od dva dijela - propusnog i nepropusnog, te detaljno opisujemo dimenzije u mikrostrukturi, kao i različite odnose veličina propusnog i nepropusnog dijela. Promatramo homogenizirane probleme za razne slučajeve, te tražimo njihovu međusobnu povezanost i limes malog krutog dijela, kao i specifičan oblik homogeniziranog problema u slučaju kritične veličine prepreka, takozvani Brinkmanov zakon.

U Karlovcu, travanj 2012. Tomislav Fratrović

Poglavlje 1

Pretpostavke u modeliranju toka fluida kroz poroznu sredinu

1.1 Konstitucijske pretpostavke u klasifikaciji fluida

U rješavanju problema mehanike fluida jedna od osnovnih postavki je izbor modela fluida koji najbolje opisuje njegova fizikalna, a ako je potrebno, i kemijska odnosno reaktivna svojstva. Fizikalne karakteristike materijala određene su tenzorom naprezanja koji u najopćenitijem slučaju ima oblik

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\,\mathbb{I} + \boldsymbol{\tau},$$

gdje je p skalarna veličina koja odgovara termodinamičkom tlaku, $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jedinični tenzor, a $\boldsymbol{\tau}$ devijatorni odnosno viskozni dio tenzora naprezanja zadan konstitucijskim zakonom

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\nabla \boldsymbol{v}, \rho, T),$$

odnosno ovisnošću o gradijentu brzine, gustoći i temperaturi fluida. Takvi fluidi koji ne ovise o povijesti gibanja odnosno deformacije nazivaju se *generalizirani newtonovski fluidi.* Zanemarimo li utjecaj termodinamičkih procesa i ako se ograničimo na promatranje inkompresibilnih fluida koji dozvoljavaju samo izohorička gibanja, dolazimo do zaključka da u području toka vrijedi takozvani nužni uvjet inkompresibilnosti (solenoidalnost polja brzine $\boldsymbol{v}$)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

a "tlak" p više ne predstavlja termodinamičku veličinu, nego je u matematičkom smislu dualna varijabla koja odgovara navedenom uvjetu inkompresibilnosti. Također, dolazimo do zaključka da viskozni dio tenzora naprezanja ovisi samo o simetriziranom dijelu gradijenta brzine

$$e(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\big(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^{\tau}\big),$$

koji se naziva tenzor stope naprezanja (engl. *rate-of-strain tensor*), a ponekad i tenzor deformacija. Tu je vezu moguće zapisati pomoću funkcije takozvane prividne ili efektivne viskoznosti $\eta(\Xi)$, $\Xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \eta\big(e(\boldsymbol{v})\big)e(\boldsymbol{v}).$$

Upravo prema karakteru te funkcijske ovisnosti razlikujemo nekoliko modela od kojih ovdje navodimo samo najznačajnije ili, bolje rečeno, najjednostavnije.

1.2 Newtonovski i nenewtonovski fluidi

Po svojoj jednostavnosti, ali isto tako i po zastupljenosti u problemima mehanike fluida, na prvom mjestu je Newtonov model, koji postulira linearni odnos smičnog naprezanja i gradijenta brzine. Najveća prednost ovog modela je ta što se velika većina fluida, iako ne svi, ponaša na ovaj način. Takvi su fluidi na primjer voda, većina vodenih otopina, ulja, glicerin, zrak, te svi plinovi (koji nisu inkompresibilni pa ih ovdje ne proučavamo). Jednostavniji modeli u primjeni uzimaju newtonovske fluide kao zadovoljavajuću aproksimaciju stvarnog stanja.

Koeficijent proporcionalnosti u ovom linearnom odnosu nazivamo viskoznost i u ovom je slučaju ona konstantna

$$\eta\big(e(\boldsymbol{v})\big) = 2\mu \in \mathbb{R},$$

a tenzor naprezanja newtonovskog inkompresibilnog fluida glasi

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\,\mathbb{I} + 2\mu e(\boldsymbol{v}).$$

Njegovim uvrštavanjem u fizikalni zakon očuvanja količine gibanja dobivaju se fundamentalne jednadžbe gibanja newtonovskog fluida, Navier-Stokesove jednadžbe, koje i nakon dva stoljeća proučavanja još uvijek ostavljaju otvorena pitanja. U slučaju kada je newtonovski inkompresibilni fluid pod utjecajem volumne sile $\boldsymbol{f}$, jednadžbe gibanja u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ imaju oblik

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \nu \Delta \boldsymbol{v} - \nabla p + \boldsymbol{f} & \text{u } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 & \text{u } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

uz zadani rubni, odnosno početni uvjet. Jednostavniji oblik tog sustava dobije se zanemarivanjem nelinearnog člana i naziva se Stokesova jednadžba, a ako veličine ne ovise o vremenu, govorimo o stacionarnom obliku. Mnogi radovi bave se tematikom koja uključuje problem filtracije newtonovskog fluida kroz poroznu sredinu. Osnovni rezultat bio je formalna potvrda odnosno izvod takozvanog Darcyjevog zakona (otprije poznatog i korištenog u inženjerskoj literaturi) pomoću postupka homogenizacije (v. Lions[41] i Sanchez-Palencia[51]).

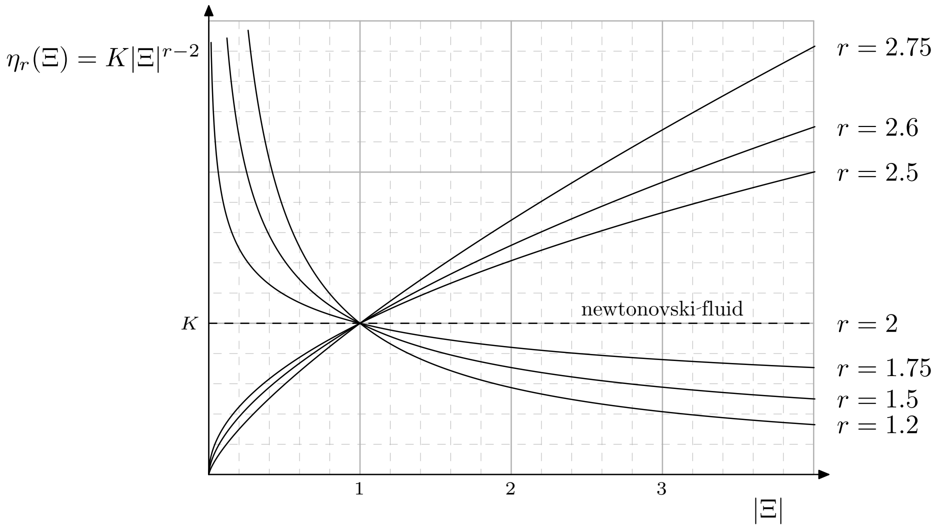
U određenim slučajevima Newtonov model nije zadovoljavajući iz jednostavnog razloga što viskoznost nije konstantna nego se značajno mijenja u ovisnosti o stopi smicanja (engl. *shear rate*), odnosno o veličini smične deformacije koju mjeri $|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})|$, gdje je

$$|\Xi| = \sqrt{\Xi : \Xi} = \sqrt{\mathsf{tr}(\Xi\, \Xi^{\tau})}, \quad \Xi \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Od takvih nenewtonovskih ili kvazinewtonovskih fluida (v. Rosen[49]) najjednostavniji su oni koji zadovoljavaju zakon potencije ili Ostwald-de Waele model, gdje je efektivna viskoznost dana pomoću funkcije

$$\eta(\Xi) = \eta_r(\Xi) = K\, |\Xi|^{r-2}, \quad \Xi \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Parametri koji se pojavljuju u izrazu karakteriziraju pojedinu vrstu fluida. Konstanta $K \in \langle 0, +\infty \rangle$ se naziva konzistencija toka, a $r \in \langle 1, +\infty \rangle$ indeks ponašanja toka.



Slika 1.1: Graf funkcije η_r.

Ovisno o indeksu toka postoje dvije vrste fluida bitno različitih ponašanja koje ovdje opisujemo.

1. slučaj $(1 < r < 2)$

Ovdje efektivna viskoznost fluida opada s povećanjem stope smicanja $|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})|$, jer eksponent postaje negativan. Takve fluide nazivamo pseudoplastičnim ili polimernim fluidima, a radi se uglavnom o mješavini velikih polimernih molekula u otapalu s manjim molekulama: glina, mlijeko, želatina, tekući cement... Pretpostavlja se da je ovakvo ponašanje posljedica nasumičnog kretanja i sudaranja velikih lanaca polimernih molekula pri blagom smicanju, koje se postepeno poravnavaju u smjeru povećanog smičnog naprezanja i time pružaju sve manji otpor.

Jedan jednostavan primjer pseudoplastičnog fluida je gel za kosu - teško ga je otresti s ruke (veliki otpor blagom smicanju), dok s druge strane pruža vrlo mali otpor pri trljanju prstima (pri većem smičnom naprezanju).

2. slučaj ($r > 2$)

Fluide za koje je indeks toka veći od 2 nazivamo dilatantnim i kod njih je efektivna viskoznost to veća što je veća stopa smicanja. Oni se rijetko susreću, ali jednostavan primjer je zasićena otopina škrobnog brašna u vodi. Objašnjenje za ovakvo ponašanje leži u činjenici da su molekule vode pri povećanom smicanju istisnute između molekula škroba koji međudjelovanjem pružaju veći otpor naprezanju.
Zanimljiva primjena dilatantnog fluida je u vozilima s pogonom na sva četiri kotača, gdje se pomoću njega regulira omjer prijenosa snage s prednjih na stražnje kotače. Naime, na terenu s dovoljnim trenjem nema razlike u okretanju prednjih i stražnjih kotača, pa je i smicanje malo i nema prijenosa snage. U slučaju da kotači primarnog (prednjeg) pogona počnu proklizavati, povećava se smično naprezanje, a s njime i viskoznost fluida, te se snaga prenosi na sekundarne (stražnje) kotače, oslobađajući time vozilo.

Matematička veza u zakonu potencije je korisna zbog svoje jednostavnosti, omogućavajući u mnogim problemima nalaženje egzaktnog rješenja. U daljnjem proučavanju odabiremo upravo fluide koji zadovoljavaju zakon potencije, preciznije - polimerne fluide. No, s druge strane, ovaj model samo približno opisuje ponašanje stvarnog nenewtonovskog fluida, što ipak ograničava njegovu primjenu. Najveći nedostatak je nerealno opisivanje ponašanja fluida za granične vrijednosti stope smicanja kada $|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})| \to 0$ i $|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})| \to \infty$. Važno je primijetiti sljedeće činjenice:

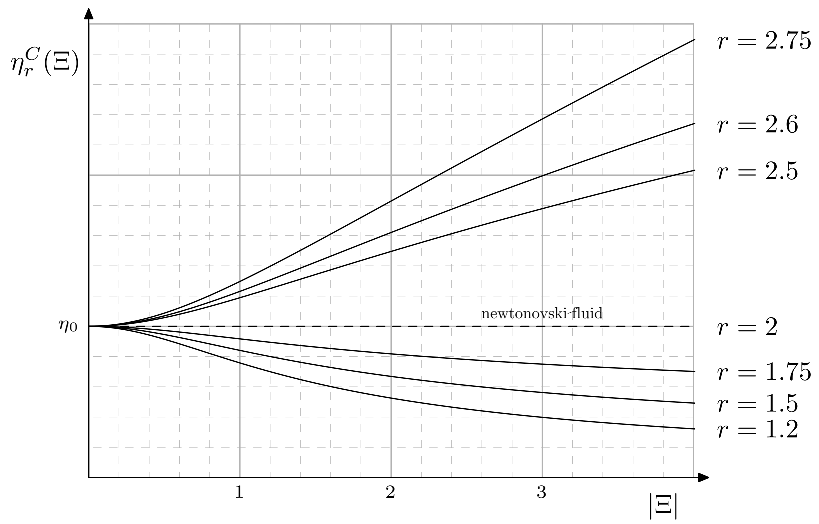
$$\text{za } 1 < r < 2: \quad \lim_{|\Xi| \to 0} \eta_r(\Xi) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{|\Xi| \to \infty} \eta_r(\Xi) = 0,$$

$$\text{za } r > 2: \quad \lim_{|\Xi| \to 0} \eta_r(\Xi) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{|\Xi| \to \infty} \eta_r(\Xi) = \infty.$$

Neomeđenost viskoznosti i ponašanje za male vrijednosti oko nule nije u skladu s eksperimentalnim rezultatima, jer stvarni fluid posjeduje i minimalnu i maksimalnu vrijednost viskoznosti u ovisnosti o svojim fizikalnim osobinama na molekularnom nivou. Problematično ponašanje zakona potencije u graničnim područjima kada krivulja viskoznosti odstupa od realnog stanja, preciznije za $|\Xi| \to 0$ kada $\eta(\Xi) \to \eta_0 \neq 0$ i za $|\Xi| \to \infty$ kada $\eta(\Xi) \to \eta_\infty < \infty$ (za $1 < r < 2$) donekle rješava empirijski Carreauov zakon:

$$\eta_r^C(\Xi) = (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + K\, |\Xi|^2)^{r/2-1} + \eta_\infty, \qquad \Xi \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

s koeficijentima $\eta_0 > \eta_\infty > 0$, $K > 0$, i indeksom toka r.

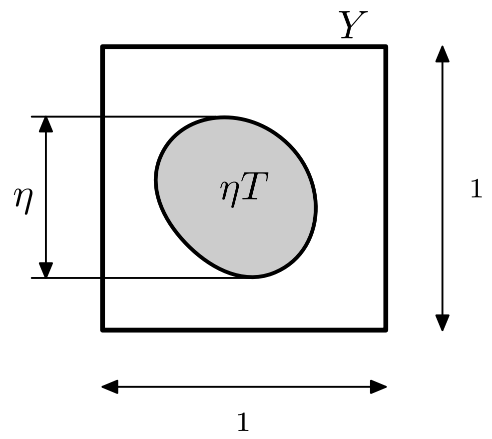


Slika 1.2: Graf funkcije η_r^C.

1.3 Modeliranje porozne sredine

Pod pojmom filtracije fluida podrazumijeva se tok kroz poroznu sredinu odnosno materijal koji je ispunjen mnoštvom "rupa" odnosno perforacija ili, bolje rečeno, krutih inkluzija koje predstavljaju neprovodljive prepreke i koje fluid svojim tokom optače. Takav porozni materijal može biti prirodnog ili umjetnog porijekla, a to onda utječe i na samu formu njegovog nepropusnog dijela, pri čemu mislimo na oblik pojedinih prepreka i njihovu eventualnu uniformnu raspoređenost. Donekle je fizikalno opravdano pretpostaviti statističku homogenost, kao i međusobnu sličnost pojedinih prepreka, pa tada govorimo o periodičkoj poroznoj sredini ili domeni. S druge strane, pretpostavka da se radi o mreži fiksnih prepreka, koje ne mijenjaju položaj dok ih fluid optače, nije baš u skladu sa stvarnim stanjem, ali značajno pojednostavljuje model.

Neka je Ω otvoren, omeđen i povezan skup u $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ s Lipschitzovim rubom $\partial\Omega$, takav da je lokalno smješten samo s jedne strane svoje granice. On predstavlja materijal s periodičnom poroznom strukturom koja se na makroskopskom planu ne primjećuje, ali koja omogućava protjecanje fluida kroz propusni dio. Kako bismo opisali periodičku geometriju mikrostrukture s malim periodom ε, definirajmo prvo prototip pore na jediničnoj ćeliji sa središtem u ishodištu $Y = \langle -1/2, 1/2\rangle^n = \mathcal{Y}_\eta \cup \eta T$. Y je sastavljen od dva dijela: zatvorenog povezanog skupa $\eta T \subset\subset Y$ (koji predstavlja nepropusni dio), skaliranog parametrom η i kompaktno sadržanog u Y, i otvorenog skupa $\mathcal{Y}_\eta = Y \setminus \eta T$ (odnosno propusnog dijela ili područja toka). Pretpostavljamo da je ηT pozitivne mjere u $Cl\, Y$ i strogo sadržan unutar sfere upisane jediničnoj ćeliji Y, tako da je disjunktan s njenim rubom. Zaključujemo da je tada i $\mathcal{Y}_\eta$ povezan skup strogo pozitivne mjere. Nadalje, pretpostavljamo da



Slika 1.3: Područje toka (propusni dio) u jediničnoj ćeliji $\mathcal{Y}_\eta = Y \setminus \eta T$.

oba skupa imaju Lipschitzov rub i da su lokalno smješteni samo s jedne strane svoje granice. Svaka jedinka danog poroznog materijala je po pretpostavci homeomorfna slika jedinične ćelije Y i to po preslikavanju $\Pi^\varepsilon_{\mathbf{k}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, koje je kompozicija translacije za $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ i homotetije s faktorom ε.

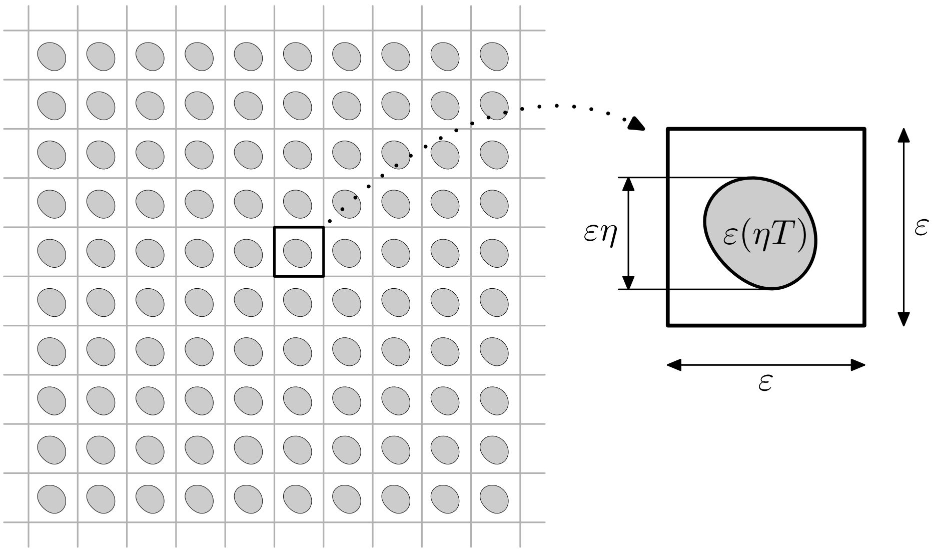
Podijelimo prvo cijeli prostor na pravilnu mrežu elemenata veličine ε:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} Y^{\varepsilon,\mathbf{k}}, \qquad Y^{\varepsilon,\mathbf{k}} = \Pi^\varepsilon_{\mathbf{k}}(Y) = \varepsilon(Y + \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n,$$

gdje je svaki takav element unija homeomorfnih slika propusnog i nepropusnog dijela jedinične ćelije Y po istom preslikavanju $\Pi^\varepsilon_{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned} \Pi^\varepsilon_{\mathbf{k}}(\eta T) &= \varepsilon(\eta T + \mathbf{k}), \\ \Pi^\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathcal{Y}_\eta) &= \varepsilon(\mathcal{Y}_\eta + \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Definirajmo indeksni skup $I = \left\{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^n \,\middle|\, \Pi^\varepsilon_{\mathbf{i}}(Y) \subset \Omega\right\}$. Na taj smo način indeksirali sve ćelije koje ne sijeku rub od Ω. Iz tehničkih razloga pretpostavljamo da one ćelije porozne sredine za koje vrijedi $Y^{\varepsilon,\mathbf{k}} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ ne sadrže nepropusni dio i, fizikalno gledajući, to ne utječe značajnije na model.



Slika 1.4: Dio porozne sredine.

Sada možemo označiti nepropusni dio zadane porozne sredine

$$T_\varepsilon = \bigcup_{\mathbf{k}\in I} \Pi^\varepsilon_{\mathbf{k}}(\eta T),$$

a područje toka sa

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus T_\varepsilon.$$

Ukupan broj ćelija s preprekama koje prekrivaju skup Ω ovisi o ε i taj broj zadovoljava sljedeće:

$$N(\varepsilon) = \frac{\mu(\Omega)}{\varepsilon^n}(1 + o(1)).$$

Prototip nepropusnog dijela T u jednom elementu mreže kojom je podijeljeno promatrano područje Ω nema unaprijed zadani oblik. Mnogi rani rezultati o filtraciji fluida kroz poroznu sredinu postuliraju sferne prepreke, što naravno pojednostavljuje model, a u određenim slučajevima daje i eksplicitno rješenje problema. Ovdje zadržavamo samo slabi zahtjev regularnosti ruba koji je tehničke prirode i koji garantira regularnost rješenja. Rezultati koje

dobivamo ovdje ne ovise prvenstveno o obliku prepreke, već o malom parametru η, koji utječe na veličinu prepreke u ćeliji periodične domene i kontrolira omjer nepropusnog i propusnog dijela porozne sredine. Preciznije, rezultati ovise o asimptotičkom ponašanju parametra η u procesu homogenizacije, kada broj ćelija teži u beskonačnost, a njihova veličina k nuli.
Valja napomenuti da je period periodične porozne sredine puno manji od duljine područja toka ($\varepsilon << L$), što nam daje razliku u redu veličine makroskale koja mjeri čitavo područje Ω i mikroskale porozne strukture. Ta je pretpostavka ključna za postupak homogenizacije, jer nam daje mali parametar ε.

Poroznu je sredinu moguće modelirati i bez pretpostavke o periodičnosti porozne strukture kao u [50]. Ondje su nepropusni dijelovi na slučajan način raspoređeni po području Ω, tvoreći na taj način statistički homogeni materijal. Iako je taj model možda bliži realnom stanju, kod njega se nailazi na probleme nešto drugačijeg karaktera, čije se rješavanje oslanja na matematički upitne argumente, a u konačnici daje iste rezultate kao i periodički model.

Poglavlje 2

Pregled rezultata i poznatih zakona filtracije

2.1 Jednadžbe gibanja: Navier-Stokesov i Stokesov sustav

Za newtonovski fluid puni oblik jednadžbi gibanja nosi naziv Navier-Stokesov sustav. Jednadžbe se izvode iz zakona očuvanja mase, količine gibanja i zahtjeva invarijantnosti na odabir sustava referencije, te uz inicijalnu pretpostavku oblika tenzora naprezanja newtonovskog inkompresibilnog fluida

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\,\mathbb{I} + 2\mu e(\boldsymbol{v}); \quad e(\boldsymbol{v}) = \operatorname{sym} \nabla \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\big(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^{\tau}\big).$$

Kao što smo ranije zaključili, sustav (1.1), uz prateće rubno-početne uvjete, sadrži inercijalni član $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$ koji je višeg reda od ostalih članova u jednadžbi. Ako je brzina toka mala, odnosno ako pretpostavimo da je za malu vrijednost $\delta > 0$, na primjer, $|\boldsymbol{v}\,| = O(\delta)$, tada slijedi

$$|\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\,| = O(\delta^2),$$

što znači da se za male vrijednosti δ taj nelinearni član može zanemariti i izbaciti iz jednadžbi, čineći ih jednostavnijim za proučavanje. Za stacionarni oblik dobivamo (uzimajući također radi jednostavnosti $\nu = 1$):

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{u } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 & \text{u } \Omega, \end{cases}$$

uz što zadajemo i određeni rubni uvjet. Fizikalno opravdanje ovakve aproksimacije postoji u slučaju da je protok fluida zaista spor, odnosno da je brzina mala. To je svakako slučaj u našem problemu filtracije kroz porozni materijal, na primjer u podzemnim tokovima.

Pod nazivom Stokesov sustav, često govorimo o takvoj vrsti novonastalog, lineariziranog oblika jednadžbi, koji se čak ponekad niti ne odnosi na tok newtonovskog fluida. Tako, na primjer govorimo i o nenewtonovskom (nelinearnom) Stokesovom sustavu, kada umjesto Laplaceovog imamo neki drugi diferencijalni operator. Za fluide koji zadovoljavaju zakon potencije, gdje je osnovna pretpostavka da tenzor naprezanja ima oblik

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\,\mathbb{I} + |e(\boldsymbol{v})\,|^{r-2}\; e(\boldsymbol{v}),$$

pod nazivom stacionarni (nelinearni) Stokesov sustav, na primjer s takozvanim *no-slip* uvjetom na rubu područja Ω, dakle mislimo na

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big\{\,|e(\boldsymbol{v})\,|^{r-2}\; e(\boldsymbol{v})\big\} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{u } \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 & \text{u } \Omega, \\ \boldsymbol{v} = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2 Homogenizacija i izračun limesa malog krutog dijela

Porozna sredina se ubraja u kompozitne materijale, sačinjene od barem dva tipa komponenti s različitim fizikalnim svojstvima. To ne onemogućava primjenu zakona mehanike kontinuuma, ali zbog nehomogenosti materijala dolazi do pojave diskontinuiteta, odnosno do osciliranja u ponašanju. To se očituje jedino na mikroskopskoj skali, pa je određivanje makroskopskog ponašanja jedna od primarnih zadaća. Nastoji se odrediti globalni zakon filtracije, koji bez zadiranja u kompliciranu geometriju, kao što je to u slučaju porozne sredine, daje jednadžbe gibanja. U tome značajnu ulogu ima postupak homogenizacije kao način i kao skup matematičkih tehnika u proučavanju asimptotičkog ponašanja sredine s periodičkom ili skoro periodičkom mikrostrukturom. Ukratko, postupak obuhvaća proučavanje limesa kada broj ćelija teži u beskonačnost, a njihova veličina k nuli. Pretpostavka o periodičkoj strukturi ima fundamentalno značenje za homogenizaciju i omogućava da u problemu filtracije kumulativni učinak nepropusnih mikroprepreka koje usporavaju fluid opišemo usrednjenim efektivnim jednadžbama zadanim na homogenom području, bez prepreka.
U najjednostavnijem slučaju toka newtonovskog fluida kroz poroznu sredinu takve efektivne jednadžbe nose naziv *Darcyjev zakon*, dobro poznat u inženjerskoj literaturi. Na primjer, izvod Darcyjevog zakona iz fundamentalnih jednadžbi hidrodinamike može se pronaći u Bear[8] ili Whitaker[55], dok su za izvod korištenjem dvoskalne metode zaslužni Lions[41] i Sanchez-Palencia[51], te L.Tartar[54] za dokaz konvergencije energetskom metodom.
Darcyjev zakon nije jedini koji opisuje tok fluida kroz poroznu sredinu.
Brinkman je u svom radu [20] predstavio novi oblik jednadžbi, u određenom

smislu taj je oblik između Darcyjevog zakona i Stokesove jednadžbe. U tom, takozvanom *Brinkmanovom zakonu* koji je vrlo sličan Stokesovom problemu, pojavljuje se dodatni član proporcionalan brzini, koji djeluje kao član koji usporava tok fluida. Kako je Allaire precizno zaključio u svojim radovima ([2], [3]), oblik zakona filtracije ovisi o asimptotičkom ponašanju veličina prepreka za vrijeme postupka homogenizacije.

S druge strane, Levy[39] i Sanchez-Palencia[51] su pokazali da ovisno o veličini prepreke Darcyjev zakon može varirati, odnosno poprimiti isti oblik, ali s različitom usrednjenom veličinom koja se naziva tenzor permeabilnosti. Opet je Allaire (v. [1]) bio taj koji je pokazao da zapravo postoji neprekinuti prijelaz između različitih tenzora permeabilnosti. To je rezultat o takozvanom *limesu malog krutog dijela* (engl. *low-volume-fraction limit*).

Izračun limesa malog krutog dijela ne predstavlja novi koncept. Taj su pojam dosad koristili mnogi autori. Na primjer, pojavljuje se u ne tako recentnim radovima H. Hasimoto[31] iz 1959. i A.S. Sangani - A. Acrivos[52] iz 1982. godine, koji se bave poroznom sredinom modeliranom kao mreža sfernih prepreka. Nešto noviji i općenitiji je već spomenuti rad G. Allairea iz 1991. koji se bavi Stokesovim tokom kroz periodičnu poroznu sredinu s mnogo manjim restrikcijama na oblik prepreka. Naša je ideja, između ostalog, proučiti ponašanje zakona filtracije i svojstava permeabilnosti nenewtonovskog fluida u slučaju malog krutog udjela, za različite veličine prepreka regulirane parametrom η. On ne kontrolira samo veličinu prepreke u jednoj pori porozne sredine, već bolje rečeno omjer krutog i propusnog dijela. Kada pustimo da η teži ka nuli, mi u stvari impliciramo da taj omjer teži ka nuli, pa nas zanima što se događa na limesu.

2.3 Filtracija newtonovskog fluida i Darcyjev zakon

Primjena postupka homogenizacije na problem protjecanja fluida kroz poroznu sredinu već je u svojim počecima generirala značajne rezultate. Implementiranjem utjecaja mikrostrukture na filtraciju newtonovskog fluida preko usrednjenih veličina kao što je tenzor permeabilnosti, uspjelo se eliminirati kompliciranu geometriju, na primjer u numeričkim simulacijama. Otprije poznati i korišteni Darcyjev zakon time je dobio i formalnu potvrdu.
Stokesov tok u području $\Omega_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ pod utjecajem vanjske sile $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)$ (zadane na čitavom području Ω !) opisan je jednadžbama

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{v}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = \boldsymbol{f} & \text{u } \Omega_\varepsilon \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0 & \text{u } \Omega_\varepsilon \\ \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.2}$$

gdje je $\boldsymbol{v}^\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ brzina, a $p^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ tlak fluida.

1. slučaj

Ako je u jediničnoj ćeliji Y nepropusni dio jednak ηT, gdje je $\eta \in \langle 0, 1\rangle$ konstanta i $T \subseteq \mathbb{R}^n$ prototip prepreke jedinične veličine, to znači da nepropusni dio u periodičkoj strukturi ima veličinu $a_\varepsilon = \eta\varepsilon$, dakle istog reda veličine kao i period ε. U tom slučaju, na limesu kada $\varepsilon \to 0$ dobiva se sljedeći Darcyjev zakon:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \mathbf{K}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla p) & \text{u } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 & \text{u } \Omega, \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

gdje su $\boldsymbol{v}$ brzina i p tlak fluida, sada definirani na proširenom području Ω, koje obuhvaća i nepropusni dio. Sve informacije o mikrostrukturi sadržane su u tenzoru permeabilnosti $\mathbf{K}_\eta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ koji se računa na sljedeći način

$$[\mathbf{K}_\eta]_{ij} = \int_{\mathcal{Y}_\eta} \nabla \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla \boldsymbol{v}_j \; dy,$$

gdje su funkcije $\boldsymbol{v}_k \in H^1_{per}(\mathcal{Y}_\eta)$, $k = 1, ..., n$ rješenja problema u $\mathcal{Y}_\eta = Y \setminus \eta T$

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{v}_k + \nabla p_k = \boldsymbol{e}_k & \text{u } \mathcal{Y}_\eta, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_k = 0 & \text{u } \mathcal{Y}_\eta, \\ \boldsymbol{v}_k = 0 & \text{na } \partial(\eta T), \\ (\boldsymbol{v}_k, p_k) & \text{Y-periodičke.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Budući da je $\mathbf{K}_\eta$ pozitivno (strogo) definitan i simetričan, što nije teško pokazati, Darcyjev se zakon (2.3) zapravo svodi na linearnu eliptičku jednadžbu s Neumannovim rubnim uvjetom

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{K}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla p) = 0 & \text{u } \Omega, \\ \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{K}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla p) = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

koje ima jedinstveno rješenje $p \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

Formalni dokaz konvergencije homogenizacijskog procesa je Tartarov rezultat koji ovdje navodimo (v. dodatak u [51]):

Teorem 2.1.

Neka su $(\boldsymbol{v}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H^1_0(\Omega_\varepsilon) \times L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ rješenja Stokesovog problema (2.2), a $(\boldsymbol{v}, p) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ rješenje homogeniziranog problema (2.3). Neka je $\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon$ proširenje nulom brzine $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ na Ω. Postoji proširenje tlaka P^ε takvo da

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightharpoonup \boldsymbol{v} \quad \text{u } L^2(\Omega) \text{ slabo},$$

$$P^\varepsilon \to p \quad \text{u } L^2(\Omega)/\mathbb{R} \text{ jako.}$$

■

2. slučaj

Neka je sada nepropusni dio reda veličine manjeg od perioda ε, preciznije neka za veličinu prepreke a_ε unutar jedinke porozne strukture vrijedi:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a_\varepsilon}{\varepsilon} = 0$$

i neka za omjer

$$\sigma_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon^n}{a_\varepsilon^{n-2}} \right)^{1/2} \quad \text{za } n \geq 3, \tag{2.5}$$

vrijedi $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon = 0$.

