

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO MATEMATIČKI FAKULTET
GEOFIZIČKI ODSJEK

TONI JURLINA

**BLAGO - NELINEARNA MODIFIKACIJA
PRANDTLOVOG MODELA KATABATIČKOG
STRUJANJA**

DIPLOMSKI RAD

Voditelj: Prof. dr. sc. Branko Grisogono

Zagreb, 2013.

SADRŽAJ

1. Uvod.....	1
1.1. Atmosferski granični sloj	1
1.2. Nagnuti granični sloj i model katabatičkog strujanja	2
1.3. Prandtlov model	4
2. Modifikacija Prandtlovog modela	6
2.1. Blago nelinearna modifikacija za konstantnu turbulentnu difuzivnost.....	6
2.1.1. Procjena maksimalnog parametra blage nelinearnosti.....	12
2.2. Blago nelinearna modifikacija za varijabilnu turbulentnu difuzivnost	16
3. Podaci – usporedba mjerena i analitike.....	21
3.1. Usporedba mjerena s Prandtlovim modelom	21
3.2. Usporedba mjerena i analitike za konstantnu i varijabilnu turbulentnu difuzivnost.....	22
4. Zaključak	26
Popis literature	27
Dodatak A	30

POPIS SIMBOLA I SKRAĆENICA

- AGS Atmosferski granični sloj
- C Površinski temperaturni deficit
- h Visina maksim. vrijednosti varijabilnog koef. turbulentne difuzivnosti
- h_p Karakteristična visina Prandtlovog sloja
- K_0 Amplituda varijabilnog koef. turbulentne difuzivnosti
- K_c Konstantni koef. turbulentne difuzivnosti
- K_h Koeficijent turbulentne difuzivnosti za toplinu
- K_m Koeficijent turbulentne difuzivnosti za količinu gibanja
- Pr Turbulentni Prandtlov broj
- N Uzgonska frekvencija
- NMS Niska mlazna struja
- NVP Numerička vremenska prognoza
- SGS Stabilni granični sloj
- u_A Amplituda modificirane brzine vjetra za konst. koef. turb. difuzivnosti
- $u_{A,WKB}$ Amplituda modificirane brzine vjetra za varijab. koef. turb. difuzivnosti
- u_s Stacionarno rješenje za brzinu vjetra
- u_{tot} Ukupna (totalna) brzina vjetra za konst. koef. turbulentne difuzivnosti
- $u_{tot,WKB}$ Ukupna (totalna) brzina vjetra za varijab. koef. turbulentne difuzivnosti
- u_0 Originalna brzina vjetra za konst. koef. turbulentne difuzivnosti
- $u_{0,WKB}$ Brzina vjetra za varijab. koef. turbulentne difuzivnosti
- u_1 Korekcija brzine vjetra za konst. koef. turbulentne difuzivnosti
- $u_{1,WKB}$ Korekcija brzine vjetra za varijab. koef. turbulentne difuzivnosti
- z_j Visina niske mlazne struje
- $z_{j,tot}$ Visina niske mlazne struje za slučaj modifikacije
- z_{inv} Visina inverzije
- ε Koef. blage nelinearnosti
- ε_{max} Maksimalna vrijednost koef. blage nelinearnosti
- θ_A Amplituda modificirane pot. temp. za konst. koef. turb. difuzivnosti

- $\theta_{A,WKB}$ Amplituda modificirane pot. temp. za varijab. koef. turb. difuzivnosti
- θ_s Stacionarno rješenje za pot. temperaturu
- θ_{tot} Ukupna (totalna) pot. temp. za konst. koef. turbulentne difuzivnosti
- $\theta_{tot,WKB}$ Ukupna (totalna) pot. temp. za varijab. koef. turbulentne difuzivnosti
- θ_0 Originalna pot. temp. za konst. koef. turbulentne difuzivnosti
- $\theta_{0,WKB}$ Pot. temp za varijab. koef. turbulentne difuzivnosti
- θ_1 Korekcija pot. temp. za konst. koef. turbulentne difuzivnosti
- $\theta_{1,WKB}$ Korekcija pot. temp. za varijab. koef. turbulentne difuzivnosti
- ξ Bezdimenzijska supstitucija za visinu
- σ Karakteristični valni broj

1. Uvod

Ovaj diplomski rad se bavi blago nelinearnom modifikacijom Prandtlovog modela strujanja u nagnutom graničnom sloju. U uvodu se predstavljaju pojmovi i problematika rada. U poglavlju 2. analitičkim metodama se pokušava modificirati klasični Prandtlov model. Rješavanje problema za slučaj konstantnog i varijabilnog koeficijenta turbulentne difuzivnosti se izvodi regularnom perturbativnom metodom (npr. Bender i Orszag, 1978; Grisogono i Oerlemans, 2001a). Pri tome se koristi WKB metoda (prema Wentzel, Kramers i Brillouin) za varijabilni koeficijent turbulentne difuzivnosti. Poglavlje 3. prikazuje rezultate i usporedbu mjerenja i novih analitičkih rješenja. Zaključak rada je iznesen u poglavlju 4.

1.1. Atmosferski granični sloj

Sloj fluida u neposrednoj blizini granice s čvrstim tijelom ili drugim fluidom naziva se granični sloj (npr. Pedlosky, 1987; Kundu i Cohen, 2002). Efekti viskoznosti u fluidu su dominantni u tzv. graničnom sloju, dok se u području slobodnog fluida viskoznost može najčešće zanemariti. U graničnim slojevima atmosfere i oceana postoje veliki gradijenti polja strujanja i temperature (Prandtl, 1942; Stull, 1988). Atmosferski granični sloj (AGS) je najniži dio atmosfere u kontaktu sa Zemljinom površinom koja na njega utječe trenjem, evapotranspiracijom, modifikacijom strujanja zbog postojeće topografije itd. (npr. Stull, 1988). U AGS-u su fizikalne veličine poput brzine strujanja i temperature podložne brzim i velikim fluktuacijama (turbulencija). U slobodnoj atmosferi turbulencija je slabija nego u AGS-u.

AGS se dijeli na nestabilno, neutralno i stabilno statički stratificirani granični sloj (npr. Stull, 1988). Kada je gustoća česti zraka manja od gustoće okoliša, dolazi do spontanog uzlaznog gibanja i konvekcije zbog uzgona. Suprotno, ako se čest nakon pomaka vraća u početno stanje, radi se o stabilno statički stratificiranom graničnom sloju (npr. Kavčić, 2010). Za topla sunčana dana površinsko zagrijavanje destabilizira AGS i razvija se konvekcija, te granični sloj može narasti i do nekoliko kilometara visine. Noću se tlo hlađi te visina AGS-a može biti jedva nekoliko desetaka metara u slučaju mirne noći bez oblaka. Tada je AGS statički

stabilan. Zbog složene termodinamike i utjecaja Zemljine površine procesi u AGS-u su kompleksni (npr. Stull, 1988; Baklanov i Grisogono, 2007) i zbog toga ih je teško modelirati analitičkim metodama.

U razvoju turbulentnih vrtloga ključnu, ali indirektnu ulogu, ima viskoznost i tzv. neproklizavajući donji rubni uvjet (*eng. no-slip lower boundary condition*), tj. isčezavanje brzine na čvrstoj površini. Zbog tog rubnog uvjeta i slab vjetar uzrokuje smicanje blizu površine koje vodi stvaranju turbulentnih vrtloga.

AGS postaje stabilno statički stratificiran uvijek kada je podloga hladnija od okolnog zraka. Ovakav stabilni granični sloj (SGS) se često formira noću iznad kopna, a uzrokuje ga dugovalno, radijacijsko ohlađivanje i tada se naziva noćni AGS. Drugi bitan proces je advekcija toplijeg zraka nad hladniju površinu. U SGS-u se turbulencija generira mehanički, dok stabilno statička stratifikacija slično viskoznoj disipaciji nastoji umanjiti ili čak poništiti turbulenciju.

Česta pojava u SGS-u je niska mlazna struja (NMS, *eng. low level jet*). To je područje pojačanog vjetra u donjoj troposferi i predstavlja lokalni maksimum brzine. Brzine vjetra u NMS iznose između 6 i 30 m/s. Često se formira tijekom noći i postiže maksimum u ranim jutarnjim satima. Tada se naziva i noćna mlazna struja (*eng. nocturnal jet*). Može se reći da se NMS javlja kada u najnižih 1500 m atmosfere postoji maksimum brzine vjetra koji je bar za 2 m/s veći od brzine vjetra iznad njega (npr. Stull, 1988). U posljednje vrijeme se posebna pažnja posvećuje modeliranju SGS-a, osobito onih nagnutih, koje karakterizira perzistentno katabatičko strujanje.

1.2. Nagnuti granični sloj i model katabatičkog strujanja

Glavne karakteristike nagnutog, stabilno statički stratificiranog sloja atmosfere često su predstavljane linearnim modelom katabatičkog strujanja. Katabatičko strujanje uobičajena je pojava u planinskim područjima (npr. Whiteman, 1990) te nad blago nagnutim površinama poput ledenih površina Grenlanda i Antarktike (npr. Klein i sur., 2001). Strujanje nastaje kada se zrak uz nagnutu površinu hlađi brže nego zrak na istoj visini, no dalje od površine. Ovo dovodi do negativnog uzgona koji uzrokuje strujanje niz padinu. Ukoliko je okolna atmosfera stabilno statički stratificirana i mirna, može se razviti stacionarno katabatičko strujanje.

Katabatička strujanja su generirana vertikalnim gradijentima gustoće na kosinama (npr. Kavčić i Grisogono, 2007). Zrak hlađen turbulentnim miješanjem s hladnijom površinom će se spuštati niz padinu, forsiran uzgonom. Za razliku od graničnih slojeva nad ravnim površinama, dinamika toka je bitno određena poljem temperature, odnosno to je katabatički član forsiranja (Denby, 1999). Sveprisutna priroda katabatičkih strujanja nad npr. Antarktikom i Grenlandom, kao i nad manjim područjima kao što je Island, i njihovi kumulativni učinci, impliciraju da katabatički vjetar pridonosi općoj cirkulaciji (Parish i Bromwich, 1991).

Detaljna struktura katabatičkog toka i dalje ostaje važan problem modeliranja (npr. Weng i Taylor, 2003). Stabilno statički stratificiran AGS je neadekvatno tretiran u mnogim numeričkim modelima (npr. Zilitinkevich i sur., 2006), tj. modeliranje katabatičkog vjetra je razmjerno uspješno samo uz dovoljnu vertikalnu rezoluciju (npr. Renfrew, 2004). Jednostavan model katabatičkog strujanja predstavlja ravnotežu produkcije negativnog uzgona zbog deficita potencijalne temperature na površini te vertikalne difuzije turbulentnim tokovima (npr. Mahrt, 1982; Egger, 1990). Osnovna obilježja čistog katabatičkog strujanja su izražena NMS i oštar vertikalni gradijent temperature pri površini (npr. Grisogono i Oerlemans, 2001a,b; King i sur., 2001; van den Broeke i sur., 2002).

Za razliku od bure koja doseže brzinu i do $\sim 50 \text{ ms}^{-1}$ katabatički vjetar ne može imati brzinu veću od $\sim 20 \text{ ms}^{-1}$ jer takva brzina zahtjeva jako veliki površinski deficit potencijalne temperature. Iznos maksimalne brzine kod bure je na mnogo većoj visini nego li je to kod katabatičkog vjetra, no najbitnija razlika je u tome što je kod bure glavni pokretač orografski lom valova (hidraulika) a kod katabatičkog vjetra termodinamika. Stari koncept da je bura katabatički vjetar može vrijediti u početnoj i završnoj fazi kada bura nije jaka ili olujna i ne širi se stotinama kilometara duž obale (Grisogono i Belušić, 2009).

Većina klimatskih modela ne rješava katabatička strujanja (npr. Grisogono i Axelsen, 2012). Čak i numeričke vremenske prognoze (NVP) i mezoskalni modeli mogu imati poteškoća s odgovarajućim simulacijama katabatičkih tokova (npr. Renfrew, 2004; Renfrew i Anderson, 2006; Grisogono i Belušić, 2008b). Katabatički tokovi su važni za određivanje, na primjer, planinskih mikroklima i budućnosti ledenjaka. Iako je postignut veliki napredak u razumijevanju i kvantitativnom opisu katabatičkog vjetra, i dalje postoje poteškoće modeliranja stabilno statički stratificiranih turbulentnih tokova niz padinu zbog kompleksnih topografija i površinske nehomogenosti (Shapiro i Fedorovich, 2008).

1.3. Prandtlov model

Vjerojatno najbolji jednostavan model koji opisuje katabatički tok je onaj od Prandtla (npr. Egger, 1990; Kavčić i Grisogono, 2007), te nam je taj model polazna točka. Takav analitički model je potreban za tumačenje opažanja i naprednih simulacija numeričkih modela.

Klasični (originalni) Prandtlov model je jednostavan analitički model koji opisuje katabatičko strujanje formirano nad ohlađenom kosinom (ili anabatičko strujanje nad grijanom kosinom). Predstavlja ravnotežu između uzgonske sile i turbulentnog trenja. Vrijedi tzv. kvazihidrostatička (Haiden, 2003) i Boussinesqova aproksimacija, a gradijenti brzine, gustoće i topline su okomiti na kosinu.

Za 1D model jednadžbe gibanja i termodinamike glase (npr. Grisogono i Belušić, 2008a):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\theta}{\theta_0} \sin(\alpha) - \frac{\partial \overline{(w'u')}}{\partial z} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\Gamma u \sin(\alpha) - \frac{\partial \overline{(w'\theta')}}{\partial z} \quad (1.2)$$

Rubni uvjeti su:

$$\theta(z=0) = C, \quad u(z=0) = 0 \quad (1.3)$$

$$\theta(z \rightarrow \infty) = u(z \rightarrow \infty) = 0. \quad (1.4)$$

Ovdje je z -os okomita na površinu (x -os), koja je nagnuta za mali kut α od horizontale, zbog čega je provedeno zakretanje horizontalnog koordinatnog sustava i dobiven je novi sustav (x', z') u kojem se modificira jednadžba gibanja i donekle termodinamička jednadžba. Spomenuta transformacija je dana u npr. Denby (1999) i u Stiperski i sur. (2007). U ovom modelu (1.1), (1.2) s rubnim uvjetima (1.3) i (1.4), vrijede standardne oznake gdje je u -komp. vjetra niz kosinu, θ je perturbacija potencijalne temperature, θ_0 referentna potencijalna temperatura, Γ vertikalni gradijent potencijalne temperature koji je zadržan iz nezarotiranog sustava, a $\overline{w'u'}$ i $\overline{w'\theta'}$ su turbulentni tokovi impulsa i topline kasnije parametrizirani preko K-teorije. K-teorija se zasniva na pretpostavci da se turbulentni vrtlozi ponašaju slično molekularnoj difuziji i da je turbulentni tok danog polja proporcionalan gradijentu srednjeg strujanja (npr. Holton, 2004).

