PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTE U SPLITU

GORAN ERCEG

HIPERPROSTORI I WHITNEYJEVA PRESLIKAVANJA

DIPLOMSKI RAD

SPLIT, LISTOPAD 2009.

STUDIJSKA GRUPA: MATEMATIKA

GORAN ERCEG

HIPERPROSTORI I WHITNEYJEVA PRESLIKAVANJA

DIPLOMSKI RAD

VODITELJICA:
Dr. sc. VLASTA MATIJEVIĆ

SPLIT, LISTOPAD 2009.

Sadržaj

Predgovor

Hiperprostor $\mathcal{H}$ topološkog prostora X je familija nepraznih i zatvorenih podskupova od X snabdijevena posebnom topologijom tzv. Vietorisovom topologijom.

Pojam hiperprostora vezuje se uz radove Hausdorffa i Vietorisa s početka 20. stoljeća. Dvadesetih i tridesetih godina 20. stoljeća opisana su osnovna svojstva hiperprostora. Veliku zaslugu za to imaju Borsuk i Mazurkiewicz koji su, među ostalim, opisali strukturu luka u hiperprostorima te Wojdyslawski s radom objavljenim 1939. godine.

1942. godine Kelley objavljuje važan rad u kojem je sistematski obradio već poznate rezultate o hiperprostorima i donio veliki broj novih. Među ostalim, Kelley je prvi koristio Whitneyjeva preslikavanja u istraživanju hiperprostora. Naime, pomoću njih je definirao i proučavao posebna preslikavanja koja je nazvao segmentima. Od tada su i Whitneyjeva preslikavanja i segmenti standardni alati za proučavanje hiperprostora. Nadalje, Kelley je prvi primjenio hiperprostore i u drugim područjima matematike i, što je najvažnije, time ih približio brojnim matematičarima.

1969. godine je u SUNY-u u Buffalu održana prva znanstvena konferencija posvećena hiperprostorima. U to vrijeme nije bilo mnogo matematičara koji su se bavili isključivo teorijom hiperprostora pa se većina sudionika konferencije bavila samo primjenom tehnika i rezultata o hiperprostorima. No, važna posljedica konferencije su mnogi značajni radovi o hiperprostorima objavljeni nedugo nakon konferencije. Među njima je i Curtisov, Storijev i Westov pozitivan odgovor na sljedeće važno pitanje: Ako je X Peanov kontinuum, je li hiperprostor 2^X homeomorfan Hilbertovom kvadru? Ovo je pitanje bilo otvoreno sve od dvadesetih godina 20. stoljeća. U rješavanju problema koristile su se tehnike beskonačno dimenzionalne topologije. Nadalje, kao posljedica Curtisovog, Storijevog i Westovog rezultata nastali su mnogi radovi o dimenziji, konveksnim skupovima,. . . .

U ovom radu ćemo definirati i obraditi sve temeljne pojmove teorije hiperprostora, a bavit ćemo se i rezultatima svih gore spomenutih matematičara.

U prvom poglavlju definiramo hiperprostore, opisujemo neka njihova svojstva, definiramo na njima tzv. Hausdorffovu metriku i bavimo se konvergencijom nizova u hiperprostorima. U drugom poglavlju navodimo geometrijske modele hiperprostora prostora X kada je prostor X luk i konus te opisujemo svojstva tih modela. U trećem poglavlju se bavimo hiperprostorima prostora X, gdje je X Peanov kontinuum i dokazujemo iznimno važan Curtis-Schorijev teorem. U zadnjem poglavlju definiramo uređene lukove, Whitneyjeva preslikavanja i pomoću njih definiramo Kelleyjeve segmente. Zatim definiramo prostore uređenih lukova i segmenata, a potom dokazujemo teorem analogan Curtis-Schorijevom teoremu, za prostore segmenata za 2^X i $C(X)$.

Poglavlje 1

Topologija za hiperprostore

1.1 Definicija i osnovna svojstva hiperprostora

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Označimo s

$$CL(X) = \{A \subseteq X : A \text{ je neprazan i zatvoren u } X\}.$$

$CL(X)$ ćemo snabdjeti topologijom, tzv. Vietorisovom topologijom, na sljedeći način.

Definicija 1.1 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Vietorisova topologija $\mathcal{T}_V$ na $CL(X)$ je najmanja topologija koja ima sljedeća svojstva:*

(i) Ako je $U \in \mathcal{T}$, onda je skup $\{A \in CL(X) : A \subseteq U\} \in \mathcal{T}_V$;

(ii) Ako je $B \subseteq X$ zatvoren obzirom na $\mathcal{T}$, onda je $\{A \in CL(X) : A \subseteq B\}$ zatvoren obzirom na $\mathcal{T}_V$.

Opišimo jednu prikladnu bazu topologije $\mathcal{T}_V$. U tu svrhu uvedimo sljedeću oznaku. Za konačno mnogo podskupova $S_1, ..., S_n$ od X, $n \in \mathbb{N}$, neka je

$$\langle S_1, \ldots, S_n \rangle = \{A \in CL(X) : A \subseteq \cup_{i=1}^{n} S_i \text{ i } A \cap S_i \neq \varnothing,\ i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Teorem 1.2 *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i neka je*

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : U_i \in \mathcal{T},\ i = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

Tada je $\mathcal{B}_V$ *baza za* $\mathcal{T}_V$.

Dokaz. Primijetimo sljedeće. Za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki skup B zatvoren u $\mathcal{T}$, vrijedi

$$\begin{aligned} \{A \in CL(X) : A \subseteq U\} &= \langle U \rangle \text{ i} \\ \{A \in CL(X) : A \subseteq B\} &= CL(X) \setminus \langle X, X \backslash B \rangle . \end{aligned}$$

Po Definiciji 1.1, $\mathcal{T}_V$ je najmanja topologija na $CL(X)$ koja sadrži sve skupove oblika $\langle U \rangle$ i $\langle X, U \rangle$ za $U \in \mathcal{T}$. Drugim riječima, familija $\mathcal{S}$ definirana sa

$$\mathcal{S} = \{\langle U \rangle : U \in \mathcal{T}\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \mathcal{T}\}$$

je podbaza od $\mathcal{T}_V$ is čega slijedi da je familija $\mathcal{S}^*$ svih konačnih presjeka elemenata iz $\mathcal{S}$ baza za $\mathcal{T}_V$. Dakle, dovoljno je dokazati da vrijedi $\mathcal{S}^* = \mathcal{B}_V$.
Dokažimo $\mathcal{B}_V \subseteq \mathcal{S}^*$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ te primijetimo da vrijedi:

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \langle \cup_{i=1}^n U_i \rangle \cap (\cap_{i=1}^n \langle X, U_i \rangle) .$$

Neka je $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Tada je $A \subseteq \cup_{i=1}^n U_i$ i $A \cap U_i \neq \varnothing$ $\forall i = 1, \ldots, n$. Dakle, $A \in \langle \cup_{i=1}^n U_i \rangle$ i $A \in \langle X, U_i \rangle$ za $\forall i = 1, \ldots, n$. Odavde slijedi $A \in \langle \cup_{i=1}^n U_i \rangle \cap (\cap_{i=1}^n \langle X, U_i \rangle)$.
Time je dokazana inkluzija $\mathcal{B}_V \subseteq \mathcal{S}^*$.
Dokažimo sada $S^* \subseteq \mathcal{B}_V$.
Prvo dokažimo da za $\mathcal{U}, \mathcal{W} \in \mathcal{B}_V$ vrijedi $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} \in \mathcal{B}_V$. Neka je $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$ i $\mathcal{W} = \langle W_1, \ldots, W_m \rangle$, gdje su $U_i, W_j \in \mathcal{T}$ i $k, m \in \mathbb{N}$. Neka je $U = \cup_{i=1}^k U_i$, a $W = \cup_{j=1}^m W_j$. Vrijedi da je

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \langle U_1 \cap W, \ldots, U_k \cap W, W_1 \cap U, \ldots, W_m \cap U \rangle . \qquad (*)$$

Naime,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}\cap\mathcal{W} &= \{A\in CL(X) : A\subseteq U \text{ i } A\cap U_i\neq\varnothing \text{ za svaki } i\}\cap \\
&\quad \cap\{A\in CL(X) : A\subseteq W \text{ i } A\cap W_j\neq\varnothing \text{ za svaki } j\} = \\
&= \{A\in CL(X) : A\subseteq U\cap W,\ A\cap U_i\neq\varnothing \text{ i } A\cap W_j\neq\varnothing \text{ za svaki } i,j\} = \\
&= \{A\in CL(X) : A\subseteq U\cap W,\ A\cap (U_i\cap W)\neq\varnothing \text{ i } A\cap (W_j\cap U)\neq\varnothing \\
&\quad \text{za svaki } i,j\} = \\
&= \langle U_1\cap W,\ldots,U_k\cap W, W_1\cap U,\ldots,W_m\cap U\rangle
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}\in\mathcal{B}_V$.
Nadalje, da dokažemo $\mathcal{S}^*\subseteq\mathcal{B}_V$ dovoljno je dokazati da je presjek dva proizvoljna elementa od $\mathcal{S}$ element od $\mathcal{B}_V$. (Napomenimo sljedeće: Ako sa $\mathcal{E}$ označimo praznu podfamiliju od $\mathcal{S}$, onda je očito $\cap\mathcal{E}\in\mathcal{S}^*$. No kako je $\mathcal{E}$ familija podskupova od $CL(X)$, vrijedi $\cap\mathcal{E}=CL(X)$ iz čega slijedi da je $\cap\mathcal{E}\in B_V$ budući da je $CL(X)=\langle X\rangle$.)

Direktno iz $(*)$ slijede sljedeće tri tvrdnje za $U_1,U_2\in\mathcal{T}$.

(1) $\langle U_1\rangle\cap\langle U_2\rangle=\langle U_1\cap U_2\rangle$

(2) $\langle U_1\rangle\cap\langle X,U_2\rangle=\langle U_1,U_1\cap U_2\rangle$

(3) $\langle X,U_1\rangle\cap\langle X,U_2\rangle=\langle X,U_1,U_2\rangle$

Dakle, pokazali smo da je presjek dva proizvoljna elementa od $\mathcal{S}$ element od $\mathcal{B}_V$ pa slijedi da je $\mathcal{S}^*\subseteq\mathcal{B}_V$. ■

Propozicija 1.3 *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor i Y zatvoren podskup od X. Tada je Vietorisova topologija na $CL(Y)$ dobivena iz relativne topologije na Y jednaka relativnoj topologiji na $CL(Y)$ dobivenoj iz Vietorisove topologije $\mathcal{T}_V$ na $CL(X)$. Drugim riječima,*

$$(\mathcal{T}|Y)_V=\mathcal{T}_V|CL(Y).$$

Dokaz. Pokažimo da je svaki otvoreni skup iz $\mathcal{T}_V|CL(Y)$ otvoren u $(\mathcal{T}|Y)_V$ i obratno.

