Sveučilište u Zagrebu

ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI

DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE

Gordan Radobolja

PRIMJENA VERTEKS-ALGEBRI U STRUKTURNOJ TEORIJI NEKIH REPREZENTACIJA BESKONAČNO-DIMENZIONALNIH LIEJEVIH ALGEBRI VIRASOROVOG TIPA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2012

University of Zagreb

CROATIAN DOCTORAL PROGRAM IN

MATHEMATICS

Gordan Radobolja

AN APPLICATION OF VERTEX ALGEBRAS TO THE STRUCTURE THEORY OF CERTAIN REPRESENTATIONS OF INFINITE-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS OF VIRASORO TYPE

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2012

Sveučilište u Zagrebu

ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI

DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE

GORDAN RADOBOLJA

PRIMJENA VERTEKS-ALGEBRI U STRUKTURNOJ TEORIJI NEKIH REPREZENTACIJA BESKONAČNO-DIMENZIONALNIH LIEJEVIH ALGEBRI VIRASOROVOG TIPA

DOKTORSKI RAD

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dražen Adamović

Zagreb, 2012

University of Zagreb

CROATIAN DOCTORAL PROGRAM IN

MATHEMATICS

GORDAN RADOBOLJA

AN APPLICATION OF VERTEX ALGEBRAS TO THE STRUCTURE THEORY OF CERTAIN REPRESENTATIONS OF INFINITE-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS OF VIRASORO TYPE

DOCTORAL THESIS

Supervisor:

prof. dr. sc. Dražen Adamović

Zagreb, 2012

ZAHVALE

Veliko hvala mom mentoru profesoru Draženu Adamoviću na brojnim idejama i savjetima, a još više na strpljenju i razumijevanju iskazanom tokom izrade ove disertacije.

Zahvaljujem i profesorima Mirku Primcu i Saši Krešić-Juriću, članovima Seminara za algebru te kolegi Tonćiju Kokanu na korisnim primjedbama i sugestijama.

Također bih se zahvalio svima koji su me kroz školovanje učili ljepotama matematike - posebno nastavnicima Ivi Cariću i Anastaziji Pažanin te profesorici Vlasti Matijević; mojim uzorima u nastavničkom pozivu.

Na kraju, zahvala roditeljima i prijateljima koji su bili uz mene cijelo vrijeme i omogućili mi da se posvetim onome što najviše volim - matematici.

Sažetak

U ovoj disertaciji se proučava struktura jedne serije reprezentacija Virasorove Liejeve algebre s beskonačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima. Osnovni naglasak bit će dan na ispitivanje ireducibilnosti tih modula. Pokazat ćemo da se za određivanje strukture tih modula može primijeniti teorija verteks-algebri i pripadnih operatora ispreplitanja. Detaljno ćemo diskutirati minimalne modele za Virasorovu algebru i odgovarajuće operatore ispreplitanja.

Nadalje, promatrat ćemo i dvije generalizacije Virasorove Liejeve algebre: $W(2,2)$ algebru i Heisenberg-Virasorovu algebru. U tim slučajevima ćemo konstruirati nove familije modula s beskonačno-dimenzionalnim težinskim prostorima. I u ovom slučaju primijenit ćemo teoriju verteks-algebri. Također ćemo dati neke nove rezultate o strukturi Vermaovog modula i primjeniti ih u ispitivanju ireducibilnosti.

Abstract

We study the structure of certain series of weight representations over Virasoro algebra with infinite-dimensional weight spaces. Particular emphasis will be put on irreducibility of these modules. We shall demonstrate that these modules can be investigated in the framework of the theory of vertex algebras. We shall study minimal models for the Virasoro algebra and the corresponding intertwining operators.

Furthermore, we consider two algebras which generalize the Virasoro algebra: $W(2,2)$ algebra, and Heisenberg-Virasoro algebra. We construct a new series of modules with infinite-dimensional weight spaces. The application of the theory of vertex algebras will play a key role in our approach. We also give new results on Verma module structure and use these results to check irreducibility.

Sadržaj

Poglavlje 1

UVOD

U teoriji beskonačno-dimenzionalnih Liejevih algebri, uz afine Kac-Moodyjeve Liejeve algebre, istaknutu ulogu ima Virasorova Liejeva algebra Vir. Radi se o kompleksnoj algebri razapetoj s $\{C, L_n : n \in \mathbb{Z}\}$ pri čemu je C centralni element, a $[L_n, L_m] = (n - m) L_{m+n} + \delta_{m,-n} \frac{n^3-n}{12} C$. U proučavanju teorije reprezentacija Virasorove algebre, danas se većinom koristi formalizam verteks-algebri. Klasifikacija ireducibilnih reprezentacija Virasorove algebre s konačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima (Harish-Chandrini moduli) je dokazana u članku O. Mathieu [M] - svaka takva reprezentacija je reprezentacija najveće težine, reprezentacija najmanje težine ili pripada tzv. međuseriji. U posljednje vrijeme pojavilo se zanimanje za proučavanje reprezentacija s beskonačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima, zbog njihove povezanosti s teorijom verteks-algebri i pravilima fuzije u konformnoj teoriji polja.

Ireducibilne reprezentacije afinih Liejevih algebri s beskonačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima konstruirane su u članku V. Chari i A. Pressley [CP], a veza s teorijom verteks-algebri je proučavana u člancima D. Adamovića [Ad1], [Ad2] i [Ad3]. Jedna takva serija ireducibilnih reprezentacija Virasorove algebre je konstruirana u članku H. Zhanga [Zh]. Radi se o tenzorskom produktu $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ ireducibilne reprezentacije $V'_{\alpha,\beta}$ iz međuserije i ireducibilne reprezentacije $L(c,h)$ najveće težine (c,h). Cilj je ove disertacije proširiti Zhangove rezultate te primijeniti teoriju verteks-algebri i u ovom slučaju. Povezat ćemo strukturu tih reprezentacija s egzistencijom određenih operatora ispreplitanja. Poseban naglasak će biti dan na minimalne modele za Virasorovu algebru. Dokazat ćemo nove rezultate o ireducibilnosti tenzorskog produkta te diskutirati strukturu potkvocijenata.

Promatrat ćemo i dvije generalizacije Virasorove algebre - W-algebru $W(2,2)$ i Heisenberg-Virasorovu algebru $\mathcal{H}$. Cilj nam je proširiti rezultate o tenzorskom produktu međuserije i reprezentacije najveće težine na reprezentacije ovih dviju algebri. U tu svrhu ćemo dokazati nove rezultate o strukturi reprezentacija najveće težine algebre $W(2,2)$.

U prvom poglavlju ćemo dati pregled osnovnih pojmova i rezultata iz teorije reprezentacija Virasorove algebre. Nakon toga u kraćim crtama navodimo definicije i primjere verteks-algebri, operatora ispreplitanja i pravila fuzije za Virasorovu verteks-algebru. Ireducibilne reprezentacije težine 0, $L(c,0)$, imaju strukturu verteks-algebre, a važnu ulogu imaju tzv. minimalni modeli $L(c_{p,q}, h_{m,n})$ gdje je $c_{p,q} = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$ i $h_{m,n} = \frac{(np-mq)^2-(p-q)^2}{4pq}$, za $0 < m < p$ i $0 < n < q$. Naime, Virasorova verteks-algebra $L(c_{p,q}, 0)$ je racionalna, dok su $L(c_{p,q}, h_{m,n})$ sve njene ireducibilne reprezentacije. Navest ćemo i pravila fuzije, odnosno sve operatore ispreplitanja među tim reprezentacijama. Istaknut ćemo sljedeću vezu egzistencije tih operatora i reducibilnosti reprezentacija koje promatramo:

Teorem 3.7, str. 26 Neka su $L(c,h_i)$, $i = 1,2,3$, ireducibilni moduli najveće težine. Pretpostavimo da postoji netrivijalni operator ispreplitanja

tanja tipa $\binom{L(c,h_3)}{L(c,h_1)\;\; L(c,h_2)}$. Tada postoji netrivijalni homomorfizam Vir-modula $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h_2) \to L(c,h_3)$, gdje je $\alpha = h_1 + h_2 - h_3$ i $\beta = 1 - h_1$. Posebno, modul $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h_2)$ je reducibilan.

Koristeći rezultate o pravilima fuzije za minimalne modele Virasorove algebre iz [W], [FeFu], na ovaj način dobijemo konkretne primjere reducibilnih modula za minimalne modele. (teorem 3.8)

Treće poglavlje je središnji dio disertacije. Prvo ćemo generalizirati Zhangov kriterij ireducibilnosti:

Teorem 4.3, str. 32 Neka su $\alpha, \beta, c, h \in \mathbb{C}$ proizvoljni. Modul $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ je ireducibilan ako i samo ako je $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ ciklički za svaki vektor $v_m \otimes v$, $m \in \mathbb{Z}$, gdje su v_m vektori koji razapinju međuseriju $V'_{\alpha,\beta}$, a v vektor najveće težine u $L(c,h)$.

Zhang je u [Zh] dokazao ovaj teorem uz uvjet $\alpha \notin \beta\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, no time su isključeni brojni zanimljivi slučajevi vezani uz teoriju verteks-algebri i operatore ispreplitanje. Dokazat ćemo da se taj uvjet može izostaviti.

Primjenom generaliziranog Zhangovog kriterija se ispitivanje ireducibilnosti svodi na rješavanje jednadžbi

$$x(v_{n+1} \otimes v) = v_n \otimes v, \;\; x \in U(\mathrm{Vir}) \tag{1.1}$$

za sve $n \in \mathbb{Z}$. Da bi uvjet (1.1) bio ispunjen, nužna je egzistencija singularnog vektora u Vermaovom modulu $V(c,h)$. Pomoću Zhangovog kriterija i singularnih vektora, dobit ćemo neke nove serije ireducibilnih modula:

Propozicije 4.6, 4.7 i 4.8, str. 39–40

(i) Ako Vermaov modul $V(c,h)$ ima singularni vektor nivoa dva i ako vrijedi $-\alpha + \frac{4h-1 \pm \sqrt{(4h+5)^2 - 24\beta(2h+1)}}{6}$, $\alpha + 2\beta \notin \mathbb{Z}$, onda je $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ ireducibilan.

(ii) Ako Vermaov modul $V(c,h)$ ima singularni vektor nivoa tri i ako vrijedi $-\alpha+\frac{h-1\pm\sqrt{(h+3)^2-8\beta(h+1)}}{2}, -\alpha+h, \alpha+2\beta\notin\mathbb{Z}$, onda je $V'_{\alpha,\beta}\otimes L(c,h)$ ireducibilan.

(iii) Ako vrijedi $\alpha\notin\mathbb{Z}$, onda je $V'_{\alpha,\beta}\otimes L(c,0)$ ireducibilan.

Nadalje, dokazat ćemo reducibilnost i opisati strukturu modula $V'_{\alpha,\beta}\otimes L(c,0)$ u generičkom slučaju:

Teorem 4.10, str. 42 Neka je $c\neq c_{p,q}$ i $\alpha\in\mathbb{Z}$. Tada je $V=V'_{0,\beta}\otimes L(c,0)$ reducibilan i postoji netrivijalni podmodul U_+ takav da je $V/U_+\cong V(c,h)$, gdje je $h=\begin{cases}1-\beta, & \beta\neq 1,\\ 1, & \beta=1.\end{cases}$

Na ovaj način ćemo dobiti novi ireducibilni modul s beskonačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima:

Teorem 4.11, str. 43 Neka je $c\neq c_{p,q}$ i $\alpha\in\mathbb{Z}$. Tada je U_+ ireducibilni podmodul od $V'_{0,\beta}\otimes L(c,0)$. Nadalje, U_+ nije oblika $V'_{\gamma,\delta}\otimes L(c,h)$.

Posebno ćemo istaknuti tri primjera tenzorskih produkata s minimalnim modelima i potpuno opisati njihovu strukturu:

Teorem 4.21, str. 49 Neka je $L(c,h)$ minimalni model za $c=-\frac{22}{5},\frac{1}{2}$ ili $-\frac{68}{7}$ i h oblika $h_{m,n}$. Modul $V'_{\alpha,\beta}\otimes L(c,h)$ je reducibilan ako i samo ako postoji netrivijalni operator ispreplitanja tipa $\binom{L(c,h_3)}{L(c,h_1)\quad L(c,h)}$ takav da je $\alpha=h_1+h-h_3$ i $\beta=1-h_1$.

Iako se reducibilnost ovih modula da naslutiti iz samog dokaza ireducibilnosti za ostale parametre (α,β), direktni dokaz bi bio vrlo kompliciran. No rezultat slijedi primjenom teorema 3.7 i pravila fuzije navedenih u članku W. Wanga [W]. Slijedeći rezultat opisuje strukturu potkvocijenta tenzorskog produkta u nekim specijalnim slučajevima:

Teorem 4.22, str. 50 Neka je $c = -\frac{22}{5}, \frac{1}{2}$ ili $-\frac{68}{7}$. Pretpostavimo da postoji netrivijalni operator ispreplitanja tipa $\binom{L(c,h_3)}{L(c,h_1)\ \ L(c,h)}$. Ako je $\alpha = h_1 + h - h_3$ i $\beta = 1 - h_1$, onda u modulu $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ postoji ireducibilni podmodul U takav da je $\left(V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)\right)/U \cong L(c,h_3)$.

U četvrtom poglavlju ćemo promatrati W-algebru $W(2,2)$ koju ćemo kraće označavati s $\mathcal{L}$. Radi se o algebri s bazom $\{C, L_n, W_n : n \in \mathbb{Z}\}$ pri čemu C i L_n generiraju Virasorovu algebru, a W_n komutativni ideal: $[W_n, W_m] = 0$, $[L_n, W_m] = (n-m)\, W_{n+m} + \delta_{n,-m}\frac{n^3-n}{12}C$. Analogno se definiraju moduli najveće težine, dok se međuserija $V'_{\alpha,\beta,0}$ dobije iz međuserije $V'_{\alpha,\beta}$ za Virasorovu algebru, uz trivijalno djelovanje W_n, $n \in \mathbb{Z}$.

Dokazat ćemo analogni kriterij ireducibilnosti:

Teorem 5.9, str. 67 Neka su $\alpha, \beta, c, h, h_W \in \mathbb{C}$ proizvoljni. Modul $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$ je ireducibilan ako i samo ako je $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$ ciklički za svaki vektor $v_m \otimes v$, $m \in \mathbb{Z}$.

i pomoću njega dobiti serije ireducibilnih modula:

Teorem 5.11, str. 69 Pretpostavimo da u Vermaovom modulu $V(c,h,h_W)$ postoji subsingularni vektor u takav da je $\overline{u} = L_{-p}^r v$. Ako vrijedi $\alpha + 2\beta$, $\alpha + (1-p)\,\beta \notin \mathbb{Z}$ onda je $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$ ireducibilan.

Pri tome s $\overline{u}$ označavamo dio vektora u koji sadrži najmanje generatora W_{-n}.

Dat ćemo dokaz reducibilnosti tenzorskog produkta koji koristi strukturu Vermaovih modula i eksplicitne formule za singularne vektore. U nekim slučajevima ćemo diskutirati kako reducibilnost slijedi iz egzistencije operatora ispreplitanja. U tu svrhu, detaljnije ćemo opisati spomenutu strukturu za algebru $\mathcal{L}$ i navesti nekoliko primjera singularnih vektora. Pokazat ćemo da mogu nastupiti neke zanimljive situacije koje se ne javljaju kod ostalih algebri Virasorovog tipa. Naime, maksimalni podmodul može biti generiran jednim singularnim i jednim subsingularnim vektorom. Potprostor Vermaovog modula $V(c,h,h_W)$ razapet vektorima u kojima se ne pojavljuju generatori L_{-n} označit ćemo s $\mathcal{W}$).

Teorem 5.4, str. 60 Neka je $V(c,h,h_W)$ Vermaov modul takav da za neki $p \in \mathbb{N}$ vrijedi $2h_W + \frac{p^2-1}{12}c = 0$. Tada postoji singularni vektor $u' \in V(c,h,h_W)_{h+p} \cap \mathcal{W}$ takav da je $\overline{u'} = W_{-p}v$ te je $U(\mathcal{L})u' \cong V(c,h+p,h_W)$. Nadalje vrijedi:

(i) Ako je $h \neq h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-r)p}{2}$ za sve $r \in \mathbb{N}$, onda je $U(\mathcal{L})u'$ maksimalni podmodul u $V(c,h,h_W)$ i pripadni kvocijent $V(c,h,h_W)/U(\mathcal{L})u'$ je ireducibilan.

(ii) Ako je $L'(c,h,h_W) := V(c,h,h_W)/U(\mathcal{L})u'$ reducibilan, onda postoji subsingularni vektor $u \in V(c,h,h_W)$ takav da je $\overline{u} = L_{-p}^r$ za $r \in \mathbb{N}$. Tada je $U(\mathcal{L})\{u,u'\}$ maksimalni podmodul od $V(c,h,h_W)$.

Dovoljni uvjet za egzistenciju subsingularnog vektora je dan u formi slutnje te ostaje kao otvoreni problem.

Slutnja 5.5, str. 61 Pretpostavimo da je $2h_W + \frac{p^2-1}{12}c = 0$ za neki $p \in \mathbb{N}$. Tada je $L'(c,h,h_W)$ reducibilan ako i samo ako je $h = h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-r)p}{2}$.

Budući da generatori W_n djeluju trivijalno na međuseriju, za ireducibilnost tenzorskog produkta je nužna egzistencija subsingularnog vektora. Tako ćemo direktno pokazati reducibilnost u svim slučajevima koji nisu obuhvaćeni teoremom 5.11:

Teorem 5.16, str. 73 Pretpostavimo da je $V(c,h,h_W)$ reducibilan stupnja p. Ako je $h \neq h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-r)p}{2}$ za sve $r \in \mathbb{N}$, onda je modul $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$ reducibilan.

Teorem 5.17, str. 74 Neka $V(c,h,h_W)$ ima subsingularni vektor u takav da je $\overline{u} = L_{-p}^r v$ te neka vrijedi $\alpha + 2\beta \notin \mathbb{Z}$ i $\alpha + (1-p)\beta \in \mathbb{Z}$. Tada je $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$ reducibilan. Nadalje, uz uvjet $2\beta - r \notin \mathbb{N}$, vrijedi

$$(V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W))/U_{1-rp} \cong L(c, h + (r-\beta)p, h_W).$$

Posebno ističemo slučaj verteks-algebre $L(c,0,0)$:

Napomena 5.19, str. 75 $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,0,0)$ je ireducibilan ako i samo ako je $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Za $2\beta - 1 \notin \mathbb{N}$, vrijedi

$$\left(V'_{0,\beta,0} \otimes L(c,0,0)\right)/U_0 \cong L(c, 1-\beta, 0).$$

Na kraju ćemo rezultate proširiti i na zakrenutu Heisenberg-Virasorovu algebru nivoa nula. Algebra $\mathcal{H}$ je razapeta s $\{L_n, I_n, C_L, C_{LI}, C_I : n \in \mathbb{Z}\}$, pri čemu L_n i C_L razapinju Virasorovu algebru, a I_n, C_{LI} i C_I komutativni ideal: $[L_n, I_m] = -mI_{n+m} - \delta_{n,-m}(n^2+n)C_{LI}$, $[I_n, I_m] = n\delta_{n,-m}C_I$, $[\mathcal{H}, C_L] = [\mathcal{H}, C_{LI}] = [\mathcal{H}, C_I] = 0$. Promatrat ćemo reprezentacije najveće težine na kojima C_I djeluje trivijalno (nivo nula). Međuserija $V'_{\alpha,\beta,F}$ se definira kao generalizacija međuserije $V'_{\alpha,\beta}$ za Virasorovu algebru uz djelovanje $I_n v_m = F v_{m+n}$ za proizvoljni $F \in \mathbb{C}$.

Navest ćemo poznate rezultate o strukturi Vermaovog modula $V(\overline{c}, h, h_I)$, a zatim još jednom dokazati analogni kriterij ireducibilnosti:

Teorem 6.11, str. 98 Neka su $\alpha, \beta, F \in \mathbb{C}$ proizvoljni. Modul $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\overline{c}, h, h_I)$ je ireducibilan ako i samo ako je $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\overline{c}, h, h_I)$ ciklički za svaki vektor $v_m \otimes v$, $m \in \mathbb{Z}$, gdje v_m razapinju međuseriju $V'_{\alpha,\beta,F}$, a v je vektor najveće težine u ireducibilnom modulu $L(\bar{c}, h, h_I)$.

I ovdje ćemo dati rezultate o ireducibilnosti i reducibilnosti tenzorskog produkta u ovisnosti o singularnom vektoru. Izdvojit ćemo slučaj kada I_n djeluju trivijalno na međuseriju, jer su tada rezultati analogni onima za $\mathcal{L}$:

Teoremi 6.14, 6.15 i 6.16, str. 100

(i) Neka je $1 - \frac{h_I}{c_{LI}} = p \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi $\alpha + 2\beta, \alpha + (1-p)\beta \notin \mathbb{Z}$, onda je $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ ireducibilan.

(ii) Neka je $1 - \frac{h_I}{c_{LI}} = p \in \mathbb{N}$. Ako je $\alpha + (1-p)\beta \in \mathbb{Z}$, onda je $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ reducibilan i $(V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(\bar{c}, h, h_I))/U(\mathcal{H})(v_{1-p} \otimes v)$ je modul najveće težine $(\bar{c}, h + p(1-\beta), h_I)$.

(iii) Neka je $\frac{h_I}{c_{LI}} - 1 \in \mathbb{N}$. Tada je modul $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ reducibilan za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Za kraj ćemo navesti rezultat o ireducibilnosti u općem slučaju:

Teorem 6.17, str. 102 Neka je $\left|1 - \frac{h_I}{c_{LI}}\right| = p \in \mathbb{N}$. Ako je F transendentan ili algebarski stupnja većeg od p nad poljem $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, c_L, c_{LI}, h, h_I)$, onda je $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ ireducibilan.

Kao i u prethodnim poglavljima, istaknut ćemo primjer tenzorskog produkta s s verteks-algebrom $L(\bar{c}, 0, 0)$:

Primjer 6.21, str. 104 Modul $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, 0, 0)$ je ireducibilan ako i samo ako je $\alpha \notin \mathbb{Z}$. U suprotnom vrijedi

$$(V'_{0,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, 0, 0))/U_0 \cong V(\bar{c}, 1-\beta, F), \text{ za } \beta \neq 1,$$
$$(V'_{0,1,F} \otimes L(\bar{c}, 0, 0))/U_0 \cong V(\bar{c}, 1, F),$$

za svaki F.

Možemo zaključiti kako za svaku od tri promatrane algebre vrijedi poopćeni Zhangov kriterij te da su singularni vektori iz Vermaovih modula ključni za ireducibilnost tenzorskog produkta međuserije i modula najveće težine. Osim toga, tenzorski produkt međuserije i Vermaovog modula je uvijek reducibilan i sadrži beskonačan lanac podmodula, s potkvocijentima izomorfnim Vermaovim modulima jednakog centralnog naboja. No, zbog bitno različitih teorija reprezentacija najvećih težina za ove tri algebre, tenzorski produkti s ireducibilnim modulom koji nije Vermaov, daje znatno različite rezultate:

U generičkom slučaju za Vir (jedan singularni vektor) dobit ćemo samo jednu, beskonačnu familiju reducibilnih produkata - za sve (α, β) koji su korijeni određenog polinoma. Kvocijenti u ovom slučaju mogu biti cijeli Vermaovi moduli. S druge strane, vidjeli smo da postoji samo konačno mnogo reducibilnih tenzorskih produkata s odabranim minimalnim modelom i da su pripadni kvocijenti ponovo minimalni modeli.

U generičkom slučaju za algebru $\mathcal{L}$ (bez subsingularnog vektora), tenzorski produkt s $L(c, h, h_W)$ je uvijek reducibilan s beskonačnim lancem podmodula, dok jedino u posebnom slučaju (postoji subsingularni vektor) dobijemo ireducibilne tenzorske produkte. Iznimka je familija produkata s međuserijama za koje vrijedi $\alpha + (1-p)\beta \in \mathbb{Z}$. Svi potkvocijenti su ili ireducibilni ili izomorfni $L'(c, h_r, h_W)$ za neki $h_r = h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-r)p}{2}$.

Specifičnost algebre $\mathcal{H}$ je u netrivijalnom djelovanju I_n na međuseriju. U slučaju $\frac{h_I}{c_{LI}} - 1 \in \mathbb{N}$ ireducibilnost tenzorskog produkta s $L(\bar{c}, h, h_I)$ ovisi isključivo o F (i formuli za singularni vektor), dok za $1 - \frac{h_I}{c_{LI}} \in \mathbb{N}$ ireducibilnost ovisi o α, β i F. U slučaju da je tenzorski produkt reducibilan, potkvocijenti su moduli najveće težine $(\bar{c}, h', h_I + F)$ za neki h'.

Kao otvoreni problem ostaje pitanje generalizacije teorema 4.21 i 4.22 za sve minimalne modele, tj. obrata teorema 3.8. Čini se da su teorije verteks-algebri i operatora ispreplitanja izglednije dati rezultate u tom smjeru, nego li standardna teorija reprezentacija.

Također, zanimljiv je problem potpunog opisa strukture Vermaovog modula za algebru $W(2,2)$, odnosno dokaza slutnje 5.5. Posebno, time bi u potpunosti bio riješen problem reducibilnosti modula $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$. Jedna moguća metoda je izračunavanje determinante formule za modul $L'(c,h,h_W)$.

Poglavlje 2

REPREZENTACIJE VIRASOROVE ALGEBRE

U uvodnom poglavlju ćemo navesti osnovne pojmove iz teorije reprezentacija Liejevih algebri. Zatim ćemo definirati Virasorovu algebru i detaljno opisati strukturu njenih težinskih reprezentacija. Prezentirat ćemo rezultate o ireducibilnim Harish-Chandrinim modulima te navesti primjer ireducibilnog modula s beskonačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima. Na kraju ćemo opisati Vermaove module, s posebnim naglaskom na one najveće težine 0 zbog primjene u verteks-algebrama.

2.1 Težinske reprezentacije Liejevih algebri

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{C}$ i s trokutastom dekompozicijom $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$, gdje su $\mathfrak{g}_i$ Liejeve podalgebre. Za $\mathfrak{g}$-modul M kažemo da je težinski, ako se može prikazati kao suma $\mathfrak{g}_0$-svojstvenih potprostora, tj. $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}_0^*} M_\lambda$, gdje su $M_\lambda = \{v \in M : hv = \lambda(h)\, v, \forall h \in \mathfrak{g}_0\}$. Težina od M je svaki funkcional $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ takav da je $M_\lambda \neq 0$, prostor M_λ je pripadni **težinski**

potprostor, a njegovi elementi **težinski** ili **homogeni vektori**. **Nosač** modula $\operatorname{Supp} M$ je skup svih težina, a $\dim M_\lambda$ je **multiplicitet** težine λ. Težinski modul kojem su multipliciteti svih težina konačni nazivamo **Harish-Chandrin modul**.

Algebra $\mathfrak{g}$ je težinski $\mathfrak{g}$-modul uz operaciju Liejeve zagrade (adjungirana reprezentacija) i dopušta rastav $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}_0^*} \mathfrak{g}_\lambda$, pri čemu težine zovemo korijenskim težinama, a težinske prostore $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$ korijenskim potprostorima.

Za težinski vektor $0 \neq v \in M_\lambda$ kažemo da je **vektor najveće težine** λ ako vrijedi $\mathfrak{g}_+ v = 0$, odnosno **vektor najmanje težine** λ ako je $\mathfrak{g}_- v = 0$. Ciklički modul generiran vektorom najveće (najmanje) težine nazivamo **modul najveće (najmanje) težine**. Svi objekti najveće i najmanje težine su međusobno dualni pa ćemo promatrati samo module najveće težine. Svi rezultati su potpuno analogni za module najmanje težine. Moduli najveće težine su uvijek Harish-Chandrini.

Neka je $U(\mathfrak{g})$ univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$ i $\mathcal{I}$ ideal generiran skupom

$$\mathfrak{g}_+ \cup \{h - \lambda(h) \cdot \mathbf{1} : h \in \mathfrak{g}_0\}$$

za neki $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$. Tada je $V(\lambda) := U(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ modul najveće težine λ kojeg zovemo **Vermaov modul**. $V(\lambda)$ se može dobiti i kao inducirani modul. Neka je $\mathbb{C}v$ jednodimenzionalni $U(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+)$-modul, takav da je $\mathfrak{g}_+ v = 0$ i $hv = \lambda(h)$ za sve $h \in \mathfrak{g}_0$. Tada je $V(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+)} \mathbb{C}v$ i v je ciklički modul najveće težine λ. Fiksirajmo uređenu bazu (e) od $\mathfrak{g}$. Tada je definirana tzv. PBW (Poincaré - Birkhoff - Witt) baza algebre $U(\mathfrak{g})$. Budući da je $V(\lambda)$ slobodni $U(\mathfrak{g}_-)$-modul, onda je i na njemu određena standardna PBW baza.

Vermaov modul ima sljedeće univerzalno svojstvo: ako je M neki $U(\mathfrak{g})$-modul, $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ i $v \in M_\lambda$ takvi da je $\mathfrak{g}_+ v = 0$ i $V = U(\mathfrak{g})v$, onda postoji surjektivni $\mathfrak{g}$-homomorfizam $V(\lambda) \to M$. Drugim riječima, svaki modul najveće težine λ je izomorfan nekom kvocijentu Vermaovog modula $V(\lambda)$.

Svaki Vermaov modul $V(\lambda)$ sadrži jedinstveni (moguće i trivijalni) maksimalni podmodul $J(\lambda)$, a pripadni kvocijent $L(\lambda) := V(\lambda)/J(\lambda)$ je jedinstveni ireducibilni modul najveće težine λ.

Neka je $M(\lambda)$ modul najveće težine λ i $0 \neq v \in M(\lambda)_\mu$ težinski vektor. Kažemo da je v **singularni vektor** ako vrijedi $\mathfrak{g}_+ v = 0$. Za $w \in M(\lambda)$ kažemo da je **subsingularni vektor** ako postoji pravi podmodul $N \subset M(\lambda)$ takav da je $\mathfrak{g}_+(v + N) = N$. Posebno, svaki singularni vektor je i subsingularan u odnosu na trivijalni podmodul $N = 0$.

Svaki podmodul od $M(\lambda)$ je generiran s jednim ili više singularnih vektora. Obratno, svaki singularni vektor generira netrivijalni podmodul. Singularni vektor iz $V(\lambda)_\mu$ generira podmodul izomorfan s $V(\mu)$.

2.2 Virasorova algebra i njene reprezentacije

Virasorova algebra Vir je centralno proširenje Wittove algebre polinomijalnih vektorskih polja na kružnici. Vir je beskonačno dimenzionalna kompleksna Liejeva algebra s bazom $\{C, L_n : n \in \mathbb{Z}\}$ i relacijama

$$\begin{aligned}
&[L_n, L_m] = (n-m)\, L_{m+n} + \delta_{n,-m} \frac{n^3 - n}{12} C, \qquad (2.1)\\
&[C, L_n] = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Generatore Virasorove algebre možemo identificirati s elementima Wittove algebre uz projekciju $L_n \sim -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}$. Faktor $\frac{1}{12}$ je odabran jer uz takvu normalizaciju, C djeluje kao jedinični operator u najjednostavnijoj reprezentaciji algebre Vir na Heisenbergovu verteks-algebru.

Trokutasta dekompozicija je dana na prirodan način:

$$\mathrm{Vir}_+ = \bigoplus_{n>0} \mathbb{C} L_n \qquad \mathrm{Vir}_- = \bigoplus_{n>0} \mathbb{C} L_{-n} \qquad \mathrm{Vir}_0 = \mathbb{C} L_0 \oplus \mathbb{C} C$$

pri čemu je Vir_0 komutativna podalgebra. Budući da C na svaki težinski modul djeluje skalarom, težinu $\lambda \in (\mathrm{Vir}_0)^*$ ćemo poistovjetit s $\lambda(L_0) = h \in \mathbb{C}$. Tako će $M(c,h)$ označavati modul najveće težine h i centralnog naboja c.

Vermaov modul $V(c,h)$ je, dakle, $\mathbb{Z}_+$-graduiran $V(c,h) = \bigoplus_{n\geq 0} V(c,h)_{h+n}$, s PBW bazom

$$\{L_{-i_k} \cdots L_{-i_1} v : k \in \mathbb{N}, i_k \geq \cdots \geq i_1 \geq 1\} \tag{2.2}$$

gdje je v ciklički modul najveće težine. Naravno, bazu od $V(c,h)_{h+n}$ tvore oni vektori iz (2.2) za koje je $i_1 + \cdots + i_k = n$. Za $x \in V(c,h)_{h+n}$ kažemo da je vektor nivoa n.

Uz reprezentacije najveće i najmanje težine, Virasorova algebra ima još jednu seriju reprezentacija konačnih multipliciteta obično nazivanu **međuserija** (*intermediate series*). Za parametre $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ definiramo $V_{\alpha,\beta} = \bigoplus\limits_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}v_m$, uz relacije

$$L_n v_m = -\left(m + \alpha + \beta + n\beta\right) v_{m+n}, \; C v_m = 0.$$

Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi $V_{\alpha,\beta} \cong V_{\alpha+k,\beta}$ pa posebno, ako je $\alpha \in \mathbb{Z}$, možemo smatrati da je $\alpha = 0$.