Tada su turbulentni tokovi topline i impulsa koji uvijek idu "niz gradijent" u K-teoriji opisani na sljedeći način:

$$\overline{w'\theta'} = -K_h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (1.5)$$

$$\overline{w'u'} = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (1.6)$$

gdje je K_h koeficijent turbulentne difuzivnosti za toplinu (dalje u tekstu se označava kao K , naziva se još i vrtložna konduktivnost), a K_m je koeficijent turbulentne difuzivnosti za količinu gibanja. Definiramo Prandtlov broj kao $Pr = \frac{K_m}{K}$, pa dalje pišemo $K Pr$ umjesto K_m . Rubni uvjeti su da nema vjetra na tlu ('no slip'), temperaturna perturbacija na tlu je konstantna ($C < 0$ za katabatički vjetar), dok svi poremećaji trnu za proizvoljno veliku visinu. U stacionarnom klasičnom modelu su lijeve strane jednadžbi (1.1) i (1.2) nula i ravnoteža je određena balansom između negativnog uzgona i trenja (za impuls), te vertikalnog temperaturnog gradijenta, tj. adijabatičkog hlađenja ili grijanja i turbulentne razmjene temperature (za toplinu).

Rješenje (za u i θ) stacionarnog Prandtlovog modela (1.1) i (1.2) uz dane rubne uvjete i pretpostavke glasi:

$$u_s(z) = -C\mu \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) \quad (1.7)$$

$$\theta_s(z) = C \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \quad (1.8)$$

gdje je $h_p = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$ karakteristična visina Prandtlovog sloja, a $\sigma = \left[\frac{Ns \sin(\alpha)}{K Pr^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ je pripadni karakteristični 'valni broj', $\mu = \left(\frac{g}{\theta_0 \Gamma Pr}\right)^{\frac{1}{2}}$ te $N^2 = \Gamma g / \theta_0$ uobičajeni kvadrat uzgonske frekvencije. Indeks 's' u (1.7) i (1.8) označava stacionarno rješenje za temperaturu i vjetar. Odavde možemo izračunati visinu $z_j = h_p \pi / 4$ i maksimalnu brzinu katabatičke NMS.

2. Modifikacija Prandtlovog modela

Klasični Prandtlov model je linearan, i kao takav jedva da adekvatno opisuje vrlo jak vertikalni gradijent potencijalne temperature između površine i katabatičkog strujanja. Naime, model opisuje gradijent između ~ 1 i 10 K/km, dok perturbirani gradijent tj. gradijent tik iznad površine može premašiti $10\text{K}/(20\text{m})$. U ovom radu razmatramo blago nelinearnu formulaciju i modifikaciju Prandtlovog modela koji bi djelomično trebao popraviti spomenutu poteškoću. Mali parametar koji regulira intezitet blage nelinearnosti ćemo prilagođavati na temelju postojećih podataka. Model ćemo usporediti s podacima s ledenjaka Pasterze u Austriji.

2.1. Blago nelinearna modifikacija za konstantnu turbulentnu difuzivnost

Perturbativna metoda se koristi za pronalaženje približnih rješenja problema koji se ne mogu riješiti egzaktno, polazeći od egzaktnog rješenja srodnog problema. Koristimo regularnu perturbativnu metodu za uvođenje blage nelinearnosti (npr. Bender i Orszag, 1978). Članu Γ u (1.2) dodajemo blago nelinearan član $\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z}$ dok jednadžba za prijenos impulsa (1.1) ostaje ista. Ovo je ujedno i jedina nova pretpostavka u modificiranom Prandtlovom modelu.

$$0 = g \frac{\theta}{\theta_0} \sin(\alpha) + KPr \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$0 = - \left(\Gamma + \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) u \sin(\alpha) + K \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (2.2)$$

Totalnu u -komponentu brzine i temperaturu pišemo kao

$$u_{tot} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + ..$$

$$\theta_{tot} = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + ..$$

gdje je $0 \leq \varepsilon \ll 1$ mali parametar. U jednadžbama (2.1) i (2.2) θ i u zamjenjujemo s θ_{tot} i u_{tot} . Budući da je sustav uz ε^0 već riješen, sada uzimamo članove uz ε^1 . Tako dobivamo

$$0 = g \frac{\theta_1}{\theta_0} \sin(\alpha) + KPr \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \quad (2.3)$$

$$0 = - \left(\Gamma u_1 + \frac{\partial \theta_0}{\partial z} u_0 \right) \sin(\alpha) + K \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2}, \quad (2.4)$$

gdje su nam sada nepoznanice θ_1 i u_1 . Iz (2.3) dobijemo izraz za θ_1 te ga uvrstimo u (2.4). Isto tako iz (2.4) dobijemo izraz za u_1 te ga uvrstimo u (2.3). Dobijemo

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + u_1 \frac{g \Gamma \sin^2(\alpha)}{\theta_0 Pr K^2} = - \frac{g \sin^2(\alpha)}{\theta_0 Pr K^2} u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^4} + \theta_1 \frac{g \Gamma \sin^2(\alpha)}{\theta_0 Pr K^2} = \frac{\sin(\alpha)}{K} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right), \quad (2.6)$$

gdje su nam $u_0(z)$ i $\theta_0(z)$ poznati od prije. Sustav (2.5) i (2.6) opet predstavlja prigušeni oscilator, ali sada forsiran osnovnim stanjem. Uvodimo supstituciju $\frac{4}{h_p^4} = \frac{g \Gamma \sin^2(\alpha)}{\theta_0 Pr K^2}$.

Sređivanjem (dodatak A) dobivamo

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial \xi^4} + \frac{1}{4} u_1 = - \frac{C^2 \mu}{8 h_p \Gamma} \exp(-\xi) (\sin \xi - \cos \xi + 1) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^4 \theta_1}{\partial \xi^4} + \frac{1}{4} \theta_1 = - \frac{h_p \sin(\alpha) C^2 \mu}{4 K} \exp(-\xi) (\sin \xi + \cos \xi - 1/2), \quad (2.8)$$

gdje je $\xi \equiv 2z/h_p$. Dobivene jednadžbe rješavamo metodom neodređenih koeficijenata. Parcijalno deriviranje zamjenjujemo običnim diferencijalom jer imamo ovisnost samo o visini z . Riješimo homogenu jednadžbu (2.8) čije je rješenje oblika

$$\theta_{1,hom} \sim \exp(\lambda \xi). \quad (2.9)$$

Sređivanjem dobivamo (dodatak A):

$$\begin{aligned} \theta_{1,hom} &= G_1 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + G_2 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &\quad + G_3 \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + G_4 \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Zatim pretpostavimo partikularno rješenje oblika:

$$\theta_{1,part} = A_1 \exp(-\xi) \cos \xi + B_1 \exp(-\xi) \sin \xi + C_1 \exp(-\xi), \quad (2.11)$$

jer se (2.8) s desne strane sastoji od tri funkcije – eksponencijalne množene sa sinusom, kosinusom i konstantom. Ovdje su A_1 , B_1 i C_1 koeficijenti koje trebamo odrediti, kao i G_1 , G_2 , G_3 i G_4 . Analogno i za $u_{1,part}$. Opće rješenje je zbroj homogenog i partikularnog rješenja. Sada primjenjujemo rubne uvjete

$$\theta_{tot}(z) = \theta_0(z) + \varepsilon\theta_1(z)|_{z \rightarrow 0} = C \quad (2.12)$$

$$\theta_{tot}(z) = \theta_0(z) + \varepsilon\theta_1(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.13)$$

$$u_{tot}(z) = u_0(z) + \varepsilon u_1(z)|_{z \rightarrow 0} = 0 \quad (2.14)$$

$$u_{tot}(z) = u_0(z) + \varepsilon u_1(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.15)$$

Kako znamo prema (1.3) i (1.4) da je

$$\theta_0(z = 0) = C, \quad u_0(z = 0) = 0 \quad (2.16)$$

$$\theta_0(z \rightarrow \infty) = u_0(z \rightarrow \infty) = 0, \quad (2.17)$$

sada zahtjevamo

$$\theta_1(z = 0) = u_1(z = 0) = 0 \quad (2.18)$$

$$\theta_1(z \rightarrow \infty) = u_1(z \rightarrow \infty) = 0. \quad (2.19)$$

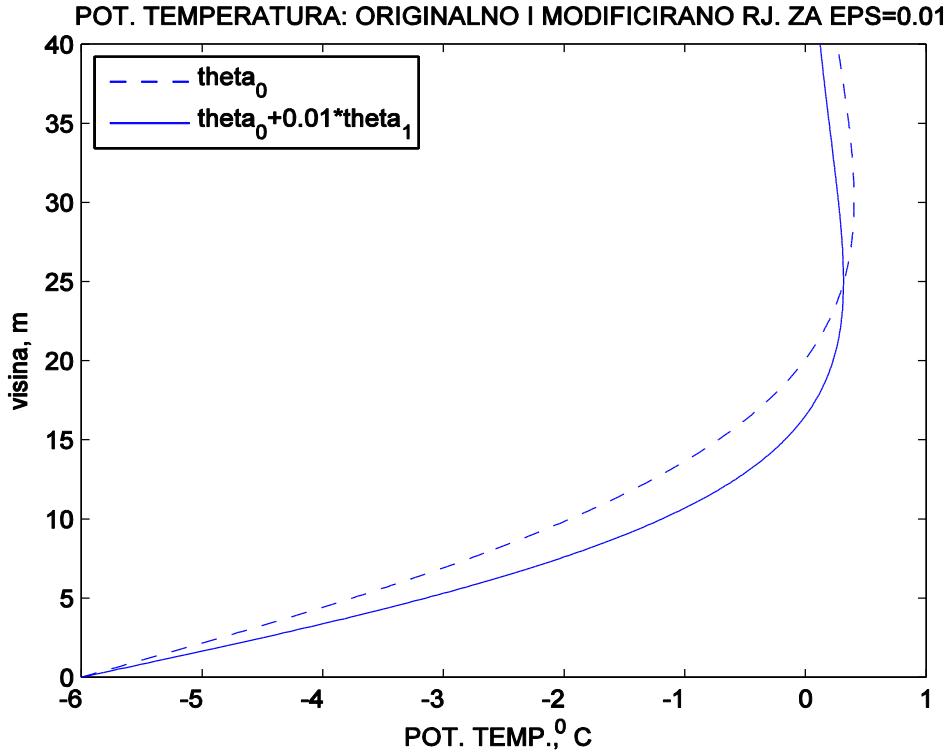
Nakon sređivanja dobivamo konačne izraze za u_1 i θ_1 (Dodatak A):

$$\begin{aligned} \theta_1(z) &= \theta_A \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \left[-\frac{1}{15} \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) - \frac{1}{6} \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \right] \\ &\quad + \theta_A \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \left[\frac{1}{15} \sin\left(\frac{2z}{h_p}\right) + \frac{1}{15} \cos\left(\frac{2z}{h_p}\right) + \frac{1}{10} \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} u_1(z) &= u_A \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \left[-\frac{1}{3} \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) + \frac{2}{15} \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \right] \\ &\quad + u_A \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \left[-\frac{1}{30} \cos\left(\frac{2z}{h_p}\right) + \frac{1}{30} \sin\left(\frac{2z}{h_p}\right) - \frac{1}{10} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

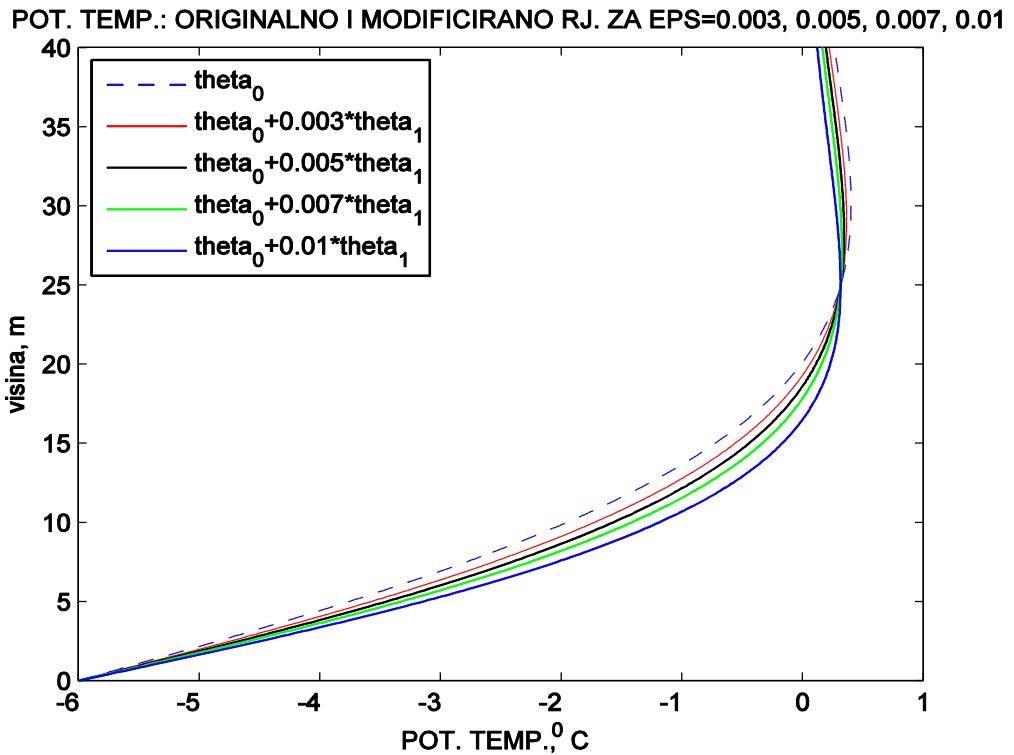
gdje su $\theta_A = \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{K}$ i $u_A = \frac{C^2 \mu}{h_p \Gamma}$. Ovdje su članovi uz $\exp(-z/h_p)$ od homogenog, a uz $\exp(-2z/h_p)$ od partikularnog dijela rješenja. Izrazi $\theta_1(z)$ i $u_1(z)$ se sastoje od kombinacija eksponencijalne funkcije te sinusa i kosinusa jednostrukih i dvostrukih argumenata te

usamljenog eksponencijalnog člana. Ukupna rješenja su $\theta_{tot}(z) = \theta_0(z) + \varepsilon\theta_1(z)$ i $u_{tot}(z) = u_0(z) + \varepsilon u_1(z)$.