Dakle, neka je $CL(Y) \cap U \in \mathcal{T}_V|CL(Y)$, $U \in \mathcal{T}_V$ i prikažimo ga u obliku $\cup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_k$, $\mathcal{U}_k \in \mathcal{B}_V$.

$$\begin{aligned}
& CL(Y) \cap U = CL(Y) \cap (\cup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_k) = \\
= \; & CL(Y) \cap (\cup_{k\in\mathbb{N}} \{A \in CL(X) : A \subseteq \cup_{i=1}^{n_k} U_i \text{ i } A \cap U_i \neq \varnothing \text{ za svaki } i; n_k \in \mathbb{N}\}) = \\
= \; & \{A \in CL(X) : A \subseteq Y\} \cap (\cup_{k\in\mathbb{N}} \{A \in CL(X) : A \subseteq \cup_{i=1}^{n_k} U_i \text{ i } A \cap U_i \neq \varnothing \\
& \text{za svaki } i\}) = \\
= \; & \cup_{k\in\mathbb{N}} \{A \in CL(X) : A \subseteq (\cup_{i=1}^{n_k} U) \cap Y \text{ i } A \cap (U_i \cap Y) \neq \varnothing \text{ za svaki } i\} \in (\mathcal{T}|Y)_V
\end{aligned}$$

Dakle dokazali smo da je $\mathrm{T}_V|CL(Y) \subseteq (\mathcal{T}|Y)_V$, no kako gore dokazane jednakosti vrijede u oba smjera, dokazali smo i drugu inkluziju. Time je dokazana naša tvrdnja. ■

Propozicija 1.4 *Neka je X T_1−prostor. Za svaki $U_1, \ldots U_n \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi*

$$Cl(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle) = \left\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \right\rangle.$$

Dokaz. $\left\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \right\rangle$ je zatvoren u $CL(X)$. Naime, $\cup_{i=1}^n \overline{U_i}$ je zatvoren u X, a $\left\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \right\rangle$ je skup svih podskupova od $\cup_{i=1}^n \overline{U_i}$. Dalje, vrijedi $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq \left\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \right\rangle$, pa je $Cl(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle) \subseteq \left\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \right\rangle$.

Preostaje nam dokazati da je $\left\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \right\rangle \subseteq Cl(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle)$. Neka je $A \in \left\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \right\rangle$ i $V = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$, $m \in \mathbb{N}$, otvorena okolina od A. Trebamo pokazati da je $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \neq \varnothing$. Budući da je $A \cap \overline{U_i} \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots n$, postoji $x_i \in A \cap \overline{U_i}$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Kako je $A \subseteq \cup_{j=1}^m V_j$, $\cup_{j=1}^m V_j$ je otvorena okolina od x_i, pa postoji $y_i \in U_i \cap \left(\cup_{j=1}^m V_j\right)$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Kako za $\forall j = 1, \ldots, m$ postoji $x_j \in A \cap V_j$ i $A \subseteq \cup_{i=1}^n \overline{U_i} = \overline{(\cup_{i=1}^n U_i)}$, mora postojati $z_j \in V_j \cap (\cup_{i=1}^n U_i)$, $\forall j = 1, \ldots, m$. Budući da je X T_1-prostor to je $B = \{y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m\}$ zatvoren skup u X i $B \in \left\langle U_1 \cap \left(\cup_{j=1}^m V_j\right), \ldots, U_n \cap \left(\cup_{j=1}^m V_j\right), V_1 \cap (\cup_{i=1}^n U_i), \ldots, V_m \cap (\cup_{i=1}^n U_i) \right\rangle$.
■

Propozicija 1.5 *Neka je X T_1−prostor, K zatvoren podskup od X i neka je*

$$CL_K(X) = \{A \in CL(X) : A \supseteq K\}.$$

Skup $CL_K(X)$ je zatvoren u $CL(X)$.

Dokaz. Neka je $K = \cup_{i\in I}\{x_i\}$. Promotrimo skup $CL_{\{x_i\}}(X)$. Tvrdimo da je zatvoren. Naime,

$$CL_{\{x_i\}}(X) = \{A \in CL(X) : A \supseteq \{x_i\}\} = CL(X) \setminus \{A \in CL(X) : A \subseteq X \setminus \{x_i\}\}.$$

X je T_1−prostor pa je $\{x_i\}$ zatvoren. Dakle, $X\setminus\{x_i\}$ je otvoren pa dalje slijedi da je $\{A \in CL(X) : A \subseteq X\setminus\{x_i\}\} \in \mathcal{T}_V$, a onda i da je $CL_{\{x_i\}}$ zatvoren. Dalje, skup $\cap_{i\in I} CL_{\{x_i\}}$ je zatvoren (presjek zatvorenih skupova). No vrijedi sljedeće: $\cap_{i\in I} CL_{\{x_i\}} = \{A \in CL(X) : A \supseteq \cup_{i\in I}\{x_i\}\} = \{A \in CL(X) : A \supseteq K\} = CL_K(X)$. Time je tvrdnja dokazana. ■

Definicija 1.6 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $\mathcal{H} \subseteq CL(X)$. Potprostor $(\mathcal{H}, \mathcal{T}_V|\mathcal{H})$ prostora $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ naziva se hiperprostor prostora X.*

Teorem 1.7 *Neka su X i Y homeomorfni. Tada su hiperprostori $CL(X)$ i $CL(Y)$ homeomorfni.*

Dokaz. Neka je $h : X \to Y$ homeomorfizam. Definirajmo funkciju $h^* : CL(X) \to CL(Y)$ na sljedeći način: $h^*(A) = h[A]$, za svaki $A \in CL(X)$, gdje je $h[A] = \{h(a) : a \in A\}$. Uočimo da je h^* dobro definirana funkcija. Naime, za svaki $A \subseteq X$ zatvoreni podskup od X, $h(A) \subseteq Y$ je zatvoreni podskup od Y, budući da je h zatvoreno preslikavanje. Pokažimo da je h^* homeomorfizam. Dovoljno je pokazati da je h^* neprekidna otvorena bijekcija. Budući da je za svaki $B \in CL(Y)$, $h^{-1}(B) \in CL(X)$ i $h^*(h^{-1}(B)) = B$, slijedi da je h^* surjekcija. Dalje, budući da je h injekcija, slijedi da je i h^* također injekcija.

Pokažimo sada da je h^* neprekidna funkcija. Napomenimo da ćemo, općenito, neprekidnu funkciju moći zvati preslikavanje.

Neka je $\langle W_1, \ldots, W_n\rangle$, W_i otvoren u Y za $\forall i \in \mathbb{N}$, otvoren skup u $CL(Y)$.
Trebamo pokazati da je $(h^*)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n\rangle)$ otvoren u $CL(X)$.

$$\begin{aligned}
& (h^*)^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n\rangle) = \\
= \ & \left\{(h^*)^{-1}(B) \in CL(X) : B \subseteq \cup_{i=1}^{n} W_i \text{ i } B \cap W_i \neq \varnothing,\ i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\right\} = \\
= \ & \left\{h^{-1}[B] \in CL(X) : B \subseteq \cup_{i=1}^{n} W_i \text{ i } B \cap W_i \neq \varnothing,\ i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\right\} = \\
= \ & \left\{h^{-1}[B] \in CL(X) : h^{-1}[B] \subseteq \cup_{i=1}^{n} h^{-1}[W_i] \text{ i } h^{-1}[B] \cap h^{-1}[W_i] \neq \varnothing,\right. \\
& \left. i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\right\} \overset{h \text{ zatvoreno}}{=} \\
= \ & \left\{A \in CL(X) : A \subseteq \cup_{i=1}^{n} h^{-1}[W_i] \text{ i } A \cap h^{-1}[W_i] \neq \varnothing,\ i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\right\} = \\
= \ & \left\langle h^{-1}(W_1), \ldots, h^{-1}(W_n)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je h^* preslikavanje, jer je $\langle h^{-1}(W_1), \ldots, h^{-1}(W_n)\rangle$ otvoren u $CL(X)$ (jer je h preslikavanje). Još preostaje pokazati da je h^* otvoreno preslikavanje.
Neka je $\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$, U_i otvoren u $Y, \forall i \in \mathbb{N}$, otvoren skup u $CL(X)$. Trebamo pokazati da je $h^*(\langle U_1, \ldots, U_m\rangle)$ otvoren u $CL(Y)$.

$$\begin{aligned}
& h^*(\langle U_1, \ldots, U_m\rangle) = \\
= \ & \{h^*(A) \in CL(Y) : A \subseteq \cup_{i=1}^{m} U_i \text{ i } A \cap U_i \neq \varnothing,\ i = 1, \ldots, m; m \in \mathbb{N}\} = \\
= \ & \{h[A] \in CL(Y) : A \subseteq \cup_{i=1}^{m} U_i \text{ i } A \cap U_i \neq \varnothing,\ i = 1, \ldots, m; m \in \mathbb{N}\} = \\
= \ & \{h[A] \in CL(Y) : h[A] \subseteq \cup_{i=1}^{m} h[U_i] \text{ i } h[A] \cap h[U_i] \neq \varnothing,\ i = 1, \ldots, m; m \in \mathbb{N}\} = \\
= \ & \langle h(U_1), \ldots, h(U_m)\rangle.
\end{aligned}$$

$\langle h(U_1), \ldots, h(U_m)\rangle$ je otvoren u $CL(Y)$ jer je $h(U_i)$ otvoren u Y za $\forall i$.
Ovime je pokazano da je h^* homeomorfizam. ■

1.2 Posebni hiperprostori

Promotrimo sada neke istaknute potprostore prostora $CL(X)$.
Uvedimo sljedeće oznake:

(i) $CLC(X) = \{A \in CL(X) : A \text{ je povezan}\}$

(ii) $2^X = \{A \in CL(X) : A \text{ je kompaktan}\}$

(iii) $C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ je povezan}\right\}$

Uočimo da je $2^X = CL(X)$ kada je X kompaktan, jer je tada svaki zatvoreni podskup od X kompaktan. Nadalje, ako je X Hausdorffov prostor, vrijedi $2^X = \{A \subseteq X : A \text{ je neprazan i kompaktan}\}$, jer je svaki kompaktni podskup Hausdorffovog prostora zatvoren.
Nadalje, uočimo da vrijedi $C(X) = 2^X \cap CLC(X)$.
U daljnjem tekstu ćemo s $|A|$ označiti kardinalni broj skupa A, tj. $|A| \overset{def}{=} cardA$. Također, prisjetimo se sljedeće karakterizacije T_1-prostora: Topološki prostor X je T_1-prostor ako i samo ako je svaki jednotočkovni skup $\{x\} \in X$ zatvoren u X.

Propozicija 1.8 *Ako je X normalan prostor, onda je $CLC(X)$ zatvoren u $CL(X)$.*

Dokaz. Neka je $A \in CL(X) \backslash CLC(X)$. To znači da je A neprazan, zatvoren i nepovezan podskup od X. Zbog nepovezanosti od A, postoje F_1 i F_2 zatvoreni podskupovi od X takvi da je $A \subseteq F_1 \cup F_2, A \cap F_1 \neq \varnothing, A \cap F_2 \neq \varnothing$ i $(A \cap F_1) \cap (A \cap F_2) = \varnothing$. Kako je X normalan prostor, postoje otvoreni skupovi U_1 i U_2 u X takvi da je $A \cap F_1 \subseteq U_1, A \cap F_2 \subseteq U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Kako je $A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2) \subseteq U_1 \cup U_2$, to je $\langle U_1, U_2 \rangle$ otvorena okolina od A. Tvrdimo da je $\langle U_1, U_2 \rangle \cap CLC(X) = \varnothing$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $B \in \langle U_1, U_2 \rangle \cap CLC(X)$. Tada je $B \subseteq U_1 \cup U_2, B \cap U_1 \neq \varnothing, B \cap U_2 \neq \varnothing$ i $(B \cap U_1) \cap (B \cap U_2) \subseteq U_1 \cap U_2 = \varnothing$, pa slijedi da je B nepovezan. ■

Definicija 1.9 *Neka je X T_1-prostor. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, neka je $F_n(X) = \{A \subseteq X : 1 \leq |A| \leq n\}$ potprostor od $CL(X)$. Hiperprostor $F_n(X)$ nazivamo n-terostruki simetrični produkt od X. Za $n = 1$, $F_1(X)$ se još naziva hiperprostor jednotočkovnih podskupova od X.*

Definicija 1.10 *Za T_1-prostor X, neka je $F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$. $F(X)$ nazivamo prostorom konačnih podskupova od X.*

Simetrični produkti nam omogućuju da na jednostavan način konstruiramo zanimljive prostore. Posebno, n-terostruki simetrični produkt od X i topološki produkt X^n su obično prilično različiti. Ova je tvrdnja istinita već kada je X metrički kontinuum i $n = 2$.