U opisu namjerno izbjegavamo slučaj $n = 2$, koji je također riješen, i to zbog problema koji nastaju uslijed Stokesovog paradoksa (poznate činjenice da vanjski problem za Stokesov sustav u dvije dimenzije nije dobro postavljen). Sada je homogenizirani problem također Darcyjev zakon

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{f} - \nabla p) & \text{u } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 & \text{u } \Omega, \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

ali s drugim tenzorom permeabilnosti $\mathbf{M}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ovdje je tenzor $\mathbf{M}$, kojeg možemo nazvati tenzorom otpornosti (engl. *drag tensor*), definiran kao generator sile kojom fluid gura tijelo T (engl. *drag force*):

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\xi} = \int_{\partial T} \left(-\frac{\partial \boldsymbol{w}_\xi}{\partial \boldsymbol{n}} + \pi_\xi \boldsymbol{n} \right) d\sigma_x,$$

gdje je $(\boldsymbol{w}_\xi, \pi_\xi) \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T) \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}$ rješenje vanjskog Stokesovog problema (lokalnog problema) parametriziranog sa $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{w}_\xi + \nabla \pi_\xi = 0 & \text{u } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \operatorname{div} \boldsymbol{w}_\xi = 0 & \text{u } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \boldsymbol{w}_\xi = 0 & \text{na } \partial T \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} \boldsymbol{w}_\xi = \boldsymbol{\xi} \end{cases} \tag{2.7}$$

Rezultat o konvergenciji glasi (Allaire[3]):

Teorem 2.2.

Neka su $(\boldsymbol{v}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \times L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ *rješenja Stokesovog problema (2.2), a* $(\boldsymbol{v}, p) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ *rješenje homogeniziranog problema (2.6). Neka je* $\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon$ *proširenje nulom brzine* $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ *na* Ω*, a* σ_ε *kao u (2.5).*
Postoji proširenje tlaka p^ε *u oznaci* P^ε *takvo da vrijedi*

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \rightharpoonup \boldsymbol{v} \quad \textit{slabo u } L^2(\Omega),$$

$$P^\varepsilon \to p \quad \textit{jako u } L^2(\Omega)/\mathbb{R}.$$

■

U radu G. Allairea[1] utvrđeno je da postoji neprekinuti prijelaz između naizgled različitih tenzora permeabilnosti u navedena dva slučaja. Rezultat govori o limesu malog krutog dijela odnosno o graničnom postupku kada $\eta \to 0$, primijenjenom nakon same homogenizacije. Potvrda fizikalno očekivane činjenice da tenzor permeabilnosti u problemu toka newtonovskog fluida kroz poroznu sredinu neprekinuto ovisi o parametru η motivira nas da sličan rezultat pokušamo izvesti i za druge vrste fluida.
Navedimo prvo glavni rezultat Allaireovog članka.

Teorem 2.3.

Neka su $(\boldsymbol{v}_k, p_k)$ *jedinstvena rješenja problema (2.4) u* $H^1_{per}(\mathcal{Y}_\eta)^n \times L^2_{per}(\mathcal{Y}_\eta)/\mathbb{R}$*. Reskaliranjem, za* $\eta > 0$ *i* $x \in \eta^{-1}Y \setminus T$ *definiramo*

$$\boldsymbol{v}_k^\eta(x) = \eta^{n-2}\boldsymbol{v}_k(\eta x), \quad p_k^\eta(x) = \eta^{n-1}p_k(\eta x).$$

Neka su $(\boldsymbol{w}_i, \pi_i)$ *jedinstvena rješenja lokalnog problema (2.7) kada uzimamo* $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *i definirajmo linearnu kombinaciju*

$$(\boldsymbol{v}_k^0, p_k^0) = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{M}^{-1}]_{ik}(\boldsymbol{w}_i, \pi_i).$$

Kada $\eta \to 0$ tada vrijedi

$$(\boldsymbol{v}_k^\eta, p_k^\eta) \rightharpoonup (\boldsymbol{v}_k^0, p_k^0) \text{ slabo u } H^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T)^n \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}$$

i nadalje

$$\lim_{\eta \to 0} \eta^{n-2} \mathbf{K}_\eta = \mathbf{M}^{-1} \quad \text{za } n \geq 3.$$

■

Allaire naglašava da su i $\mathbf{K}_\eta$ i $\mathbf{M}$ tenzori dobiveni kao energije određenih lokalnih problema, a da $\mathbf{K}_\eta$ zapravo konvergira ka inverzu od $\mathbf{M}$, tj. ka $\mathbf{M}^{-1}$. Opravdanje leži u različitom karakteru test funkcija korištenih za dokaz konvergencije. Promatranjem pomoćnih problema zaključuje se da u drugom slučaju one predstavljaju rubni sloj, a u prvom slučaju su to rješenja za periodički tok uslijed djelovanja konstantne jedinične sile.

Napomena 2.4. U proučavanju jednadžbi iz ovog poglavlja i njihovih rješenja koristi se teorija linearnih eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Glavnu ulogu tu ima Lax-Milgramova lema (v. na primjer Brezis[18]), koja jednostavnom primjenom osigurava egzistenciju i jedinstvenost rješenja. Kod nelinearnog Stokesovog problema koji se javlja kod fluida koji zadovoljavaju zakon potencije (polimernih fluida), trebat ćemo primijeniti znatno jače, općenitije rezultate. Tu posebno ističemo teoriju monotonih operatora, u koje spada i takozvani r-Laplaceov operator

$$\Delta_r \boldsymbol{v} = -\operatorname{div}\{ \, |\nabla \boldsymbol{v}\,|^{r-2} \, \nabla \boldsymbol{v}\},$$

vrlo sličan operatoru koji se pojavljuje u našem istraživanju polimernih fluida

$$-\operatorname{div}\{ \, |e(\boldsymbol{v})\,|^{r-2} \, e(\boldsymbol{v})\}.$$

2.4 Filtracija polimernog fluida i funkcija permeabilnosti

Nelinearni zakon viskoznosti za polimerni fluid, čak i u algebarski najjednostavnijem Ostwald - de Waele modelu, gdje je devijatorni ili viskozni dio tenzora naprezanja, podsjećamo, zadan s

$$\boldsymbol{\tau} = |e(\boldsymbol{v})|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}); \quad 1 < r < 2, \quad e(\boldsymbol{v}) = \operatorname{sym} \nabla \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\big(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^{\tau}\big),$$

nakon homogenizacije daje globalni zakon filtracije koji još uvijek sadrži makroskalu i mikroskalu koje nisu razdvojene. Naime, homogenizacijom jednadžbi za stacionarni, viskozni tok polimernog fluida u području Ω_ε koje glase:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big\{\, |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)\big\} + \nabla p^\varepsilon = f & \text{u } \Omega_\varepsilon, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0 & \text{u } \Omega_\varepsilon, \\ \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.8}$$

dobiva se problem (v. Bourgeat - Mikelić[16]) u kojem se koristi čitavo područje Ω

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y \Big\{\, |e_y(\boldsymbol{v}^0)|^{r-2}\, e_y(\boldsymbol{v}^0)\Big\} + \nabla_y p^1 = \boldsymbol{f}(x) - \nabla_x p^0(x) & \text{u } \Omega \times \mathcal{Y}_\eta, \\ \operatorname{div}_y \boldsymbol{v}^0 = 0 & \text{u } \Omega \times \mathcal{Y}_\eta, \\ (\boldsymbol{v}^0, p^0) & Y\text{-periodičke u } y, \\ \operatorname{div}_x \left(\displaystyle\int_{\mathcal{Y}_\eta} \boldsymbol{v}^0 dy \right) = 0 & \text{u } \Omega, \\ \boldsymbol{v}^0 = 0 & \text{na } \Omega \times \partial(\eta T), \\ \boldsymbol{n} \cdot \left(\displaystyle\int_{\mathcal{Y}_\eta} \boldsymbol{v}^0 dy \right) = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

Dok se kod filtracije newtonovskog fluida kao homogenizirani problem javlja relativno jednostavan Darcyjev zakon koji linearno povezuje brzinu i gradijent tlaka, vidimo da to kod fluida koji zadovoljavaju zakon potencije sada nije slučaj. U jednadžbama p^0 je efektivni tlak, dok su $\boldsymbol{v}^0(x,y)$ i $p^1(x,y)$ prvi članovi u asimptotičkom razvoju brzine i tlaka, oscilirajući u y. Za takve funkcije, definirane na $\Omega \times \mathcal{Y}_\eta$, kažemo da su lokalno periodičke.
Jedna od mogućnosti pojednostavljenja ovih jednadžbi koje nisu ništa pogodnije za numeričku simulaciju od gornjeg, originalnog, "mikroskopskog" modela, je pokušaj zapisa globalne brzine filtracije

$$\boldsymbol{v}(x) = \int_{\mathcal{Y}_\eta} \boldsymbol{v}^0(x,y)dy$$

u obliku (nelinearne) vektorske funkcije

$$\boldsymbol{v} = \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla_x p^0)$$

kao što je predloženo u Bourgeat - Gipouloux - Marušić-Paloka[14].
Funkcija $\mathcal{U}_\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazvana je *funkcija permeabilnosti*, ili *funkcija propusnosti*, iako taj naziv treba koristiti s oprezom, jer se pokazuje da ona ne ovisi samo o geometriji područja već i o samom fluidu. Njeno određivanje vezano je uz pomoćni problem parametriziran sa $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y \left\{ |e_y(\boldsymbol{v}_\xi)|^{r-2}\, e_y(\boldsymbol{v}_\xi)\right\} + \nabla_y p_\xi = \boldsymbol{\xi} & \text{u } \mathcal{Y}_\eta, \\ \operatorname{div}_y \boldsymbol{v}_\xi = 0 & \text{u } \mathcal{Y}_\eta, \\ (\boldsymbol{v}_\xi, p_\xi) & Y\text{-periodičke u } y, \\ \boldsymbol{v}_\xi = 0 & \text{na } \partial(\eta T). \end{cases} \tag{2.10}$$

Kao prirodna domena rješenja ovog, ali i kasnije promatranih problema nameću se sljedeći funkcijski prostori koji se nazivaju *homogeni Soboljevljevi prostori*:

$$D^{1,r}(\omega) = \left\{ \boldsymbol{\phi} \in L^1_{loc}(\omega)^n \,\middle|\, \nabla\boldsymbol{\phi} \in L^r(\omega)^{n\times n} \right\},$$

uz već uobičajene Lebesgueove prostore $L^r(\omega)$. Oznaku $D_0^{1,r}(\omega)$ koristimo za upotpunjenje (zatvarač) $C_0^\infty(\omega)$ funkcija u normi $|\boldsymbol{\phi}|_{D^{1,r}(\omega)} = |e(\boldsymbol{\phi})|_{L^r(\omega)}$. Zbog Kornove nejednakosti (v. [47]), norme $|e(\boldsymbol{\phi})|_{L^r(\omega)}$ i $|\nabla\boldsymbol{\phi}|_{L^r(\omega)}$ su ekvivalentne. Često koristimo standardne oznake za Hölder konjugirane eksponente r i r', za koje vrijedi $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Istu oznaku koristit ćemo za vektorske kao i za tenzorske funkcijske prostore, čiji bi smisao trebao biti jasan iz konteksta.

Kasnije ćemo trebati neke klasične rezultate, koje ovdje u manjoj mjeri prilagođavamo našim potrebama.

Lema 2.5. *(*Poincaré-Kornova nejednakost u $\mathcal{Y}_\eta$)
Neka je $1 < r < n$. Postoje konstante $C_1,\ C_2 > 0$, neovisne o η, takve da za svako $\boldsymbol{v} \in D^{1,r}_{per}(\mathcal{Y}_\eta)$, za koje je $\boldsymbol{v} = 0$ na $\partial(\eta T)$, vrijedi

$$|\boldsymbol{v}|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} \leq \frac{C_1}{\eta^{\frac{n-r}{r}}} |\nabla\boldsymbol{v}|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)}, \textit{ (Poincaréova nejednakost)} \tag{2.11}$$

$$|\nabla\boldsymbol{v}|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} \leq C_2\, |e(\boldsymbol{v})|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)}. \textit{ (Kornova nejednakost)} \tag{2.12}$$

Dokaz. Budući da je prototip prepreke T zatvoren skup strogo pozitivne mjere, postoje $\alpha > 0$, $x_0 \in Y$ takvi da $B(x_0, \alpha\eta) \subset \eta T$.
Za $x \in Y$, neka je $\rho = |x - x_0|$ i proširimo $\boldsymbol{v}$ nulom s $\mathcal{Y}_\eta$ na cijelu jediničnu ćeliju Y. Tada imamo

$$\boldsymbol{v}(x) = \int_{\alpha\eta}^{\rho} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(x + (t-\rho)e_\rho)dt; \quad e_\rho = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}.$$

Neka je sad $B = B(x_0, 2)$ kugla sa središtem u x_0 i primijetimo da je $Y \subset B$. Uvodimo varijablu $z = x - x_0$ i ovom zamjenom varijabli B translatiramo u ishodište koordinatnog sustava tako da je

$$|\boldsymbol{v}|^r_{L^r(B)} \leq \int_{S^{n-1}} \int_{\alpha\eta}^{2} \left| \int_{\alpha\eta}^{\rho} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(z + x_0 + (t-\rho)e_\rho)dt \right|^r \rho^{n-1} d\rho d\omega.$$

Primjenom Hölderove nejednakosti i činjenice da je $\rho < 2$ u izrazu

$$\left| \int_{\alpha\eta}^{\rho} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(z + x_0 + (t-\rho)e_\rho)dt \right|^r \leq$$
$$\leq \left[\int_{\alpha\eta}^{2} \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(z + x_0 + (t-\rho)e_\rho)dt \right|^r t^{n-1} dt \right] \left[\int_{\alpha\eta}^{2} \frac{dt}{(t^{n-1})^{\frac{r'}{r}}} \right]^{\frac{r}{r'}},$$

dolazimo do zaključka

$$|\boldsymbol{v}|^r_{L^r(B)} \leq C \frac{1}{\eta^{n-r}} |\nabla \boldsymbol{v}|^r_{L^r(B)}.$$

Budući da je

$$|\boldsymbol{v}|^r_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} \leq |\boldsymbol{v}|^r_{L^r(B)} \leq (2n+1) |\boldsymbol{v}|^r_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)},$$

dvije su norme ekvivalentne, pa (2.11) lako slijedi.
Za dokaz Kornove nejednakosti (2.12), prvo proširimo $\boldsymbol{v} \in D^{1,r}_{per}(\mathcal{Y}_\eta)$ nulom na ηT kako bi dobili funkciju iz $D^{1,r}_{per}(Y)$, odnosno zapravo $W^{1,r}_{per}(Y)$. Sada, koristeći rezultat iz [47] na sličan način kao što je to učinjeno u [16], vidimo da parametar η nema utjecaja na Kornovu konstantu. □

Napomena 2.6.
Homogeni Soboljevljevi prostori u stvari predstavljaju prirodan odabir u proučavanju rubnih problema u neograničenom području, kao što je vanjska domena. Za razliku od "klasičnih" Soboljevljevih prostora $W^{m,q}$, ovdje se uzimaju u obzir samo derivacije najvišeg reda m:

$$D^{m,q}(\omega) = \left\{ \phi \in L^1_{loc}(\omega) \,\middle|\, D^l \phi \in L^q(\omega),\, |l| = m \right\}, \quad m \geq 0, \quad 1 \leq q < \infty,$$

pa je norma inducirana polunormom

$$|\phi|_{D^{m,q}} = \Big(\sum_{|l|=m} \int_\omega |D^l \phi|^q \, dx \Big)^{1/q}.$$

U slučaju da je ω omeđeno područje, gdje vrijedi Poincaréova nejednakost, i uz to s lokalno Lipschitzovim rubom, pa se može primijeniti Ehrlingova nejednakost, $D^{m,q}(\omega)$ postaje algebarski i topološki izomorfan prostoru $W^{m,q}(\omega)$.

Definicija 2.7. *(*SLABO RJEŠENJE POMOĆNOG PROBLEMA*)*
Kažemo da je $(\boldsymbol{v}_\xi, p_\xi) \in D^{1,r}_{per}(\mathcal{Y}_\eta) \times L^{r'}(\mathcal{Y}_\eta)/\mathbb{R}$ slabo rješenje problema (2.10) ako vrijedi:

1) *za svako* $\boldsymbol{w} \in D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathcal{Y}_\eta)$ $\quad \displaystyle\int_{\mathcal{Y}_\eta} |e(\boldsymbol{v}_\xi)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}_\xi) : e(\boldsymbol{w})\, dy = \int_{\mathcal{Y}_\eta} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{w}\, dy$

2) $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_\xi = 0$ *u* $\mathcal{Y}_\eta$,

3) $\boldsymbol{v}_\xi = 0$ *na* $\partial(\eta T)$ *u smislu traga na* $W^{1,r}(\mathcal{Y}_\eta)$.

Koristeći rješenje ovog pomoćnog problema (v. [14]) definiramo funkciju permeabilnosti

$$\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathcal{Y}_\eta} \boldsymbol{v}_\xi(y)dy. \tag{2.13}$$

Sada homogenizirani problem poprima jednostavniji makroskopski oblik koji možemo nazvati nelinearnim Darcyjevim zakonom o kojem govori Teorem 4. iz [14]. Rješenje tog problema je tlak p, a brzina je onda

$$\boldsymbol{v} = \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla p).$$

Teorem 2.8. *(*MAKROSKOPSKI PROBLEM ZA POLIMERNI FLUID*)*
Neka za indeks toka vrijedi $1 < r < 2$ i $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Tada za svako $\boldsymbol{f} \in L^{r'}(\Omega)$ problem

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla p) = 0 & u\ \Omega \\ \boldsymbol{n} \cdot \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla p) = 0 & na\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

ima jedinstveno rješenje $p \in W^{1,r'}(\Omega)/\mathbb{R}$.

Napomena 2.9.
Postoji određena analogija između dobivenog makroskopskog zakona i linearnog Darcyjevog zakona, a ona je posljedica ideje o uspostavi veze između

brzine filtracije i gradijenta tlaka. Primijetimo da u slučaju newtonovskog fluida umjesto funkcije permeabilnosti stoji tenzor permeabilnosti, a taj eksplicitni linearni oblik je posljedica linearnog Newtonovog zakona viskoznosti. Nelinearnost zakona potencije kod polimernih fluida uzrokuje nove probleme koji nisu prije bili prisutni, a zakon filtracije postaje složeniji. Efektivna brzina i tlak dobiveni su rješavanjem potpunog dvoskalnog sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, jer nakon homogenizacije makro- i mikroskala još uvijek nisu bile razdvojene, a brzinu filtracije gledamo kao prostorno usrednjenje dvoskalne brzine po volumenu karakteristične pore porozne sredine. Nije za očekivati da se ovakva konstrukcija može pojednostaviti, jer ipak u pozadini svega stoji složeni prirodni fenomen i složeni zakon viskoznosti.

Egzistencija i jedinstvenost rješenja makroskopskog problema slijedit će iz specifičnih "dobrih" svojstava korištenog diferencijalnog operatora. Prije samog dokaza teorema 2.8, pogledajmo nekoliko tehničkih lema. Za početak dokažimo bitan pomoćni rezultat koji ćemo često koristiti (v. [48] i [44]).

Lema 2.10. *Neka je* $1 < r < 2$ *i* $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$. *Tada za svako* $\Phi, \Psi \in L^r(\omega)^{n\times n}$

$$\int_\omega \Big(\,|\Phi\,|^{r-2}\ \Phi - \,|\Psi\,|^{r-2}\ \Psi\Big) : \Big(\Phi - \Psi\Big)\ dx \ge C \frac{|\Phi - \Psi\,|^2_{L^r(\omega)}}{\big(\ |\Phi\,|_{L^r(\omega)} + \,|\Psi\,|_{L^r(\omega)}\ \big)^{2-r}}. \tag{2.15}$$

Dokaz. Polazimo od nejednakosti koja vrijedi za $1 < r < 2$ i $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (v. [7])

$$\Big(\ |\Phi\,| + \,|\Psi\,|\Big)^{2-r} \Big(\ |\Phi\,|^{r-2}\ \Phi - \,|\Psi\,|^{r-2}\ \Psi\Big) : \Big(\Phi - \Psi\Big) \ge C\ |\Phi - \Psi\,|^2.$$

Neka su sada $\Phi, \Psi \in C_0^\infty(\omega)^{n\times n}$. Uvrštavamo $\Phi = \Phi(x)$ i $\Psi = \Psi(x)$, za svako $x \in \omega$, u gornju nejednakost dignutu na potenciju $r/2$ i integriramo lijevu stranu po ω. Koristeći Hölderovu nejednakost s eksponentima $2/(2-r)$ i $2/r$

dobivamo

$$\int_\omega \Big\{ \Big(|\Phi| + |\Psi| \Big)^{2-r} \Big(|\Phi|^{r-2}\,\Phi - |\Psi|^{r-2}\,\Psi \Big) : \Big(\Phi - \Psi \Big) \Big\}^{r/2} dx \leq$$
$$\leq \Big(\int_\omega (|\Phi| + |\Psi|)^r \, dx \Big)^{(2-r)/2} \Big\{ \int_\omega \Big(|\Phi|^{r-2}\,\Phi - |\Psi|^{r-2}\,\Psi \Big) : \Big(\Phi - \Psi \Big) \, dx \Big\}^{r/2}.$$

Ako prvi član zdesna ocijenimo izrazom

$$C\Big(|\Phi|_{L^r(\omega)} + |\Psi|_{L^r(\omega)} \Big)^{r(2-r)/2},$$

tvrdnja je dokazana. □

Pokažimo sada neka svojstva funkcije permeabilnosti $\mathcal{U}_\eta$. Tvrdnje ćemo formulirati i dokazati u obliku leme koja predstavlja zbir rezultata iz [14].

Lema 2.11. *Funkcija $\mathcal{U}_\eta$ definirana u (2.13) je monotona:*

$$\Big(\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}\Big) > 0, \quad \textit{za svako } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\zeta}. \tag{2.16}$$

Nadalje, $\mathcal{U}_\eta$ je homogena funkcija u sljedećem smislu

$$\mathcal{U}_\eta(\lambda\boldsymbol{\xi}) = |\lambda|^{r'-2}\lambda\,\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

i postoje $m, M, c_0 \in \mathbb{R}^+$ takvi da za svako $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$m|\boldsymbol{\xi}|^{r'-1} \leq |\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi})| \leq M|\boldsymbol{\xi}|^{r'-1}, \tag{2.17}$$

$$\Big(\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}\Big) \geq c_0|\boldsymbol{\xi}|^{r'}. \tag{2.18}$$

Dokaz. Uzmimo $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\zeta}$ i neka su $\boldsymbol{v}_\xi$ i $\boldsymbol{v}_\zeta$ rješenja problema (2.10) za parametre $\boldsymbol{\xi}$ odnosno $\boldsymbol{\zeta}$. Lako se vidi da vrijedi

$$\Big(\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\zeta}\Big) = \int_{\mathcal{Y}_\eta} |e(\boldsymbol{v}_\zeta)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}_\zeta) : e(\boldsymbol{v}_\xi)\, dy.$$

Iz leme 2.10 zaključujemo da vrijedi

$$C \frac{|e(\boldsymbol{v}_\xi - \boldsymbol{v}_\zeta)|^2_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)}}{\left(|e(\boldsymbol{v}_\xi)|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} + |e(\boldsymbol{v}_\zeta)|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} \right)^{2-r}} \leq$$
$$\leq \int_{\mathcal{Y}_\eta} \left(|e(\boldsymbol{v}_\xi)|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi) - |e(\boldsymbol{v}_\zeta)|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\zeta) \right) : \left(e(\boldsymbol{v}_\xi) - e(\boldsymbol{v}_\zeta) \right) dy,$$

odakle slijedi

$$\left(\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta} \right) \geq C \frac{|e(\boldsymbol{v}_\xi) - e(\boldsymbol{v}_\zeta)|^2_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)}}{\left(|e(\boldsymbol{v}_\xi)|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} + |e(\boldsymbol{v}_\zeta)|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} \right)^{2-r}} \geq 0.$$

Vidimo da izraz $\left(\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta} \right)$ može biti jednak nuli ako i samo ako je $e(\boldsymbol{v}_\xi) = e(\boldsymbol{v}_\zeta)$ u $L^r(\mathcal{Y}_\eta)$, a zbog Poincaréove nejednakosti to znači da za rješenja vrijedi $\boldsymbol{v}_\xi = \boldsymbol{v}_\zeta$ u $W^{1,r}(\mathcal{Y}_\eta) = D^{1,r}(\mathcal{Y}_\eta)$, odnosno $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta}$.

Homogenost se lako pokazuje uvrštavanjem $\lambda\boldsymbol{\xi}$ u funkciju $\mathcal{U}_\eta$, a kao posljedica slijedi posljednja tvrdnja. Stavljajući $\boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\xi}_0 \in S^{n-1}$ primjećujemo da vrijedi

$$m|\boldsymbol{\xi}|^{r'-1} \leq |\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi})| \leq M|\boldsymbol{\xi}|^{r'-1},$$

gdje je $m = \inf_{|\boldsymbol{\xi}|=1} |\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi})| > 0$ i $M = \sup_{|\boldsymbol{\xi}|=1} |\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi})| > 0$.

Nadalje,

$$\left(\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \right) = \left(\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}_0), \boldsymbol{\xi}_0 \right) \cdot |\boldsymbol{\xi}|^{r'} \geq \inf_{|\boldsymbol{\zeta}_0|=1} \left(\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\zeta}_0), \boldsymbol{\zeta}_0 \right) |\boldsymbol{\xi}|^{r'}.$$

Ako stavimo

$$c_0 = \inf_{|\boldsymbol{\zeta}_0|=1} \left(\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\zeta}_0), \boldsymbol{\zeta}_0 \right),$$

dokazali smo koercitivnost, jer svakom $\boldsymbol{\zeta}_0 \in \mathbb{R}^n$, $|\boldsymbol{\zeta}_0| = 1$, pripada odgovarajuće rješenje pomoćnog problema $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\zeta}_0} \in D^{1,r}(\mathcal{Y}_\eta)$ koje nije identički jednako nuli, pa vrijedi

$$\left(\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\zeta}_0), \boldsymbol{\zeta}_0 \right) = \int_{\mathcal{Y}_\eta} |e(\boldsymbol{v}_{\zeta_0})|^r \, dy > 0$$

iz čega slijedi da je i $c_0 > 0$. $\square$

Kod nelinearnih stacionarnih problema s monotonim operatorima često se koristi sljedeći Minty-Browderov teorem (v. [18] ili nešto općenitije [40, Teorem 2.2.1]).

Teorem 2.12. *(*MINTY-BROWDER*)*
Neka je E Banachov, refleksivan prostor i $\mathcal{A} : E \to E'$ neprekinuto preslikavanje (nelinearno) takvo da vrijedi:

$$\langle \mathcal{A}\phi_1 - \mathcal{A}\phi_2, \phi_1 - \phi_2 \rangle > 0 \quad \textit{za svako } \phi_1, \phi_2 \in E,\ \ \phi_1 \neq \phi_2,$$

$$\lim_{|\phi| \to \infty} \frac{\langle \mathcal{A}\phi, \phi \rangle}{|\phi|} = \infty.$$

Tada za svako $f \in E'$ postoji jedinstveni $\psi \in E$ koji je rješenje jednadžbe $\mathcal{A}(\psi) = f$. ■

Sada lako možemo provesti dokaz ranije iskazanog teorema 2.8, jer smo sve pomoćne, odnosno tehničke detalje već dokazali.

Dokaz. (**Teorem 2.8 - Makroskopski problem za polimerni fluid**)
Za zadano $\boldsymbol{f} \in L^{r'}(\Omega)$, postojanje jedinstvenog rješenja $p \in W^{1,r'}(\Omega)/\mathbb{R}$ problema

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla p) = 0 & \text{u } \Omega \\ \boldsymbol{n} \cdot \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla p) = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

slijedi iz svojstava operatora $\mathcal{U}_\eta$, koja su dokazana u lemi 2.11. Diferencijalni operator $\mathcal{A} : W^{1,r'}(\Omega)/\mathbb{R} \to \left(W^{1,r'}(\Omega)/\mathbb{R}\right)'$ definiran s

$$\mathcal{A}(\phi) = -\operatorname{div} \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla \phi),$$

je omeđen, koercitivan i strogo monoton. Na temelju toga, Minty-Browderov teorem 2.12 osigurava njegovu surjektivnost i injektivnost. Drugim rječima, rješenje postoji i jedinstveno je. Nakon što se odredi tlak p, brzinu dobivamo pomoću izraza

$$\boldsymbol{v} = \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla p).$$

$\square$

Napomena 2.13.
Za razliku od newtonovskog fluida i pratećeg linearnog Darcyjevog zakona koji je dobio potvrdu, homogenizacijski je postupak kod filtracije polimernog fluida opovrgnuo predložene modele iz inženjerske literature analogne Darcyjevom zakonu. Potvrđeno je da korišteni empirijski modeli nisu dobri i da predstavljaju aproksimaciju samo u najjednostavnijem jednodimenzionalnom slučaju (vidi [14]).

Makroskopski zakon filtracije nema samo teorijsku težinu i značaj, budući da je to formalni izvod zakona ponašanja određenog prirodnog fenomena, a uz to opovrgava empirijske zakone koji su se zaista u primjeni koristili. Interes za proučavanje polimernih fluida prvenstveno dolazi kroz primijenjene probleme u industriji nafte ili, na primjer, kod filtracije rastopljene plastike prije ulijevanja u kalupe. Na primjeru ekstrakcije nafte iz poroznih podzemnih nalazišta, takozvanog EOR-a (engl. *Enhanced Oil Recovery*), ubrizgava se polimerna suspenzija kako bi se povećala viskoznost fluida koji izguravaju naftu. Postoji značajan broj radova koji pristupaju ovoj i sličnoj problematici s različitih gledišta: teorijskog, numeričkog ili eksperimentalnog (v. [16], [14], [15], [32], [30], [28], [34]).

2.5 Konvergencija u postupku homogenizacije

Nakon heurističkog izvoda Darcyjevog zakona u radovima J.B. Kellera[35], J.L. Lionsa[40] i E. Sanchez-Palencie[51], uslijedio je rigorozni dokaz konvergencije postupka homogenizacije od strane L. Tartara[54] korištenjem takozvane metode energetske formulacije. Naime, potrebno je promotriti ponašanje rješenja $(\boldsymbol{v}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ u području toka Ω_ε s preprekama, kada $\varepsilon \to 0$ i dokazati da konvergira ka rješenju $(\boldsymbol{v}, p)$ makroskopskog problema na čitavom području Ω, bez rupa. U tom postupku ključno je proširenje funkcija $(\boldsymbol{v}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ na $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, s naglaskom na poteškoće prilikom proširenja tlaka. Prikazat ćemo detalje proširenja u slučaju homogenizacije kod polimernih fluida kada je veličina prepreka istog reda veličine kao i period porozne strukture. To je formulacija kako su je postavili A. Bourgeat i A. Mikelić[16], iako ideje originalno dolaze od proučavanja filtracije newtonovskih fluida. Radi se o generalizaciji sljedećih rezultata: Tartar[54] je prvi konstruirao uniformno omeđeno proširenje tlaka i to koristeći dualni argument, a Lipton i Avellaneda[42] su to proširenje prikazali eksplicitno.

Neka je $(\boldsymbol{v}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ rješenje problema (2.8) u Ω_ε, a $(\boldsymbol{v}, p)$ rješenje makroskopskog problema (2.14). Brzinu jednostavno proširujemo nulom na $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, što se pokazuje i prirodnim proširenjem jer na taj način L^r-norma funkcije ili gradijenta funkcije ostaju sačuvane.