Slika 2.1. $\theta_0(z)$ (crtkana krivulja) i $\theta_{tot}(z)$ (puna krivulja) za $\varepsilon = 0.01$. Ostali ulazni parametri su $K = 0.06 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$, $Pr = 2$, $\alpha \approx -5^\circ$, $\theta_0 = 273.15^\circ \text{C}$, $\Gamma = 3 \text{ Kkm}^{-1}$, $C = -6^\circ \text{C}$.

Na slici 2.1. je prikazana usporedba $\theta_0(z)$ i $\theta_{tot}(z)$ za izabrani parametar blage nelinearnosti $\varepsilon = 0.01$. $\theta_{tot}(z)$ ima veći prizemni gradijent od $\theta_0(z)$. Ovdje je uzeto $C = -6^\circ \text{C}$, $\Gamma = 3 \text{ Kkm}^{-1}$, $K = 0.06 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ i $Pr = 2$. Na slici 2.2. prikazani su $\theta_0(z)$ i $\theta_{tot}(z)$ za nekoliko različitih parametara ε . Što je izbor tog parametra veći, to pripadni $\theta_{tot}(z)$ ima veći prizemni gradijent. Najveću vrijednost parametra blage nelinearnosti ε kojeg ovdje razmatramo je $\varepsilon = 0.01$. Kasnije u potpoglavlju 2.1.1. je objašnjeno zašto je tome tako.



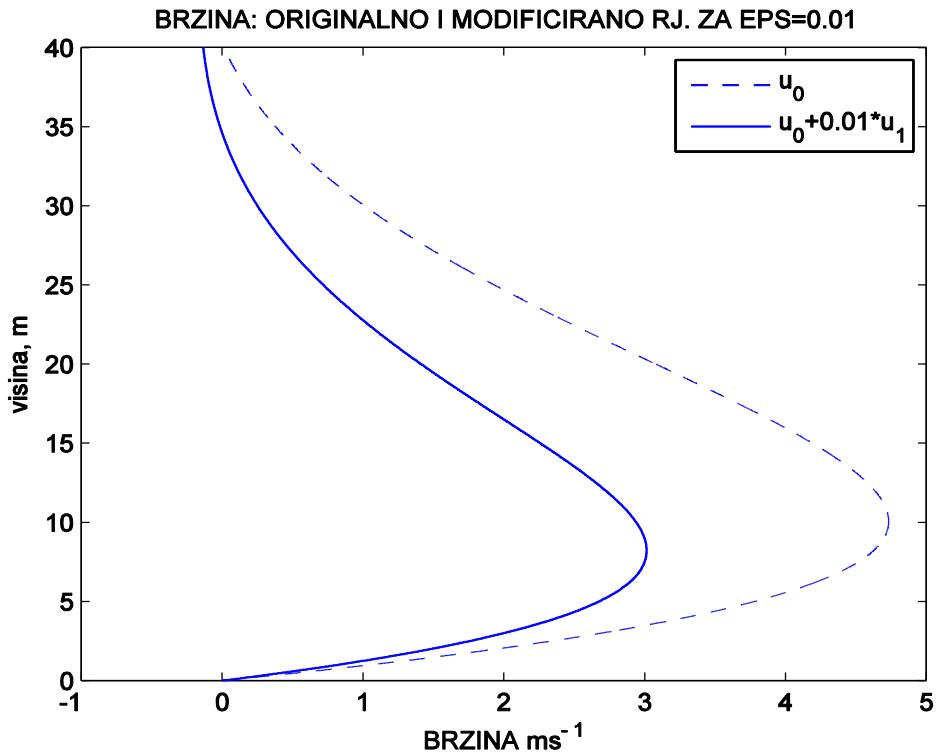
Slika 2.2. θ_0 (crtkana krivulja) i θ_{tot} (pune krivulje) za izbor različitih $\varepsilon = 0.003, 0.005, 0.007$ i 0.01 . Ostali ulazni parametri su kao na slici 2.1.

Za razliku od potencijalne temperature, brzina vjetra u novom modificiranom obliku ima manji prizemni gradijent od klasičnog oblika. Na slici 2.3. su prikazani $u_0(z)$ i $u_{tot}(z)$ za $\varepsilon = 0.01$.

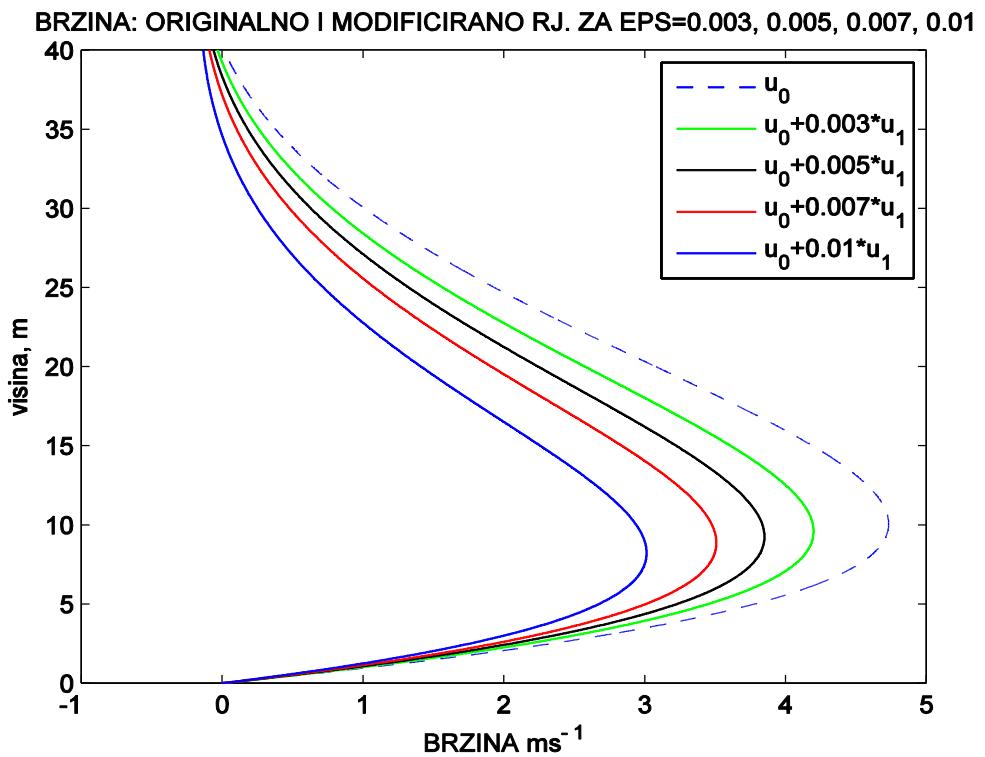
Na slici 2.4. prikazani su $u_0(z)$ i $u_{tot}(z)$ za različite parametre ε . Za sve veći ε dobije se sve manji prizemni gradijent brzine vjetra. Za $\varepsilon_{max} = 0.01$ maksimalna brzina vjetra se smanji za skoro 2 ms^{-1} . Visina NMS (z_j) se spušta povećanjem koeficijenta ε . Visina z_j se dobije iz uvjeta $\partial u / \partial z = 0$. Nova visina NMS ($z_{j,tot}$) se dobije iz uvjeta $\partial u_{tot} / \partial z = 0$. Što je koeficijent ε veći, to je visina $z_{j,tot}$ manja, no ne može se analitički riješiti, već samo numerički. U tablici 2.1. prikazani su z_j u ovisnosti o ε .

ε	0	0.003	0.005	0.007	0.01
$z_j \text{ (m)}$	10.05	9.60	9.26	8.87	8.22

Tablica 2.1. Ovisnost visine z_j o ε za $C = -6^\circ\text{C}$, $\Gamma = 3 \text{ Kkm}^{-1}$, $K = 0.06 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ i $Pr = 2$.

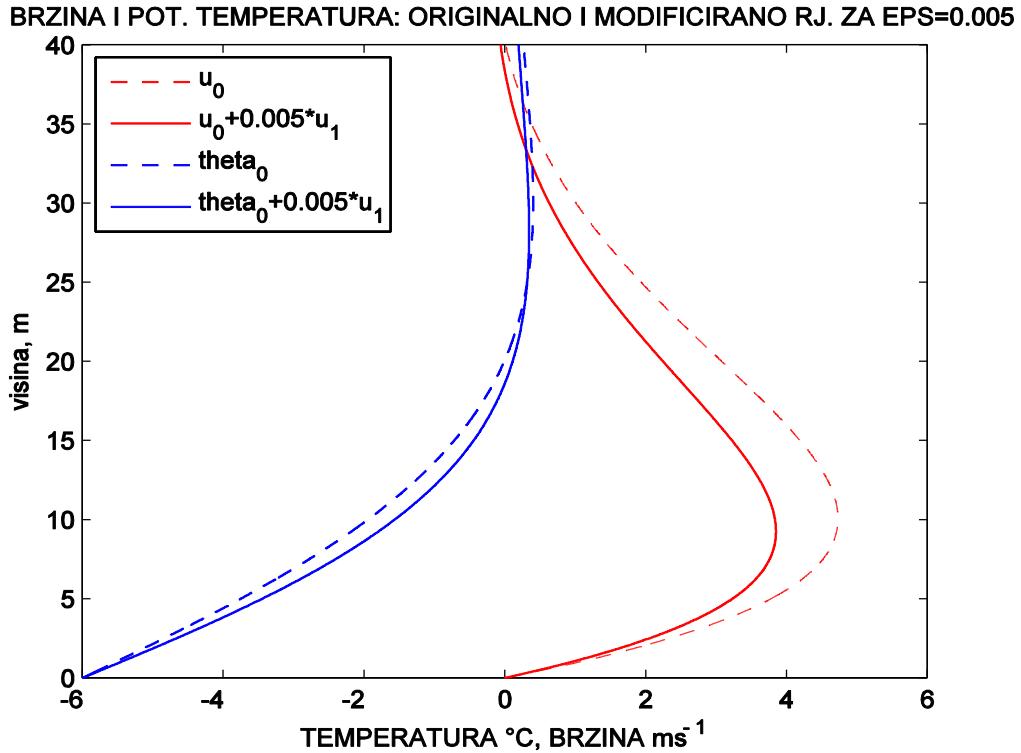


Slika 2.3. $u_0(z)$ (crtkana krivulja) i $u_{tot}(z)$ (puna krivulja) za $\varepsilon = 0.01$. Ostali ulazni parametri su kao na slici 2.1.



Slika 2.4. $u_0(z)$ (crtkana krivulja) i $u_{tot}(z)$ (pune krivulje) za izbor razlicitih $\varepsilon = 0.003, 0.005, 0.007$ i 0.01 . Ostali ulazni parametri su kao na slici 2.1.

Slika 2.5. prikazuje brzinu vjetra i potencijalnu temperaturu za originalne i modificirane slučajeve uz $\varepsilon = 0.005$. Za određeni koeficijent ε , brzina pokazuje relativno veću modifikaciju od potencijalne temperature, tj. $u_{tot}(z)$ više odstupa od $u_0(z)$ nego li $\theta_{tot}(z)$ od $\theta_0(z)$.



Slika 2.5. $\theta_0(z)$ (crtkana krivulja) i $\theta_{tot}(z)$ (puna krivulja) lijevo, $u_0(z)$ (crtkana krivulja) i $u_{tot}(z)$ (puna krivulja) desno za $\varepsilon = 0.005$. Ostali ulazni parametri su kao na slici 2.1.

Nadalje, modificirana visina z_j je nešto niža od pripadne visine z_j u originalnom Prandtlovom modelu.

2.1.1. Procjena maksimalnog parametra blage nelinearnosti

Očekujemo $0 \leq \varepsilon \ll 1$. Maksimalni dopušteni ε nalazimo iz relacije

$$\Gamma + \varepsilon \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \geq 0 \quad (2.22)$$

koja treba biti ispunjena svugdje u katabatičkom AGS-u te koja proizlazi iz termodinamičke jednadžbe (2.2). Iznad visine inverzije (z_{inv}) je $\frac{\partial \theta_0}{\partial z} \leq 0$ pa je za taj sloj

$$\Gamma - \varepsilon \left| \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right|_{z>z_{inv}} \geq 0. \quad (2.23)$$

Procjena maksimalnog ε slijedi iz (2.23):

$$\max \varepsilon \leq \frac{\Gamma}{\max \left| \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right|_{z>z_{inv}}}, \quad (2.24)$$

gdje znamo da je

$$\max \left| \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right|_{z>z_{inv}} \Leftrightarrow \left| \min \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) \right|. \quad (2.25)$$

Tražimo $\min \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right)$, tj. kada je $\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} = 0$:

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} = \frac{2C}{h_p^2} \exp \left(-\frac{z}{h_p} \right) \sin \left(\frac{z}{h_p} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{h_p} = \pi. \quad (2.27)$$

Tražimo vrijednost $\frac{\partial \theta_0}{\partial z}$ za $\frac{z}{h_p} = \pi$:

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial z} \Big|_{min} = -\frac{C}{h_p} \exp \left(-\frac{z}{h_p} \right) \left[\sin \left(\frac{z}{h_p} \right) + \cos \left(\frac{z}{h_p} \right) \right] \Big|_{min} = \frac{C}{h_p} \exp(-\pi). \quad (2.28)$$