Teorem 1.11 *Neka su X i Y homeomorfni prostori. Tada su homeomorfni i sljedeći prostori:*

(i) $CLC(X)$ *i* $CLC(Y)$,

(ii) 2^X *i* 2^Y,

(iii) $C(X)$ *i* $C(Y)$.

Nadalje, neka su X i Y T_1-prostori. Tada su $F_n(X)$ i $F_n(Y)$ homeomorfni $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Tražene homeomorfizme definiramo kao u dokazu Teorema 1.7. Svi homeomorfizmi su dobro definirani jer je neprekidna slika povezanog skupa povezan skup, a neprekidna slika kompaktnog skupa kompaktan skup. ■

Propozicija 1.12 *Neka je X povezan T_1-prostor. Tada je $F_n(X)$ povezan za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, $CL(X)$ je povezan.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i X^n Kartezijev produkt prostora X s produktnom topologijom. X^n je povezan, jer je povezan i X. Definirajmo $f_n : X^n \to F_n(X)$ pravilom

$$f_n((x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

f_n je neprekidna surjekcija, a onda slijedi da je i $F_n(X)$ povezan. Nadalje, $F(X)$ je povezan jer je unija povezanih skupova $F_n(X), n \in \mathbb{N}$, i $\cap_{n=1}^{\infty} F_n(X) = F_1(X) \neq \varnothing$. Vrijedi još da je $F(X)$ gust na $CL(X)$ pa iz povezanosti od $F(X)$ slijedi da je $CL(X)$ povezan. ■

Korolar 1.13 *Ako je X T_1-prostor, onda su X i $F_1(X)$ homeomorfni.*

Dokaz. Funkcija $f_1 : X \to F_1(X)$ iz dokaza prethodne propozicije je homeomorfizam. ■

Propozicija 1.14 *Neka je X T_1-prostor. X je separabilan ako i samo ako je $CL(X)$ separabilan.*

Dokaz. Neka je X separabilan. Analogno kao u dokazu Propozicije 1.12 pokažemo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $F_n(X)$ separabilan. Nadalje, $F(X)$ je prebrojiva unija separabilnih skupova $F_n(X)$, $n \in \mathbb{N}$ pa je i $F(X)$ separabilan. Dakle, postoji prebrojiv podskup D od $F(X)$ takav da je $ClD = F(X)$. No kako je $F(X)$ gust na $CL(X)$ slijedi da je $ClD = Cl(ClD) = ClF(X) = CL(X)$.

Neka je $CL(X)$ separabilan. Dovoljno je dokazati da je $F_1(X)$ separabilan, jer su X i $F_1(X)$ homeomorfni.
Neka je $D = \{A_n \in CL(X) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq CL(X)$ prebrojiv podskup od $CL(X)$ takav da je $ClD = CL(X)$ i $\langle U \rangle$ otvoren podskup od $CL(X)$. Budući je D gust na $CL(X)$, $D \cap \langle U \rangle \neq \varnothing$ pa $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $A_{n_0} \subseteq U$.

Dalje, neka je $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \backslash A_1$ i induktivno $B_n = A_n \backslash \left(\cup_{i=1}^{n-1} B_i\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $B = \{B_n \subseteq X : n \in \mathbb{N}\}$. B je očito neprazan, jer je $B_1 = A_1 \neq \varnothing$ i $|B| \leq \aleph_0$. Po aksiomu izbora postoji skup $D_1 = \{x_n : x_n \in B_n; n \in \mathbb{N}\} = \{x_n : x_n \in A_n; n \in \mathbb{N}\}$. Definirajmo sada skup $D' = \{\{x_n\} : x_n \in A_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq F_1(X)$. Tvrdimo da je D' gust na $F_1(X)$.
Pretpostavimo suprotno. Neka je $\langle U \rangle \cap F_1(X)$ otvoren skup u $F_1(X)$ takav da je $\langle U \rangle \cap F_1(X) \cap D' = \varnothing$. No, onda vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle U \rangle \cap F_1(X) \cap D' &= \{A \in F_1(X) : A \subseteq U, A \in D'\} = \varnothing \implies \\
&\implies \nexists \{a\} \in F_1(X), \{a\} \subseteq U, \{a\} \in D' \implies \\
&\implies \nexists \{a\} \in F_1(X), a \in U, \{a\} \in D'.
\end{aligned}$$

Dakle, za $\forall a \in U$ i $\forall \{x_n\} \in D'$, $a \neq x_n$. No to je u kontradikciji s činjenicom da $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $A_{n_0} \subseteq U$ tj. $x_{n_0} \in U$. Time je tvrdnja dokazana. ■

1.3 Hausdorffova metrika H_d

Neka je (X, d) metrički prostor. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je d omeđena metrika. Naime, za svaku metriku d postoji omeđena metrika d' koja inducira istu topologiju u X kao i polazna metrika d. Za svaki $x \in X$ i svaki $A \in CL(X)$ označimo s

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

Za svaki $r > 0$ i za svaki $A \in CL(X)$ neka je

$$N_d(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

$N_d(r, A)$ nazivamo *generaliziranom otvorenom d-kuglom u X* oko A radijusa r.

Teorem 1.15 *Neka je (X, d) omeđen metrički prostor i $H_d : CL(X) \times CL(X) \to \mathbb{R}$ realna funkcija definirana pravilom:*

$$H_d(A, B) = \inf \{r > 0 : A \subseteq N_d(r, B) \ \ i \ B \subseteq N_d(r, A)\}.$$

Tada je H_d metrika na $CL(X)$ i naziva se Hausdorffova metrika na $CL(X)$ inducirana metrikom d.

Dokaz. Primijetimo da iz omeđenosti metrike d slijedi da je H_d dobro definirana funkcija i $H_d(A, B) \geq 0$ za $\forall (A, B) \in CL(X) \times CL(X)$.
Nadalje, primijetimo da je H_d simetrična funkcija, tj. vrijedi $H_d(A, B) = H_d(B, A)$ za svaki $A, B \in CL(X)$.

Dalje, pretpostavimo da su $A, B \in CL(X)$ takvi da je $H_d(A, B) = 0$. Tada iz definicije od H_d slijedi

$$A \subseteq N_d(\varepsilon, B), \text{ za svaki } \varepsilon > 0.$$

Dakle, odaberemo li fiksni $p \in A$, postoje $b_n \in B$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, takvi da je $d(p, b_n) < 1/n$. Niz (b_n) u B, $n \in \mathbb{N}$, konvergira prema p, B je zatvoren pa slijedi $p \in B$. Time smo pokazali da vrijedi $A \subseteq B$. Analogno pokažemo

da vrijedi i $B \subseteq A$, iz čega slijedi $A = B$. Obrat, $H_d(A, A) = 0$ za svaki $A \in CL(X)$, slijedi neposredno iz definicije od H_d.
Još nam preostaje dokazati nejednakost trokuta za H_d. Prvo dokažimo sljedeću tvrdnju.

$$\forall K, L \in CL(X) \text{ i } \forall \varepsilon > 0, \text{ vrijedi } K \subseteq N_d(H_d(K, L) + \varepsilon, L) \tag{1}$$

Neka su $K, L \in CL(X)$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Moramo pokazati da je $d(x, L) < H_d(K, L) + \varepsilon, \forall x \in K$. No, iz definicije od H_d slijedi da je $d(x, L) \leq H_d(K, L) < H_d(K, L) + \varepsilon, \forall x \in K$.
Neka su $A, B, C \in CL(X)$. Trebamo dokazati da vrijedi

$$H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $a \in A$. Tada, po (1) postoji $b \in B$ takav da je
(i) $\quad d(a, b) < H_d(A, B) + \varepsilon$.
Budući je $b \in B$, koristeći (1) postoji $c \in C$ takav da vrijedi
(ii) $\quad d(b, c) < H_d(B, C) + \varepsilon$.
Iz (i) i (ii) i nejednakosti trokuta od d slijedi
(iii) $\quad d(a, c) < H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon$.
Nadalje, budući je a proizvoljna točka iz A dokazali smo da vrijedi
(iv) $\quad A \subseteq N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon, C)$.
Na sličan način, uzevši točku iz C kao polaznu točku, možemo dokazati
(v) $\quad C \subseteq N_d(H_d(C, B) + H_d(B, A) + 2\varepsilon, A)$.
Već smo pokazali da je H_d simetrična funkcija pa (v) možemo napisati na sljedeći način:
(vi) $\quad C \subseteq N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon, A)$.
Iz (iv), (vi) i definicije od H_d slijedi $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon$. Dakle, budući je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, vrijedi $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$. ■

Propozicija 1.16 *Neka je (X, d) omeđen metrički prostor. Tada, za svaki $A, B \in CL(X)$ vrijedi*

$$H_d(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right\}.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\} = \sup_{a\in A} d(a,B)$ i označimo ga s r_0. Trebamo dokazati da je $\inf\{r>0; A\subseteq N_d(r,B)\} = r_0$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji r_1 takav da je $0<r_1<r_0$ i $A\subseteq N_d(r_1,B)$. No, onda vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} A &\subseteq N_d(r_1,B) \implies a\in N_d(r_1,B), \forall a\in A \implies d(a,B)<r_1, \forall a\in A \implies \\ &\implies r_0=\sup_{a\in A} d(a,B)\le r_1<r_0 \text{ što je kontradikcija.} \end{aligned}$$

■

Korolar 1.17 *Neka je (X,d) metrički prostor. Ako je $A,B\in 2^X$, $A\subseteq N_d(r,B)$ i $B\subseteq N_d(r,A)$, onda je $H_d(A,B)<r$.*

Dokaz. Slijedi direktno iz Teorema 1.15. ■

1.4 Metrizabilnost hiperprostora

Neka je (X,d) omeđen metrički prostor i $\mathcal{T}_d$ topologija inducirana metrikom d. Na skupu $CL(X)$ možemo promatrati Vietorisovu topologiju $(\mathcal{T}_d)_V$ i metričku topologiju $\mathcal{T}_{H_d}$ induciranu Hausdorffovom metrikom H_d. Topologije $(\mathcal{T}_d)_V$ i $\mathcal{T}_{H_d}$ su, općenito, različite. Štoviše, pokazat ćemo da za nekompaktan T_1-prostor $(X,\mathcal{T})$, hiperprostor $(CL(X),\mathcal{T}_V)$ nije metrizabilan.

Lema 1.18 *Ako je Y beskonačan, diskretan prostor, onda Vietorisova topologija na $CL(Y)$ nema prebrojivu bazu.*

Dokaz. Neka je β proizvoljna baza Vietorisove topologije na $CL(Y)$. Primijetimo da je svaki $A\in CL(Y)$ otvoren u Y. Dakle, za svaki $A\in CL(Y)$ postoji $\mathcal{B}_A\in\beta$ takav da vrijedi

$$A\in\mathcal{B}_A\subseteq\langle A\rangle.$$

Očito vrijedi

(i) $\quad A=\cup\mathcal{B}_A$ za svaki $A\in CL(Y)$.

Sada direktno iz (i) slijedi: ako su $A,\ A' \in CL(Y)$ takvi da je $A \neq A'$, onda je $\mathcal{B}_A \neq \mathcal{B}_{A'}$. Drugim riječima, funkcija $A \longmapsto \mathcal{B}_A$ je injekcija iz $CL(Y)$ u β. Dakle vrijedi

(ii) $\quad |CL(Y)| \leq |\beta|$.

Budući da je Y diskretan prostor, vrijedi $CL(Y) = \{A \subseteq Y : A \neq \varnothing\}$. Dakle, budući da je Y beskonačan skup, vrijedi da je $CL(Y)$ neprebrojiv. Sada iz (ii) slijedi da je baza β neprebrojiva. ■

Teorem 1.19 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ T_1-prostor. Ako je $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ metrizabilan, onda je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan, metrizabilan prostor.*

Dokaz. Budući da je $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ metrizabilan i da su X i $F_1(X)$ homeomorfni (po Propoziciji 1.13), očito je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan. Dokažimo da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan. Pretpostavimo suprotno. Tada, budući da je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan postoji prebrojivo beskonačan, zatvoren (u X) i diskretan potprostor $(Y, \mathcal{T}|Y)$ od $(X, \mathcal{T})$. Budući da je Y zatvoren u X, iz Propozicije 1.3 slijedi da je $CL(Y)$ s Vietorisovom topologijom $(\mathcal{T}|Y)_V$ potprostor od $(CL(X), \mathcal{T}_V)$. Sada iz metrizabilnosti prostora $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ slijedi

(i) $\quad (CL(Y), (\mathcal{T}|Y)_V)$ je metrizabilan.