Varijacijska formulacija problema (2.8) glasi:

- Naći $(\boldsymbol{v}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon) \times L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ takve da za svako $\boldsymbol{\varphi} \in W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon)$, $q \in L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ vrijedi:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}^\varepsilon) : e(\boldsymbol{\varphi})\,dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla p^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}\,dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\,dx,$$
$$\int_{\Omega_\varepsilon} q \operatorname{div} \boldsymbol{v}^\varepsilon\,dx = 0.$$

Ako stavimo $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v}^\varepsilon$ i s $\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon}$ označimo proširenje nulom, nakon primjene Poincaré-Kornove nejednakosti na skupu Ω

$$\left|\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon}\right|_{L^r(\Omega)} \leq C \left|e(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon})\right|_{L^r(\Omega)},$$

lako slijedi ocjena

$$\left|e(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon})\right|_{L^r(\Omega)} \leq C\, |\boldsymbol{f}|_{L^{r'}(\Omega)}^{\frac{1}{r-1}},$$

gdje konstanta C ovisi samo o području Ω, a ne o ε. Ta ocjena povlači omeđenost niza $(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon})$ u $W_0^{1,r}(\Omega)$, a time i postojanje slabo konvergentnog podniza koji, pokazuje se, konvergira ka $\boldsymbol{v}$.

Proširenje tlaka predstavlja najteži dio u dokazu konvergencije homogenizacijskog postupka. Iz varijacijske formulacije vidimo da za svako $\boldsymbol{\varphi} \in W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon)$ vrijedi

$$\left\langle \nabla p^\varepsilon, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle_{\Omega_\varepsilon} = -\int_{\Omega_\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}^\varepsilon) : e(\boldsymbol{\varphi})\,dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\,dx.$$

Poincaré-Kornova nejednakost na skupu Ω_ε glasi (v. [16])

$$|\boldsymbol{\varphi}|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon\, |e(\boldsymbol{\varphi})|_{L^r(\Omega_\varepsilon)},$$

pa se može dobiti ocjena

$$|\nabla p^\varepsilon|_{W^{-1,r'}(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon.$$

To nam ne pomaže mnogo, jer možemo iskoristiti samo ocjenu na Ω. Ovdje proširenje nulom gradijenta nije moguće, jer tako definirana funkcija nije nužno gradijent neke L^r-funkcije. Zato moramo definirati operator restrikcije

R^ε i koristeći dualnost izvesti potrebnu ocjenu. Prikazane rezultate preuzeli smo iz Bourgeat - Mikelić[16]. Neka je

$$W^{1,r}_{T_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon) = \{\boldsymbol{w} \in W^{1,r}(\Omega_\varepsilon) | \boldsymbol{w} = 0 \text{ na } T_\varepsilon\}.$$

Lema 2.14.

Postoji operator $R^\varepsilon \in \mathcal{L}(W^{1,r}(\Omega), W^{1,r}_{T_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon))$ *sa sljedećim svojstvima*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{w} = 0 \ \ na \ T_\varepsilon \ \Rightarrow \ R^\varepsilon \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}, \\
&\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \ \ u \ \Omega \ \Rightarrow \ \operatorname{div}(R^\varepsilon \boldsymbol{w}) = 0 \ \ u \ \Omega_\varepsilon \ , \\
&|R^\varepsilon \boldsymbol{w}\,|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \le C\Big(\ |\boldsymbol{w}\,|_{L^r(\Omega)} + \varepsilon \ |\nabla \boldsymbol{w}\,|_{L^r(\Omega)} \Big), \\
&|\nabla (R^\varepsilon \boldsymbol{w})\,|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \le C\Big(\frac{1}{\varepsilon} \ |\boldsymbol{w}\,|_{L^r(\Omega)} + |\nabla \boldsymbol{w}\,|_{L^r(\Omega)} \Big).
\end{aligned}$$

■

Zbog svojstava navedenih u lemi, prirodno proširujemo $R^\varepsilon \boldsymbol{w}$ nulom do čitavog Ω, uz zadržavanje iste oznake.

Lema 2.15.

Operator P^ε *definiran na sljedeći način*

$$\big\langle \nabla P^\varepsilon(q^\varepsilon), \boldsymbol{w} \big\rangle_{W^{-1,r'}, W^{1,r}_0(\Omega)} = \big\langle \nabla q^\varepsilon, R^\varepsilon \boldsymbol{w} \big\rangle_{W^{-1,r'}, W^{1,r}_0(\Omega_\varepsilon)} \ za \ \boldsymbol{w} \in W^{1,r}_0(\Omega) \tag{2.20}$$

je linearni operator proširenja sa $L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ *u* $L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}$ *sa sljedećim svojstvima: za svako* $q^\varepsilon \in L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&P^\varepsilon(q^\varepsilon) = q^\varepsilon \ \ u \ \ \Omega_\varepsilon, \\
&|P^\varepsilon(q^\varepsilon)\,|_{L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}} \le C \ |q^\varepsilon\,|_{L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}} \, , \\
&|\nabla (P^\varepsilon(q^\varepsilon))\,|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \le C \ |\nabla q^\varepsilon\,|_{W^{-1,r'}(\Omega_\varepsilon)} \, .
\end{aligned}$$

■

Napomena 2.16. Pojasnimo kako je operator P^ε definiran izrazom (2.20). Zbog surjektivnosti i neprekinutosti operatora divergencije, za svaki $g \in L^r(\Omega)/\mathbb{R}$ postoji $\boldsymbol{\psi} \in W_0^{1,r}(\Omega)$ takav da je

$$g = \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \quad \text{i} \quad |\boldsymbol{\psi}|_{W_0^{1,r}(\Omega)} \leq C \, |g|_{L^r(\Omega)/\mathbb{R}} \, .$$

Proširenje tlaka sada definiramo ovako: za $q^\varepsilon \in L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$

$$\int_\Omega P^\varepsilon(q^\varepsilon)\, g dx = \int_{\Omega_\varepsilon} q^\varepsilon \, \operatorname{div}(R^\varepsilon \boldsymbol{\psi}) dx. \tag{2.21}$$

Iako se smatralo da nije moguće dokazati ocjene bez ovakve dualne konstrukcije proširenja tlaka, pokazuje se da operator proširenja P^ε nema tako složeni oblik. Naime, vrijednost tlaka na krutom dijelu svake ćelije izjednačava se sa srednjom vrijednosti tlaka na području toka te ćelije:

$$P^\varepsilon(p^\varepsilon) = \begin{cases} p^\varepsilon & \text{u } \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{1}{\mu(\Pi^\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathcal{Y}_\eta))} \displaystyle\int_{\Pi^\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathcal{Y}_\eta)} p^\varepsilon \, dx & \text{u } \Pi^\varepsilon_{\mathbf{k}}(\eta T) \text{ za svaki } \mathbf{k} \in I. \end{cases}$$

Za ovakvo proširenje dobivamo ocjene

$$\begin{aligned} &|P^\varepsilon(p^\varepsilon)\,|_{L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C, \\ &|\nabla(P^\varepsilon(p^\varepsilon))\,|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq C, \end{aligned}$$

što nam, kao i za brzine, osigurava postojanje slabo konvergentnog podniza u $L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}$ s istom oznakom $(P^\varepsilon(p^\varepsilon))$, za čiji se limes pokazuje da je jednak p.

Detalje dokaza konvergencije, kao i jedinstvenosti limesa što povlači konvergenciju čitavog niza, a ne samo podniza, može se naći u [16]. Rezultati nešto novijeg datuma pokazuju da je moguće pristupiti proširenju i drugačije, kao što je učinio Mikelić u [45], gdje autor navodi da slijedi pristup koji je razvio Zhikov[56].

Poglavlje 3

Ovisnost zakona filtracije o omjeru propusnog i nepropusnog dijela

3.1 Funkcija permeabilnosti i ovisnost o veličini nepropusnog dijela

Slično kao u slučaju newtonovskog fluida i linearnog Darcyjevog zakona, pažnju ćemo sada usmjeriti na ovisnost funkcije permeabilnosti, odnosno zakona filtracije polimernog fluida o parametru η. Podsjećamo da $\eta \in \langle 0, 1 \rangle$ regulira veličinu modela prepreke u jediničnoj ćeliji Y, tako da u periodičnoj poroznoj strukturi s periodom ε veličina nepropusnog dijela u jednoj ćeliji iznosi $\eta\varepsilon$. S pravom se sada postavlja pitanje na koji način taj ulazni parametar η utječe na oblik funkcije permeabilnosti $\mathcal{U}_\eta$ i što se događa na limesu kada $\eta \to 0$. Kod Darcyjevog zakona pokazalo se da ovisno o redu veličine prepreke u odnosu na period, homogenizacijom dobivamo različite oblike i same načine izračuna tenzora permeabilnosti, ali isto tako i da među njima postoji neprekinuti prijelaz.
U poglavlju 1.3 prilikom modeliranja porozne strukture definirali smo veličinu nepropusnog dijela kao produkt dva parametra η i ε. Homogenizacijski limes dao je odgovor što se događa kada $\varepsilon \to 0$. Ako sada proučimo ponašanje homogeniziranog problema kada $\eta \to 0$, dobit ćemo ono što se naziva limesom malog krutog dijela. Bitno je naglasiti da se za vrijeme homogenizacijskog procesa η drži konstantnim, a tek se onda, nakon što odredimo homogenizirani problem, pušta u nulu. Mi dakle sada provodimo posthomogenizacijsku asimptotičku analizu ponašanja zakona filtracije polimernog fluida. Rezultati ovog poglavlja objavljeni su u članku [27].

U poglavlju 2.4 smo zaključili da homogenizacijom jednadžbi za brzinu i tlak u kompliciranoj domeni Ω_ε pri stacionarnom, viskoznom toku polimernog fluida s indeksom toka $1 < r < 2$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left\{ |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^{r-2} \, e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)\right\} + \nabla p^\varepsilon = \boldsymbol{f} & \text{u } \Omega_\varepsilon, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0 & \text{u } \Omega_\varepsilon, \\ \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.1}$$

dobivamo nelinearni Darcyjev zakon toka u potpunom području Ω (bez "rupa"):

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{f} - \nabla p) & \text{u } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 & \text{u } \Omega, \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

U ovim makroskopskim ili usrednjenim jednadžbama prepreke su zanemarene, ili bolje rečeno njihov je utjecaj usrednjen i gibanje je u potpunosti opisano uvedenom vektorskom funkcijom permeabilnosti $\mathcal{U}_\eta$. Kako bismo doznali što se događa s funkcijom permeabilnosti kada $\eta \to 0$, promotrimo još jednom pomoćni problem definiran na propusnom dijelu jedinične ćelije $\mathcal{Y}_\eta = Y \setminus \eta T$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left\{ |e(\boldsymbol{v}_\xi)|^{r-2} \, e(\boldsymbol{v}_\xi)\right\} + \nabla p_\xi = \boldsymbol{\xi} & \text{u } \mathcal{Y}_\eta \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_\xi = 0 & \text{u } \mathcal{Y}_\eta \\ \boldsymbol{v}_\xi = 0 & \text{na } \partial(\eta T) \\ (\boldsymbol{v}_\xi, p_\xi) & Y\text{-periodičke}, \end{cases} \tag{3.3}$$

pomoću kojeg se definira $\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ kao "srednja" brzina filtracije na $\mathcal{Y}_\eta$

$$\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathcal{Y}_\eta} \boldsymbol{v}_\xi \, dy. \tag{3.4}$$

Izvedimo apriorne ocjene slabih rješenja $(\boldsymbol{v}_\xi, p_\xi) \in D^{1,r}_{per}(\mathcal{Y}_\eta) \times L^{r'}(\mathcal{Y}_\eta)/\mathbb{R}$ tog problema, čije značenje smo precizirali u definiciji 2.7. Za to će nam trebati prilagođeni oblik klasičnih rezultata, Poincaréove i Kornove nejednakosti, koje smo dokazali u lemi 2.5.

Lema 3.1. *Neka je* $A(r) = \dfrac{n-r}{r-1}$. *Rješenje pomoćnog problema (3.3) zadovoljava sljedeće ocjene*

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}_\xi|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} &\le C\, |\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{r-1}} \frac{1}{\eta^{A(r)}},\\
|e(\boldsymbol{v}_\xi)|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} &\le C\, |\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{r-1}} \frac{1}{\eta^{\frac{A(r)}{r}}},\\
|p_\xi|_{L^{r'}(\mathcal{Y}_\eta)/\mathbb{R}} &\le C\, |\boldsymbol{\xi}| \frac{1}{\eta^{\frac{n-r}{r}}}.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Neka je $(\boldsymbol{v}_\xi, p_\xi) \in D^{1,r}_{per}(\mathcal{Y}_\eta) \times L^{r'}(\mathcal{Y}_\eta)/\mathbb{R}$ rješenje spomenutog problema.

Prvo, testirajmo jednadžbu $(3.3)_1$ s $\boldsymbol{v}_\xi$ kako bismo dobili nejednakost

$$
|e(\boldsymbol{v}_\xi)|^r_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} \le C\, |\boldsymbol{\xi}| \cdot |\boldsymbol{v}_\xi|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)},
$$

koja, korištenjem Poincaré-Kornove nejednakosti u $\mathcal{Y}_\eta$, prelazi u

$$
|e(\boldsymbol{v}_\xi)|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} \le C \frac{1}{\eta^{\frac{n-r}{r(r-1)}}} |\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{r-1}}. \tag{3.5}
$$

Odavde, ocjene za brzinu lako slijede još jednom uporabom leme 2.5.

Što se tiče tlaka, neka je $g \in L^r(\mathcal{Y}_\eta)/\mathbb{R}$. Postoji $\boldsymbol{\phi} \in W^{1,r}_0(\mathcal{Y}_\eta)$ takav da je

$$
g = \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} \ \text{ i } \ |\boldsymbol{\phi}|_{W^{1,r}_0(\mathcal{Y}_\eta)} \le C\, |g|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)/\mathbb{R}},
$$

s konstantom koja ne ovisi o η (v. [2, Lema 2.2.4]). Tada je

$$
\int_{\mathcal{Y}_\eta} p_\xi \cdot g\, dy = \int_{\mathcal{Y}_\eta} p_\xi \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}\, dy = \int_{\mathcal{Y}_\eta} \nabla p_\xi \cdot \boldsymbol{\phi}\, dy,
$$

pa vrijedi

$$
\left| \int_{\mathcal{Y}_\eta} p_\xi \cdot g\, dy \right| \le \int_{\mathcal{Y}_\eta} |e(\boldsymbol{v}_\xi)|^{r-1}\, |e(\boldsymbol{\phi})|\ dy + \int_{\mathcal{Y}_\eta} |\boldsymbol{\xi}| \cdot |\boldsymbol{\phi}|\ dy.
$$

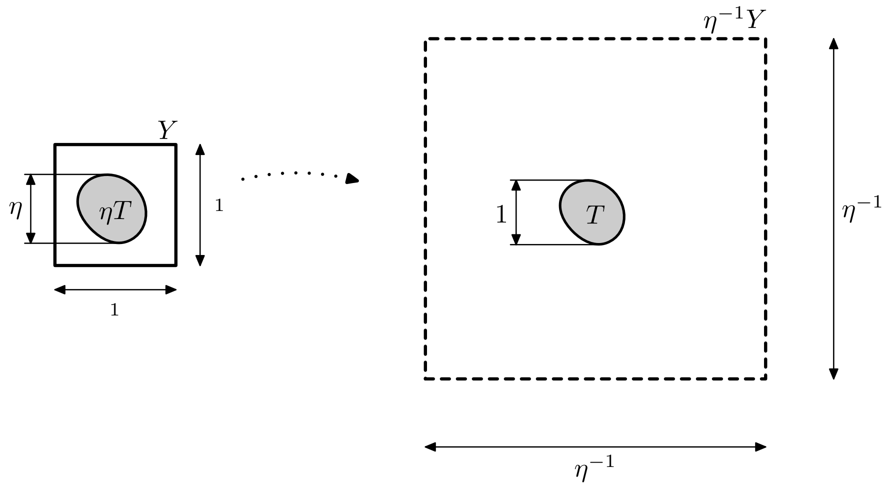
Korištenjem ocjene (3.5), Hölderove i Poincaré-Kornove nejednakosti, u konačnici dolazimo do nejednakosti

$$
\left| \int_{\mathcal{Y}_\eta} p_\xi \cdot g\, dy \right| \le C\, |\boldsymbol{\xi}| \frac{1}{\eta^{\frac{n-r}{r}}} |e(\boldsymbol{\phi})|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} \le C\, |\boldsymbol{\xi}| \frac{1}{\eta^{\frac{n-r}{r}}} \cdot |g|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)/\mathbb{R}}, \tag{3.6}
$$

a to je upravo ono što smo i tražili. □

3.2 Reskaliranje domene

Pokazali smo da preko parametra η možemo regulirati omjer nepropusnog i propusnog dijela u jediničnoj ćeliji. Kako je pomoćni problem definiran na $\mathcal{Y}_\eta = Y \setminus \eta T$, reskalirat ćemo domenu množenjem (dilatacijom) s η^{-1} kako veličina prepreke ne bi više ovisila o η i kako bi barem taj dio ruba domene bio nepromijenjen, bez obzira koji η odabrali. Budući da puštamo $\eta \to 0$, za očekivati je da domena $\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta = \eta^{-1}Y \setminus T$ na limesu postane vanjsko područje, jer što je η bliži nuli, to su stranice ćelije sve veće i teže u beskonačnost (v. Slika 3.1). Kako bi odgovaralo novodefiniranoj domeni,



Slika 3.1: Posljedica skaliranja domene.

odabiremo odgovarajuće skaliranje rješenja $(\boldsymbol{v}_\xi, p_\xi)$ problema (3.3) ovisno o parametru η: za $x \in \eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_\xi^\eta(x) &= \eta^{A(r)} \boldsymbol{v}_\xi(\eta x), \\ p_\xi^\eta(x) &= \eta^{n-1} p_\xi(\eta x), \end{aligned} \tag{3.7}$$

gdje je

$$A(r) = \frac{n-r}{r-1}; \quad 1 < r < 2. \tag{3.8}$$

Eksponent odnosno izraz $A(r)$ je pažljivo odabran kako bi reskalirana rješenja zadovoljavala sljedeći problem, odnosno jednadžbe

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left\{ \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right\} + \nabla p_\xi^\eta = \eta^n \boldsymbol{\xi} & \text{u } \eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_\xi^\eta = 0 & \text{u } \eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta \\ \boldsymbol{v}_\xi^\eta = 0 & \text{na } \partial T \\ (\boldsymbol{v}_\xi^\eta, p_\xi^\eta) & \eta^{-1}Y\text{-periodičke.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Primijetimo da vrijede sljedeće ocjene koje ne ovise o η

$$\left|p_\xi^\eta\right|_{L^{r'}(\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta)/\mathbb{R}} \le C\, |\boldsymbol{\xi}|, \quad \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right|_{L^r(\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta)} \le C\, |\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{r-1}}.$$

Zadržavajući iste oznake, proširimo p_ξ^η, $\boldsymbol{v}_\xi^\eta$ i $e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)$ nulom izvan područja $\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta$, u stvari vršimo "rezanje". Time dobivamo funkcije definirane na cijeloj vanjskoj domeni $\mathbb{R}^n \setminus T$, a norme ostaju očuvane pa zaključujemo

$$\begin{aligned} \left|p_\xi^\eta\right|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n\setminus T)/\mathbb{R}} &\le C\, |\boldsymbol{\xi}|, \\ \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right|_{L^r(\mathbb{R}^n\setminus T)} &\le C\, |\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{r-1}}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Napomena 3.2. Za ova proširenja vrijedi da ako

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_\xi^\eta &\rightharpoonup \boldsymbol{v}_\xi^0 \text{ slabo u } L^r_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T) \text{ i} \\ e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta) &\rightharpoonup \Phi_\xi \text{ slabo u } L^r_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T), \end{aligned}$$

tada je nužno $\Phi_\xi = e(\boldsymbol{v}_\xi^0)$ kao posljedica činjenice da je deriviranje na distribucijama neprekinuto.

Proširenje nulom ima svojih prednosti, jer domena više ne ovisi o parametru η, ali i određenih mana na koje treba obratiti pažnju. Izgubili smo, na primjer, regularnost funkcija u smislu da $(\boldsymbol{v}_\xi^\eta, p_\xi^\eta) \notin D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \times L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}$, kao što bi se na prvi pogled, neoprezno moglo pomisliti. Naime, iako smo zadržali oznake svaki od nizova funkcija

$$\boldsymbol{v}_\xi^\eta, \quad e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta),$$

gledamo zasebno i naravno da $\nabla \boldsymbol{v}_\xi^\eta$ kao gradijent proširene funkcije $\boldsymbol{v}_\xi^\eta$ čak nije u $L^r(\mathbb{R}^n \setminus T)$.

Promatrajući pobliže problem (3.9) u ovisnosti o η, vidimo da kada $\eta \to 0$ period domene raste i ona prelazi u vanjsko područje, dok je član zdesna koji predstavlja silu sve manji. Na limesu se u određenom smislu periodičnost gubi, a dobivenom vanjskom problemu radi potpunosti treba dodati određeni rubni uvjet u beskonačnosti. To nas motivira da definiramo problem optakanja polimernog fluida oko prepreke T, bez utjecaja vanjske sile, ali sa zadanom brzinom u beskonačnosti. Taj ćemo problem i vezane rezultate opisati u narednom poglavlju.

3.3 Vanjski problem i funkcija otpornosti

Definirat ćemo prvo što smatramo pod nazivom nenewtonovski vanjski problem u $\mathbb{R}^n \setminus T$ parametriziran s konstantom $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Neka su $\boldsymbol{w}_\xi$ brzina i π_ξ tlak polimernog fluida koji optače prepreku T, odnosno zadovoljava jednadžbe

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left\{ \left|e(\boldsymbol{w}_\xi)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{w}_\xi)\right\} + \nabla\pi_\xi = 0 & \text{u } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \operatorname{div} \boldsymbol{w}_\xi = 0 & \text{u } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \boldsymbol{w}_\xi = 0 & \text{na } \partial T \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} \boldsymbol{w}_\xi = \boldsymbol{\xi}, \end{cases} \tag{3.11}$$

a prateću silu koju uzrokuje fluid i koja se javlja na prepreci T, dakle takozvanu silu otpora ili otpornosti (engl. *drag force*), označimo s $\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})$, gdje je parametar $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ iz gornjeg problema upravo jednak zadanoj brzini u beskonačnosti. Ovako dobivenu funkciju precizno ćemo definirati u nastavku. Rezultat o slabom rješenju vanjskog problema za fluide koji zadovoljavaju zakon potencije dao je Marušić-Paloka u [44]. Radi potpunosti, navodimo ovdje definiciju slabog rješenja i centralni teorem zajedno s dokazom.

Definicija 3.3. *(Slabo rješenje vanjskog problema)*
Kažemo da je $(\boldsymbol{w}_\xi, \pi_\xi) \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \times L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}$ slabo rješenje problema (3.11) ako vrijedi:

1) *za svako $\boldsymbol{w} \in D_0^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$*
$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus T} \left|e(\boldsymbol{w}_\xi)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{w}_\xi) : e(\boldsymbol{w})\, dx - \int_{\mathbb{R}^n\setminus T} \pi_\xi \operatorname{div} \boldsymbol{w}\, dx = 0$$
2) $\operatorname{div} \boldsymbol{w}_\xi = 0$ *u* $\mathbb{R}^n \setminus T$,
3) $\boldsymbol{w}_\xi = 0$ *na* ∂T *u smislu traga na* $W^{1,r}_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T)$,
4) $\lim\limits_{\rho\to\infty} \displaystyle\int_{S^{n-1}} \left|\boldsymbol{w}_\xi(\rho,\omega) - \boldsymbol{\xi}\right|^r d\omega = 0.$

Teorem 3.4. *Neka je r indeks toka nenewtonovskog fluida koji zadovoljava zakon potencije, a $n \geq 2$ prostorna dimenzija. Problem (3.11) ima jedinstveno slabo rješenje $(\boldsymbol{w}_\xi, \pi_\xi) \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \times L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}$ ako i samo ako $r < n$.*

Napomena 3.5. Odmah se vidi da za polimerne fluide teorem uvijek daje egzistenciju i jedinstvenost rješenja vanjskog problema, jer je u tom slučaju indeks toka $1 < r < 2$. To je ujedno i jedan od glavnih razloga zašto promatramo upravo takve fluide. Nasuprot tome, kod takozvanih dilatantnih fluida koji također zadovoljavaju zakon potencije, ali s indeksom toka $r > 2$, vidimo da može doći do određenih problema. To se može smatrati određenom vrstom Stokesovog paradoksa, kao što je primijećeno u [44]. Originalni naziv potječe od vanjskog problema Stokesovog toka newtonovskog fluida (dakle za $r = 2$) u dvije dimenzije koji nije dobro postavljen i nema rješenja. Fizikalna interpretacija ovog matematičkog rezultata govori o nemogućnosti aproksimacije toka Stokesovom jednadžbom. Problem leži u zanemarivanju inercijalnog člana u jednadžbi, što očito nije moguće u tom specifičnom slučaju.

Dokaz. (**Teorem 3.4**)
Postavimo sljedeći varijacijski problem: naći $\boldsymbol{v} \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, takav da za svako $\boldsymbol{w} \in D_0^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus T} |e(\boldsymbol{v})|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}) : e(\boldsymbol{w})\, dx - \int_{\mathbb{R}^n \setminus T} p \operatorname{div} \boldsymbol{w}\, dx = 0.$$

Pretpostavimo prvo da je $r < n$. Pokažimo da varijacijski problem ima jedinstveno rješenje.
Koristimo standardnu oznaku

$$D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n \setminus T) = \left\{ \boldsymbol{w} \in D_0^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \,\middle|\, \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \setminus T \right\}.$$

Uzmimo $R > 0$ dovoljno velik da T bude sadržan unutar kugle $B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^n$ i definirajmo funkciju $\mathsf{a} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus T)$ sa sljedećim svojstvima (za eksplicitnu konstrukciju ovakve funkcije v. na primjer [37]):

$$\operatorname{div} \mathsf{a} = 0; \quad \mathsf{a} = \begin{cases} 0 \text{ za } |x| < R, \\ \boldsymbol{\xi} \text{ za } |x| > R + 1. \end{cases}$$

Definiramo operator $\mathcal{T} : D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n \setminus T) \to [D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n \setminus T)]'$

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{w}) = -\operatorname{div}\left\{\, |e(\boldsymbol{w} + \mathsf{a})\,|^{r-2}\; e(\boldsymbol{w} + \mathsf{a}) - \; |e(\mathsf{a})\,|^{r-2}\; e(\mathsf{a})\right\},$$

koji je neprekinut, strogo monoton i koercitivan (v. [44]).
Za funkciju $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \mathsf{a}$ tada vrijedi

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{u}) = \operatorname{div}\left\{\, |e(\mathsf{a})\,|^{r-2}\; e(\mathsf{a})\right\}.$$

Prema klasičnom Minty-Browderovom teoremu 2.12, zaključujemo slično kao u teoremu 2.8 da postoji jedinstveno rješenje $\boldsymbol{u}$ ove jednadžbe. Budući da je $\boldsymbol{u} \in D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n \setminus T)$ prema Teoremu II.6.1 iz [29] vrijedi

$$\boldsymbol{u} = 0 \text{ na } \partial T \text{ i } \lim_{\rho\to\infty} \int_{S^{n-1}} |\boldsymbol{u}(\rho,\omega)\,|^r\; d\omega = 0.$$

Na osnovu toga je i $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \mathsf{a}$ jedinstveno rješenje početne varijacijske zadaće koje sada označimo s $\boldsymbol{w}_\xi$ i koje zadovoljava sve uvjete iz definicije 3.3.
Egzistencija i jedinstvenost tlaka slijedit će iz činjenice da je funkcional

$$\psi(\boldsymbol{w}) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus T} |e(\boldsymbol{w}_\xi)\,|^{r-2}\; e(\boldsymbol{w}_\xi) : e(\boldsymbol{w})\, dx$$

omeđen na $D^{1,r}_0(\mathbb{R}^n \setminus T)$ i da se poništava na $D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n \setminus T)$. Prema Korolaru III.5.1 iz Galdi[29] postoji jedinstveni $\pi_\xi \in L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\psi(\boldsymbol{w}) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus T} \pi_\xi \operatorname{div} \boldsymbol{w}\, dx.$$

Pretpostavimo sada da je $r \geq n$. U tom slučaju vrijedi (v. Teorem II.6.1 u [29]):

$$D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n \setminus T) = \left\{ \boldsymbol{w} \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \,\middle|\, \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \setminus T,\ \boldsymbol{w} = 0 \text{ na } \partial T \right\}$$

i za rješenje varijacijskog problema vrijedi $\boldsymbol{v} \in D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n \setminus T)$.
Kao i u prvom dijelu dokaza, uz manje izmjene lako se vidi da je operator $\mathcal{S} : D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n \setminus T) \to [D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n \setminus T)]'$, sada definiran sa

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{w}) = -\operatorname{div}\left\{\, |e(\boldsymbol{w})\,|^{r-2}\; e(\boldsymbol{w})\right\},$$

bijektivan. Posljedica je da problem

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{v}) = 0$$

ima samo trivijalno rješenje, a to proturječi zadanom uvjetu u beskonačnosti. Time su sve tvrdnje teorema dokazane. □

Napomena 3.6. Za rješenje $\boldsymbol{w}_\xi$ vanjskog problema (3.11) vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus T} |e(\boldsymbol{w}_\xi)|^r \, dx = \inf_{\boldsymbol{w} \in W_\xi} \int_{\mathbb{R}^n \setminus T} |e(\boldsymbol{w})|^r \, dx,$$

gdje se infimum traži po skupu

$$W_\xi = \left\{ \boldsymbol{w} \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \,\Big|\, \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \setminus T, \boldsymbol{w} = 0 \text{ na } \partial T, \lim_{|x| \to \infty} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\xi} \right\}.$$

U dokazu teorema spomenuli smo nekoliko rezultata iz Galdijeve knjige [29], koji se tiču ponašanja u beskonačnosti funkcija iz homogenih Soboljevljevih prostora. Vidjeli smo da to bitno ovisi o stupnju integrabilnosti $r \geq 1$, odnosno u našem slučaju o indeksu toka. Iskažimo prvo te poznate rezultate, a nakon toga ćemo dati originalni doprinos ocjenama rješenja problema definiranog na vanjskom području.

Lema 3.7. *Neka je $1 \leq r < \infty$ i neka je $\boldsymbol{v} \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$.*
(i) Ako je $1 \leq r < n$ tada postoji konstantni vektor $\boldsymbol{v}_\infty \in \mathbb{R}^n$ takav da

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho^{n-r} \int_{S^{n-1}} |\boldsymbol{v}(\rho, \omega) - \boldsymbol{v}_\infty|^r \, d\omega = 0.$$

Ako je $\boldsymbol{v} \in D_0^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$ tada je $\boldsymbol{v}_\infty = 0$.
(ii) Ako je $r = n$ tada

$$\lim_{\rho \to \infty} (\ln \rho)^{1-n} \int_{S^{n-1}} |\boldsymbol{v}(\rho, \omega)|^r \, d\omega = 0.$$

(iii) Ako je $r > n$ tada

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^{n-r} \int_{S^{n-1}} |\boldsymbol{v}(\rho,\omega)|^r \, d\omega = 0$$

i nadalje, $\boldsymbol{v}$ je neprekinuta i

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{|\boldsymbol{v}(x)|}{|x|^{(r-n)/r}} = 0 \text{ uniformno.}$$

■

U sljedećoj lemi preciziramo kako se ponaša, u ovisnosti o η, rješenje problema (3.11) iz definicije 3.3 u beskonačnosti, odnosno kada $|x| \to \infty$. Uz to što nam eksplicitna ocjena treba u nastavku, lema dodatno pojašnjava kako je zadovoljen uvjet $(3.11)_4$. Primijetimo također da je $\big(\boldsymbol{w}_\xi - \boldsymbol{\xi}\big) \in W^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$. Označimo sa $S_\eta = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |x| = \frac{1}{2\eta}\Big\}$, $D_\eta = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \frac{1}{2\eta} < |x| < \frac{1}{\eta}\Big\}$ i $G_\eta = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |x| > \frac{1}{2\eta}\Big\}$, za $\eta > 0$.