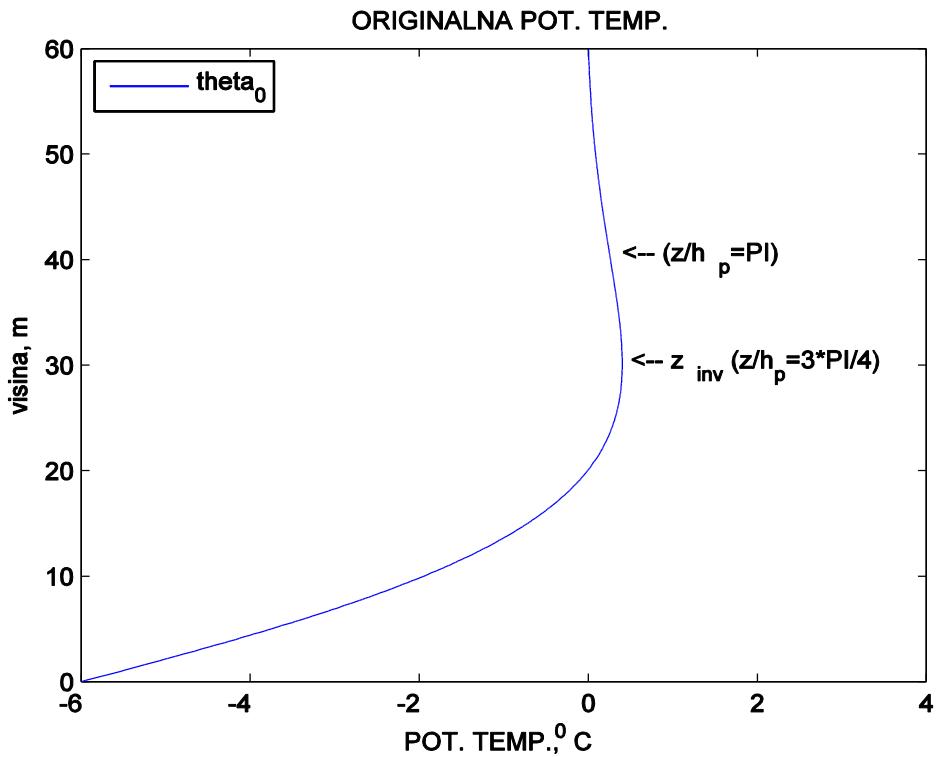
Konačno, dobiva se

$$\max \varepsilon \leq \frac{\Gamma}{\left| \frac{C}{h_p} \exp(-\pi) \right|}. \quad (2.29)$$

Uzmimo da su $\Gamma = 3 \text{ Kkm}^{-1}$, $C = -6 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $h_p \cong 13 \text{ m}$ (za $K = 0.06 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $Pr = 2$, $\alpha \approx -5^\circ$ i $\theta_0 = 273.15 \text{ }^{\circ}\text{C}$). Za taj slučaj dobije se da je maksimalna moguća vrijednost koeficijenta $\varepsilon \approx 0.15$. Za takav ε nemamo blagu već jaku nelinearnost jer se dobiju velika odstupanja $\theta_{tot}(z)$ od $\theta_0(z)$ te $u_{tot}(z)$ od $u_0(z)$, a dozvoljeno je u blago nelinearnoj teoriji maksimalno odstupanje od osnovnog stanja do čak, recimo, 50%. Za blago nelinearnu modifikaciju se može očekivati da je npr.

$$\max \varepsilon \leq \frac{\frac{\Gamma}{15}}{\left| \frac{C}{h_p} \exp(-\pi) \right|}, \quad (2.30)$$

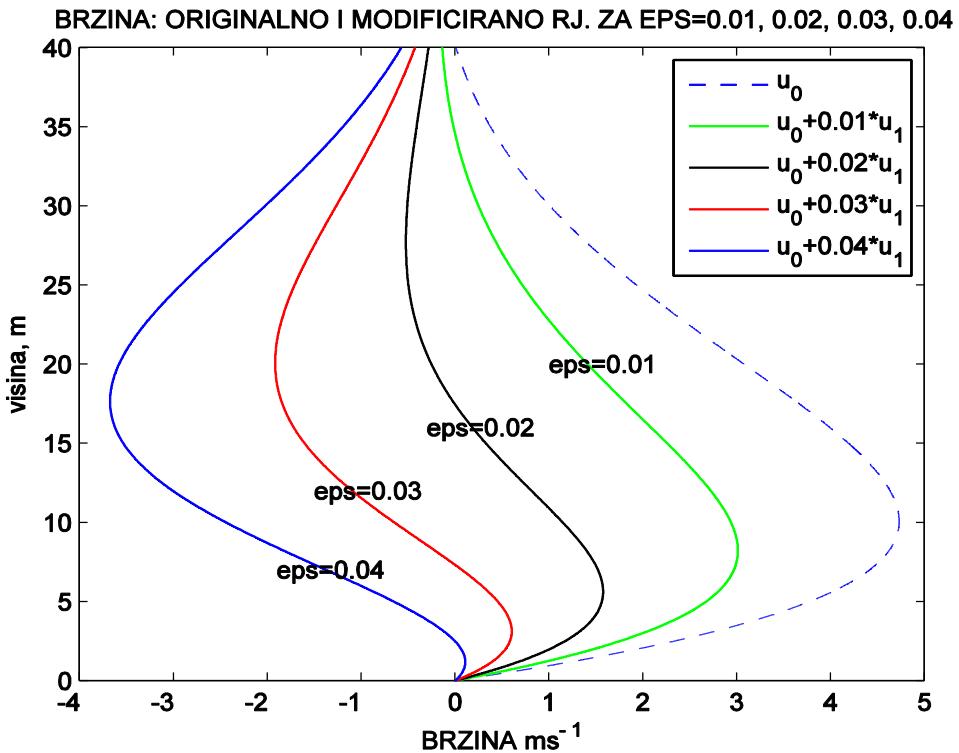
te tako procjenjujemo za naš slučaj da je $\max \varepsilon \approx 0.01$. Stoga, dalje u radu se koristi $\varepsilon = 0.005$.



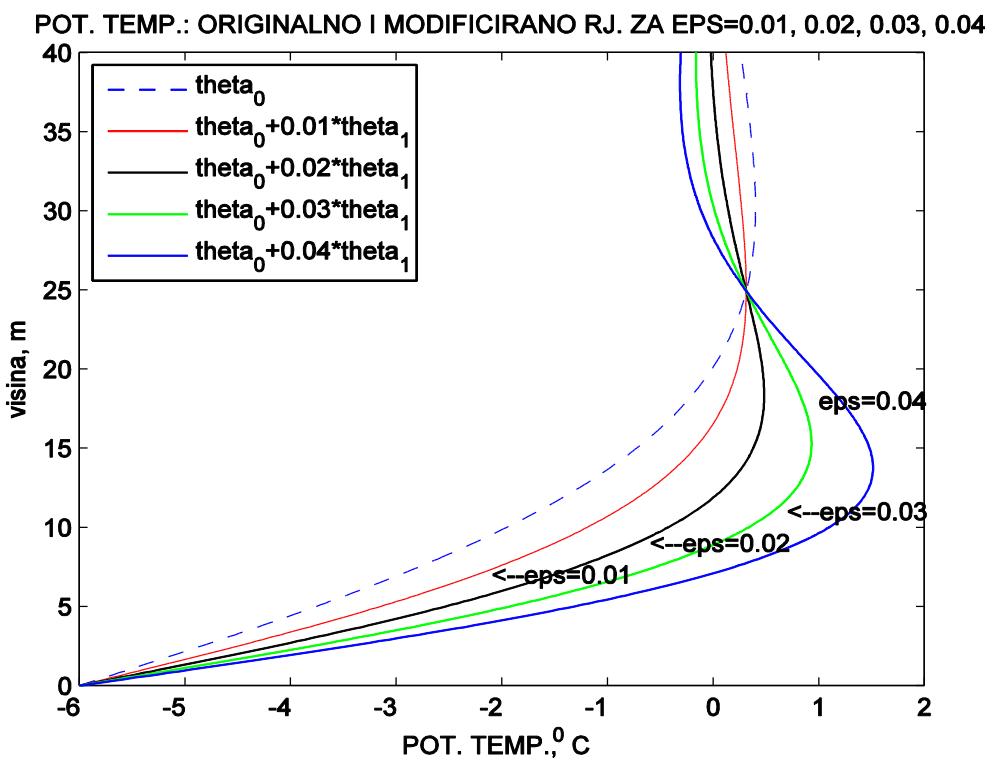
Slika 2.6. Primjer katabatičkog strujanja: $\theta_0(z)$ za ulazne parametre kao na slici 2.1.

Slika 2.6. prikazuje $\theta_0(z)$ uz označenu visinu inverzije (gdje je $\frac{\partial \theta_0}{\partial z} = 0$), $\frac{z}{h_p} = \frac{3\pi}{4}$ i visinu gdje je $\min \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right)$, $\frac{z}{h_p} = \pi$.

Slika 2.7. prikazuje $u_0(z)$ i $u_{tot}(z)$, dok slika 2.8. prikazuje $\theta_0(z)$ i $\theta_{tot}(z)$ za velike vrijednosti parametra ε . Veliki ε nije prihvatljiv za blagu nelinearnost te je u našem slučaju to već za $\varepsilon = 0.02$, tada se modificirana brzina jako razlikuje od originalne. Maksimalan se iznos brzine u tom slučaju smanji za čak $\sim 300\%$, što nema smisla.



Slika 2.7. $u_0(z)$ (crtkana krivulja) i $u_{tot}(z)$ (pune krivulje) za izbor različitih $\epsilon = 0.01, 0.02, 0.03$ i 0.04 . Ostali ulazni parametri su kao na slici 2.1.



Slika 2.8. $\theta_0(z)$ (crtkana krivulja) i $\theta_{tot}(z)$ (pune krivulje) za izbor različitih $\epsilon = 0.01, 0.02, 0.03$ i 0.04 . Ostali ulazni parametri su kao na slici 2.1.

Sve krivulje se sijeku u jednoj točki infleksije. Za bilo koji ε u toj točki imamo istu vrijednost originalne i modificirane potencijalne temperature. Točka sjecišta je neovisna o ε jer $\theta_1(z)$ sam već ima istu vrijednost kao $\theta_0(z)$ u određenoj točki pa kao takav, pomnožen bilo kojim parametrom ε , ne mijenja njen položaj. Položaj takve točke ovisi o amplitudi θ_A i o h_p jer se ono nalazi u argumentu trigonometrijskih funkcija u (2.20).

2.2. Blago nelinearna modifikacija za varijabilnu turbulentnu difuzivnost

Modificirano strujanje je korak bliže stvarnosti ako uzmemmo varijabilni koeficijent turbulentne difuzivnosti $K=K(z)$. Zbog jačih prizemnih gradijenata od $K(z)$ imamo bolje slaganje s mjeranjima. Analitička rješenja za varijabilan $K(z)$ se mogu izvesti koristeći WKB metodu koja daje asymptotička analitička rješenja singularno perturbiranog problema. Matematička pozadina je opisana u npr. Bender i Orszag (1978). Općenito, WKB teorija daje aproksimaciju rješenja diferencijalne jednadžbe čiji je član s najvišom derivacijom pomnožen malim parametrom. Ovdje se primjenjuje WKB metoda nultog reda za dobivanje rješenja $\theta_1(z)$ i $u_1(z)$. Treba se naglasiti da $K(z)$ mora biti sporo varirajući da bi metoda bila valjana. Ovdje se koristi sporo varirajući profil $K(z)$

$$K(z) = K_0 \frac{z}{h} \exp\left(-\frac{z^2}{2h^2}\right), \quad (2.31)$$

gdje je h visina maksimalne vrijednosti $K(z)$ profila; h mora biti veći od karakteristične visine ili duljine na kojoj značajno variraju tražena rješenja. Vrijednost h je ovdje ograničena visinom strogo stabilno stratificiranog AGS-a (Grisogono i Oerlemans, 2002). Polazne jednadžbe su iste kao i za $K=const.$

$$0 = g \frac{\theta}{\theta_0} \sin(\alpha) - \frac{\partial \overline{(w'u')}}{\partial z} \quad (2.32)$$

$$0 = -\Gamma u \sin(\alpha) - \frac{\partial \overline{(w'\theta')}}{\partial z}, \quad (2.33)$$

gdje je

$$\overline{w'\theta'} = -K \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \overline{w'u'} = -K Pr \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Iz toga slijedi

$$0 = g \frac{\theta}{\theta_0} \sin(\alpha) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K Pr \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.34)$$

$$0 = -Gu \sin(\alpha) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right). \quad (2.35)$$

Dobivena diferencijalna jednadžba za θ je:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \theta}{dz^4} + \frac{4}{K(z)} \frac{dK}{dz} \frac{d^3 \theta}{dz^3} + \left[\frac{3}{K(z)} \frac{d^2 K}{dz^2} + \frac{2}{K(z)^2} \left(\frac{dK}{dz} \right)^2 \right] \frac{d^2 \theta}{dz^2} + \left[\frac{1}{K(z)} \frac{d^3 K}{dz^3} + \frac{1}{K(z)^2} \frac{dK}{dz} \frac{d^2 K}{dz^2} \right] \frac{d\theta}{dz} \\ + N^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{Pr K(z)^2} \theta = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

što su pokazali npr. Parmhed i sur. (2004). Zanemarujemo članove uz $\frac{d^2 \theta}{dz^2}$ i uz $\frac{d\theta}{dz}$ u (2.36) obzirom se radi o WKB metodi nultog reda. Zanemarujemo i član uz $\frac{d^3 \theta}{dz^3}$ jer je i on jako mali, te nam preostaje

$$\frac{d^4 \theta}{dz^4} + N^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{Pr K(z)^2} \theta = 0 \quad (2.37)$$

Sličan postupak se provede i za u te se dobije

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + N^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{Pr K(z)^2} u = 0. \quad (2.38)$$

Dakle, (2.37) i (2.38) su iste kao i u originalnom Prandtlovom modelu, samo što je sada u njima K sporo varirajuća funkcija $K(z)$. Koristeći rubne uvjete (1.3) i (1.4) dobiju se rješenja za θ_0 i u_0

$$u_{0,WKB}(z) = -C\mu \exp[-I(z)] \sin[I(z)], \quad (2.39)$$

$$\theta_{0,WKB}(z) = C \exp[-I(z)] \cos[I(z)] \quad (2.40)$$

gdje je $I(z) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^z K^{-\frac{1}{2}} dz$ i $\sigma^2 = \frac{g\Gamma \sin(\alpha)}{\theta_0 Pr}$. Ova WKB rješenja su strukturno ista kao i za $K = const.$, što se također vidi iz prijašnjih radova (Grisogono, 1995; Grisogono i

Oerlemans, 2001a,b, 2002). Amplituda ostaje konstantna kao i u $K = const.$ slučaju, ali faza $\left[\left(\frac{\sigma}{2K}\right)^{\frac{1}{2}} z\right]$ prelazi u $\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^z K^{-\frac{1}{2}} dz$. Detalji su u Grisogono i Oerlemans (2001a). Rješenja (2.39) i (2.40) vrlo su slična prijašnjim rješenjima (1.7) i (1.8).