Modul $V_{\alpha,\beta}$ je reducibilan ako i samo ako je $\alpha \in \mathbb{Z}$ i $\beta \in \{0,1\}$. Definiramo module $V'_{\alpha,\beta}$ na sljedeći način: $V'_{0,0} := V_{0,0}/\mathbb{C}v_0$, $V'_{0,1} := \bigoplus\limits_{m\neq -1} \mathbb{C}v_m$, a $V'_{\alpha,\beta} := V_{\alpha,\beta}$ za ostale α, β. Svi moduli $V'_{\alpha,\beta}$ su ireducibilni. (Ovi rezultati su navedeni u knjizi V. Kac i A. Raina [KR].)

Za sve α, β je $\operatorname{Supp} V_{\alpha,\beta} = \alpha + \beta + \mathbb{Z}$, dok je $\operatorname{Supp} V'_{0,0} = \operatorname{Supp} V'_{0,1} = \mathbb{Z}^*$.

2.2.1 Klasifikacija Harish-Chandrinih modula

Poznato je ([M] Theorem 1 na str. 225) da je svaki ireducibilni Vir-modul s konačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima ili modul najveće[1] težine, ili modul najmanje težine, ili modul iz međuserije. Osim toga, postoje i ireducibilni moduli s težinama beskonačnih multipliciteta.

Ireducibilne H-C module možemo klasificirati i prema nosaču (članci V. Mazorchuk [Maz], V. Mazorchuk i K. Zhao [MZ]). Za svaki ireducibilni Harish-Chandrin modul M vrijedi jedno od sljedećeg:

1. $\operatorname{Supp} M = \{0, 2, 3, 4, \ldots\}$. ($M$ je modul najveće težine 0 i netrivijalnog centralnog naboja.)
2. $\operatorname{Supp} M = \{0, -2, -3, -4, \ldots\}$. ($M$ je modul najmanje težine 0 i netrivijalnog centralnog naboja.)
3. Postoji $\lambda \in \mathbb{C}^*$ takav da je $\operatorname{Supp} M = \lambda + \mathbb{Z}_+$. ($M$ je modul najveće težine $h \neq 0$.)
4. Postoji $\lambda \in \mathbb{C}^*$ takav da je $\operatorname{Supp} M = \lambda - \mathbb{Z}_+$. ($M$ je modul najmanje težine $h \neq 0$.)
5. Postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\operatorname{Supp} M = \lambda + \mathbb{Z}$. ($M \cong V'_{\alpha,\beta}$ uz $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ili $\beta \neq 0, 1$, $\lambda = -\alpha - \beta$.)
6. $\operatorname{Supp} M = \mathbb{Z}^*$. ($M \cong V'_{0,0}$ ili $M \cong V'_{0,1}$).

[1] $\mathfrak{g}$-modul najveće težine je standardni naziv za modul generiran vektorom kojeg poništava $\mathfrak{g}_+$. U ovom slučaju se zapravo radi o modulu kojem je λ najmanja od svih težina jer je $\operatorname{Supp} V \subseteq \lambda + \mathbb{Z}_+$. Kada bismo množenje u Vir definirali s $[L_n, L_m] = (m-n) L_{n+m} + \delta_{n,-m} \frac{n^3-n}{12} C$, naziv bi odgovarao stvarnom stanju. No ostavit ćemo alternativnu definiciju koja je standardna u teoriji vertex algebri.

Mazorchuk i Zhao su također pokazali da ako ireducibilni Vir-modul V ima barem jednu težinu beskonačnog multipliciteta, onda su sve težine nužno takve. U tom je slučaju $\operatorname{Supp} V = \lambda + \mathbb{Z}$. Jedan primjer ovakvog modula, naveden u [Zh], je $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$. Djelovanje na tenzorskom produktu je dano s

$$L_n(v_k \otimes x) = (L_n v_k) \otimes x + v_k \otimes (L_n x).$$

Vidimo da je $\operatorname{Supp}\left(V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)\right) = h - \alpha - \beta + \mathbb{Z}$ te

$$\left(V'_{\alpha,\beta} \otimes L\left(c,h\right)\right)_{h-\alpha-\beta+m} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{C} v_{n-m} \otimes L\left(c,h\right)_{h+n}$$

pa je $\operatorname{Supp}\left(V'_{\alpha,\beta} \otimes L\left(c,h\right)\right) = \lambda + \mathbb{Z}$ za $\lambda = h - \alpha - \beta$. Nadalje, $V'_{\alpha,\beta} \otimes L\left(c,h\right)$ je generiran skupom $\{v_m \otimes v : m \in \mathbb{Z}\}$, gdje je v vektor najveće težine u $L(c,h)$. Iako su oba modula ireducibilna, njihov tenzorski produkt može biti reducibilan. Ispitivanjem ireducibilnosti ovakvog modula bavit ćemo se u poglavlju 4.

2.2.2 Struktura Vermaovog modula

Struktura Vermaovih modula i singularnih vektora je bitna za ostatak ove disertacije. Ovdje ćemo navesti samo osnovne rezultate bogate strukturne teorije. Ti rezultati su dobro poznati, a prvi su ih dokazali Feigin i Fuchs. Za detalje vidjeti članke [FeFu], A. Astashkievich [As] i knjigu K. Iohara, Y. Koga [IK].

Teorem 2.1 ([FeFu]) *Za svaki Vermaov modul $V(c,h)$ vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:*

1. *$V(c,h)$ je ireducibilan, tj $J(c,h) = 0$;*
2. *$V(c,h)$ je reducibilan i maksimalni podmodul $J(c,h)$ je generiran jednim singularnim vektorom;*

3. *$V(c,h)$ je reducibilan i maksimalni podmodul $J(c,h)$ je generiran dvama singularnim vektorima različitih nivoa.*

Ako je $J(c,h)$ netrivijalan, može sadržavati i beskonačno mnogo singularnih vektora. Kažemo da je $V(c,h)$ **reducibilan stupnja** n ako je n nivo najvišeg singularnog vektora u $V(c,h)$.

Za singularni vektor nivoa n znamo ([FeFu]) da je oblika

$$L_{-1}^n v + \sum_{\substack{i_k+\cdots+i_1=n\\ i_k\geq\cdots\geq i_1\geq 1\\ i_k\geq 2}} P^{(n)}_{i_1,\ldots,i_k}(h,c)L_{-i_k}\cdots L_{-i_1}v \tag{2.3}$$

pri čemu su $P^{(n)}_{i_1,\ldots,i_k}(h,c)$ polinomi u h i c. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ može postojati (do na skalarni faktor) samo jedan singularni vektor nivoa n.

Reducibilnost Vermaovog modula i položaj singularnih vektora su vidljivi iz tzv. Kacove determinantne formule:

$$\Phi_{k,l}(h,c) = \frac{(k^2-l^2)^2}{16} +$$
$$+\left(h+\frac{(k^2-1)(c-13)}{24}+\frac{(kl-1)}{2}\right)\left(h+\frac{(l^2-1)(c-13)}{24}+\frac{(kl-1)}{2}\right)$$

koja je dokazana u [KR] teorem 8.1.Naime, $V(c,h)$ ima singularni vektor na nivou n, ako i samo ako je $\Phi_{k,l}(h,c)=0$ za neke $k,l\in\mathbb{N}$ takve da je $n=kl$.

Posebno će nam biti zanimljivi moduli najveće težine 0.

Teorem 2.2 ([W], [FeFu], [FZ]) *Za svaki $c\in\mathbb{C}$ je $L_{-1}v$ singularni vektor u $V(c,0)$. Ako je c oblika $c_{p,q} = 1-6\frac{(p-q)^2}{pq}$ za neke $p,q\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $(p,q)=1$; onda je $J(c,0)$ generiran s $L_{-1}v$ i $u_{p,q}$, gdje je $u_{p,q}$ singularni vektor nivoa $(p-1)(q-1)$. Za sve ostale c, $J(c,0)$ je ciklički modul generiran s $L_{-1}v$.*

PBW baza modula $L(c,h)$ je općenito komplicirana, no u slučaju $L(c,0)$ za $c\neq c_{p,q}$ je jasno da bazu tvore vektori

$$\{L_{-i_k}\cdots L_{-i_1}v : k\in\mathbb{N}, i_k\geq\cdots\geq i_1\geq 2\}$$

tj. $L(c,0)$ je slobodni $U\left(\mathrm{Vir}_- \setminus \{L_{-1}\}\right)$-modul.

Poglavlje 3

VERTEKS-ALGEBRE I OPERATORI ISPREPLITANJA

Cilj ovog poglavlja je dati realizaciju nekih serija modula $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ preko djelovanja Virasorove verteks-algebre i pripadajućih operatora ispreplitanja. Osim same motivacije, iskoristit ćemo neke tvrdnje iz teorije operatora ispreplitanja i pravila fuzije za dokaz reducibilnosti određenih modula.

Verteks-algebru možemo shvatiti kao vektorski prostor na kojemu je definirano beskonačno mnogo produkata (indeksiranih po $\mathbb{Z}$) koji su međusobno povezani Jacobijevim identitetom. Zanimljivo je da verteks-algebre istovremeno predstavljaju generalizaciju i komutativnih, asocijativnih, ali i Liejevih algebri. Brojni su primjeri verteks-algebri, ali mi ćemo ovdje spomenuti samo one vezane uz Virasorovu algebru. Sve verteks-algebre koje ćemo promatrati su zapravo algebre verteks operatora, što znači da zadovoljavaju još nekoliko dodatnih uvjeta u odnosu na definiciju verteks-algebre.

3.1 Definicije i primjeri

Prvo navodimo definiciju algebre verteks operatora. Uvodimo oznaku $\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$ za formalnu δ-funkciju.

Definicija 3.1 ***Algebra verteks operatora (VOA)*** $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ *je* $\mathbb{Z}$*-graduirani vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{C}$

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{(n)}$$

gdje za $v \in V_{(n)}$ *kažemo da je vektor težine* n*, takav da je* $\dim V_{(n)} < \infty$ *za sve* $n \in \mathbb{Z}$ *i* $V_{(n)} = 0$ *za dovoljno mali* n*. Nadalje, definirano je linearno preslikavanje* $V \otimes V \to V[[z, z^{-1}]]$ *ili, ekvivalentno,*

$$\begin{aligned} V &\to (\operatorname{End} V)[[z, z^{-1}]] \\ v &\mapsto Y(v, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}, \text{ gdje je } v_n \in \operatorname{End} V \end{aligned}$$

$Y(v, z)$ *označava verteks operator pridružen* v*. U* V *su istaknuta dva homogena vektora:* $\mathbf{1} \in V_{(0)}$ *(vakuum vektor) i* $\omega \in V_{(2)}$ *(konformalni ili Virasorov vektor). Za* $u, v \in V$ *vrijede sljedeći uvjeti:*

$$u_n v = 0 \text{ za dovoljno veliki } n,$$

$$Y(\mathbf{1}, z) = 1 \text{ (s desne strane je jedinični operator)},$$

$$Y(v, z)\mathbf{1} \in V[[z]] \text{ i } \lim_{z\to 0} Y(v, z) = v$$

odnosno $Y(v, z)\mathbf{1}$ *nema negativnih potencija od* z*, a slobodni koeficijent je* v*, vrijedi Jacobijev identitet*

$$\begin{aligned} z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u, z_1)Y(v, z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(v, z_2)Y(u, z_1) \\ = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y\left(Y(u, z_0)\, v, z_2\right). \end{aligned}$$

Nadalje, stavimo li $\omega_{n+1} = L_n$, *odnosno* $Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ *vrijede relacije (2.1) za Virasorovu algebru, pri čemu je* $c \in \mathbb{C}$ *rank od* V*. Osim toga,* $V_{(n)}$ *su svojstveni prostori za operator* L_0*, tj.*

$$L_0 v = nv, \forall v \in V_{(n)}$$

te L_{-1} *djeluje kao derivacija, tj.*

$$\frac{d}{dz} Y(v, z) = Y(L_{-1}v, z). \tag{3.1}$$

Ovdje nećemo ulaziti u detalje o samoj definiciji, Jacobijevom identitetu i neposrednim posljedicama jer bi to zahtijevalo preopširan tekst. Pojmovi podalgebra, ideal, ideal generiran skupom, kvocijent po idealu i prosta algebra se uvode na prirodan način (za detalje vidi knjigu J. Lepowsky H. Li [LL] ili članak I. Frenkel, Y. Huang, J. Lepowsky [FHL]). Također, u daljnjem tekstu na neformalnoj razini uvodimo pojmove modula za VOA te operatora ispreplitanja.

Modul (ili reprezentacija) za algebru verteks operatora V je $\mathbb{Q}$-graduiran vektorski prostor

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Q}} M_{(n)}$$

gdje za $x \in M_{(n)}$ kažemo da je vektor težine n, takav da je $\dim M_{(n)} < \infty$, $\forall n \in \mathbb{Q}$, $M_{(n)} = 0$ za dovoljno mali n. Nadalje, postoji linearno preslikavanje $V \otimes M \to M[[z, z^{-1}]]$ ili, ekvivalentno,

$$\begin{aligned} V &\to (\operatorname{End} M)\,[[z, z^{-1}]] \\ v &\mapsto Y_M(v, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}, \text{ gdje je } v_n \in \operatorname{End} M \end{aligned}$$

tako da su "sva definicijska svojstva VOA sačuvana". Drugim riječima, vrijedi Jacobijev identitet, vakuum vektoru je pridružena identiteta, a $\omega_{n+1} =$

L_n uz standardne relacije. Posebno, M je i Vir-modul. Naravno, V je modul uz $Y_V = Y$, tzv. adjungiranu reprezentaciju.

Pojmovi poput podmodula, kvocijentnog modula, podmodula generiranog nekim skupom, ireducibilnog modula, direktnih suma i potpuno reducibilnih modula se definiraju na uobičajeni način.

Definicija 3.2 *Kažemo da je algebra verteks operatora V* ***racionalna*** *ako ima samo konačno mnogo ireducibilnih modula te je svaki konačno generirani modul direktna suma ireducibilnih.*

Neka su M_i, M_j i M_k moduli za VOA V (koji ne moraju biti međusobno različiti i mogu biti jednaki V). **Operator ispreplitanja** tipa $\binom{\;k\;}{i\;\;j}$ ili $\binom{\;M_k\;}{M_i\;\;M_j}$ je linearno preslikavanje $I : M_i \otimes M_j \to M_k\{z\}$ gdje je $M_k\{z\} = \left\{\sum_{n\in\mathbb{Q}} v_n z^n : v_n \in M_k\right\}$ ili, ekvivalentno

$$I : M_i \to (\mathrm{Hom}\,(M_j, M_k))\,\{z\}$$
$$I\,(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Q}} v_n z^{-n-1}, \text{ gdje je } v_n \in \mathrm{Hom}\,(M_j, M_k)\,,$$

takvo da su "sva definicijska svojstva VOA sačuvana". Jedna od posljedica tih svojstava (konkretno, Jacobijevog identiteta i derivacije) je slijedeća jednakost:

$$[L_m, v_n] = \sum_{i\geq 0} \binom{m+1}{i} (L_{i-1}v)_{m+n-i+1} \tag{3.2}$$

koju ćemo koristit kasnije.

Jednostavni primjeri operatora ispreplitanja su $Y(\cdot, z)$ kao operator tipa $\binom{\;V\;}{V\;\;V}$ i $Y_M(\cdot, z)$ kao operator tipa $\binom{\;M\;}{V\;\;M}$. Također, uvijek postoji i tzv. transponirani operator ispreplitanja tipa $\binom{\;M\;}{M\;\;V}$. Naime, ako je I operator tipa $\binom{\;k\;}{i\;\;j}$, onda možemo definirati I^t tipa $\binom{\;k\;}{j\;\;i}$ na slijedeći način:

$$I(v,z)w := e^{zL(-1)}I(w,-z)v, \text{ za } v \in M_j, w \in M_i.$$

Svi operatori ispreplitanja tipa $\binom{M_k}{M_i \ M_j}$ tvore vektorski prostor čiju dimenziju (koja je uvijek konačna) označavamo s $\mathcal{N}_{i\,j}^{k}$ ili $\mathcal{N}_{M_i\,M_j}^{M_k}$ i nazivamo **pravilo fuzije** pridruženo algebri V i odgovarajućim modulima.

3.2 Virasorova verteks-algebra

Kvocijentni Vir-modul $V(c,0)/U(\mathrm{Vir})L_{-1}v$ ima VOA strukturu za sve $c \in \mathbb{C}$, koju ćemo označiti s V_c . Vektor najveće težine v je vakuum vektor, a $L_{-2}v$ Virasorov vektor u verteks-algebri V_c. VOA V_c je uvijek iracionalna ([FZ]). Prema teoremu 2.2, znamo da vrijedi $V_c = L(c,0)$ za $c \neq c_{p,q}$. No, ako je $c = c_{p,q}$, onda i $L(c,0)$ ima VOA strukturu (i to je podalgebra od V_c). VOA $L(c_{p,q},0)$ je prosta i racionalna. Štoviše, poznate su ([W] teorem 4.2) sve njene ireducibilne reprezentacije - to su tzv. **minimalni modeli** $L(c_{p,q},h_{m,n})$ gdje je

$$h_{m,n} = \frac{(np-mq)^2-(p-q)^2}{4pq}, 0 < m < p, 0 < n < q. \tag{3.3}$$

Osim toga, poznata su i pravila fuzije ([W] Theorem 4.3 na str. 206).

Definicija 3.3 *Za uređenu trojku parova* $((m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_3,n_3))$ *cijelih brojeva kažemo da je dopustiva ako je* $0 < m_1, m_2, m_2 < p$, $0 < n_1, n_2, n_3 < q$, $m_1+m_2+m_3 < 2p$, $n_1+n_2+n_3 < 2q$, $m_1 < m_2+m_3$, $m_2 < m_1+m_3$, $m_3 < m_1+m_2$, $n_1 < n_2+n_3$, $n_2 < n_1+n_3$, $n_3 < n_1+n_2$ *te su sume* $m_1+m_2+m_3$ *i* $n_1+n_2+n_3$ *neparne. Identificiramo trojke* $((m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_3,n_3))$ *i* $((m_1,n_1),(p-m_2,q-n_2),(p-m_3,q-n_3))$.

Stavimo $M_1 = L(c_{p,q},h_{m_1,n_1})$, $M_2 = L(c_{p,q},h_{m_2,n_2})$ i $M_3 = L(c_{p,q},h_{m_3,n_3})$. Tada je $\mathcal{N}_{M_1\,M_2}^{M_3} = 1$ ako je $((m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_3,n_3))$ dopustiva trojka, a 0 inače.

Primjer 3.4 (Yang-Lee-jev model, $c_{2,5}=-\frac{22}{5}$) *Jedini ireducibilni moduli za algebru $L(-\frac{22}{5},0)$ su $L(-\frac{22}{5},0)$ i $L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})$, tj. za $h_{1,1}=h_{1,4}=0$ i $h_{1,2}=h_{1,3}=-\frac{1}{5}$.*

Postoje operatori ispreplitanja tipa:

$\binom{L(-\frac{22}{5},0)}{L(-\frac{22}{5},0)\ \ L(-\frac{22}{5},0)}$ *za dopustivu trojku* $((1,1),(1,1),(1,1))$,
$\binom{L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})}{L(-\frac{22}{5},0)\ \ L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})}$ *(modul $L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})$)* - $((1,1),(1,2),(1,2))$,
$\binom{L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})}{L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})\ \ L(-\frac{22}{5},0)}$ *(transponirani operator)* - $((1,2),(1,1),(1,2))$,
$\binom{L(-\frac{22}{5},0)}{L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})\ \ L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})}$ - $((1,2),(1,2),(1,1))$,
$\binom{L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})}{L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})\ \ L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})}$ - $((1,2),(1,2),(1,3))$.

Primjer 3.5 (Isingov model, $c_{3,4}=\frac{1}{2}$) *Ireducibilni moduli za algebru $L(\frac{1}{2},0)$ su $L(\frac{1}{2},0)$, $L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ i $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, jer je $h_{1,1}=h_{2,3}=0$, $h_{1,2}=h_{2,2}=\frac{1}{16}$ i $h_{1,3}=h_{2,1}=\frac{1}{2}$.*

Operatori ispreplitanja:

$\binom{L(\frac{1}{2},0)}{L(\frac{1}{2},0)\ \ L(\frac{1}{2},0)}$;
$\binom{L(\frac{1}{2},h)}{L(\frac{1}{2},0)\ \ L(\frac{1}{2},h)}$, $\binom{L(\frac{1}{2},h)}{L(\frac{1}{2},h)\ \ L(\frac{1}{2},0)}$ *i* $\binom{L(\frac{1}{2},0)}{L(\frac{1}{2},h)\ \ L(\frac{1}{2},h)}$ *za $h=\frac{1}{16}$ te za $h=\frac{1}{2}$;*
$\binom{L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}{L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\ \ L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}$, $\binom{L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}{L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\ \ L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ *i* $\binom{L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\ \ L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}$.

Primjer 3.6 ($c_{2,7}=-\frac{68}{7}$) *Ireducibilni moduli za algebru $L(-\frac{68}{7},0)$ su $L(-\frac{68}{7},0)$, $L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})$ i $L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})$.*

Operatori ispreplitanja:

$\binom{L(-\frac{68}{7},0)}{L(-\frac{68}{7},0)\ \ L(-\frac{68}{7},0)}$;
$\binom{L(-\frac{68}{7},h)}{L(-\frac{68}{7},0)\ \ L(-\frac{68}{7},h)}$, $\binom{L(-\frac{68}{7},h)}{L(-\frac{68}{7},h)\ \ L(-\frac{68}{7},0)}$, $\binom{L(-\frac{68}{7},0)}{L(-\frac{68}{7},h)\ \ L(-\frac{68}{7},h)}$ *za $h=-\frac{2}{7},-\frac{3}{7}$;*
$\binom{L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})}{L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})\ \ L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})}$, $\binom{L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})}{L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})\ \ L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})}$, $\binom{L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})}{L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})\ \ L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})}$,
$\binom{L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})}{L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})\ \ L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})}$, $\binom{L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})}{L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})\ \ L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})}$, $\binom{L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})}{L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})\ \ L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})}$,
$\binom{L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})}{L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})\ \ L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})}$.

Navedimo još i pravila fuzije za iracionalne verteks-algebre $L(c_{1,q},0)$, tj. za $(1,q)$-modele koji su se javili u proučavanju triplet verteks-algebre $W(p)$ (članci D. Adamovića [Ad4], D. Adamovića i A. Milasa [AM1], [AM2] te X. Lin [L]). Koristimo sljedeće oznake

$$h_{m,n} = \frac{(n-mq)^2-(1-q)^2}{4q},$$
$$A_{i,j} = \{i+j-1, i+j-3, \ldots, |i-j|+1\}.$$

Vir-modul $V(c_{1,q},h)$ je reducibilan ako i samo ako je $h = h_{m,n}$ za neke $m>0$, $0 \le n \le q$. U tom slučaju je maksimalni podmodul $J(c_{1,q},h_{m,n}) \cong V(c_{1,q}, \frac{(n+mq)^2-(1-q)^2}{4q})$.

Stavimo $M_1 = L(c_{1,q},h_{m_1,n_1})$, $M_2 = L(c_{1,q},h_{m_2,n_2})$ i $M_3 = L(c_{1,q},h_{m_3,n_3})$. Tada je $\mathcal{N}_{M_1\ M_2}^{M_3} = 1$ ako je $m_3 \in A_{m_1,m_2}$ i $n_3 \in A_{n_1,n_2}$, a 0 inače.

Na primjer, $c_{1,1}=1$ i $h_{m,1} = \frac{(m-1)^2}{4}$, za $m>0$, a operator ispreplitanja tipa $\binom{L(1,\frac{m_3^2}{4})}{L(1,\frac{m_1^2}{4})\ \ L(1,\frac{m_2^2}{4})}$ postoji ako i samo ako je $m_3 \in \{m_1+m_2, m_1+m_2-2, \ldots, |m_1-m_2|\}$.

Neka je $c = c_{p,q}$ i neka su h_1, h_2 i h_3 oblika (3.3). Pretpostavimo da postoji netrivijalni operator ispreplitanja tipa $\binom{L(c,h_3)}{L(c,h_1)\ \ L(c,h_2)}$. Tada je za svaki $x \in L(c,h_1)$

$$I(x,z) = z^{-\alpha}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{(n)}z^{-n-1},\ x_{(n)} \in \mathrm{Hom}\left(L\left(c,h_2\right), L\left(c,h_3\right)\right),$$

gdje je $\alpha = h_1+h_2-h_3$. Posebno, ako je $x=v$ vektor najveće težine u $L(c,h_1)$, onda iz (3.2) i (3.1) slijedi

$$\begin{aligned}\left[L_m, v_{(n)}\right] &= \sum_{i\ge 0}\binom{m+1}{i}\left(L_{i-1}v\right)_{(m+n-i+1)} = \\ &= \left(L_{-1}v\right)_{(m+n+1)} + (m+1)\left(L_0 v\right)_{(m+n)} = \\ &= -\left(\alpha+n+m+1\right)v_{(m+n)} + (m+1)\,h_1 v_{(m+n)} = \\ &= -\left(n+\alpha+(1-h_1)(1+m)\right)v_{(m+n)}\end{aligned}$$

pa komponente operatora $I(v,z)$ razapinju $V'_{\alpha,\beta}$ pri čemu je $\alpha = h_1 + h_2 - h_3$, a $\beta = 1 - h_1$.

Ovim je definiran netrivijalni Vir-homomorfizam

$$\Psi : V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h_2) \to L(c,h_3), \qquad \Psi(v_n \otimes v) = v_{(n)}v.$$

gdje je v vektor najveće težine u $L(c,h_2)$. Budući da Ψ preslikava modul s beskonačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima u Harish-Chandrin modul $L(c,h_3)$, zaključujemo da je $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h_2)$ reducibilan s kvocijentom izomorfnim $L(c,h_3)$. Na ovaj način smo dokazali

Teorem 3.7 *Pretpostavimo da postoji netrivijalni operator ispreplitanja tipa* $\binom{L(c,h_3)}{L(c,h_1)\ L(c,h_2)}$. *Tada postoji netrivijalni homomorfizam* Vir*-modula* $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h_2) \to L(c,h_3)$ *uz* $\alpha = h_1 + h_2 - h_3$ *i* $\beta = 1 - h_1$. *Posebno, modul* $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h_2)$ *je reducibilan.*

Dakle, iz teorema 3.7 i Wangovih pravila fuzije slijedi ovaj važni rezultat:

Teorem 3.8 *Neka je* $c = c_{p,q}$ *te* h_{m_1,n_1}, h_{m_2,n_2}, h_{m_3,n_3} *kao u (3.3) i*

$$\alpha = h_{m_1,n_1} + h_{m_2,n_2} - h_{m_3,n_3},$$
$$\beta = 1 - h_{m_1,n_1}.$$

Ako je $((m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_3,n_3))$ *dopustiva trojka, onda je modul* $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c_{p,q}, h_{m_2,n_2})$ *reducibilan.*

Napomena 3.9 *Iako je dokaz teorema 3.8 lagan, rezultat o reducibilnosti je nov i nije diskutiran u [Zh].*

Korolar 3.10 *Postoje netrivijalni* Vir*-homomorfizmi:*
$\left(V'_{0,\frac{6}{5}} \otimes L(-\frac{22}{5},0)\right) \to L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})$,

$$
\begin{aligned}
&\Big(V'_{-\frac{2}{5},\frac{6}{5}} \otimes L(-\tfrac{22}{5},-\tfrac{1}{5})\Big) \to L(-\tfrac{22}{5},0),\ \Big(V'_{-\frac{1}{5},\frac{6}{5}} \otimes L(-\tfrac{22}{5},-\tfrac{1}{5})\Big) \to L(-\tfrac{22}{5},-\tfrac{1}{5}),\\
&\Big(V'_{0,\frac{1}{2}} \otimes L(\tfrac{1}{2},0)\Big) \to L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\ \Big(V'_{0,\frac{15}{16}} \otimes L(\tfrac{1}{2},0)\Big) \to L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16}),\\
&\Big(V'_{0,\frac{1}{2}} \otimes L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\Big) \to L(\tfrac{1}{2},0),\ \Big(V'_{\frac{1}{2}.\frac{15}{16}} \otimes L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\Big) \to L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16}),\\
&\Big(V'_{\frac{1}{8},\frac{15}{16}} \otimes L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16})\Big) \to L(\tfrac{1}{2},0),\ \Big(V'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \otimes L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16})\Big) \to L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16}),\\
&\Big(V'_{-\frac{3}{8},\frac{15}{16}} \otimes L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16})\Big) \to L(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\\
&\Big(V'_{0,\frac{9}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},0)\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{2}{7}),\ \Big(V'_{0,\frac{10}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},0)\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{3}{7}),\\
&\Big(V'_{-\frac{4}{7},\frac{9}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{2}{7})\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},0),\ \Big(V'_{-\frac{3}{7},\frac{10}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{2}{7})\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{2}{7}),\\
&\Big(V'_{-\frac{1}{7},\frac{9}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{2}{7})\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{3}{7}),\ \Big(V'_{-\frac{2}{7},\frac{10}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{2}{7})\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{3}{7}),\\
&\Big(V'_{-\frac{6}{7},\frac{10}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{3}{7})\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},0),\ \Big(V'_{-\frac{3}{7},\frac{10}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{3}{7})\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{3}{7}),\\
&\Big(V'_{-\frac{2}{7},\frac{9}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{3}{7})\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{3}{7}),\ \Big(V'_{-\frac{3}{7},\frac{9}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{3}{7})\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{2}{7}),\\
&\Big(V'_{-\frac{4}{7},\frac{10}{7}} \otimes L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{3}{7})\Big) \to L(-\tfrac{68}{7},-\tfrac{2}{7}).
\end{aligned}
$$

Iako je teoremom 3.8 dokazana reducibilnost, generalno je teško odrediti je li potkvocijent upravo minimalni model $L(c_{p,q}, h_{m_3,n_3})$. Iz tog razloga promatramo konkretne primjere $c_{2,5} = -\frac{22}{5}$, $c_{3,4} = \frac{1}{2}$ i $c_{2,7} = -\frac{68}{7}$. Strukturu potkvocijenta ćemo opisati direktnim računom (teorem 4.22).

3.2.1 Fermionska konstrukcija za $c = \frac{1}{2}$

U članku A. Fiengold, J. Ries, M. Weiner [FRW] je pokazano da ireducibilni moduli za $L(\frac{1}{2}, 0)$ dopuštaju i tzv. fermionsku konstrukciju preko Cliffordove algebre. Ovdje ukratko navodimo tu konstrukciju. Neka je $Z = \mathbb{Z}$ ili $Z = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Označimo s $E(Z)$ kompleksni vektorski prostor s bazom $\{e(m) : m \in Z\}$ i simetričnom formom

$$\langle e(m), e(n)\rangle = 2\delta_{m,-n}.$$

Neka je $\mathrm{Cliff}(Z)$ Cliffordova algebra generirana s $E(Z)$ i formom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i $E(Z) = E(Z)^+ \oplus E(Z)^-$ polarizacija, tj. $E(Z)^+ = \mathrm{span}\{e(m) : 0 < m \in Z\}$ i $E(Z)^- = \mathrm{span}\{e(m) : 0 \geq m \in Z\}$. Definiramo lijevi ideal $\mathcal{J}(Z)$ u $\mathrm{Cliff}(Z)$

generiran s $E(Z)^+$. Tada je

$$\mathrm{CM}(Z) = \mathrm{Cliff}(Z)/\mathcal{J}(Z)$$

lijevi Cliff(Z)-modul koji možemo rastaviti po parnosti:

$$\mathrm{CM}(Z) = \mathrm{CM}(Z)^0 \oplus \mathrm{CM}(Z)^1 \tag{3.4}$$

pri čemu je $\mathrm{CM}(Z)^i$ potprostor s bazom

$$\{e(-m_r)\cdots e(-m_1)\mathbf{vac}(Z) : m_r > \cdots > m_1 \geq 0, m_j \in Z, r \equiv i \bmod 2\},$$

a $\mathbf{vac}(Z) = 1 + \mathcal{J}(Z)$. Možemo definirati vakuum prostor

$$\mathbf{VAC}(Z) = \{x \in \mathrm{CM}(Z) : E(Z)^+ x = 0\}.$$

Tada je

$$\mathbf{VAC}\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right) = \mathrm{span}\left\{\mathbf{vac} : = \mathbf{vac}\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)\right\}$$
$$\mathbf{VAC}\left(\mathbb{Z}\right) = \mathrm{span}\left\{\mathbf{vac}' : = \mathbf{vac}\left(\mathbb{Z}\right), e(0)\mathbf{vac}'\right\}.$$

Definirajmo sada Vir-operatore

$$L_k = -\frac{1}{4}\sum_{n\in Z}\left(n + \frac{1}{2}\right) : e(n)e(k-n) : + \delta_{k,0}\frac{1+\iota}{32}$$
$$\iota = 1 \text{ za } Z = \mathbb{Z}, \text{ a } \iota = -1 \text{ za } Z = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$$

Vrijedi

$$[L_k, L_n] = (k-n)L_{k+n} + \frac{k^3 - k}{24}\delta_{k,-n}1,$$
$$[L_k, e(m)] = -\left(m + \frac{1}{2}k\right)e(m+k).$$

Dakle, operatori L_k i jedinični operator reprezentiraju Virasorovu algebru centralnog naboja $c = \frac{1}{2}$, a $\{e(m) : m \in Z\}$ razapinju međuseriju i to $V'_{0,\frac{1}{2}}$ za

$Z = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ i $V'_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \cong V'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ za $Z = \mathbb{Z}$. Nadalje, rastav (3.4) je rastav na dva ireducibilna Vir-modula i to

$$CM\left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right) = L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$
$$CM(\mathbb{Z}) = L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right) \oplus L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right).$$

Naime, **vac**, $e(-\frac{1}{2})\mathbf{vac}$, $\mathbf{vac}'$ i $e(0)\mathbf{vac}'$ su vektori najveće težine 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$ i $\frac{1}{16}$ respektivno.