Lema 3.8. *Neka je $1 < r < 2$ indeks toka, a $(\boldsymbol{w}_\xi, \pi_\xi) \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \times L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}$ jedinstveno slabo rješenje problema (3.11). Tada za $\eta > 0$*

$$|\boldsymbol{w}_\xi - \boldsymbol{\xi}|_{L^r(S_\eta)} \le C\eta^{\frac{n-r}{r}}. \tag{3.12}$$

Nadalje, vrijedi

$$\lim_{\eta\to 0} |\boldsymbol{w}_\xi - \boldsymbol{\xi}|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(S_\eta)} = 0. \tag{3.13}$$

Dokaz. Ocjena (3.12) lako se dobije iz prethodne leme, dok za (3.13) stavimo

$$S_1 = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |x| = \frac{1}{2}\Big\} \quad \text{i} \quad D_1 = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \frac{1}{2} < |x| < 1\Big\}.$$

Također, podsjećamo da je za $\boldsymbol{w} \in W^{1-\frac{1}{r},r}(S_\eta)$

$$|\boldsymbol{w}|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(S_\eta)} = |\boldsymbol{w}|_{L^r(S_\eta)} + \langle\langle \boldsymbol{w} \rangle\rangle_{1-1/r,r,S_\eta}$$

takozvana Soboljev-Slobodeckijeva norma, gdje je

$$\langle\langle \boldsymbol{w} \rangle\rangle_{1-1/r,r,S_\eta} = \left(\int_{S_\eta} \int_{S_\eta} \frac{|\boldsymbol{w}(x) - \boldsymbol{w}(x')|^r}{|x-x'|^{n-2+r}} d\sigma_x d\sigma_{x'} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Za funkciju $\boldsymbol{w}$ definiranu na D_η, ako stavimo

$$\boldsymbol{v}(y) = \boldsymbol{w}(\frac{y}{\eta})$$

dobivamo funkciju definiranu na D_1. Laganim računom zamjena varijabli daje da za $1 \le q < +\infty$

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}|_{L^q(D_1)} &= \eta^{\frac{n}{q}} \, |\boldsymbol{w}|_{L^q(D_\eta)} \\ |\nabla \boldsymbol{v}|_{L^q(D_1)} &= \eta^{\frac{n-q}{q}} \, |\nabla \boldsymbol{w}|_{L^q(D_\eta)} \\ \langle\langle \boldsymbol{v} \rangle\rangle_{1-1/q,q,S_1} &= \eta^{\frac{n-q}{q}} \langle\langle \boldsymbol{w} \rangle\rangle_{1-1/q,q,S_\eta}. \end{aligned}$$

Sada koristimo nejednakost

$$|\boldsymbol{v}|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(S_1)} \le |\boldsymbol{v}|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial D_1)} \le C \left(|\boldsymbol{v}|_{L^{\frac{nr}{n-r}}(D_1)} + |\nabla \boldsymbol{v}|_{L^r(D_1)} \right)$$

kako bismo dobili sljedeću ocjenu, s konstantom C neovisnom o η,

$$\eta^{\frac{n-r}{r}} \langle\langle \boldsymbol{w} \rangle\rangle_{1-1/r,r,S_\eta} \le |\boldsymbol{v}|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(S_1)} \le C\eta^{\frac{n-r}{r}} \left(|\boldsymbol{w}|_{L^{\frac{nr}{n-r}}(D_\eta)} + |\nabla \boldsymbol{w}|_{L^r(D_\eta)} \right).$$

Korištenjem Poincaré-Soboljevljeve nejednakosti, koja ima konstantu invarijantnu na dilataciju, i Kornove nejednakosti, vidimo da za rješenje $\boldsymbol{w}_\xi$ vrijedi

$$\langle\langle \boldsymbol{w}_\xi - \boldsymbol{\xi} \rangle\rangle_{1-1/r,r,S_\eta} \le C \, |e(\boldsymbol{w}_\xi)|_{L^r(G_\eta)} \longrightarrow 0, \text{ kada } \eta \to 0. \tag{3.14}$$

Kako bismo dokazali iščezavanje člana na desnoj strani kada $\eta \to 0$, primijenimo teorem o monotonoj konvergenciji na niz funkcija $|e(\boldsymbol{w}_\xi)|^r \chi_{G_\eta}$ imajući na umu da je $|e(\boldsymbol{w}_\xi)|_{L^r(\mathbb{R}^n \setminus T)} < +\infty$.

Ocjena (3.13) tada slijedi kombinirajući (3.12) i (3.14). □

Sada ćemo primijeniti formalni pristup opisu funkcije otpornosti $\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})$. Želimo da ona bude generator sile kojom fluid gura tijelo T. Slijedeći Allaireova razmatranja, uvodimo tenzorsku funkciju vektorske varijable jednaku tenzoru naprezanja

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) = \pi_\xi \mathbb{I} - \left|e(\boldsymbol{w}_\xi)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{w}_\xi),$$

pri čemu se varijabli $\boldsymbol{\xi}$ pridružuje odgovarajući tenzor za vanjski problem s rješenjem $(\boldsymbol{w}_\xi, \pi_\xi)$. Lako se vidi da vrijedi:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) \in L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T) \text{ i } \operatorname{div} \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) \in L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T).$$

Budući da općenito funkcije iz $L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)$ nemaju definiranu vrijednost na ∂T, koji je skup mjere nula, moramo govoriti o normalnom tragu u slabom smislu. Preciznije,

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi})\, \boldsymbol{n}\big|_{\partial T} \in W^{-\frac{1}{r'}, r'}(\partial T) = \left(W^{1-\frac{1}{r}, r}(\partial T)\right)'$$

i ako iskoristimo tu činjenicu, možemo uvesti sljedeću definiciju.

Definicija 3.9. *(*Funkcija otpornosti*)*
Neka je $(\boldsymbol{w}_\xi, \pi_\xi) \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \times L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}$ *rješenje problema (3.11) i*

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) = \pi_\xi \mathbb{I} - \left|e(\boldsymbol{w}_\xi)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{w}_\xi).$$

Nelinearnu funkciju $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definiranu na sljedeći način*

$$\left(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\zeta}\right) = \left\langle \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi})\, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\zeta} \right\rangle_{\partial T} \quad \text{za } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n \tag{3.15}$$

nazivamo funkcijom otpornosti.

Napomena 3.10. Ako promotrimo gornju definicijsku jednakost, vidimo da je funkcija otpornosti definirana na ponešto neuobičajen način, zapravo na način prilagođen našim potrebama u nastavku. U slučaju da zaista treba odrediti komponente vektora $\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})$, odnosno silu kojom fluid gura tijelo T, trebalo bi samo na mjesto $\boldsymbol{\zeta}$ uvrstiti jedinične vektore iz ortonormalne baze prostora $\mathbb{R}^n$.

Kako bismo opravdali definiciju funkcije $\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})$, podsjetimo da za funkciju $\boldsymbol{\phi} \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,r}(\Omega)$ vrijedi

$$\int_{\partial\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\phi}\, dx' = \int_\Omega \operatorname{div} \mathcal{F} \cdot \boldsymbol{\phi}\, dx + \int_\Omega \mathcal{F} : \nabla \boldsymbol{\phi}\, dx,$$

iz čega slijedi

$$\left| \int_{\partial\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\phi}\, dx' \right| \leq \Big(\, |\operatorname{div} \mathcal{F}|_{L^{r'}} + |\mathcal{F}|_{L^{r'}} \Big) \, |\boldsymbol{\phi}|_{W^{1,r}} \, . \tag{3.16}$$

Zbog toga, pomoću operatora traga, za svako

$$\mathcal{F} \in \Big\{ \Phi \in L^{r'}(\Omega) \, \Big| \, \operatorname{div} \Phi \in L^{r'}(\Omega) \Big\}$$

možemo definirati normalni trag $\mathcal{F}\boldsymbol{n}\big|_{\partial\Omega} \in \Big(W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega) \Big)'$.

Sada želimo dovesti u vezu dvije funkcije različitih karaktera i načina na koji su definirane. To su ranije definirana funkcija permeabilnosti $\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi})$ i upravo uvedena funkcija otpornosti $\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})$. Tvrdimo da postoji neprekinuti prijelaz kada $\eta \to 0$ i zapravo se pokazuje da, do na odgovarajuće skaliranje, funkcija permeabilnosti na limesu teži ka inverzu funkcije otpornosti. Sličan je rezultat dokazan i u [1], ali s obzirom na linearni karakter problema, tamo su rezultati dani u terminima tenzora permeabilnosti i njegovog inverza. Kao što je i tamo primijećeno, tako i u slučaju filtracije polimernih fluida, promatrane funkcije dobivamo pomoću energija pomoćnih problema, a to su problem u ćeliji (3.3) i vanjski problem (3.11). Prvi predstavlja periodički tok uslijed djelovanja konstantne sile, dok je kod drugog sila jednaka nuli, a zadana je brzina u beskonačnosti. Upravo je razlika u načinu definiranja

funkcija razlog zašto ćemo na limesu $\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi})$ dobiti inverz od $\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})$. Kada govorimo o neprekinutom prijelazu, odnosno limesu, u biti se radi o neprekinutosti rubnih slojeva kod tih pomoćnih problema.
No, krenimo redom. Da bismo uopće govorili o limesu malog krutog dijela, prvo trebamo potvrditi da je funkcija $\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})$ invertibilna. U tu svrhu dokazujemo njeno važno svojstvo - monotonost.

Lema 3.11. *Funkcija $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je strogo monotona, odnosno vrijedi*

$$\Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{G}(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}\Big) > 0, \quad \text{za sve } \boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\zeta}. \tag{3.17}$$

Dokaz. Neka su $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\zeta}$. Neka su, nadalje, $\boldsymbol{w}_\xi$ i $\boldsymbol{w}_\zeta$ rješenja problema (3.11) redom za parametre $\boldsymbol{\xi}$ i $\boldsymbol{\zeta}$. Pomnožimo izraz $(3.11)_1$ s funkcijom

$$(\boldsymbol{w}_\zeta - \boldsymbol{\zeta}) \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$$

i integrirajmo po $\mathbb{R}^n \setminus T$. Dobije se

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus T} \Big(\,|e(\boldsymbol{w}_\xi)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{w}_\xi) : e(\boldsymbol{w}_\zeta) - \pi_\xi \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{w}_\zeta \Big) dx +$$
$$+ \Big\langle \pi_\xi\, \boldsymbol{n} - \,|e(\boldsymbol{w}_\xi)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{w}_\xi)\, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w}_\zeta - \boldsymbol{\zeta} \Big\rangle_{\partial T}.$$

Zbog toga

$$\Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\zeta}\Big) = \Big\langle \pi_\xi\, \boldsymbol{n} - |e(\boldsymbol{w}_\xi)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{w}_\xi)\, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\zeta} \Big\rangle_{\partial T} = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus T} |e(\boldsymbol{w}_\xi)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{w}_\xi) : e(\boldsymbol{w}_\zeta)\, dx, \tag{3.18}$$

gdje smo iskoristili činjenice da je

$$\boldsymbol{w}_\zeta = 0 \text{ na } \partial T \quad \text{i} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{w}_\zeta = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \setminus T.$$

Nadalje, lako se pokaže da je izraz $\Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{G}(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}\Big)$ jednak

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus T} \Big(\,|e(\boldsymbol{w}_\xi)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{w}_\xi) - \,|e(\boldsymbol{w}_\zeta)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{w}_\zeta)\Big) : \Big(e(\boldsymbol{w}_\xi) - e(\boldsymbol{w}_\zeta)\Big) dx.$$

Lema 2.10 kaže: za $1 < r < 2$ i $\Phi, \Psi \in L^r(\mathbb{R}^n \setminus T)^{n\times n}$

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus T} \Big(|\Phi|^{r-2}\,\Phi - |\Psi|^{r-2}\,\Psi\Big) : \Big(\Phi - \Psi\Big)\,dx \geq$$

$$\geq\; C\frac{|\Phi - \Psi|^2_{L^r(\mathbb{R}^n\setminus T)}}{\big(\,|\Phi|_{L^r(\mathbb{R}^n\setminus T)} + |\Psi|_{L^r(\mathbb{R}^n\setminus T)}\big)^{2-r}} \geq 0. \tag{3.19}$$

Kao posljedicu, vidimo da izraz $\Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{G}(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}\Big)$ može biti nula ako i samo ako $\boldsymbol{w}_\xi = \boldsymbol{w}_\zeta$ u $D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$, a prema teoremu 3.4, zbog jedinstvenosti rješenja, to je ekvivalentno tvrdnji da je $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta}$. $\square$

Napomena 3.12. Lako se vidi da vrijedi

$$\Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}\Big) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus T} |e(\boldsymbol{w}_\xi)|^r\,dx = \inf_{\boldsymbol{w}\in W_\xi}\int_{\mathbb{R}^n\setminus T} |e(\boldsymbol{w})|^r\,dx,$$

gdje se infimum traži po skupu

$$W_\xi = \Big\{\boldsymbol{w} \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)\;\Big|\; \operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \setminus T, \boldsymbol{w} = 0 \text{ na } \partial T, \lim_{|x|\to\infty} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\xi}\Big\}.$$

Nadalje, za $|\boldsymbol{\xi}| = 1$

$$|\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})| \geq \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}\Big) \geq C \cdot C_r(T) > C \cdot \mu(T) > 0,$$

gdje je $C_r(T)$ takozvani r-kapacitet skupa T (v. na primjer [10]).
Budući da je strogo monotona, funkcija $\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})$ je invertibilna. Drugim riječima, inverz $\mathcal{G}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$ je dobro definiran za svako $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Lako se vidi da je

$$\big(\lambda\,\boldsymbol{w}_\xi,\; |\lambda|^{r-2}\,\lambda \cdot \pi_\xi\big)$$

rješenje vanjskog problema ako zamijenimo $\boldsymbol{\xi}$ sa $\lambda\boldsymbol{\xi}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), pa vrijedi

$$\mathcal{G}(\lambda\boldsymbol{\xi}) = |\lambda|^{r-2}\lambda\,\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})\;,\;\; \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Stavljajući $\boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\xi}_0 \in S^{n-1}$ primjećujemo, slično kao u slučaju funkcije $\mathcal{U}_\eta$, da vrijedi

$$m|\boldsymbol{\xi}|^{r-1} \leq |\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})| \leq M|\boldsymbol{\xi}|^{r-1}, \tag{3.20}$$

gdje je $m = \inf_{|\boldsymbol{\xi}|=1} |\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})| > 0$ i $M = \sup_{|\boldsymbol{\xi}|=1} |\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})| > 0$.
Pokazuje se (v. [14]) da funkcija $\mathcal{G}$ ima oblik

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}) = |\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi})|^{r-2}\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi})\,,$$

gdje je $\mathcal{H}$ neka homogena funkcija u smislu da

$$\mathcal{H}(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi})\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Numerički izračun proveden u [14] pokazuje da, općenito, funkcija $\mathcal{H}$ nije linearna.

Lema 3.13. *Funkcija $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je neprekinuta.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da za niz za koji vrijedi $\boldsymbol{\xi}_n \to \boldsymbol{\xi}$ u $\mathbb{R}^n$ vrijedi da $\big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}_n), \boldsymbol{\zeta}\big) \to \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\zeta}\big)$ za svaki $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$.
Iz izraza (3.19) i (3.20) zaključujemo da vrijedi

$$\big|e(\boldsymbol{w}_{\xi_n}) - e(\boldsymbol{w}_\xi)\big|^2_{L^r(\mathbb{R}^n\setminus T)} \leq C \cdot \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}_n) - \mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi}\Big) \leq$$

$$\leq C \cdot |\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}_n)\,| \cdot |\boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi}\,| + C \cdot |\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})\,| \cdot |\boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi}\,| \longrightarrow 0,$$

pa $e(\boldsymbol{w}_{\xi_n}) \to e(\boldsymbol{w}_\xi)$ u jakoj topologiji prostora $L^r(\mathbb{R}^n \setminus T)$.
Zaključujemo da

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus T} |e(\boldsymbol{w}_{\xi_n})\,|^{r-2}\; e(\boldsymbol{w}_{\xi_n}) : e(\boldsymbol{w}_\zeta)\; dx \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus T} |e(\boldsymbol{w}_\xi)\,|^{r-2}\; e(\boldsymbol{w}_\xi) : e(\boldsymbol{w}_\zeta)\; dx$$

i pomoću izraza (3.18) lako dolazimo do zaključka da je definirana funkcija otpornosti $\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})$ neprekinuta. $\square$

3.4 Limes malog krutog dijela

Nakon reskaliranja domene, definirali smo u (3.7) i odgovarajuća rješenja:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_\xi^\eta(x) &= \eta^{A(r)} \boldsymbol{v}_\xi(\eta x) \\ p_\xi^\eta(x) &= \eta^{n-1} p_\xi(\eta x), \quad \text{za } x \in \eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta. \end{aligned}$$

Eksponent $A(r)$ je određen s (3.8) i tako definirana reskalirana rješenja, proširena nulom, zadovoljavaju ocjene

$$\begin{aligned} \left| p_\xi^\eta \right|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}} &\leq C \, |\boldsymbol{\xi}| \, , \\ \left| e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta) \right|_{L^r(\mathbb{R}^n \setminus T)} &\leq C \, |\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{r-1}} \, , \end{aligned}$$

kao što smo zaključili u (3.10). Sada tvrdimo da taj niz rješenja koji ovisi o $\eta > 0$ konvergira kada $\eta \to 0$, na primjer odabirom

$$\eta = \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

i promatranjem $k \to \infty$. Naravno, govorimo o slaboj konvergenciji, posebno za svaki od nizova $(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)$, (p_ξ^η) i $(e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta))$. Pokazuje se da je limes reskaliranih rješenja $(\boldsymbol{v}_\xi^\eta, p_\xi^\eta)$ zapravo rješenje specifičnog nenewtonovskog vanjskog problema. U dokazu te tvrdnje moramo savladati poteškoće koje nastaju zato što se radi o slabo konvergentnim nizovima, a jednadžbe o kojima govorimo imaju nelinearni karakter.

Teorem 3.14.

(Limes malog krutog dijela za tok polimernog fluida)

Neka je $\mathcal{U}_\eta$ funkcija permeabilnosti dana s (3.4) i $\mathcal{G}$ funkcija otpornosti vanjskog problema definirana u (3.15). Reskalirana rješenja $(\boldsymbol{v}_\xi^\eta, p_\xi^\eta)$ konvergiraju kada $\eta \to 0$ ka specifičnom rješenju $(\boldsymbol{w}_{\mathcal{G}^{-1}(\xi)}, \pi_{\mathcal{G}^{-1}(\xi)})$ vanjskog problema

(3.11):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_\xi^\eta &\rightharpoonup \boldsymbol{w}_{\mathcal{G}^{-1}(\xi)} && \textit{slabo u } L^r_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T), \\ p_\xi^\eta &\rightharpoonup \pi_{\mathcal{G}^{-1}(\xi)} && \textit{slabo u } L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}, \\ e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta) &\to e(\boldsymbol{w}_{\mathcal{G}^{-1}(\xi)}) && \textit{jako u } L^r(\mathbb{R}^n \setminus T). \end{aligned}$$

Štoviše, imamo neprekinutost funkcije permeabilnosti na limesu malog krutog dijela, u smislu da

$$\lim_{\eta\to 0} \eta^{A(r)} \mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{G}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \quad \textit{za svako } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.21}$$

Dokaz. Neka je $\overline{\boldsymbol{v}_\xi^\eta} = \dfrac{1}{\mu(\eta^{-1}Y)} \displaystyle\int_{\eta^{-1}Y} \boldsymbol{v}_\xi^\eta \, dx = \eta^n \cdot \int_{\eta^{-1}Y} \eta^{A(r)} \boldsymbol{v}_\xi(\eta x) \, dx$ i primijetimo da

$$\left|\overline{\boldsymbol{v}_\xi^\eta}\right| \le C\eta^{A(r)} \left|\boldsymbol{v}_\xi\right|_{L^r(\mathcal{Y}_\eta)} \le C,$$

pa postoji podniz u istoj oznaci, takav da

$$\lim_{\eta\to 0} \overline{\boldsymbol{v}_\xi^\eta} = \boldsymbol{c}_\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Korištenjem Poincaré-Soboljevljeve nejednakosti, u kojoj se konstanta ne mijenja dilatacijom varijable, i (3.10), lako nalazimo da za svaki omeđeni skup $\omega \subset \mathbb{R}^n \setminus T$ i η dovoljno malo da je $\omega \subseteq \eta^{-1}Y \setminus T$, vrijedi

$$\left|\boldsymbol{v}_\xi^\eta - \overline{\boldsymbol{v}_\xi^\eta}\right|_{L^{\frac{nr}{n-r}}(\omega)} \le C \left|\nabla \boldsymbol{v}_\xi^\eta\right|_{L^r(\eta^{-1}Y)} \le C \tag{3.22}$$

i konstanta C ne ovisi o η.

Odavde zaključujemo da je niz $(\boldsymbol{v}_\xi^\eta - \overline{\boldsymbol{v}_\xi^\eta})$ omeđen u $L_{loc}^{\frac{nr}{n-r}}(\mathbb{R}^n \setminus T)$, pa onda i u $L^r_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T)$. Zbog toga slabo konvergira, do na podniz, odnosno postoji $\boldsymbol{v}_\xi^0 \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T)$ takav da

$$\boldsymbol{v}_\xi^\eta \rightharpoonup \boldsymbol{v}_\xi^0 \text{ slabo u } L^r_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus T).$$

Zbog omeđenosti nizova (p_ξ^η) i $(e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta))$, što vidimo u (3.10), postoji slabi limes

$$(\boldsymbol{v}_\xi^0, p_\xi^0) \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \times L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}$$

određenog podniza (sa istim oznakama) takav da

$$p_\xi^\eta \rightharpoonup p_\xi^0 \text{ u } L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)/\mathbb{R}, \quad e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta) \rightharpoonup e(\boldsymbol{v}_\xi^0) \text{ u } L^r(\mathbb{R}^n \setminus T).$$

Zasad, imamo samo slabu konvergenciju niza $e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)$, pa možemo reći samo da vrijedi

$$\int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \left| e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta) \right|^r dx = \boldsymbol{\xi} \cdot \overline{\boldsymbol{v}_\xi^\eta} \;\to\; \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{c}_\xi \;\geq\; \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus T} \left| e(\boldsymbol{v}_\xi^0) \right|^r dx.$$

Prelaskom na limes u (3.22) i korištenjem slabe poluneprekinutosti odozdo $L^{\frac{nr}{n-r}}$-norme, dobijemo

$$\left| \boldsymbol{v}_\xi^0 - \boldsymbol{c}_\xi \right|_{L^{\frac{nr}{n-r}}(\omega)} \leq C,$$

gdje C ne ovisi o ω. To znači da je $\boldsymbol{v}_\xi^0 - \boldsymbol{c}_\xi \in L^{\frac{nr}{n-r}}(\mathbb{R}^n \setminus T)$, pa je rubni uvjet u beskonačnosti jednak

$$\lim_{|x| \to \infty} \boldsymbol{v}_\xi^0 = \boldsymbol{c}_\xi.$$

Kako bismo odredili jednadžbe koje limes $(\boldsymbol{v}_\xi^0, p_\xi^0)$ zadovoljava, uzmimo $R > 0$ dovoljno velik da je T sadržano u kugli $B(0, R)$ i definirajmo funkciju $\mathsf{a} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus T)$, kao u dokazu teorema 3.4. Podsjećamo koja su njena svojstva:

$$\operatorname{div} \mathsf{a} = 0; \quad \mathsf{a} = 0 \text{ za } |x| < R, \quad \mathsf{a} = \boldsymbol{c}_\xi \text{ za } |x| > R + 1.$$

Funkcija $\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{v}_\xi^0 - \mathsf{a}$ je iz prostora $D^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n \setminus T)$ i nadalje definiramo operator $\mathcal{T} : D_0^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \to [D_0^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)]'$

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{v}) = -\operatorname{div} \left\{ \left| e(\boldsymbol{v} + \mathsf{a}) \right|^{r-2} e(\boldsymbol{v} + \mathsf{a}) - \left| e(\mathsf{a}) \right|^{r-2} e(\mathsf{a}) \right\},$$

koji je neprekinut, strogo monoton i koercitivan (v. [44]).

Uzmimo sada $\boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus T)$ i η takve da $\eta^{-1} > R$ i $\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta \supseteq \operatorname{supp} \boldsymbol{v}$. Zbog nejednakosti (3.19) iz leme 2.10 imamo

$$\int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \Big(\,|e(\boldsymbol{v}+\mathsf{a})\,|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}+\mathsf{a}) - \,|e(\mathsf{a})\,|^{r-2}\ e(\mathsf{a})\Big) : e(\boldsymbol{v}+\mathsf{a}-\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\ dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \Big(\,\big|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\big|^{r-2}\ e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta) - \,|e(\mathsf{a})\,|^{r-2}\ e(\mathsf{a})\Big) : e(\boldsymbol{v}+\mathsf{a}-\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\ dx.$$

Lijeva strana nejednakosti teži izrazu $\Big\langle \mathcal{T}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^0 \Big\rangle$ kad $\eta \to 0$, dok je desna jednaka

$$\int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \Big(- \nabla p_\xi^\eta + \eta^n \boldsymbol{\xi} + \operatorname{div}\big\{\,|e(\mathsf{a})\,|^{r-2}\ e(\mathsf{a})\big\}\Big) \cdot \Big(\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}_\xi^\eta - \mathsf{a})\Big)\ dx$$

a taj izraz teži

$$\int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \Big(- \nabla p_\xi^0 + \operatorname{div}\big\{\,|e(\mathsf{a})\,|^{r-2}\ e(\mathsf{a})\big\}\Big) \cdot \Big(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^0\Big)\ dx.$$

Dokazali smo da

$$\Big\langle \mathcal{T}(\boldsymbol{v}) + \nabla p_\xi^0 - \operatorname{div}\big\{\,|e(\mathsf{a})\,|^{r-2}\ e(\mathsf{a})\big\}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^0 \Big\rangle \geq 0 \tag{3.23}$$

za svako $\boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus T)$ što je gusto u $D_0^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$.

Sada, iz (3.23), stavljajući

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^0 + \lambda \boldsymbol{u},\ \ \boldsymbol{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus T) \text{ i } \lambda \in \mathbb{R},$$

i korištenjem takozvanog Mintyjevog trika lako vidimo da $\boldsymbol{v}_\xi^0 = \boldsymbol{v}^0 + \mathsf{a}$ i p_ξ^0 zadovoljavaju $(3.11)_1$ - $(3.11)_3$.

Glede rubnog uvjeta u beskonačnosti, neka su

$$B_\eta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |x| < \frac{1}{2\eta} \right\} \quad \text{i} \quad S_\eta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |x| = \frac{1}{2\eta} \right\},$$

pa primijetimo da je $T \subset B_\eta \subset \eta^{-1} Y$ za η dovoljno mali. Definirajmo funkciju $\widetilde{\boldsymbol{u}^\eta} \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$ s

$$\widetilde{\boldsymbol{u}^\eta} = \begin{cases} \boldsymbol{u}^\eta & \text{u } B_\eta \setminus T \\ \boldsymbol{c}_\xi & \text{u } \mathbb{R}^n \setminus B_\eta, \end{cases} \tag{3.24}$$

gdje je $\boldsymbol{u}^\eta$ rješenje problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left\{ |e(\boldsymbol{u}^\eta)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{u}^\eta)\right\} + \nabla q^\eta = 0 & \text{u } B_\eta \setminus T \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}^\eta = 0 & \text{u } B_\eta \setminus T \\ \boldsymbol{u}^\eta = 0 \text{ na } \partial T, \qquad \boldsymbol{u}^\eta = \boldsymbol{c}_\xi \text{ na } S_\eta \end{cases} \tag{3.25}$$

S druge strane, $\boldsymbol{v}_\xi^0$ zadovoljava

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left\{ |e(\boldsymbol{v}_\xi^0)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\right\} + \nabla p_\xi^0 = 0 & \text{u } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}_\xi^0 = 0 & \text{u } \mathbb{R}^n \setminus T \\ \boldsymbol{v}_\xi^0 = 0 \text{ na } \partial T, \qquad \boldsymbol{v}_\xi^0 = \boldsymbol{c}_\xi + \boldsymbol{E}_\eta \text{ na } S_\eta \end{cases} \tag{3.26}$$

i ako primijenimo lemu 3.8:

$$\lim_{\eta\to 0} |\boldsymbol{E}_\eta|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(S_\eta)} = 0. \tag{3.27}$$

Sada, iz nejednakosti (3.19) i (3.27), lako se dolazi do zaključka da

$$\left|e(\widetilde{\boldsymbol{u}^\eta}) - e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\right|_{L^r(\mathbb{R}^n\setminus T)} \leq \left|e(\boldsymbol{u}^\eta) - e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\right|_{L^r(B_\eta\setminus T)} + \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\right|_{L^r(\mathbb{R}^n\setminus B_\eta)} \longrightarrow 0$$

kad $\eta \to 0$, pa

$$e(\widetilde{\boldsymbol{u}^\eta}) \to e(\boldsymbol{v}_\xi^0) \text{ u } L^r(\mathbb{R}^n \setminus T). \tag{3.28}$$

Stavimo $\Psi^\eta = \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)$ i vidimo da $|\Psi^\eta|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n\setminus T)} \leq C$, pa postoji podniz (u istoj oznaci) i $\Psi^0 \in L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T)$ takav da

$$\Psi^\eta \rightharpoonup \Psi^0 \text{ u } L^{r'}(\mathbb{R}^n \setminus T). \tag{3.29}$$

Štoviše,

$$\int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \Psi^\eta e(\widetilde{\boldsymbol{u}^\eta})\, dx \;\to\; \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus T} \Psi^0 e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\, dx,$$

a korištenjem Hölderove nejednakosti vidimo (jer je $\left(\widetilde{\boldsymbol{u}^\eta} - \boldsymbol{c}_\xi\right) \subset W^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T)$ omeđen u $L^r(\mathbb{R}^n)$)

$$\left|\eta^n \int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \widetilde{\boldsymbol{u}^\eta}\, dx - \boldsymbol{c}_\xi\right| \leq \left|\widetilde{\boldsymbol{u}^\eta} - \boldsymbol{c}_\xi\right|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \cdot \eta^{\frac{n}{r}} \;\to\; 0.$$

Slijedi

$$\int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \Psi^\eta e(\widetilde{\boldsymbol{u}^\eta})\, dx = \boldsymbol{\xi}\cdot\eta^n \int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \widetilde{\boldsymbol{u}^\eta}\, dx \;\to\; \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{c}_\xi = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right|^r dx,$$

što osigurava da

$$\int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \Psi^\eta e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\, dx \;\to\; \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus T} \Psi^0 e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\, dx. \tag{3.30}$$

Nejednakost (3.19) povlači da za $\boldsymbol{\phi}^\eta = \widetilde{\boldsymbol{u}^\eta} + \lambda\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}\in D^{1,r}(\mathbb{R}^n\setminus T)$ i $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\int\limits_{\eta^{-1}\mathcal{Y}_\eta} \Big(\Psi^\eta - |e(\boldsymbol{\phi}^\eta)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{\phi}^\eta)\Big) : \Big(e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta) - e(\boldsymbol{\phi}^\eta)\Big)\, dx \ge 0,$$

što, nakon što pustimo $\eta\to 0$ i iskoristimo (3.28), (3.29) i (3.30), vodi do izraza

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus T} \Big(\Psi^0 - |e(\boldsymbol{\phi})|^{r-2}\, e(\boldsymbol{\phi})\Big) : \Big(e(\boldsymbol{v}_\xi^0) - e(\boldsymbol{\phi})\Big)\, dx \ge 0, \qquad \text{gdje } \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{v}_\xi^0 + \lambda\boldsymbol{u}.$$

Ako ponovno primijenimo Mintyjev trik

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus T} \Big(\Psi^0 - \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\Big) : e(\boldsymbol{u})\, dx = 0, \qquad \boldsymbol{u}\in D^{1,r}(\mathbb{R}^n\setminus T).$$

Sada, uzimajući $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_\xi^0$, jasno je da $\left|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right|_{L^r(\mathbb{R}^n\setminus T)}$ teži ka $\left|e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\right|_{L^r(\mathbb{R}^n\setminus T)}$ također, što uz slabu konvergenciju osigurava i jaku konvergenciju

$$e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta) \to e(\boldsymbol{v}_\xi^0) \text{ u } L^r(\mathbb{R}^n\setminus T). \tag{3.31}$$

Nakon što raspišemo

$$\begin{aligned}
&\mu\big(Y\setminus\eta T\big)\cdot(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}) = \Big\langle p_\xi^\eta\,\boldsymbol{n} - \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\,\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\zeta}\Big\rangle_{\partial T} = \\
&= \int\limits_{B_\eta\setminus T} \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta) : e(\boldsymbol{w}_\zeta)\, dx + \\
&\quad + \Big\langle p_\xi^\eta\,\boldsymbol{n} - \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\,\boldsymbol{n}, \boldsymbol{w}_\zeta - \boldsymbol{\zeta}\Big\rangle_{S_\eta} - \boldsymbol{\xi}\cdot\eta^n \int\limits_{B_\eta\setminus T} (\boldsymbol{w}_\zeta - \boldsymbol{\zeta})\, dx
\end{aligned}$$

i primijetimo da posljednja dva člana na desnoj strani teže k nuli, iskoristimo (3.31) kako bi opravdali prelazak na limes u

$$\lim_{\eta\to 0}\left\langle p_\xi^\eta \boldsymbol{n} - \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi^\eta)\,\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\zeta}\right\rangle_{\partial T} = \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus T} \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi^0) : e(\boldsymbol{w}_\zeta)\; dx =$$
$$= \left\langle p_\xi^0 \boldsymbol{n} - \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\,\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\zeta}\right\rangle_{\partial T}.$$

To nas vodi do zaključka da za $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$

$$\left\langle p_\xi^0 \boldsymbol{n} - \left|e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\right|^{r-2} e(\boldsymbol{v}_\xi^0)\,\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\zeta}\right\rangle_{\partial T} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}),$$

što daje iznos sile otpora prepreke T, odnosno vrijednost funkcije otpornosti pridružene rješenju $(\boldsymbol{v}_\xi^0, p_\xi^0)$. Ako se sada prisjetimo definicije funkcije $\mathcal{G}$, vidimo da vrijedi

$$\boldsymbol{c}_\xi = \mathcal{G}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$$

i zbog jedinstvenosti rješenja $(\boldsymbol{v}_\xi^0, p_\xi^0) = (\boldsymbol{w}_{\mathcal{G}^{-1}(\xi)}, \pi_{\mathcal{G}^{-1}(\xi)})$.
Zbog jedinstvenosti također zaključujemo da bilo koji konvergentan podniz ima uvijek jedan te isti limes, pa to znači da je čitav niz konvergentan i da teži gornjem limesu.
Za završetak dokaza ostalo je još samo za primijetiti da

$$\eta^{A(r)}\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\eta^{-1}Y\setminus T} \boldsymbol{v}_\xi^\eta \cdot \eta^n\; dx = \frac{1}{|\eta^{-1}Y\,|}\int\limits_{\eta^{-1}Y} \boldsymbol{v}_\xi^\eta\; dx \quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{c}_\xi = \mathcal{G}^{-1}(\boldsymbol{\xi}).$$

□

Termin limes malog krutog dijela koji smo pobliže objasnili u poglavlju 2.2, u prethodnom smo teoremu 3.14 primijenili na filtraciju polimernog fluida. Taj rezultat nam govori kako je u slučaju malog krutog udjela, odnosno kada je veličina prepreka u poroznoj sredini mala, Darcyjev zakon i funkciju permeabilnosti moguće zapisati pomoću vanjskog problema i inverza funkcije otpornosti. Uočavamo da je također bilo potrebno skalirati funkciju $\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi})$ izrazom $\eta^{A(r)}$, kako bismo osigurali da na limesu teži ka inverzu $\mathcal{G}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$. Drugim riječima, pokazali smo sljedeće asimptotičko ponašanje funkcije permeabilnosti kada $\eta \to 0$:

$$\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi}) \sim \frac{1}{\eta^{A(r)}}\mathcal{G}^{-1}(\boldsymbol{\xi}).$$

Kada puštamo parametar $\eta \to 0$, tada se veličina prepreka neograničeno smanjuje, pa je i za očekivati da se vrijednost funkcije $\mathcal{U}_\eta(\boldsymbol{\xi})$ povećava i teži u beskonačnost. To odgovara fizikalnom ponašanju svojstva permeabilnosti ili propusnosti u slučaju takve filtracije.