Dobivena su WKB rješenja za θ_0 i u_0 koja vrijede za Prandtlov model uz $K(z)$. Ovdje se radi blaga nelinearizacija i to je glavni doprinos ove radnje. Sličnim postupkom kao i za slučaj $K=const.$ članu Γ u (2.35) dodajemo blago nelinearan član $\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z}$, pa su polazne jednadžbe za $\theta_{1,WKB}$ i $u_{1,WKB}$:

$$0 = g \frac{\theta}{\theta_0} \sin(\alpha) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K Pr \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.41)$$

$$0 = - \left(\Gamma + \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) u \sin(\alpha) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right). \quad (2.42)$$

Totalnu u -komponentu brzine i temperaturu pišemo kao

$$u_{tot,WKB} = u_{0,WKB} + \varepsilon u_{1,WKB} + \varepsilon^2 u_{2,WKB} + ..$$

$$\theta_{tot,WKB} = \theta_{0,WKB} + \varepsilon \theta_{1,WKB} + \varepsilon^2 \theta_{2,WKB} + ..$$

U (2.41) i (2.42) θ i u zamjenjujemo s $\theta_{tot,WKB}$ i $u_{tot,WKB}$. Budući da je sustav uz ε^0 već riješen u (2.39) i (2.40), sada uzimamo članove uz ε^1 . Sličnim postupkom kako je dobivena (2.36), sada tražimo nehomogenu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za $\theta_{1,WKB}$.

Zanemarivanjem članova uz $\frac{d^3 \theta}{dz^3}$, $\frac{d^2 \theta}{dz^2}$ i $\frac{d \theta}{dz}$ kao u (2.36) dobivamo:

$$\frac{d^4 \theta_{1,WKB}}{dz^4} + N^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{Pr K(z)^2} \theta_{1,WKB} = \frac{\sin(\alpha)}{K(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u_{0,WKB} \frac{\partial \theta_{0,WKB}}{\partial z} \right). \quad (2.43)$$

Analogno, za u -komponentu brzine:

$$\frac{d^4 u_{1,WKB}}{dz^4} + N^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{Pr K(z)^2} u_{1,WKB} = - \frac{g \sin^2(\alpha)}{\theta_0 K(z)^2 Pr} u_{0,WKB} \frac{\partial \theta_{0,WKB}}{\partial z}. \quad (2.44)$$

Koristeći rubne uvjete (2.16) i (2.17) nakon duljeg računa dobiju se rješenja $\theta_{1,WKB}(z)$ i $u_{1,WKB}(z)$:

$$\begin{aligned}\theta_{1,WKB}(z) &= \theta_{A,WKB} \exp[-I(z)] \left\{ -\frac{1}{15} \sin[I(z)] - \frac{1}{6} \cos[I(z)] \right\} \\ &+ \theta_{A,WKB} \exp[-2I(z)] \left\{ \frac{1}{15} \sin[2I(z)] + \frac{1}{15} \cos[2I(z)] + \frac{1}{10} \right\}\end{aligned}\quad (2.45)$$

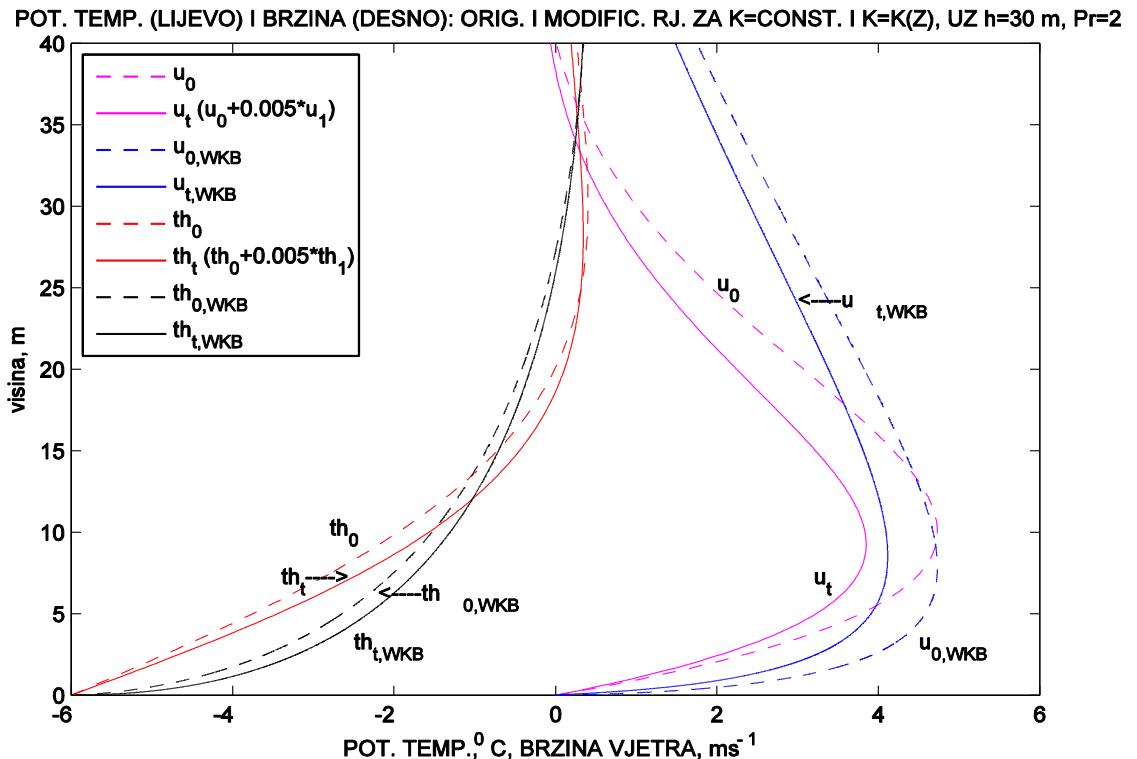
$$\begin{aligned}u_{1,WKB}(z) &= u_{A,WKB} \exp[-I(z)] \left\{ -\frac{1}{3} \sin[I(z)] + \frac{2}{15} \cos[I(z)] \right\} \\ &+ u_{A,WKB} \exp[-2I(z)] \left\{ \frac{1}{30} \sin[2I(z)] - \frac{1}{30} \cos[2I(z)] - \frac{1}{10} \right\}\end{aligned}\quad (2.46)$$

gdje su $\theta_{A,WKB} = \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} C^2 \mu \sin(\alpha) K(z)^{-\frac{1}{2}}$ i $u_{A,WKB} = \frac{C^2 \mu}{\Gamma} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} K(z)^{-\frac{1}{2}}$. Rješenja (2.45) i (2.46) formalno su slična (2.20) i (2.21). Ukupna (totalna) rješenja su

$$\theta_{tot,WKB}(z) = \theta_{0,WKB}(z) + \varepsilon \theta_{1,WKB}(z) \quad (2.47)$$

$$u_{tot,WKB}(z) = u_{0,WKB}(z) + \varepsilon u_{1,WKB}(z). \quad (2.48)$$

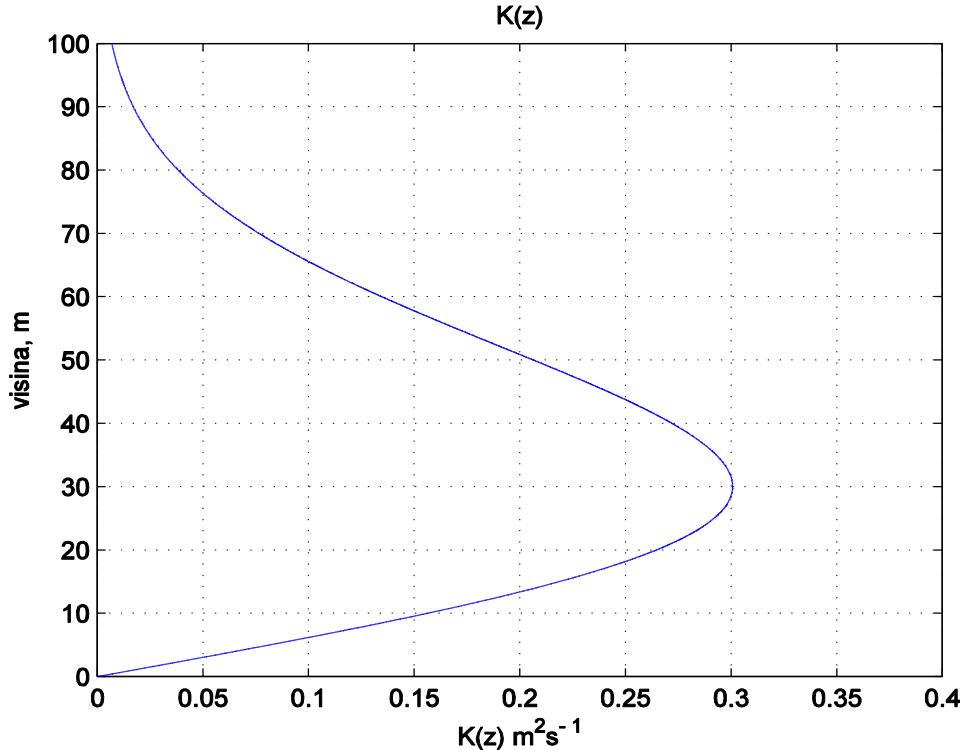
Svi rezultati su strukturno vrlo slični onima za $K = const.$



Slika 2.9. Prikaz $u_0(z)$, $u_{0,WKB}(z)$, $\theta_0(z)$, $\theta_{0,WKB}(z)$ (crtkane krivulje) i $u_{tot}(z)$, $u_{tot,WKB}(z)$, $\theta_{tot}(z)$, $\theta_{tot,WKB}(z)$ (pune krivulje) za $\varepsilon = 0.005$, $K_c = 0.06 m^2 s^{-1}$, $h = 30 m$, $Pr = 2$, $\max[K(z)] = 0.3 m^2 s^{-1}$, $\Gamma = 3 K km^{-1}$.

Slika 2.9. prikazuje $u_0(z)$, $u_{tot}(z)$, $\theta_0(z)$ i $\theta_{tot}(z)$ koji vrijede za konstantni koeficijent turbulentne difuzivnosti $K = K_c = const.$, te $u_{0,WKB}(z)$, $u_{tot,WKB}(z)$, $\theta_{0,WKB}(z)$ i $\theta_{tot,WKB}(z)$ koji vrijede za varijabilni koeficijent turbulentne difuzivnosti $K(z)$ prema (2.31). Dodano je još $0.0005 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ originalnom $K(z)$ kao mali broj zbog varijabilnih amplituda $\theta_{A,WKB}$ i $u_{A,WKB}$ iz (2.45) i (2.46) i “divljenje“ ponašanja $\theta_{1,WKB}(z)$ i $u_{1,WKB}(z)$ u slučaju originalno zadano $K(z)$. Procjenjemo da je $K_c = 0.2 \max[K(z)] = 0.06 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. $\theta_{tot,WKB}(z)$ ima veći prizemni gradijent od $\theta_{0,WKB}(z)$, dok $u_{tot,WKB}(z)$ ima manji prizemni gradijent od $u_{0,WKB}(z)$. Istovremeno $\theta_{0,WKB}(z)$ i $\theta_{tot,WKB}(z)$ za varijabilni $K(z)$ imaju, očekivano, veći prizemni gradijent od $\theta_0(z)$ i $\theta_{tot}(z)$, kao što $u_{0,WKB}(z)$ i $u_{tot,WKB}(z)$ imaju veći prizemni gradijent od $u_0(z)$ i $u_{tot}(z)$.

Slika 2.10. prikazuje $K(z)$. Maksimum mu je na 30 m gdje poprima vrijednost $\max[K(z)] = 0.3 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. $K(z)$ je blago varijabilan obzirom na $\theta_{tot,WKB}(z)$ i $u_{tot,WKB}(z)$ koji variraju na relativno manjoj skali od K .



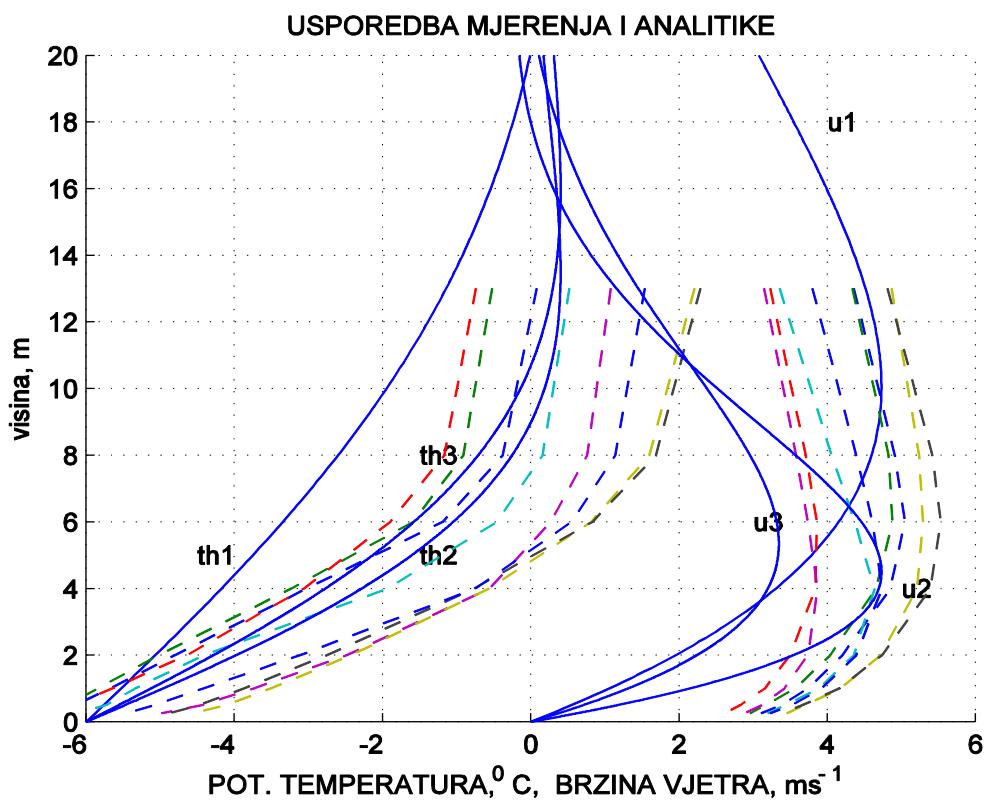
Slika 2.10. Prikaz $K(z)$ za $h = 30 \text{ m}$, $\max[K(z)] = 0.3 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

Ovime smo završili prikaz i razvoj teorije blago nelinearnog Prandtlovog modela katabatičkog strujanja.

3. Podaci – usporedba mjerena i analitike

Provedeni su brojni meteorološki eksperimenti na području Antarktika, Grenlanda i na manjim, dolinskim ledenjacima. Jedan takav eksperiment se proveo 1994. godine na Pasterze ledenjaku u Austriji. Pasterze se nalazi u istočnom dijelu Alpa te je sa svojih 8.4 km najduži ledenjak u Austriji s najvišom točkom od 3453 m i najnižom 2100 m nadmorske visine. U ovom diplomskom radu su korišteni podaci s tornja mjerne postaje na Pasterze ledenjaku za 27.7.1994. gdje su na 8 nivoa mjereni temperatura i vjetar (0.25, 0.5, 1, 2, 4, 6, 8 i 13 m). Nagib ledenjaka na mjestu mjerne postaje je $\approx 5^\circ$.