Primijetimo da je $(Y, \mathcal{T}|Y)$ T_1-prostor (jer je $(Y, \mathcal{T}|Y)$ diskretan). Također, primijetimo da je $(Y, \mathcal{T}|Y)$ separabilan (jer je Y prebrojiv). Dakle, iz Propozicije 1.14 slijedi

(ii) $\quad (CL(Y), (\mathcal{T}|Y)_V)$ je separabilan.

Iz (i) i (ii) slijedi da postoji prebrojiva baza od $(\mathcal{T}|Y)_V$. No, kako je Y beskonačan, diskretan prostor, to je u kontradikciji s Lemom 1.18. Dakle, $(X, \mathcal{T})$ je kompaktan.

■

Kao što vidimo u Teoremu 1.19, ako je prostor $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ metrizabilan, onda je X nužno kompaktan prostor. No u daljnjem ćemo pokazati da je, za svaki metrički prostor (X, d), hiperprostor 2^X s Vietorisovom topologijom metrizabilan i , štoviše, vrijedi obrat Teorema 1.19.

Neka je (X, d) metrički prostor. Neka su $A, B \in 2^X$ (A i B su neprazni, kompaktni podskupovi od X). Tada postoji realan broj $r > 0$ takav da je

$A \subseteq N_d(r, B)$ (npr. $r = 1 + diam_d A \cup B$). Iz dokaza Teorema 1.15 slijedi da je H_d metrika za 2^X neovisno je li d omeđena ili ne. Ovu metriku zovemo Hausdorffovom metrikom na 2^X induciranom s d. Koristimo isti simbol, H_d, za ovu metriku kao i u Teoremu 1.15 jer ne može nikako doći do zabune.

Neka je $\mathcal{H}$ hiperprostor. Za svaki $A \in \mathcal{H}$ i $r > 0$, označimo s $B_{H_d}(r, A)$ otvorenu H_d-kuglu u $\mathcal{H}$ radijusa r i s središtem A. Drugim riječima,

$$\mathcal{B}_{H_d}(r, A) = \{B \in \mathcal{H} : H_d(A, B) < r\}.$$

Sljedeći teorem je obrat Teorema 1.19 za hiperprostor 2^X.

Teorem 1.20 *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je $\left(2^X, \mathcal{T}_V\right)$ metrizabilan i vrijedi $T_V = \mathcal{T}_{H_d}$.*

Dokaz. Pokažimo prvo da vrijedi $\mathcal{T}_{H_d} \supseteq \mathrm{T}_V$. Budući da je topologija T_V generirana skupovima $\langle U \rangle$ i $\langle X, U \rangle$ za svaki $U \in \mathcal{T}$ (gdje je $\mathcal{T}$ topologija na X), dovoljno je pokazati da je $\langle U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$ i $\langle X, U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$ za svaki $U \in \mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}$.

Pokažimo da vrijedi $\langle U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$ na sljedeći način. Ako je $U = X$, onda je $\langle U \rangle = 2^X$ i nadalje, $\langle U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$. Pretpostavimo da je $U \neq X$. Sada, neka je $A \in \langle U \rangle$. Neka je

$$\varepsilon = d(A, X \backslash U) \, (= \inf \{d(a, x) : a \in A \text{ i } x \in X \backslash U\}).$$

Primijetimo da je $\varepsilon > 0$, budući da je A kompaktni podskup otvorenog skupa U (ε postoji jer su A i $X \backslash U$ neprazni). Nadalje, vrijedi $\mathcal{B}_{H_d}(\varepsilon, A) \subseteq \langle U \rangle$ na sljedeći način: ako je $B \in \mathcal{B}_{H_d}(\varepsilon, A)$, onda je $H_d(A, B) < \varepsilon$ i iz Teorema 1.15 slijedi

$$B \subseteq N_d(\varepsilon, A).$$

Dakle, iz definicije od ε slijedi da je $B \subseteq U$, a onda i $B \in \langle U \rangle$. Pokazali smo da iz pretpostavke $A \in \langle U \rangle$ slijedi $\mathcal{B}_{H_d}(\varepsilon, A) \subseteq \langle U \rangle$ za neki $\varepsilon > 0$.

Dakle, dokazali smo da vrijedi

(1) $\quad \langle U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$

Pokažimo da vrijedi $\langle X, U\rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$ na sljedeći način. Neka je $A \in \langle X, U\rangle$. Tada vrijedi $A \cap U \neq \varnothing$. Neka je $p \in A \cap U$. Budući da je $p \in U$ i $U \in \mathcal{T}$, postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$N_d(\delta, \{p\}) \subseteq U$$

Dokažimo da vrijedi $\mathcal{B}_{H_d}(\delta, A) \subseteq \langle X, U\rangle$. Neka je $B \in \mathcal{B}_{H_d}(\delta, A)$. Tada je $H_d(A, B) < \delta$. Iz Teorema 1.15 slijedi

$$A \subseteq N_d(\delta, B) .$$

Budući da je $p \in A$, postoji $b \in B$ takav da je $d(b, p) < \delta$. Nadalje, zbog načina na koji smo odabrali δ, vidimo da vrijedi $b \in U$. Vrijedi $B \cap U \neq \varnothing$, odakle slijedi $B \in \langle X, U\rangle$. Ovime smo dokazali da vrijedi $\mathcal{B}_{H_d}(\delta, A) \subseteq \langle X, U\rangle$. Dakle, počevši od $A \in \langle X, U\rangle$, pokazali smo da vrijedi $\mathcal{B}_{H_d}(\delta, A) \subseteq \langle X, U\rangle$ za neki $\delta > 0$. Dokazali smo

(2) $\quad \langle X, U\rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$.

Budući da smo (1) i (2) dokazali za po volji odabran $U \in \mathcal{T}$, slijedi $\mathcal{T}_{H_d} \supseteq \mathrm{T}_V$.

Dokažimo sada $\mathcal{T}_{H_d} \subseteq \mathrm{T}_V$. Po Teoremu 1.2, dovoljno je dokazati da za svaku H_d-kuglu, $\mathcal{B}_{H_d}(r, A)$ postoji konačno mnogo otvorenih podskupova $U_1, \ldots, U_n$ od X, takvih da vrijedi

$$A \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subseteq B_{H_d}(r, A) .$$

Dokažimo tu tvrdnju. Neka je $A \in 2^X$ i neka je $r > 0$. Budući da je A kompaktan i neprazan, postoji konačno mnogo otvorenih podskupova $U_1, \ldots, U_n$ od X koji zadovoljavaju sljedeća tri uvjeta:

(3) $\quad A \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_i$;

(4) $\quad A \cap U_i \neq \varnothing$ za svaki i;

(5) $\quad diam U_i < r$ za svaki i.

Iz (3) i (4) je očigledno da je $A \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Dakle, preostaje dokazati da vrijedi

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subseteq \mathcal{B}_{H_d}(r, A) .$$

Neka je $K \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Budući da je $K \subseteq \cup_{i=1}^n U_i$, iz (4) i (5) slijedi

$$K \subseteq N_d(r, A).$$

Također, budući da je $K \cap U_i \neq \varnothing$ za svaki i, iz (3) i (5) slijedi

$$A \subseteq N_d(r, K).$$

Dakle, $H_d(A, K) < r$ po Korolaru 1.17 pa vrijedi $K \in \mathcal{B}_{H_d}(r, A)$.
Dokazali smo da vrijedi $\mathcal{T}_{H_d} \subseteq \mathrm{T}_V$ čime je teorem dokazan. ■
Napomenimo da Teorem 1.20 možemo iskazati na sljedeći način:

Teorem 1.21 *Ako je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor, onda je $\left(2^X, \mathcal{T}_V\right)$ metrizabilan. Nadalje, ako je d bilo koja metrika u X koja inducira $\mathcal{T}$, onda je $T_V = \mathcal{T}_{H_d}$.*

Teorem 1.22 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ T_1-prostor. Tada je $\left(2^X, \mathcal{T}_V\right)$ metrizabilan ako i samo ako je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\left(2^X, \mathcal{T}_V\right)$ metrizabilan. Tada, budući da je $F_1(X) \subseteq 2^X$ i da su X i $F_1(X)$ homeomorfni (po Propoziciji 1.13), vrijedi da je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan. Obrat vrijedi po Teoremu 1.21. ■

Usporedimo rezultate o 2^X u Teoremu 1.22 sa sljedećim rezultatima o $CL(X)$.

Teorem 1.23 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ T_1-prostor. Tada je $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ metrizabilan ako i samo ako je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan, metrizabilan prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan, metrizabilan prostor. Tada je po Teoremu 1.22 $\left(2^X, \mathcal{T}_V\right)$ metrizabilan i vrijedi $2^X = CL(X)$. Dakle, $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ je metrizabilan. Obrat vrijedi po Teoremu 1.19. ■

Propozicija 1.24 *Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor. Tada je $(CL(X), H_d)$ potpuno omeđen.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog potpune omeđenosti od X postoji konačan podskup $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ takav da je $X = \cup_{i=1}^{n} B_d(x_i, \varepsilon/2)$, gdje je $B_d(x_i, \varepsilon/2) = \{x \in X : d(x, x_i) < \varepsilon/2\}$. Tvrdimo da je $CL(X) = \cup_{A \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}} B_{H_d}(A, \varepsilon)$. Neka je $B \in CL(X)$. Tada je $B \subseteq \cup_{j=1}^{k} B_d\left(x_{i_j}, \varepsilon\right), k \leq n$, a onda $B \in B_{H_d}(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}, \varepsilon)$. Naime,

$$H_d(B, \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}) = \max\left\{\sup_{j=1,\dots,n} d\left(x_{i_j}, B\right), \sup_{b \in B} d(b, \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\})\right\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

■

Sljedeći teorem je bio od velike važnosti za razvoj teorije hiperprostora.

Teorem 1.25 *Ako je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan, metrizabilan, onda je $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ kompaktan.*

Dokaz. Neka je d metrika u X koja inducira $\mathcal{T}$. Primijetimo da je (X, d) potpuno omeđen i potpun. $(CL(X), H_d)$ je potpuno omeđen po Propozicij 1.24. Navedimo bez dokaza slijedeću tvrdnju:
$(*)$ Neka je (X, d) omeđen metrički prostor. Ako je (X, d) potpun, onda je $(CL(X), H_d)$ potpun.
Iz $(*)$ slijedi da je $(CL(X), H_d)$ potpun, a onda i da je kompaktan.