Poglavlje 4

Kritični red veličine nepropusnog dijela: Brinkmanov zakon

4.1 Rezultat za newtonovske fluide

Poznato je da se homogenizacijom Stokesove jednadžbe za tok newtonovskog fluida kroz poroznu sredinu dobije Darcyjev zakon ako je veličina nepropusnog dijela istog reda veličine kao i period periodične domene. Uz Darcyjev zakon postoje i drugi poznati zakoni filtracije, kao što je na primjer Brinkmanov zakon. Brinkman[20] je 1947. godine predstavio novi sustav jednadžbi, u određenom smislu između Darcyjevih i Stokesovih jednadžbi, tako da je u zakon filtracije ubacio novi član proporcionalan brzini. Dokazano je (v. Marchenko-Hrouslov[43], Levy[39], Brillard[19], Allaire[2, 3]) da takav slučaj nastupa kada je, uz veličinu ćelije ε, red veličine nepropusnog dijela jednak ε^3 (za trodimenzionalnu domenu). Red veličine za koji nastupa Brinkmanov zakon filtracije uobičajeno se naziva *kritičnim.* Pokazalo se da ako je veličina prepreka asimptotički veća od kritične veličine, tada homogenizirani problem ima Darcyjev oblik, a ako je asimptotički manja od kritične, onda se homogenizacijom ponovno dobije Stokesov problem.

Precizna formulacija rezultata o Brinkmanovom zakonu za newtonovske fluide je sljedeća: neka kao i ranije Ω označava poroznu sredinu s krutim inkluzijama T_i^ε, a Ω_ε područje toka. Neka su prepreke T_i^ε, periodički raspoređene s periodom ε, homeomorfna slika prototipa prepreke u oznaci T i neka je njihova veličina jednaka $a_\varepsilon = \varepsilon\eta$. Promatramo slučaj $n \geq 3$ i ranije definirani omjer (2.5)

$$\sigma_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon^n}{a_\varepsilon^{n-2}} \right)^{1/2},$$

te pretpostavljamo da sada vrijedi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon = \sigma > 0 \text{ (kritična veličina prepreke!)}.$$

Neka su kao i ranije $(\boldsymbol{v}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ rješenja Stokesovog problema (2.2), a neka je $(\boldsymbol{v}, p) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ rješenje takozvanog Brinkmanovog problema

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{v} + \nabla p + \dfrac{1}{\sigma^2}\mathbf{M}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} & \text{u } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 & \text{u } \Omega, \\ \boldsymbol{v} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

u kojem ponovno koristimo tenzor otpornosti $\mathbf{M}$, definiran pomoću vanjskog Stokesovog problema (2.7).

Neka je $\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon}$ proširenje nulom brzine $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ na čitav Ω i neka je P^ε proširenje tlaka definirano s

$$P^\varepsilon = \begin{cases} p^\varepsilon & \text{u } \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{1}{\mu(C_i^\varepsilon)} \displaystyle\int_{C_i^\varepsilon} p^\varepsilon dx & \text{u svakom } T_i^\varepsilon. \end{cases} \tag{4.2}$$

C_i^ε označava kontrolni volumen oko svake prepreke T_i^ε: to je kugla promjera ε oko prepreke T_i^ε, bez područja T_i^ε.

Rezultat o konvergenciji glasi: proširena rješenja konvergiraju slabo ka rješenju Brinkmanovog zakona

$$(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon}, P^\varepsilon) \rightharpoonup (\boldsymbol{v}, p) \quad \text{slabo u } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Najveći problem u dokazu konvergencije (v. [2]) predstavljalo je proširenje tlaka prije prelaska na limes kada $\varepsilon \to 0$. Slijedeći ideju Cioranescu-Murat[23], proširenje prvo ima apstraktni karakter i dano je pomoću niza zadanih hipoteza, a tek generalizirajući rezultat Lipton-Avellaneda[42], Allaire pokazuje da to proširenje ima eksplicitni oblik (4.2).

Dokaz konvergencije u [2] proveden je pomoću energetske metode koju je prvi koristio L. Tartar[54]. Alternativni pristup problemu pomoću epi-konvergencije može se pronaći i u članku A. Brillarda[19].

4.2 Kritični slučaj kod polimernih fluida

Neka je, kao i ranije, sa $Y = \langle -1/2, 1/2 \rangle^n$ označena pomaknuta jedinična ćelija kojoj je središte u ishodištu. Neka je sada $\eta = \eta(\varepsilon)$ veličina prepreke u jediničnoj ćeliji koja ovisi o periodu periodičke porozne strukture ε. To se razlikuje od dosadašnjeg razmatranja kada smo η držali konstantnim za vrijeme homogenizacije i provodili u stvari posthomogenizacijsku asimptotičku analizu. Prisjetimo se, veličina prepreke u svakoj pojedinoj ćeliji porozne sredine je produkt ta dva parametra, odnosno iznosi $a_\varepsilon = \varepsilon\eta$. Kritični red veličine perforacija standardno se određuje asimptotičkim razvojem, no u našem slučaju, zbog problema koji proizlaze iz nelinearne strukture jednadžbi, određujemo ga pomoću oblika uniformnih ocjena rješenja. Za potrebe našeg razmatranja, definiramo

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\eta^{\frac{n-r}{r}}}. \tag{4.3}$$

U ovisnosti o graničnom ponašanju ovog parametra kada $\varepsilon \to 0$, dobivamo tri različita slučaja:

1. $\lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon = +\infty$ – ovaj ćemo slučaj nazvati *subkritičnim* (podkritičnim) jer je veličina prepreka takva da one na limesu iščezavaju brže od takozvane kritične veličine, što kao posljedicu ima neograničeni rast parametra σ_ε. Očekujemo da ovdje homogenizirani problem ima nelinearni Stokesov oblik.

2. $\lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon = \sigma_0 > 0$ – *kritični slučaj* veličine prepreka. Nakon homogenizacije se javlja Brinkmanov oblik zakona filtracije.

3. $\lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon = 0$ – *supkritični* (nadkritični) *slučaj.* Homogenizacija bi u konačnici trebala dati Darcyjev zakon.

Za veliki raspon veličina prepreke (slučajevi 1. i 3.), homogenizirane jednadžbe zadržavaju isti oblik, dok god je ispunjen uvjet limesa, ali također vidimo da postoji kritična veličina, ili bolje rečeno kritičan red veličine na prijelazu iz jednog u drugi slučaj. Cilj nam je istražiti ovo kritično ponašanje koje se pojavljuje kada vrijedi

$$\eta = O(\varepsilon^{\frac{r}{n-r}}),$$

a to znači da je veličina svake prepreke T_i^ε u periodičnoj poroznoj sredini reda veličine

$$a_\varepsilon = \varepsilon\eta = O(\varepsilon^{\frac{n}{n-r}}).$$

U prvom slučaju (1.), red veličine prepreka je takav da one iščezavaju na limesu brže nego u kritičnom slučaju. Prema tome, njihov utjecaj na tok fluida bi trebao biti zanemaren, pa bi se nakon homogenizacije trebalo dobiti neperturbirane nelinearne Stokesove jednadžbe. Ako se prepreke asimptotički smanjuju "sporije" od $O(\varepsilon^{\frac{n}{n-r}})$ (slučaj 3.), njihov doprinos usporavanju toka fluida nadjačava Stokesov tok i za očekivati je da homogenizirani problem ima Darcyjev oblik. Ta dva preostala slučaja nisu predmet proučavanja u ovoj radnji, ali predstavljaju zanimljivu temu za daljnje istraživanje.

4.3 Ocjene rješenja

Kako bismo izveli apriorne ocjene rješenja jednadžbi toka, koristimo neke klasične nejednakosti. Bitno nam je odrediti ocjene s eksplicitnom ovisnošću o parametru σ_ε, za koji vrijedi $\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon = \sigma_0$.

Lema 4.1. *(*Optimalna Poincaré-Kornova nejednakost u Ω_ε*)*
Neka je $1 < r < n$ i σ_ε omjer definiran u (4.3). Postoje konstante C_1, C_2 koje ne ovise o ε, takve da za svako $\boldsymbol{v} \in W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon)$

$$1) \qquad |\boldsymbol{v}|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \le C_1\,\sigma_\varepsilon\,|\nabla\boldsymbol{v}|_{L^r(\Omega_\varepsilon)}\,, \quad \textit{(Poincaréova nejednakost)} \tag{4.4}$$

$$2) \qquad |\nabla\boldsymbol{v}|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \le C_2\,|e(\boldsymbol{v})|_{L^r(\Omega_\varepsilon)}\,. \quad \textit{(Kornova nejednakost)} \tag{4.5}$$

Dokaz. Koristimo isti pristup kao u dokazu leme 2.5. Kako je prototip prepreke T zatvoren skup strogo pozitivne mjere, ako ga smjestimo u ishodište koordinatnog sustava postoji $\alpha > 0$ takav da $B(0, \alpha\eta\varepsilon) \subset \varepsilon\eta T$.
Za $x \in Y^\varepsilon = \langle -\varepsilon/2, \varepsilon/2\rangle^n$, neka je $\rho = |x|$ i proširimo $\boldsymbol{v}$ nulom na čitavu ćeliju Y^ε. Tada imamo

$$\boldsymbol{v}(x) = \int_{\alpha\varepsilon\eta}^{\rho} \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}(x + (t-\rho)\boldsymbol{e}_\rho)dt; \quad \boldsymbol{e}_\rho = \frac{x}{|x|}.$$

Neka je B kugla opisana ćeliji Y^ε i primijetimo da je

$$|\boldsymbol{v}|^r_{L^r(B)} \le \int_{S^{n-1}}\int_{\alpha\varepsilon\eta}^{\varepsilon}\left|\int_{\alpha\varepsilon\eta}^{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}(x + (t-\rho)\boldsymbol{e}_\rho)dt\right|^r \rho^{n-1}d\rho d\omega.$$

Primjenom Hölderove nejednakosti i činjenice da je $\rho < \varepsilon$ u izrazu

$$\left|\int_{\alpha\varepsilon\eta}^{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}(x + (t-\rho)\boldsymbol{e}_\rho)dt\right|^r \le \left[\int_{\alpha\varepsilon\eta}^{\varepsilon}\left|\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}(x + (t-\rho)\boldsymbol{e}_\rho)dt\right|^r t^{n-1}dt\right]\left[\int_{\alpha\varepsilon\eta}^{\varepsilon}\frac{dt}{(t^{n-1})^{\frac{r'}{r}}}\right]^{\frac{r}{r'}},$$

dokazujemo

$$|\boldsymbol{v}|^r_{L^r(B)} \le C\varepsilon^n\cdot\frac{1}{(\varepsilon\eta)^{n-r}}\,|\nabla\boldsymbol{v}|^r_{L^r(B)} = C\cdot\frac{\varepsilon^r}{\eta^{n-r}}\,|\nabla\boldsymbol{v}|^r_{L^r(B)}\,.$$

Budući da vrijedi

$$|\boldsymbol{v}|^r_{L^r(Y^\varepsilon)} \leq |\boldsymbol{v}|^r_{L^r(B)} \leq (2n+1)\; |\boldsymbol{v}|^r_{L^r(Y^\varepsilon)}\,,$$

dvije su norme ekvivalentne, pa primijenjujući nejednakost na svaku ćeliju u Ω_ε, kojih ima $N(\varepsilon) = \frac{\mu(\Omega)}{\varepsilon^n}(1 + o(1))$, i sumiranjem, slijedi (4.4).
Za dokaz Kornove nejednakosti (4.5) može se pogledati [47] i konstanta C_2 ne ovisi o σ_ε. □

Napomena 4.2. Pokazuje se da za omjer σ_ε definiran u (4.3), ako zamijenimo konstantu r s konjugiranim eksponentom $r' = \frac{r}{r-1}$, tada prilagođena tvrdnja leme 4.1 glasi: postoji konstanta C koja ne ovisi o ε, takva da za svako $\boldsymbol{w} \in W_0^{1,r'}(\Omega_\varepsilon)$ vrijedi Poincaré-Kornova nejednakost

$$|\boldsymbol{w}|_{L^{r'}(\Omega_\varepsilon)} \leq C \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \eta^{n\cdot(\frac{2}{r}-1)} \cdot |e(\boldsymbol{w})|_{L^{r'}(\Omega_\varepsilon)}\,. \tag{4.6}$$

Sada imamo sve što nam je potrebno da izvedemo apriorne ocjene za brzinu $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ i tlak p^ε u stacionarnom, čisto viskoznom toku polimernog fluida s indeksom toka r, pod utjecajem vanjske sile $\boldsymbol{f} \in L^{r'}(\Omega)$, koji zadovoljavaju

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left\{ |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)\right\} + \nabla p^\varepsilon = \boldsymbol{f} & \text{u } \Omega_\varepsilon, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0 & \text{u } \Omega_\varepsilon, \\ \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{4.7}$$

Lema 4.3. (Ocjene za brzinu)
Neka je $\boldsymbol{v}^\varepsilon \in W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon)$ slabo rješenje za brzinu u (4.7) i σ_ε omjer definiran u (4.3). Postoje konstante C_1, C_2, neovisne o ε, takve da

$$|\boldsymbol{v}^\varepsilon|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1\, \sigma_\varepsilon^{r'}\,,$$

$$|e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq C_2\, \sigma_\varepsilon^{r'-1}\,.$$

Dokaz. Testiramo jednadžbu $(4.7)_1$ s $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ i dobivamo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r \, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{v}^\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{f} \boldsymbol{v}^\varepsilon dx.$$

Ako iskoristimo činjenicu da je $\operatorname{div} \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0$ u Ω_ε i primijenimo Hölderovu nejednakost dobit ćemo

$$|e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq |\boldsymbol{f}|_{L^{r'}(\Omega_\varepsilon)} \cdot |\boldsymbol{v}^\varepsilon|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \, ,$$

što nam nadalje, uporabom Poincaré-Kornove nejednakosti iz leme 4.1, osigurava postojanje konstante neovisne o ε takve da

$$|e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq C \, \sigma_\varepsilon \, |\boldsymbol{f}|_{L^{r'}(\Omega_\varepsilon)} \cdot |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \, . \tag{4.8}$$

Neka je r' konjugirani eksponent od r i ocjena za simetrizirani gradijent odmah slijedi, dok ocjena za samu brzinu lako slijedi još jednom primjenom leme 4.1. □

Napomena 4.4. Proširenje nulom brzine na čitavi Ω, u oznaci $\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon} \in W_0^{1,r}(\Omega)$, ne mijenja iznos norme pa odmah vidimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon}\right|_{L^r(\Omega)} &\leq C_1 \, \sigma_\varepsilon^{r'} \, , \\ \left|e(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon})\right|_{L^r(\Omega)} &\leq C_2 \, \sigma_\varepsilon^{r'-1} \, . \end{aligned} \tag{4.9}$$

To povlači da je niz $(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon})$ omeđen u $W_0^{1,r}(\Omega)$, pa time i relativno kompaktan u slaboj topologiji prostora $W_0^{1,r}(\Omega)$.

Lema 4.5. (Ocjena za tlak)
Neka je $p^\varepsilon \in L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ slabo rješenje za tlak u (4.7) i σ_ε omjer definiran u (4.3). Tada postoji konstanta C koja ne ovisi o ε i takva da vrijedi

$$|\nabla p^\varepsilon|_{W^{-1,r'}(\Omega_\varepsilon)} \leq C \sigma_\varepsilon \, .$$

Dokaz. Kako bismo dokazali ocjenu za tlak, uzmimo $\boldsymbol{\varphi} \in W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon)$ i testirajmo jednadžbu $(4.7)_1$:

$$\langle \nabla p^\varepsilon, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Omega_\varepsilon} = -\int_{\Omega_\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^{r-2} e(\boldsymbol{v}^\varepsilon) : e(\boldsymbol{\varphi}) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{f}\boldsymbol{\varphi}\, dx.$$

Hölderova nejednakost i rezultati lema 4.1 i 4.3 povlače

$$|\langle \nabla p^\varepsilon, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\Omega_\varepsilon}| \leq |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^{r-1}_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \cdot |e(\boldsymbol{\varphi})|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + C\sigma_\varepsilon |\boldsymbol{f}|_{L^{r'}(\Omega_\varepsilon)} \cdot |e(\boldsymbol{\varphi})|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq$$

$$\leq C\sigma_\varepsilon |e(\boldsymbol{\varphi})|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq C\sigma_\varepsilon |\boldsymbol{\varphi}|_{W^{1,r}(\Omega_\varepsilon)}.$$

Time smo pokazali ocjenu za gradijent tlaka. □

Napomena 4.6. Vidimo da u drugom slučaju (2.) graničnog ponašanja parametra σ_ε kada vrijedi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon = \sigma_0 > 0,$$

možemo zaključiti na temelju izvedenih apriornih ocjena da su nizovi rješenja $(\boldsymbol{v}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ ograničeni. Budući da i domena Ω_ε ovisi o parametru ε, prije nego što počnemo razmišljati o postojanju određenih slabo konvergentnih podnizova, potrebno je proširiti funkcije na čitavi Ω. Dok se brzina jednostavno proširuje nulom, proširenju tlaka morat ćemo posvetiti više pažnje i pojasniti detalje. Uniformna ograničenost brzine je ključna činjenica u dokazu konvergencije ka rješenju Brinkmanovog zakona kojeg ovdje iznosimo. Dokaz te tvrdnje bit će ostvaren kroz poglavlja koja slijede.

4.4 Brinkmanov zakon za polimerne fluide

Poznato je da standardni inženjerski model odnosno zakon filtracije polimernog fluida kroz poroznu sredinu (v. [13]) nije dobar i da ima opravdanje samo u jednodimenzionalnom slučaju, kao što je pokazao numerički izračun u [15]. Predloženi Brinkmanov zakon predstavlja poboljšanje u modeliranju i njegovo opravdanje vidimo kroz postupak homogenizacije i konvergencije rješenja.

Teorem 4.7. (Brinkmanov zakon filtracije za polimerni fluid)
Neka je zadana periodična porozna sredina Ω takva da za omjer (4.3) vrijedi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon = \sigma_0 > 0$$

i neka su $(\boldsymbol{v}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon) \times L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ rješenja problema (4.7). Neka je $\mathcal{G}$ funkcija otpornosti, definirana pomoću vanjskog problema (3.11).
Neka je $\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon}$ oznaka za brzinu proširenu nulom na $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Tada vrijedi

$$\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon} \rightharpoonup \boldsymbol{v}^0 \quad \textit{slabo u } W_0^{1,r}(\Omega), \tag{4.10}$$

gdje je $\boldsymbol{v}^0$ brzina iz nelinearnog Brinkmanovog problema:
- Odrediti $(\boldsymbol{v}, p) \in W_0^{1,r}(\Omega) \times L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left\{ |e(\boldsymbol{v})|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v})\right\} + \nabla p + \dfrac{1}{\sigma_0^r}\mathcal{G}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f} & u\ \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 & u\ \Omega, \\ \boldsymbol{v} = 0 & na\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.11}$$

Sljedeći rezultat pokazuje da je sustav dobro definiran, misleći pritom na egzistenciju i jedinstvenost rješenja. To je ključno i za sam dokaz konvergencije rješenja.

Propozicija 4.8. *Neka je* $\boldsymbol{f} \in W^{-1,r'}(\Omega)$. *Brinkmanov sustav (4.11) ima rješenje i ono je jedinstveno.*

Dokaz. Promotrimo operator $\mathcal{A} : W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \to (W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))'$ koji se pojavljuje na lijevoj strani jednadžbe

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = -\operatorname{div}\left\{ |e(\boldsymbol{v})|^{r-2}\, e(\boldsymbol{v}) \right\} + \frac{1}{\sigma_0^r}\mathcal{G}(\boldsymbol{v}).$$

Operator je očito neprekinut, strogo monoton i jednostavno vidimo da za svako $\boldsymbol{v} \in W^{1,r}_0(\Omega)$ vrijedi

$$\int_\Omega |e(\boldsymbol{v})|^r\, dx + \frac{1}{\sigma_0^r}\int_\Omega (\mathcal{G}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v})\, dx \geq \int_\Omega |e(\boldsymbol{v})|^r\, dx \geq C\, |\boldsymbol{v}|^r_{W^{1,r}_0(\Omega)}\,.$$

Time smo pokazali koercitivnost operatora $\mathcal{A}$:

$$\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\rangle \geq C\, |\boldsymbol{v}|^r_{W^{1,r}_0(\Omega)}\,,$$

a s time i egzistenciju i jedinstvenost rješenja $\boldsymbol{v}^0 \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ za koje vrijedi

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{v}^0) = \boldsymbol{f} \quad \text{u } (W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))'$$

prema Minty-Browderovom teoremu 2.12.

Egzistencija i jedinstvenost tlaka $p^0 \in L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}$ slijedit će iz činjenice da je funkcional

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \langle \mathcal{A}(\boldsymbol{v}^0) - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega$$

omeđen na $W^{1,r}_0(\Omega)$ i da se poništava na $W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$. Prema Korolaru III.5.1 iz Galdi[29] postoji jedinstveni $p^0 \in L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega p^0 \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dx.$$

Odavde zaključujemo da je $(\boldsymbol{v}^0, p^0)$ traženo jedinstveno rješenje Brinkmanovog sustava. $\square$

U nastavku ćemo trebati varijacijsku formulaciju Brinkmanovog zakona, pa zbog toga moramo pogledati kako izgleda potencijal operatora $\mathcal{G}(\boldsymbol{u})$.
Prvo napravimo malu digresiju u vezi takozvanih nelinearnih operatora superpozicije ili *Nemitskijevih operatora* (v. na primjer Mitrović-Žubrinić[46] i [36]). Neke činjenice koje ovdje iznosimo trebat će nam i u nastavku.
Za $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omeđen i zadanu Carathéodoryjevu funkciju

$$\boldsymbol{g}(x, \boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{g} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

(izmjeriva po prvoj varijabli za svako $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ i neprekinuta po drugoj varijabli za s.s. $x \in \Omega$), pripadni Nemitskijev operator preslikava izmjerivu funkciju $\boldsymbol{u}(x)$ u (također izmjerivu) funkciju

$$N_g\, \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{g}(x, \boldsymbol{u}(x)), \quad x \in \Omega.$$

Svojstva ovako definiranog operatora prvi su proučavali 1950-ih godina Krasnoselski i Vainberg.
Pokazuje se da ako funkcija $\boldsymbol{g}$ zadovoljava sljedeći uvjet rasta (za $a, b > 0$, $r > 1$):

$$|\boldsymbol{g}(x, \boldsymbol{\xi})\,| \leq a\ |\boldsymbol{\xi}\,|^{r-1} + b, \quad \text{za s.s. } x \in \Omega \text{ i svaki } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n,$$

tada je pripadni Nemitskijev operator dobro definiran, a njegov potencijal je

$$\psi(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega G(x, \boldsymbol{u}) dx,$$

gdje je G Gâteaux primitivna funkcija od $\boldsymbol{g}$.
Primijenimo li to na naš slučaj, onda uzimamo

$$\boldsymbol{g}(x, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}).$$

Konstruiramo $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Gâteaux primitivnu funkciju od neprekinute funkcije $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) takvu da je:

$$G'(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \quad G(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Znamo otprije da vrijedi

$$\mathcal{G}(\lambda\boldsymbol{\xi}) = |\lambda|^{r-2}\lambda\,\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}); \quad |\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})| \le M\,|\boldsymbol{\xi}|^{r-1}.$$

Za funkciju G imamo

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{\xi}) = G(\boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{0}) &= \int_0^1 \frac{d}{ds}G(s\cdot\boldsymbol{\xi})ds = \\ = \int_0^1 (G'(s\cdot\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\xi})\,ds &= \int_0^1 (\mathcal{G}(s\cdot\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\xi})\,ds = \\ = (\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\xi})\cdot\int_0^1 s^{r-1}ds &= \frac{1}{r}\,(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\xi})\,. \end{aligned}$$

Za Nemitskijev operator $N_{\mathcal{G}} : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ pridružen funkciji $\mathcal{G}$ (kojeg je uobičajeno također označavati samo s $\mathcal{G}$)

$$N_{\mathcal{G}}\boldsymbol{u} = \mathcal{G}(\boldsymbol{u}),$$

zaključujemo da je dobro definiran i potencijalan, odnosno da postoji njegov potencijal $\psi : L^r(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiran na sljedeći način

$$\psi(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{u})dx = \frac{1}{r}\int_\Omega (\mathcal{G}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u})\,dx.$$

Drugim riječima, za funkcional ψ, Gâteauxova derivacija $\psi' : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ upravo je jednaka $\psi' = N_{\mathcal{G}}$, odnosno vrijedi

$$\langle\psi'(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}\rangle = \langle N_{\mathcal{G}}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \int_\Omega (\mathcal{G}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})\,dx.$$

Za kraj, naglasimo još da stroga konveksnost funkcionala $\psi(\boldsymbol{u})$ slijedi iz monotonosti njegove Gâteauxove derivacije, odnosno operatora $\mathcal{G}$ (v. [46, Lema 7.5.1]).

S druge strane, za funkcional $\varphi : W_0^{1,r}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiran s

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{r}\int_\Omega |e(\boldsymbol{u})|^r\,dx,$$

Gâteauxova derivacija $\varphi' : W_0^{1,r}(\Omega) \to W^{-1,r'}(\Omega)$ jednaka je

$$\varphi'(\boldsymbol{u}) = -\operatorname{div}\{\,|e(\boldsymbol{u})|^{r-2}\,e(\boldsymbol{u})\}$$

i također će nam trebati u nastavku.

4.5 Γ-konvergencija

U dokazu Brinkmanovog zakona filtracije (Teorem 4.7) koristit ćemo rezultat o varijacijskoj odnosno takozvanoj Γ-konvergenciji niza funkcionala (F^ε) definiranih na $W^{1,r}(\Omega)$. Prisjetimo se definicije (v. Braides[17] ill Dal Maso[25]). Neka je X topološki prostor. Kažemo da niz funkcionala $F_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Γ-konvergira u X ka $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ i pišemo $F = \Gamma - \lim_j F_j$, ako za svaki $\boldsymbol{u} \in X$ vrijedi:

-"lim inf" *nejednakost*

za svaki $(\boldsymbol{u}_j) \subset X$ takav da $\boldsymbol{u}_j \to \boldsymbol{u}$ vrijedi $F(\boldsymbol{u}) \leq \liminf_j F_j(\boldsymbol{u}_j)$,

-"lim sup" *nejednakost*

postoji niz $(\boldsymbol{u}_j) \subset X$ takav da $\boldsymbol{u}_j \to \boldsymbol{u}$ i $\limsup_j F_j(\boldsymbol{u}_j) \leq F(\boldsymbol{u})$.