3.1. Usporedba mjerena s Prandtlovim modelom



Slika 3.2. Potencijalna temperatura θ (th na slici) i brzina vjetra u za set podataka iz PASTEX-a (Austrija, 27.7.1994., 30-min srednjaci za svaka 3 sata, crtkane krivulje) i analitičko rješenje za $K = \text{const.}$ (pune krivulje). Parametri analitičkog modela su opisani u tekstu.

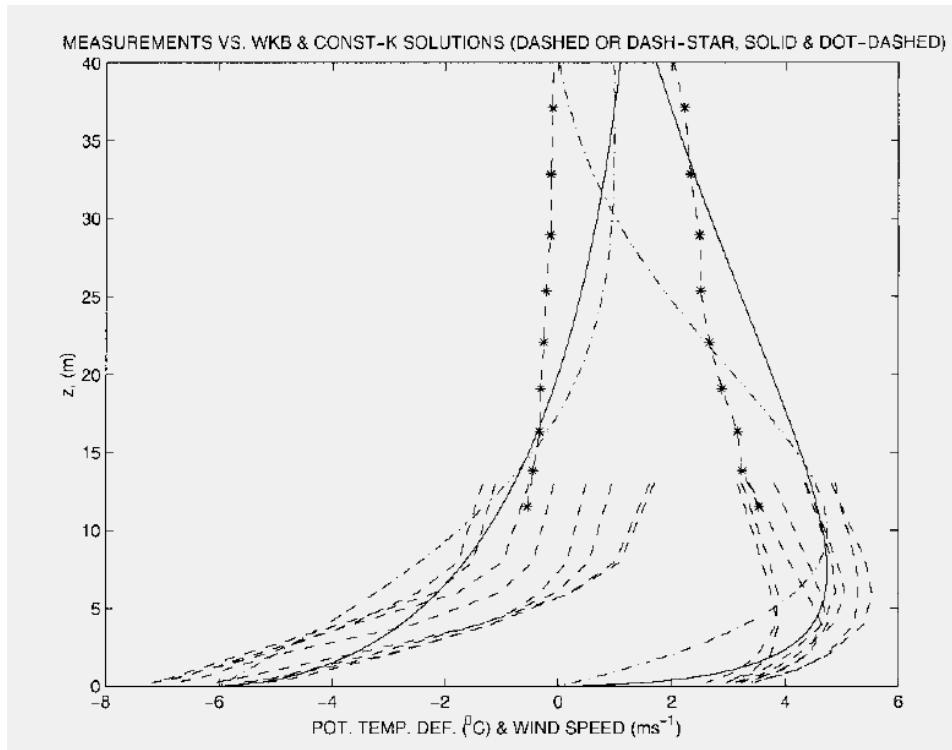
Slika 3.2. prikazuje katabatičko strujanje gdje su uspoređeni podaci s Pasterzea s analitičkim rješenjem Prandtlovog modela. prikazana su tri profila za različite vrijednosti difuzivnosti K_c i Prandtlovog broja Pr . Za profil 1 je difuzivnost $K_c = 0.06 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, a za profil 2 i 3 $K_c = 0.012 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Prandtlov broj za profile 1 i 2 je $Pr = 2$, a za profil 3 $Pr = 4$. Ostali parametri su isti u svim profilima, nagib kosine $\alpha \approx -5^\circ$, referentna potencijalna temperatura $\theta_0 = 273.15^\circ\text{C}$, vertikalni temperaturni gradijent $\Gamma = 3 \text{ Kkm}^{-1}$ i površinski temperaturni deficit $C = -6^\circ\text{C}$. Veći Prandtlov broj daje veće gradijente brzina. Profil 1 najlošije opisuje izmjereno strujanje.

3.2. Usporedba mjerjenja i analitike za konstantnu i varijabilnu turbulentnu difuzivnost

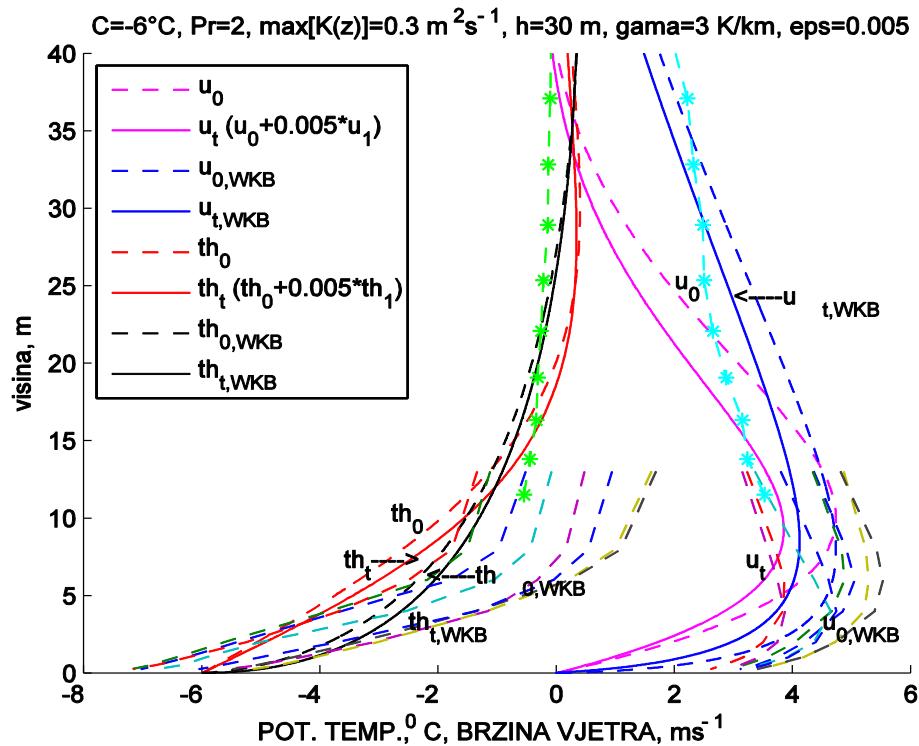
Uspoređujemo analitička rješenja originalnog i modificiranog Prandtlovog modela za $K = K_c = \text{const.}$ i $K = K(z)$ s mjerenjima na Pasterze ledenjaku. Napomenimo da se isti $K(z)$ kao u (2.31) koristi u jednoj verziji tzv. EMEP modela regionalnog prijenosa i raspršenja zračnih polutanata nad širim područjem Europe (Jerićević i sur., 2010, 2012).

Na slici 3.3. koja je preuzeta iz Grisogono i Oerlemans (2001a) prikazani su θ_0 i u_0 gdje su konstantna difuzivnost $K_c = 0.06 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, visina postizanja maksimalne vrijednosti varijabilne difuzivnosti $h = 30 \text{ m}$, Prandtlov broj $Pr = 2$, maksimalna vrijednost varijabilne difuzivnosti $\max[K(z)] = 0.3 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, površinski temperaturni deficit $C = -6^\circ\text{C}$ i vertikalni temperaturni gradijent $\Gamma = 3 \text{ Kkm}^{-1}$. Naša WKB rješenja bolje opisuju mjerena što se i očekuje obzirom da je varijabilna difuzivnost $K = K(z)$ realističnija od konstantne K_c .

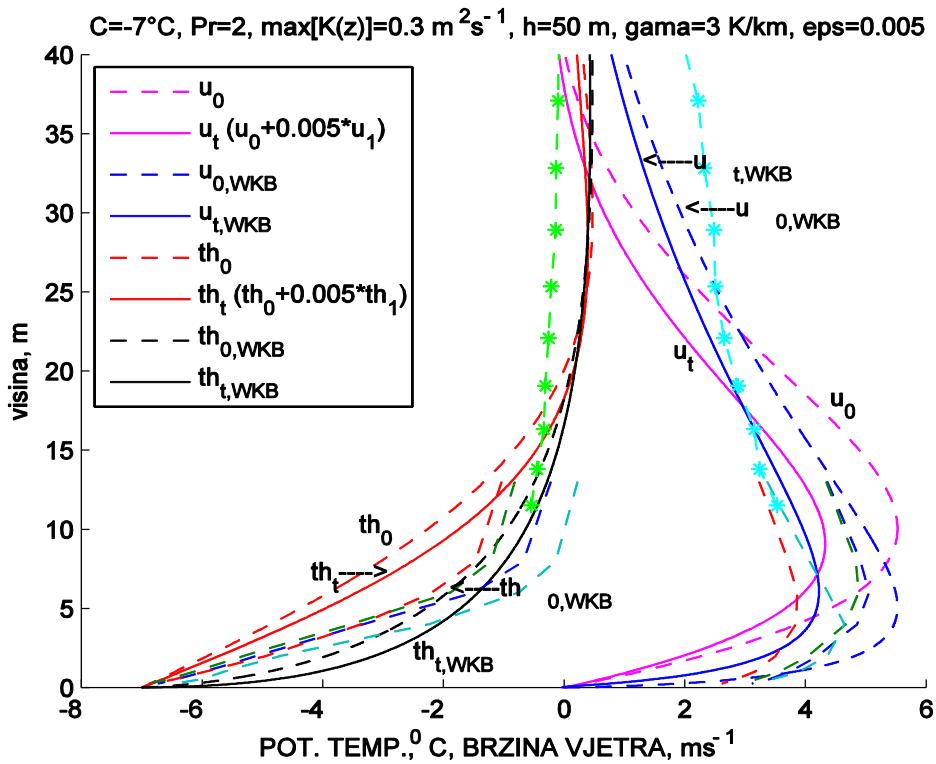
Na slici 3.4. prikazani su $\theta_0(z)$, $\theta_{tot}(z)$, $u_0(z)$ i $u_{tot}(z)$ za konstantnu difuzivnost te $\theta_{0,WKB}(z)$, $\theta_{tot,WKB}(z)$, $u_{0,WKB}(z)$ i $u_{tot,WKB}(z)$ za varijabilnu difuzivnost uz iste parametre kao na slici 3.3.



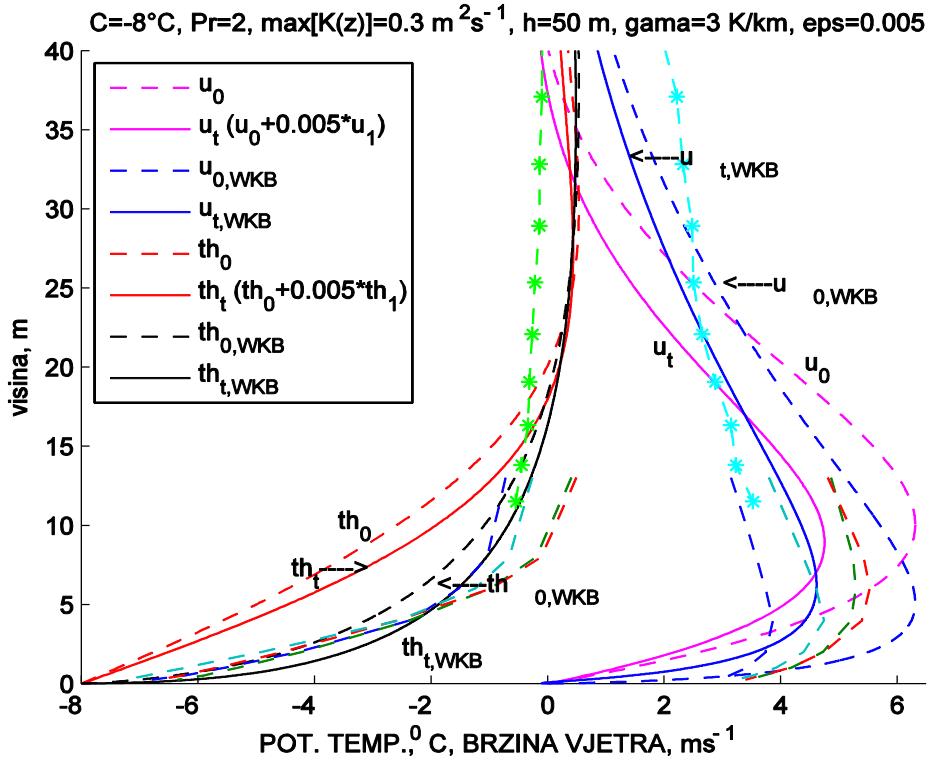
Slika 3.3. Originalna potencijalna temperatura θ i brzina katabatičkog vjetra u . Usporedba mjerena (crtkane krivulje), balon - sondaže (krivulje sa zvjezdicama) i WKB rješenja (pune krivulje) s $K = \text{const.}$ rješenjima (crtka-točka krivulje). Parametri su opisani u tekstu. Slika je preuzeta iz Grisogono i Oerlemans (2001a).



Slika 3.4. Originalna (crtkane krivulje) i modificirana (pune krivulje) potencijalna temperatura θ i brzina katabatičkog vjetra u . Usporedba mjerena (crtkane krivulje), balon - sondaže (krivulje sa zvjezdicama) i WKB rješenja s $K = \text{const.}$ Parametri su opisani u tekstu.



Slika 3.5. Originalna (crtkane krivulje) i modificirana (pune krivulje) potencijalna temperatura θ i brzina katabatičkog vjetra u . Usporedba mjerena (crtkane krivulje), balon - sondaže (krivulje sa zvjezdicama) i WKB rješenja s $K = \text{const.}$, ulazni parametri kao na slici 3.4. uz promjenu $C = -7^\circ\text{C}$, $h = 50 \text{ m}$.



Slika 3.6. Originalna (crtkane krivulje) i modificirana (pune krivulje) potencijalna temperatura θ i brzina katabatičkog vjetra u . Usporedba mjerena (crtkane krivulje), balon - sondaže (krivulje sa zvjezdicama) i WKB rješenja s $K = \text{const.}$, ulazni parametri kao na slici 3.5 uz promjenu $C = -8^\circ\text{C}$.