U [FRW] je proširena ova konstrukcija i pokazana egzistencija operatora $\binom{L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad L(\frac{1}{2},0)}$, $\binom{L(\frac{1}{2},0)}{L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ i $\binom{L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}{L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}$. Naime, vektoru $e(-\frac{1}{2})\mathbf{vac}$, koji generira Vir-modul $L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, je pridružen verteks-operator

$$e(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n + \frac{1}{2}) z^{-n-1}$$

čije komponente razapinju međuseriju $V'_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ pa na taj način dobijemo netrivijalne operatore ispreplitanja i, kao posljedicu, homomorfizme Vir-modula

$$\left(V'_{0,\frac{1}{2}} \otimes L\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) \to L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$
$$\left(V'_{0,\frac{1}{2}} \otimes L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \to L\left(\frac{1}{2}, 0\right),$$
$$\left(V'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \otimes L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)\right) \to L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right),$$

Poglavlje 4

IREDUCIBILNOST MODULA $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$

U prvom dijelu poglavlja ćemo navesti Zhangov kriterij ireducibilnosti modula $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ te dokazati njegovu generalizaciju za proizvoljne α, β. Naglasit ćemo ulogu singularnog vektora u ispitivanju ireducibilnosti i dobiti neke serije ireducibilnih modula primjenom tog kriterija. Zatim ćemo ispitivati strukturu tenzorskog produkta $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ u slučaju $h = 0$ i $c \neq c_{p,q}$. Opisat ćemo ireducibilne potkvocijente te dokazati da postoji ireducibilni podmodul s beskonačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima. Kvocijent po tom modulu je Vermaov modul.

Posebnu pozornost ćemo posvetiti tzv. minimalnim modelima te na primjerima $c = -\frac{22}{5}$, $c = \frac{1}{2}$ i $c = -\frac{68}{7}$ pokazati da su tenzorski produkti s takvim modulima reducibilni samo za konačno mnogo parova (α, β) i zaključiti da se radi upravo o onim modulima koje dobijemo promatrajući pravila fuzije za VOA. Pripadni kvocijenti će u ovim slučajevima biti ireducibilni moduli najveće težine.

4.1 Zhangov kriterij

U daljnjem tekstu ćemo s v označavati vektor najveće težine u odgovarajućem modulu najveće težine.

Zbog potpunosti i kasnijih generalizacija navodimo dokaz sljedećeg Zhangovog teorema:

Teorem 4.1 ([Zh] Theorem 3 na str. 5) *$V'_{\alpha,\beta} \otimes V(c,h)$ je reducibilan za sve $\alpha, \beta, c, h \in \mathbb{C}$. Ciklički podmodul generiran s $v_n \otimes v$ je pravi za svaki $n \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $V'_{\alpha,\beta} \otimes V(c,h) = U(\mathrm{Vir})(v_n \otimes v)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Posebno, postoji $x \in U(\mathrm{Vir}_-)U(\mathrm{Vir}_+)$ takav da je

$$x(v_n \otimes v) = v_{n-1} \otimes v.$$

U PBW bazi je $x = \sum L_{-r}^{k_r} \cdots L_{-1}^{k_1} x_{k_1 \cdots k_r}$, pri čemu su $k_i \in \mathbb{N}$, a $x_{k_1 \cdots k_r} \in U(\mathrm{Vir}_+)$ homogeni elementi. Budući da $U(\mathrm{Vir}_+)$ djeluje trivijalno na v, bez gubitka općenitosti možemo pisati

$$x(v_n \otimes v) = \sum_{i=0}^{k} x_{i+1}(v_{n+i} \otimes v) = v_{n-1} \otimes v$$

za neki $k \in \mathbb{N}$ i neke homogene $x_i \in U(\mathrm{Vir}_-)_{-i}$. Primjetimo da je $v_{n+k} \otimes x_{k+1} v$ jedini element u gornjoj sumi koji sadrži v_{n+k} pa on mora isčeznuti. Dakle, mora vrijediti $x_{k+1} v = 0$ za neki $x_{k+1} \in U(\mathrm{Vir}_-)$ što je kontradikcija, jer je $V(c,h)$ slobodni $U(\mathrm{Vir}_-)$-modul. ■

Iz prethodnog teorema slijedi da $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ ne mora biti ireducibilan (npr. kada je $L(c,h) = V(c,h)$). U [Zh] je dokazan sljedeći kriterij ireducibilnosti:

Teorem 4.2 ([Zh] Theorem 4 na str. 6) *Ako je $\alpha \notin \beta\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, onda je $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ ireducibilan ako i samo ako je $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ ciklički za svaki vektor $v_m \otimes v$, $m \in \mathbb{Z}$, gdje je v vektor najveće težine u $L(c,h)$.*

Proširit ćemo Zhangov dokaz na posebne slučajeve koje on nije pokrio i tako pokazati da kriterij vrijedi u punoj općenitosti.

Teorem 4.3 *Neka su* $\alpha, \beta, c, h \in \mathbb{C}$ *proizvoljni.* $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ *je ireducibilan ako i samo ako je* $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ *ciklički za svaki vektor* $v_m \otimes v$, $m \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Pratit ćemo originalni, Zhangov, dokaz te dodatno ispitati nove 'problematične' situacije.

Neka je $V := V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ ciklički za svaki vektor $v_m \otimes v$. Neka je U netrivijalni podmodul od V i $x \in U$ vektor težine $n - m$

$$x = v_{m-n} \otimes x_0 + v_{m-n+1} \otimes x_1 + \cdots + v_m \otimes x_n$$

pri čemu je

$$x_j \in V(c,h)_{h+j}, j = 0, 1, \ldots, n \text{ i } x_n \neq 0.$$

Indukcijom po n pokazujemo da postoji $v_k \otimes v \in U$ iz čega slijedi $U = V$, tj V ireducibilan. Ako je $n = 0$, $x = v_m \otimes x_0$ je (do na skalar) traženi vektor.

Neka je onda $n > 0$. Budući da L_1 i L_2 generiraju Vir_+ i da je $L(c,h)$ ireducibilan, znamo da postoji $i \in \{1, 2\}$, takav da je $L_i x_n \neq 0$. Promotrimo prvo slučaj $\beta \neq 0$.

$\boxed{\beta \neq 0,\ L_i v_m \neq 0}$ Ako je $L_i v_m \neq 0$, tj. $m + \alpha + \beta + i\beta \neq 0$ odaberimo $l \in \mathbb{Z}$ takav da je $m + i + \alpha + \beta + (l - i)\beta \neq 0$ i definirajmo

$$w = L_l + \frac{m + \alpha + \beta + l\beta}{(m + \alpha + \beta + i\beta)(m + i + \alpha + \beta + (l - i)\beta)} L_{l-i} L_i.$$

Lako se vidi da je $w v_m = 0$. Za $l > n + i$ je $L_l x_j = L_{l-i} x_j = 0$, $\forall j = 0, 1, \ldots, n$. Tada je

$$wx = v_{s-t} \otimes y_0 + v_{s-t+1} \otimes y_1 + \cdots + v_s \otimes y_t, \tag{4.1}$$

gdje je $y_j \in V(c,h)_{h+j}$ i $t < n$. Dakle, ako je $wx \neq 0$, po pretpostavci indukcije postoji $v_k \otimes v \in U$. Preostaje pronaći dovoljno veliki $l \in \mathbb{Z}$ takav da je $wx \neq 0$. Možemo pisati $x = \sum_{j=0}^{n} v_{m-n+j} \otimes x_j$ pa je

$$wx = \sum_{j=0}^{n} L_l v_{m+j-n} \otimes x_j + \lambda \sum_{j=0}^{n} \left(L_{l-i} L_i v_{m+j-n} \otimes x_j + L_{l-i} v_{m+j-n} \otimes L_i x_j \right)$$

gdje je $\lambda = \frac{m+\alpha+\beta+l\beta}{(m+\alpha+\beta+i\beta)(m+i+\alpha+\beta+(l-i)\beta)}$. Komponenta vektora wx u $\mathbb{C}v_{m+l-i} \otimes L(c,h)_{h+n-i}$ je

$$X_l^i = L_l v_{m-i} \otimes x_{n-i} + \lambda L_{l-i} L_i v_{m-i} \otimes x_{n-i} + \lambda L_{l-i} v_m \otimes L_i x_n$$

Ukoliko su x_{n-i} i $L_i x_n$ linearno nezavisni ili je pak $x_{n-i} = 0$, slijedi $X_l^i \neq 0$ pa je i $wx \neq 0$. (Ako je $\alpha = 0$, $\beta = 1$ i $m - i = -1$ slijedi $X_l^i = \lambda L_{l-i} v_m \otimes L_i x_n \neq 0$)

Pretpostavimo da je $0 \neq k x_{n-i} = L_i x_n$ za neki $k \in \mathbb{C}^*$. Ako je $X_l^i = 0$ za sve $l > n - i$, slijedi

$$\begin{aligned} &(m - i + \alpha + \beta + l\beta)(m + \alpha + \beta + i\beta)(m + i + \alpha + \beta + (l-i)\beta) \\ &+ k(m + \alpha + \beta + l\beta)(m + \alpha + \beta + (l-i)\beta) + \\ &- (m + \alpha + \beta + l\beta)(m - i + \alpha + \beta + i\beta)(m + \alpha + \beta + (l-i)\beta) = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Prema tome, gornja relacija vrijedi za sve $l \in \mathbb{C}$ pa posebno i za $l = -\beta^{-1}(m + \alpha + \beta)$ iz čega slijedi

$$i^2 (m + \alpha + \beta + i\beta)(1 - \beta) = 0.$$

No, $i \neq 0$, $m + \alpha + \beta + i\beta \neq 0$ pa mora biti $\beta = 1$. Sada iz (4.2) slijedi[1] $k = -i$. Imamo dva slučaja:

[1] U originalnom dokazu autor na ovom mjestu pogrešno zaključuje da slijedi $k = i = m + \alpha + 1$. Stoga ovdje navodimo puni dokaz ovog slučaja.

$\boxed{i = 1 = \beta}$ Definiramo $w_1 = L_l + \frac{1}{m+\alpha+l-1} L_2 L_{l-2}$ za $l > n+2$. Lako se vidi da je $w_1 v_m = 0$ pa je $w_1 x$ oblika (4.1). Dakle, treba još pokazati da nije nula.

$$
\begin{aligned}
w_1 x = &- \sum_{j=0}^{n} (m - j + \alpha + 1 + l)\, v_{m-j+l} \otimes x_{n-j} + \\
&+ \sum_{j=0}^{n} \frac{(m - j + \alpha + l - 1)(m - j + l + \alpha + 1)}{m + \alpha + l - 1} v_{m-j+l} \otimes x_{n-j} + \\
&- \sum_{j=0}^{n-2} \frac{m - j + \alpha + l - 1}{m + \alpha + l - 1} v_{m-j+l-2} \otimes L_2 x_{n-j}.
\end{aligned}
$$

Komponenta uz $\mathbb{C} v_{m+l-1} \otimes L(c,h)_{h+n-1}$ je

$$
\left((m + \alpha + l) - \frac{(m + \alpha + l - 2)(m + \alpha + l)}{m + \alpha + l - 1} \right) v_{m+l-1} \otimes x_{n-1},
$$

a kako je $x_{n-1} = -L_1 x_n \neq 0$, to je $w_1 x \neq 0$.

$\boxed{i = 2 = 2\beta}$ Definiramo

$$
w_2 = L_l + \frac{1}{m + \alpha + l} L_1 L_{l-1}
$$

za $l > n+1$. Očito je $w_2 v_m = 0$ pa je i $w_2 x$ oblika (4.1). Preostaje pokazati da je različit od nula.

$$
\begin{aligned}
w_2 x = &- \sum_{j=0}^{n} (m - j + \alpha + 1 + l)\, v_{m+l-j} \otimes x_{n-j} + \\
&+ \sum_{j=0}^{n} \frac{(m - j + \alpha + l)(m + l - j + \alpha + 1)}{m + \alpha + l} v_{m+l-j} \otimes x_{n-j} + \\
&- \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m - j + \alpha + l}{m + \alpha + l} v_{m+l-j-1} \otimes L_1 x_{n-j}.
\end{aligned}
$$

Komponenta uz $\mathbb{C} v_{m+l-2} \otimes L(c,h)_{h+n-2}$ je

$$
\left((m + \alpha + l - 1) - \frac{(m + \alpha + l - 2)(m + \alpha + l - 1)}{m + \alpha + l} \right) v_{m+l-2} \otimes x_{n-2}
$$

pa kako je $2x_{n-2} = -L_2 x_n \neq 0$, slijedi $w_2 x \neq 0$.

$\boxed{\beta \neq 0,\ L_i v_m = 0}$ Promotrimo što se događa kada vrijedi $m+\alpha+\beta+i\beta = 0$. (Zhang nije promatrao ovakvu mogućnost.)

$$L_i x = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\, v_{m-n+j+i} \otimes x_j + \sum_{j=i}^{n} v_{m-n+j} \otimes L_i x_j = \tag{4.3}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\, v_{m-n+j+i} \otimes x_j + \sum_{j=0}^{n-i} v_{m-n+j+i} \otimes L_i x_{j+i}$$

Ukoliko je $L_i x \neq 0$, kao i prije slijedi da postoji $v_k \otimes v \in U$. Pretpostavimo da je $L_i x = 0$.

$\boxed{i = 1}$ odnosno $m + \alpha + 2\beta = 0$. Kako je $L_1 x = 0$, iz (4.3) slijedi

$$L_1 x = \sum_{j=0}^{n-1} v_{m-n+j+1} \otimes ((n-j)\, x_j + L_1 x_{j+1})$$

pa opet vrijedi $L_1 x_n = -x_{n-1}$. Definiramo

$$w'_1 = L_l + \frac{l-1}{(l+\beta-2)\,(l-3)} L_2 L_{l-2}$$

za $l > n+2$. Očito je $w'_1 v_m = 0$ pa je i $w'_1 x$ oblika (4.1). Dakle, preostaje dokazati da je $w'_1 x \neq 0$ za dovoljno veliki l. Pretpostavimo suprotno. Stavimo li

$$x = \sum_{j=0}^{n} v_{m-j} \otimes x_{n-j}, \mu = \frac{l-1}{(l+\beta-2)\,(l-3)}$$

slijedi

$$w'_1 x = -\sum_{j=0}^{n} ((l-1)\,\beta - j)\, v_{m-j+l} \otimes x_{n-j} +$$
$$+ \mu \sum_{j=0}^{n} ((l-3)\,\beta - j)\,(l-2+\beta-j)\, v_{m-j+l} \otimes x_{n-j} +$$
$$- \mu \sum_{j=0}^{n-2} ((l-3)\,\beta - j)\, v_{m-j+l-2} \otimes L_2 x_{n-j}$$

Budući da je $L_1x_n=-x_{n-1}\neq 0$, promatrajući komponentu iz $\mathbb{C}v_{m+l-1}\otimes L(c,h)_{h+n-1}$ dobijemo da za svaki l vrijedi

$$((l-1)\beta-1)(l+\beta-2)(l-3)=(l-1)((l-3)\beta-1)(l-3+\beta)$$

što nije moguće pa je $w'_1x\neq 0$.

$\boxed{i=2}$ odnosno $m+\alpha+3\beta=0$. Tada je

$$L_2x=\sum_{j=0}^{n-2}v_{m-n+j+1}\otimes((n-j)x_j+L_2x_{j+2})+v_{m+1}\otimes x_{n-1}$$

pa je $L_2x_n=-2x_{n-2}$. Definiramo

$$w'_2=L_l+\frac{l-2}{(l-3)(l-1-\beta)}L_1L_{l-1}$$

za $l>n+1$. Opet je $w'_2v_m=0$ pa je w'_2x oblika (4.1). Preostaje pokazati $w'_2x\neq 0$. Pretpostavimo suprotno, da je $w'_2x=0$ za svaki $l>n$.

$$\begin{aligned}w'_2x=&-\sum_{j=0}^{n}((l-2)\beta-j)\,v_{m+l-j}\otimes x_{n-j}+\\&+\sum_{j=0}^{n}\frac{(l-2)((l-3)\beta-j)(l-1-j+\beta)}{(l-3)(l-1-\beta)}v_{m+l-j}\otimes x_{n-j}+\\&-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(l-2)((l-3)\beta-j)}{(l-3)(l-1-\beta)}v_{m+l-1-2j}\otimes L_1x_{n-j}\end{aligned}$$

Znamo da je $L_2x_n=-2x_{n-2}\neq 0$. Komponenta vektora $w'x$ iz $\mathbb{C}v_{m+l+2}\otimes L(c,h)_{h+n-2}$ je

$$\left(((l-2)\beta-2)-\frac{(l-2)((l-3)\beta-2)(l-3+\beta)}{(l-3)(l-1-\beta)}\right)v_{m+l+2}\otimes L_2x_n$$

pa slijedi da je za dovoljno velike l

$$\begin{aligned}&((l-2)\beta-2)(l-3)(l-1-\beta)=\\&=(l-2)((l-3)\beta-2)(l-3-\beta)\,.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Lako se vidi da relacija (4.4) ne može vrijediti za sve $l \in \mathbb{C}$ pa je $w'_2 x \neq 0$.

Neka je sada $\beta = 0$.

$\boxed{\beta = 0,\ m+i+\alpha \neq 0}$ Definiramo

$$w'' = L_{2l} - \frac{1}{(m+i+\alpha)(m+l+\alpha)} L_l L_{l-i} L_i$$

za $l > n+2$. Vrijedi $w'' v_m = 0$ pa treba pokazati da je $w'' x \neq 0$. Komponenta u $\mathbb{C}v_{m+2l-i} \otimes L(c,h)_{h+n-i}$ je

$$w'' v_{m-i} \otimes x_{n-i} - \lambda' L_l L_{l-i} v_m \otimes L_i x_n,$$

gdje je $\lambda' = \frac{1}{(m+i+\alpha)(m+l+\alpha)}$. Analogno kao prije možemo pretpostaviti da je $L_i x_n = k' x_{n-i} \neq 0$ za neki $k \in \mathbb{C}^*$. Ako je $w'' x = 0$ za sve $l > n+2$, onda gledajući koeficijent u $\mathbb{C}v_{m+2l-i} \otimes L(c,h)_{h+n-i}$ dobijemo

$$\frac{(m-i+\alpha)(m+\alpha)(m+l-i+\alpha)}{(m+l+\alpha)(m+\alpha+i)} - k' \frac{(m+\alpha)(m+l-i+\alpha)}{(m+\alpha+i)(m+\alpha+l)} + \\ -(m-i+\alpha) = 0$$

tj.

$$\begin{aligned} 0 = {} & (m-i+\alpha)(m+l+\alpha)(m+\alpha+i) - \\ & -(m-i+\alpha)(m+\alpha)(m+l-i+\alpha) + k'(m+\alpha)(m+l-i+\alpha). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Gornja relacija vrijedi za sve $l \in \mathbb{C}$ pa posebno i za $l = i - m - \alpha$ iz čega dobijemo

$$i(m-i+\alpha)(m+\alpha+i) = 0$$

što je nemoguće ako je $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Stoga možemo pretpostaviti da je $\alpha = 0$ i $m = i$. No tada iz (4.5) slijedi $k'ml = 0$, za sve l tj. $m = 0$ što je nemoguće u $V'_{0,0}$.

$\boxed{\beta = 0,\ m+i+\alpha = 0}$ Budući da je $\alpha \in \mathbb{Z}$ možemo smatrati da je $\alpha = 0$. Dakle $m = -i$. Promotrimo $L_i x$. S obzirom da u $V'_{0,0}$ ne postoji v_0, imamo

$$L_i \sum_{j=0}^{n} v_{-i-n+j} \otimes x_j = -\sum_{j=0}^{n-1} (-i-n+j)\, v_{j-n} \otimes x_j + \sum_{j=0}^{n} v_{-i-n+j} \otimes L_i x_j$$

Ako je $L_i x \neq 0$ dokaz je gotov. Inače postupamo slično kao i prije:

$\boxed{i = 1}$ tj $m = -1$. Iz uvjeta $L_1 x = 0$ $L_1 x_n = -x_{n-1} \neq 0$. Za dovoljno veliki l je $\left(L_l + \frac{1}{l-3} L_2 L_{l-2}\right) x \neq 0$ i nema komponentu $v_{m-l} \otimes x_n$.

$\boxed{i = 2}$ tj $m = -2$. Iz $L_2 x = 0$ slijedi $L_2 x_n - 2x_{n-2} \neq 0$. Za dovoljno veliki l je $\left(L_l + \frac{1}{l-3} L_1 L_{l-1}\right) x \neq 0$ i nema komponentu $v_{m-l} \otimes x_n$.

Time je dokaz dovršen. ■

Uvodimo oznaku $U_n := U(\mathrm{Vir})(v_n \otimes v)$. Za ireducibilnost je dovoljno pokazati da je $U_n = U_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$.

Iz dokaza teorema 4.3 posebno slijedi

Korolar 4.4 *Neka je M netrivijalni podmodul od $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$. Tada M sadrži U_n za neki $n \in \mathbb{Z}$.*

U praksi, Zhangov kriterij primjenjujemo na način da ispitujemo vrijedi li $U_n = U_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Ako je $\alpha + 2\beta \notin \mathbb{Z}$, onda zbog

$$L_1(v_n \otimes v) = -(n + \alpha + 2\beta) v_{n+1} \otimes v$$

imamo $U_n \supseteq U_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Za pokazivanje druge inkluzije koristimo singularni vektor. Iz formule (2.3) za singularni vektor slijedi ovaj važni generalni rezultat:

Teorem 4.5 ([Zh] Theorem 5 na str. 10) *Ako je Vermaov modul $V(c,h)$ reducibilan stupnja m i α je transcendentan nad $\mathbb{Q}(c,h,\beta)$ ili algebarski stupnja većeg od m, onda je $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ ireducibilan.*

Naime, koristeći singularni vektor $u \in V(c,h)_{h+m}$ konstruiramo takav $x \in U(\mathrm{Vir})$ da vrijedi

$$x(v_{n+1} \otimes v) = p_m(n) v_n \otimes v$$

za neki polinom $p_m \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta, c, h)[n]$ stupnja m. Ako p_m nema cjelobrojnih korjena, onda slijedi $U_n \subseteq U_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Navodimo nešto jače rezultate u slučaju singularnog vektora nivoa 2 i 3.

Pretpostavimo na primjer da Vermaov modul $V(c,h)$ ima singularni vektor $(L_{-1}^2 + \lambda L_{-2})v$. Tada je $h \neq 0$, $c = \frac{10h-16h^2}{1+2h}$ i $\lambda = -\frac{4h+2}{3} \neq 0$.

Iskoristimo li singularni vektor:

$$\begin{gathered}\left(L_{-1}^2 + \lambda L_{-2}\right)(v_{n+1} \otimes v) = \left(\left(n+1+\alpha\right)\left(n+\alpha\right) - \lambda\left(n+1+\alpha-\beta\right)\right) v_{n-1} \otimes v \\ -2\left(n+1+\alpha\right) v_n \otimes L_{-1} v \\ L_{-1}\left(v_n \otimes v\right) = -\left(n+\alpha\right) v_{n-1} \otimes v + v_n \otimes L_{-1} v\end{gathered}$$

dobijemo

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1}{n+\alpha+2\beta}\left(L_{-1}^2 + \lambda L_{-2}\right) L_1 + 2\left(n+1+\alpha\right) L_{-1}\right)\left(v_n \otimes v\right) = \\ = -\left(\left(n+1+\alpha\right)\left(n+\alpha\right) + \lambda\left(n+1+\alpha-\beta\right)\right) v_{n-1} \otimes v.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Uvedimo oznaku $p(n) = (n+1+\alpha)(n+\alpha) + \lambda(n+1+\alpha-\beta)$. Korijeni od p su $-\alpha + \frac{-1-\lambda \pm \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4\beta\lambda}}{2}$, odnosno $-\alpha + \frac{4h-1 \pm \sqrt{(4h+5)^2 - 24\beta(2h+1)}}{6}$. Ako p nema cijelih korijena slijedi $U_n \subseteq U_{n+1}$. Dakle, vrijedi $U_{n-1} = U_n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Propozicija 4.6 *Ako Vermaov modul $V(c,h)$ ima singularni vektor nivoa dva i ako vrijedi* $-\alpha + \frac{4h-1 \pm \sqrt{(4h+5)^2 - 24\beta(2h+1)}}{6}, \alpha + 2\beta \notin \mathbb{Z}$, *onda je* $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ *ireducibilan.*

Pretpostavimo da $V(c,h)$ ima singularni vektor $\left(L_{-1}^3 + \mu L_{-2}L_{-1} + \nu L_{-3}\right) v$ nivoa tri, gdje je $\mu = -2h-2$, $\nu = h(h+1)$. Tada je

$$\begin{gathered}\left(L_{-1}^3 + \mu L_{-2}L_{-1} + \nu L_{-3}\right)(v_{n+2} \otimes v) + \\ + \left(3(n+2+\alpha)L_{-1}^2 + \mu(n+2+\alpha)L_{-2}\right)(v_{n+1} \otimes v) + \\ + \left(3(n+2+\alpha)(n+1+\alpha) + \mu(n+2+\alpha-\beta)\right)L_{-1}(v_n \otimes v) = \\ = -q(n)(v_{n-1} \otimes v)\end{gathered}$$

gdje je $q(n)$ polinom s korijenima $-\alpha+h$, $-\alpha+\frac{h-1\pm\sqrt{(h+3)^2-8\beta(h+1)}}{2}$.

Propozicija 4.7 *Ako Vermaov modul $V(c,h)$ ima singularni vektor nivoa tri i ako vrijedi $-\alpha+\frac{h-1\pm\sqrt{(h+3)^2-8\beta(h+1)}}{2}, -\alpha+h, \alpha+2\beta \notin \mathbb{Z}$, onda je $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ ireducibilan.*

Posebno ćemo promatrati slučaj $h=0$.

Propozicija 4.8 *Ako je $\alpha \notin \mathbb{Z}$, onda je $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,0)$ ireducibilan.*

Dokaz. Ako je v vektor najveće težine u $L(c,0)$, onda je $L_{-1}v = 0$ pa imamo:

$$\begin{aligned} L_{-1}(v_{n+1} \otimes v) &= -(n+\alpha+1)(v_n \otimes v), \forall n \in \mathbb{Z}, \\ L_1(v_n \otimes v) &= -(n+\alpha+2\beta)(v_{n+1} \otimes v), \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

U slučaju da je $n+\alpha+2\beta = 0$ vrijedi

$$L_{-1}L_2(v_n \otimes v) = \beta(n+2+\alpha)(v_{n+1} \otimes v) \neq 0$$

jer je inače $\alpha \in \mathbb{Z}$. Iz gornjih relacija slijedi

$$U_n = U_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

pa tvrdnja slijedi iz teorema 4.3. ■

4.2 Struktura potkvocijenata

Neka je $h = 0$, $c \neq c_{p,q}$ (dakle $L_{-1}v$ je jedini singularni vektor) i $\alpha \in \mathbb{Z}$ (možemo slobodno uzeti $\alpha = 0$). Uvodimo oznaku $V := V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,0)$. Uzmimo prvo da je $\beta \notin \{0,1\}$. Kao i prije imamo

$$L_{-1}(v_n \otimes v) = -n(v_{n-1} \otimes v)$$
$$L_1(v_n \otimes v) = -(n+2\beta)(v_{n+1} \otimes v)$$

pa je

$$\cdots = U_{-2} = U_{-1} \supseteq U_0 = U_1 = \cdots$$

(Ako je $n + 2\beta = 0$ iskoristimo $L_{-1}L_2(v_n \otimes v) = (n+2)\beta(v_{n+2} \otimes v) \neq 0$.)
Ako je $\beta = 0$, onda ne postoji v_0 pa je

$$\cdots = U_{-2} = U_{-1} \supseteq U_1 = U_2 = \cdots$$

dok za $\beta = 1$ ne postoji v_{-1} pa je

$$\cdots = U_{-3} = U_{-2} \supseteq U_0 = U_1 = \cdots$$

Dakle, ako stavimo $U_+ = U_1$, $U_- = U_{-2}$, vrijedi $V = U_- \supseteq U_+$.

Propozicija 4.9 *Neka je $M(c,h)$ modul najveće težine. Ako vrijedi $U_n \supseteq U_m$ za sve $m \geq n$, onda je U_n/U_{n+1} modul najveće težine $h - \alpha - \beta - n$.*

Dokaz. U_n je ciklički modul generiran s $v_n \otimes v$, a budući da vrijedi

$$L_k(v_n \otimes v) \in U_{n+k} \subseteq U_{n+1}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$ i

$$L_0(v_n \otimes v) = -(\alpha+\beta)v_n \otimes v + h(v_n \otimes v)$$

slijedi da je $v_n \otimes v$ vektor najveće težine $h - \alpha - \beta - n$. ■

Teorem 4.10 *Neka je $c \neq c_{p,q}$ i $\alpha \in \mathbb{Z}$. Tada je $V = V'_{0,\beta} \otimes L(c,0)$ reducibilan i postoji netrivijalni pravi podmodul U_+ takav da je $V/U_+ \cong V(c,h)$, gdje je $h = \begin{cases} 1-\beta, & \beta \neq 1, \\ 1, & \beta = 1. \end{cases}$*

Dokaz I. $V(c,h)$ je modul za verteks-algebru $L(c,0)$ pa postoji operator ispreplitanja tipa $\binom{V(c,h)}{L(c,0)\ \ V(c,h)}$, a onda i transponirani operator ispreplitanja tipa $\binom{V(c,h)}{V(c,h)\ \ L(c,0)}$ pa tvrdnja teorema slijedi iz teorema 3.7.

Navest ćemo i direktni dokaz. ■

Dokaz II. Pretpostavimo suprotno, da je V ireducibilan. Tada postoji $w \in U(\mathrm{Vir}_-)U(\mathrm{Vir}_+)$ takav da je $v_{-2} \otimes v = w(v_1 \otimes v)$. Neka je

$$w = \sum_{k_1,\dots,k_n} L_{-n}^{k_n} \cdots L_{-1}^{k_1} x_{k_1 \cdots k_n}, \ k_i \in \mathbb{Z}_+, \ x_{k_1 \cdots k_n} \in U(\mathrm{Vir}_+) \text{ homogen.} \tag{4.7}$$

Iz razmatranja prije teorema znamo da postoji komponenta takva da je $k_2 + \cdots + k_n \neq 0$. Uvijek možemo pretpostaviti da je $L_{-1}^{k_1} x_{k_1 \cdots k_n} v_1 \neq 0$ (jer je $L_{-1}^{k_1} x_{k_1 \cdots k_n} v = 0$). Neka je $L_{-n}^{k_n} \cdots L_{-1}^{k_1} x_{k_1 \cdots k_n}$ komponenta iz (4.7) takva da je $\sum_i i k_i$ maksimalna. Tada je

$$L_{-1}^{k_1} x_{k_1 \cdots k_n} v_1 \otimes L_{-n}^{k_n} \cdots L_{-2}^{k_2} v = 0.$$

No $L(c,0)$ je slobodni $U(\mathrm{Vir}_- \setminus \{L_{-1}\})$-modul pa slijedi da je $L_{-1}^{k_1} x_{k_1 \cdots k_n} v_1 = 0$ - kontradikcija.
(Izbor maksimalne komponente nije jedinstven, ali sve takve su međusobno linearno nezavisne pa tvrdnja i dalje vrijedi.)

Dakle U_+ je pravi podmodul, a, prema propoziciji 4.9, V/U_+ je modul najveće težine. Ostalo je pokazati da je V/U_+ Vermaov modul, odnosno da $U(\mathrm{Vir}_-)$ djeluje slobodno na njega. Pretpostavimo radi jednostavnosti da je

$\beta \neq 0, 1$. Primjetimo da je

$$U_+ = \{u\,(v_0 \otimes v) : u \in U\,(\mathrm{Vir})\} =$$
$$= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\{u'\,(v_k \otimes v) : u' \in U\,(\mathrm{Vir}_-)\,/U\,(\mathrm{Vir}_-)\,L_{-1}, k \geq 0\}$$

i da svaki $u'\,(v_k \otimes v)$ ima komponentu $v_k \otimes u'v \neq 0$.