Kako za niz $(\boldsymbol{u}_j)$ koji zadovoljava i "lim sup" nejednakost vrijedi

$$F(\boldsymbol{u}) \leq \liminf_j F_j(\boldsymbol{u}_j) \leq \limsup_j F_j(\boldsymbol{u}_j) \leq F(\boldsymbol{u}),$$

odmah slijedi $F(\boldsymbol{u}) = \lim_j F_j(\boldsymbol{u}_j)$, te se takav niz često naziva i optimalnim. Često se "lim sup" nejednakost zamjenjuje ekvivalentnim uvjetom kojeg je laganije dokazati:

-*aproksimativna* "lim sup" *nejednakost*

za svako $\delta > 0$ postoji niz $(\boldsymbol{u}_j) \subset X$ takav da $\boldsymbol{u}_j \to \boldsymbol{u}$ i

$$\limsup_j F_j(\boldsymbol{u}_j) \leq F(\boldsymbol{u}) + \delta.$$

Također uvodimo oznake za dvije veličine koje uvijek postoje (takozvana donja i gornja ograda Γ-limesa)

$$\underline{F}(\boldsymbol{u}) = \Gamma - \liminf_j F_j(\boldsymbol{u}) = \inf \left\{ \liminf_j F_j(\boldsymbol{u}_j) \,\middle|\, \boldsymbol{u}_j \to \boldsymbol{u} \right\},$$

$$\overline{F}(\boldsymbol{u}) = \Gamma - \limsup_j F_j(\boldsymbol{u}) = \inf \left\{ \limsup_j F_j(\boldsymbol{u}_j) \,\middle|\, \boldsymbol{u}_j \to \boldsymbol{u} \right\}$$

i čija je jednakost $\underline{F}(\boldsymbol{u}) = \overline{F}(\boldsymbol{u})$ ekvivalentna postojanju $\Gamma - \lim_j F_j$ (v. [17]). Naime, "lim inf" nejednakost možemo zapisati i u ovom obliku:

$$F(\boldsymbol{u}) \leq \underline{F}(\boldsymbol{u}),$$

a trivijalno vrijedi

$$\underline{F}(\boldsymbol{u}) \leq \overline{F}(\boldsymbol{u}).$$

Ako je $(\boldsymbol{u}_j^*)$ optimalni niz iz "lim sup" nejednakosti, tada je

$$\overline{F}(\boldsymbol{u}) = \inf \left\{ \limsup_j F_j(\boldsymbol{u}_j) \,\middle|\, \boldsymbol{u}_j \to \boldsymbol{u} \right\} \leq \limsup_j F_j(\boldsymbol{u}_j^*) \leq F(\boldsymbol{u}),$$

pa imamo jednakost infimuma koja je ekvivalentna definiciji Γ-limesa:

$$\inf \left\{ \liminf_j F_j(\boldsymbol{u}_j) \,\middle|\, \boldsymbol{u}_j \to \boldsymbol{u} \right\} = \inf \left\{ \limsup_j F_j(\boldsymbol{u}_j) \,\middle|\, \boldsymbol{u}_j \to \boldsymbol{u} \right\} = F(\boldsymbol{u}).$$

U slučaju da se radi o familiji funkcionala (F^ε), tada kažemo da oni Γ-konvergiraju ka F ako gore navedene tvrdnje vrijede za svaki niz (ε_j) pozitivnih brojeva koji konvergiraju k nuli. Vrlo važno svojstvo Γ-konvergencije dolazi do izražaja prilikom promatranja asimptotičkog ponašanja određenih problema minimuma. To svojstvo iskazano je u sljedećem teoremu. U njegovoj primjeni, odabir topologije τ pokazuje se ključnim, jer je unaprijed potrebno osigurati kompaktnost niza minimizatora.

Teorem 4.9. (Attouch) *Neka niz (F^ε) $\Gamma(\tau)$-konvergira ka funkcionalu F. Neka je (o_ε) niz pozitivnih brojeva koji konvergira nuli i neka za $(\boldsymbol{u}_\varepsilon) \subset X$ vrijedi*

$$F^\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon) \leq \inf_{\boldsymbol{u}\in X} F^\varepsilon(\boldsymbol{u}) + o_\varepsilon.$$

Tada za svaki τ-konvergentan podniz $(\boldsymbol{u}_{\varepsilon'})$ i $\boldsymbol{u}_0 = \lim_{\varepsilon'\to 0} \boldsymbol{u}_{\varepsilon'}$ vrijedi

$$F(\boldsymbol{u}_0) = \min_{\boldsymbol{u}\in X} F(\boldsymbol{u}).$$

Štoviše,

$$\lim_{\varepsilon' \to 0} F^{\varepsilon'}(\boldsymbol{u}_{\varepsilon'}) = F(\boldsymbol{u}_0).$$

■

Napomena 4.10. Iz definicije Γ-konvergencije neposredno slijede ova svojstva.

(i) $\underline{F}$ i $\overline{F}$ su odozdo poluneprekinute funkcije na X.

(ii) Ako je G neprekinuta funkcija i $F = \Gamma - \lim_{\varepsilon} F^{\varepsilon}$ tada je

$$F + G = \Gamma - \lim_{\varepsilon}(F^{\varepsilon} + G).$$

(iii) Ako je svaka funkcija F^{ε} konveksna, tada je i $\overline{F}$ konveksna.

Uvedimo oznaku: $V(\Omega) = \left\{\boldsymbol{u} \in W_0^{1,r}(\Omega) \,\middle|\, \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ u } \Omega\right\} = W_{0,\mathrm{div}}^{1,r}(\Omega)$.

Definirajmo sada funkcionale (strogo konveksni i koercitivni), za $\boldsymbol{u} \in W_0^{1,r}(\Omega)$:

$$F^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{r}\int_{\Omega} |e(\boldsymbol{u})|^r \, dx + I_{V(\Omega_{\varepsilon})}(\boldsymbol{u}),$$

$$F(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{r}\int_{\Omega} |e(\boldsymbol{u})|^r \, dx + \frac{1}{r}\int_{\Omega} \frac{1}{\sigma_0^r} \left(\mathcal{G}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}\right) dx + I_{V(\Omega)}(\boldsymbol{u}),$$

gdje je s I_V označena indikatorska funkcija skupa V:

$$I_V(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{u} \in V, \\ +\infty, & \boldsymbol{u} \notin V. \end{cases}$$

Ako je $\widetilde{\cdot}$ proširenje nulom na $\bigcup_i T_i^{\varepsilon}$ i $\boldsymbol{v}^{\varepsilon}$ rješenje problema (4.7), tada je $\widetilde{\boldsymbol{v}^{\varepsilon}}$ rješenje problema (za $\boldsymbol{f} \in L^{r'}(\Omega)$):

$$\min_{\boldsymbol{u} \in W_0^{1,r}(\Omega)} \left(F^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \int_{\Omega} \boldsymbol{f}\boldsymbol{u} \, dx \right).$$

Za ovako definirane funkcionale pokazat ćemo da vrijedi: niz $(F^{\varepsilon})_{\varepsilon}$ Γ-konvergira ka F (koristeći slabu topologiju prostora $W_0^{1,r}(\Omega)$) i nadalje niz $(\widetilde{\boldsymbol{v}^{\varepsilon}})_{\varepsilon}$ ima podniz koji konvergira slabo u $W_0^{1,r}(\Omega)$ ka rješenju $\boldsymbol{v}^0$ problema:

$$\min_{\boldsymbol{u}\in W_0^{1,r}(\Omega)} \left(F(\boldsymbol{u}) - \int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}\,dx \right),$$

odnosno rješenju Brinkmanovog zakona. Zbog konveksnosti i stroge koercitivnosti, minimizator je jedinstven, pa će zato cijeli niz $(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon})_\varepsilon$ konvergirati ka $\boldsymbol{v}^0$. Uz to, funkcional

$$\boldsymbol{u} \mapsto \int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}\,dx$$

možemo gledati kao "perturbaciju", neprekinutu u slaboj topologiji prostora $W_0^{1,r}(\Omega)$, a Γ-konvergencija je stabilna s obzirom na neprekinute perturbacije, što je neposredna posljedica njene definicije.

Iz Teorema 4.9, ako $(F^\varepsilon)_\varepsilon$ Γ-konvergira ka F (v. na primjer [6], [17] i [25]), tada za svaki minimizirajući niz $(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$

$$F^\varepsilon(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \le \inf_{\boldsymbol{u}\in W_0^{1,r}(\Omega)} F^\varepsilon(\boldsymbol{u}) + \varepsilon$$

i za svaki konvergentni podniz $\boldsymbol{u}^{\varepsilon'} \rightharpoonup \boldsymbol{u}^0$ vrijedi:

$$F(\boldsymbol{u}^0) = \min_{\boldsymbol{u}\in W_0^{1,r}(\Omega)} F(\boldsymbol{u})$$

i nadalje

$$F^{\varepsilon'}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon'}) \to F(\boldsymbol{u}^0).$$

Posebno to vrijedi ako niz $(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ možemo odabrati tako da vrijedi

$$F^\varepsilon(\boldsymbol{u}^\varepsilon) = \min_{\boldsymbol{u}\in W_0^{1,r}(\Omega)} F^\varepsilon(\boldsymbol{u}),$$

odnosno ako za svaki ε, problem minimuma ima rješenje (što će kod nas biti slučaj).

Lako se vidi da je u našem slučaju obje nejednakosti dovoljno provjeriti samo za solenoidalne funkcije, jer je $V(\Omega)$ zatvoren potprostor od $W_0^{1,r}(\Omega)$, s obzirom na slabu topologiju prostora $W_0^{1,r}(\Omega)$, a za $\boldsymbol{v} \in W_0^{1,r}(\Omega)$ kojoj divergencija nije nula u Ω vrijedi:

$$\Gamma - \liminf_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(\boldsymbol{v}) = \Gamma - \limsup_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(\boldsymbol{v}) = +\infty.$$

Dakle, treba provjeriti da vrijedi (koristimo slabu topologiju prostora $W_0^{1,r}(\Omega)$):

- (" $\liminf$" *nejednakost*)

za svaki $\boldsymbol{v} \in V(\Omega)$ i svaki $(\boldsymbol{v}^\varepsilon) \subset V(\Omega_\varepsilon)$ takav da $\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon} \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ vrijedi

$$F(\boldsymbol{v}) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon}),$$

- (" $\limsup$" *nejednakost*)

za svako $\delta > 0$ i za svaki $\boldsymbol{v} \in V(\Omega)$ postoji $(\boldsymbol{v}_0^\varepsilon) \subset V(\Omega_\varepsilon)$ takav da $\widetilde{\boldsymbol{v}_0^\varepsilon} \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ i

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{v}_0^\varepsilon}) \leq F(\boldsymbol{v}) + \delta.$$

Teorem 4.11. (Rezultat o Γ-konvergenciji)
Kada $\varepsilon \to 0$ niz $F^\varepsilon : W_0^{1,r}(\Omega) \to [0,\infty]$ Γ-konvergira ka $F : W_0^{1,r}(\Omega) \to [0,\infty]$ s obzirom na slabu topologiju prostora $W_0^{1,r}(\Omega)$.

Dokaz teorema bit će ostvaren kroz dokaze dviju nejednakosti iz definicije Γ-konvergencije. U slučaju da obje tvrdnje vrijede, impliciranu Γ-konvergenciju navedenih funkcionala moći ćemo iskoristiti u dokazu Brinkmanovog zakona (Teorema 4.7). Podsjećamo, svojstva funkcionala F^ε osiguravaju postojanje jedinstvenog rješenja $\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon}$ za svaki ε-problem

$$\min_{\boldsymbol{u} \in W_0^{1,r}(\Omega)} \left(F^\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{u} dx \right),$$

a pomoću leme 4.3 zaključujemo da niz $(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon})$ ima slabo konvergentan podniz. Svaki takav podniz, zbog rezultata o Γ-konvergenciji nužno ima jednaki limes $\boldsymbol{v}^0 \in W_0^{1,r}(\Omega)$ koji rješava granični problem

$$\min_{\boldsymbol{u} \in W_0^{1,r}(\Omega)} \left(F(\boldsymbol{u}) - \int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{u} dx \right).$$

To onda povlači konvergenciju čitavog niza $(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon})$ ka brzini $\boldsymbol{v}^0$ iz Brinkmanovog zakona (4.11) i konvergenciju kinetičke energije

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{r}\int_\Omega \left|e(\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon})\right|^r dx = \frac{1}{r}\int_\Omega \left|e(\boldsymbol{v}^0)\right|^r dx + \frac{1}{r}\int_\Omega \frac{1}{\sigma_0^r}\left(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}^0), \boldsymbol{v}^0\right) dx.$$

Prije no što započnemo dokazivati nejednakosti za Γ-konvergenciju obratimo pažnju na jedan pomoćni rezultat koji ima fundamentalnu važnost u problemima teorijske hidrodinamike. Radi se o reprezentaciji skalarne funkcije kao divergencije vektorskog polja u odgovarajućim vektorskim prostorima, kao i o preciznim ocjenama koje prate taj problem. Kratki pregled i rezultati koje iznosimo čine sažetak razmatranja iz Galdijeve knjige [29]. Rezultate ćemo koristiti u konstrukciji nizova za dokaz Γ-konvergencije, kada ćemo u određenom trenutku morati zadovoljiti uvjet solenoidalnosti

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omeđen i lokalno lipschitzov skup. Problem koji opisujemo je sljedeći: za danu funkciju $f \in L^r(\Omega)$ koja zadovoljava uvjet kompatibilnosti

$$\int_\Omega f dx = 0, \tag{4.12}$$

dakle za $f \in L_0^r(\Omega)$, treba naći vektorsko polje $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ takvo da

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = f \quad \text{u } \Omega \\ \boldsymbol{v} \in W_0^{1,r}(\Omega) \\ |\nabla \boldsymbol{v}|_{L^r(\Omega)} \leq C\, |f|_{L^r(\Omega)} \end{cases} \tag{4.13}$$

gdje konstanta $C = C(n, r, \Omega)$.

Teorem 4.12. *([29], Teorem III.3.1.)*
Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omeđena lokalno lipschitzova domena. Tada za svaku funkciju $f \in L^r(\Omega)$ koja zadovoljava uvjet kompatibilnosti (4.12) postoji barem jedno rješenje sustava (4.13). ■

Posebno će nam biti bitno na koji način konstanta u ocjeni $(4.13)_3$ ovisi o domeni Ω. Sljedeća lema govori o tome kako se u posebnom slučaju afine transformacije ona ne mijenja.

Lema 4.13. *([29], Lema III.3.3.)*
Neka su $a \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ i neka je zadana transformacija prostora $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$

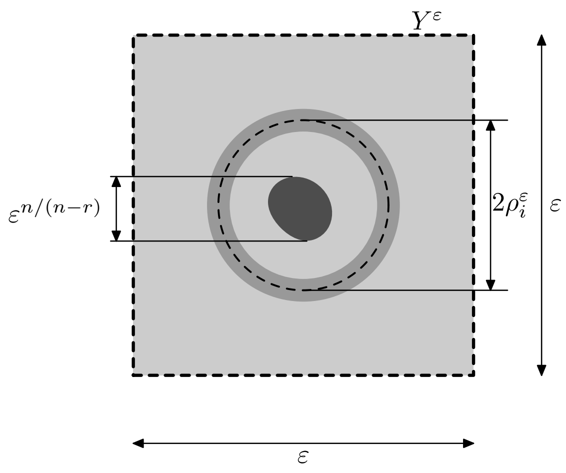
$$\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}.$$

U ovakvom slučaju zamjene varijabli translacijom i homotetijom konstanta u ocjeni $(4.13)_3$ ostaje nepromijenjena. ■

Navedeni rezultati koristit će nam u dokazu Γ-konvergencije. U proučavanju ponašanja zakona filtracije polimernih fluida čini se neizbježnim koristiti varijacijsku (energetsku) formulaciju problema. Nelinearni karakter zakona ponašanja takvih fluida predstavlja veliki problem u direktnom dokazivanju konvergencije u postupku homogenizacije. Budući da Allaireova metoda ([2] i [3]) nije generirala rezultate već neke nepremostive prepreke, istraživanje je nastavljeno drugim pristupom. Motivaciju smo pronašli u Brillardovom članku ([19]), koji koristi takozvanu epi-konvergenciju, a posebno ističemo ideje proučavanja asimptotičkog ponašanja Dirichletovog problema u perforiranoj domeni iz Braides[17], odnosno Ansini-Braides[4]. Ključnu ulogu tamo ima, kako je autor naziva, "*joining lemma for perforated domains*". Mi ćemo slično prvo dokazati lemu o modificiranom nizu, koja će nam omogućiti promjenu vrijednosti niza funkcija na odabranim prstenovima oko perforacija. Među koncentričnim prstenovima oko svake perforacije odabir najprikladnijih provodimo ocjenom energije i biranjem onih gdje je ta energija mala. Zatim dokazujemo konvergenciju kinetičkih energija, a u izračunu razlikujemo doprinose u "blizini" perforacija i "daleko" od perforacija, dok spomenuta lema na određeni način čini njihovu poveznicu.

4.5.1 Lema o modificiranom nizu

Prvo ćemo dokazati pomoćni tehnički rezultat koji nam omogućuje neznatno modificirati niz funkcija u okolini prepreka T_i^ε, $i \in \{1, 2, \dots, N(\varepsilon)\}$.



Slika 4.1: Sferna ljuska oko perforacije.

Lema 4.14. *Neka je $(\boldsymbol{v}^\varepsilon)$ niz u $V(\Omega_\varepsilon)$, takav da $\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon$ slabo konvergira ka $\boldsymbol{v}$ u $W^{1,r}(\Omega)$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ i neka je ρ^ε niz pozitivnih brojeva za koje vrijedi $\rho^\varepsilon < \varepsilon/2$. Za svaki indeks i postoji $k_i \in \{0, \dots, k-1\}$ takav da za*

$$
\begin{aligned}
D_i^\varepsilon &= \left\{x \in \Omega \,\middle|\, 2^{-k_i-1}\rho^\varepsilon < |x - x_i^\varepsilon| < 2^{-k_i}\rho^\varepsilon\right\}, \quad \textit{(prsten/ljuska)} \\
\boldsymbol{v}_i^\varepsilon &= \mu(D_i^\varepsilon)^{-1} \int_{D_i^\varepsilon} \boldsymbol{v}^\varepsilon dx, \quad \textit{(srednja vrijednost na prstenu)} \\
\rho_i^\varepsilon &= \frac{3}{4} 2^{-k_i} \rho^\varepsilon, \quad \textit{(srednji radijus prstena)}
\end{aligned}
$$

postoji niz $(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon)$ u $V(\Omega_\varepsilon)$, takav da $\widetilde{\underline{\boldsymbol{v}}}^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ u $W^{1,r}(\Omega)$ i

$$
\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x) &= \boldsymbol{v}^\varepsilon(x) \quad \textit{na } \Omega_\varepsilon \setminus \bigcup D_i^\varepsilon, \\
\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x) &= \boldsymbol{v}_i^\varepsilon \quad \textit{za } |x - x_i^\varepsilon| = \rho_i^\varepsilon, \\
\int_\Omega \Big| \left|e(\widetilde{\underline{\boldsymbol{v}}}^\varepsilon)\right|^r &- \left|e(\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon)\right|^r \Big| dx \le C \cdot \frac{1}{k},
\end{aligned}
$$

gdje konstanta C ne ovisi o ε, niti o izboru konstante $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Za $\varepsilon > 0$, $h \in \{0, \dots, k-1\}$ i indeks $i \in \{1, 2, \dots, N(\varepsilon)\}$ označimo

$$D^\varepsilon_{i,h} = \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, 2^{-h-1}\rho^\varepsilon < \, |x - x^\varepsilon_i\,| < 2^{-h}\rho^\varepsilon \right\}$$

i nadalje

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,h} = \mu(D^\varepsilon_{i,h})^{-1} \int_{D^\varepsilon_{i,h}} \boldsymbol{v}^\varepsilon(x) dx,$$

$$\rho^\varepsilon_{i,h} = \frac{3}{4}\, 2^{-h}\rho^\varepsilon, \qquad B^\varepsilon_{i,h} = B_{\rho^\varepsilon_{i,h}}(x^\varepsilon_i).$$

Neka je $\phi(x) = \phi^\varepsilon_{i,h}(x) \in C^\infty_0(D^\varepsilon_{i,h})$ takva da $\phi(x) \le 1$ i da je $\phi(x) = 1$ za $|x - x^\varepsilon_i\,| = \rho^\varepsilon_{i,h}$ i $|\nabla\phi(x)\,| \le c/\rho^\varepsilon_{i,h}$. Ako definiramo

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x) = \boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,h}\phi(x) + (1 - \phi(x))\boldsymbol{v}^\varepsilon(x) \quad \text{na } D^\varepsilon_{i,h},$$

onda je $\boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x) \in W^{1,r}(D^\varepsilon_{i,h})$ i

$$\int_{D^\varepsilon_{i,h}} \left|\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x)\,\right|^r dx \le c \int_{D^\varepsilon_{i,h}} \left(|\nabla\phi(x)\,|^r \, \left|\boldsymbol{v}^\varepsilon(x) - \boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,h}\,\right|^r + |\nabla \boldsymbol{v}^\varepsilon(x)\,|^r \right) dx.$$

Iskoristimo li verziju Poincaréove nejednakosti gdje konstanta ne ovisi o skaliranju (primijetimo da je dijametar prstena $D^\varepsilon_{i,h}$ proporcionalan srednjem radijusu $\rho^\varepsilon_{i,h}$!)

$$\int_{D^\varepsilon_{i,h}} \left|\boldsymbol{v}^\varepsilon(x) - \boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,h}\,\right|^r dx \le C(\rho^\varepsilon_{i,h})^r \int_{D^\varepsilon_{i,h}} |\nabla \boldsymbol{v}^\varepsilon(x)\,|^r \, dx,$$

lako slijedi

$$\int_{D^\varepsilon_{i,h}} \left|\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x)\,\right|^r dx \le c \int_{D^\varepsilon_{i,h}} |\nabla \boldsymbol{v}^\varepsilon(x)\,|^r \, dx. \tag{4.14}$$

To još uvijek nije funkcija koju želimo konstruirati, jer div $\boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x) \ne 0$. Zbog toga prvo definirajmo

$$D^\varepsilon_{i,h,1} = \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, 2^{-h-1}\rho^\varepsilon < \, |x - x^\varepsilon_i\,| < \rho^\varepsilon_{i,h} \right\},$$

$$D^\varepsilon_{i,h,2} = \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \rho^\varepsilon_{i,h} < |x - x^\varepsilon_i| < 2^{-h}\rho^\varepsilon \right\}.$$

Zatim rješavamo probleme (za $j = 1, 2$):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{W}^\varepsilon_{i,h,j}(x) = \operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x) \quad \text{u } D^\varepsilon_{i,h,j} \\ \boldsymbol{W}^\varepsilon_{i,h,j}(x) \in W^{1,r}_0(D^\varepsilon_{i,h,j}) \\ \left|\nabla \boldsymbol{W}^\varepsilon_{i,h,j}(x)\right|_{L^r(D^\varepsilon_{i,h,j})} \le C_j \left|\operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x)\right|_{L^r(D^\varepsilon_{i,h,j})} \end{cases}$$

Kako je (za $j = 1, 2$) $\operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x) \in L^r(D^\varepsilon_{i,h,j})$ i ispunjeni su uvjeti kompatibilnosti

$$\int_{D^\varepsilon_{i,h,j}} \operatorname{div} \boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x) dx = \int_{\partial D^\varepsilon_{i,h,j}} \boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x) \cdot \boldsymbol{n} d\sigma_x = 0,$$

prema rezultatima iskazanim u teoremu 4.12 i lemi 4.13 zaključujemo da postoje rješenja ovih problema i da se konstante u ocjenama ne mijenjaju s dilatacijom ni s translacijom, pa dakle ne ovise o izboru prstena $D^\varepsilon_{i,h}$. Naime, za svaki izbor $k, N \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$, lako se provjeri da je svaki $D^\varepsilon_{i,h}$ sličan (po homotetiji) prstenu

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{1}{2} < |x| < 1 \right\}.$$

Sada možemo staviti $\boldsymbol{W}^\varepsilon_{i,h} = \boldsymbol{W}^\varepsilon_{i,h,1}\chi_{D^\varepsilon_{i,h,1}} + \boldsymbol{W}^\varepsilon_{i,h,2}\chi_{D^\varepsilon_{i,h,2}}$, te zatim

$$\underline{\boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,h}}(x) = \boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h}(x) - \boldsymbol{W}^\varepsilon_{i,h}(x) \quad \text{u } D^\varepsilon_{i,h} \tag{4.15}$$

i $\underline{\boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,h}}(x) = \boldsymbol{v}^\varepsilon(x)$ u ostatku ćelije Y^ε_i. Tako konstruirana funkcija ima tražena svojstva i divergencija joj je nula. Nadalje, lako se vidi da vrijedi

$$\left|e(\underline{\boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,h}})\right|_{L^r(D^\varepsilon_{i,h})} \le C \left|e(\boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,h})\right|_{L^r(D^\varepsilon_{i,h})} \le C \left|e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)\right|_{L^r(D^\varepsilon_{i,h})}, \tag{4.16}$$

gdje konstanta C ne ovisi o $D^\varepsilon_{i,h}$.

Sumiranjem po h trivijalno se dobiva

$$\sum_{h=0}^{k-1} \left|e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)\right|^r_{L^r(D^\varepsilon_{i,h})} \le \left|e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)\right|^r_{L^r(B_{\rho^\varepsilon}(x^\varepsilon_i))},$$

pa postoji $k_i \in \{0,\dots,k-1\}$ takav da

$$|e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r_{L^r(D^\varepsilon_{i,k_i})} \le \frac{1}{k}\cdot |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r_{L^r(B_{\rho^\varepsilon}(x_i^\varepsilon))}\,. \tag{4.17}$$

Sada lako slijedi iz (4.16) i (4.17) da za svaki indeks i i ovakav odabir indeksa k_i, gore navedena funkcija zadovoljava

$$\int_{D^\varepsilon_{i,k_i}} \Big|\, |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r - |e(\underline{\boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,k_i}})|^r \Big| dx \le \int_{D^\varepsilon_{i,k_i}} \Big(\, |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r + |e(\underline{\boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,k_i}})|^r \Big) dx \le$$

$$\le \frac{C}{k}\cdot |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|_{L^r(B_{\rho^\varepsilon}(x_i^\varepsilon))}\,,$$

gdje konstanta C ne ovisi o izboru $k\in\mathbb{N}$. Zaključujemo da ovako konstruirana funkcija $\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon$ iz $V(\Omega_\varepsilon)$ zadovoljava uvjete iz leme ako stavimo $D_i^\varepsilon = D^\varepsilon_{i,k_i}$, $\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x) = \underline{\boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,k_i}}(x)$ u Y_i^ε i $\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x) = \boldsymbol{v}^\varepsilon(x)$ na $\Omega_\varepsilon \setminus \bigcup D_i^\varepsilon$, prošireno nulom do Ω. Preostaje još samo dokazati slabu konvergenciju prema $\boldsymbol{v}$ u $W^{1,r}(\Omega)$.

$$\int_\Omega \left|\widetilde{\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon} - \boldsymbol{v}\right|^r dx = \int_{\Omega\setminus\bigcup D_i^\varepsilon} \left|\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon} - \boldsymbol{v}\right|^r dx + \sum_i \int_{D_i^\varepsilon} \left|\underline{\boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,k_i}} - \boldsymbol{v}\right|^r dx =$$

$$= \int_{\Omega\setminus\bigcup D_i^\varepsilon} \left|\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon} - \boldsymbol{v}\right|^r dx + \sum_i \int_{D_i^\varepsilon} \left|\boldsymbol{w}^\varepsilon_{i,k_i} - \boldsymbol{W}^\varepsilon_{i,k_i} - \boldsymbol{v}\right|^r dx \le$$

$$\le \int_{\Omega\setminus\bigcup D_i^\varepsilon} \left|\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon} - \boldsymbol{v}\right|^r dx + C\sum_i \int_{D_i^\varepsilon} \left(\left|\boldsymbol{v}^\varepsilon(x) - \boldsymbol{v}^\varepsilon_{i,k_i}\right|^r + \left|\boldsymbol{W}^\varepsilon_{i,k_i}\right|^r\right) dx +$$

$$+ C\int_{\bigcup D_i^\varepsilon} |\boldsymbol{v}^\varepsilon - \boldsymbol{v}|^r dx \le$$

$$\le C\int_\Omega \left|\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon} - \boldsymbol{v}\right|^r dx + C(\rho^\varepsilon)^r \sum_i \int_{D_i^\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r dx.$$

Pustimo li $\varepsilon\to 0$ i iskoristimo relativnu kompaktnost niza $(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon})$ u jakoj topologiji prostora $L^r(\Omega)$ (teorem Rellicha-Kondrashova), vidimo da $\widetilde{\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon} \to \boldsymbol{v}$ jako u $L^r(\Omega)$, a budući da je očito $(\widetilde{\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon})$ omeđen u $W^{1,r}(\Omega)$, slijedi također i njegova slaba konvergencija ka $\boldsymbol{v}$ u $W^{1,r}(\Omega)$. $\square$

Ranije smo spomenuli nelinearni operator superpozicije ili Nemitskijev operator:

$$N_f\,\boldsymbol{u}(x) = f(x, \boldsymbol{u}(x)), \quad x \in \Omega,$$

za $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omeđen i zadanu Carathéodoryjevu funkciju

$$f(x, \boldsymbol{\xi}), \quad f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

O dovoljnim uvjetima za neprekinutost tog operatora u obliku koji je nama koristan govori sljedeći teorem, koji originalno potječe iz Krasnoselskii[36].

Teorem 4.15. *Neka je $r > 1$ i neka postoje $a > 0$, $b(x) \in L^1(\Omega; \mathbb{R})$ takvi da*

$$|\, f(x, \boldsymbol{\xi})\,| \leq a\, |\,\boldsymbol{\xi}\,|^r + b(x), \quad \textit{za s.s. } x \in \Omega \textit{ i svaki } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n.$$

Tada je Nemitskijev operator $N_f : L^r(\Omega; \mathbb{R}^n) \to L^1(\Omega; \mathbb{R})$ omeđen i neprekinut.

Dokaz. Omeđenost slijedi iz Minkowskijeve nejednakosti, jer lagano dobivamo

$$|\,N_f \boldsymbol{u}\,|_{L^1} \leq a\, |\,\boldsymbol{u}\,|^r_{L^r} + |\,b\,|_{L^1}\,.$$

Za neprekinutost trebamo pokazati da za proizvoljni niz $(\boldsymbol{u}_n)$ takav da $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}$ u L^r, također vrijedi $N_f \boldsymbol{u}_n \to N_f \boldsymbol{u}$ u L^1.
Za svaki podniz $(\boldsymbol{u}_{n'})$ niza $(\boldsymbol{u}_n)$ postoji daljnji podniz $(\boldsymbol{u}_{n''})$ (v. Brezis[18], Teorem IV.9) koji konvergira s.s. ka $\boldsymbol{u}$ i koji je dominiran L^r-funkcijom

$$|\,\boldsymbol{u}_{n''}(x)\,| \leq \phi(x) \in L^r(\Omega).$$

Kako je f neprekinuta po drugoj varijabli za s.s. x, imamo

$$N_f \boldsymbol{u}_{n''} = f(x, \boldsymbol{u}_{n''}(x)) \longrightarrow f(x, \boldsymbol{u}(x)) = N_f \boldsymbol{u} \;\text{ s.s.},$$

$$|\,N_f \boldsymbol{u}_{n''}(x)\,| \leq a\, |\phi(x)\,|^r + b(x) \in L^1(\Omega; \mathbb{R}),$$

pa zaključujemo da $|N_f \boldsymbol{u}_{n''} - N_f \boldsymbol{u}|_{L^1} \longrightarrow 0$ prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji. Kako postupak možemo provesti za bilo koji podniz $(\boldsymbol{u}_{n'})$ niza $(\boldsymbol{u}_n)$ s jednakim rezultatom, zaključujemo da također i $N_f \boldsymbol{u}_n \to N_f \boldsymbol{u}$ u $L^1(\Omega; \mathbb{R})$. $\square$

Sada stavimo

$$f(x, \boldsymbol{\xi}) = \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}\big) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus T} |e(\boldsymbol{w}_\xi)|^r \, dt.$$

Lako vidimo da je funkcija $\boldsymbol{\xi} \mapsto e(\boldsymbol{w}_\xi)$ neprekinuta po varijabli $\boldsymbol{\xi}$, a to onda povlači da je $f(x, \boldsymbol{\xi})$ neprekinuta po drugoj varijabli. Naime, ako uzmemo niz $\boldsymbol{\xi}_n \to \boldsymbol{\xi}$ u $\mathbb{R}^n$, onda iz izraza (3.19) i (3.20) zaključujemo da vrijedi

$$\left| e(\boldsymbol{w}_{\xi_n}) - e(\boldsymbol{w}_\xi) \right|^2_{L^r(\mathbb{R}^n \setminus T)} \leq C \cdot \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}_n) - \mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi} \Big) \leq$$

$$\leq C \cdot |\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}_n)| \cdot |\boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi}| + C \cdot |\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi})| \cdot |\boldsymbol{\xi}_n - \boldsymbol{\xi}| \longrightarrow 0,$$

pa $e(\boldsymbol{w}_{\xi_n}) \to e(\boldsymbol{w}_\xi)$ u jakoj topologiji prostora $L^r(\mathbb{R}^n \setminus T)$, odnosno

$$\big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}_n), \boldsymbol{\xi}_n\big) \to \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}\big).$$

Također, iz (3.20) zaključujemo da vrijedi

$$\left| \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}\big) \right| \leq M \, |\boldsymbol{\xi}|^r .$$

Time smo pokazali da su uvjeti teorema ispunjeni i zaključujemo da je pripadni Nemitskijev operator $N_f : L^r(\Omega; \mathbb{R}^n) \to L^1(\Omega; \mathbb{R})$

$$N_f \, \boldsymbol{u}(x) = \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{u}(x)), \boldsymbol{u}(x) \Big)$$

omeđen i neprekinut, pa za svaki niz $(\boldsymbol{u}_k)$ za koji $\boldsymbol{u}_k \to \boldsymbol{u}$ jako u $L^r(\Omega; \mathbb{R}^n)$ vrijedi $N_f \, \boldsymbol{u}_k \to N_f \, \boldsymbol{u}$ jako u $L^1(\Omega; \mathbb{R})$, odnosno

$$\int_\Omega \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{u}_k(x)), \boldsymbol{u}_k(x) \Big) dx \longrightarrow \int_\Omega \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{u}(x)), \boldsymbol{u}(x) \Big) dx. \qquad (4.18)$$

Sljedeća lema omogućava diskretizaciju integrala

$$\int_\Omega \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{u}(x)), \boldsymbol{u}(x)\Big) dx,$$

odnosno, kao što ćemo uskoro vidjeti u nastavku, osigurava konvergenciju odgovarajuće integralne sume ka vrijednosti integrala.