Slike 3.5 i 3.6. prikazuju slična rješenja brzine i potencijalne temperature kao slika 3.4. ali su mjerena, odnosno 30-min srednjaci za svaka 3 sata podijeljeni u dvije grupe tako da su prva četiri u danu (prijepodnevna) prikazana na slici 3.5. a druga četiri (poslijepodnevna) na slici 3.6. Ovdje su parametri pokušani biti namješteni tako da najbolje opisuju mjerena. Svi su parametri isti kao na slici 3.4. osim visine maksimalne vrijednosti varijabilnog koeficijenta difuzivnosti koja je sada $h = 50 \text{ m}$ i deficita potencijalne temperature koji je sada $C = -7^\circ\text{C}$ na slici 3.5., te $C = -8^\circ\text{C}$ na slici 3.6. Za veći temperaturni deficit imamo bolje slaganje poslijepodnevnih od prijepodnevnih podataka jer tada dolazi do veće razlike u temperaturi između kosine i okolnog zraka na istoj nadmorskoj visini. Tako dobivamo vjerojatno i najbolje slaganje $\theta_{tot,WKB}$ i $u_{tot,WKB}$ s mjerenjima.

Nelinearnom modifikacijom dobije se veći prizemni gradijent potencijalne temperature od originalnog slučaja, gdje je za varijabilnu difuzivnost on još veći. Za brzinu vjetra nije tako. Nelinearnom modifikacijom se dobije manji prizemni gradijent brzine od originalnog slučaja, ali je on za varijabilnu difuzivnost veći nego za konstantnu.

4. Zaključak

U ovom diplomskom radu se nastojalo pobliže objasniti svojstva nagnutog, stabilno statički stratificiranog atmosferskog graničnog sloja koristeći rješenja analitičkih modela. Glavne karakteristike ovakvog graničnog sloja atmosfere često su predstavljane analitičkim modelom katabatičkog strujanja. Za varijabilan koeficijent turbulentne difuzivnosti model bolje opisuje mjerena. Klasični Prandtlov model je linearan i jedva da prikladno opisuje jak vertikalni temperaturni gradijent potencijalne temperature u prvih nekoliko metara visine. Iz tog razloga ovaj rad razmatra blago nelinearnu modifikaciju Prandtlovog modela koji djelomično ispravlja spomenutu poteškoću.

Koristi se regularna perturbativna metoda za rješavanje problema za slučaj konstantnog i varijabilnog koeficijenta turbulentne difuzivnosti. Pri tome se koristi WKB metoda za varijabilni koeficijent turbulentne difuzivnosti. Dobiveni modificirani izrazi za potencijalnu temperaturu θ_1 i brzinu vjetra u_1 se sastoje od kombinacija eksponencijalne funkcije te sinusa i kosinusa jednostrukih i dvostrukih argumenata te usamljenog eksponencijalnog člana. Za varijabilni koeficijent difuzivnosti rješenja daju realističniji opis parametriziranih tokova i samih profila $\theta_1(z)$ i $u_1(z)$. Visina niske mlazne struje se smanjuje povećanjem koeficijenta blage nelinearnosti ε . Mali parametar ε koji regulira intezitet blage nelinearnosti je prilagođavan na temelju postojećih podataka. Matematički je dobiveno da maksimalna vrijednost tog parametra može biti $\max \varepsilon < \frac{\Gamma}{| \frac{c}{h_p} \exp(-\pi) |}$, no fizikalno se procjenjuje da je maksimalna vrijednost 15 do 20 puta manja.

Originalni i novi blago nelinearan model su uspoređeni s podacima na ledenjaku Pasterze u Austriji. Dobivena modificirana potencijalna temperatura ima veći prizemni gradijent od originalne i u tom smislu imamo poboljšanje modela. Za modificiranu brzinu vjetra dobije se smanjenje pripadnog prizemnog gradijenta $\frac{\partial u}{\partial z}$ te je to možda glavni nedostatak ove metode. Primarni je cilj bio bolje opisati jak vertikalni gradijent potencijalne temperature u prvih nekoliko metara visine i u tome je glavni doprinos ove radnje.

Popis literature

- Baklanov, A., Grisogono, B. (Eds.), 2007. *Atmosferic Boundary Layers: Nature, Theory and Applications to Environmental Modelling and Security*. Springer, New York, 241 str.
- Bender, C. M., Orszag, S. A., 1978. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. Mc Graw-Hill, Inc., SAD, 593 str.
- Denby, B., 1999. Second-order modelling of turbulence in katabatic flows. *Boundary-Layer Meteorol.* 92, 67-100.
- Egger, J., 1990. Thermally forced flows: Theory. In: Blumen, W. (Ed.), *Atmosferic Processes over Complex Terrain*, No. 45 in Meteorol. Monogr., Amer. Meteorol. Soc., str. 43-57.
- Grisogono, B., 1995. A generalized Ekman layer profile within gradually varying eddy diffusivities. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 121, 445-453.
- Grisogono, B., Oerlemans, J., 2001a. Katabatic flow: Analytic solution for gradually varying eddy diffusivities. *J. Atmos. Sci.* 58, 3349-3354.
- Grisogono, B., Oerlemans, J., 2001b. A theory for the estimation of surface fluxes in simple katabatic flows. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 127, 2725-2739.
- Grisogono, B., Oerlemans, J., 2002. Justifying the WKB approximation in pure katabatic flows. *Tellus* 54A, 453-462.
- Grisogono, B., Belušić, D., 2008a. *Uvod u mezoskalnu meteorologiju i atmosfersku turbulenciju*, interna skripta. Geofizički odsjek PMF-a 122 str.
- Grisogono, B., Belušić, D., 2008b. Improving mixing length-scale for stable boundary layers. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 134, 2185-2192.
- Grisogono, B., Belušić, D., 2009. A review of recent advances in understanding the meso-and microscale properties of the severe Bora wind. *Tellus*, 61A, 1–16.
- Grisogono, B., Axelsen, S. L., 2012. A Note on the Pure Katabatic Wind Maximum over Gentle Slopes. *Boundary-Layer Meteorol.* 145, 527-538.
- Haiden, T., 2003. On the pressurefield in the slope wind layer. *J. Atmos. Sci.* 60, 1632-1635.

Holton, J. R., 2004. *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Elsevier Academic Press, 4th edition, San Diego, USA, 535 str.

Jeričević, A., Kraljević, L., Grisogono B., Fagerli, H., Večenaj, Ž., 2010. Parametrization of vertical diffusion and the atmospheric boundary layer height determination in the EMEP model. *Atmospheric chemistry and physics*. 10, 341-364.

Jeričević, A., Fagerli, H., Grisogono B., 2012. Exploring the properties of local and non-local vertical diffusion schemes in the EMEP model using 222Rn data. *International journal of environment and pollution*. 48, 231-243.

Kavčić, I., 2010. *Modeliranje atmosferskih graničnih slojeva s doprinosom teoriji singularno perturbiranih problema*. Doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, 103 str.

Kavčić, I., Grisogono, B., 2007. Katabatic flow with Coriolis effect and gradually varying eddy diffusivity. *Boundary-Layer Meteorol.* 125, 377-387.

King, J. C., Connely, W. M. Derbyshire, S. H., 2001. Sensitivity of modelled Antarctic climate to surface and boundary-layer flux parametrizations. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 127, 779-794.

Klein, T., Heinemann, G., Bromwich, D. H., Cassano, J. J., Hines, K. M., 2001. Mesoscale modeling of katabatic winds over Greenland and comparisons with AWS and aircraft data. *Meteorol. Atmos. Phys.* 78, 115-132.

Kundu, P. K., Cohen, I. M., 2002. *Fluid Mechanics*. 2nd Edition, Academic Press, San Diego, Calif., London, 730 str.

Mahrt, L., 1998. Stratified atmospheric boundary layers and breakdown of models. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 11, 263-279.

Parish, T. R. , Bromwich, D. H., 1991. Continental-scale simulation of the Antarctic katabatic wind regime. *J. Clim.* 4, 135-146.

Parmhed, O., Oerlemans, J., Grisogono, B., 2004. Describing the surface fluxes in the katabatic flow on Breidamerkurjokull, Iceland. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 130, 1137-1151.

Pedlosky, J., 1987. *Geophysical Fluid Dynamics*. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 710 str.

Prandtl, L., 1942. *Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg und Sohn: Braunschweig, 648 str.

Renfrew, I. A., 2004. The dynamics of idealized katabatic flow over a moderate slope and ice shelf. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 130, 1023-1045.

Renfrew, I. A., Anderson, P. S., 2006. Profiles of katabatic flow in summer and winter over Coast Land, Antarctica. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 132, 779-882.

Shapiro, A., Fedorovich, E., 2008. Coriolis Effects in homogeneous and inhomogeneous katabatic flows. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 134, 353-370.

Stiperski, I., Kavčić, I., Grisogono, B., Durran, D. R., 2007. Including Coriolis effects in the Prandtl model for katabatic flow. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 133, 101-106.

Stull, R. B., 1988. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 666 str.

van den Broeke, M. R., van Lipzig, N. P. M., van Meijgaard, E., 2002. Momentum budget of the east-Antarctic atmospheric boundary layer. Results of a regional climate model. *J. Atmos. Sci.* 59, 3117-3129.

Weng, W., Taylor, P. A., 2003. On modelling the one-dimensional atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol.* 107, 371-400.

Whiteman, C. D., 1990. Observations of Thermally Developed Wind System In Mountainous Terrain. In: Blumen, W. (Ed.), *Atmospheric Processes Over Complex Terrain*, No. 45 in Meteorol. Monogr., Amer. Meteorol. Soc., str 5-42.

Zilitinkevich, S., Savijärvi, H., Baklanov, A., Grisogono, B., Myrberg, K., 2006. Forthcoming meetings on planetary boundary-layer theory, modelling and applications. *Boundary-Layer Meteorol.* 119, 591–593.

Dodatak A

U ovom dodatku je izведен modificirani oblik Prandtlovog modela za brzinu vjetra i potencijalnu temperaturu. Početne jednadžbe su

$$0 = g \frac{\theta}{\theta_0} \sin(\alpha) + K_m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (A.1)$$

$$0 = -\left(\Gamma + \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) u \sin(\alpha) + K_h \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (A.2)$$

Ovdje se u -komponenta brzine i temperatura piše kao

$$u_{tot} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + ..$$

$$\theta_{tot} = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + ..$$

U (A.1) i (A.2) θ i u zamjenjujemo s θ_{tot} i u_{tot} te uzimamo članove uz ε^1 jer je uz ε^0 riješeno u klasičnom Prandtlovom modelu:

$$0 = g \frac{\theta_1}{\theta_0} \sin(\alpha) + K_m \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \quad (A.3)$$

$$0 = -\left(\Gamma u_1 + \frac{\partial \theta_0}{\partial z} u_0\right) \sin(\alpha) + K_h \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2}. \quad (A.4)$$

To su nam polazne jednadžbe. Iz (A.3) izrazimo θ_1 a iz (A.4) u_1

$$\theta_1 = -\frac{K_m \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}}{\frac{g}{\theta_0} \sin(\alpha)} \quad (A.5)$$

$$u_1 = \frac{K_h \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2}}{\Gamma \sin(\alpha)} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} u_0, \quad (A.6)$$

te ih uvrstimo u (A.4) i (A.3). Tako dolazimo do preuređenih dinamičkih jednadžbi reda ε^1 :

$$0 = g \frac{\theta_1}{\theta_0} \sin(\alpha) + K_m \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{K_h \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2}}{\Gamma \sin(\alpha)} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} u_0 \right) \quad (A.7)$$

$$\Gamma u_1 \sin(\alpha) + \sin(\alpha) u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = K_h \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-\frac{K_m \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}}{\frac{g}{\Theta_0} \sin(\alpha)} \right). \quad (A.8)$$

Sređivanjem (A.7) imamo:

$$g \frac{\theta_1}{\Theta_0} \sin(\alpha) + \frac{K_m K_h}{\Gamma \sin(\alpha)} \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^4} = K_m \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} u_0 \right), \quad (A.9)$$

te podijelimo cijelu jednadžbu s $\frac{K_m K_h}{\Gamma \sin(\alpha)}$. Dobije se

$$\frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^4} + \theta_1 \frac{g \Gamma \sin^2(\alpha)}{\Theta_0 K_m K_h} = \frac{\sin(\alpha)}{K_h} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right). \quad (A.10)$$

Slično, pojednostavljeni oblik (A.8) je

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + u_1 \frac{g \Gamma \sin^2(\alpha)}{\Theta_0 K_m K_h} = -\frac{g \sin^2(\alpha)}{\Theta_0 K_m K_h} u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z}. \quad (A.11)$$

Uvodi se supsticija

$$\frac{4}{h_p^4} = \frac{g \Gamma \sin^2(\alpha)}{\Theta_0 K_m K_h}.$$

Raspisane derivacije od u_0 i θ_0 su

$$u_0 = -C \mu \exp \left(-\frac{z}{h_p} \right) \sin \left(\frac{z}{h_p} \right) \quad (A.12)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{C \mu}{h_p} \exp \left(-\frac{z}{h_p} \right) \left[\sin \left(\frac{z}{h_p} \right) - \cos \left(\frac{z}{h_p} \right) \right] \quad (A.13)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{2 C \mu}{h_p^2} \exp \left(-\frac{z}{h_p} \right) \cos \left(\frac{z}{h_p} \right) \quad (A.14)$$

$$\theta_0 = C \exp \left(-\frac{z}{h_p} \right) \cos \left(\frac{z}{h_p} \right) \quad (A.15)$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial z} = -\frac{C}{h_p} \exp \left(-\frac{z}{h_p} \right) \left[\sin \left(\frac{z}{h_p} \right) + \cos \left(\frac{z}{h_p} \right) \right] \quad (A.16)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} = \frac{2C}{h_p^2} \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) \quad (A.17)$$

$$\frac{\partial^3 \theta_0}{\partial z^3} = \frac{2C}{h_p^3} \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \left[\cos\left(\frac{z}{h_p}\right) - \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) \right]. \quad (A.18)$$

Raspišimo član $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + u_0 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + 2 \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} + u_0 \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial z^3}. \end{aligned} \quad (A.19)$$

Uvrštavanjem odgovarajućih derivacija i kratkim sređivanjem izraza (A.19) dobije se:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) = \frac{2C^2 \mu}{h_p^3} \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \left[3 \sin^2\left(\frac{z}{h_p}\right) - \cos^2\left(\frac{z}{h_p}\right) - 4 \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \right] \quad (A.20)$$