Sada, primijetimo da je $CL(X) = 2^X$ (budući je X kompaktan). Dakle, po Teoremu 1.20 vrijedi $\mathcal{T}_{H_d} = \mathrm{T}_V$ iz čega slijedi da je $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ kompaktan. ■

Korolar 1.26 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ T_1-prostor. Ako je $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ metrizabilan, onda je $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ kompaktan.*

Dokaz. Dokaz slijedi iz Teorema 1.23 i 1.25. ■

Korolar 1.27 *Ako je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan, metrizabilan prostor, onda je $(C(X), \mathcal{T}_V)$ kompaktan.*

Dokaz. Dokaz slijedi iz Teorema 1.25 i Propozicije 1.8. ■

Napomena 1.28 *Pretpostavimo da je $(X,\mathcal{T})$ kompaktan metrizabilan topološki prostor. Iz Teorema 1.21 slijedi da je $\mathcal{T}_V = \mathcal{T}_{H_d}$ neovisno o izboru metrike d koja inducira $\mathcal{T}$. Stoga ćemo često izostaviti d iz oznaka. Drugim riječima, označit ćemo Hausdorffovu metriku u 2^X sa H i odgovarajuću topologiju sa $\mathcal{T}_H$.*

1.5 Konvergencija u hiperprostorima

Definicija 1.29 *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor i $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz podskupova od X. Definiramo limes inferior od $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ u oznaci* $\liminf A_i$ *te limes superior od $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ u oznaci* $\limsup A_i$ *na sljedeći način:*

(i) $\liminf A_i = \{x \in X : \text{za proizvoljni } U \in \mathcal{T} \text{ takav da je } x \in U,\ U \cap A_i \neq \emptyset$ osim za konačno mnogo $i\}$

(ii) $\limsup A_i = \{x \in X : \text{za proizvoljni } U \in \mathcal{T} \text{ takav da je } x \in U,\ U \cap A_i \neq \emptyset$ za beskonačno mnogo $i.\}$

Definicija 1.30 *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz podskupova od X i $A \subseteq X$. Kažemo da $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema A u X i pišemo $Lim A_i = A$, ako vrijedi*

$$\liminf A_i = A = \limsup A_i.$$

Lema 1.31 *Ako je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor i $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz u X, onda je*

$$\limsup A_i = \cap_{n=1}^{\infty} \left[Cl \left(\cup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \right].$$

Dokaz. Dokažimo da je $\limsup A_i \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} \left[Cl \left(\cup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \right]$. Neka je $x \in \limsup A_i$ i $U \in \mathcal{T}$ proizvoljna okolina od x. Vrijedi da je $U \cap A_i \neq \emptyset$ za beskonačno mnogo i, odnosno $x \in Cl A_i$ za beskonačno mnogo i. Drugačije zapisano, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \geq n$ takav da je $x \in Cl A_m$ odnosno, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \cup_{i=n}^{\infty} Cl A_i \subseteq Cl \cup_{i=n}^{\infty} A_i$. Dakle, $x \in \cap_{n=1}^{\infty} \left[Cl \cup_{i=n}^{\infty} A_i \right]$.

Neka je $x \in \cap_{n=1}^{\infty} \left[Cl \left(\cup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \right]$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da svaka okolina od x siječe najviše konačno mnogo A_i.

No vrijedi sljedeće: Za $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in Cl\left(\cup_{i=n}^{\infty} A_i\right)$. Dalje, za svaku okolinu U od x i za $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists i_0 \geq n$, takav da je $U \cap A_{i_0} \neq \varnothing$, odnosno svaka okolina U od x siječe beskonačno mnogo A_i što je u kontradikciji s pretpostavkom. ■

Propozicija 1.32 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $A_i \subseteq X$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tada su* $\limsup A_i$ *i* $\liminf A_i$ *zatvoreni u X. Posebno, $LimA_i$, ako postoji, je također zatvoren u X.*

Dokaz. $\limsup A_i$ je zatvoren jer je po Lemi 1.31 presjek zatvorenih skupova.

Dokažimo da je $\liminf A_i$ zatvoren u X. Pokazat ćemo da je $Cl\left(\liminf A_i\right) \subseteq \liminf A_i$.

Neka je $x_0 \in Cl\left(\liminf A_i\right)$ i U proizvoljna otvorena okolina od x_0. Tada je $U \cap \liminf A_i \neq \varnothing$, pa neka je $x_1 \in U \cap \liminf A_i$. Budući da je U otvorena okolina i od x_1, vrijedi da $U \cap A_i \neq \varnothing$, osim za konačno mnogo i. No onda je $x_0 \in X$ takav da proizvoljna otvorena okolina U od x_0 siječe sve osim konačno mnogo A_i pa je i $x_0 \in \liminf A_i$. Za $LimA_i$, ako postoji, vrijedi $\liminf A_i = LimA_i = \limsup A_i$ pa je također zatvoren. ■

Definicija 1.33 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz u $CL(X)$ i $A \in CL(X)$. Kažemo da $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema A u $CL(X)$ ako vrijedi sljedeće:*

$$(\forall U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}, k \in \mathbb{N})\, (\exists i_0 \in \mathbb{N}) \ \ i \geq i_0 \implies A_i \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle .$$

Do kraja odjeljka ćemo se baviti odnosom između konvergencije u X i konvergencije u $CL(X)$ i uvjetima kada jedna implicira drugu.

Lema 1.34 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz podskupova od X i $A \subseteq X$. Tada su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $LimA_i = A$

(ii) $A \subseteq \liminf A_i$ i $\limsup A_i \subseteq A$.

Dokaz. Dokaz slijedi iz Definicija 1.29 i 1.30 uz očitu tvrdnju $\liminf A_i \subseteq \limsup A_i$. ■

Teorem 1.35 *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *regularan topološki prostor i* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *niz u* $CL(X)$. *Ako* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *konvergira prema* A *u* $CL(X)$, *onda* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *konvergira prema* A *u* X.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz u $CL(X)$ takav da $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema A u $CL(X)$. Pokazat ćemo da vrijedi $LimA_i = A$ koristeći Lemu 1.34. Prvo, pokažimo da vrijedi $A \subseteq \liminf A_i$. Neka je $a \in A$ i neka je $U \in \mathcal{T}$ takav da je $a \in U$. Primijetimo da je $A \in \langle X, U \rangle$. Budući da niz $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema A u $CL(X)$, postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$A_i \in \langle X, U \rangle \text{ za svaki } i \geq i_0.$$

Drugim riječima, $A_i \cap U \neq \varnothing$ za svaki $i \geq i_0$. Ovime smo dokazali da je $a \in \liminf A_i$. Dakle, dokazali smo da vrijedi

(1) $A \subseteq \liminf A_i$.

Pokažimo sada da vrijedi $\limsup A_i \subseteq A$. Neka je $x \in X \backslash A$. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ regularan, postoje $U, W \in \mathcal{T}$ takvi da je $x \in U, A \subseteq W$ i $U \cap W = \varnothing$. Budući da je $A \in \langle W \rangle$ i $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema A u $CL(X)$, postoji j_0 takav da je $A_i \in \langle W \rangle$ za svaki $i \geq j_0$.

Budući da je $U \cap W = \varnothing$, vrijedi $A_i \cap U = \varnothing$ za svaki $i \geq j_0$. Ovime smo pokazali $x \notin \limsup A_i$. Dakle, budući da smo počeli s točkom $x \notin A$, dokazali smo da vrijedi

(2) $\limsup A_i \subseteq A$

Iz (1) i (2) i Leme 1.34 slijedi $LimA_i = A$ što je i trebalo pokazati. ■

Sada nam preostaje odrediti kada konvergencija u X implicira konvergenciju u $CL(X)$. Pokazat ćemo da ta implikacija vrijedi kada je X prebrojivo kompaktan. Prisjetimo se da je topološki prostor, X, prebrojivo kompaktan ako svaki prebrojiv otvoreni pokrivač od X ima konačan potpokrivač.

Lema 1.36 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ prebrojivo kompaktan topološki prostor. Ako je $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz nepraznih podskupova od X, onda vrijedi*

$$\limsup A_i \neq \varnothing.$$

Dokaz. Po Lemi 1.31 vrijedi

$$\limsup A_i = \cap_{n=1}^{\infty} \left[Cl\left(\cup_{i=n}^{\infty} A_i\right)\right] \qquad (1)$$

Definirajmo otvorene skupove $U_n = X \backslash Cl\left(\cup_{i=n}^{\infty} A_i\right)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $\limsup A_i = \varnothing$. Sada iz (1) slijedi $\cup_{n=1}^{\infty} U_n = X$. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ prebrojivo kompaktan, konačno mnogo skupova U_n pokriva X. Od konačno skupova U_n što pokrivaju X, neka je U_m skup s najvećim indeksom m. Tada, budući da je $U_n \subseteq U_m$ za svaki $n < m$, očito je $U_m = X$. Sada slijedi

$$Cl\left(\cup_{i=m}^{\infty} A_i\right) = \varnothing.$$

Posebno vrijedi $A_m = \varnothing$, što je u kontradikciji s pretpostavkom leme. ■

Teorem 1.37 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ prebrojivo kompaktan topološki prostor i $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz u $CL(X)$. Ako $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema A u X, onda $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema A u $CL(X)$.*

Dokaz. Neka je $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz u $CL(X)$ takav da $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema A u X.

Prvo pokažimo da je $A \in CL(X)$. Budući da je $A = \limsup A_i$, po Lemi 1.36 vrijedi $A \neq \varnothing$. Iz Propozicije 1.32 slijedi da je A zatvoren u X. Dakle, $A \in CL(X)$.

Sada pokažimo da $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema A u $CL(X)$. Neka su $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, takvi da vrijedi $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Moramo pokazati da vrijedi $A_i \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ za dovoljno veliki i. Dakle, moramo pronaći prirodne brojeve k_0 i l_0 takve da vrijede sljedeće dvije tvrdnje:

(1) $A_i \cap U_j \neq \varnothing$ za svaki $i \geq k_0$ i za svaki $j = 1, \ldots n$.

(2) $A_i \subseteq \cup_{j=1}^{n} U_j$ za svaki $i \geq l_0$.

Pronađimo k_0 za koji će tvrdnja (1) biti zadovoljena. Odaberimo proizvoljni $j \leq n$ i odgovarajući skup U_j. Budući da je $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, postoji točka $p \in A \cap U_j$. Budući da je $p \in A$ i $A = LimA_i$, slijedi $p \in \liminf A_i$. Dakle, budući da je $p \in U_j$ i U_j otvoren u X, slijedi $U_j \cap A_i \neq \varnothing$ za sve osim za konačno mnogo i. Drugim riječima, postoji prirodni broj, k_j, takav da je

$$U_j \cap A_i \neq \varnothing \text{ za svaki } i \geq k_j.$$

Za svaki $j \leq n$ smo dobili prirodni broj k_j pa sada odaberimo

$$k_0 = \max \{k_1, \ldots, k_n\}.$$

Očito je $k_0$traženi broj za tvrdnju (1).

Pronađimo l_0 za koji će tvrdnja (2) biti zadovoljena. Definirajmo u ovu svrhu

$$Y = X \setminus \cup_{j=1}^{n} U_j.$$

Pretpostavimo suprotno, neka ne postoji l_0 takav da vrijedi tvrdnja (2). Tada postoji podskup $\left\{A_{i(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ skupa $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ takav da vrijedi

(a) $\qquad A_{i(k)} \cap Y \neq \varnothing$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Sa $\limsup_Y$ označimo limese superior s obzirom na potprostor $(Y, \mathcal{T}|Y)$. Primijetimo da je i $(Y, \mathcal{T}|Y)$ prebrojivo kompaktan (budući da je Y zatvoren u X). Dakle, po (a), možemo iskoristiti Lemu 1.36 na prostor $(Y, \mathcal{T}|Y)$ i niz $\left\{A_{(k)} \cap Y\right\}_{k=1}^{\infty}$ da pokažemo tvrdnju:

(b) $\qquad \limsup_Y \left(A_{i(k)} \cap Y\right) \neq \varnothing$.

Uočimo da vrijedi:

(c) $\qquad \limsup_Y \left(A_{i(k)} \cap Y\right) \subseteq \limsup A_i$.

Sada, budući da je $A = LimA_i$, vrijedi $A = \limsup A_i$. Dalje, iz (b) i (c) slijedi $A \cap Y = \varnothing$, čime smo došli do kontradikcije. Dakle, mora postojati prirodan broj l_0 takav da vrijedi (2).

Iz (1) i (2), $A_i \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ za svaki $i \geq \max\{k_0, l_0\}$. Dakle, dokazali smo da niz $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema A u $CL(X)$. ■

Sljedeći teorem je posljedica prethodna dva teorema.