Lema 4.16. *Neka je* $(\boldsymbol{v}^\varepsilon)$ *niz koji konvergira slabo ka* $\boldsymbol{v}$ *u* $W^{1,r}(\Omega)$. *Neka je* $\boldsymbol{v}_i^\varepsilon$ *kao u lemi 4.14, uz pretpostavku* $\rho^\varepsilon = c\varepsilon$, *za neki* $c < \frac{1}{2}$. *Tada*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \left| \sum_i \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon\Big) \chi_{Y_i^\varepsilon} - \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}(x)), \boldsymbol{v}(x)\Big) \right| dx = 0. \tag{4.19}$$

Dokaz. Prema (4.18), dovoljno je pokazati da

$$\sum_i \boldsymbol{v}_i^\varepsilon \chi_{Y_i^\varepsilon} \to \boldsymbol{v} \quad \text{jako u } L^r(\Omega).$$

Budući da $\boldsymbol{v}^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ u $W^{1,r}(\Omega)$ slijedi (zbog relativne kompaktnosti) da $\boldsymbol{v}^\varepsilon \to \boldsymbol{v}$ jako u $L^r(\Omega)$. Zbog toga što je $\rho^\varepsilon = c\varepsilon$, (v. [5]), možemo primijeniti Poincaréovu nejednakost s konstantom koja ne ovisi o ε niti o indeksu i

$$\int_{Y_i^\varepsilon} |\boldsymbol{v}_i^\varepsilon - \boldsymbol{v}^\varepsilon(x)|^r \, dx \le C\varepsilon^r \int_{Y_i^\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{v}^\varepsilon|^r \, dx.$$

Također vrijedi

$$\int_{Y_i^\varepsilon} |\boldsymbol{v}_i^\varepsilon - \boldsymbol{v}(x)|^r \, dx \le C \int_{Y_i^\varepsilon} |\boldsymbol{v}_i^\varepsilon - \boldsymbol{v}^\varepsilon(x)|^r \, dx + C \int_{Y_i^\varepsilon} |\boldsymbol{v}^\varepsilon(x) - \boldsymbol{v}(x)|^r \, dx.$$

Sada raspisujemo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big| \sum_i \boldsymbol{v}_i^\varepsilon \chi_{Y_i^\varepsilon} - \boldsymbol{v}(x) \Big|^r dx \ &= \ \sum_i \int_{Y_i^\varepsilon} |\boldsymbol{v}_i^\varepsilon - \boldsymbol{v}(x)|^r \, dx \le \\ \le C\varepsilon^r \sum_i \int_{Y_i^\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{v}^\varepsilon|^r \, dx \ &+ \ C \sum_i \int_{Y_i^\varepsilon} |\boldsymbol{v}^\varepsilon(x) - \boldsymbol{v}(x)|^r \, dx = \\ = C\varepsilon^r \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}^\varepsilon|^r \, dx \ &+ \ C \int_\Omega |\boldsymbol{v}^\varepsilon(x) - \boldsymbol{v}(x)|^r \, dx \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Zbog dokazane jake konvergencije niza $\sum_i \boldsymbol{v}_i^\varepsilon \chi_{Y_i^\varepsilon}$ ka $\boldsymbol{v}$ u $L^r(\Omega)$ zaključujemo da

$$\sum_i \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon\Big)\chi_{Y_i^\varepsilon} = \left(\mathcal{G}(\sum_i \boldsymbol{v}_i^\varepsilon \chi_{Y_i^\varepsilon}), \sum_i \boldsymbol{v}_i^\varepsilon \chi_{Y_i^\varepsilon}\right) \longrightarrow \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}(x)), \boldsymbol{v}(x)\Big)$$

jako u $L^1(\Omega)$, što smo i trebali pokazati. $\square$

4.5.2 Konstrukcija za "lim inf" nejednakost

Neka je $\boldsymbol{v} \in V(\Omega)$ i neka je $\boldsymbol{v}^\varepsilon \in V(\Omega_\varepsilon)$ takav da $\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon} \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ u $W^{1,r}(\Omega)$. Treba pokazati da vrijedi

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon}) \geq F(\boldsymbol{v}).$$

Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}$ i iskoristimo lemu 4.14, uz uvjet $\rho^\varepsilon = c\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$.
Uz korištenje oznaka iz leme 4.14, označimo s E^ε sljedeći skup

$$E^\varepsilon = \bigcup B_i^\varepsilon \qquad \text{gdje je} \quad B_i^\varepsilon = B_{\rho_i^\varepsilon}(x_i^\varepsilon), \qquad \rho_i^\varepsilon = \frac{3}{4} 2^{-k_i} c\varepsilon.$$

Nadalje, definirajmo

$$\boldsymbol{u}_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} \boldsymbol{v}_i^\varepsilon & \text{za } x \in B_i^\varepsilon, \\ \underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x) & \text{za } x \in \Omega \setminus E^\varepsilon. \end{cases}$$

Prvo promotrimo doprinos člana pod integralom na komplementu skupa E^ε.

Lema 4.17. *Za skup $\Omega \setminus E^\varepsilon$ vrijedi: postoji konstanta C takva da za svako $k \in \mathbb{N}$*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus E^\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r \, dx + \frac{C}{k} \geq \int_\Omega |e(\boldsymbol{v})|^r \, dx.$$

Dokaz. Za gore definirani niz $(\boldsymbol{u}_0^\varepsilon)$, iz leme 4.14 zaključujemo da je omeđen u $W^{1,r}(\Omega)$ pa konvergira jako u $L^r(\Omega)$, do na podniz, prema određenom $\boldsymbol{u}_0 \in L^r(\Omega)$. Označimo s χ_ε karakterističnu funkciju komplementa unije svih kugala oko x_i^ε radijusa $c\varepsilon$. Tada χ_ε slabo * konvergira u $L^\infty(\Omega)$ ka strogo pozitivnoj konstanti K, pa prema tome i

$$\boldsymbol{u}_0^\varepsilon \chi_\varepsilon \rightharpoonup K\boldsymbol{u}_0, \qquad \boldsymbol{v}^\varepsilon \chi_\varepsilon \rightharpoonup K\boldsymbol{v}$$

slabo u $L^r(\Omega)$. Kako je $\boldsymbol{u}_0^\varepsilon \chi_\varepsilon = \boldsymbol{v}^\varepsilon \chi_\varepsilon$, zaključujemo da $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{v}$. To povlači da $\boldsymbol{u}_0^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ u $W^{1,r}(\Omega)$, pa vrijedi

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus E^\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r \, dx + \frac{C}{k} \geq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus E^\varepsilon} |e(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon)|^r \, dx =$$

$$= \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |e(\boldsymbol{u}_0^\varepsilon)|^r\, dx \geq \int_\Omega |e(\boldsymbol{v})|^r\, dx,$$

gdje smo iskoristili slabu poluneprekinutost odozdo L^r-norme. □

Zbog doprinosa integrala na skupu E^ε pojavit će se novi dodatni član.

Lema 4.18. *Za skup E^ε vrijedi: postoji konstanta C takva da za svako $k \in \mathbb{N}$*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{E^\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r\, dx + \frac{C}{k} \geq \frac{1}{\sigma_0^r} \int_\Omega \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\big) dx.$$

Dokaz. Za odabrani $k \in \mathbb{N}$ postoji prema lemi 4.14 niz $(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon) \subset V(\Omega_\varepsilon)$ takav da vrijedi

$$\int_{E^\varepsilon} \Big|\, |e(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon)|^r - |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^r \Big| dx \leq \frac{C}{k},$$

pa je dovoljno pokazati

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{E^\varepsilon} |e(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon)|^r\, dx \geq \frac{1}{\sigma_0^r} \int_\Omega \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\big) dx.$$

Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i indeks i. Definirajmo

$$\boldsymbol{w}_{i,\varepsilon}(y) = \underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x_i^\varepsilon + \varepsilon\eta \cdot y), \quad \text{za } y \in B_{\rho_i^\varepsilon/\varepsilon\eta}, \quad \rho_i^\varepsilon/\varepsilon\eta \xrightarrow{\varepsilon} +\infty$$

prošireno konstantom $\boldsymbol{w}_{i,\varepsilon}(y) = \boldsymbol{v}_i^\varepsilon$ na $\mathbb{R}^n \setminus B_{\rho_i^\varepsilon/\varepsilon\eta}$. Za tu funkciju vrijedi: $\boldsymbol{w}_{i,\varepsilon} = 0$ na T, $\lim_{|y|\to\infty} \boldsymbol{w}_{i,\varepsilon}(y) = \boldsymbol{v}_i^\varepsilon$, $\operatorname{div} \boldsymbol{w}_{i,\varepsilon} = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus T$. Računamo

$$\int_{B_i^\varepsilon} |e(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x))|^r\, dx = (\varepsilon\eta)^{n-r} \cdot \int_{B_{\rho_i^\varepsilon/\varepsilon\eta}} |e(\boldsymbol{w}_{i,\varepsilon}(y))|^r\, dy = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^r}\, \varepsilon^n \cdot \int_{\mathbb{R}^n\setminus T} |e(\boldsymbol{w}_{i,\varepsilon}(y))|^r\, dy.$$

Na ovome mjestu se pojavljuje ključni izraz σ_ε i ponovno se jasno vidi zašto će za Brinkmanov zakon biti važno njegovo kritično ponašanje odnosno

$$\sigma_\varepsilon \to \sigma_0 > 0.$$

Kako za rješenje $(\boldsymbol{w}_\xi, \pi_\xi)$ vanjskog problema (3.11) znamo da vrijedi

$$\big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}\big) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus T} |e(\boldsymbol{w}_\xi)|^r\, dx = \min_{\boldsymbol{w}\in W} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n\setminus T} |e(\boldsymbol{w})|^r\, dx \Big\},$$

gdje se minimum traži po skupu

$$W = \left\{ \boldsymbol{w} \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \,\middle|\, \boldsymbol{w} = 0 \text{ na } \partial T, \lim_{|x| \to \infty} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\xi}, \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \setminus T \right\},$$

zaključujemo

$$\sum_i \int_{B_i^\varepsilon} |e(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x))|^r \, dx \geq \frac{1}{\sigma_\varepsilon^r} \varepsilon^n \sum_i \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon \Big). \tag{4.20}$$

Primijetimo da se u izrazu pojavljuje integralna suma

$$\varepsilon^n \sum_i \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon \Big) = \varepsilon^n \sum_i \int_{\mathbb{R}^n \setminus T} \left| e(\boldsymbol{w}_{v_i^\varepsilon}) \right|^r dx,$$

koja će prema tvrdnji leme 4.16 na limesu postati integral, odnosno

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_i \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon \Big) = \int_\Omega \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}(x)), \boldsymbol{v}(x) \big) dx.$$

Dakle, pustimo li $\varepsilon \to 0$, desna strana u (4.20) na limesu prelazi u

$$\frac{1}{\sigma_0^r} \cdot \int_\Omega \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \big) dx,$$

što je i trebalo pokazati. □

Primijetimo da je u obje leme niz $(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon)$ iz leme 4.14 korišten samo u dokazu i to kao pomoćni tehnički rezultat. U cijeloj konstrukciji jedino taj niz ovisi o $k \in \mathbb{N}$, a ne konačni rezultat koji sada navodimo. Kombiniranjem rezultata leme 4.17 i leme 4.18, te zbog proizvoljnosti konstante $k \in \mathbb{N}$, vidimo da za svaki $\boldsymbol{v} \in V(\Omega)$ i svaki $(\boldsymbol{v}^\varepsilon) \subset V(\Omega_\varepsilon)$ takav da $\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon} \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ slabo u $W_0^{1,r}(\Omega)$ vrijedi "lim inf" nejednakost (a zatim i sljedeća propozicija):

$$F(\boldsymbol{v}) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon}).$$

Propozicija 4.19. *Za svako $\boldsymbol{v} \in V(\Omega)$ vrijedi*

$$F(\boldsymbol{v}) \leq \Gamma - \liminf_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(\boldsymbol{v}).$$

■

4.5.3 Konstrukcija optimalnog niza ("lim sup" nejednakost)

Drugu nejednakost koja se koristi u dokazu Γ-konvergencije također ćemo dokazati modifikacijom ciljne funkcije na području bliskom perforacijama. U tu svrhu istaknimo sljedeću činjenicu.

Napomena 4.20. Konstrukciju iz leme 4.14 moguće je provesti i u slučaju kada uzmemo konstantni niz $\boldsymbol{v}^\varepsilon = \boldsymbol{v} \in V(\Omega)$. Tada je dovoljno uzeti $k_i = 0$, a konstruirani niz $(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon) \subset V(\Omega)$ je takav da zapravo $\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon \to \boldsymbol{v}$ jako u $W^{1,r}(\Omega)$. To se vidi jer tvrdnja leme vrijedi za svaki

$$k = k_\varepsilon < \log_2 \frac{c}{\varepsilon^{\frac{r}{n-r}}} \longrightarrow \infty, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0.$$

Neka je zadana funkcija $\boldsymbol{v} \in V(\Omega)$, uz dodatni zahtjev da je također i $\boldsymbol{v} \in L^\infty(\Omega)$. Prvo provodimo konstrukciju leme 4.14, uz

$$\rho^\varepsilon = c\varepsilon, \quad c < \frac{1}{2},$$

te dobivamo niz $(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon) \subset W^{1,r}(\Omega)$ takav da $\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon \to \boldsymbol{v}$ jako u $W^{1,r}(\Omega)$, za koji vrijedi

$$\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x) = \boldsymbol{v}_i^\varepsilon = \mu(D_i^\varepsilon)^{-1} \int_{D_i^\varepsilon} \boldsymbol{v}(x)dx, \quad \text{za } |x - x_i^\varepsilon| = \varepsilon' = \frac{3}{4}c\varepsilon.$$

Neka je, za $N \in \mathbb{N}$,

$$\underline{\rho}^\varepsilon = N\varepsilon^{n/(n-r)} < \frac{3}{4}c\varepsilon. \tag{4.21}$$

Lako se vidi da je taj uvjet ispunjen za $\varepsilon < \left(\frac{3c}{4N}\right)^{(n-r)/r} \to 0$ (kada $N \to \infty$) i tada je

$$T_i^\varepsilon \subset B_{\underline{\rho}^\varepsilon}(x_i^\varepsilon) \subset B_{\varepsilon'}(x_i^\varepsilon).$$

Fiksirajmo sada vrijednost $\delta > 0$. Funkciji $\boldsymbol{v}$ pridružit ćemo niz $(\boldsymbol{v}_0^\varepsilon)$ modificirajući njenu vrijednost tako da iščezava na svakoj perforaciji T_i^ε.

Neka je sada E^ε sljedeći skup

$$E^\varepsilon = \bigcup B_i^\varepsilon \qquad \text{gdje je} \quad B_i^\varepsilon = B_{\underline{\rho}^\varepsilon}(x_i^\varepsilon).$$

Prvo stavljamo

$$\boldsymbol{v}_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} \underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon(x) & \text{za } x \in \Omega \setminus \bigcup B_{\varepsilon'}(x_i^\varepsilon), \\ \boldsymbol{v}_i^\varepsilon & \text{za } x \in B_{\varepsilon'}(x_i^\varepsilon) \setminus B_i^\varepsilon, \end{cases} \tag{4.22}$$

a zatim promatramo skupove B_i^ε. Kako za sve $i \in \{1, 2, \ldots, N(\varepsilon)\}$ prema pretpostavci vrijedi $Y_i^\varepsilon \cap \partial\Omega = \emptyset$, zaključujemo da je uvijek B_i^ε dovoljno daleko od ruba da ne siječe $\partial\Omega$.

Definirajmo za $N \in \mathbb{N}$

$$C^N(\boldsymbol{\xi}) = \inf_{\boldsymbol{w} \in W_\xi^N} \int_{\mathbb{R}^n \setminus T} |e(\boldsymbol{w})|^r \, dx,$$

$$C_N = \sup_{\xi_0 \in S^{n-1}} \left[C^N(\boldsymbol{\xi}_0) - \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}_0), \boldsymbol{\xi}_0\big) \right],$$

gdje se infimum traži po skupu

$$W_\xi^N = \left\{ \boldsymbol{w} \in D^{1,r}(\mathbb{R}^n \setminus T) \,\middle|\, \boldsymbol{w} = 0 \text{ na } \partial T, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\xi} \text{ na } \mathbb{R}^n \setminus B_N, \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \setminus T \right\},$$

a supremum po jediničnoj sferi $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Lako se vidi da za svako $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$C^N(\boldsymbol{\xi}) - \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}\big) = \left[C^N\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) - \Big(\mathcal{G}\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big), \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) \right] \cdot |\boldsymbol{\xi}|^r \leq C_N \cdot |\boldsymbol{\xi}|^r.$$

Također, $C^N(\boldsymbol{\xi}) \searrow \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}\big)$ kada $N \to \infty$, a isto tako i $C_N \searrow 0$, pa je moguće odabrati $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ dovoljno velik i takav da za svaki $\boldsymbol{\xi}_0 \in S^{n-1}$

$$C^N(\boldsymbol{\xi}_0) - \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{\xi}_0), \boldsymbol{\xi}_0\big) \leq C_N < \frac{\delta}{2\, |\boldsymbol{v}|_{L^\infty}^r}.$$

Za taj N uzimamo dovoljno male $\varepsilon > 0$ kako bi bio ispunjen uvjet (4.21). Sada slijedi da za svaki indeks i

$$C^N(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon) - \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon\big) \leq C_N \cdot |\boldsymbol{v}_i^\varepsilon|^r < \frac{\delta\, |\boldsymbol{v}_i^\varepsilon|^r}{2\, |\boldsymbol{v}|_{L^\infty}^r} \leq \frac{\delta}{2},$$

odnosno

$$C^N(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon) \leq \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon\big) + \frac{\delta}{2}.$$

Odaberimo $\boldsymbol{w}_{i,\varepsilon} \in W^N_{\boldsymbol{v}_i^\varepsilon}$ takav da vrijedi

$$\int_{B_N} |e(\boldsymbol{w}_{i,\varepsilon}(y))|^r \, dy \leq C^N(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon) + \frac{\delta}{2} \leq \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon\big) + \delta.$$

Sada, neka je za $x \in B_i^\varepsilon$

$$\boldsymbol{v}_0^\varepsilon(x) = \boldsymbol{w}_{i,\varepsilon}\Big(\frac{x - x_i^\varepsilon}{\varepsilon\eta}\Big) \tag{4.23}$$

i primijetimo da je zbog toga

$$\boldsymbol{v}_0^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{za } x \in T_i^\varepsilon,$$

a kako je $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ u Ω, tako je i $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_0^\varepsilon = 0$ u Ω_ε.

Zamjenom varijabli dobivamo

$$\int_{B_i^\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}_0^\varepsilon)|^r \, dx = (\varepsilon\eta)^{n-r} \cdot \int_{B_N} |e(\boldsymbol{w}_{i,\varepsilon}(y))|^r \, dy,$$

pa vrijedi

$$\int_{B_i^\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}_0^\varepsilon)|^r \, dx \leq \frac{1}{\sigma_\varepsilon^r} \, \varepsilon^n \cdot \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon\big) + \frac{1}{\sigma_\varepsilon^r} \, \varepsilon^n \delta. \tag{4.24}$$

Sumiranjem (4.24) po svim $i \in \{1, 2, \ldots, N(\varepsilon)\}$ dobivamo nejednakost

$$\int_{E^\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}_0^\varepsilon)|^r \, dx \leq \frac{1}{\sigma_\varepsilon^r} \, \varepsilon^n \sum_i \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon\Big) + \frac{1}{\sigma_\varepsilon^r} \, \delta \cdot \mu(\Omega) + o(1) \tag{4.25}$$

U izrazu se ponovno pojavljuje integralna suma kao i u (4.20)

$$\varepsilon^n \sum_i \Big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}_i^\varepsilon), \boldsymbol{v}_i^\varepsilon\Big) \longrightarrow \int_\Omega \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\big) dx.$$

Zbog toga vrijedi (za proizvoljni $\delta > 0$)

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |e(\boldsymbol{v}_0^\varepsilon)|^r \, dx \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega\setminus\bigcup B_{\varepsilon'}(x_i^\varepsilon)} |e(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon)|^r \, dx + \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{E^\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}_0^\varepsilon)|^r \, dx \leq$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |e(\underline{\boldsymbol{v}}^\varepsilon)|^r \, dx + \frac{1}{\sigma_0^r} \cdot \int_\Omega \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\big) dx + \frac{1}{\sigma_0^r} \delta \cdot \mu(\Omega) =$$

$$= \int_\Omega |e(\boldsymbol{v})|^r \, dx + \frac{1}{\sigma_0^r} \cdot \int_\Omega \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\big) dx + \frac{1}{\sigma_0^r} \delta \cdot \mu(\Omega).$$

U posljednjoj jednakosti iskoristili smo napomenu 4.20, a lako se vidi, kao u dokazu leme 4.17, da $\boldsymbol{v}_0^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ u $W_0^{1,r}(\Omega)$.

Zbog svega dosad navedenog i dokazanog, za zadani $\boldsymbol{v} \in V(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dobivamo da za infimum po svim $(\boldsymbol{v}_0^\varepsilon) \subset V(\Omega_\varepsilon)$ takvim da $\boldsymbol{v}_0^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{v}$ u $W_0^{1,r}(\Omega)$ vrijedi

$$\inf \left\{ \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |e(\boldsymbol{v}_0^\varepsilon)|^r \, dx \,\Big|\, \right\} \leq \int_\Omega |e(\boldsymbol{v})|^r \, dx + \frac{1}{\sigma_0^r} \cdot \int_\Omega \big(\mathcal{G}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\big) dx. \tag{4.26}$$

Iskoristimo li činjenicu da je $W^{1,r}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ gusto u $W^{1,r}(\Omega)$, tada proizvoljni $\boldsymbol{v} \in W^{1,r}(\Omega)$ možemo aproksimirati nizom $(\boldsymbol{v}_k)$ u $W^{1,r}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ s obzirom na jaku konvergenciju u $W^{1,r}(\Omega)$. Budući da smo za takve funkcije dokazali da vrijedi $\overline{F}(\boldsymbol{v}_k) \leq F(\boldsymbol{v}_k) \leq \underline{F}(\boldsymbol{v}_k)$, odnosno $\overline{F}(\boldsymbol{v}_k) = F(\boldsymbol{v}_k)$, te zbog poluneprekinutosti odozdo funkcionala

$$\overline{F}(\boldsymbol{v}) = \Gamma - \limsup_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(\boldsymbol{v}) = \inf \left\{ \limsup_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(\boldsymbol{v}_\varepsilon) \,\big|\, \boldsymbol{v}_\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{v} \text{ u } W_0^{1,r}(\Omega) \right\},$$

odmah slijedi

$$\overline{F}(\boldsymbol{v}) \leq \liminf_k \overline{F}(\boldsymbol{v}_k) = \lim_k F(\boldsymbol{v}_k) = F(\boldsymbol{v}),$$

pa ista tvrdnja vrijedi i u obliku potrebnom za dokaz Γ-konvergencije, o čemu govori zaključna propozicija.

Propozicija 4.21. *Za svako $\boldsymbol{v} \in V(\Omega)$ vrijedi*

$$\Gamma - \limsup_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(\boldsymbol{v}) \leq F(\boldsymbol{v}).$$

■

4.6 Proširenje tlaka

Rezultati iz prethodnog poglavlja povlače konvergenciju niza funkcija koje predstavljaju brzinu, a preostaje nam još pobliže objasniti i dokazati što se događa s tlakom. Kao što smo naglasili u poglavlju 2.5, proširenje tlaka zahtijeva veći trud nego što je to bilo kod brzine. Situacija koju sada promatramo je nešto drugačija od ranije opisane, jer sada imamo

$$\eta = \eta(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\frac{r}{n-r}}),$$

a ranije, u izračunu limesa malog krutog dijela, je to bila konstanta (parametar) u postupku homogenizacije kada $\varepsilon \to 0$.

Kako bismo ocjene iz leme 4.5 proširili do ocjena na čitavom području Ω, adaptirat ćemo pristup iz članka Allaire[2]. Pomoću operatora restrikcije, kojeg je u izvornom obliku po prvi put konstruirao i koristio Tartar[54], doći ćemo do proširenja tlaka i uniformnih ocjena.
Neka je dakle veličina perforacija kritična, odnosno neka je $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sigma_\varepsilon = \sigma_0 > 0$. Poopćenjem rezultata iz [2, Poglavlje 2.2] za "L^r-okruženje" imamo sljedeću propoziciju.

Propozicija 4.22.
Postoji linearni operator $R^\varepsilon \in \mathcal{L}(W_0^{1,r}(\Omega), W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon))$ takav da vrijedi

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{w} \in W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon) \;\Rightarrow\; R^\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w} \quad u\ \Omega_\varepsilon,\\
&\boldsymbol{w} \in W_0^{1,r}(\Omega),\ \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \quad u\ \Omega \;\Rightarrow\; \operatorname{div}(R^\varepsilon \boldsymbol{w}) = 0 \quad u\ \Omega_\varepsilon,\\
&|e(R^\varepsilon \boldsymbol{w})|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \le C\Big(|\nabla \boldsymbol{w}|_{L^r(\Omega)} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon} |\boldsymbol{w}|_{L^r(\Omega)} \Big),\\
&|R^\varepsilon \boldsymbol{w}|_{W^{1,r}(\Omega_\varepsilon)} \le C\ |\boldsymbol{w}|_{W^{1,r}(\Omega)}
\end{aligned}$$

i konstante u ocjenama ne ovise o ε.

Konstrukciju operatora restrikcije i dokaz propozicije ostvarujemo kroz sljedeće rezultate. Prvo napravimo dekompoziciju svake ćelije strogo sadržane u Ω:

$$Y_i^\varepsilon = T_i^\varepsilon \cup C_i^\varepsilon \cup K_i^\varepsilon,$$

gdje je T_i^ε prepreka, C_i^ε kontrolni volumen oko prepreke (kugla B_i^ε promjera ε sa središtem u x_i^ε bez područja T_i^ε) i K_i^ε je ostatak ćelije.

Lema 4.23. *Neka je $\boldsymbol{u} \in W_0^{1,r}(\Omega)$. Problem nalaženja $\boldsymbol{v}^{i,\varepsilon} \in W^{1,r}(C_i^\varepsilon)$ takvih da*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{v}^{i,\varepsilon} = \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \dfrac{1}{\mu(C_i^\varepsilon)} \cdot \displaystyle\int_{T_i^\varepsilon} \operatorname{div} \boldsymbol{u} \, dx \quad u\ C_i^\varepsilon \\ \boldsymbol{v}^{i,\varepsilon} = \boldsymbol{u} \ na\ \partial C_i^\varepsilon \setminus \partial T_i^\varepsilon; \quad \boldsymbol{v}^{i,\varepsilon} = 0 \ na\ \partial T_i^\varepsilon, \end{cases} \tag{4.27}$$

ima jedinstveno rješenje koje linearno ovisi o $\boldsymbol{u}$ i vrijedi

$$\left| \nabla \boldsymbol{v}^{i,\varepsilon} \right|_{L^r(C_i^\varepsilon)} \leq C \left(|\nabla \boldsymbol{u}|_{L^r(B_i^\varepsilon)} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon} |\boldsymbol{u}|_{L^r(B_i^\varepsilon)} \right),$$

gdje konstanta C ne ovisi o $\varepsilon, i, \boldsymbol{u}$.

Prihvatimo li zasad tvrdnju leme, lako je vidjeti da operator R^ε zadovoljava sve uvjete propozicije 4.22 ako ga definiramo na sljedeći način:

1) za ćeliju Y_i^ε koja je strogo sadržana u Ω

$$R^\varepsilon \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \text{ u } K_i^\varepsilon, \quad R^\varepsilon \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}^{i,\varepsilon} \text{ u } C_i^\varepsilon, \quad R^\varepsilon \boldsymbol{u} = 0 \text{ u } T_i^\varepsilon,$$

2) za ćeliju Y_i^ε koja siječe $\partial\Omega$

$$R^\varepsilon \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \text{ u } Y_i^\varepsilon \cap \Omega.$$

Ostaje dakle samo dokazati lemu 4.23. Njena tvrdnja bit će posljedica rezultata koji slijede. Osnovne ideje dokaza ovih tehničkih rezultata mogu se pronaći u originalnom članku (Allaire[2]), a ključna je činjenica da perforacija ima kritičnu veličinu, zbog čega je i moguće dobiti spomenute ocjene, odnosno ocjenu u propoziciji 4.22.

Uvedimo sljedeću oznaku

$$C_\eta = B_1 \setminus \eta T, \quad B_1 = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Lema 4.24. *Postoji linearni operator $L \in \mathcal{L}(W^{1,r}(B_1), W^{1,r}(C_\eta))$ takav da za svako $\boldsymbol{u} \in W^{1,r}(B_1)$*

$$\begin{cases} L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \quad na\ \partial B_1; \quad L(\boldsymbol{u}) = 0 \quad na\ \partial(\eta T) \\ |\nabla L(\boldsymbol{u})|_{L^r(C_\eta)} \leq C\left(|\nabla \boldsymbol{u}|_{L^r(B_1)} + \eta^{\frac{n-r}{r}}\ |\boldsymbol{u}|_{L^r(B_1)}\right) \end{cases}$$

i konstanta C ne ovisi o η niti o $\boldsymbol{u}$.