Kada V/U_+ nebi bio slobodan, za neki $x \in U\,(\mathrm{Vir}_-)$ bi $x\,(v_{-1} \otimes v)$ bio iz U_+. No jasno je da $x\,(v_{-1} \otimes v)$ ne može imati komponentu $v_k \otimes u'v$, $k \geq 0$ pa je V/U_+ slobodan. ■

Teorem 4.11 *Neka je $c \neq c_{p,q}$ i $\alpha \in \mathbb{Z}$. Tada je $U_+ = U(\mathrm{Vir})(v_1 \otimes v)$ ireducibilni podmodul od $V'_{0,\beta} \otimes L(c,0)$. Nadalje, U_+ nije oblika $V'_{\gamma,\delta} \otimes L(c,h)$.*

Dokaz. Prema korolaru 4.4 svaki netrivijalni podmodul od V sadrži generator $v_k \otimes v$ za neki $k \in \mathbb{Z}$ pa budući da je $U_1 = U_k$, za sve $k \geq 0$, slijedi ireducibilnost modula U_+.

Pretpostavimo da postoji Vir-izomorfizam $\Phi : U_+ \to V'_{\gamma,\delta} \otimes L\,(c,h)$ za neke $\gamma, \delta, h \in \mathbb{C}$. Budući da je $\mathrm{Supp}\, U_+ = -\beta + \mathbb{Z}$ i $\mathrm{Supp}\, V'_{\gamma,\delta} \otimes L\,(c,h) = h - \gamma - \delta + \mathbb{Z}$ slijedi $h - \gamma - \delta + m = -\beta$ za neki $m \in \mathbb{Z}$. Neka je $V'_{\gamma,\delta} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}w_n$ i w vektor najveće težine u $L\,(c,h)$.

Pretpostavimo da je $\beta \neq 0$. U_+ je tada generiran s $v_0 \otimes v$ i možemo pisati

$$\Phi\,(v_0 \otimes v) = w_0 \otimes x_0 + w_1 \otimes x_1 + \cdots + w_n \otimes x_n, x_j \in L\,(c,h)_j$$

Iz $L_{-1}\,(v_0 \otimes v) = 0$ slijedi $L_{-1}\Phi(v_0 \otimes v) = 0$, odnosno

$$\sum_{i=0}^{n} (i+\gamma)\, w_{i-1} \otimes x_i = \sum_{i=0}^{n} w_i \otimes L_{-1} x_i \tag{4.8}$$

Pretpostavimo prvo da je $\gamma \in \mathbb{Z}$, odnosno $\gamma = 0$. Tada (4.8) možemo zapisat kao

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) w_i \otimes x_{i+1} = \sum_{i=0}^{n} w_i \otimes L_{-1} x_i$$

iz čega slijedi $x_{i+1} = \frac{1}{i+1} L_{-1} x_i$ za $i = 0, 1, \ldots, n-1$ i $L_{-1} x_n = 0$. Dakle,

$$x_j = \frac{1}{j!} L_{-1}^j x_0 \text{ za } j = 1, \ldots, n.$$

Slobodno možemo pretpostaviti da je $x_0 = w$ iz čega izlazi $L_{-1}^n w = 0$. To je moguće ako i samo ako je $h = 0$. No, prema teoremu 4.10 modul $V'_{0,\delta} \otimes L(c,0)$ je reducibilan pa Φ ne može biti izomorfizam.

Dakle, mora biti $\gamma \notin \mathbb{Z}$. Tada iz (4.8) slijedi $x_0 = 0$. Neka je $k > 0$ najmanji takav da je $x_k \neq 0$. Tada (4.8) prelazi u

$$\sum_{i=k-1}^{n-1} w_i \otimes (i + 1 + \gamma) x_{i+1} = \sum_{i=k}^{n} w_i \otimes L_{-1} x_i$$

iz čega dobijemo $x_k = 0$ što je kontradikcija.

Ako je $\beta = 0$ dokaz je potpuno analogan, s razlikom da sada promatramo $\Phi(v_1 \otimes v)$. ∎

Spomenimo još i strukturu potkvocijenta za tenzorski produkt s Vermaovim modulom.

Teorem 4.12 *Neka je $\alpha + 2\beta \notin \mathbb{Z}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{Z}$ u modulu $V'_{\alpha,\beta} \otimes V(c,h)$ vrijedi $U_n / U_{n+1} \cong V(c, \lambda - n)$ gdje je $\lambda = h - \alpha - \beta$.*

Dokaz. Dokaz je analogan onome teorema 4.10. Iz propozicije 4.9 zaključujemo da je U_n/U_{n+1} generiran vektorom $v_n \otimes n$ najveće težine $h - \alpha - \beta - n$. Pokažimo još da je U_n/U_{n+1} Vermaov. Prvo primjetimo da je

$$U_{n+1} = \{u(v_{n+1} \otimes v) : u \in U(\text{Vir})\} = \{u'(v_{n+k} \otimes v) : u' \in U(\text{Vir}_-),\ k > 0\}$$

i da svaki $u'(v_{n+k} \otimes v)$ ima komponentu $v_{n+k} \otimes u'v \neq 0$ (jer $U(\text{Vir}_-)$ djeluje slobodno na $V(c,h)$). Kada U_n/U_{n+1} nebi bio slobodni (dakle Vermaov) modul, onda bi za neki $x \in U(\text{Vir}_-)$ vektor $x(v_n \otimes v)$ bio iz U_{n+1}. No $x(v_n \otimes v)$ ne može imati komponentu $v_{n+k} \otimes u'v$, za $k > 0$ što dokazuje tvrdnju. ∎

4.3 Minimalni modeli

Ako je $c = c_{p,q} = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$ za neka dva relativno prosta broja $p, q > 1$, onda je maksimalni podmodul $J(c, 0)$ Vermaovog modula $V(c, 0)$ generiran s dva singularna vektora: $L_{-1}v$ i $v_{p,q} = u_{p-1,q-1}v$, gdje je $u_{p-1,q-1} \in U(\mathrm{Vir}_-)_{(p-1)(q-1)}$. Ireducibilni kvocijent $L(c, 0)$ tada ima strukturu racionalne verteks-algebre. Svi ireducibilni moduli za $L(c, 0)$ su tzv. **minimalni modeli**, $L(c, h)$ gdje je $h = h_{m,n} = \frac{(np-mq)^2-(p-q)^2}{4pq}$, za $0 < m < p$ i $0 < n < q$. Primjetimo da parovi (m, n) i $(p-m, q-n)$ daju isti h. Moduli $J(c_{p,q}, h_{m,n})$ su također generirani s dva singularna vektora nivoa mn, odnosno $(p-m)(q-n)$.

Već smo vidjeli da, koristeći jedan singularni vektor, tj. relaciju u $L(c, h)$, možemo pokazati ireducibilnost modula $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c, h)$ za parametre $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ koji ne leže na određenoj algebarskoj krivulji (radi se o rješenjima polinomijalne jednadžbe stupnja jednakog nivou singularnog vektora). Pri ispitivanju ireducibilnosti modula $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c_{p,q}, h_{m,n})$ na raspolaganju imamo dva singularna vektora čime dokazujemo ireducibilnost svuda osim na presjeku odgovarajućih krivulja, a to je diskretan skup točaka. Ovo ćemo pokazati na primjeru minimalnih modela $c_{2,5} = -\frac{22}{5}$, $c_{3,4} = \frac{1}{2}$ i $c_{2,7} = -\frac{68}{7}$.

Prema propoziciji 4.8 $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c, 0)$ je ireducibilan za sve $\alpha \notin \mathbb{Z}$ pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\alpha = 0$. Iz relacija

$$L_{-1}(v_n \otimes v) = -nv_{n-1} \otimes v$$
$$L_1(v_n \otimes v) = -(n + 2\beta)v_{n+1} \otimes v$$
$$L_2(v_n \otimes v) = -(2 + 3\beta)v_{n+2} \otimes v$$

slijedi

$$\cdots = U_{-2} = U_{-1} \supseteq U_0 = U_1 = \cdots$$

s tim da slučaju $\beta = 0$ ne postoji $v_0 \otimes v$ pa U_0 'izbacujemo' iz niza, a za

$\beta = 1$ ne postoji $v_{-1} \otimes v$ pa eliminiramo U_{-1}. Za dokaz ireducibilnosti još treba pokazati da vrijedi $U_1 \subseteq U_{-2}$.

Propozicija 4.13 *Neka je* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ *različito od* $(0, \frac{6}{5})$. *Tada je modul* $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(-\frac{22}{5}, 0)$ *ireducibilan.*

Dokaz. Neka je $s = L_{-2}^2 - \frac{3}{5}L_{-4}$. Tada u $L(-\frac{22}{5}, 0)$ vrijedi $sv = 0$ pa iskoristimo tu relaciju. Pretpostavimo prvo da je $\beta \neq 1$. Budući da je

$$\begin{aligned} s(v_3 \otimes v) &= (3-\beta)(1-\beta)v_{-1} \otimes v + \frac{3}{5}(3-3\beta)v_{-1} \otimes v - 2(3-\beta)v_1 \otimes L_{-2}v \\ &= \left((3-\beta)(1-\beta) + \frac{9}{5}(1-\beta)\right) v_{-1} \otimes v - 2(3-\beta)v_1 \otimes L_{-2}v \end{aligned}$$

$$L_{-2}(v_1 \otimes v) = -(1-\beta)v_{-1} \otimes v + v_1 \otimes L_{-2}v$$

slijedi

$$s(v_3 \otimes v) + 2(3-\beta)L_{-2}(v_1 \otimes v) = \left(\beta - \frac{6}{5}\right)(1-\beta)v_{-1} \otimes v.$$

No $v_3 \otimes v \in U_1$ pa slijedi $U_1 \subseteq U_{-1}$ za sve $\beta \neq 1, \frac{6}{5}$.

S druge strane, za sve $\beta \neq 0$ imamo

$$s(v_2 \otimes v) = \left(\beta(\beta-2) - \frac{3}{5}(3\beta-2)\right) v_{-2} \otimes v + 2(\beta-2)v_0 \otimes L_{-2}v$$

$$L_{-2}(v_0 \otimes v) = \beta v_{-2} \otimes v + v_0 \otimes L_{-2}v$$

pa je

$$\begin{aligned} s(v_2 \otimes v) - 2(\beta-2)L_{-2}(v_0 \otimes v) &= -\left(\beta(\beta-2) + \frac{3}{5}(3\beta-2)\right) v_{-2} \otimes v = \\ &= \left(\frac{6}{5} - \beta\right)(\beta+1)v_{-2} \otimes v, \end{aligned}$$

što dokazuje da je $U_0 \subseteq U_{-2}$ za $\beta \neq 0, -1, \frac{6}{5}$. Time je dokaz završen. ■

Propozicija 4.14 *Neka je* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ *različito od* $(0, \frac{1}{2})$ *i* $(0, \frac{15}{16})$. *Tada je modul* $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(\frac{1}{2}, 0)$ *ireducibilan.*

Dokaz. Stavimo li $s' = 64L_{-2}^3 + 93L_{-3}^2 - 264L_{-4}L_{-2} - 108L_{-6}$, u $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ vrijedi $s'v = 0$. Iz relacija

$$s'(v_5 \otimes v) + 192(5-\beta)L_{-2}^2(v_3 \otimes v) - 264(5-\beta)L_{-4}(v_3 \otimes v) +$$
$$+186(5-2\beta)L_{-3}(v_2 \otimes v) - 264(5-3\beta)L_{-2}(v_1 \otimes v) +$$
$$+192(5-\beta)(3-\beta)L_{-2}(v_1 \otimes v) = -2(\beta-1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\left(\beta - \frac{15}{16}\right)(v_{-1} \otimes v)$$

i

$$s'(v_4 \otimes v) + 192(4-\beta)L_{-2}^2(v_2 \otimes v) - 264(4-\beta)L_{-4}(v_2 \otimes v) +$$
$$+186(4-2\beta)L_{-3}(v_1 \otimes v) - 264(4-3\beta)L_{-1}(v_0 \otimes v) +$$
$$+192(4-\beta)(2-\beta)L_{-1}(v_0 \otimes v) = 2\,(\beta+2)\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\left(\beta - \frac{15}{16}\right)(v_{-2} \otimes v)$$

slijedi $U_1 \subseteq U_{-2}$ za $\beta \neq \frac{1}{2}, \frac{15}{16}$. ■

Propozicija 4.15 *Neka je $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ različito od $(0,\frac{9}{7})$ i $(0,\frac{10}{7})$. Tada je modul $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(-\frac{68}{7},0)$ ireducibilan.*

Dokaz. Analogno dokazu prethodnih propozicija, iskoristimo singularni vektor

$$(L_{-2}^3 - \frac{1}{7}L_{-3}^2 - \frac{11}{7}L_{-4}L_{-2} - \frac{38}{49}L_{-6})v = 0$$

i dobijemo tražene iznimke. ■

Promotrimo sada i module težine različite od nula. Rezultate propozicija 4.6 i 4.7 ćemo primijeniti na konkretne minimalne modele sa singularnim vektorima odgovarajućih nivoa. Napomenimo da se u sljedećim primjerima uvjet $\alpha + 2\beta \notin \mathbb{Z}$ može izostaviti.

Propozicija 4.16 *Neka je $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ različito od $(0,\frac{1}{2})$ i $(\frac{1}{2},\frac{15}{16})$. Tada je modul $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ireducibilan.*

Dokaz. $V(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ima singularne vektore na nivou dva, odnosno tri. Korijeni od $p(n)$ su

$$-\alpha + \frac{1 \pm \sqrt{49-48\beta}}{6},$$

a od $q(n)$

$$\frac{1}{2} - \alpha, -\alpha + \frac{-1 \pm \sqrt{49-48\beta}}{4}.$$

Dakle, $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ je ireducibilan osim kada je ispunjeno

$$-\alpha + \frac{1 \pm \sqrt{49-48\beta}}{6} = -\alpha + \frac{-1 \pm \sqrt{49-48\beta}}{4} \in \mathbb{Z}$$

ili

$$\frac{1}{2} - \alpha = -\alpha + \frac{1 \pm \sqrt{49-48\beta}}{6} \in \mathbb{Z}.$$

Iz gornjih uvjeta izlazi da reducibilnost može nastupiti isključivo kada je $(\alpha,\beta) = (0,\frac{1}{2})$ ili $(\alpha,\beta) = (\frac{1}{2},\frac{15}{16})$. ■

Propozicija 4.17 *Neka je $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ različito od $(-\frac{2}{5},\frac{6}{5})$ i $(-\frac{1}{5},\frac{6}{5})$. Tada je modul $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})$ ireducibilan.*

Dokaz. Modul $V(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})$ ima singularne vektore na nivou dva, odnosno tri. Korijeni od $p(n)$ su

$$-\alpha + \frac{-3 \pm \sqrt{49-40\beta}}{10},$$

a od $q(n)$

$$-\frac{1}{5} - \alpha, -\alpha + \frac{-3 \pm \sqrt{49-40\beta}}{5}.$$

Izjednačavanjem dobijemo $(\alpha,\beta) = (-\frac{2}{5},\frac{6}{5}), (-\frac{1}{5},\frac{6}{5})$. ■

Jasno, slični račun može se provesti za singularni vektor bilo kojeg nivoa. Ovdje navodimo primjer sa singularnim vektorom na nivou četiri.

Propozicija 4.18 *Neka je $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ različito od $(\frac{1}{8},\frac{15}{16})$, $(-\frac{3}{8},\frac{15}{16})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Tada je modul $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ ireducibilan.*

Dokaz. Modul $V(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ ima singularne vektore na nivou dva i četiri. Korijeni od $p(n)$ su

$$-\alpha + \frac{-1 \pm \sqrt{49 - 48\beta}}{8}. \tag{4.9}$$

Pomoću drugo singularnog vektora dobijemo $u_4 \in U(\mathrm{Vir}_-)$ takav da u $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)$ vrijedi

$$u_4(v_n \otimes v) = -r(n)v_{n-1} \otimes v.$$

gdje je $r(n)$ polinom četvrtog stupnja s korijenima

$$-\alpha + \frac{1 \pm \sqrt{49 - 48\beta}}{24}, -\alpha + \frac{-23 \pm 7\sqrt{49 - 48\beta}}{24}. \tag{4.10}$$

Jedino za parove $\left(\frac{1}{8}, \frac{15}{16}\right)$, $\left(-\frac{3}{8}, \frac{15}{16}\right)$ i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ su izrazi (4.9) i (4.10) jednaki u $\mathbb{Z}$. ■

Propozicija 4.19 *Neka je $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ različito od $(-\frac{4}{7}, \frac{9}{7})$, $(-\frac{2}{7}, \frac{10}{7})$, $(-\frac{3}{7}, \frac{10}{7})$ i $(-\frac{1}{7}, \frac{9}{7})$. Tada je modul $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(-\frac{68}{7}, -\frac{2}{7})$ ireducibilan.*

Dokaz. Iskoristimo singularne vektore nivoa 2 i 5 kao u prethodnim dokazima. ■

Propozicija 4.20 *Neka je $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ različito od $(-\frac{6}{7}, \frac{10}{7})$, $(-\frac{3}{7}, \frac{10}{7})$, $(-\frac{4}{7}, \frac{10}{7})$, $(-\frac{2}{7}, \frac{9}{7})$ i $(-\frac{3}{7}, \frac{9}{7})$. Tada je modul $V'_{\alpha,\beta} \otimes L(-\frac{68}{7}, -\frac{3}{7})$ ireducibilan.*

Dokaz. Iskoristimo singularne vektore nivoa 3 i 4, kao prije. ■

Iz prethodnih propozicija i teorema 3.8 slijedi:

Teorem 4.21 *Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tada vrijede sljedeće ekvivalencije:*
$V'_{\alpha,\beta} \otimes L(-\frac{22}{5}, 0)$ je reducibilan ako i samo ako je $(\alpha, \beta) = (0, \frac{6}{5})$,
$V'_{\alpha,\beta} \otimes L(-\frac{22}{5}, -\frac{1}{5})$ je reducibilan ako i samo ako je $(\alpha, \beta) \in \{(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}), (-\frac{1}{5}, \frac{6}{5})\}$,
$V'_{\alpha,\beta} \otimes L(\frac{1}{2}, 0)$ je reducibilan ako i samo ako je $(\alpha, \beta) \in \{(0, \frac{1}{2}), (0, \frac{15}{16})\}$,

$V'_{\alpha,\beta} \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ *je reducibilan ako i samo ako je* $(\alpha,\beta) \in \{(0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{15}{16})\}$,
$V'_{\alpha,\beta} \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ *je reducibilan ako i samo ako je* $(\alpha,\beta) \in \{(\frac{1}{8},\frac{15}{16}),(-\frac{3}{8},\frac{15}{16}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$,
$V'_{\alpha,\beta} \otimes L(-\frac{68}{7},0)$ *je reducibilan ako i samo ako je* $(\alpha,\beta) \in \{(0,\frac{9}{7}),(0,\frac{10}{7})\}$,
$V'_{\alpha,\beta} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})$ *je reducibilan ako i samo ako je* $(\alpha,\beta) \in \{(-\frac{1}{7},\frac{9}{7}),(-\frac{4}{7},\frac{9}{7}),(-\frac{2}{7},\frac{10}{7}),(-\frac{3}{7},\frac{10}{7})\}$,
$V'_{\alpha,\beta} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})$ *je reducibilan ako i samo ako je* $(\alpha,\beta) \in \{(-\frac{3}{7},\frac{10}{7}),(-\frac{4}{7},\frac{10}{7}),(-\frac{6}{7},\frac{10}{7}),(-\frac{2}{7},\frac{9}{7}),(-\frac{3}{7},\frac{9}{7})\}$.

Teorem 4.22 *Vrijede sljedeći izomorfizmi* Vir*-modula:*

$$\left(V'_{0,\frac{6}{5}} \otimes L(-\frac{22}{5},0)\right)/U_0 \cong L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5}),$$

$$\left(V'_{-\frac{2}{5},\frac{6}{5}} \otimes L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})\right)/U_{-2} \cong L(-\frac{22}{5},0),$$

$$\left(V'_{-\frac{1}{5},\frac{6}{5}} \otimes L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})\right)/U_0 \cong L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5}),$$

$$\left(V'_{0,\frac{1}{2}} \otimes L(\frac{1}{2},0)\right)/U_0 \cong L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),$$

$$\left(V'_{0,\frac{15}{16}} \otimes L(\frac{1}{2},0)\right)/U_0 \cong L(\frac{1}{2},\frac{1}{16}),$$

$$\left(V'_{0,\frac{1}{2}} \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right)/U_{-1} \cong L(\frac{1}{2},0),$$

$$\left(V'_{\frac{1}{2},\frac{15}{16}} \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right)/U_0 \cong L(\frac{1}{2},\frac{1}{16}),$$

$$\left(V'_{\frac{1}{8},\frac{15}{16}} \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\right)/U_{-2} \cong L(\frac{1}{2},0),$$

$$\left(V'_{-\frac{3}{8},\frac{15}{16}} \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\right)/U_0 \cong L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),$$

$$\left(V'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\right)/U_0 \cong L(\frac{1}{2},\frac{1}{16}),$$

$$\left(V'_{0,\frac{9}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},0)\right)/U_0 \cong L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7}),$$

$$\left(V'_{0,\frac{10}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},0)\right)/U_0 \cong L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7}),$$

$$\left(V'_{-\frac{4}{7},\frac{9}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})\right)/U_{-2} \cong L(-\frac{68}{7},0),$$

$$\left(V'_{-\frac{6}{7},\frac{10}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})\right)/U_{-2} \cong L(-\frac{68}{7},0),$$

$$\left(V'_{-\frac{3}{7},\frac{10}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})\right)/U_0 \cong L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7}),$$

$$\left(V'_{-\frac{3}{7},\frac{10}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})\right)/U_0 \cong L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7}),$$

$$\left(V'_{-\frac{2}{7},\frac{9}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})\right)/U_0 \cong L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7}),$$

$$\left(V'_{-\frac{1}{7},\frac{9}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})\right)/U_0 \cong L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7}),$$

$$\left(V'_{-\frac{2}{7},\frac{10}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7})\right)/U_0 \cong L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7}),$$

$$\left(V'_{-\frac{3}{7},\frac{9}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})\right)/U_0 \cong L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7}),$$

$$\left(V'_{-\frac{4}{7},\frac{10}{7}} \otimes L(-\frac{68}{7},-\frac{3}{7})\right)/U_0 \cong L(-\frac{68}{7},-\frac{2}{7}).$$

Dokaz. Iz prethodnog teorema slijedi da su svi navedeni tenzorski produkti reducibilni pa, prema ranijim razmatranjima, moduli U_0, odnosno U_{-1} i U_{-2}, moraju biti pravi podmoduli. Prema propoziciji 4.9, $\left(V'_{\alpha,\beta} \otimes L(c,h)\right)/U_0$ je modul najveće težine $h-\alpha-\beta+1$ generiran vektorom najveće težine $v_{-1} \otimes v$. Preostaje dokazati da su svi kvocijenti ireducibilni. Za ilustraciju, naveden je dokaz nekoliko jednostavnijih primjera.

- $\left(V'_{0,\frac{6}{5}} \otimes L(-\frac{22}{5},0)\right)/U_0 \cong L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})$
  Singularni vektori u $V(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})$ su $(L_{-1}^2-\frac{2}{5}L_{-2})v$ i $(L_{-1}^3-\frac{8}{5}L_{-2}L_{-1}-\frac{4}{25}L_{-3})v$ pa je potrebno dokazati da vrijedi

$$(L_{-1}^2-\frac{2}{5}L_{-2})(v_{-1}\otimes v) \in U_0 \tag{4.11}$$

$$(L_{-1}^3 - \frac{8}{5}L_{-2}L_{-1} - \frac{4}{25}L_{-3})(v_{-1} \otimes v) \in U_0 \tag{4.12}$$

Iskoristit ćemo singularne vektore $L_{-1}v$ i $(L_{-2}^2 - \frac{3}{5}L_{-4})v$ iz $V(-\frac{22}{5}, 0)$. $(L_{-1}^2 - \frac{2}{5}L_{-2})(v_{-1} \otimes v) = \frac{28}{25}v_{-3} \otimes v - \frac{2}{5}v_{-1} \otimes L_{-2}v = (L_{-2}^2 - \frac{3}{5}L_{-4})(v_1 \otimes v) \in U_1 = U_0$ što dokazuje (4.11).

$$(L_{-1}^3 - \frac{8}{5}L_{-2}L_{-1} - \frac{4}{25}L_{-3})(v_{-1} \otimes v) = \tag{4.13}$$

$$= \frac{125}{2}(21v_{-4} \otimes v - 100v_{-2} \otimes L_{-2}v - 10L_{-1} \otimes L_{-3}v)$$

Iskoristimo

$$\frac{25}{6}(L_{-1}^2 - \frac{2}{5}L_{-2})(v_0 \otimes v) = 7v_{-4} \otimes v + 10v_{-2} \otimes L_{-2}v \in U_0 \tag{4.14}$$

i

$$-25L_{-1}(L_{-1}^2 - \frac{2}{5}L_{-2})(v_1 \otimes v) =$$

$$= -84v_{-4} \otimes v - 10v_{-2} \otimes L_{-2}v - 10v_{-1} \otimes L_{-3}v \in U_0 \tag{4.16}$$

pa je (4.13)$= -9\cdot$(4.14)+(4.16) čime je dokazano i (4.12).

- $\left(V'_{-\frac{2}{5},\frac{6}{5}} \otimes L(-\frac{22}{5}, -\frac{1}{5})\right)/U_{-2} \cong L(-\frac{22}{5}, 0)$

  Budući da je $L_1(v_n \otimes v) = -(n+2)v_{n+1} \otimes v$, koristeći L_2 i singularne vektore iz $L(-\frac{22}{5}, -\frac{1}{5})$ dobijemo da je

$$\left(V'_{-\frac{2}{5},\frac{6}{5}} \otimes L(-\frac{22}{5}, -\frac{1}{5})\right) = U_{-1} \supseteq U_{-2} \supseteq U_0 = U_1 = \cdots$$

  pa treba dokazati da vrijedi

$$L_{-1}(v_{-1} \otimes v) \in U_{-2} \tag{4.17}$$

$$(L_{-2}^2 - \frac{3}{5}L_{-4})(v_{-1} \otimes v) \in U_{-2} \tag{4.18}$$

  No $L_{-1}(v_{-1} \otimes v) = \frac{7}{5}v_{-2} \otimes v + v_{-1} \otimes L_{-1}v$ pa iz

$$(L_{-1}^2 - \frac{2}{5}L_{-2})(v_0 \otimes v) = \underbrace{-\frac{2}{25}v_{-2} \otimes v}_{\in U_{-2}} + \frac{4}{5}v_{-1} \otimes L_{-1}v \in U_0 \subseteq U_{-2}$$

slijedi relacija (4.17).

Nadalje,

$$(L_{-2}^2 - \frac{3}{5}L_{-4})(v_{-1} \otimes v) =$$
$$= \frac{224}{25}v_{-5} \otimes v + \frac{26}{5}v_{-3} \otimes L_{-2}v + v_{-1} \otimes (L_{-2}^2 - \frac{3}{5}L_{-4})v.$$

Iskoristimo

$$L_{-3}(v_{-2} \otimes v) = \frac{24}{5}v_{-5} \otimes v + v_{-2} \otimes L_{-3}v \in U_{-2}$$

te iz

$$L_{-1}s_2(v_{-2} \otimes v) \in U_{-2}$$
$$s_3'(v_{-2} \otimes v) \in U_{-2}$$

gdje je $s_2 = L_{-1}^2 - \frac{2}{5}L_{-2}$, a $s_3' = L_{-3} - 5L_{-2}L_{-1}$ (u $L(-\frac{22}{5}, -\frac{1}{5})$ vrijedi $s_3'v = 0$), slijedi

$$v_{-4} \otimes L_{-1}v \equiv -\frac{16}{5}v_{-5} \otimes v \mod U_{-2},$$
$$v_{-3} \otimes L_{-2}v \equiv -\frac{13}{5}v_{-5} \otimes v \mod U_{-2}.$$

Nadalje, iz $L_{-2}L_{-1}(v_{-1} \otimes L_{-1}v) \in U_{-2}$ slijedi

$$v_{-1} \otimes L_{-2}^2 v \equiv \frac{589}{25}v_{-5} \otimes v \mod U_{-2},$$

a iz $L_{-4}(v_{-1} \otimes L_{-2}v) \in U_{-2}$

$$v_{-1} \otimes L_{-4}v \equiv \frac{95}{3}v_{-5} \otimes v \mod U_{-2}.$$

Posljednje četiri relacije dokazuju (4.18).

Napomenimo još da se iz relacija $s_3'(v_1 \otimes v), s_2(v_0 \otimes v), L_{-2}(v_0 \otimes v) \in U_0$ pokaže kako je $v_{-2} \otimes v \in U_0$ čime je dokazana ireducibilnost podmodula U_{-2}.

- $\left(V'_{-\frac{1}{5},\frac{6}{5}} \otimes L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})\right)/U_0 \cong L(-\frac{22}{5},-\frac{1}{5})$

  Treba pokazati da je
$$s_2(v_{-1} \otimes v) \in U_0 \tag{4.19}$$
$$s_3'(v_{-1} \otimes v) \in U_0 \tag{4.20}$$

  Direktnim računom se pokaže da vrijedi
$$(L_{-1}^2 - \frac{2}{5}L_{-2})(v_{-1} \otimes v) = (2s_3' - L_{-1}s_2)(v_0 \otimes v)$$

  što dokazuje (4.19).

  Budući da je
$$s_3'(v_{-1} \otimes v) = \frac{6}{5}(14v_{-4} \otimes v + 10v_{-3} \otimes L_{-1}v + 5v_{-2} \otimes L_{-2}v)$$

  te da iz $L_{-1}^2 s_2(v_0 \otimes v) \in U_0$ dobijemo
$$\frac{352}{5}v_{-4} \otimes v + 11v_{-3} \otimes L_{-1}v - 8v_{-2} \otimes L_{-2}v - 6v_{-1} \otimes L_{-3}v \in U_0,$$

  iz $L_{-2}s_2(v_0 \otimes v) \in U_0$
$$\frac{68}{5}v_{-4} \otimes v - 12v_{-3} \otimes L_{-1}v + 4v_{-2} \otimes L_{-2}v - v_{-1} \otimes L_{-3}v \in U_0,$$

  a iz $L_{-1}s_3'(v_0 \otimes v) \in U_0$
$$\frac{16}{5}v_{-3} \otimes v - 76v_{-3} \otimes L_{-1}v - 20v_{-2} \otimes L_{-2}v - 6v_{-v} \otimes L_{-3}v \in U_0$$

  slijedi (4.20).

- $\left(V'_{0,\frac{1}{2}} \otimes L(\frac{1}{2},0)\right)/U_0 \cong L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

  Iako je $L_1(v_n \otimes v) = -(n+1)v_{n+1} \otimes v$, koristeći L_2 i L_{-1} dobijemo
$$\left(V'_{0,\frac{1}{2}} \otimes L(\frac{1}{2},0)\right) = U_{-1} \supseteq U_0 = U_1 = \cdots$$

pa treba dokazati da je

$$(L_{-1}^2 - \frac{4}{3}L_{-2})(v_{-1} \otimes v) \in U_0$$
$$(L_{-3} - \frac{4}{5}L_{-2}L_{-1})(v_{-1} \otimes v) \in U_0$$

No

$$(L_{-1}^2 - \frac{4}{3}L_{-2})(v_{-1} \otimes v) = -\frac{4}{3}v_{-1} \otimes L_{-2}v = s_6(v_3 \otimes v)+$$
$$+480L_{-2}^2(v_1 \otimes v) + 372L_{-3}(v_0 \otimes v) - 660L_{-4}(v_1 \otimes v) \in U_0$$

gdje je s_6v singularni vektor u $L(\frac{1}{2}, 0)$.

Nadalje, $(L_{-3} - \frac{4}{5}L_{-2}L_{-1})(v_{-1} \otimes v) = 0$.

- $\left(V'_{0,\frac{15}{16}} \otimes L(\frac{1}{2},0)\right)/U_0 \cong L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$

  Treba pokazati da je

$$(L_{-1}^2 - \frac{3}{4}L_{-2})(v_{-1} \otimes v) \in U_0,$$
$$(16L_{-2}^2 - 24L_{-3}L_{-1} - 9L_{-4})(v_{-1} \otimes v) \in U_0.$$

Direktnim računom se pokaže da je

$$(L_{-1}^2 - \frac{3}{4}L_{-2})(v_{-1} \otimes v) = \frac{35}{64}v_{-3} \otimes v - \frac{3}{4}v_{-1} \otimes L_{-2}v =$$
$$= -\frac{1}{33}s_6(v_3 \otimes v) - 12L_{-2}^2(v_1 \otimes v) - \frac{279}{44}L_{-3}(v_0 \otimes v) + \frac{33}{2}L_{-4}(v_1 \otimes v)$$

što dokazuje prvu relaciju.

$$(16L_{-2}^3 - 24L_{-3}L_{-1} - 9L_{-4})(v_{-1} \otimes v) = -\frac{21}{4}v_{-5} \otimes v + 62v_{-3} \otimes L_{-2}v+$$
$$+16v_{-1} \otimes L_{-2}^2v - 24v_{-2} \otimes L_{-3}v - 9v_{-1} \otimes L_{-4}v$$

Kombinirajući $s_6(v_1 \otimes v)$, $L_{-2}s_2(v_{-1} \otimes v)$, $L_{-1}^2s_2(v_{-1} \otimes v)$ i $L_{-1}s_6(v_2 \otimes v) - (\frac{1275}{2}L_{-5} + 408L_{-3}L_{-1})(v_0 \otimes v)$ dokaže se i druga relacija.