Teorem 1.38 *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *kompaktan Hausdorffov prostor i* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *niz u* $CL(X)$. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *konvergira prema* A *u* X *ako i samo ako* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *konvergira prema* A *u* $CL(X)$

Dokaz. Budući da su kompaktni Hausdorffovi prostori regularni i prebrojivo kompaktni, teorem slijedi iz Teorema 1.35 i 1.37. ■

Korolar 1.39 *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *kompaktan metrizabilan prostor i* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *niz u* $CL(X)$. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *konvergira prema* A *u* X *ako i samo ako* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *konvergira prema* A *u* $CL(X)$ *obzirom na Hausdorffovu metriku.*

Dokaz. Dokaz slijedi iz Teorema 1.38 i 1.23. ■

U sljedećem teoremu ćemo pokazat da se uvjet prebrojive kompaktnosti iz Teorema 1.37 ne može oslabiti kada je $(X, \mathcal{T})$ T_1-prostor. Prije iskazivanja sljedećeg teorema dogovorimo sljedeće: niz $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, poskupova od X, nazivamo *netrivijalnim nizom ako* vrijedi $LimA_i \neq \varnothing$.

Teorem 1.40 *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ T_1*-prostor sa svojstvom da svaki netrivijalani niz* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *u* $F_2(X)$ *koji konvergira u* X *konvergira i u* $F_2(X)$. *Tada je* $(X, \mathcal{T})$ *prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Pretpostavimo da $(X, \mathcal{T})$ nije prebrojivo kompaktan. Tada, budući da je $(X, \mathcal{T})$ T_1-prostor, postoji prebrojiv podskup Y skupa X takav da Y nema gomilište u X. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $Y \neq X$ i neka je $p \in X \backslash Y$. Sada, neka je $Y = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$, neka je

$$A_i = \{p, y_i\}.$$

Lako se vidi da je $LimA_i = \{p\}$. Naime, ako postoji $x \in LimA_i, x \neq p$ onda, budući da x nije gomilište skupa Y i $(X, \mathcal{T})$ je T_1-prostor, postoji $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$ takav da je $U \cap A_i \neq \varnothing$ za najviše jedan i, što je kontradikcija. Nadalje, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ je netrivijalni niz u $F_2(X)$ i vrijedi $LimA_i = \{p\}$. Međutim, niz $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ne konvergira prema $\{p\}$ u $F_2(X)$ budući da je $\{p\} \in \langle X \backslash Y \rangle$, a $A_i \notin \langle X \backslash Y \rangle$ za svaki i (primijetimo da je $\langle X \backslash Y \rangle \in \mathrm{T}_V$ jer je Y zatvoren u X). ■

Poglavlje 2

Geometrijski modeli hiperprostora

2.1 Uvod

U ovom poglavlju se bavimo geometrijskim modelima hiperprostora, no prije samih primjera uvedimo neke nazive i oznake koji će nam biti potrebni u daljnjem tekstu.

U svim primjerima, prostori X su neprazni, kompaktni i metrički. Neprazan, kompaktan i metrizabilan prostor zovemo *kompaktum.* Povezani kompaktum zovemo *kontinuum. Podkompaktum* (*podkontinuum)* zovemo potprostor koji je kompaktum (kontinuum).

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, *n-ćelija* je prostor homeomorfan prostoru $I^n = \prod_{i=1}^{n} [0,1]_i$. 1-ćeliju zovemo *luk*, rubna točka luka A je jedna od dvije točke koje su slika skupa $\{0,1\}$ homeomorfizmom sa $[0,1]$ na A. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, s ∂I^n označavamo rub od I^n. Drugim riječima

$$\partial I^n = \{(x_i)_{i=1}^n \in I^n : x_i = 0 \text{ ili } 1 \text{ za neki } i\}.$$

Hilbertov kvadar je prostor homeomorfan prostoru $I^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} [0,1]_i$. Produktna topologija na I^∞ metrizabilna je metrikom d_∞ definiranom na sljedeći način:

$$d_\infty\left((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty\right) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|x_i - y_i| \text{ za svaki } (x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty \in I^\infty$$

Konačno, navedimo sljedeće potprostore od 2^X i $C(X)$. Neka je X kompaktum i neka je K podkompaktum od X. Definirajmo 2_K^X i $C_K(X)$ na sljedeći način:

$$2_K^X = \left\{A \in 2^X : A \supseteq K\right\}, \; C_K(X) = \{A \in C(X) : A \supseteq K\}.$$

Budući da su 2^X i $C(X)$ kompaktumi, po Propoziciji 1.5 su i 2_K^X i $C_K(X)$ kompaktumi.

Konačni graf je kontinuum koji se može prikazati kao unija od konačno mnogo lukova od kojih se svaka dva sijeku najviše u jednoj ili obje svoje rubne točke.

2.2 X je luk

Konstruirat ćemo geometrijski model za $C(X)$ kada je X proizvoljan luk. Preciznije, pokazat ćemo da je $C(X)$ 2-ćelija i odrediti podkontinuume od X koji tvore rub od $C(X)$.

Prvo razmotrimo primjer kada je $X = [0,1]$. Primijetimo da su točke od $C([0,1])$ zatvoreni intervali $[a,b]$, $0 \leq a \leq b \leq 1$. Ovo nas navodi da definiramo funkciju $h : C([0,1]) \to R^2$ na sljedeći način

$$h([a,b]) = (a,b) \text{ za svaki } [a,b] \in C([0,1]).$$

Slika od $C([0,1])$ je trostrana 2-ćelija (trokut) T u R^2 s vrhovima $(0,0)$, $(0,1)$ i $(1,1)$. h je bijekcija iz $C([0,1])$ u T. Naime, ako je $h([a_1,b_1]) = h([a_2,b_2])$, odnosno $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$, onda vrijedi da je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$ odakle slijedi i da su segmenti $[a_1,b_1]$ i $[a_2,b_2]$ jednaki, dakle h je injekcija. Za svaki $(a,b) \in T$ postoji segment, $[a,b]$, takav da je $h([a,b]) = (a,b)$, pa je h surjekcija. Tvrdimo da je $h : C([0,1]) \to T$ homeomorfizam. Budući da je $C([0,1])$ kompaktan metrički prostor, dovoljno je dokazati da je h neprekidna funkcija. U tu svrhu dovoljno je dokazati sljedeće

(1) Neka je $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ niz u $C([0,1])$. Tada $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira u $C([0,1])$ prema $[a,b]$ ako i samo ako niz $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira u R^2 prema (a,b).

Dokaz za (1) : Neka niz $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira u $C([0,1])$ prema $[a,b]$. Tada za svaku okolinu $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ od $[a,b]$, gdje je ε proizvoljan, postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall i \geq i_0$ $[a_i, b_i] \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$. No tada $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema a u $\mathbb{R}$, a niz $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema b u $\mathbb{R}$, odnosno niz $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema (a,b) u R^2.

Obratno, neka niz $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira u $\mathbb{R}^2$ prema (a,b). Tada niz $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema a u $\mathbb{R}$, a niz $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema b u $\mathbb{R}$. Neka je ε proizvoljan i $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ okolina od $[a,b]$ u $C([0,1])$. Tada postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall i \geq i_0$, $d(a_i, a) < \varepsilon$ i $d(b_i, b) < \varepsilon$, odnosno $[a_i, b_i] \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, odnosno niz $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira u $C([0,1])$ prema $[a,b]$.

Dakle, dokazali smo da je $C([0,1])$ 2-ćelija. Nadalje, budući da homeomorfizmi čuvaju rubove, slijedi:

(2) $\partial C([0,1]) = F_1([0,1]) \cup C_{\{0\}}([0,1]) \cup C_{\{1\}}([0,1])$.

Sada, koristeći upravo dokazane činjenice o $C([0,1])$, dokažimo sljedeću općenitu tvrdnju za lukove:

Propozicija 2.1 *Neka je X proizvoljni luk s rubnim točkama p i q. Tada je $C(X)$ 2-ćelija i vrijedi*

$$\partial C(X) = F_1(X) \cup C_{\{p\}}(X) \cup C_{\{q\}}(X).$$

Dokaz. Budući da smo pokazali da je $C([0,1])$ 2-ćelija, iz Teorema 1.11 (iii), izravno slijedi da je $C(X)$ 2-ćelija. Da bismo dokazali drugi dio propozicije, dovoljno je konstruirati barem jedan homeomorfizam iz $C(X)$ u $C([0,1])$ koji preslikava $F_1(X) \cup C_{\{p\}}(X) \cup C_{\{q\}}(X)$ u $\partial C([0,1])$. Neka je $k : X \to [0,1]$ homeomorfizam. Dalje, definirajmo $k^* : C(X) \to C([0,1])$ na sljedeći način:

$$k^*(A) = k(A) \text{ za svaki } A \in C(X).$$

k^* je homeomorfizam iz $C(X)$ u $C([0,1])$ (jer je k^* definiran na isti način kao i h^* u dokazima Teorema 1.7 i 1.11). Također, budući da svaki homeomorfizam između lukova čuva rubne točke, vrijedi

$$k(\{p,q\}) = \{0,1\}$$

Dobivamo

$$k^*\left(F_1(X) \cup C_{\{p\}}(X) \cup C_{\{q\}}(X)\right) = F_1([0,1]) \cup C_{\{0\}}([0,1]) \cup C_{\{1\}}([0,1]).$$

Dakle, promotrimo li (2), vidimo da je k^* traženi homeomorfizam. ■

2.3 Konusi, geometrijski konusi

Neka je Y topološki prostor. *Konus nad* Y, u oznaci $K(Y)$, je kvocijentni prostor dobiven iz $Y \times [0,1]$ tako da $Y \times \{1\}$ preslikamo u jednu točku. Drugim riječima, $K(Y)$ je kvocijentni prostor $Y \times [0,1] / \backsim$ gdje je $\backsim$ relacija ekvivalencije na $Y \times [0,1]$ definirana sa: $(y_1, t_1) \backsim (y_2, t_2)$ ako i samo ako $(y_1, t_1) = (y_2, t_2)$ ili $t_1 = t_2 = 1$. Točku $Y \times \{1\}$ nazivamo *vrh*, a podskup $Y \times \{0\}$ nazivamo bazom konusa $K(Y)$.

Ako je Y kompaktum, onda je $K(Y)$ topološki isti prostor kao i prostor $G(Y)$ dobiven sljedećom geometrijskom konstrukcijom. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $Y \subseteq E$, gdje je $E = R^n$ za neki n ili $E = I^\infty$. Fiksirajmo točku $p \in E$. Razmotrimo prostor $E \times [0,1]$. Neka je $v = (p,1)$. Za svaki $y \in Y$, sa yv označimo segment u $E \times [0,1]$ od $(y,0)$ do v (dakle, $yv = \{tv + (1-t)(y,0) : 0 \leq t \leq 1\}$).

Neka je

$$G(Y) = \cup \{yv : y \in Y\}.$$

Dokažimo da su $G(Y)$ i $K(Y)$ homeomorfni. Sa $\pi : Y \times [0,1] \to K(Y)$ označimo kvocijentno preslikavanje i neka je $f : Y \times [0,1] \to G(Y)$ dan sa

$$f(y,t) = tv + (1-t)(y,0) \text{ za svaki } (y,t) \in Y \times [0,1].$$

Primijetimo da je $f \circ \pi^{-1}$ dobro definirana funkcija (budući da je $f(y,1) = v$ za sve točke $(y,1)$ iz prostora $Y \times [0,1]$). Dakle, $f \circ \pi^{-1}$ je preslikavanje (budući da je f neprekidna i π je kvocijentno preslikavanje). Očito, $f \circ \pi^{-1}$ je injekcija. Također, $K(Y)$ je kompaktan (budući da je $Y \times [0,1]$ kompaktan i π preslikavanje). Dakle, $f \circ \pi^{-1}$ je homeomorfizam iz $K(Y)$ u $G(Y)$.