Imamo diferencijalne jednadžbe četvrtog reda za θ_1 i za u_1

$$\frac{d^4 \theta_1}{dz^4} + \theta_1 \frac{4}{h_p^4} = \frac{\sin(\alpha)}{K_h} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) \quad (A.21)$$

$$\frac{d^4 u_1}{dz^4} + u_1 \frac{4}{h_p^4} = -\frac{g \sin^2(\alpha)}{\theta_0 K_m K_h} u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z}, \quad (A.22)$$

gdje iz (A.22) dalje koristimo supstituciju $\frac{g \sin^2(\alpha)}{\theta_0 K_m K_h} = \frac{4}{\Gamma h_p^4}$. Sustav (A.21) i (A.22) predstavlja prigušeni oscilator, ali sada forsiran osnovnim stanjem. Iz (A.21) odnosno (A.22) slijede:

$$\frac{d^4 \theta_1}{dz^4} + \theta_1 \frac{4}{h_p^4} = \frac{\sin(\alpha)}{K_h} \frac{2C^2 \mu}{h_p^3} \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \left[3 \sin^2\left(\frac{z}{h_p}\right) - 4 \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) - \cos^2\left(\frac{z}{h_p}\right) \right] \quad (A.23)$$

$$\frac{d^4 u_1}{dz^4} + u_1 \frac{4}{h_p^4} = -\frac{4C^2 \mu}{h_p^5 \Gamma} \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \left[\sin^2\left(\frac{z}{h_p}\right) + \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) \right]. \quad (A.24)$$

Uvodimo bezdimenzijsku supstituciju za visinu

$$\xi \equiv \frac{2z}{h_p}$$

te koristimo relacije za dvostrukе kuteve:

$$\sin\left(\frac{z}{h_p}\right)\cos\left(\frac{z}{h_p}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2z}{h_p}\right)}{2} = \frac{\sin(\xi)}{2} \quad (A.25)$$

$$\sin^2\left(\frac{z}{h_p}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{2z}{h_p}\right)}{2} = \frac{1 - \cos(\xi)}{2} \quad (A.26)$$

$$\cos^2\left(\frac{z}{h_p}\right) - \sin^2\left(\frac{z}{h_p}\right) = \cos\left(\frac{2z}{h_p}\right) = \cos(\xi). \quad (A.27)$$

Slijedi

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{du_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{du_1}{d\xi} \frac{2}{h_p} \quad (A.28)$$

$$\frac{d^4 u_1}{dz^4} = \frac{d^4 u_1}{d\xi^4} \left(\frac{2}{h_p}\right)^4. \quad (A.29)$$

Jednadžbe (A.23) i (A.24) postaju:

$$\frac{d^4 \theta_1}{dz^4} + \theta_1 \frac{4}{h_p^4} = \frac{\sin(\alpha)}{K_h} \frac{2C^2 \mu}{h_p^3} \exp(-\xi) [3\sin^2(\xi/2) - \cos^2(\xi/2) - 4\sin(\xi/2)\cos(\xi/2)] \quad (A.30)$$

$$\frac{d^4 u_1}{dz^4} + u_1 \frac{4}{h_p^4} = -\frac{4C^2 \mu}{h_p^5 \Gamma} \exp(-\xi) [\sin^2(\xi/2) + \cos(\xi/2)\sin(\xi/2)], \quad (A.31)$$

odnosno, korištenjem relacija (A.25), (A.26), (A.27) i (A.29):

$$\frac{d^4 \theta_1}{d\xi^4} \left(\frac{2}{h_p}\right)^4 + \frac{4}{h_p^4} \theta_1 = -\frac{\sin(\alpha)}{K_h} \frac{2C^2 \mu}{h_p^3} \exp(-\xi) [2\sin(\xi) + 2\cos(\xi) - 1] \quad (A.32)$$

$$\frac{d^4 u_1}{d\xi^4} \left(\frac{2}{h_p}\right)^4 + \frac{4}{h_p^4} u_1 = -\frac{4C^2 \mu}{h_p^5 \Gamma} \exp(-\xi) \left[\frac{1 - \cos(\xi)}{2} + \frac{\sin(\xi)}{2} \right]. \quad (A.33)$$

U jednadžbi (A.32) desnu stranu pomnožimo i podijelimo istim brojem, tako da izraz u zagradi podijelimo, a ostatak desne strane pomnožimo s 2. Podijelimo li sada (A.32) i (A.33) s $\left(\frac{2}{h_p}\right)^4$ dobivamo krajnje oblike

$$\frac{d^4\theta_1}{d\xi^4} + \frac{1}{4}\theta_1 = -\frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{4K_h} \exp(-\xi) \left[\sin(\xi) + \cos(\xi) - \frac{1}{2} \right] \quad (A.34)$$

$$\frac{d^4u_1}{d\xi^4} + \frac{1}{4}u_1 = -\frac{C^2 \mu}{8h_p \Gamma} \exp(-\xi) [1 - \cos(\xi) + \sin(\xi)]. \quad (A.35)$$

Imamo nehomogene diferencijalne jednadžbe četvrtoog reda (A.34) i (A.35). Da bi ih riješili, prvo moramo naći homogeno rješenje. Pretpostavimo da je ono oblika

$$\theta_{1,hom} \sim \exp(\lambda\xi). \quad (A.36)$$

Uvrstimo (A.36) u homogenu jednadžbu

$$\frac{d^4}{d\xi^4} \exp(\lambda\xi) + \frac{1}{4} \exp(\lambda\xi) = 0. \quad (A.37)$$

Dobiju se četiri rješenja za λ :

$$\lambda_{1,2,3,4} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (A.38)$$

gdje je $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Slijedi

$$\begin{aligned} \theta_{1,hom}(z) &= c_1 \exp\left[\left(\frac{1+i}{2}\right)\xi\right] + c_2 \exp\left[\left(\frac{1-i}{2}\right)\xi\right] + c_3 \exp\left[\left(\frac{-1+i}{2}\right)\xi\right] \\ &\quad + c_4 \exp\left[\left(\frac{-1-i}{2}\right)\xi\right], \end{aligned} \quad (A.39)$$

gdje su c_1, c_2, c_3 i c_4 proizvoljne konstante. Koristeći Eulerovu relaciju

$$e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha [\cos(\beta) + i \sin(\beta)] \quad (A.40)$$

i sređivanjem (A.39) dobivamo

$$\begin{aligned} \theta_{1,hom} &= G_1 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + G_2 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + G_3 \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &\quad + G_4 \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right), \end{aligned} \quad (A.41)$$

gdje su $G_1 = i(c_3 - c_4)$, $G_2 = c_3 + c_4$, $G_3 = i(c_1 - c_2)$ i $G_4 = c_1 + c_2$ redefinirane konstante. Sada pretpostavimo partikularno rješenje za (A.34) oblika:

$$\theta_{1,part} = A_1 \exp(-\xi) \cos \xi + B_1 \exp(-\xi) \sin \xi + C_1 \exp(-\xi) \quad (A.42)$$

Uvrstimo pretpostavljeno partikularno rješenje u (A.34):

$$\begin{aligned} & -4A_1 \exp(-\xi) \cos \xi - 4B_1 \exp(-\xi) \sin \xi + C_1 \exp(-\xi) \\ & + \frac{1}{4} (A_1 \exp(-\xi) \cos \xi + B_1 \exp(-\xi) \sin \xi + C_1 \exp(-\xi)) \\ & = -\frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{4K_h} \exp(-\xi) \left[\sin(\xi) + \cos(\xi) - \frac{1}{2} \right], \end{aligned} \quad (A.43)$$

te dobijemo koeficijente A_1 , B_1 i C_1 za θ_1

$$A_1 = \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{15K_h} \quad (A.44)$$

$$B_1 = \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{15K_h} \quad (A.45)$$

$$C_1 = \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{10K_h}. \quad (A.46)$$

Primjenjujemo rubne uvjete kao i u originalnom Prandtlovom modelu

$$\theta_{tot}(z)|_{z \rightarrow 0} = \theta_0(z) + \varepsilon \theta_1(z)|_{z \rightarrow 0} = C \quad (A.47)$$

$$\theta_{tot}(z)|_{z \rightarrow \infty} = \theta_0(z) + \varepsilon \theta_1(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (A.48)$$

$$u_{tot}(z)|_{z \rightarrow 0} = u_0(z) + \varepsilon u_1(z)|_{z \rightarrow 0} = 0 \quad (A.49)$$

$$u_{tot}(z)|_{z \rightarrow \infty} = u_0(z) + \varepsilon u_1(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (A.50)$$

Kako znamo da je

$$\theta_0(z=0) = C, \quad u_0(z=0) = 0 \quad (A.51)$$

$$\theta_0(z \rightarrow \infty) = u_0(z \rightarrow \infty) = 0, \quad (A.52)$$

Dobije se

$$\theta_1(z=0) = u_1(z=0) = 0 \quad (A.53)$$

$$\theta_1(z \rightarrow \infty) = u_1(z \rightarrow \infty) = 0. \quad (A.54)$$

Ukupno rješenje je zbroj homogenog i partikularnog rješenja:

$$\begin{aligned}
\theta_1 = & G_1 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + G_2 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + G_3 \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
& + G_4 \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{15 K_h} \exp(-\xi) [\sin(\xi) + \cos(\xi)] \\
& + \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{10 K_h} \exp(-\xi).
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Iz rubnog uvjeta (A.54) znamo da θ_1 iščezava u beskonačnosti, te ostaje:

$$\begin{aligned}
\theta_1 = & G_1 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + G_2 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{15 K_h} \exp(-\xi) [\sin(\xi) + \cos(\xi)] \\
& + \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{10 K_h} \exp(-\xi).
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Iz donjeg rubnog uvijeta (A.53) izračunamo G_2 :

$$G_2 = -\frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{6 K_h}, \tag{A.57}$$

pa slijedi

$$\begin{aligned}
\theta_1 = & G_1 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) - \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{6 K_h} \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
& + \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{15 K_h} \exp(-\xi) [\sin(\xi) + \cos(\xi)] + \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{10 K_h} \exp(-\xi).
\end{aligned} \tag{A.58}$$

Analogno isti postupak primjenjujemo i za u_1 . Pripadni sređeni oblik homogenog rješenja je

$$\begin{aligned}
u_{1,hom} = & R_1 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + R_2 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + R_3 \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
& + R_4 \exp\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right),
\end{aligned} \tag{A.59}$$

gdje su R_1, R_2, R_3 i R_4 konstante dobivene analogno kao G_1, G_2, G_3 i G_4 u (A.41). Slično kao i za θ_1 prepostavimo partikularno rješenje za u_1

$$u_{1,part} = A_2 \exp(-\xi) \cos\xi + B_2 \exp(-\xi) \sin\xi + C_2 \exp(-\xi) \tag{A.60}$$

Uvrstimo pretpostavljeni partikularno rješenje u jednadžbu (A.35):

$$\begin{aligned}
& -4A_2 \exp(-\xi) \cos\xi - 4B_2 \exp(-\xi) \sin\xi + C_2 \exp(-\xi) \\
& + \frac{1}{4} (A_2 \exp(-\xi) \cos\xi + B_2 \exp(-\xi) \sin\xi + C_2 \exp(-\xi)) \\
& = -\frac{C^2 \mu}{8h_p \Gamma} \exp(-\xi) [1 - \cos(\xi) + \sin(\xi)], \tag{A.61}
\end{aligned}$$

te dobijemo koeficijente A_2 , B_2 i C_2 za u_1

$$A_2 = -\frac{C^2 \mu}{30h_p \Gamma} \tag{A.62}$$

$$B_2 = \frac{C^2 \mu}{30h_p \Gamma} \tag{A.63}$$

$$C_2 = -\frac{C^2 \mu}{10h_p \Gamma}. \tag{A.64}$$

Iz rubnog uvjeta (A.54) znamo da u_1 iščezava u beskonačnosti te ostaje

$$\begin{aligned}
u_1 &= R_1 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + R_2 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) - \frac{C^2 \mu}{30h_p \Gamma} \exp(-\xi) [\cos(\xi) - \sin(\xi)] \\
&\quad - \frac{C^2 \mu}{10h_p \Gamma} \exp(-\xi). \tag{A.65}
\end{aligned}$$

Iz donjeg rubnog uvjeta (A.53) izračunamo R_2 :

$$R_2 = \frac{2C^2 \mu}{15h_p \Gamma}, \tag{A.66}$$

pa slijedi

$$\begin{aligned}
u_1 &= R_1 \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) + \frac{2C^2 \mu}{15h_p \Gamma} \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&\quad - \frac{C^2 \mu}{30h_p \Gamma} \exp(-\xi) [\cos(\xi) - \sin(\xi)] - \frac{C^2 \mu}{10h_p \Gamma} \exp(-\xi). \tag{A.67}
\end{aligned}$$

Izrazi (A.58) i (A.67) moraju zadovoljavati početne jednadžbe (A.3) i (A.4) te uvrštavanjem u iste izračunavaju se koeficijenti G_1 i R_1 :

$$G_1 = -\frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{15K_h} \tag{A.68}$$

$$R_1 = -\frac{C^2 \mu}{3h_p \Gamma}. \quad (A.69)$$

Konačni oblici za θ_1 i u_1 su:

$$\begin{aligned} \theta_1(z) = & -\frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{15K} \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) - \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{6K} \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \\ & + \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{15K} \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \sin\left(\frac{2z}{h_p}\right) + \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{15K} \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \cos\left(\frac{2z}{h_p}\right) \\ & + \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{10K} \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \end{aligned} \quad (A.70)$$

$$\begin{aligned} u_1(z) = & -\frac{C^2 \mu}{3h_p \Gamma} \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) + \frac{2C^2 \mu}{15h_p \Gamma} \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \\ & - \frac{C^2 \mu}{30h_p \Gamma} \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \left[\cos\left(\frac{2z}{h_p}\right) - \sin\left(\frac{2z}{h_p}\right) \right] - \frac{C^2 \mu}{10h_p \Gamma} \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right). \end{aligned} \quad (A.71)$$

Kompaktnije zapisani konačni oblici za θ_1 i u_1 su:

$$\begin{aligned} \theta_1(z) = & \theta_A \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \left[-\frac{1}{15} \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) - \frac{1}{6} \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \right] \\ & + \theta_A \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \left[\frac{1}{15} \sin\left(\frac{2z}{h_p}\right) + \frac{1}{15} \cos\left(\frac{2z}{h_p}\right) + \frac{1}{10} \right] \end{aligned} \quad (A.72)$$

$$\begin{aligned} u_1(z) = & u_A \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \left[-\frac{1}{3} \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) + \frac{2}{15} \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \right] \\ & + u_A \exp\left(-\frac{2z}{h_p}\right) \left[-\frac{1}{30} \cos\left(\frac{2z}{h_p}\right) + \frac{1}{30} \sin\left(\frac{2z}{h_p}\right) - \frac{1}{10} \right] \end{aligned} \quad (A.73)$$

Gdje su $\theta_A = \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{K}$ i $u_A = \frac{C^2 \mu}{h_p \Gamma}$.