■

Poglavlje 5

LIEJEVA ALGEBRA $W(2,2)$

U ovom poglavlju ćemo definirati Liejevu algebru $W(2,2)$. Dat ćemo pregled reprezentacija najveće težine i reprezentacija iz tzv. međuserije. Ispitat ćemo strukturu Vermaovog modula i njegovih potkvocijenata.

Struktura Vermaovog modula je već promatrana u članku W. Jiang, Y. Pei [JP], no glavni rezultati su nepotpuni. Naime, pokazat ćemo da uz singularne vektore, Vermaovi moduli u posebnim slučajevima sadrže i subsingularne vektore. To su prvi rezultati u tom smjeru. Egzistencija subsingularnog vektora je u članku [JP] zanemarena. Navest ćemo nužni uvjet za nastupanje takvog slučaja i postaviti slutnju da je taj uvjet i dovoljan. Singularne i subsingularne vektore ćemo zatim iskoristiti u ispitivanju ireducibilnosti tenzorskog produkta modula međuserije i modula najveće težine. Osnovne rezultate o strukturi Vermaovog modula kratko navodimo u drugom odjeljku, dok su detaljni dokazi izdvojeni u posebni odjeljak na kraju poglavlja.

Kao i kod Virasorove algebre, reprezentacije najveće težine 0 (u odnosu na L_0) imaju strukturu algebre verteks operatora, a poznate su i sve pripadne ireducibilne reprezentacije. Spomenut ćemo neke operatore isprepli-tanja među tim reprezentacijama, iako je o njima poznato dosta manje nego li u slučaju Virasorove algebre.

5.1 Definicija i osnovne napomene

W-algebra $W(2,2)$, koju ćemo u daljnjem tekstu označavati s $\mathcal{L}$, je jedna od brojnih generalizacija Virasorove algebre. Prvi su je uveli W. Zhang i C. Dong u članku [ZD] u sklopu klasifikacije prostih verteks-algebri generiranih s dva generatora konformne težine 2. Liejeva algebra $\mathcal{L}$ ima bazu $\{W_n, L_n, C, C_W, : n \in \mathbb{Z}\}$ nad $\mathbb{C}$ i množenje definirano s

$$[L_n, L_m] = (n-m)\, L_{n+m} + \delta_{n,-m}\frac{n^3-n}{12}C,$$
$$[L_n, W_m] = (n-m)\, W_{n+m} + \delta_{n,-m}\frac{n^3-n}{12}C_W,$$
$$[W_n, W_m] = [\mathcal{L}, C] = 0.$$

Napomena 5.1 *U ovoj disertaciji ćemo promatrati slučaj* $C_W = C$.

Algebra $W(2,2)$ se može realizirati iz semidirektnog produkta Virasorove algebre i jednog njenog modula iz međuserije. Osim toga, možemo promatrati *algebru* $\widetilde{V}L$ (*loop-Virasoro algebra*) definiranu kao univerzalno centralno proširenje algebre $\mathrm{Vir} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Tada je $W(2,2) = \widetilde{V}L/\mathbb{C}[t^2]$.

I ova algebra ima prirodnu trokutastu dekompoziciju: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_- \oplus \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_+$ gdje je

$$\mathcal{L}_+ = \bigoplus_{n>0}(\mathbb{C}L_n + \mathbb{C}W_n),$$
$$\mathcal{L}_- = \bigoplus_{n>0}(\mathbb{C}L_n + \mathbb{C}W_n),$$
$$\mathcal{L}_0 = \mathbb{C}L_0 + \mathbb{C}W_0 + \mathbb{C}C.$$

Napomenimo da W_0 na $\mathcal{L}$ ne djeluje poluprosto! Algebru $\mathcal{L}$ možemo prikazati kao direktnu sumu svojstvenih potprostora $\mathcal{L}_n$ operatora L_0: $\mathcal{L}_n = \mathbb{C}L_{-n} + \mathbb{C}W_{-n} + \delta_{n,0}\mathbb{C}C$.

$\mathcal{L}$-modul V je **težinski** ako se može prikazati kao suma L_0-svojstvenih (odnosno težinskih) potprostora $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda$, gdje su $V_\lambda = \{v \in V : L_0 v = \lambda v\}$. Tada je **nosač** od V skup njegovih težina $\operatorname{Supp} V = \{\lambda \in \mathbb{C} : V_\lambda \neq 0\}$. Težinske module s konačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima nazivamo Harish-Chandrinim modulima.

Za težinski modul V kažemo da je **modul najveće** (odnosno najmanje) **težine** $\lambda \in \mathbb{C}$, ako postoji $v \in V_\lambda$ takav da je $V = U(\mathcal{L})v$ i $\mathcal{L}_+ v = 0$ (odnosno $\mathcal{L}_- v = 0$). Nadalje, uvijek pretpostavljamo da je $W_0 v = \mu v$ za neki $\mu \in \mathbb{C}$ iako djelovanje W_0 na V nije poluprosto.

Neka je $U(\mathcal{L})$ univerzalna omotačka algebra od $\mathcal{L}$ i $\mathcal{I}$ lijevi ideal generiran skupom $\{L_n, W_n, C - c\mathbf{1}, L_0 - h\mathbf{1}, W_0 - h_W \mathbf{1} : n \in \mathbb{N}\}$. Tada je $U(\mathcal{L})/\mathcal{I}$ modul najveće težine h i centralnog naboja c kojeg nazivamo **Vermaov modul** i označavamo s $V(c, h, h_W)$. Naravno, $V(c, h, h_W)$ je slobodni $\mathcal{L}_-$-modul te je svaki modul najveće težine izomorfan nekom kvocijentu odgovarajućeg Vermaovog modula. U daljnjem tekstu ćemo ponekad skraćeno pisati 'modul najveće težine (c, h, h_W)'. Vermaov modul se može realizirati i kao inducirani modul $U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_0)} \mathbb{C}v$ gdje je $\mathcal{L}_+ v = 0$, $Cv = c$, $L_0 v = hv$, $W_0 v = h_W v$.

$V(c, h, h_W)$ ima prirodnu $\mathbb{Z}$-gradaciju $V(c, h, h_W) = \bigoplus_{k \geq 0} V(c, h, h_W)_{h+k}$, a PBW bazu od $V(c, h, h_W)_{h+k}$ tvore $W_{-m_s} \cdots W_{-m_1} L_{-n_t} \cdots L_{-n_1} v$, pri čemu je $\sum m_i + \sum n_j = k$, $m_s \geq \cdots \geq m_1 > 0$, $n_t \geq \cdots \geq n_1 > 0$ i v vektor najveće težine u $V(c, h, h_W)$.

Svaki Vermaov modul sadrži jedinstveni maksimalni podmodul $J(c, h, h_W)$ i pripadni ireducibilni kvocijent $L(c, h, h_W)$ je do na izomorfizam jedinstveni ireducibilni modul najveće težine (c, h, h_W). Zhang i Dong su pomoću determinantne formule dali kriterij ireducibilnosti:

Teorem 5.2 ([ZD] Theorem 2.4 na str. 6) *Vermaov modul $V(c, h, h_W)$ je ireducibilan ako i samo ako je $\frac{m^2-1}{12}c + 2h_W \neq 0$ za sve $m \in \mathbb{Z}$.*

Za netrivijalni težinski modul kažemo da pripada **međuseriji** ako je nerastavljiv i ako mu je svaki težinski potprostor jednodimenzionalan. Neka je $V_{\alpha,\beta}$ Vir-modul iz međuserije. S $V_{\alpha,\beta,0}$ označimo $\mathcal{L}$-modul dobiven od $V_{\alpha,\beta}$ uz trivijalno djelovanje W_n za sve $n \in \mathbb{Z}$. Dakle, $V_{\alpha,\beta,0} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v_m : m \in \mathbb{Z}\}$ i

$$L_n v_m = -(m + \alpha + \beta + n\beta)v_{m+n}$$
$$C v_m = W_n v_m = 0, \text{za sve } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Kao i kod međuserije za Virasorovu algebru, parametar α je invarijantan modulo $\mathbb{Z}$, a $V_{\alpha,\beta,0}$ je reducibilan ako i samo ako je $\alpha \in \mathbb{Z}$ i $\beta \in \{0,1\}$. Definiramo $V'_{0,0,0} := V_{0,0,0}/\mathbb{C}v_0$, $V'_{0,1,0} := \bigoplus_{m \neq -1} \mathbb{C}v_m \subseteq V_{0,1,0}$ te $V'_{\alpha,\beta,0} = V_{\alpha,\beta,0}$ za ostale parove $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i na taj način dobijemo seriju ireducibilnih težinskih modula. Očito je $\mathrm{Supp}\, V'_{0,0,0} = \mathrm{Supp}\, V'_{0,1,0} = \mathbb{Z}^*$ i $\mathrm{Supp}\, V'_{\alpha,\beta,0} = -\alpha - \beta + \mathbb{Z}$ za sve ostale parove (α, β).

Teorem 5.3 ([LZ] Theorem 5.2 na str. 18) *Svaki ireducibilni Harish-Chandrin modul nad $\mathcal{L}$ je modul najveće (najmanje) težine ili modul iz međuserije.*

Možemo promatrati i generalizirane međuserije (s dvodimenzionalnim težinskim prostorima) navedene u članku Y. Su, Y. Xu, X. Yue [SXY] (3.3). Navest ćemo samo jednu seriju koja će se javiti kod operatora ispreplitanja:

$B(\lambda, \mu) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v_m^0, v_m^1 : m \in \mathbb{Z}\}$ uz djelovanje

$$L_k v_m^0 = -(\lambda + m + \mu k)v_{m+k}^0, \qquad W_k v_m^0 = -(\lambda + m + \mu k)v_{m+k}^1$$
$$L_k v_m^1 = -(\lambda + m + \mu k)v_{m+k}^1, \qquad W_k v_m^1 = 0, \ \forall k, m \in \mathbb{Z}.$$

5.2 Struktura Vermaovih modula

U nastavku ćemo pokazati da, ukoliko je Vermaov modul reducibilan, singularni vektor općenito leži u $\mathcal{W}$ pa je tada $J(c,h,h_W) \cong V(c,h+p,h_W)$. Odredit ćemo PBW bazu pripadnog kvocijentog modula. U posebnom slučaju, maksimalni podmodul $J(c,h,h_W)$ nije Vermaov, nego ekstenzija Vermaovog modula pa je situacija nešto kompliciranija. Dat ćemo i nužni uvjet za nastupanje ovog posebnog slučaja te primjerima potkrijepiti slutnju da je taj uvjet i dovoljan. Svi rezultati su navedeni u teoremu 5.4, dok je tehnički zahtjevan dokaz svih tvrdnji izdvojen zbog preglednosti poglavlja i nalazi se u odjeljku 5.6.

Smatramo da su vektori

$$W_{-m_s} \cdots W_{-m_1} L_{-n_t} \cdots L_{-n_1} v \tag{5.1}$$

zadani u PBW zapisu, tj. da vrijedi $m_s \geq \cdots \geq m_1 > 0$, i $n_t \geq \cdots \geq n_1 > 0$, ako nije drugačije navedeno.

Za vektor $x = W_{-m_s} \cdots W_{-m_1} L_{-n_t} \cdots L_{-n_1} v$ definiramo W-stupanj kao broj generatora W_i tj. $\deg_W x = s$. Analogno definiramo L-stupanj $\deg_L x = t$. Za $x \in V(c,h,h_W)$ označimo s $\overline{x}$ komponentu od x s najmanjim W-stupnjem. Npr. ako je $x = W_{-3}v + W_{-1}L_{-2}v + W_{-1}^2 L_{-1}v$ onda je $\overline{x} = W_{-3}v + W_{-1}L_{-2}v$. Uvodimo oznaku $\mathcal{W} = \operatorname{span}\{W_{-m_s} \cdots W_{-m_1} v\}$ za skup vektora L-stupnja nula.

Odmah navodimo osnovne rezultate:

Teorem 5.4 *Neka je $V(c,h,h_W)$ Vermaov modul takav da je $2h_W + \frac{p^2-1}{12}c = 0$ za neki $p \in \mathbb{N}$. Tada postoji singularni vektor $u' \in V(c,h,h_W)_{h+p} \cap \mathcal{W}$ takav da je $\overline{u'} = W_{-p}v$ (do na skalarni faktor) te je $U(\mathcal{L})u' \cong V(c,h+p,h_W)$. Bazu kvocijenta $L'(c,h,h_W) := V(c,h,h_W)/U(\mathcal{L})u'$ tvore slike svih vektora oblika $W_{-m_s} \cdots W_{-m_1} L_{-n_t} \cdots L_{-n_1} v$, pri čemu je $m_i \neq p$. Nadalje vrijedi:*

(i) *Ako je* $h \neq h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-r)p}{2}$ *za sve* $r \in \mathbb{N}$*, onda je* $U(\mathcal{L})u' = J(c,h,h_W)$ *maksimalni podmodul u* $V(c,h,h_W)$ *i kvocijent* $L'(c,h,h_W) = L(c,h,h_W)$ *je ireducibilan.*

(ii) *Ako je* $V(c,h,h_W)/U(\mathcal{L})u'$ *reducibilan, onda postoji subsingularni vektor* $u \in V(c,h,h_W)$ *takav da je* $\overline{u} = L_{-p}^r$ *za* $r \in \mathbb{N}$*. Tada je* $J(c,h,h_W)$ *generiran vektorima* u *i* u'*, a bazu ireducibilnog kvocijenta* $L(c,h,h_W)$ *tvore slike svih vektora* $W_{-m_s}\cdots W_{-m_1}L_{-n_t}\cdots L_{-n_1}v$ *u kojima se ne pojavljuje* W_{-p} *ni* L_{-p}^k *za* $k \geq r$*.*

Slutnja 5.5 *Pretpostavimo da je* $2h_W + \frac{p^2-1}{12}c = 0$ *za neki* $p \in \mathbb{N}$*. Tada je* $L'(c,h,h_W)$ *reducibilan ako i samo ako je* $h = h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-r)p}{2}$*.*

Napomena 5.6 *Ako je* $V(c,h,h_W)$ *reducibilan stupnja* p*, onda, prema teoremu 5.4, sadrži podmodul izomorfan* $V(c,h+p,h_W)$ *koji je generiran singularnim vektorom* u'*. No onda je i taj podmodul reducibilan stupnja* p *te sadrži singularni vektor* $(u')^2$ *koji generira podmodul izomorfan* $V(c,h+2p,h_W)$*. Ponavljajući postupak dobijemo beskonačni lanac podmodula*

$$V(c,h,h_W) \supseteq V(c,h+p,h_W) \supseteq \cdots \supseteq V(c,h+kp,h_W) \supseteq \cdots$$

generiranih singularnim vektorima oblika $(u')^k$*. Pretpostavimo li da vrijedi* $h \neq h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-n)p}{2}$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$*, onda su svi pripadni kvocijenti ireducibilni, tj.* $L(c,h+kp,h_W)$ *za* $k \in \mathbb{N}_0$*.*

5.2.1 Primjeri

Singularni vektor $u' \in \mathcal{W}$:

lvl	uvjet	u'
1	$h_W = 0$	$W_{-1}v$
2	$c = -8h_W$	$\left(W_{-2} - \frac{3}{4h_W}W_{-1}^2\right)v$
3	$c = -3h_W$	$\left(W_{-3} - \frac{2}{h_W}W_{-2}W_{-1} + \frac{1}{h_W^2}W_{-1}^3\right)v$
4	$c = -\frac{8}{5}h_W$	$\Big(W_{-4} - \frac{5}{2h_W}W_{-3}W_{-1} - \frac{15}{16h_W}W_{-2}^2 +$ $+\frac{125}{32h_W^2}W_{-2}W_{-1}^2 - \frac{375}{256h_W^3}W_{-1}^4\Big)v$
5	$c = -h_W$	$(W_{-5} - \frac{3}{h_W}W_{-4}W_{-1} - \frac{2}{h_W}W_{-3}W_{-2} + \frac{21}{4h_W^2}W_{-3}W_{-1}^2 +$ $+\frac{3}{h_W^2}W_{-2}^2W_{-1} + \frac{13}{2h_W^3}W_{-2}W_{-1}^3 - \frac{39}{20h_W^3}W_{-1}^5)v$

(Sub)singularni vektor u za $r = 1$:

lvl	uvjet	u
1	$h = h_W = 0$	$L_{-1}v$
2	$h = h_W + \frac{9}{4}$	$\left(L_{-2} - \frac{3}{2h_W}W_{-1}L_{-1} + \frac{12h_W+39}{16h_W^2}W_{-1}^2\right)v$
3	$h = h_W + \frac{20}{3}$	$\Big(L_{-3} - \frac{2}{h_W}W_{-1}L_{-2} - \frac{2}{h_W}W_{-2}L_{-1} + \frac{3}{h_W^2}W_{-1}^2L_{-1}$ $+\frac{58}{3h_W^2}W_{-2}W_{-1} - \frac{2h_w+52}{3h_W^3}W_{-1}^3\Big)v$
4	$h = h_W + \frac{53}{4}$	$\Big(L_{-4} - \frac{5}{2h_W}W_{-1}L_{-3} - \frac{15}{8h_W}W_{-2}L_{-2} + \frac{125}{32h_W^2}W_{-1}^2L_{-2}$ $-\frac{5}{2h_W}W_{-3}L_{-1} + \frac{125}{16h_W^2}W_{-2}W_{-1}L_{-1} - \frac{375}{64h_W^3}W_{-1}^3L_{-1}$ $+\frac{325+20h_W}{8h_W^2}W_{-3}W_{-1} + \frac{8125}{64h_W^3}W_{-2}W_{-1}^2$ $+\frac{975+60h_W}{64h_W^2}W_{-2}^2 + \frac{1125}{256h_W^3}\left(\frac{65}{4h_W}+1\right)W_{-1}^4\Big)v$

(Pomoću računala dobiveni su singularni vektori do nivoa 8.)

Za $h_W = 0$ singularni vektor je $u' = W_{-1}v$. Subsingularni vektori u:

lvl	uvjet	u
1	$h = h_W = 0$	$L_{-1}v$
2	$h = -\frac{1}{2}$	$\left(L_{-1}^2 + \frac{6}{c}W_{-2}\right)v$
3	$h = -1$	$\left(L_{-1}^3 + \frac{12}{c}W_{-3} + \frac{24}{c}W_{-2}L_{-1}\right)v$
4	$h = -\frac{3}{2}$	$\left(L_{-1}^4 + \frac{36}{c}W_{-4} + \frac{60}{c}W_{-3}L_{-1} + \frac{108}{c^2}W_{-2}^2 + \frac{60}{c}W_{-2}L_{-1}^2\right)v$
5	$h = -2$	$\big(L_{-1}^5 + \frac{144}{c}W_{-5} + \frac{48}{c}W_{-4}L_{-1} + \frac{2304}{c^2}W_{-3}W_{-2} +$ $+ \frac{180}{c}W_{-3}L_{-1}^2 + \frac{3312}{c^2}W_{-2}^2L_{-1} + \frac{120}{c}W_{-2}L_{-1}^3\big)v$

Slutnja 5.7 *U subsingularnom vektoru* $u \in V(c, \frac{1-r}{2}, 0)$ *ne pojavljuju se* L_{-k} *za* $k > 1$. *Tada je, posebno,* $W_0u, W_{-1}u \in J'(c, \frac{1-r}{2}, 0)$.

Za $p = r = 2$ subsingularni vektor u je

$$\Bigg(L_{-2}^2 - \frac{3}{4h_W}W_{-4} - \left(\frac{3}{2h_W^2} + \frac{3}{2h_W}\right)W_{-3}W_{-1} + \frac{3}{2h_W}W_{-3}L_{-1} - \frac{3}{2h_W}W_{-1}L_{-3}$$
$$-\frac{3}{h_W}W_{-1}L_{-2}L_{-1} + \left(\frac{3}{2h_W} + \frac{39}{4h_W^2}\right)W_{-1}^2L_{-2} + \frac{9}{4h_W^2}W_{-1}^2L_{-1}^2 +$$
$$-\left(\frac{9}{4h_W^2} + \frac{117}{8h_W^3}\right)W_{-1}^3L_{-1} + \left(\frac{135}{32h_W^4} + \frac{153}{32h_W^3} + \frac{9}{8h_W^2}\right)W_{-1}^4\Bigg)v$$

Za $p=3$, $r=2$ subsingularni vektor u jednak je

$$
\begin{aligned}
&\Big(-\frac{2}{h_W}W_{-6}+\frac{2}{h_W}W_{-5}L_{-1}-\frac{10+6h_W}{3{h_W}^2}W_{-5}W_{-1}+\frac{4}{h_W}W_{-4}L_{-2}\\
&-\frac{80+12h_W}{3{h_W}^2}W_{-4}W_{-2}-\frac{4}{h_W}W_{-2}L_{-4}-\frac{2}{h_W}W_{-1}L_{-5}-\frac{12}{{h_W}^2}W_{-4}W_{-1}L_{-1}\\
&+\frac{5964h_W+33784}{497{h_W}^3}W_{-4}W_{-1}^2-\frac{4}{h_W}W_{-2}L_{-3}L_{-1}-\frac{792}{355{h_W}^3}W_{-2}^3\\
&+\frac{852h_W+7468}{213{h_W}^2}W_{-2}W_{-1}L_{-3}-\frac{4}{h_W}W_{-1}L_{-3}L_{-2}+\frac{6}{{h_W}^2}W_{-1}W_{-1}L_{-4}\\
&+\frac{4}{{h_W}^2}W_{-2}^2L_{-1}^2-\frac{24h_W+184}{3{h_W}^3}W_{-2}^2W_{-1}L_{-1}+\frac{8}{{h_W}^2}W_{-2}W_{-1}L_{-2}L_{-1}\\
&+\frac{12780h_W^2+221520h_W+922\,336}{3195{h_W}^4}W_{-2}^2W_{-1}^2+\frac{6}{{h_W}^2}W_{-1}^2L_{-3}L_{-1}\\
&-\frac{120h_W+968}{15{h_W}^3}W_{-2}W_{-1}^2L_{-2}+\frac{4}{{h_W}^2}W_{-1}^2L_{-2}^2-\frac{852h_W+8278}{213{h_W}^3}W_{-1}^3L_{-3}\\
&-\frac{12}{{h_W}^3}W_{-2}W_{-1}^2L_{-1}^2-\frac{208740h_W+1230368}{7455{h_W}^4}W_{-2}W_{-1}^3L_{-1}\\
&+\frac{89460h_W^2+222006h_W-2099348}{22365{h_W}^5}W_{-2}W_{-1}^4-\frac{12}{{h_W}^3}W_{-1}^3L_{-2}L_{-1}\\
&+\frac{149100h_W+1110268}{7455{h_W}^4}W_{-1}^3L_{-2}-\frac{2982h_W+74468}{2485{h_W}^5}W_{-1}^5L_{-1}\\
&+\frac{9}{{h_W}^4}W_{-1}^4L_{-1}^2-\frac{-1101964-79311h_W+17892h_W^2}{22365{h_W}^6}W_{-1}^6\Big)\,v
\end{aligned}
$$

5.3 Verteks-algebra pridružena algebri $W(2,2)$ i operatori ispreplitanja

Moduli najveće težine za $W(2,2)$-algebru također daju jednu seriju algebri verteks operatora. U [ZD] je pokazano da jedino $L(c,0,0)$ za $c\neq 0$ ima VOA strukturu. Za razliku od Virasorove algebre, ovdje se uvijek radi o iracionalnim verteks-algebrama. Poznate su sve ireducibilne reprezentacije:

Teorem 5.8 ([ZD] Theorem 2.3 na str. 6) *Neka je $c\neq 0$. Tada vrijedi:*

1. *Na* $L(c,0,0)$ *postoji jedinstvena struktura algebre verteks operatora takva da je* v *vakuum vektor,* $\omega = L_{-2}v$ *Virasorov vektor te je* $Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ *i* $Y(W_{-2}v, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} W_n z^{-n-2}$.

2. *Svaki kvocijent* $\mathcal{L}$*-modula* $V(c,h,h_W)$ *je modul za* $L(c,0,0)$.

3. $\{L(c,h,h_W) : h, h_W \in \mathbb{C}\}$ *su svi ireducibilni* $L(c,0,0)$*-moduli u kategoriji* $\mathcal{O}$.

Pokažimo sada kako se mogu realizirati neke međuserije preko teorije verteks-algebri. Neka $M(c,h,h_W)$ označava bilo koji netrivijalni kvocijent Vermaovog modula $V(c,h,h_W)$. U slučaju $h_W = 0$ pretpostavljat ćemo da vrijedi $W_{-1}v = 0$ za vektor najveće težine v. Pretpostavimo da postoji operator ispreplitanja tipa $\binom{M(c,h_3 h'_W)}{M(c,h_1,0) \quad M(c,h_2,h_W)}$. Neka je v vektor najveće težine u $M(c,h_1,0)$ i

$$I(v,z) = z^{-\alpha} \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{(n)} z^{-n-1}$$

pridruženi operator ispreplitanja, $v_{(n)} \in \mathrm{Hom}(M(c,h_2,h_W), M(c,h_3,h'_W))$. Tada je

$$\begin{aligned}
\left[L_m, v_{(n)}\right] &= \sum_{i\geq 0} \binom{m+1}{i} (L_{i-1}v)_{(m+n-i+1)} = \\
&= (L_{-1}v)_{(m+n+1)} + (m+1)(L_0 v)_{(m+n)} = \\
&= -(\alpha + n + m + 1) v_{(m+n)} + (m+1) h_1 v_{(m+n)} = \\
&= -(n + \alpha + (1+m)(1-h_1)) v_{(m+n)}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\left[W_m, v_{(n)}\right] &= \sum_{i\geq 0} \binom{m+1}{i} (W_{i-1}v)_{(m+n-i+1)} = \\
&= (W_{-1}v)_{(m+n+1)} + (m+1)(W_0 v)_{(m+n)} = 0
\end{aligned}$$

Dakle, komponente $v_{(n)}$ razapinju međuseriju $V_{\alpha,\beta,0}$ gdje je $\alpha = h_1 + h_2 - h_3$, $\beta = 1 - h_1$. Ovako je definiran netrivijalni $\mathcal{L}$-operator

$$\Phi : V'_{\alpha,\beta,0} \otimes M(c, h_2, h_W) \to M(c, h_3, h'_W), \quad \Phi(v_{(n)} \otimes v) = v_{(n)} v$$

pa posebno slijedi reducibilnost modula $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes M(c, h_2, h_W)$.

Izdvojimo neke operatore ispreplitanja. Budući da je $M(c, h, h_W)$ modul za verteks-algebru $L(c, 0, 0)$, sigurno postoje operatori tipa

$$\begin{pmatrix} M(c,h,h_W) \\ L(c,0,0) \quad M(c,h,h_W) \end{pmatrix}$$

i transponirani operatori

$$\begin{pmatrix} M(c,h,h_W) \\ M(c,h,h_W) \quad L(c,0,0) \end{pmatrix}.$$

Posebno istaknimo operatore

$$\begin{pmatrix} L(c,h,h_W) \\ L(c,0,0) \quad L(c,h,h_W) \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} L'(c,h,h_W) \\ L(c,0,0) \quad L'(c,h,h_W) \end{pmatrix},$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} L(c,h,0) \\ L(c,h,0) \quad L(c,0,0) \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} L'(c,h,0) \\ L'(c,h,0) \quad L(c,0,0) \end{pmatrix}.$$

Promotrimo još operator ispreplitanja tipa

$$\begin{pmatrix} L(c,h',0) \\ R(c,0,0) \quad L(c,h,0) \end{pmatrix}$$

gdje je $R(c,0,0) = J(c,0,0)/U(\mathcal{L})(W_{-1}u')$. Neka je $I(u,z) = z^{-\alpha} \sum u_{(n)} z^{-n-1}$ te $I(u',z) = z^{-\alpha} \sum u'_{(n)} z^{-n-1}$. (Naravno, $u' = W_{-1}v$ i $u = L_{-1}v$.) Sada imamo

$$\begin{aligned} [L_m, u_{(n)}] &= (L_{-1}u)_{(m+n+1)} + (m+1)(L_0 u)_{(m+n)} = \\ &= -\,(\alpha + n + m + 1)\, u_{(n+m)} + (m+1)\, u_{(n+m)} = \\ &= -(n+\alpha) u_{(n+m)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[W_m, u_{(n)}] &= (W_{-1}u)_{(m+n+1)} + (m+1)(W_0u)_{(m+n)} = \\
&= (L_{-1}u')_{(m+n+1)} + (m+1)u'_{(m+n)} = \\
&= -\left(\alpha + n + m + 1\right) u'_{(n+m)} + (m+1)\, u'_{(n+m)} = \\
&= -(n+\alpha)u'_{(n+m)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[L_m, u'_{(n)}] &= (L_{-1}u')_{(m+n+1)} + (m+1)(L_0u')_{(m+n)} = \\
&= -\left(\alpha + n + m + 1\right) u'_{(n+m)} + (m+1)\, u'_{(n+m)} = \\
&= -(n+\alpha)u'_{(n+m)}
\end{aligned}
$$

$$
[W_m, u'_{(n)}] = (W_{-1}u')_{(m+n+1)} + (m+1)(W_0u')_{(m+n)} = 0
$$

pa $\{u_n, u'_n : n \in \mathbb{Z}\}$ razapinje generaliziranu međuseriju $B(\alpha, 0)$.

5.4 Ireducibilnost modula $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c, h, h_W)$

Sada ćemo ispitati ireducibilnost $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L\,(c, h, h_W)$. U toj proceduri je bitno različita uloga generatora L_n i W_n budući da W_n djeluju trivijalno na međuseriju pa posebno vrijedi $W_n(v_k \otimes xv) = v_k \otimes W_n xv$. Nećemo posebno koristiti strukturu Vermaovog modula, već samo iskoristiti oblik subsingularnog vektora. Prvo ćemo pokazati da vrijedi isti kriteriji kao i za reprezentacije Virasorove algebre.

Teorem 5.9 *Neka su $\alpha, \beta, c, h, h_W \in \mathbb{C}$ proizvoljni. $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c, h, h_W)$ je ireducibilan ako i samo ako je ciklički za svaki vektor $v_m \otimes v$, $m \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Jedan smjer je trivijalan. Pretpostavimo, dakle, da je modul ciklički za svaki $v_m \otimes v$. Pretpostavimo da je U netrivijalni podmodul i $x \in U$ vektor težine $n - m$.

$$
x = v_{m-n} \otimes x_0 + \cdots v_m \otimes x_n
$$

$x_j \in V(c,h,h_W)_{h_1+j}$. Indukcijom po n ćemo pokazati da postoji $v_k \otimes v \in U$ čime je teorem dokazan.
Ako je $n = 0$ tvrdnja je trivijalna. Neka je stoga $n > 0$. Ako je $W_k x_n \neq 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$, imamo

$$W_k x = v_{m-n+k} \otimes y_0 + \cdots + v_m \otimes y_{n-k} \neq 0$$

gdje je $y_j = W_k x_{j+k} \in V(c,h,h_W)_{h+j}$ pa po pretpostavci indukcije postoji $v_k \otimes v \in U$. Budući da L_1, L_2, W_1 i W_2 generiraju $\mathcal{L}_+$, vektori $L_1 x_n$ $L_2 x_n$, $W_1 x_n$ i $W_2 x_n$ nisu istovremeno nula. Dakle, ako je $W_k x_n = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$, mora biti $L_1 x_n \neq 0$ ili $L_2 x_n \neq 0$ pa možemo primijeniti analogni dokaz kao u teoremu 4.3. ∎

Od sada će U_k označavati modul $U(\mathcal{L})(v_k \otimes v)$. Iz teorema 5.9 slijedi:

Korolar 5.10 *Svaki netrivijalni podmodul* $M \subset V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$ *sadrži* U_k *za neki* $k \in \mathbb{Z}$.

Iskoristit ćemo subsingularni vektor u za dokaz ireducibilnosti tenzorskog produkta. Prvo istaknimo jedan tehnički detalj poznat iz reprezentacija Virasorove algebre.