Dokaz. Za konstrukciju takvog linearnog operatora koristimo lemu 2.2.3 iz članka Allaire[2]. Definirajmo $\theta \in C([0,1])$ s

$$\theta(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{za } \rho \in [0, 1/2], \\ 2\rho - 1, & \text{za } \rho \in [1/2, 1] \end{cases}$$

i $\phi \in C([0,1])$ s

$$\phi(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{za } \rho \in [0, \eta], \\ \dfrac{\frac{1}{\rho^{n-r}} - \frac{1}{\eta^{n-r}}}{1 - \frac{1}{\eta^{n-r}}}, & \text{za } \rho \in [\eta, 1]. \end{cases}$$

Neka je $\boldsymbol{u} \in W^{1,r}(B_1)$ i $\rho = |x|$. Operator L definiramo na sljedeći način

$$L(\boldsymbol{u}) = \theta(\rho)\Big(\boldsymbol{u} - \frac{1}{\mu(B_1)} \int_{B_1} \boldsymbol{u}\, dx\Big) + \phi(\rho)\frac{1}{\mu(B_1)} \int_{B_1} \boldsymbol{u}\, dx.$$

Poincaré-Wirtingerova nejednakost daje

$$\left|\boldsymbol{u} - \frac{1}{\mu(B_1)} \int_{B_1} \boldsymbol{u}\, dx\right|_{L^r(B_1)} \leq C\ |\nabla \boldsymbol{u}|_{L^r(B_1)},$$

a lako se vidi da

$$|\nabla \phi|_{L^r(B_1)} \leq C\eta^{\frac{n-r}{r}}$$

i konstante ne ovise o η. Ako sve to iskoristimo u izrazu

$$|\nabla L(\boldsymbol{u})|_{L^r(C_\eta)} \leq \left|\nabla\Big(\boldsymbol{u} - \frac{1}{\mu(B_1)}\int_{B_1}\boldsymbol{u}\,dx\Big)\right|_{L^r(B_1)} + 2\cdot \left|\boldsymbol{u} - \frac{1}{\mu(B_1)}\int_{B_1}\boldsymbol{u}\,dx\right|_{L^r(B_1)} + \frac{1}{\mu(B_1)}\int_{B_1}|\boldsymbol{u}|\;dx\cdot|\nabla\phi|_{L^r(B_1)}$$

dolazimo do tražene ocjene i vidimo da definirani operator zadovoljava sve tvrdnje leme. □

Lema 4.25. *Za svaku (skalarnu) funkciju $f \in L^r(C_\eta)$ takvu da $\int_{C_\eta} f\;dx = 0$ postoji $\boldsymbol{v} \in W_0^{1,r}(C_\eta)$ takav da*

$$\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{v} = f \quad u\ C_\eta \\ |\boldsymbol{v}|_{W^{1,r}(C_\eta)} \leq C\;|f|_{L^r(C_\eta)} \quad \textit{i konstanta ne ovisi o } \eta, f. \end{cases}$$

Dokaz. (prema lemi 2.2.4 iz Allaire[2]).
Neka je zadana funkcija $f \in L^r(C_\eta)$ takva da $\int_{C_\eta} f\;dx = 0$. Proširimo tu funkciju nulom na jediničnu kuglu i dobivamo $\widetilde{f} \in L^r(B_1)$ za koju vrijedi $\int_{B_1}\widetilde{f}\;dx = 0$. Uz te uvjete postoji $\boldsymbol{u} \in W_0^{1,r}(B_1)$ takav da

$$\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{u} = \widetilde{f} \quad \text{u } B_1 \\ |\boldsymbol{u}|_{W_0^{1,r}(B_1)} \leq C\,|\widetilde{f}|_{L^r(B_1)}. \end{cases}$$

Napravimo dekompoziciju $C_\eta = (B_1 \setminus B_\eta) \cup \eta(B_1 \setminus T)$. Promotrimo sada problem u $\eta(B_1 \setminus T)$: naći $\boldsymbol{w} \in W^{1,r}(\eta(B_1 \setminus T))$ takav da

$$\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{w} = \widetilde{f} \quad \text{u } \eta(B_1 \setminus T) \\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \text{ na } \partial(\eta B_1) \\ \boldsymbol{w} = 0 \text{ na } \partial(\eta T). \end{cases} \tag{4.28}$$

Kako je

$$\int_{\eta(B_1\setminus T)} f\ dx = \int_{\eta B_1} \widetilde{f}\ dx = \int_{\partial(\eta B_1)} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\ d\sigma_x = \int_{\partial(\eta(B_1\setminus T))} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\ d\sigma_x,$$

zadovoljen je uvjet kompatibilnosti, pa postoji rješenje $\boldsymbol{w}\in W^{1,r}(\eta(B_1\setminus T))$. Sada dokazujemo da vrijedi

$$|\nabla\boldsymbol{w}|_{L^r(\eta(B_1\setminus T))} \le C\ |f|_{L^r(C_\eta)}\,.$$

Prvo reskaliramo problem (4.28): za $y\in B_1\setminus T$

$$f_0(y) = f(\eta y),\quad \boldsymbol{u}_0(y) = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{u}(\eta y),\quad \boldsymbol{w}_0(y) = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{w}(\eta y).$$

$\boldsymbol{w}_0\in W^{1,r}(B_1\setminus T)$ je rješenje

$$\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{w}_0 = f_0 \ \text{ u } B_1\setminus T \\ \boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{u}_0 \text{ na } \partial B_1 \\ \boldsymbol{w}_0 = 0 \text{ na } \partial T. \end{cases}$$

Naime, kako je

$$\int_{B_1\setminus T} f_0\ dx = \int_{\partial B_1} \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{n}\ d\sigma_y,$$

zadovoljen je uvjet kompatibilnosti, te vrijedi

$$|\nabla\boldsymbol{w}_0|_{L^r(B_1\setminus T)} \le C\big(\ |f_0|_{L^r(B_1\setminus T)} + |\boldsymbol{u}_0|_{W^{1,r}(B_1\setminus T)}\big).$$

Zamjenom varijabli i laganim računom dobivamo

$$|\nabla\boldsymbol{w}|_{L^r(\eta(B_1\setminus T))} = \eta^{\frac{n}{r}}\ |\nabla\boldsymbol{w}_0|_{L^r(B_1\setminus T)} \le \dots \le$$

$$\le C\cdot\Big(\ |f|_{L^r(\eta(B_1\setminus T))} + \frac{1}{\eta}\ |\boldsymbol{u}|_{L^r(\eta B_1)} + |\nabla\boldsymbol{u}|_{L^r(\eta B_1)}\Big).$$

Primjenom Hölderove nejednakosti u ηB_1 za eksponente $p=\frac{n}{n-r}$ i $p'=\frac{n}{r}$ možemo zapisati

$$|\boldsymbol{u}|^r_{L^r(\eta B_1)} \le C\eta^r\ |\boldsymbol{u}|^r_{L^{\frac{nr}{n-r}}(\eta B_1)} \le C\eta^r\ |\boldsymbol{u}|^r_{L^{\frac{nr}{n-r}}(B_1)}\,,$$

jer $L^{\frac{nr}{n-r}}$-norma ne ovisi o dilataciji.
Kako $W_0^{1,r}(B_1) \hookrightarrow L^{\frac{nr}{n-r}}(B_1)$, slijedi

$$|\boldsymbol{u}|_{L^r(\eta B_1)} \leq C\eta\ |\boldsymbol{u}|_{W_0^{1,r}(\eta B_1)} \leq C\eta\,|\,\widetilde{f}\,|_{L^r(B_1)} = C\eta\ |f\,|_{L^r(C_\eta)}\,.$$

Zaključno, stavimo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u} \quad \text{u } B_1 \setminus B_\eta \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{w} \quad \text{u } \eta(B_1 \setminus T). \end{aligned}$$

Takav $\boldsymbol{v} \in W_0^{1,r}(C_\eta)$ zadovoljava sve uvjete propozicije. □

Lema 4.26. *Neka je $\boldsymbol{u} \in W^{1,r}(B_1)$. Problem: naći $\boldsymbol{v} \in W^{1,r}(C_\eta)$ takav da*

$$\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{v} = \operatorname{div}\boldsymbol{u} + \dfrac{1}{\mu(C_\eta)} \cdot \displaystyle\int_{\eta T} \operatorname{div}\boldsymbol{u}\ dx \qquad u\ C_\eta \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\ \ na\ \partial B_1; \quad \boldsymbol{v} = 0\ \ na\ \partial(\eta T) \end{cases} \tag{4.29}$$

ima jedinstveno rješenje koje linearno ovisi o $\boldsymbol{u}$ i vrijedi

$$|\nabla\boldsymbol{v}|_{L^r(C_\eta)} \leq C\left(|\nabla\boldsymbol{u}|_{L^r(B_1)} + \eta^{\frac{n-r}{r}}\ |\boldsymbol{u}|_{L^r(B_1)}\right), \tag{4.30}$$

gdje konstanta C ne ovisi o η niti o $\boldsymbol{u}$. ■

Napomena 4.27. Lako se provjeri da je uvjet kompatibilnosti ispunjen za nehomogeni sustav (4.29), a pomoću lema 4.24 i 4.25 se taj sustav transformira u problem s homogenim Dirichletovim uvjetom i solenoidalnim rješenjem. Na taj način se dobiva i ocjena (4.30).

Dokaz. (**Lema 4.23**)
Svaki kontrolni volumen C_i^ε je sličan području C_η reskaliranom na veličinu ε. Primijenimo li lemu 4.26 s reskaliranim varijablama

$$\boldsymbol{v}^{i,\varepsilon}(x) = \varepsilon \cdot \boldsymbol{v}(\frac{x - x_i^\varepsilon}{\varepsilon}),$$

lako se vidi da iz ocjene (4.30) dobivamo

$$\left|\nabla \boldsymbol{v}^{i,\varepsilon}\right|_{L^r(C_i^\varepsilon)} \leq C \left(|\nabla \boldsymbol{u}|_{L^r(B_i^\varepsilon)} + \frac{\eta^{\frac{n-r}{r}}}{\varepsilon} |\boldsymbol{u}|_{L^r(B_i^\varepsilon)} \right), \tag{4.31}$$

a znamo da je

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\eta^{\frac{n-r}{r}}}.$$

Na taj način dobivamo $\boldsymbol{v}^{i,\varepsilon} \in W^{1,r}(C_i^\varepsilon)$ koji zadovoljavaju sva svojstva navedena u lemi. $\square$

Završetkom dokaza leme 4.23 završena je i konstrukcija operatora restrikcije $R^\varepsilon \in \mathcal{L}(W^{1,r}(\Omega), W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon))$ za kojeg, između ostalog, vrijedi ocjena

$$|R^\varepsilon \boldsymbol{w}|_{W^{1,r}(\Omega_\varepsilon)} \leq C \, |\boldsymbol{w}|_{W^{1,r}(\Omega)} .$$

Zbog ranije navedenih svojstava, prirodno proširujemo $R^\varepsilon \boldsymbol{w}$ nulom do čitavog Ω, uz zadržavanje iste oznake. Pomoću operatora restrikcije konačno definiramo i proširenje tlaka.

Propozicija 4.28.
Operator P^ε definiran na sljedeći način: za $\boldsymbol{w} \in W_0^{1,r}(\Omega)$

$$\left\langle \nabla P^\varepsilon(q^\varepsilon), \boldsymbol{w} \right\rangle_{W^{-1,r'},W_0^{1,r}(\Omega)} = \left\langle \nabla q^\varepsilon, R^\varepsilon \boldsymbol{w} \right\rangle_{W^{-1,r'},W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon)},$$

je linearni operator proširenja sa $L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ u $L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:
postoje konstante C_1 i C_2, neovisne o ε, takve da za svako $q^\varepsilon \in L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$

$$P^\varepsilon(q^\varepsilon) = q^\varepsilon \ \text{ u } \Omega_\varepsilon,$$

$$|P^\varepsilon(q^\varepsilon)|_{L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C_1 \, |q^\varepsilon|_{L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}} ,$$

$$|\nabla(P^\varepsilon(q^\varepsilon))|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq C_2 \, |\nabla q^\varepsilon|_{W^{-1,r'}(\Omega_\varepsilon)} .$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljni $q^\varepsilon \in L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ i definiramo funkcional F^ε na $W_0^{1,r}(\Omega)$:

$$\left\langle F^\varepsilon, \boldsymbol{w} \right\rangle_{W^{-1,r'}, W_0^{1,r}(\Omega)} = \left\langle \nabla q^\varepsilon, R^\varepsilon \boldsymbol{w} \right\rangle_{W^{-1,r'}, W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon)}.$$

Svojstva operatora R^ε daju

$$|F^\varepsilon|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq C \, |\nabla q^\varepsilon|_{W^{-1,r'}(\Omega_\varepsilon)},$$

što znači da je $F^\varepsilon \in W^{-1,r'}(\Omega)$. Nadalje,

$$\left\langle F^\varepsilon, \boldsymbol{w} \right\rangle_{W^{-1,r'}, W_0^{1,r}(\Omega)} = -\int_{\Omega_\varepsilon} q^\varepsilon \cdot \operatorname{div} R^\varepsilon \boldsymbol{w} \; dx.$$

Kako za svaki $\boldsymbol{w} \in W_{0,\mathrm{div}}^{1,r}(\Omega)$ vrijedi $\operatorname{div} R^\varepsilon \boldsymbol{w} = 0$ u Ω_ε, slijedi da za takav $\boldsymbol{w}$

$$\left\langle F^\varepsilon, \boldsymbol{w} \right\rangle_{W^{-1,r'}, W_0^{1,r}(\Omega)} = 0,$$

odnosno, prema Korolaru III.5.1 iz Galdi[29], postoji jedinstveni $P^\varepsilon \in L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}$ takav da

$$F^\varepsilon = \nabla P^\varepsilon.$$

Sada možemo staviti $P^\varepsilon(q^\varepsilon) = P^\varepsilon$.
Lako se vidi da za $\boldsymbol{w} \in W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon)$ vrijedi

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (P^\varepsilon(q^\varepsilon) - q^\varepsilon) \operatorname{div} \boldsymbol{w} \; dx = 0.$$

Kako se svako $f \in L^r(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ može reprezentirati kao $f = \operatorname{div} \boldsymbol{w}$, za neko $\boldsymbol{w} \in W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon)$, slijedi

$$P^\varepsilon(q^\varepsilon) = q^\varepsilon \quad \text{u } L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}.$$

Na sličan način dobivamo prvu ocjenu iz propozicije, dok je druga očita. □

Lema 4.29.

Operator P^ε *zadovoljava sljedeće: za svako* $q^\varepsilon \in L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$

$$P^\varepsilon(q^\varepsilon) = \begin{cases} q^\varepsilon & u\ \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{1}{\mu(C_i^\varepsilon)} \displaystyle\int_{C_i^\varepsilon} q^\varepsilon dx & u\ svakom\ T_i^\varepsilon, \end{cases} \tag{4.32}$$

gdje je C_i^ε *kontrolni volumen oko svake prepreke* T_i^ε*:*

$$C_i^\varepsilon = B_i^\varepsilon \setminus T_i^\varepsilon$$

(kugla B_i^ε *promjera* ε *bez područja* T_i^ε*).*

Dokaz. Neka je $q^\varepsilon \in L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$. Već smo pokazali da je $P^\varepsilon(q^\varepsilon) = q^\varepsilon$ u Ω_ε, a trebamo još vidjeti da je $P^\varepsilon(q^\varepsilon)$ konstanta na svakoj prepreci T_i^ε.
U tu svrhu uzmimo $\boldsymbol{w}_i \in C_0^\infty(T_i^\varepsilon)$. Lako se vidi da je $R^\varepsilon(\boldsymbol{w}_i) = 0$, pa za takav $\boldsymbol{w}_i$ vrijedi

$$\left\langle \nabla P^\varepsilon(q^\varepsilon), \boldsymbol{w}_i \right\rangle_{W^{-1,r'}, W_0^{1,r}(\Omega)} = 0,$$

odnosno $\nabla P^\varepsilon(q^\varepsilon) = 0$ u T_i^ε ili, što je ekvivalentno, $P^\varepsilon(q^\varepsilon)$ je konstanta u T_i^ε.
Kako bismo odredili tu konstantu uzmimo $\boldsymbol{v}_i \in C_0^\infty(B_i^\varepsilon)$ i vidimo da je

$$\int_{B_i^\varepsilon} P^\varepsilon(q^\varepsilon) \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{v}_i \, dx = \int_{C_i^\varepsilon} q^\varepsilon \cdot \operatorname{div} R^\varepsilon \boldsymbol{v}_i \, dx.$$

Ako iskoristimo sustav (4.27) i činjenicu da je $P^\varepsilon(q^\varepsilon)$ konstanta u T_i^ε, lagano dolazimo do

$$P^\varepsilon(q^\varepsilon) = \frac{1}{\mu(C_i^\varepsilon)} \int_{C_i^\varepsilon} q^\varepsilon dx \quad \text{u svakom } T_i^\varepsilon.$$

□

Napomena 4.30. Kao što je već ranije spomenuto, konstrukciju proširenja tlaka pomoću operatora restrikcije nije moguće izbjeći, jer izraz (4.32) sam po sebi ne daje ocjene potrebne u dokazu konvergencije.

Uz ovakvo proširenje tlaka, nadopunjujemo rezultat leme 4.5 i dobivamo ocjene na čitavom području Ω. Pojednostavimo prvo oznaku na način da za rješenje $p^\varepsilon \in L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ pišemo

$$P^\varepsilon = P^\varepsilon(p^\varepsilon) \in L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Lema 4.31. (Ocjena za prošireni tlak)
Neka je $p^\varepsilon \in L^{r'}(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ slabo rješenje za tlak u (4.7) i σ_ε omjer definiran u (4.3). Tada postoji konstanta neovisna o ε takva da

$$\begin{aligned} &|P^\varepsilon|_{L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C, \\ &|\nabla P^\varepsilon|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq C. \end{aligned}$$

Dokaz. Za svaki $g \in L^r(\Omega)/\mathbb{R}$, postoji $\boldsymbol{w} \in W_0^{1,r}(\Omega)$ takav da je $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = g$ i $|\boldsymbol{w}|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C \, |g|_{L^r(\Omega)/\mathbb{R}}$. Pomoću te činjenice proširujemo tlak definirajući za $g \in L^r(\Omega)/\mathbb{R}$

$$\int_\Omega P^\varepsilon g \; dx = \int_\Omega P^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{w} \; dx = \langle \nabla p^\varepsilon, R^\varepsilon \boldsymbol{w} \rangle_{\Omega_\varepsilon}. \tag{4.33}$$

Iz izraza (4.33), leme 4.5 i svojstava operatora restrikcije zaključujemo da postoji konstanta neovisna o ε takva da

$$\left| \int_\Omega P^\varepsilon g dx \right| \leq C \, |g|_{L^r(\Omega)/\mathbb{R}}.$$

Nadalje, kako je za $\boldsymbol{w} \in W_0^{1,r}(\Omega)$

$$\big\langle \nabla P^\varepsilon, \boldsymbol{w} \big\rangle_{W^{-1,r'}(\Omega), W_0^{1,r}(\Omega)} = \big\langle \nabla p^\varepsilon, R^\varepsilon \boldsymbol{w} \big\rangle_{W^{-1,r'}(\Omega_\varepsilon), W_0^{1,r}(\Omega_\varepsilon)},$$

imamo

$$\big\langle \nabla P^\varepsilon, \boldsymbol{w} \big\rangle = -\int_{\Omega_\varepsilon} |e(\boldsymbol{v}^\varepsilon)|^{r-2} e(\boldsymbol{v}^\varepsilon) : e(R^\varepsilon \boldsymbol{w}) \; dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{f} \cdot R^\varepsilon \boldsymbol{w} \; dx,$$

pa zaključujemo

$$\big|\big\langle \nabla P^\varepsilon, \boldsymbol{w} \big\rangle\big| \leq \big|e(\widetilde{\boldsymbol{v}^\varepsilon})\big|_{L^r(\Omega)}^{r-1} \cdot |e(R^\varepsilon \boldsymbol{w})|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + |\boldsymbol{f}|_{L^{r'}(\Omega)} \cdot |R^\varepsilon \boldsymbol{w}|_{L^r(\Omega_\varepsilon)}.$$

Pomoću ranije dokazanih ocjena za brzinu (4.9) i propozicije 4.22 dobivamo

$$\left|\left\langle \nabla P^{\varepsilon}, \boldsymbol{w} \right\rangle\right| \leq C \, |\boldsymbol{w}|_{W^{1,r}(\Omega)},$$

odnosno

$$|\nabla P^{\varepsilon}|_{W^{-1,r'}(\Omega)} \leq C$$

i time smo dokazali obje ocjene iz leme. □

Napomena 4.32. Kako je niz (P^{ε}) omeđen u $L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}$, zaključujemo da postoji podniz (u istoj oznaci) proširenog tlaka na čitavom području Ω i $p^0 \in L^{r'}(\Omega)/\mathbb{R}$ prema kojemu taj podniz slabo konvergira.

Zaključak

Predmet istraživanja koje je dovelo do ovog rada je filtracija polimernog fluida kao primjera takozvanog nenewtonovskog fluida. Kroz obradu teme često smo uspoređivali sličnosti i razlike s newtonovskim fluidima, ističući specifičnosti i poteškoće koje sa sobom donosi nelinearni zakon potencije polimernog fluida. Kratki pregled rezultata prijašnjih istraživanja otkrio je izvor iz kojeg smo crpili ideje i motivaciju, uz dužno poštovanje prema spomenutim autorima - znanstvenicima i njihovom doprinosu ovoj tematici.

Dva su rezultata istraživanja koje bi trebalo posebno istaknuti kao naš znanstveni doprinos na polju asimptotičke analize i homogenizacije u mehanici fluida. Za polimerni fluid proučavali smo Darcyjev i Brinkmanov oblik zakona filtracije, te precizno utvrdili u kojim se slučajevima javljaju, odnosno kako jednadžbe toka ovise o veličini nepropusnog dijela u odnosu na period periodičke strukture. U slučaju ranije dokazanog Darcyjevog zakona izračunali smo tzv. limes malog krutog dijela i definirali novu funkciju otpornosti koja se javlja u graničnom obliku jednadžbi. Uz taj značajni rezultat, pokazali smo i da postoji kritični red veličine perforacija kada se homogenizacijom dobiva tzv. Brinkmanov zakon uz pojavu novog člana u jednadžbama. Taj novi član sadrži ranije spomenutu funkciju otpornosti koja time postaje glavna poveznica dvaju problema koje smo proučavali i obuhvatili u radnji.

Literatura

[1] Allaire G., Continuity of the low-volume fraction limit, Ann.Scuola Norm.Sup. Pisa Cl.Sci. (4), 18 (4) (1991), 475-499.

[2] Allaire G., Homogenization of the Navier-Stokes equations in open set perforated with tiny holes, Part I: Abstract framework, a volume distribution of holes, Arch. Rat. Mech. Anal., 113 (1991), 209-259.

[3] Allaire G., Homogenization of the Navier-Stokes equations in open set perforated with tiny holes, Part II: Non-critical size of the holes for a volume distribution and a surface distribution of holes , Arch. Rat. Mech. Anal., 113 (1991), 261-298.

[4] Ansini N., Braides A., Asymptotic analysis of periodically-perforated nonlinear media, J. Math. Pures Appl. 81, (2002), 439-451. v. [5]

[5] Ansini N., Braides A., Erratum to Asymptotic analysis of periodically-perforated nonlinear media, J. Math. Pures Appl. 84, (2005), 147-148.

[6] Attouch H., Variational Convergence for Functions and Operators, Applicable Maths., Pitman, Boston, 1984.

[7] Baranger J.,Najib K., Analyse numerique des ecoulements quasi-Newtoniens dont la viscosite obeit a la loi puissance ou la loi de Carreau, Numer. Math. 58, (1990), 35-49.

[8] Bear J., Dynamics of Fluids in Porous Media, Elsevier, New York, 1972.

[9] Belhadj M., Cancès E., Gerbeau J-F., Mikelić A., Homogenization approach to filtration through a fibrous medium, Networks and Heterogeneous Media, 2 (3) (2007), 529-550.

[10] Belyaev A.G., Kozlov S.M., Low concentration limit for Dirichlet homogenization problem, Prooceedings of the *Second worhshop on composite media and homogenization theory, Trieste, 1993*, Dal Maso G. and Dell'Antonio G. eds., World Scientific, 1995., 37-63.

[11] Bendsøe M.P., Haber R.B., The Michell layout problem as a low volume fraction limit of the perforated plate topology optimization problem: an asymptotic study, Structural Optimization, 6 (1993), 263-267.

[12] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G., Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, 1978.

[13] Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N., Transport Phenomena, Wiley, New York, 1960.

[14] Bourgeat A., Gipouloux O., Marušić-Paloka E., Filtration law for polymer flow through a porous media, Multiscale Model.Simul., 1 (3) (2003), 432-457.

[15] Bourgeat A., Gipouloux O., Marušić-Paloka E., Mathematical modelling and numerical simulation of a non-newtonian viscous flow through a thin filter, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol 62, No 2 (2002), 597-626.

[16] Bourgeat A. Mikelić A., Homogenization of a polymer flow through a porous medium, Nonlinear Anal., 26 (7) (1996), 1221-1253.

[17] Braides A., Γ-convergence for beginners, volume 22 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications*, Oxford University Press, 2002.

[18] Brezis H., Analyse Fonctionnelle, Theorie at applications, Masson, Paris, 1983.

[19] Brillard A., Asymptotic analysis of incompressible and viscous fluid flow through porous media. Brinkman's law via epi-convergence methods, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Vol. 8 no. 2 (1986-1987), 225-252.

[20] Brinkman H.C., A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, Appl. Sci. Res. A1, (1947), 27-34.

[21] Capdeboscq Y., Impedance imaging for inhomogeneities of low volume fraction, Proceedings of the *IUTAM Symposium on topological design optimization of structures, machines and materials: status and perspectives*, Bendsøe et all ed.. 197-206, Springer 2006.

[22] Choksi R., Pletier M.A., Small volume fraction limit of the diblock copolymer problem: I sharp interface functional, Preprint (submitted)

[23] Cioranescu D., Murat F., Un terme étrange venu d'ailleurs, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France seminar, Vol.2&3, Research Notes in Mathematics (1982)

[24] Conti S., Hönig A., Niethammer B., Otto F., Nonuniversality in low-volume-fraction Ostwald ripening, J. Stat. Phys., 124 (2006), 231-259.

[25] Dal Maso G., An Introduction to Γ-Convergence, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[26] Fratrović T., Matematički model toka krvi kroz arteriju, Magistarski rad, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2005.

[27] Fratrović T., Marušić-Paloka E., Low-volume-fraction limit for polymer fluids, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 373 (2), (2011), 399-409.

[28] Götz T., Parhusip H.A., On an asymptotic expansion for porous media flow of Carreau fluid, J.Eng.Math., 51 (4) (2005), 351-365.

[29] Galdi G.P., An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations Vol.I,II, Springer, 1994.

[30] Gipouloux 0., Zine A.M., Computation of the filtration laws through porous media for a non Newtonian fluid obeying the power law, Computational Geosciences, 1 (1997), 127-153.

[31] Hashimoto H., On the periodic fundamental solution of the Stokes equation and their application to viscous flow past a cubic array of spheres, J.Fluid Mech., 5 (1959), 317-328.

[32] Hemeida A.M., Mathematical model for flow of pseudoplastic fluids in porous media, J.King Saud Univ, Engr.Sci., 7 (1) (1995), 125-137.

[33] Hornung U., Homogenization and porous media, Springer, Berlin, 1997.

[34] Ikoku C.U., Transient flow of non-Newtonian power-law fluids in porous media, Phd Thesis, Stanford University, Stanford CA, 1978.

[35] Keller J.B., Darcy's law for flow in porous media and the two-space method, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 54, Dekker, New York, 1980.

[36] Krasnoselskii M. K., Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Pergamon Press, New York, 1964.

[37] Ladyzhenskaya O., The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach Science Publishers, 1969.

[38] Larala V.J., Johnson W.C., Voorhees P.W., The kinetics of Ostwald ripening in stressed solids: the low volume fraction limit, Scripta Metallurgica, 23 (10) (1989), 1749-1754.

[39] Levy T., Fluid flow through an array of fixed particles, Int. J. Engin. Sci. 21, (1983), 11-23.

[40] Lions J.L., Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control, Gordon and Breach, New York, 1981.

[41] Lions J.L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, 1969.

[42] Lipton A., Avellaneda M., Darcy's law for slow viscous flow past a stationary array of bubbles, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 114A (1990), 71-79.

[43] Marchenko V.A., Hruslov E.Ya., Boundary-value problems in domains with fine grained boundaries, Nauka Dumka, Kiev, 1975. (in russian)

[44] Marušić-Paloka E., On the Stokes paradox for power-law fluids, ZAMM Z Angew. Math. Mech., 81 (2001), 31-36.

[45] Mikelić A., Homogenization theory and applications to filtration through porous media, poglavlje u knjizi "Filtration in Porous Media and Industrial Applications", ed. A. Fasano, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1734, Springer, 2000, 127-214.

[46] Mitrović D., Žubrinić D., Fundamentals of applied functional analysis, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 91, Addison Wesley Longman, Harlow, 1998.

[47] Mjasnikov V.P., Mosolov P.P., A proof of Korn inequality, Soviet. Math. Dokl. 12 (1971), 1618-1622.

[48] Oden J.T., Qualitative Methods in Nonlinear Mechanics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

[49] Rosen S.L., Fundamental principles of polymeric materials, 2nd ed., Wiley, 1993.

[50] Rubinstein J., On the macroscopic description of slow viscous flow past a random array of spheres, J. Stat. Phys. 44, (1986), 849-863.

[51] Sanchez-Palencia E., Non homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, 1980.

[52] Sangani A., Acrivos A., Slow flow through a periodic array of spheres, Int.J.Multiphase Flow, 8 (1982), 343-360.

[53] Shah D.O., Schechter R.S., Improved oil recovery by surfactant and polymere flooding, Academic Press, 1977.

[54] Tartar L., Convergence of the homogenization process (Appendix), dodatak u [51]

[55] Whitaker S., Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy law, Transport Porous Media 1, (1990), 3-25.

[56] Zhikov V.V., On the homogenization of the system of Stokes equations in a porous medium, Russian Acad. Sci. Dokl. Math., Vol. 49 (1994), 52-57.

Sažetak

Tema obuhvaća proučavanje efektivnih jednadžbi stacionarnog toka nenewtonovskog fluida kroz periodičku poroznu sredinu dobivenih procesom homogenizacije. Detaljna asimptotička analiza zakona filtracije daje dodatne informacije o utjecaju mikrostrukture na parametre efektivnih jednadžbi, kao što je permeabilnost ili propusnost. Mali parametar koji se pojavljuje kao period periodičke domene i zadana relativna veličina prepreke u ćeliji periodičke domene kontroliraju omjer veličine propusnog i nepropusnog dijela porozne sredine. Pokazuje se da rezultati ovise o asimptotičkom ponašanju veličine nepropusnog dijela u procesu homogenizacije, kada broj ćelija teži u beskonačnost, a njihova veličina k nuli. Precizirani zakoni filtracije obuhvaćaju limes malog krutog dijela u slučaju male veličine nepropusnog dijela i nelinearni Brinkmanov zakon u slučaju kritične veličine nepropusnog dijela.
U prva dva poglavlja predstavljene su pretpostavke u modeliranju i poznati rezultati dobiveni homogenizacijom, s naglaskom na sličnosti i razlike newtonovskog i polimernog fluida.
Treće poglavlje sadrži prvi originalni rezultat, a radi se o limesu malog krutog dijela i pratećim rezultatima o konvergenciji.
U četvrtom poglavlju doprinos tematici je nastavljen izvodom nelinearnog Brinkmanovog zakona korištenjem energetskog pristupa i Γ-konvergencije odgovarajućih funkcionala. Poglavlje sadrži i rezultat o proširenju tlaka.

Summary

We study effective equations of a stationary nonnewtonian fluid flow through periodic porous medium obtained by the homogenization process. Detailed asymptotic analysis of a filtration law gives additional information about the influence of the microstructure on the parameters of the effective equations, like permeability. Small parameter which appears as the period of the periodic structure and given relative obstacle size in the cell of the periodic domain control the ratio of the fluid part and the solid part of the porous medium. It has been observed that the results depend on the asymptotic behaviour of this impermeable part during the homogenization process, when number of cells tend to infinity, and their size to zero. Filtration laws made precise are low-volume-fraction limit in case of small obstacle size and nonlinear Brinkman-type law in case of the critical obstacle size.

First two chapters present modelling assumptions and known results obtained by homogenization, with an emphasis on similarities and differences of newtonian and polymer fluids.

Third chapter contains the first original result, concerning low-volume-fraction limit and accompanying convergence results.

In the fourth chapter contribution to the topic continues with derivation of the Brinkman-type law by Γ-convergence of corresponding energy functionals. Chapter also contains a result about extension of the pressure.

Životopis

Tomislav Fratrović rođen je 06. svibnja 1977. godine u Karlovcu. Diplomirao je 2000. godine na PMF - Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu, inženjerski profil, smjer Primijenjena matematika i stekao stručni naziv diplomirani inženjer matematike. Diplomski rad nosio je naziv *Stacionarni tok viskoznog fluida*. Iste godine upisao je poslijediplomski znanstveni studij matematike i zaposlio se kao asistent na Grafičkom fakultetu u Zagrebu. Od srpnja 2004. godine radi na Fakultetu prometnih znanosti u Zagrebu kao asistent na Katedri za primijenjenu matematiku i statistiku.
2005. godine stekao je akademski stupanj magistra znanosti iz područja prirodnih znanosti, polje matematika, obranivši magistarski rad na PMF-Matematičkom odjelu pod nazivom *Matematički model toka krvi kroz arteriju*. Aktivni je član Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu na PMF-Matematičkom odjelu i suradnik na znanstvenom projektu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske pod nazivom *Matematički modeli u mehanici fluida*. Prisustvovao je na nekoliko međunarodnih konferencija *Applied Mathematics and Scientific Computing* (ApplMath) i *Multiscale Problems in Science and Technology*, na kojima je i izlagao rezultate svog istraživanja koji su obuhvaćeni ovim radom.

Oženjen je Kristinom i otac dva sina, Mateja i Marina.