$G(Y)$ nazivamo *geometrijski konus nad* Y, točku v nazivamo *vrh* od $G(Y)$ (primijetimo da gore definirana funkcija $f \circ \pi^{-1}$ preslikava vrh od $K(Y)$ u v), a podskup $Y \times \{0\}$ od $G(Y)$ nazivamo bazom od $G(Y)$.

Gore navedena konstrukcija prostora $G(Y)$ se može provesti za svaki separabilni metrički prostor Y.

2.4 Kada su $C(Y)$ i $K(Y)$ homeomorfni?

Promotrimo sljedeće pitanje: Za koje kontinuume Y vrijedi da je $C(Y)$ homeomorfan $K(Y)$?

Motivacija za ovo pitanje dolazi iz sljedeća dva slična svojstva $C(Y)$ i $K(Y)$. Prvo, postoje lukovi u $K(Y)$ koji idu od baze do vrha od $K(Y)$ (označili smo ih s yv u $G(Y)$). Slično, postoje lukovi u $C(Y)$, zovemo ih uređenim lukovima, koji idu od $F_1(Y)$ do Y. Drugo, postoje projekcije od $K(Y)$ na $[0,1]$ koje "mjere" visinu točaka u $K(Y)$. Slično, postoji preslikavanje iz $C(Y)$ u $[0,\infty)$ koje zovemo Whitneyjeva preslikavanja, koja "mjere" visinu (s obzirom na parcijalni uređaj) točaka od $C(Y)$. Tako ćemo prikazati $C(Y)$, slično načinu kako smo prikazali $K(Y)$ kao $G(Y)$.

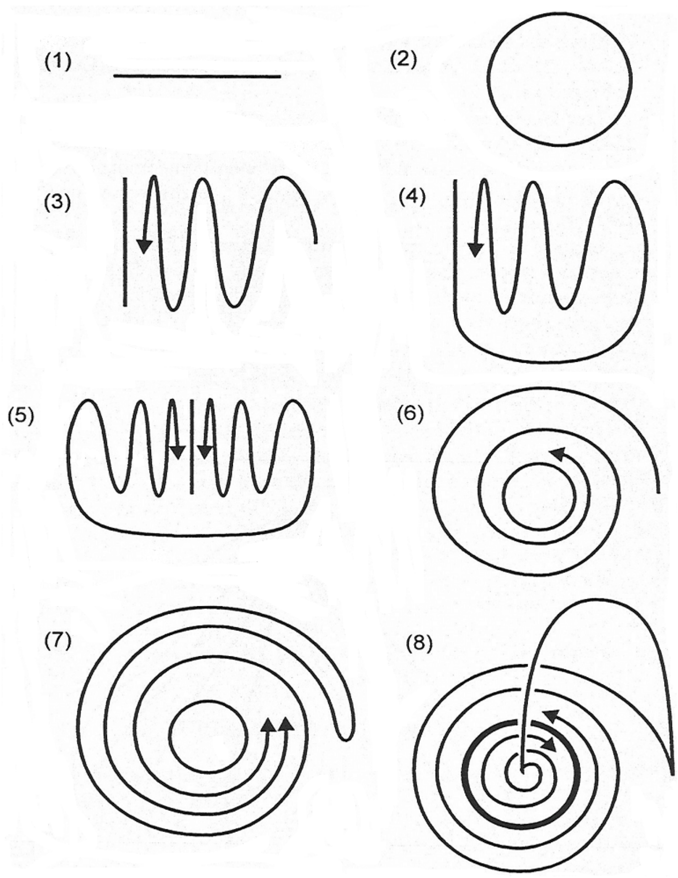
Unatoč ovim sličnostima, prostori $C(Y)$ i $K(Y)$ su obično prilično različiti. Zapravo, ako je Y konačno-dimenzionalni lokalno povezan kontinuum takav da su $C(Y)$ i $K(Y)$ homeomorfni, onda je Y konačan graf. Dakle, Y je luk ili jednostavna zatvorena krivulja.

Jedna istaknuta razlika između $C(Y)$ i $K(Y)$ je vezana uz dimenziju. S jedne strane, ako je $\dim Y < \infty$, onda je i $\dim K(Y) < \infty$. S druge strane, ako je $\dim Y \geq 2$, onda je $\dim C(Y) = \infty$. Dakle, iz toga slijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.2 *Ako je Y konačno-dimenzionalni kontinuum takav da su $C(Y)$ i $K(Y)$ homeomorfni, onda je* $\dim Y = 1$.

Za kontinuum kažemo da je rastavljiv ako se može prikazati ako unija dvaju pravih podkontinuuma. Za kontinuum koji nije rastavljiv kažemo da je nerastavljiv. Za kontinuum kažemo da je nasljedno rastavljiv ako je svaki nedegenerirani podkontinuum rastavljiv. Za kontinuum kažemo da je nasljedno nerastavljiv ako je svaki podkontinuum nerastavljiv.

Teorem 2.3 *Neka je Y nasljedno rastavljiv kontinuum. $C(Y)$ i $K(Y)$ su homeomorfni ako i samo ako je Y jedan od osam kontinuuma iz Slike 2.1.*



Slika 2.1

Poglavlje 3

2^X i $C(X)$ za Peanov kontinuum X

3.1 Uvod

Za prostor kažemo da je *lokalno povezan* ako svaka točka ima bazu okolina koja se sastoji od povezanih, otvorenih skupova. Lokalno povezan kontinuum često nazivamo Peanovim kontinuumom u čast Giuseppea Peana. Jednostavni primjeri Peanovih kontinuuma su konačni graf, n-ćelija, Hilbertov kvadar.

Tema ovog poglavlja je problem od ključne važnosti za čije dokazivanje je trebalo više od 50 godina. Zato je prikladno poglavlje započeti povijesnim pregledom.

U Poljskoj se ranih 1920–ih godina 20. stoljeća pojavila pretpostavka da je 2^I, $I = [0,1]$, Hilbertov kvadar. Pretpostavka se prvi put pojavila u pisanim dokumentima 1938. godine. No, iako je bilo očito da pretpostavka zaista vrijedi, dugi niz godina su pokušaji dokazivanja bili bezuspješni. Sve do 70-ih kada su Schori i West konačno uspjeli dokazati da je 2^I zaista Hilbertov kvadar. Oni su i proširili rezultate na 2^X, gdje je X konačni graf.

No, vratimo se na 1938. godinu. Tada je Wojdyslawski postavio sljedeće pitanje: Je li 2^X Hilbertov kvadar kada je X (nedegeneriran) Peanov kontinuum? 1939. je dokazao da su za svaki Peanov kontinuum X, 2^X i $C(X)$ *apsolutni retrakti*, važnu tvrdnju koja ide u prilog pozitivnom odgovoru na postavljeno pitanje.

Međutim, preko trideset godina se čekalo na nekakav napredak, sve do radova Schorija i Westa.

No onda su Curtis i Schori 1974. i 1978. objavili članke u kojima su odgovorili na Wojdyslawskovo pitanje i objavili dva rezultata o $C(X)$. Njihovi rezultati za nedegeneriran Peanov kontinuum X su sljedeći:

(i) 2^X je Hilbertov kvadar;

(ii) $C(X)$ je Hilbertov kvadar ako svaki luk u X ima prazan interior u X;

No tu nije kraj naše priče. H. Toruńczyk se sredinom 70-ih bavio karakteriziranjem tzv. Q-mnogostrukosti. Objavljen je članak na čijem kraju je elegantno dokazao rezultate Curtisa i Schorija za 2^X primjenjujući svoj karakterizacijski teorem.

Ovo nas dovodi do sadržaja ovog poglavlja, dokaza prvih dvaju rezultata Curtisa i Schorija koristeći Toruńczykov teorem. Prvo ćemo navesti tvrdnje nužne za dokazivanje teorema.

3.2 Apsolutni retrakt, Z-skup, Toruńczykov teorem

Neka je Y prostor i Z potprostor od Y. Kažemo da je Z retrakt od Y ako postoji neprekidna funkcija $r : Y \to Z$ tako da je $r|Z = id_Z$. r zovemo retrakcija. Za kompaktum K kažemo da je apsolutni retrakt ako za svaki metrički prostor X u kojem je K smješten kao (zatvoreni) potprostor postoji retrakcija $r : X \to K$.

Kompaktum K zovemo apsolutni ekstenzor ako ima slijedeće svojstvo: Ako je B zatvoreni podskup metričkog prostora M i $f : B \to K$ preslikavanje, onda se f može proširiti do preslikavanja $F : M \to K$.

Teorem 3.1 (Uryshonov metrizacijski teorem) *Neka je X T_1-prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) X je 2-prebrojiv i regularan;

(ii) X se može smjestiti u Hilbertov kvadar;

(iii) X je metrizabilan i separabilan.

Teorem 3.2 (Tietze) *Neka je X normalan prostor, A zatvoreni podskup od X i $f : A \to [-1, 1]$ preslikavanje. Tada postoji preslikavanje $g : X \to [-1, 1]$ takvo da je $g|A = f$, tj. f ima neprekidno proširenje.*

Teorem 3.3 (Borsuk) *Kompaktum K je apsolutni retrakt ako i samo ako je apsolutni ekstenzor.*

Dokaz. Pretpostavimo da je K apsolutni retrakt. Po Teoremu 3.1 možemo pretpostaviti da je $K \subseteq I^\infty$. Tada postoji retrakcija $r : I^\infty \to K$. Dokažimo da je K apsolutni ekstenzor. Neka je B zatvoren podskup metričkog prostora M i neka je $f : B \to K$ preslikavanje s koordinatnim funkcijama $f_i : B \to [0, 1]_i$, $i \in \mathbb{N}$. Po Teoremu 3.2 svaka koordinatna funkcija f_i se može proširiti do preslikavanje $g_i : M \to [0, 1]_i$, $i \in \mathbb{N}$. Neka je

$$g = (g_i)_{i=1}^\infty : M \to I^\infty.$$

Funkcija $r \circ g : M \to K$ je neprekidno proširenje od f. Dakle, K je apsolutni ekstenzor.

Dokažimo sada obrat. Pretpostavimo da je K apsolutni ekstenzor. Neka je K smješten u metričkom prostoru Y kao zatvoreni potprostor Proširimo $id : K \to K$ do preslikavanja $r : Y \to K$. r je tražena retrakcija. ■

Korolar 3.4 *Neka je K kompaktum u I^∞. Ako je K retrakt od I^∞, onda je K apsolutni retrakt.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je K apsolutni ekstenzor. Neka je B zatvoreni podskup metričkog prostora M i $f : B \to K$ preslikavanje. Po prvom dijelu dokaza Teorema 3.3 postoji proširenje $F : M \to K$ od f. ■

Sada ćemo, koristeći Korolar 3.4, navesti nekoliko primjera apsolutnih retrakata. Sam prostor I^∞ je apsolutni retrakt, jer je identiteta retrakcija. Dalje, bilo koja $n-$ćelija je apsolutni retrakt (preslikavanje $(x_i)_{i=1}^\infty \to (x_i')_{i=1}^\infty$, gdje je $x_i' = x_i$ za svaki $i \leq n$ i $x_i' = 0$ za svaki $i > n$, jest retrakcija od I^∞ na I^n).

S druge strane, jednostavni primjeri kompaktuma koji nisu apsolutni retrakt slijede iz činjenice da je svaki apsolutni retrakt Peanov kontinuum. Ova činjenica je posljedica sljedećih tvrdnji: Svaki kompaktum se može smjestiti u I^∞. I^∞ je Peanov kontinuum, a svaki retrakt Peanovog kontinuuma je također Peanov kontinuum.
Definirajmo sada Z-skup.

Definicija 3.5 *Neka je Y kompaktum s metrikom d. Zatvoren podskup A od Y zovemo Z-skup u Y ako vrijedi:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ preslikavanje } f_\varepsilon : Y \to Y \backslash A, \text{ takvo da je } d\left(f_\varepsilon\left(y\right), y\right) < \varepsilon, \forall y \in Y.$$

Na primjer, ∂I^n je Z-skup u I^n. Dakle, zatvoreni podskup A od I^n je Z-skup u I^n ako i samo ako je $A \subseteq \partial I^n$.