Tvrdnja 1 *Vektor* $v_n \otimes L_{-k_s} \cdots L_{-k_1} v$, *gdje je* $k_1 + \cdots + k_s = k$ *se može prikazati kao*

$$\sum_{i=n-k}^{n} x_{i-n+k}(v_i \otimes v) \text{ gdje je } x_j \in U(\mathrm{Vir}_-)_{-j}$$

Npr.

$$v_4 \otimes L_{-2}L_{-1}v = L_{-2}L_{-1}(v_4 \otimes v) - \lambda v_3 \otimes L_{-2}v - \mu v_2 \otimes L_{-1}v$$

pa iz

$$v_3 \otimes L_{-2}v = L_{-2}(v_3 \otimes v) - \xi v_1 \otimes v$$

$$v_2 \otimes L_{-1}v = L_{-1}(v_2 \otimes v) - \zeta v_1 \otimes v$$

slijedi

$$v_4 \otimes L_{-2}L_{-1}v = L_{-2}L_{-1}(v_4 \otimes v) - \lambda L_{-2}(v_3 \otimes v) - \mu L_{-1}(v_2 \otimes v) + (\lambda\xi + \mu\zeta)v_1 \otimes v.$$

Također uočimo da za $w_i \in \mathcal{W}$ vrijedi $v_n \otimes w_i v = w_i(v_n \otimes v)$.

Teorem 5.11 *Pretpostavimo da u* $V(c, h, h_W)$ *postoji subsingularni vektor* u *takav da je* $\overline{u} = L_{-p}^r v$. *Ako vrijedi* $\alpha + 2\beta,\ \alpha + (1-p)\beta \notin \mathbb{Z}$ *onda je* $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c, h, h_W)$ *ireducibilan.*

Dokaz. Iz $\alpha + 2\beta \notin \mathbb{Z}$ slijedi $U_{n-1} \supseteq U_n$ za sve n. Iskoristimo subsingularni vektor da bismo našli $x \in U(\mathcal{L})$ takav da je $x(v_n \otimes v) = v_{n-1} \otimes v$. Primjetimo da je

$$u(v_{n+rp-1} \otimes v) = L_{-p}^r(v_{n+rp-1} \otimes v) + \sum w_i L_{-k_s} \cdots L_{-k_1}(v_{n+rp-1} \otimes v)$$

gdje je $w_i \in \mathcal{W}_{-i}$, $\deg_W w_i > 0$ i za $k = k_1 + \cdots + k_s$ vrijedi $0 < k < rp$. Naime, možemo pretpostaviti da je $k \neq 0$ jer je $w_i(v_n \otimes v) = v_n \otimes w_i v$, a to je komponenta vektora $v_n \otimes uv = 0$. Nadalje je

$$L_{-k_s} \cdots L_{-k_1}(v_{n+rp-1} \otimes v) = \sum_{i=1}^{k} v_{n+rp-1-i} \otimes L_{-j_m} \cdots L_{-j_1} v,$$

gdje je $0 \leq j_1 + \cdots + j_m = k - i$, a prema tvrdnji 1, sve komponente iz te sume možemo zamijeniti s $\sum_{i=1}^{k} u_i(v_{n+rp-1-i} \otimes v)$ za neke $u_i \in U(\mathrm{Vir}_-)$. Dakle,

$$u(v_{n+rp-1} \otimes v) - \sum_{i=1}^{rp-1} x_i(v_{n+rp-1-i} \otimes v) = L_{-p}^r(v_{n+rp-1} \otimes v) \tag{5.2}$$

za neke $x_i \in U(\mathcal{L}_-)_{rp-i}$. Budući da je $v_{n+l} \otimes v \in U_n$ za $l > 0$, lijeva strana jednakosti je jednaka $x'(v_n \otimes v)$ za neki $x' \in U(\mathcal{L})$.

Preostalo je s desne strane eliminirati komponente $v_{n+ip-1} \otimes L_{-p}^m v$. Radi jednostavnosti uvedimo oznake $\lambda_j := (n + (r-j)p - 1 + \alpha + (1-p)\beta)$ i

$\Lambda_i = \prod_{j=0}^{r-i-1} \lambda_j$. Tada je

$$x'(v_n \otimes v) = L_{-p}^r (v_{n+pr-1} \otimes v) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} \Lambda_i v_{n+ip-1} \otimes L_{-p}^i v \tag{5.3}$$

Oduzmemo li od (5.3) sljedeću relaciju:

$$-\binom{r}{r-1} \lambda_0 L_{-p}^{r-1} (v_{n+(r-1)p-1} \otimes v) =$$

$$= -\binom{r}{r-1} \lambda_0 \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-1-i} \binom{r-1}{i} \left(\prod_{j=1}^{r-1-i} \lambda_j \right) v_{n+ip-1} \otimes L_{-p}^i v =$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i} \binom{r}{r-1} \binom{r-1}{i} \Lambda_i v_{n+ip-1} \otimes L_{-p}^i v$$

s desne strane dobijemo

$$\sum_{i=0}^{r-2} (-1)^{r-i} \left(\binom{r}{i} - \binom{r}{r-1} \binom{r-1}{i} \right) \Lambda_i v_{n+ip-1} \otimes L_{-p}^i v.$$

Koeficijent ispred Λ_{r-2} je $\binom{r}{r-2} - \binom{r}{r-1}\binom{r-1}{r-2} = -\binom{r}{r-2}$ pa u sljedećem koraku oduzimamo

$$-\binom{r}{r-2} \lambda_0 \lambda_1 L_{-p}^{r-2} (v_{n+(r-2)p-1} \otimes v) =$$

$$= -\binom{r}{r-2} \lambda_0 \lambda_1 \sum_{i=0}^{r-2} (-1)^{r-2-i} \binom{r-2}{i} \left(\prod_{j=2}^{r-1-i} \lambda_j \right) v_{n+ip-1} \otimes L_{-p}^i =$$

$$= -\sum_{i=0}^{r-2} (-1)^{r-i} \binom{r}{r-2} \binom{r-2}{i} \Lambda_i v_{n-(r-i)p-1} \otimes L_{-p}^i$$

i s desne strane dobijemo

$$\sum_{i=0}^{r-3} (-1)^{r-i} \left(\binom{r}{i} - \binom{r}{r-1} \binom{r-1}{i} + \binom{r}{r-2} \binom{r-2}{i} \right) \Lambda_i v_{n+ip-1} \otimes L_{-p}^i v.$$

Ponavljajući postupak, nakon $r-1$ koraka ostane

$$(-1)^r \binom{r}{0} \left(\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r}{r-j} \binom{r-j}{0} \right) \Lambda_0 v_{n-1} \otimes v = -\left(\prod_{j=0}^{r-1} \lambda_j \right) v_{n-1} \otimes v =$$

$$= -\left(\prod_{j=0}^{r-1} (n + (r-j)p - 1 + \alpha + (1-p)\beta) \right) v_{n-1} \otimes v.$$

Po pretpostavci je $(n - jp - 1 + \alpha + (1-p)\beta) \neq 0$ za sve $j, n \in \mathbb{Z}$ pa smo dobili $x \in U(\mathcal{L})$ takav da je $x(v_n \otimes v) = v_{n-1} \otimes v$ za sve n. Time je dokaz dovršen. ■

Napomena 5.12 *Radi jednostavnosti smo u prethodnom teoremu pretpostavili $\alpha + 2\beta \notin \mathbb{Z}$, ali može se pokazati da tvrdnja teorema vrijedi i bez te pretpostavke.*

5.5 Reducibilnost modula $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$

Dok smo u slučaju Virasorove algebre reducibilnost tenzorskog produkta dokazali preko operatora ispreplitanja, u dokazu reducibilnosti za $W(2,2)$ ćemo koristiti strukturu Vermaovog modula, odnosno maksimalnog podmodula $J(c,h,h_W)$, navedenu u teoremu 5.4 i dokazanu u odjeljku 5.6 i povezati s nekim operatorima ispreplitanja. Zahvaljujući trivijalnom djelovanju W_n na međuseriju, moguće je dati precizne rezultate o reducibilnosti i u slučaju kada postoje singularni vektori.

Napomena 5.13 *Ako je U_n/U_{n+1} netrivijalni potkvocijent modula $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$, onda iz*

$$L_k(v_n \otimes v) = \lambda v_{n+k} \otimes v \in U_{n+k} \subseteq U_{n+1}, \text{ za } k > 0$$

$$L_0(v_n \otimes v) = (h - n - \alpha - \beta) v_n \otimes v$$
$$W_0(v_n \otimes v) = h_W(v_n \otimes v)$$

vidimo da se radi o modulu najveće težine (c, h_n, h_W) za $h_n = h - \alpha - \beta - n$. Modul $V(c,h_n,h_W)$ je reducibilan ako i samo ako je $V(c,h,h_W)$ reducibilan i *tada je formula za singularni vektor* $u' \in \mathcal{W}$ *jednaka u oba modula (napomena 5.24). Dakle, vrijedi*

$$u'(v_n \otimes v) = 0$$

pa je U_n/U_{n+1} *izomorfan* $L'(c, h_n, h_W)$ *ili nekom njegovom kvocijentu. Naravno, ako je* h_n *kao u teoremu 5.4 (i), onda je riječ o ireducibilnom modulu* $L(c, h_n, h_W)$*. Pretpostavimo da je* $L'(c, h_n, h_W)$ *reducibilan, sa singularnim vektorom* $u \in V(c, h_n, h_W)_{h_n+rp}$*. Promatrajući karaktere, može se pokazati da je niz*

$$0 \to L(c, h_n + rp, h_W) \to L'(c, h_n, h_W) \to L(c, h_n, h_W) \to 0$$

egzaktan. Dakle tada je U_n/U_{n+1} *izomorfan* $L'(c, h_n, h_W)$ *ili* $L(c, h_n, h_W)$*, ovisno o tome je li* $u(v_n \otimes v) \in U_{n+1}$*.*

Teorem 5.14 *Modul* $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes V(c, h, h_W)$ *je reducibilan za sve* $\alpha, \beta, c, h, h_W \in \mathbb{C}$ *i vrijedi* $U_n/U_{n+1} \cong V(c, h - \alpha - \beta - n, h_W)$ *za* $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -\alpha - 2\beta$*.*

Dokaz. Pokazat ćemo da svaki $v_k \otimes v$ generira pravi podmodul. Pretpostavimo suprotno, da je

$$V'_{\alpha,\beta,0} \otimes V(c, h, h_W) = U(\mathcal{L})(v_k \otimes v) = U(\mathcal{L}_-)U(\mathcal{L}_+)(v_k \otimes v).$$

Posebno, postoji $w \in U(\mathcal{L}_-)U(\mathcal{L}_+)$ takav da je $w(v_k \otimes v) = v_{k-1} \otimes v$, tj. postoje $w_i \in U(\mathcal{L}_-)_{-i}$ takvi da je

$$\sum_{i=0}^{l} w_{i+1}(v_{k+i} \otimes v) = v_{k-1} \otimes v.$$

No tada mora vrijediti $v_{k+l} \otimes w_{l+1}v = 0$, što je nemoguće jer je $V(c, h, h_W)$ slobodni $U(\mathcal{L}_-)$-modul.

Ostaje pokazati da je U_n/U_{n+1} Vermaov, odnosno slobodni modul. Primjetimo da je

$$U_{n+1} = \operatorname{span}\left\{u'\left(v_{n+k} \otimes v\right) : u' \in U\left(\mathcal{L}_-\right),\ k > 0\right\}$$

i da svaki $u'(v_{n+k} \otimes v)$ ima komponentu $v_{n+k} \otimes u'v \neq 0$ zbog slobodnog djelovanja $U(\mathcal{L}_-)$ na $V(c,h,h_W)$. Kada U_n/U_{n+1} nebi bio slobodni modul, onda bi za neki $x \in U(\mathcal{L}_-)$ vektor $x(v_n \otimes v)$ bio iz U_{n+1}. No $x(v_n \otimes v)$ ne može imati komponentu $v_{n+k} \otimes u'v$, za $k > 0$ što dokazuje tvrdnju. ■

Oznaka 5.15 *Uvodimo oznaku* $h_{p,r} := h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-r)p}{2}$ *za težinu koja dopušta subsingularni vektor* $u \in V(c, h_{p,r}, h_W)_{h_{p,r}+rp}$. *Naravno, oznaka ovisi o* h_W.

Uvjet $\alpha + 2\beta \notin \mathbb{Z}$ u narednim teoremima osigurava da je $L_1(v_n \otimes v) \neq 0$ pa je $U_n \supseteq U_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Teorem 5.16 *Pretpostavimo da je* $V(c,h,h_W)$ *reducibilan stupnja* p. *Ako je* $h \neq h_{p,r}$ *za sve* $r \in \mathbb{N}$, *onda je modul* $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$ *reducibilan. Uz uvjet* $n \neq -\alpha - 2\beta$ *i* $h - \alpha - \beta - n \neq h_{p,r}$ *za sve* $r \in \mathbb{N}$, *vrijedi* $U_n/U_{n+1} \cong L(c, h-\alpha-\beta-n, h_W)$.

Dokaz. Prema teoremu 5.4, iz uvjeta na h slijedi da je $J(c,h,h_W)$ generiran singularnim vektorom iz $u' \in \mathcal{W}$. Dokazat ćemo da je $U_n \neq U_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $x \in U(\mathcal{L})$ takav da je $x(v_{n+1} \otimes v) = v_n \otimes v$. Tada možemo naći $x_i \in U(\mathcal{L}_-)_{-i}$ takve da je

$$\sum_{i=1}^{t} x_i(v_{n+i} \otimes v) = v_n \otimes v.$$

No tada je sigurno $x_t v = 0$ pa je $x_t \in U(\mathcal{L}_-)u'$. No s obzirom da je $u' \in \mathcal{W}$, slijedi $x_t(v_{n+t} \otimes v) = 0$ pa je ta komponenta u gornjoj sumi suvišna. Ponavljajući postupak pokaže se da je $x_{t-1}(v_{n+t-1} \otimes v) = \cdots = x_1(v_{n+1} \otimes v) = 0$ što je kontradikcija. Dakle, $U_n \nsubseteq U_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Uz zadane uvjete, kvocijent U_n/U_{n+1} je ireducibilan prema napomeni 5.13. ■

Teorem 5.17 *Neka* $V(c,h,h_W)$ *ima subsingularni vektor* u *takav da je* $\overline{u} = L_{-p}^r v$ *te neka vrijedi* $\alpha+2\beta \notin \mathbb{Z}$ *i* $\alpha+(1-p)\beta \in \mathbb{Z}$*. Tada je* $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W)$ *reducibilan. Nadalje, uz uvjet* $2\beta - r \notin \mathbb{N}$*, vrijedi*

$$(V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W))/U_0 \cong L(c, h + (r-\beta)p, h_W).$$

Osim toga, potkvocijenti U_{jp-1}/U_{jp} *su netrivijalni moduli najveće težine* $(c, h+(r-j-\beta)p, h_W)$ *za* $j = 0, \ldots, r-1$*.*

Dokaz. Zbog $\mathbb{Z}$-invarijatnosti α, slobodno možemo pretpostaviti da je $\alpha + (1-p)\beta = 1 - rp$. Kao u dokazu teorema 5.11 dobijemo $x \in U(\mathcal{L}_-)$ takav da je

$$x(v_n \otimes v) = -\left(\prod_{j=0}^{r-1}(n - jp)\right) v_{n-1} \otimes v$$

Iz čega slijedi $U_{n-1} \subseteq U_n$ za $n \in \mathbb{Z} \setminus \{jp : j = 0, \ldots, r-1\}$ odnosno

$$\cdots = U_{-1} \supseteq U_0 = \cdots = U_{p-1} \supseteq U_p = \cdots = U_{(r-1)p-1} \supseteq U_{(r-1)p} = \cdots$$

Pokažimo da je U_{jp} pravi podmodul od U_{jp-1}. U suprotnom bi postojao $x \in U(\mathcal{L})$ takav da je $x(v_{jp} \otimes v) = v_{jp-1} \otimes v$, odnosno postojali bi $x_i \in U(\mathcal{L}_-)_{-i}$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^{t} x_i(v_{jp+i-1} \otimes v) = v_{jp-1} \otimes v. \tag{5.4}$$

Zaključujemo da mora biti $x_t v = 0$ pa je $x_t \in U(\mathcal{L}_-)u$. Posebno mora biti $t \geq rp$. Pretpostavimo da je $t = rp$, tj. $x_{rp} = u$. Kao u (5.2) vidimo da se $x_{rp}(v_{jp+rp-1} \otimes v)$ može prikazati kao

$$\sum_{i=1}^{rp-1} u_i(v_{jp+rp-1-i} \otimes v) + L_{-p}^r(v_{(r+j)p-1} \otimes v).$$

Budući da zbog uvjeta na α i β vrijedi $L_{-p}^r(v_{(r+j)p-1} \otimes v) = 0$, slijedi da je komponenta $x_{rp}(v_{(r+j)p-1} \otimes v)$ suvišna u (5.4) jer se može prikazati preko

$x_1(v_{jp} \otimes v), \ldots, x_{rp-1}(v_{jp+rp-2} \otimes v)$. No tada bi moralo vrijediti $x_{rp-1} \in U(\mathcal{L}_-)u$ što je nemoguće jer je $x_{rp-1} \in U(\mathcal{L}_-)_{1-rp}$. Dakle, $t > rp$ pa nastavljamo indukcijom. Neka je $x_t = y_{t-rp}u$. Opet, kao u (5.2), vidimo da je za neke $u_i \in U(\mathcal{L}_-)_{i-rp}$

$$u(v_{jp+t-1} \otimes v) = \sum_{i=1}^{rp} u_i(v_{jp+t-1-i} \otimes v)$$

pa imamo

$$x_t(v_{jp+t-1} \otimes v) = \sum_{i=1}^{rp} z_i(v_{jp+t-1-i} \otimes v)$$

gdje je $z_i \in U(\mathcal{L}_-)_{i-t}$. Dakle, komponentu $x_t(v_{jp+t-1} \otimes v)$ se može prikazati preko $z_1(v_{jp+t-2} \otimes v), \ldots, z_{rp}(v_{jp+t-rp-1} \otimes v)$ pa je ta komponenta suvišna u (5.4), čime dobijemo kontradikciju. Slijedi da je U_{jp} pravi podmodul od U_{jp-1}.

Iz uvjeta $2\beta - r \notin \mathbb{N}$ slijedi $h + (r-\beta)p \neq h_{p,r'}$ za sve $r' \in \mathbb{N}$ pa je, prema napomeni 5.13, $(V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,h,h_W))/U_0$ ireducibilan. ■

Napomena 5.18 *Detaljna analiza pravila fuzije za $W(2,2)$-module je vrlo komplicirana i zahtjeva metode koje prelaze okvire ove radnje. No, očekujemo da postoje operatori tipa*

$$\begin{pmatrix} & L(c, h+(r-\beta)p, h_W) & \\ L(c, 1-\beta, 0) & & L(c,h,h_W) \end{pmatrix}$$

što bi povlačilo egzistenciju netrivijalnih homomorfizama (i izomorfizama) iz prethodnog teorema.

Napomena 5.19 *$V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(c,0,0)$ je ireducibilan ako i samo ako je $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Za $2\beta - 1 \notin \mathbb{N}$, vrijedi*

$$\left(V'_{0,\beta,0} \otimes L(c,0,0)\right)/U_0 \cong L(c, 1-\beta, 0).$$

Pretpostavimo sada da je $2\beta - 1 = r' \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\left(V'_{0,\beta,0} \otimes L(c,0,0)\right)/U_0$ *modul najveće težine* $(c, \frac{1-r'}{2}, 0)$. *Pretpostavimo da u* $V(c, \frac{1-r'}{2}, 0)$ *postoji (slutnja 5.5) subsingularni vektor* u *takav da je* $\overline{u} = L_{-1}^{r'}v$ *i da se u PBW zapisu ne pojavljuju* L_k *za* $k > 1$ *(slutnja 5.7). Možemo pisati* $u = (L_{-1}^{r'} + \sum_{i=0}^{r'-1} w_i L_{-1}^i)v$ *za neke* $w_i \in \mathcal{W}$ *pa je*

$$u(v_{-1} \otimes v) = \sum_{i=0}^{r'} v_{-1-i} \otimes w'_i v$$

No, budući da je $L_{-1}(v_0 \otimes v) = W_{-1}(v_0 \otimes v) = 0$, *slično kao u dokazu teorema 4.10 vrijedi*

$$U_0 = \operatorname{span}\left\{x(v_k \otimes v) : k \in \mathbb{N}, x \in U(\mathcal{L}_- \setminus \{L_{-1}\}\right\},$$

a $x(v_k \otimes v)$ *onda ima sigurno komponentu* $v_k \otimes xv \neq 0$. *Dakle, svaki vektor iz* U_0 *mora imati komponentu* $v_k \otimes xv$ *za neki* $k \in \mathbb{N}$ *i* $x \in U(\mathcal{L}_-)$ *pa je jasno da* $u'(v_{-1} \otimes v)$ *nije iz* U_0. *Iz toga vidimo da za* $2\beta - 1 = r' \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\left(V'_{0,\frac{1+r'}{2},0} \otimes L(c,0,0)\right)/U_0 \cong L'(c, \frac{1-r'}{2}, 0).$$

Napomena 5.20 *Uočimo da postoje netrivijalni operatori ispreplitanja tipa*

$$\begin{pmatrix} & L(c,1-\beta,0) & \\ L(c,1-\beta,0) & & L(c,0,0) \end{pmatrix},$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} & L'(c,\frac{1-r'}{2},0) & \\ L'(c,\frac{1-r'}{2},0) & & L(c,0,0) \end{pmatrix}.$$

Ranije smo vidjeli da to povlači egzistenciju netrivijalnih homomorfizama:

$$V'_{0,\beta,0} \otimes L(c,0,0) \to L(c,1-\beta,0),$$
$$V'_{0,\frac{1+r'}{2},0} \otimes L(c,0,0) \to L'(c, \frac{1-r'}{2}, 0).$$

Dakle, tvrdnje iz prethodnog korolara slijede iz egzistencije operatora ispreplitanja.

5.6 Dokaz teorema 5.4

Dokaz teorema 5.4 provodimo u više koraka koje ćemo navesti u terminima tehničkih lema. U postupku ćemo opisati izgled singularnog vektora, koji koristimo kod ispitivanja ireducibilnosti tenzorskog produkta.

U nastavku poglavlja pretpostavljamo da vrijedi $2h_W + \frac{p^2-1}{12}c = 0$ **za neki** $p \in \mathbb{N}$.

Označimo s $V(c,h,h_W)^W_{(k)}$ potprostor svih vektora W-stupnja k. Primijetimo da tada za $x \in V(c,h,h_W)^W_{(k)}$ vrijedi

$$\begin{aligned} W_n x &\in V(c,h,h_W)^W_{(k)} \oplus V(c,h,h_W)^W_{(k+1)} \\ L_n x &\in V(c,h,h_W)^W_{(k-1)} \oplus V(c,h,h_W)^W_{(k)}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Na $V(c,h,h_W)$ definiramo djelovanje formalnih parcijalnih derivacija $\frac{\partial}{\partial L_{-n}}$ i $\frac{\partial}{\partial W_{-n}}$ s

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial I_{-j}}{\partial W_{-m}} = \delta_{jm}, & \dfrac{\partial L_{-j}}{\partial W_{-m}} = 0, & \dfrac{\partial v}{\partial W_{-m}} = 0, \\ \dfrac{\partial I_{-j}}{\partial L_{-n}} = 0, & \dfrac{\partial L_{-j}}{\partial L_{-n}} = \delta_{jn}, & \dfrac{\partial v}{\partial L_{-n}} = 0, \end{array}$$

uz proširenje na PBW monome (5.1) prema Leibnitzovom pravilu. Konačno, linearno proširujemo djelovanje derivacija na cijeli $V(c,h,h_W)$.

Sljedeću lemu, koju su dokazali Jiang i Pei, ćemo koristiti u više navrata:

Lema 5.21 ([JP] Lemma 3.2 na str. 5) *Neka je* $0 \neq x \in V(c,h,h_W)$ *te neka* $\overline{x}$ *ima* W*-stupanj* k*.*

a) *Ako je* $\overline{x} \notin \mathcal{W}$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *je najmanji takav da se* L_{-n} *javlja u* $\overline{x}$*, onda je komponenta od* $W_n x$ *koja ima* W*-stupanj* k *dana s*

$$n\left(2h_W + \frac{n^2-1}{12}c\right)\frac{\partial \overline{x}}{\partial L_{-n}}.$$

b) *Ako je* $\overline{x} \in \mathcal{W}$, $\overline{x} \notin \mathbb{C}v$ *i* $m \in \mathbb{N}$ *najveći takav da se* W_{-m} *pojavljuje u* $\overline{x}$, *onda je komponenta od* $L_m x$ *koja ima* W*-stupanj* $k-1$ *dana s*

$$m\left(2h_W + \frac{m^2-1}{12}c\right)\frac{\partial \overline{x}}{\partial W_{-m}}.$$

Dokaz. (a) Iz (5.5) je vidljivo da dio od $W_n x$ koji ima W-stupanj k dolazi upravo od $W_n\overline{x}$. Neka je $y = W_{-m_k}\cdots W_{-m_1}L_{-n_t}\cdots L_{-n_1}v$ neka komponenta od $\overline{x}$. Imamo

$$W_n y = \sum_{i=1}^{t} W_{-m_k}\cdots W_{-m_1}L_{-n_t}\cdots[W_n, L_{-n_i}]\cdots L_{-n_1}v$$

i $n_1 \geq \cdots \geq n_t \geq n$. Ako je $n_i > n$, onda je

$$[W_n, L_{-n_i}] = (n+n_i)W_{n-n_i}$$

pa je W-stupanj pripadne komponente od $W_n x$ jednak $k+1$. Ako je pak $n_i = n$, onda imamo

$$[W_n, L_{-n}] = n\left(2W_0 + \frac{n^2-1}{12}C\right)$$

pa ovaj dio doprinosi komponenti W-stupnja k s $n(2h_W + \frac{n^2-1}{12}c)\frac{\partial \overline{x}}{\partial L_{-n}}$. To dokazuje (a).

(b) se dokazuje analogno. ■

Prva primjena prethodne leme je u

Lema 5.22 ([JP] Lemma 3.3 na str. 6) *Neka je* $u \in V(c,h,h_W)_{h+p}$ *singularni vektor. Tada (do na skalarni faktor) vrijedi* $\overline{u} = L_{-p}v$ *ili* $\overline{u} = W_{-p}v$.

Dokaz. Prvo primjetimo da prema teoremu 5.2 u $V(c,h,h_W)_{h+p}$ sigurno postoji singularni vektor. Pretpostavimo da $\overline{u}$ nije višekratnik ni od $L_{-p}v$ ni od $W_{-p}v$. Ako vrijedi $\overline{u} \notin \mathcal{W}$, prema lemi 5.21 a) možemo naći $n < p$ takav da je $W_n u \neq 0$ pa u nije singularni vektor. Ako je $\overline{u} \in \mathcal{W}$ i $\overline{u} \notin \mathbb{C}v$ dobijemo kontradikciju na sličan način, koristeći tvrdnju b). ■

Dakle, singularni vektor na nivou p je oblika

$$L_{-p}v + (\text{komponente koje sadrže barem jedan faktor } W_{-i})$$

ili oblika

$$W_{-p} + (\text{komponente koje sadrže barem dva faktora } W_{-i}).$$

Stavimo $u_0 = u$, $u_1 = u - \overline{u}$ i dalje induktivno $u_n = u_{n-1} - \overline{u_{n-1}}$. Očito je

$$u = \sum_{n \geq 0} \overline{u_n}, \text{gdje je } \overline{u_0} = L_{-p}v \text{ ili } W_{-p}v.$$

Npr. $$u = \underbrace{L_{-3}v}_{\overline{u_0}} + \overbrace{\underbrace{W_{-3}v + W_{-1}L_{-2}v}_{\overline{u_1}} + \underbrace{\overbrace{W_{-1}^3 v}^{u_2}}_{\overline{u_2}}}^{u_1}.$$

Lema 5.23 *Neka je $u \in V(c,h,h_W)_{h+p}$ singularni vektor takav da je $\overline{u} = W_{-p}v$. Tada je $u \in \mathcal{W}$ i $U(\mathcal{L})\,u \cong V(c, h+p, h_W)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $n \in \mathbb{N}$ najmanji takav da $\overline{u_n}$ sadrži neki L_{-i} i neka je $\deg_W \overline{u_n} = k$. Nadalje, neka je $m \in \mathbb{N}$ najmanji takav da se L_{-m} pojavljuje u $\overline{u_n}$. Tada je, prema lemi 5.21 a), komponenta od $W_m u_n$ W-stupnja k jednaka $m\left(2h_W + \frac{m^2-1}{12}c\right)\frac{\partial \overline{u_n}}{\partial L_{-m}} \neq 0$. No

$$W_m u_n = W_m u - W_m \overline{u_{n-1}} = 0$$

jer je u singularni vektor, a $\overline{u_{n-1}}$ je po pretpostavci iz $\mathcal{W}$, što daje kontradikciju.

Budući da je $u \in \mathcal{W}$, slijedi $W_0 u = h_W u$ pa je $U(\mathcal{L})\,u$ Vermaov modul najveće težine $h+p$. ■

Napomena 5.24 *Fiksirajmo* c *i* h_W *takve da je* $2h_W + \frac{p^2-1}{12}c = 0$ *za neki* $p \in \mathbb{N}$. *Neka je* u *singularni vektor iz* $\mathcal{W}_{h+p}$. *Iz sustava linearnih jednadžbi dobivenih iz uvjeta* $L_i u = 0$ *za* $i = 1, \ldots, p$ *se lako vidi da su svi koeficijenti uz komponente vektora* u *iz* $\mathbb{C}(h_W)$, *odnosno da za sve* h, *ovakav singularni vektor* u *izgleda jednako. Npr.* $W_{-1}v$ *je singularni vektor u* $V(c,h,0)$ *za svaki* h. *Posebno, u* $V(c,0,0)$ *je i* $L_{-1}v$ *također singularni vektor.*

Pretpostavimo sada da je $u \in V(c,h,h_W)_{h+p}$ singularni vektor takav da je $\overline{u} = L_{-p}v$. Tada je $u = \sum_{n \geq 0} \overline{u_n}$, gdje je $u_0 = L_{-p}v$.

Lema 5.25 *Ako je* $\overline{u} = L_{-p}v$, *onda je* $\deg_L u = 1$.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po W-komponentama. Pretpostavimo da je $\deg_L \overline{u_j} \leq 1$ za $j < n$. Ako je $\overline{u_n} \in \mathcal{W}$ tvrdnja je dokazana. U suprotnom, pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ najmanji takav da se L_{-i} javlja u $\overline{u_n}$ te neka je $\deg_W \overline{u_n} = k$. Tada je, prema lemi 5.21 a) komponenta od $W_i u_n$ W-stupnja k netrivijalna. Budući da je $u_n = u - \sum_{i=0}^{n-1} \overline{u_i}$ slijedi

$$W_i u_n = -\sum_{i=0}^{n-1} W_i \overline{u_i} \in \mathcal{W}$$

jer su svi $\overline{u_i}$ po pretpostavci L-stupnja najviše 1. Prema tome vrijedi

$$i\left(2h_W + \frac{i^2-1}{12}c\right)\frac{\partial \overline{u_n}}{\partial L_{-i}} \in \mathcal{W}$$

pa su komponente od $\overline{u_n}$ koje sadrže L_{-i} su L-stupnja 1. Sada od $\overline{u_n}$ oduzmemo te komponente i ponavljamo postupak dok ne ostane komponenta iz $\mathcal{W}$. ■

Lema 5.26 $\overline{u_1} = \frac{1-p^2}{2h_W} \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i(p-i)} W_{-(p-i)} L_{-i} v + \lambda W_{-p} v.$

Dokaz. Iz prethodne leme znamo da se u $\overline{u_1}$ javljaju samo komponente oblika $W_{-(p-i)}L_{-i}v$, $i \in \{0,\dots,p-1\}$. Neka je $i \in \{1,\dots,p-1\}$. Tada $L_{p-i}u$ sadrži komponentu $[L_{p-i}, L_{-p}]v = (2p-i)L_{-i}v \neq 0$. Budući da je $L_{p-i}u = 0$, mora postojati još barem jedna komponenta x od u takva da je $L_{p-i}x \in \mathbb{C}L_{-i}v$. Lako se vidi da je $W_{-(p-i)}L_{-i}v$ jedina komponenta s tim svojstvom. Slijedi da je koeficijent uz $W_{-(p-i)}L_{-i}v$ jednak

$$\frac{i-2p}{(p-i)\left(2h_W + \frac{(p-i)^2-1}{12}c\right)}$$

pa koristeći $2h_W + \frac{p^2-1}{12}c = 0$ dobijemo $\frac{1-p^2}{2h_W i(p-i)}$. ■

Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lambda = 1$, tj. singularni vektor u je normiran po komponentama L_{-p} i W_{-p}.

Teorem 5.27 *Neka je $u \in V(c,h,h_W)_{h+p}$ singularni vektor sa svojstvom $\overline{u} = L_{-p}v$. Tada je $h = h_W + \frac{13p+1}{12}(p-1)$.*

Dokaz. Lako se vidi da je $L_p x = 0$ ako je $x \in V(c,h,h_W)_{h+p}$, $\deg_W x > 1$. Dakle, $0 = L_p u = L_p L_{-p} v + L_p \overline{u_1}$ odnosno

$$\begin{aligned}0 &= 2p(h-h_W) + \frac{1-p^2}{2h_W}\sum_{i=1}^{p-1}\frac{2p-i}{i(p-i)}2h_W i\frac{i^2-p^2}{1-p^2} = \\ &= 2p(h-h_W) - \sum_{i=1}^{p-1}(2p-i)(p+i)\end{aligned}$$

iz čega slijedi tražena relacija. ■

Prema lemi 5.25, možemo pisati $u = w_0 v + \sum_{i=1}^{p-1} w_i L_{-i}v + L_{-p}v$, gdje je $w_i \in U(\mathcal{L}_-)_{p-i}$, $\deg_L w_i = 0$ za $i = 0,1,\dots,p-1$. Iz leme 5.26 slijedi $w_i \neq 0$. Sada djelovanjem s W_{p-n} dobijemo rekurzivnu relaciju za w_n, $n = 1,\dots,p-1$.

$$\begin{aligned}0 &= W_{p-1}u = w_{p-1}[W_{p-1}, L_{-(p-1)}]v + [W_{p-1}, L_{-p}]v = \\ &= \frac{2p-1}{p+1}2h_W w_{p-1}v + (2p-1)\,W_{-1}v\end{aligned}$$

Odnosno: $w_{p-1} = -\frac{p+1}{2h_W}W_{-1}$. (Koristili smo $[W_n, L_{-n}]v = 2h_W n \frac{n^2-p^2}{1-p^2}v$.) Iz izraza za $W_{p-2}u$ dobijemo w_{p-2} i td. Općenito:

$$w_n = \frac{p^2-1}{2h_W n(n^2-p^2)}\left(\sum_{i=n+1}^{p-1}(n+i)\,w_i W_{-(i-n)} + (n+p)\,W_{-(p-n)}\right),$$

za $n = 1, \ldots, p-1$.

Napomena 5.28 *Prirodno se postavlja pitanje možemo li djelovanjem iz sustava jednadžbi $L_i u = 0$, $i = 1, \ldots, p$ dobiti izraz za w_0 i time dokazati obrat teorema 5.27. No na ovaj način se dobiju znatno kompliciraniji sustavi jednadžbi čiju je rješivost teško pokazati. Naime, ako w_0 normiramo po $W_{-p}v$, broj nepoznanica je $P(p)-1$, dok je broj jednadžbi jednak $\sum_{i=1}^{p-1}P(p-i)$, gdje je P Kostantova funkcija.*

Korolar 5.29 *Neka je $2h_W + \frac{p^2-1}{12}c = 0$ za neki $p \in \mathbb{N}$. Tada postoji singularni vektor $u' \in V(c,h,h_W)_{h+p}$ takav da je $\overline{u'} = W_{-p}$. Podmodul $U(\mathcal{L})u'$ je izomorfan $V(c,h+p,h_W)$.*

Dokaz. Iz leme 5.22 znamo da je $\overline{u} = W_{-p}v$ ili $\overline{u} = L_{-p}v$. U prvom slučaju tvrdnja slijedi iz leme 5.23. Ako je $\overline{u} = L_{-p}$, onda je $W_0 u = h_W u + pu'$ i u' je očito singularni vektor iz $\mathcal{W}$ za koji vrijedi

$$pu' = \sum_{i=1}^{p} i w_i W_{-i}v \in \mathcal{W} \text{ gdje je } w_p = 1.$$

(Pišemo pu' da bi u' bio normiran po W_{-p}.) Dakle, opet postoji singularni vektor iz $\mathcal{W}_p$ koji generira podmodul izomorfan $V(c,h+p,h_W)$. ■

U nastavku poglavlja smatramo da je $u' \in V(c,h,h_W)$ **singularni vektor takav da je** $\overline{u'} = W_{-p}v$. Uvodimo oznake $J'(c,h,h_W) := U(\mathcal{L})\,u'$ i $L'(c,h,h_W) = V(c,h,h_W)/J'(c,h,h_W)$.

Lema 5.30 *Neka je $0 \neq x \in J'(c,h,h_W)$. Tada u $\overline{x}$ postoji komponenta koja sadrži faktor W_{-p}.*

Dokaz. Možemo pisati $x = yu'$, gdje je $y \in U(\mathcal{L}_-)$. Budući da algebra $U(\mathcal{L}_-)$ nema djelitelja nule, to je $\overline{x} = \overline{y}\overline{u'}$. No $\overline{u'} = W_{-p}v$ pa će sve komponente maksimalne duljine u $\overline{x}$ sadržavati W_{-p}. ■

Uvedimo oznaku $P_2(n) = \sum_{i=0}^{n} P(n-i)P(i)$, gdje je P Kostantova funkcija, uz dogovor $P(0) = 1$. Tada je

$$\operatorname{char} V(c,h,h_W) = q^h \sum_{n\geq 0} P_2(n)q^n = q^h \prod_{k\geq 1}(1-q^k)^{-2}.$$

Budući da je $J'(c,h,h_W)$ također Vermaov (lema 5.23), slijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{char} J'(c,h,h_W) &= q^{h+p} \sum_{n\geq 0} P_2(n)q^n = q^{h+p} \prod_{k\geq 1}(1-q^k)^{-2}, \\
\operatorname{char} L'(c,h,h_W) &= \operatorname{char} V - \operatorname{char} J = q^h(1-q^p) \sum_{n\geq 0} P_2(n)q^n = \\
&= q^h(1-q^p) \prod_{k\geq 1}(1-q^k)^{-2}.
\end{aligned}$$

Lema 5.31 *Neka je B' skup svih vektora $W_{-m_s} \cdots W_{-m_1} L_{-n_t} \cdots L_{-n_1} v$ modulo $J'(c,h,h_W)$, gdje je $m_i \neq p$. Tada je B' baza modula $L'(c,h,h_W)$.*

Dokaz. Linearna kombinacija vektora iz B' očito ne može sadržavati W_{-p} pa, prema lemi 5.30, nije nula. Time je dokazana linearna nezavisnost. Jednostavnom kombinatorikom se pokaže da je karakter vektorskog prostora s bazom B' jednak $q^h(1-q^p)\sum_{n\geq 0} P_2(n)q^n$, što dokazuje da je B' baza modula $L'(c,h,h_W)$. ■

Ispitajmo sada reducibilnost modula $L'(c,h,h_W)$.

Teorem 5.32 *Modul $L'(c,h,h_W)$ je ili ireducibilan ili sadrži singularni vektor x takav da je $\overline{x} \in \mathbb{C}L_{-p}^r$ za neki $r \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $x \in L'(c,h,h_W)$ takav da je $\mathcal{L}_+ x = 0$, tj. ako x promatramo kao vektor iz $V(c,h,h_W)$, onda je $\mathcal{L}_+ x \in J'(c,h,h_W)$. Pokazat ćemo da je tada ili $x \in \mathbb{C}v + J'(c,h,h_W)$ ili je x singularni vektor sa svojstvom $\overline{x} \in \mathbb{C}L_{-p}^r$. Slobodno možemo pretpostaviti da je x homogen i da je zadan u bazi B'. Pretpostavimo da je $\overline{x} \in \mathcal{W}$ i $\overline{x} \notin \mathbb{C}v$. Prema lemi 5.21 b), postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da dio od $L_m x$ najnižeg W-stupnja nije nula i nema W_{-p} (jer je baza B' zatvorena na parcijalne derivacije). Dakle, prema lemi 5.30 $L_m x$ ne može biti iz $J'(c,h,h_W)$ što je kontradikcija s pretpostavkom.

Pretpostavimo zato da $\overline{x} \notin \mathcal{W}$ i da je $\deg_W \overline{x} = k$. Neka je n najmanji takav da se L_{-n} javlja u $\overline{x}$. Tada je dio od $W_n x$ W-stupnja k dan s $n\left(2h_W + \frac{n^2-1}{12}c\right)\frac{\partial \overline{x}}{\partial L_{-n}}$. Ako je $n \neq p$, kao i prije dobijemo kontradikciju iz čega slijedi da je $x \in \mathbb{C}v$, tj. $L'(c,h,h_W)$ je ireducibilan.
Pretpostavimo da je $n = p$. Neka je n' nakon p najmanji takav da se $L_{-n'}$ javlja u $\overline{x}$. Budući da je

$$W_{n'} y = \sum_{i=1}^{t} W_{-m_k} \cdots W_{-m_1} L_{-n_t} \cdots [W_{n'}, L_{-n_i}] \cdots L_{-n_1} v$$

gdje je y homogena komponenta od $\overline{x}$, a $n_1 = p$ ili $n_1 \geq n'$, jedina komponenta koja daje dio W-stupnja k je ona u kojoj se javlja $L_{-n'}$. Dio W-stupnja k je tada $n'\left(2h_W + \frac{n'^2-1}{12}c\right)\frac{\partial \overline{x}}{\partial L_{-n'}}$. S obzirom da je $n' \neq p$ i da se u $\overline{x}$ ne pojavljuje W_{-p}, dobili smo da $0 \neq W_{n'} x \in J'(c,h,h_W)$ nema W_{-p} u $\overline{W_{n'} x}$ - kontradikcija. Prema tome, u $\overline{x}$ nema drugih L_{-n} osim L_{-p}.

Dokažimo sada da je $\overline{x} \in \mathbb{C}L_{-p}^r v$. Neka je m najveći takav da se W_{-m} pojavljuje u $\overline{x}$. Slično kao u lemi 5.21, pokaže se da je dio vektora $L_m x$ W-stupnja $k-1$ dan s $m\left(2h_W + \frac{m^2-1}{12}c\right)\frac{\partial \overline{x}}{\partial W_{-m}}$. Naime, svaka druga komponenta W-stupnja $k-1$ dobivena iz $L_m W_{-n_k} \cdots W_{-n_1} L_{-p}^r v$ bi sadržavala $[W_p, L_{-p}]$ pa je pripadni koeficijent nula. Budući da m mora biti različit od p, slijedi da $0 \neq L_i x \in J'(c,h,h_W)$ nema W_{-p} što je kontradikcija s lemom 5.30. ■

U slučaju $r = 1$ radi se o singularnom vektoru opisanom ranije, dok je za $r > 1$ riječ o subsingularnom vektoru $u \in V(c, h, h_W)$. Pokažimo da takav vektor stvarno može postojati.

Primjer 5.33 *$(L_{-1}^2 + \frac{6}{c} W_{-2})v$ je subsingularni vektor u $V(c, -\frac{1}{2}, 0)$, tj. $\mathcal{L}_+ u \in U(\mathcal{L}) W_{-1} v$.*

$(L_{-1}^3 + \frac{12}{c} W_{-3} + \frac{24}{c} W_{-2} L_{-1})v$ je subsingularni vektor u $V(c, -1, 0)$.

Sljedeći korak je dati nužan uvjet za egzistenciju subsingularnog vektora u. Promotrimo $L_p u$. Budući da je $\overline{u} = L_{-p}^r$, u $L_p u$ se javlja komponenta

$$L_p L_{-p}^r v = \left(n \frac{p^3 - p}{12} c + 2p \sum_{i=1}^{r-1} (h + ip) \right) L_{-p}^{r-1} v = rp(2h - 2h_W + (r-1)p) L_{-p}^{r-1} v.$$

No $L_{-p}^{r-1} v$ se ne može javiti u vektoru iz $J'(c, h, h_W)$ pa koeficijent uz $L_{-p}^{r-1} v$ u $L_p u$ mora biti nula. Jedine komponente od u koje će dati $L_{-p}^{r-1} v$ u $L_p u$ su one oblika $\lambda_i W_{-i} L_{-p}^{r-1} L_{-(p-i)} v$ za $i = 1, \ldots, p-1$. Te komponente doprinose s $\lambda_i L_p W_{-i} L_{-p}^{r-1} L_{-(p-i)} v$ tj. s

$$(p+i)(p-i) \left(2h_W + \frac{(p-i)^2 - 1}{12} c \right) L_{-p}^{r-1} v = 2h_W i (2p - i) \frac{p^2 - i^2}{p^2 - 1} L_{-p}^{r-1} v.$$

Preostaje naći koeficijent λ_i. Promotrimo $L_i u$ za $i = 1, \ldots, p-1$. Vektor $\lambda_i L_i W_{-i} L_{-p}^{r-1} L_{-(p-i)} v$ daje komponentu

$$2 \lambda_i h_W i \frac{p^2 - i^2}{p^2 - 1} L_{-p}^{r-1} L_{-(p-i)} v.$$

Jedina komponenta od u koja u $L_i u$ također doprinosi s $L_{-p}^{r-1} L_{-(p-i)} v$ je $L_{-p}^r v$ i to s

$$n(p+i) L_{-p}^{r-1} L_{-(p-i)} v.$$

Budući da se ni $L_{-p}^{r-1} L_{-(p-i)} v$ ne može javiti u vektoru iz $J'(c, h, h_W)$, pripadni koeficijent mora biti nula. Dakle, iz

$$n(p+i) + 2 \lambda_i h_W i \frac{p^2 - i^2}{p^2 - 1} = 0$$

dobijemo

$$\lambda_i = -r\frac{p^2-1}{2h_w i(p-i)}.$$

Sada izjednačimo koeficijent uz $L_{-p}^{r-1}v$ u $L_p u$ s nulom:

$$rp(2h-2h_W+(r-1)p)-2rh_W\sum_{i=1}^{p-1} i(2p-i)\frac{p^2-i^2}{p^2-1}\frac{p^2-1}{2h_w i(p-i)}=0$$

iz čega dobijemo

$$h = h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-r)p}{2}.$$

Primjetimo da gornja jednakost generalizira uvjet iz teorema 5.27 za $r=1$.

Korolar 5.34 *Ako u $V(c,h,h_W)$ postoji subsingularni vektor u takav da je $\overline{u} = L_{-p}^r v$ za neki $r \in \mathbb{N}$, onda vrijedi $h = h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-r)p}{2}$.*

Teorem 5.35 *Pretpostavimo da vrijedi $2h_W + \frac{p^2-1}{12}c = 0$. Ako je $h \neq h_W + \frac{(13p+1)(p-1)}{12} + \frac{(1-r)p}{2}$ za sve $r \in \mathbb{N}$, onda je $J'(c,h,h_W) = U(\mathcal{L})u' = J(c,h,h_W)$ maksimalni podmodul u $V(c,h,h_W)$ i kvocijentni modul $V(c,h,h_W)/U(\mathcal{L})u' = L(c,h,h_W)$ je ireducibilan.*

Dokaz. Slijedi direktno iz korolara 5.34 i teorema 5.32. ■

Pretpostavimo da postoji subsingularni vektor u takav da je $\overline{u} = L_{-p}^r v$. Pokazat ćemo da je $J(c,h,h_W) := U(\mathcal{L})\{u',u\}$ maksimalni podmodul u $V(c,h,h_W)$.

Lema 5.36 *Ako je u subsingularni vektor takav da je $\overline{u} = L_{-p}^r v$, onda je $\deg_L u = r$.*

Dokaz. Ova lema i njen dokaz generaliziraju lemu 5.25. Vektor u možemo promatrati kao singularni vektor u modulu $L'(c,h,h_W)$, dakle zapisan u bazi

B' (lema 5.31). Prisjetimo se: $u_0 = u$, $u_1 = u - \overline{u_0}$ i $u_n = u_{n-1} - \overline{u_{n-1}}$. Možemo pisati $u = \sum_{n\geq 0} \overline{u_n}$ pri čemu je $\overline{u_0} = L_{-p}^r$. Dokaz leme provodimo indukcijom po n. Pretpostavimo da je $\deg_L \overline{u_j} \leq r$ za $j < n$. Ako je $\overline{u_n} \in \mathcal{W}$ tvrdnja je dokazana. U suprotnom, pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$ najmanji takav da se L_{-m} javlja u $\overline{u_n}$ te neka je $\deg_W \overline{u_n} = k$. Promotrimo $W_m u_n$. Ako je $m \geq p$, jasno je da $\overline{u_n}$ ne može biti L-stupnja većeg od r jer je $u_n \in U(\mathcal{L}_-)_{-rp}$ pa je dokaz gotov. Pretpostavimo stoga da je $m < p$. Kao u lemi 5.21 a) pokaže se da je i u $L'(c,h,h_W)$ komponenta od $W_m u_n$ W-stupnja k jednaka

$$m\left(2h_W + \frac{m^2-1}{12}c\right)\frac{\partial \overline{u_n}}{\partial L_{-m}}$$

Budući da je $u_n = u - \sum_{i=0}^{n-1} \overline{u_i}$ i $W_m u = 0$, slijedi

$$W_m u_n = -\sum_{i=0}^{n-1} W_m \overline{u_i}. \tag{5.6}$$

Izjednačimo li komponente najnižeg W-stupnja (a to je k), s lijeve strane jednakosti (5.6) dobijemo $m\left(2h_W + \frac{m^2-1}{12}c\right)\frac{\partial \overline{u_n}}{\partial L_{-m}}$. No svi $\overline{u_i}$ su po pretpostavci L-stupnja najviše r. Dakle, komponenta $m\left(2h_W + \frac{m^2-1}{12}c\right)\frac{\partial \overline{u_n}}{\partial L_{-m}}$ je L-stupnja najviše $r-1$ pa su sve komponente od $\overline{u_n}$ koje sadrže L_{-m} L-stupnja najviše r. Sada od $\overline{u_n}$ oduzmemo te komponente i ponavljamo postupak dok ne ostane komponenta iz $\mathcal{W}$. ∎

Lema 5.37 *Neka je $0 \neq x \in J(c,h,h_W)$. Tada u $\overline{x}$ postoji komponenta koja sadrži faktor W_{-p} ili faktor L_{-p}^k za $k \geq r$.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je x homogeni vektor. Neka je $x = yu$. Ako je $y \in U(\mathcal{L}_+)$, onda je $x \in U(\mathcal{L})u'$ pa tvrdnja slijedi iz leme 5.30. Nadalje, svi vektori iz $\mathcal{L}_0 u$ očito imaju komponentu W_{-p} ili $L_{-p}^r v$. Preostaje slučaj $x = yu$ za neki $y \in U(\mathcal{L}_-)$, no takav vektor mora sadržavati L_{-p}^k za $k \geq r$ u nekoj najdužoj komponenti od $\overline{x}$. ∎

Lema 5.38 *Skup* $B := \{W_{-m_s} \cdots W_{-m_1} L_{-n_t} \cdots L_{-n_1} v + J(c,h,h_W) : m_j \neq p$ *i potencija faktora* L_{-p} *je manja od* $r\}$ *tvori bazu modula* $L(c,h,h_W)$.

Dokaz. Primjenom leme 5.37 zaključujemo da su vektori iz B linearno nezavisni. Nadalje, iz leme 5.31 znamo da se u bazi kvocijenta po modulu koji sadrži u' ne pojavljuju se W_{-p}. Pretpostavimo da je $x \in L(c,h,h_W)$ homogeni vektor koji u PBW zapisu sadrži L_{-p}^k za $k \geq r$. Iskoristit ćemo relaciju

$$u = 0 = L_{-p}^r v + (\text{komponente bez } L_{-p}^r \text{ i } W_{-p}) \tag{5.7}$$

da bismo iz vektora iz $L(c,h,h_W)$ u konačno koraka eliminirali svako pojavljivanje L_{-p}^r.

Neka je $W_{-m_t} \cdots W_{-m_1} L_{-n_s} \cdots L_{-n_1} v$ komponenta od x koja sadrži L_{-p}^k za $k \geq r$. Pretpostavimo prvo da je $k = r$. Ako je $n_1 = p$, lako eliminiramo tu komponentu djelujući na jednakost (5.7) s $W_{-m_t} \cdots W_{-m_1} L_{-n_s} \cdots L_{-n_{s-r}}$. Pri tome s desne strane neće nastati novih faktora L_{-p} jer je $n_{s-r} \geq p$ pa eventulanim komutiranjem s L_{-j} nastaju L_{-i} za $i > p$.

Preostaje eliminitari komponente oblika $L_{-p}^r L_{-n_l} \cdots L_{-n_1} v$. Dokaz provodimo indukcijom po l. Da bismo eliminirali $L_{-p}^r L_{-n_1} v$ djelovati ćemo s L_{-n_1} na (5.7). Primjetimo da se u izrazu $L_{-n_1} u$ faktor L_{-p}^r još može dobiti jedino iz komponente od u koja sadrži L_{-p}^{r-1}. Prema lemi 5.36, takva komponenta je oblika $w L_{-p}^{r-1} L_{-(p-n_1)} v$ za neki $w \in \mathcal{W}$ (primjetimo da mora biti $n_1 < p - n_1$ da bi uopće došlo do komutiranja L_{-n_1} i $L_{-(p-n_1)}$) i ona će u $L_{-n_1} u$ sudjelovati s $(p-2n_1) w L_{-p}^r v$. Takvu komponentu eliminiramo ranije opisanim postupkom. Primjetimo da je na ovaj način $L_{-p}^r L_{-n_1} v$ zamijenjeno vektorom L-stupnja najviše $r+1$.

Pretpostavimo da se svaka komponenta $L_{-p}^r L_{-n_{l-1}} \cdots L_{-n_1} v$ može zamijeniti vektorom iz B, s komponentama L-stupnja najviše $r+l-1$, tj.

$$
\begin{aligned}
&L_{-p}^{r}L_{-n_{l-1}}\cdots L_{-n_1}v = \\
&= \sum (\text{komponente } L\text{-stupnja najviše } r+l \text{ i bez } L_{-p}^{r})
\end{aligned}
$$

Djelujući s L_{-n_l} na gornju jednakost dobijemo izraz za $L_{-p}^{r}L_{-n_{l-1}}\cdots L_{-n_1}v$. Primjetimo da se L_{-p}^{r} s desne strane može pojaviti samo u komponenti L-stupnja najviše $r+l-1$ (oblika $L_{-p}^{r}L_{-m_{l-1}}\cdots L_{-m_1}v$), a nju, po pretpostavci, možemo zamijeniti vektorom iz baze B. Time je korak indukcije dokazan.

Ako je $k>r$, ponavljamo gornji dokaz dok ne eliminiramo sve potencije veće od r. ■

Teorem 5.39 *Ako u modulu $V(c,h,h_W)$ postoji subsingularni vektor u takav da je $\overline{u}=L_{-p}^{r}v$, onda je $J(c,h,h_W)=U(\mathcal{L})\{u',u\}$ maksimalni podmodul, a $L(c,h,h_W)=V(c,h,h_W)/J(c,h,h_W)$ ireducibilan.*

Dokaz. Neka je $0\neq x\in V(c,h,h_W)$ takav da je $U(\mathcal{L}_+)x\subseteq J(c,h,h_W)$. Slobodno možemo pretpostaviti da je x homogeni vektor zadan u bazi B. Analogno dokazu teorema 5.32 pokaže se da je $\overline{x}=\mathbb{C}L_{-p}^{s}v$ za neki $s\in\mathbb{N}$. Iz leme 5.38 slijedi da je $s<r$ pa je $x\in V(c,h,h_W)$ takav da je $U(\mathcal{L}_+)x\in U(\mathcal{L})u'$, no to je u kontradikciji s korolarom 5.34. Dakle, $L(c,h,h_W)$ je ireducibilan. ■

Poglavlje 6

ZAKRENUTA HEISENBERG-VIRASOROVA ALGEBRA

Definirat ćemo zakrenutu Heisenberg-Virasorovu algebru $\mathcal{H}$ i posebno promatrati reprezentacije najveće težine nivoa nula. Kao i ranije, navest ćemo ireducibilne reprezentacije iz međuserije i promatrati tenzorski produkt takve reprezentacije s ireducibilnom reprezentacijom najveće težine. Teorija je u nekim segmentima slična teoriji algebre $W(2,2)$, a najbitnije razlike dolaze iz činjence da je $I_0 \in \mathcal{H}$, koji odgovara elementu $W_0 \in \mathcal{L}$, centralni element u $\mathcal{H}$ te da Heisenbergovi elementi I_n ne moraju djelovati trivijalno na međuseriji. Glavna motivacija za proučavanje ove algebre je primjena u reprezentacijama toroidalnih verteks-algebri (vidjeti članak Y. Billiga [B2]).

6.1 Definicija i osnovne napomene

Zakrenuta Heisenberg-Virasorova algebra je kompleksna Liejeva algebra $\mathcal{H}$ s bazom

$$\{L_n, I_n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{C_L, C_{LI}, C_I\}$$

i Liejevom zagradom

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n,-m}\frac{n^3-n}{12}C_L,$$
$$[L_n, I_m] = -mI_{n+m} - \delta_{n,-m}(n^2+n)C_{LI},$$
$$[I_n, I_m] = n\delta_{n,-m}C_I,$$
$$[\mathcal{H}, C_L] = [\mathcal{H}, C_{LI}] = [\mathcal{H}, C_I] = 0.$$

Očito, $\mathcal{H}$ ima beskonačno-dimenzionalnu Heisenbergovu podalgebru razapetu s $\{I_n, C_I : n \in \mathbb{Z}\}$ i Virasorovu podalgebru razapetu s $\{L_n, C_L : n \in \mathbb{Z}\}$. Algebra $\mathcal{H}$ je univerzalno centralno proširenje Liejeve algebre $\{f(t)\frac{d}{dt} + g(t) : f, g \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]\}$ diferencijalnih operatora stupnja najviše jedan uz projekciju $L_n \longmapsto -t^{n+1}\frac{d}{dt}$, $I_n \longmapsto t^n$.

Uobičajena $\mathbb{Z}$-gradacija dana je s

$$\mathcal{H}_n = \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}I_n, n \in \mathbb{Z}^*,$$
$$\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}I_0 \oplus \mathbb{C}C_L \oplus \mathbb{C}C_I \oplus \mathbb{C}C_{LI}$$

pa imamo trokutastu dekompoziciju

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_- \oplus \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_+$$

gdje je $\mathcal{H}_+ := \oplus_{n>0}\mathcal{H}_n$ i $\mathcal{H}_- := \oplus_{n<0}\mathcal{H}_n$. Za razliku od elementa W_0 algebre $W(2,2)$, $I_0 \in \mathcal{H}$ djeluje poluprosto.

Za $\mathcal{H}$-modul M kažemo da je **težinski** ako se može prikazati kao direktna suma težinskih prostora operatora L_0, tj. $M = \oplus_{\lambda\in\mathbb{C}}M_\lambda$ gdje je $M_\lambda = \{v \in$

$M : L_0 v = \lambda v\}$. **Nosač** od M je $\operatorname{Supp} M = \{\lambda \in \mathbb{C} : M_\lambda \neq 0\}$. Težinski modul kojemu su svi težinski prostori konačno-dimenzionalni zovemo **Harish-Chandrin** modul. Ako postoji $v \in M_\lambda$ takav da je $M = U(\mathcal{H})v$ i $\mathcal{H}_+ v = 0$ (odnosno $\mathcal{H}_- v = 0$), onda kažemo da je V **modul najveće (najmanje) težine** λ.

Neka je $\mathbb{C}v$ modul za algebru $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_+$, pri čemu je $\mathcal{H}_+ v = 0$, $L_0 v = hv$, $I_0 v = h_I v$, $C_L v = c_L v$, $C_I v = c_I v$ i $C_{LI} v = c_{LI} v$. Inducirani modul

$$V = V(c_L, c_I, c_{LI}, h, h_I) := U(\mathcal{H}) \otimes_{U(\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_0)} \mathbb{C}v$$

nazivamo **Vermaovim modulom** najveće težine $(c_L, c_I, c_{LI}, h, h_I)$. Jasno, V je slobodni $U(\mathcal{H}_-)$-modul koji se može realizirati i kao kvocijent od $U(\mathcal{H})$ po idealu generiranom s $\{L_0 - h\mathbf{1}, I_0 - h_I\mathbf{1}, C_L - c_L\mathbf{1}, C_I - c_I\mathbf{1}, C_{LI} - c_{LI}\mathbf{1}\} \cup \mathcal{H}_+$. V je $\mathbb{Z}$-graduiran svojstvenim vrijednostima operatora L_0, tj. $V = \bigoplus_{k \geq 0} V_{h+k}$ pri čemu težinski prostor $V_{h+k} = \{v \in V : L_0 v = hv\}$ ima standardnu PBW bazu

$$\Big\{ I_{-m_s} \cdots I_{-m_1} L_{-n_t} \cdots L_{-n_1} v : \sum m_i + \sum n_j = k,$$
$$m_s \geq \cdots \geq m_1 > 0, n_t \geq \cdots \geq n_1 > 0 \Big\}.$$

Primjetimo da ostali elementi iz $\mathcal{H}_0$ djeluju skalarom na cijelom V_{h+k}. Kao i obično, Vermaov modul sadrži jedinstveni maksimalni podmodul kojeg označavamo s $J(c_L, c_I, c_{LI}, h, h_I)$, a pripadni kvocijent $L(c_L, c_I, c_{LI}, h, h_I)$ je do na izomorfizam jedinstveni ireducibilni modul najveće težine $(c_L, c_I, c_{LI}, h, h_I)$.

Ireducibilne $\mathcal{H}$-reprezentacije su proučavane u članku E. Arbarello [Ar]. Zbog primjene u konstrukciji reprezentacija verteks-algebri dobivenih iz toroidalnih Liejevih algebri, posebno je zanimljiv slučaj kada C_I djeluje trivijalno, tj. reprezentacije nivoa nula. Takve reprezentacije su detaljnije analizirane u [B]. Navodimo glavne rezultate tog članka.

Teorem 6.1 ([B] Theorem 1 na str. 4) *Neka je $c_I = 0$ i $c_{LI} \neq 0$.*

(i) *Ako je $\frac{h_I}{c_{LI}} \notin \mathbb{Z}$ ili $\frac{h_I}{c_{LI}} = 1$, Vermaov modul $V(c_L, 0, c_{LI}, h, h_I)$ je ireducibilan.*

(ii) *Ako je $\frac{h_I}{c_{LI}} \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, onda $V = V(c_L, 0, c_{LI}, h, h_I)$ ima singularni vektor $v \in V_p$, gdje je $p = |\frac{h_I}{c_{LI}} - 1|$. Kvocijentni modul $L = V/U(\mathcal{H}_-)v$ je ireducibilan i karakter mu je*

$$\operatorname{char} L = (1 - q^p) \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{-2}.$$

Definirajmo sada međuseriju. S $V_{\alpha,\beta,F}$ označit ćemo $\mathcal{H}$-modul s bazom $\{v_m : m \in \mathbb{Z}\}$ i djelovanjem

$$\begin{aligned} L_n v_m &= -(m + \alpha + \beta + n\beta) v_{m+n}, \\ I_n v_m &= F v_{m+n}, \\ C_L v_m &= C_I v_m = C_{LI} v_m = 0, \end{aligned}$$

gdje su $\alpha, \beta, F \in \mathbb{C}$. Slično kao i u ostalim algebrama Virasorovog tipa, α je invarijantan modulo $\mathbb{Z}$, a modul $V_{\alpha,\beta,F}$ je reducibilan ako i samo ako je $F = 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ i $\beta = 0, 1$. S $V'_{\alpha,\beta,F}$ označavamo netrivijalni ireducibilni podkvocijent. Dakle, $V'_{0,0,0} := V_{0,0,0}/\mathbb{C}v_0$, $V'_{0,1,0} := \oplus_{k \neq -1} \mathbb{C} v_k$ i $V'_{\alpha,\beta,F} := V_{\alpha,\beta,F}$ za ostale $(\alpha, \beta, F) \in \mathbb{C}^3$.

Teorem 6.2 ([LuZ] Theorem 5.2 na str. 22) *Svaki ireducibilni Harish-Chandrin $\mathcal{H}$-modul je ili $V'_{\alpha,\beta,F}$ ili modul najveće (najmanje) težine.*

6.2 Struktura Vermaovih modula

U ovom poglavlju opisujemo strukturu Vermaovog modula $V(c_L, 0, c_{LI}, h, h_I)$ (u ostatku poglavlja skraćeno pišemo V) za $c_{LI} \neq 0$ te izgled singularnih vektora. Iako je ta struktura naizgled slična onoj za algebru $W(2,2)$, javljaju se neke bitne razlike, kao posljedica činjenice da I_0 (za razliku od W_0) djeluje poluprosto na cijelom modulu. Većina rezultata je objavljena u [B] kao dio dokaza teorema 6.1.

Napomena 6.3 *Za vektor*

$$x = I_{-m_s} \cdots I_{-m_1} L_{-n_t} \cdots L_{-n_1} v \tag{6.1}$$

smatramo da je zapisan u PBW bazi, tj. da vrijedi $m_s \geq \cdots \geq m_1 > 0$ *i* $n_t \geq \cdots \geq n_1 > 0$ *ako nije drugačije navedeno.*

Za vektor (6.1) definiramo I-stupanj $\deg_I x = s$ pa s obzirom na ovu gradaciju možemo pisati $V = \bigoplus_{k \geq 0} V^I_{(k)}$. Očito, za $n > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} I_n M^I_{(k)} &\subseteq M^I_{(k)} \oplus M^I_{(k+1)}, \\ L_n M^I_{(k)} &\subseteq M^I_{(k-1)} \oplus M^I_{(k)}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Za netrivijalni element $x \in V$ s $\overline{x}$ ćemo označiti njegovu homogenu komponentu najnižeg I-stupnja. Drugim riječima, $x = \overline{x} +$ komponente višeg I-stupnja.

Analogno se može definirati L-stupanj. Posebno, uvodimo oznaku $\mathcal{I} = V^L_{(0)}$ za vektore u kojima se ne pojavljuje niti jedan generator L_{-n}.

Na modulu V možemo definirati djelovanje formalnih derivacija $\frac{\partial}{\partial I_{-m}}$ i $\frac{\partial}{\partial L_{-n}}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{-j}}{\partial I_{-m}} &= \delta_{jm}, & \frac{\partial L_{-j}}{\partial I_{-m}} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial I_{-m}} &= 0, \\ \frac{\partial I_{-j}}{\partial L_{-n}} &= 0, & \frac{\partial L_{-j}}{\partial L_{-n}} &= \delta_{jn}, & \frac{\partial v}{\partial L_{-n}} &= 0, \end{aligned}$$

uz proširenje po Leibnitzovom pravilu za monome (6.1) te po linearnosti. Ovako definirano djelovanje ovisi o (PBW) bazi.

Lema 6.4 ([B] Lemma 3 na str. 5) *Neka je w netrivijalni vektor iz V takav da vrijedi* $\deg_I \overline{w} = k$.

a) *Ako je $\overline{w} \notin \mathcal{I}$ i $n \in \mathbb{N}$ je najmanji takav da se L_{-n} javlja u $\overline{w}$, onda je komponenta od $I_n w$ koja ima I-stupanj k dana s*

$$n(h_I + (n-1)c_{LI})\frac{\partial \overline{w}}{\partial L_{-n}}.$$

b) *Ako je $\overline{w} \in \mathcal{I}$, $\overline{w} \notin \mathbb{C}v$ i $m \in \mathbb{N}$ najveći takav da se I_{-m} pojavljuje u $\overline{w}$, onda je komponenta od $L_m w$ koja ima I-stupanj $k-1$ dana s*

$$m(h_I - (m+1)c_{LI})\frac{\partial \overline{w}}{\partial I_{-m}}.$$

Dokaz. Dokaz je isti kao u [B]. Iz (6.2) se vidi da dio vektora $I_n w$ I-stupnja k dolazi od $I_n\overline{w}$. Promotrimo proizvoljni monom iz $\overline{w}$

$$x = I_{-m_k} \cdots I_{-m_1} L_{-n_s} \cdots L_{-n_1} v$$

pri čemu je $n_s \geq \cdots \geq n_1 \geq n$. Tada je

$$I_n w = \sum_{i=1}^{s} I_{-m_k} \cdots I_{-m_1} L_{-n_s} \cdots [I_n, L_{-n_i}] \cdots L_{-n_1} v.$$

Ako je $n_i > n$, onda je $[I_n, L_{-n_i}] = nI_{n-n_i}$ pa smo dobili komponentu I-stupnja $k+1$ koja nas ne zanima. Ukoliko je $n_i = n$, imamo $[I_n, L_{-n}] = n(I_0 + (n-1)C_{LI})$ pa ova komponenta doprinosi s $n(h_I + (n-1)c_{LI})\frac{\partial \overline{w}}{\partial L_{-n}}$. Time je dokazana tvrdnja a).

Analogno se dokazuje b). ■

Definiramo $u_0 = u$, $u_1 = u - \overline{u}$ i dalje induktivno $u_n = u_{n-1} - \overline{u_{n-1}}$. Očito je

$$u = \sum_{n\geq 0} \overline{u_n}, \text{ gdje je } \overline{u_0} = L_{-p}v \text{ ili } I_{-p}v.$$

Lema 6.5 ([B] Lemma 4 i Remark na str. 7) *Neka je* $p = \frac{h_I}{c_{LI}} - 1 \in \mathbb{N}$. *Tada za singularni vektor* $u \in V_p$ *vrijedi* $\overline{u} = I_{-p}$ *i* $u \in \mathcal{I}$.

Dokaz. Prvo navodimo dokaz prve tvrdnje iz [B]. Neka je $\deg_I \overline{u} = k$. Pretpostavimo da $\overline{u}$ nije (do na skalarni faktor) jednak I_{-p}. Ako je $u \notin \mathcal{I}$ primjenimo lemu 6.4 a) i nađemo $n \in \mathbb{N}$ takav je $I_n u \neq 0$ što je kontradikcija jer je u singularni vektor. Slijedi da je $\overline{u} \in \mathcal{I}$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ najveći takav da se I_{-m} pojavljuje u $\overline{u}$. Po pretpostavci je $m \neq p$ pa primjenom leme 6.4 b) slijedi $L_m u \neq 0$ što je opet kontradikcija. Dakle, $\overline{u}$ je skalarni multipl od I_{-p} pa u možemo normirati tako da vrijedi tvrdnja.

Dokažimo sada da je $\overline{u} \in \mathcal{I}$ (ova tvrdnja je u [B] navedena bez dokaza). Pretpostavimo suprotno. Neka je $m \in \mathbb{N}$ najmanji takav da $\overline{u_m} \notin \mathcal{I}$ i neka je $\deg_I \overline{u_m} = k$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ najmanji takav da se L_{-n} pojavljuje u $\overline{u_m}$. Tada je, prema lemi 6.4 a), komponenta od $I_n u_m$ I-stupnja k jednaka $n(h_I + (n-1)c_{LI})\frac{\partial \overline{u_m}}{\partial L_{-n}} \neq 0$. No

$$I_n u_m = I_n u - I_n \overline{u_{m-1}} = 0$$

jer je u singularni vektor, a $\overline{u_{m-1}}$ je po pretpostavci iz $\mathcal{I}$, što dovodi do kontradikcije. ∎

Lema 6.6 *Neka je* $p = 1 - \frac{h_I}{c_{LI}} \in \mathbb{N}$. *Tada za singularni vektor* $u \in V_p$ *vrijedi* $\overline{u} = L_{-p}v$ *te* $\deg_L u = 1$.

Dokaz. Prva tvrdnja se dokaže primjenom leme 6.4, analogno prethodnom dokazu ([B] Lemma 4 na str. 7).

Dokaz druge tvrdnje provodimo indukcijom. Znamo da je $u_0 = \overline{u} = L_{-p}v$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $\overline{u_i}$, $i < n$ i da vrijedi $\overline{u_n} \notin \mathcal{I}$. Neka je $\deg_I \overline{u_n} = k$ i $j \in \mathbb{N}$ najmanji takav da se L_{-j} javlja u $\overline{u_n}$. Tada je prema lemi 6.4 a) komponenta vektora $I_j u_n$ I-stupnja k netrivijalna (jer je $j \neq p$).

S obzirom da je $u_n = u - \sum_{i=0}^{n-1} \overline{u_i}$ i da su $\overline{u_0}, \ldots, \overline{u_{n-1}}$ L-stupnja najviše jedan, imamo

$$I_j u_n = -\sum_{i=0}^{n-1} I_j \overline{u_i} \in \mathcal{I}.$$

Posebno je i $j(h_I + (j-1)c_{LI})\frac{\partial \overline{u_n}}{\partial L_{-j}} \in \mathcal{I}$ što znači da komponente od $\overline{u_n}$ koje sadrže L_{-i} imaju L-stupanj jednak 1. Oduzmemo te komponente od $\overline{u_n}$ i ponavljamo postupak dok ne dobijemo vektor iz $\mathcal{I}$. ■

Dakle, kada vrijedi $p = 1 - \frac{h_I}{c_{LI}} \in \mathbb{N}$, singularni vektor je oblika

$$u = L_{-p}v + \sum_{i=1}^{p-1} w_i L_{-i} v + w_0, \text{ gdje je } w_i \in U(\mathcal{H}_-)_{i-p}, \deg_L w_i = 0. \tag{6.3}$$

Primjer 6.7 *Neka je $c_{LI} \neq 0$. Tada je $u = \left(L_{-1} + \frac{h}{c_{LI}} I_{-1}\right) v$ singularni vektor u $V(c_L, 0, c_{LI}, h, 0)$. Ako je $\frac{h_I}{c_{LI}} = 2$, onda je $u = I_{-1}v$ singularni vektor u $V(c_L, 0, c_{LI}, h, 2c_{LI})$.*

Primjer 6.8 *Neka je $\frac{h_I}{c_{LI}} = -1$. Tada je*

$$u = (L_{-2} - \frac{1}{h_I} I_{-1} L_{-1} + \frac{2 - c_L - 8h}{16 h_I} I_{-2} + \frac{8h + c_L - 2}{8h_I^2} I_{-1}^2) v$$

singularni vektor u $V(c_L, 0, c_{LI}, h, -c_{LI})$. Ako je $\frac{h_I}{c_{LI}} = 3$, onda je $u = I_{-2}v - \frac{1}{h_I} I_{-1}^2 v$ singularni vektor u $V(c_L, 0, c_{LI}, h, 3c_{LI})$.

Napomena 6.9 *Primjetimo da, za razliku od algebre $W(2,2)$, u Vermaovom $\mathcal{H}$-modulu nema subsingularnih vektora; maksimalni podmodul je uvijek ciklički. Nadalje, ako je $u_h \in V_p$, onda je $J(c_L, 0, c_{LI}, h, h_I)$ izomorfan Vermaovom modulu $V(c_L, 0, c_{LI}, h+p, h_I)$ te sadrži singularni vektor u_{h+p} koji opet generira podmodul izomorfan Vermaovom. Na taj način dolazimo do lanca podmodula*

$$V(c_L, 0, c_{LI}, h, h_I) \supseteq V(c_L, 0, c_{LI}, h+p, h_I) \supseteq \cdots \supseteq V(c_L, 0, c_{LI}, h+kp, h_I) \supseteq \cdots$$

s pripadnim potkvocijentima $L(c_L, 0, c_{LI}, h, h_I)$.

Kada je $\frac{h_I}{c_{LI}} - 1 \in \mathbb{N}$, *singularni vektor je iz* $\mathcal{I}$ *i ima koeficijente iz* $\mathbb{Q}(h_I)$ *pa je* $u_{h+p} = u_h^2$ *kao i za* $W(2,2)$ *algebru. No, u slučaju* $1 - \frac{h_I}{c_{LI}} \in \mathbb{N}$, *singularni vektor ima koeficijente iz* $\mathbb{Q}(c_L, c_{LI}, h, h_I)$ *(*h *se stvarno javlja u koeficijentima) pa* u_{h+p} *nije jednak* u_h^2.

6.3 Ireducibilnost modula $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\overline{c}, h, h_I)$

Pri ispitivanju ireducibilnosti modula $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(c_L, 0, c_{LI}, h, h_I)$ koristit ćemo se istim metodama kao u slučaju algebre $W(2,2)$. Za $F = 0$ rezultati će biti slični.

Prvo dokazujemo kriterij ireducibilnosti.

Napomena 6.10 ***Radi jednostavnosti, u ostatku poglavlja ćemo za modul najveće težine*** $M(c_L, 0, c_{LI}, h, h_I)$ ***skraćeno pisati*** $M(\overline{c}, h, h_I)$***.***

Teorem 6.11 *Neka su* $\alpha, \beta, F \in \mathbb{C}$ *proizvoljni.* $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\overline{c}, h, h_I)$ *je ireducibilan ako i samo ako je ciklički za svaki vektor* $v_m \otimes v$, $m \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Neka je $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\overline{c}, h, h_I)$ ciklički za svaki vektor $v_m \otimes v$, $m \in \mathbb{Z}$ te neka je U podmodul i $x \in U$ netrivijalni vektor težine $n - m$

$$x = v_{m-n} \otimes x_0 + \cdots v_m \otimes x_n$$

$x_i \in L(\overline{c}, h, h_I)_{h+i}$. Indukcijom po broju komponenata n dokazujemo da postoji $v_k \otimes v \in U$ za neki $k \in \mathbb{Z}$ iz čega slijedi da je $U = V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\overline{c}, h, h_I)$.

Ako je $n = 0$, onda je $x = \lambda v_{m-n} \otimes v$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$ pa je dokaz gotov. Pretpostavimo da je $n > 0$ i da tvrdnja vrijedi za sve vektore s najviše n komponenti. Ako je $L_1 x_n \neq 0$ ili $L_2 x_n \neq 0$, možemo primijeniti dokaz analogan onome teorema 4.3 za Virasorovu algebru. U suprotnom, mora biti

$I_1 x_n \neq 0$ jer L_1, L_2 i I_1 generiraju $\mathcal{H}_+$. Pretpostavimo prvo da je $F = 0$. Budući da je $I_1 x_0 = 0 = I_1 v_k$ za sve $k \in \mathbb{Z}$, slijedi

$$I_1 x = v_{m-n+1} \otimes I_1 x_1 + \cdots + v_m \otimes I_1 x_n \neq 0$$

pa smo našli netrivijalni vektor iz U s najviše n komponenti. Sada po pretpostavci indukcije slijedi tražena tvrdnja.

Uzmimo sada da je $F \neq 0$. Tada je

$$\begin{aligned} I_1 x &= \sum_{i=0}^{n} F v_{m-n+i+1} \otimes x_i + \sum_{i=1}^{n} v_{m-n+i} \otimes I_1 x_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_{m-n+i} \otimes (F x_{i-1} + I_1 x_i) + F v_{m+1} \otimes x_n \end{aligned}$$

pa imamo

$$\begin{aligned} (I_1^2 - F I_2) x = 2F \sum_{i=1}^{n} v_{m-n+i+1} \otimes I_1 x_i + \sum_{i=2}^{n} v_{m-n+i} \otimes (I_1^2 - F I_2) x_i = \\ = F v_{m+1} \otimes I_1 x_n + \sum_{i=0}^{n-2} v_{m-n+i+2} \otimes (2F I_1 x_{i+1} + (I_1^2 - F I_2) x_{i+2}) \end{aligned}$$

Budući da je $F \neq 0$ i $I_1 x_n \neq 0$, opet smo dobili netrivijalni vektor iz U s najviše n komponenti pa je dokaz dovršen. ■

U daljnjem tekstu ćemo s U_k označavati podmodul generiran s $v_k \otimes v$. Iz dokaza teorema 6.11 slijedi

Korolar 6.12 *Svaki netrivijalni podmodul $M \subset V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ sadrži U_k za neki $k \in \mathbb{Z}$.*

Jasno, za dokaz ireducibilnosti je dovoljno pokazati da vrijedi $U_n = U_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Teorem 6.13 *Modul $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes V(\bar{c}, h, h_I)$ je reducibilan za sve $\alpha, \beta, F \in \mathbb{C}$. Za svaki $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -\alpha - 2\beta$, vrijedi $U_n / U_{n+1} \cong V(\bar{c}, h - \alpha - \beta - n, h_I + F)$.*

Dokaz. Dokazat ćemo da svaki vektor $v_k \otimes v$ generira pravi podmodul. Naime, ako vrijedi $U(\mathcal{H})(v_k \otimes v) = V'_{\alpha,\beta,F} \otimes V(\bar{c}, h, h_I)$, onda postoji $x \in U(\mathcal{H}_-)U(\mathcal{H}_+)$ takav da je $x(v_k \otimes v) = v_{k-1} \otimes v$ tj. postoje $x_i \in U(\mathcal{H}_-)_{-i}$ takvi da je

$$\sum_{i=0}^{l} x_{i+1}(v_{k+i} \otimes v) = v_{k-1} \otimes v.$$

No tada mora vrijediti $v_{k+l} \otimes x_{l+1}v = 0$, što je nemoguće jer je $V(\bar{c}, h, h_I)$ slobodni $U(\mathcal{H}_-)$-modul.

Iz uvjeta $n \neq -\alpha - 2\beta$ slijedi $U_n \supseteq U_{n+1} \supseteq U_{n+k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$ pa je U_n/U_{n+1} modul najveće težine $(\bar{c}, h - \alpha - \beta - n, h_I + F)$. Naime

$$L_k(v_n \otimes v), I_k(v_n \oplus v) \in U_{n+k} \subseteq U_{n+1},$$

$$\begin{aligned} L_0(v_n \otimes v) &= -(n + \alpha + \beta)v_n \otimes v + h(v_n \otimes v), \\ I_0(v_n \otimes v) &= F(v_n \otimes v) + h_I(v_n \otimes v). \end{aligned}$$

Nadalje je

$$U_{n+1} = \{u' (v_{n+k} \otimes v) : u' \in U (\mathcal{H}_-),\ k > 0\}$$

i svaki $u' (v_{n+k} \otimes v)$ sadrži komponentu $v_{n+k} \otimes u'v \neq 0$ zbog slobodnog djelovanja $U (\mathcal{H}_-)$ na $V (\bar{c}, h, h_I)$. Kada U_n/U_{n+1} nebi bio slobodni modul, onda bi za neki $x \in U (\mathcal{H}_-)$ vektor $x (v_n \otimes v)$ bio iz U_{n+1}. No $x (v_n \otimes v)$ ne može imati komponentu $v_{n+k} \otimes u'v$, za $k > 0$ što dokazuje tvrdnju. ∎

Navedimo sada neke serije ireducibilnih modula. Prvo ćemo uzeti u obzir slučaj $F = 0$ i vidjeti da su rezultati analogni onima za algebru $W(2, 2)$.

Teorem 6.14 *Neka je* $1 - \frac{h_I}{c_{LI}} = p \in \mathbb{N}$. *Ako vrijedi* $\alpha + 2\beta, \alpha + (1-p)\beta \notin \mathbb{Z}$, *onda je* $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ *ireducibilan.*

Dokaz. Iz prvog uvjeta na α i β i jednakosti

$$L_1(v_n \otimes v) = -(n+\alpha+2\beta)v_{n+1} \otimes v$$

slijedi $U_n \supseteq U_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Iskoristimo sada singularni vektor (6.3). Budući da je $F = 0$, onda svi I_j poništavaju v_n pa dobijemo

$$u(v_{n+p} \otimes v) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{p-1}(n+p+\alpha+\beta-i\beta)v_{n+p-i} \otimes w_i v - (n+p+\alpha+\beta-p\beta)v_n \otimes v.$$

Sada lako dobijemo $u' \in U(\mathcal{H})$ takav da je $u'(v_{n+1} \otimes v) = v_n \otimes v$. Iz toga direktno slijedi $U_{n+1} = U_n$. ■

Teorem 6.15 *Neka je* $1 - \frac{h_I}{c_{LI}} = p \in \mathbb{N}$. *Ako je* $\alpha + (1-p)\beta \in \mathbb{Z}$, *onda je* $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ *reducibilan i* $(V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(\bar{c}, h, h_I))/U_{1-p}$ *je modul najveće težine* $(\bar{c}, h + p(1-\beta), h_I)$.

Dokaz. Analogno dokazu teorema 5.17 za $r = 1$. ■

Teorem 6.16 *Neka je* $\frac{h_I}{c_{LI}} - 1 \in \mathbb{N}$. *Tada je modul* $V'_{\alpha,\beta,0} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ *reducibilan za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Potkvocijenti* U_n/U_{n+1} *su izomorfni* $L(\bar{c}, h-\alpha-\beta-n, h_I)$.

Dokaz. Analogno teoremu 5.16 za $W(2,2)$. Naime, vrijedi $U_{n+1} \subsetneq U_n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$ jer singularni vektor $u \in \mathcal{I}$ djeluje trivijalno na $(v_n \otimes v)$ zbog uvjeta $F = 0$. Budući da je formula za singularni vektor u $V(\bar{c}, h-\alpha-\beta-n, h_I)$ jednaka kao u $V(\bar{c}, h, h_I)$, slijedi i $u(v_n \otimes v) = 0$ pa je U_n/U_{n+1} ireducibilan. ■

Pretpostavimo sada da je $F \neq 0$. Primjetimo prvo da zbog

$$I_1(v_n \otimes v) = F v_{n+1} \otimes v \neq 0$$

slijedi $U_n \supseteq U_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$ pa preostaje ispitati drugu inkluziju.

Teorem 6.17 *Neka je* $\left|1 - \frac{h_I}{c_{LI}}\right| = p \in \mathbb{N}$. *Ako je* F *transcendentan ili algebarski stupnja većeg od* p *nad poljem* $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, c_L, c_{LI}, h, h_I)$, *onda je* $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ *ireducibilan.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $p = 1 - \frac{h_I}{c_{LI}}$. Ponovo koristimo singularni vektor (6.3). Budući da je u linearna kombinacija vektora oblika $I_{-j_t} \cdots I_{-j_1} L_{-i} v$, gdje je $j_1 + \cdots + j_t = p - i$ i da je

$$I_{-j_t} \cdots I_{-j_1} L_{-i}(v_{n+p} \otimes v) = -F^t(n + p + \alpha + \beta - i\beta) v_n \otimes v +$$

$$+ \sum_k F^k(n + p + \alpha + \beta - i\beta) \sum_j v_{n+p-j} \otimes x_j^{(t-k)} v +$$
$$+ \sum_l F^l \sum_j v_{n+p-j-i} \otimes y_j^{(t-l)} L_{-i} v + v_{n+p} \otimes I_{-j_t} \cdots I_{-j_1} L_{-i} v$$

pri čemu je $\deg_I x_j^{(r)} = \deg_I y_j^{(r)} = r$, lako se vidi da vrijedi

$$u(v_{n+p} \otimes v) = f(F) v_n \otimes v + \sum_{i=1}^{p-1} v_{n+i} \otimes z_i v$$

za neke $z_i \in U(\mathcal{H}_-)_{-i}$ i polinom $f(F)$. Dakle, možemo naći $u' \in U(\mathcal{H}_-)_{-p}$ takav da vrijedi

$$u'(v_{n+1} \otimes v) = \Big(q(F)n + r(F)\Big) v_n \otimes v,$$

gdje su $q(F), r(F) \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta, h, h_I, c_L, c_{LI})\,[F]$, $\deg q = p - 1$, $\deg r = p$. Po pretpostavci teorema, koeficijent uz $v_n \otimes v$ ne može biti nula pa je tvrdnja dokazana.

Uzmimo sada da je $p = \frac{h_I}{c_{LI}} - 1$. Tada je $u \in \mathcal{I}$, tj. u je linearna kombinacija vektora oblika $I_{-j_t} \cdots I_{-j_1} v$, gdje je $\sum_{i=1}^t j_i = p$. Budući da je

$$I_{-j_t} \cdots I_{-j_1}(v_{n+p} \otimes v) = F^t v_n \otimes v + \cdots + v_{n+p} \otimes I_{-j_t} \cdots I_{-j_1} v$$

dobije se $u' \in U(\mathcal{H})_{-p}$ takav da je

$$u'(v_{n+1} \otimes v) = Fs(F)v_n \otimes v, \tag{6.4}$$

pri čemu je $s(F) \in \mathbb{Q}(h_I, c_{LI})\,[F]$, $\deg s = p-1$. Opet je koeficijent uz $v_n \otimes v$ netrivijalan pa je dokaz dovršen. ■

Napomena 6.18 *Pretpostavimo da je* $\frac{h_I}{c_{LI}} - 1 \in \mathbb{N}$ *i da u (6.4) vrijedi* $s(F) = 0$. *Tada vrijedi* $U_{n+1} \subsetneq U_n$ *za sve* $n \in \mathbb{Z}$ *i* U_n/U_{n+1} *su moduli najveće težine* $(\bar{c}, h-\alpha-\beta-n, h_I+F)$. *Uz uvjet* $\frac{F}{c_{LI}} \notin \mathbb{Z}$ *ili* $F = c_{LI} - h_I$, *Vermaov modul* $V(\bar{c}, h-\alpha-\beta-n, h_I+F)$ *je ireducibilan.*

Primjer 6.19 *Neka je* $\frac{h_I}{c_{LI}} = 3$. *Tada je* $u = I_{-2}v - \frac{1}{h_I}I_{-1}^2 v$ *singularni vektor pa je*

$$\left(I_{-2} - \frac{1}{h_I}I_{-1}^2\right)(v_{n+2} \otimes v) = \left(F - \frac{1}{h_I}F^2\right)v_n \otimes v - \frac{2}{h_I}Fv_{n+1} \otimes I_{-1}v$$

tj.

$$\left(\frac{1}{F}uI_1 + \frac{2}{h_I}FI_{-1}\right)(v_{n+1} \otimes v) = \left(F + \frac{1}{h_I}F^2\right)v_n \otimes v$$

Ako je $F \neq 0, -h_I$, *modul* $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ *je ireducibilan.*

Posebno, u slučaju $F = -h_I$ *je* $U_{n+1} \subsetneq U_n$, *za sve* $n \in \mathbb{Z}$ *te je* U_n/U_{n+1} *modul najveće težine* $(\bar{c}, h-\alpha-\beta-n, 0)$.

Primjer 6.20 *Neka je* $\frac{h_I}{c_{LI}} = -1$. *Tada je* $u = (L_{-2} + AI_{-1}L_{-1} + BI_{-2} + DI_{-1}^2)v$ *singularni vektor, pri čemu je* $A = -\frac{1}{h_I}$, $B = \frac{2-c_L-8h}{16h_I}$ *i* $D = \frac{8h+c_L-2}{8h_I^2}$. *Prema tome vrijedi*

$$u(v_{n+2} \otimes v) + (-AFL_{-1} + ((n+2+\alpha) - 2DF)\,I_{-1})\,(v_{n+1} \otimes v) =$$

$$\left((n+2+\alpha(F-1) - \beta + BF - DF^2\right)v_n \otimes v$$

Ako je $(n+2+\alpha(F-1) - \beta + BF - DF^2) \neq 0$ *za sve* $n \in \mathbb{Z}$, *onda je modul* $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, h, h_I)$ *ireducibilan. U suprotnom možemo, zbog* $\mathbb{Z}$*-invarijantnosti* *parametra α, pretpostaviti da se 0 dobije za $n = 0$ pa je U_1 pravi podmodul. Pripadni kvocijent U_0/U_1 je modul najveće težine $(\bar{c}, h - \alpha - \beta, h_I + F)$.*

Primjer 6.21 *Ispitajmo reducibilnost modula $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, 0, 0)$. Budući da je $L_{-1}v$ singularni vektor u $V(\bar{c}, 0, 0)$ imamo*

$$L_{-1}(v_{n+1} \otimes v) = -(n + 1 + \alpha)v_n \otimes v.$$

Dakle, uz uvjet $\alpha \notin \mathbb{Z}$ modul $V'_{\alpha,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, 0, 0)$ je ireducibilan.

Lako se dokaže da je $V'_{0,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, 0, 0)$ reducibilan te da je pripadni kvocijent modul najveće težine $(\bar{c}, 1 - \beta, F)$ (odnosno $(\bar{c}, 1, F)$ za $\beta = 1$). Prema teoremu 6.1, taj modul je ireducibilan ako vrijedi $\frac{F}{c_{LI}} \notin \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. U suprotnom, $V(\bar{c}, 1 - \beta, F)$ ima singularni vektor u pa treba ispitati je li $u(v_{-1} \otimes v) \in U_0$. No, U_0 je razapet vektorima oblika $x(v_k \otimes v)$, $x \in U(\mathcal{H}_- \setminus \{L_{-1}\})$, $k \in \mathbb{N}$ pa svaki vektor iz U_0 ima komponentu $v_k \otimes xv$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Dakle, za bilo koji $y \in U(\mathcal{H}_-)$ vrijedi $y(v_{-1} \otimes v) \notin U_0$, odnosno $U(\mathcal{H}_-)$ djeluje slobodno pa je

$$(V'_{0,\beta,F} \otimes L(\bar{c}, 0, 0))/U_0 \cong V(\bar{c}, 1 - \beta, F), \text{ za } \beta \neq 1$$
$$(V'_{0,1,F} \otimes L(\bar{c}, 0, 0))/U_0 \cong V(\bar{c}, 1, F)$$

za svaki F.

Literatura

[Ad1] D. Adamović, New irreducible modules for affine Lie algebras at the critical level, International Math. Research Notices (1996), 253-262

[Ad2] D. Adamović, Vertex operator algebras and irreducibility of certain modules for affine Lie algebras, Math. Research Letters 4 (1997), 809-821

[Ad3] D. Adamović, An application of $U(g)$-bimodules to representation theory of affine Lie algebras, Algebras and Representation theory 7 (2004), 457-469

[Ad4] D. Adamović, Classification of irreducible modules of certain subalgebras of free boson vertex algebra, J. Algebra 270-1 (2003), 115–132

[AM1] D. Adamović, A. Milas, Logarithmic intertwining operators and $W(2, 2p-1)$ algebras, J. Math. Phys. 48-7, 073503 (2007) (20pp)

[AM2] D. Adamović, A. Milas, On the triplet vertex algebra $W(p)$, Adv. Math. 217-6 (2008), 2664–2699

[Ar] E. Arbarello, C. De Concini, V.G. Kac, C. Procesi, Moduli spaces of curves and representation theory, Comm. Math. Phys., 117 (1988), 1-36

Literatura

[As] A. Astashkievich, On the structure of Verma modules over Virasoro and Neveu-Schwarz algebras, Comm. Math. Phys. 186 (1997), 531-562

[B] Y. Billig, Representations of the twisted Heisenberg-Virasoro algebra at level zero, Canadian Math. Bulletin, 46 (2003), 529-537, arXiv:0201314v1

[B2] Y. Billig, Energy-momentum tensor for the toroidal Lie algebras, arXiv:0201313v1

[CP] V. Chari, A. Pressley, A New Family of Irreducible, Integrable Modules for Affine Lie Algebras, Math. Ann. (1997), 543-562

[FeFu] B. L. Feigin, D. B. Fuchs, Representation of the Virasoro algebra, Advanced Studies in Cont. Math. 7 (1990), 465-554

[FRW] A. J. Feingold, J. F. X. Ries, and M. D. Weiner, Spinor Construction of the $c = 1/2$ Minimal Model, Moonshine, The Monster, and Related Topics, Contemporary Math. 193 (1995), 45-92

[FHL] I. B. Frenkel, Y. Huang, and J. Lepowsky, On Axiomatic Approaches to Vertex Operator Algebras and Modules, Mem. Amer. Math. Soc. 104 (1993)

[FZ] I. B. Frenkel, Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, Duke Math. J. 66, 1 (1992), 123-168

[IK] K. Iohara, Y. Koga, Representation theory of the Virasoro algebra, Springer-Verlag, London Limited (2011)

[JP] W. Jiang and Y. Pei, On the structure of Verma modules over the W-algebra $W(2,2)$, J. Math. Phys. 51, 022303 (2010) (8pp)

[KR] V. Kac and A. Raina, Bombay Lectures on highest weight representations of infinite - dimensional Lie algebras, Advanced Series in Math Physics 2 (1987)

[L] X. Lin, Fusion rules of Virasoro vertex operator algebras, preprint

[LL] J. Lepowsky, H. Li, Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations, Birkhäuser, Progress in Mathematics 227 (2004)

[LuZ] R. Lu, K. Zhao, Classification of irreducible weight modules over the twisted Heisenberg-Virasoro algebra, Comm. Cont. Math. 12, 2, (2010), 183-205, arXiv:0510194v1

[LZ] D. Liu and L. Zhu, Classification of Harish Chandra modules over the W-algebra $W(2,2)$, J. Math. Phys. 49, 012901 (2008) (13pp)

[M] O. Mathieu, Classification of Harish-Chandra modules over the Virasoro Lie algebra, Invent. Math. 107 (1992), 225-234, arXiv:0801.2601v1

[Maz] V. Mazorchuk, On simple mixed modules over the Virasoro algebra, Mat. Stud. 22 (2) (2004), 121–128

[MZ] V. Mazorchuk and K. Zhao, Classification of simple weight Virasoro modules with finite-dimensional weight spaces, Journal of Algebra 307 (2007), 209-214

[SXY] Y. Su. Y. Xu, X. Yue, Indecomposable modules of the immediate series over $\mathcal{W}(a,b)$ algebras, arXiv:1103.3850v1

[W] W. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebras, International Mathematics Research Notices, 7 (1993), 197-211

[ZD] W. Zhang and C. Dong, W-algebra $W(2,2)$ and the vertex operator algebra $L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{1}{2},0\right)$, Commun. Math. Phys. 285 (2009), 991-1004, arXiv:0711.4624v1

[Zh] H. Zhang, A class of representations over the Virasoro Algebra, J. Algebra 190 (1997), 1-10

Životopis

Gordan Radobolja je rođen 12.10.1982. u Splitu gdje je 2001. godine završio Prirodoslovno-matematičku gimnaziju. Godine 2006. diplomirao je na Fakultetu Prirodoslovno-matematičkih znanosti i kineziologije Sveučilišta u Splitu i stekao zvanje profesora matematike i informatike. Dobitnik je dviju rektorovih nagrada za najboljeg studenta 2003. i 2004. godine.

Od 2006./07. polaznik je zajedničkog doktorskog studija matematike i aktivni član seminara za algebru. U kolovozu 2009. je pohađao ljetnu školu Structures in Lie Representation Theory na Jacobs University u Bremenu. Sudjelovao je na konferencijama Functional Analysis X, 2008., Representation theory XI, 2009. te Representation Theory XII, 2011. u Dubrovniku. Na posljednjoj je održao izlaganje pod naslovom "*Some representations over Virasoro algebra with infinite-dimensional weight spaces*". Na Petom hrvatskom matematičkom kongresu u Rijeci 2012. je održao kratko izlaganje pod naslovom "*Representations over Virasoro algebra with infinite multiplicities*".

Od siječnja 2007. zaposlen je kao asistent na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Splitu.

Kontakt

Gordan Radobolja

Trg Hrvatske bratske zajednice 1, 21000 Split

tel 021/480-069

mob 098/744-725

mail: gordan@pmfst.hr