Usporedimo sada Z-skupove u I^n sa Z-skupovima u I^∞. Koristit ćemo metriku d_∞ u I^∞ danu sa

$$d_\infty\left((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty\right) = \sum_{i=1}^\infty 2^{-i} |x_i - y_i| \text{ za svaki } (x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty \in I^\infty$$

Svaka točka u I^∞, za razliku od prostora I^n, je Z-skup u I^∞. Pokažimo tu tvrdnju.
Neka je $p = (p_i)_{i=1}^\infty \in I^\infty$ i $\varepsilon > 0$. Odaberimo $j \geq 1$ takav da vrijedi $2^{-j} < \varepsilon$ i neka je $q \in [0,1]$ takav da je $q \neq p_j$. Definirajmo $f_\varepsilon : I^\infty \to I^\infty$ na sljedeći način:

$$f_\varepsilon\left((x_i)_{i=1}^\infty\right) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, q, x_{j+1}, \ldots) \text{ za svaki } (x_i)_{i=1}^\infty \in I^\infty. \qquad (1)$$

Očito vrijedi $p \notin f_\varepsilon(I^\infty)$ i $d_\infty(f_\varepsilon(y), y) < \varepsilon$, za svaki $y \in I^\infty$. Dakle, $\{p\}$ je Z-skup. Na sličan način možemo pokazati da je svaki konačan i prebrojiv, zatvoren podskup od I^∞ Z-skup u I^∞. Iz ovoga slijedi da u I^∞ postoji niz Z-skupova čija je unija gusta u I^∞.

Propozicija 3.6 *Neka je Y kompaktum. Konačna unija Z-skupova u Y je Z-skup.*

Dokaz. Neka je $Z = \cup_{i=1}^n Z_i$, gdje je Z_i Z-skup za $\forall i$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da $(\exists \varepsilon > 0)(\forall f_\varepsilon : Y \to Y \backslash Z)(\exists y_0 \in Y)\ d(f_\varepsilon(y_0), y_0) \geq \varepsilon$. No kako je $Y \backslash Z = (Y \backslash Z_1) \cap \ldots \cap (Y \backslash Z_n)$, $\exists i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $f_\varepsilon(y_0) \in Y \backslash Z_{i_0}$ pa gornja pretpostavka vrijedi i za $Y \backslash Z_{i_0}$. No, onda slijedi da Z_{i_0} nije Z-skup što je kontradikcija. ■

Navest ćemo još jedan primjer Z-skupova u I^∞. U tu svrhu definirajmo pojam Z-preslikavanja.

Definicija 3.7 *Neka su Y_1 i Y_2 kompaktumi. Za preslikavanje $f : Y_1 \to Y_2$ kažemo da je Z-preslikavanje ako je $f(Y_1)$ Z-skup u Y_2.*

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, neka je $f_n : I^\infty \to I^\infty$ preslikavanje dano sa:

$$f_n\left((x_i)_{i=1}^\infty\right) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots), \forall (x_i)_{i=1}^\infty \in I^\infty.$$

Svaka funkcija f_n je Z-preslikavanje (dokaz analogan kao u (1)). Primijetimo da niz $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ konvergira uniformno prema identiteti na I^∞, s obzirom na metriku d_∞. Dokažimo to. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i n_0 takav da je $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Dalje, neka su $n \geq n_0$ i $(x_i)_{i=1}^\infty \in I^\infty$ proizvoljni. Vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} d_\infty\left(f_n\left((x_i)_{i=1}^\infty\right), id\left((x_i)_{i=1}^\infty\right)\right) &= \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}|x_i - x_i| + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i}|x_i - 0| = \\ = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i|}{2^i} \overset{|x_i| \leq 1, \forall i \in \mathbb{N}}{\leq} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana, a ujedno je pokazano i slijedeće: Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji Z-preslikavanje $f_\varepsilon : I^\infty \to I^\infty$ tako da je $d_\infty(f_\varepsilon(y), y) < \varepsilon, \forall y \in I^\infty$.

Dakle, odredili smo osnovne činjenice o Hilbertovim kvadrima:

Ako je Q Hilbertov kvadar, onda Z-preslikavanja uniformno konvergiraju prema identiteti na Q. Obrat, za apsolutni retrakt, je Toruńczykov teorem!

Teorem 3.8 (Toruńczyk) *Neka je Y apsolutni retrakt sa svojstvom da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji Z-preslikavanje $f_\varepsilon : Y \to Y$ tako da je $d_\infty(f_\varepsilon(y), y) < \varepsilon, \forall y \in Y$. Tada je Y Hilbertov kvadar.*

3.3 Svojstva Peanovih kontinuuma

Sljedeće tvrdnje ćemo navesti bez dokaza jer dokazi prelaze okvire ovog diplomskog, a nužne su nam u daljnjem tekstu.

Teorem 3.9 *Neka je X Peanov kontinuum. Tada je X, za svaki $\varepsilon > 0$, unija konačno mnogo Peanovih kontinua dijametra manjeg od ε.*

Za prostor X kažemo da je *putovima povezan* ako se svake dvije točke mogu povezati lukom.

Teorem 3.10 *Svaki Peanov kontinuum je putovima povezan.*

Neka je (X, d) metrički prostor i $x, y \in X$. Kažemo da je $m \in X$ središnja točka za x i y ako vrijedi

$$d(x, m) = d(m, y) = \frac{1}{2} d(x, y).$$

Za metriku d na X kažemo da je konveksna ako za svake dvije točke $x, y \in X$ postoji njihova središnja točka $m \in X$.

Teorem 3.11 *Svaki Peanov kontinuum ima konveksnu metriku.*

Sada ćemo navesti nekoliko osnovnih svojstava konveksne metrike.

Propozicija 3.12 *Neka je X kontinuum s konveksnom metrikom d. Tada se svake dvije točke $x, y \in X$ mogu povezati lukom J u X takvim da je J izometričan zatvorenom intervalu $[0, d(x, y)]$.*

Dokaz. Neka je $m\left(\frac{1}{2}\right)$ središnja točka za x i y. Dalje, neka je $m\left(\frac{1}{4}\right)$ središnja točka od x i $m\left(\frac{1}{2}\right)$ te neka je $m\left(\frac{3}{4}\right)$ središnja točka od $m\left(\frac{1}{2}\right)$ i y. Neka je $m\left(\frac{k}{8}\right)$ središnja točka od $m\left(\frac{k-1}{8}\right)$ i $m\left(\frac{k+1}{8}\right)$ gdje je $k = 1, 3, 5, 7$ i gdje je $m(0) = x$ te $m(1) = y$. Induktivno definirajmo sljedeći podskup M skupa X:

$$M = \left\{ m\left(\frac{k}{2^n}\right) : n \in \mathbb{N} \text{ i } k = 1, \ldots, 2^n - 1 \right\},$$

gdje je svaki $m\left(\frac{k}{2^n}\right)$ središnja točka od $m\left(\frac{k-1}{2^n}\right)$ i $m\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$. Neka je $J = ClM$. Definirajmo $f : J \to [0, d(x, y)]$

$$f(z) = d(x, z) \text{ za svaki } z \in J.$$

f je izometrija iz J u $[0, d(x, y)]$. Dakle, J mora biti luk budući da su izometrije homeomorfizmi. Također iz definicije luka J slijedi $x, y \in J$. ■

Za sljedeća dva svojstva konveksnih metrika moramo definirati poopćenu zatvorenu kuglu.

Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $r > 0$ i neka je $A \in CL(X)$. *Poopćenu zatvorenu d-kuglu u X oko skupa A radijusa r*, koju označavamo sa $C_d(r, A)$, definiramo na sljedeći način:

$$C_d(r, A) = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}.$$

Propozicija 3.13 *Neka je X kontinuum s konveksnom metrikom d i neka je $r > 0$. Tada, za svaki $A, B \in 2^X$, vrijedi*

$$H_d(C_d(r, A), C_d(r, B)) \leq H_d(A, B).$$

Dokaz. Neka su $A, B \in 2^X$. Za H_d ćemo koristiti sljedeću formulu:

$$H_d(A, B) = \max\left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$$

Nadalje, dovoljno je, zbog simetrije od H_d, dokazati da vrijedi

$$d(x, C_d(r, B)) \leq H_d(A, B), \forall x \in C_d(r, A). \quad (1)$$

Dokažimo (1).

Neka je $x \in C_d(r, A)$. (1) očito vrijedi ako je $x \in C_d(r, B)$ pa pretpostavimo da $x \notin C_d(r, B)$.

Budući da je $x \in C_d(r, A)$ i $A \in 2^X$, postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) \leq r$. Kako je $B \in 2^X$, postoji $b \in B$ takav da je $d(a, b) = d(a, B)$. Napomenimo da je $d(x, b) > r$ (slijedi iz pretpostavke $x \notin C_d(r, B)$).

Sada po Propoziciji 3.12 postoji luk J u X od x do b takav da je J izometričan s $[0, d(x, b)]$. Budući da je $d(x, b) > r$, postoji točka $y \in J$ takva da je $d(y, b) = r$. Tada su x i b rubne točke luka J i J je izometričan s $[0, d(x, b)]$ pa vrijedi:

$$d(x, y) + d(y, b) = d(x, b).$$

Dalje, kako je $d(y, b) = r$, vrijedi

$$d(x, y) = d(x, b) - r \leq d(x, a) + d(a, b) - r,$$

a budući da je $d(x, a) \leq r$ i $d(a, b) = d(a, B)$, vrijedi

$$d(x, y) \leq d(a, B).$$

Dakle, po Propoziciji 1.16 vrijedi $d(x, y) \leq H_d(A, B)$. Budući da je $y \in C_d(r, B)$, dokazali smo (1). ■

Propozicija 3.14 *Neka je X kontinuum s konveksnom metrikom d. Tada, za svaki $A \in C(X)$ i $r > 0$, vrijedi $C_d(r, A) \in C(X)$.*

Dokaz. Ako je $A \in C(X)$, onda povezanost od $C_d(r, A)$ slijedi iz Propozicije 3.12. ■

Sljedeće jednostavno svojstvo o uniji Peanovih kontinuuma često ćemo koristiti u daljnjem.

Propozicija 3.15 *Ako su Z_1 i Z_2 Peanovi kontinuumi (u danom prostoru) i ako je $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, onda je $Z_1 \cup Z_2$ Peanov kontinuum.*

Dokaz. Neka je $Z = Z_1 \cup Z_2$. Z je očito kontinuum lokalno povezan u svakoj točki skupa $Z \backslash (Z_1 \cap Z_2)$. Neka je $z \in Z_1 \cap Z_2$ i W okolina od z u Z. Tada su $W \cap Z_i, i = 1, 2$, okoline od z u Z_i pa postoji povezana okolina V_i od z u Z_i takva da je $z \in V_i \subseteq W \cap Z_i$. Tada je $V_1 \cup V_2$ povezan skup u Z i $z \in V_1 \cup V_2 \subseteq W$. Nadalje, $V_1 \cup V_2$ je okolina od z.
Dakle, budući da su Z_1i Z_2 Peanovi kontinuumi slijedi da svaka točka u Z ima bazu okolina koja se sastoji od povezanih skupova. $(*)$
Sada odaberimo fiksni $p \in Z$ i neka je N proizvoljna okolina od p u Z. S $IntN$ označimo interior od N u Z, a sa G označimo komponentu od p u $IntN$ (G je unija svih povezanih podskupa od $IntN$ koji sadrže p). Primijetimo da je G povezan.
Pokažimo da je G otvoren u Z.

Neka je $z \in G$. Po $(*)$, z ima povezanu okolinu $E \subseteq IntN$. Primijetimo da je $G \cup E$ povezani podskup od $IntN$ koji sadrži p, pa mora biti $G \cup E \subseteq G$ tj. $E \subseteq G$. Dakle, budući da je E okolina od z u Z i budući da je z proizvoljna točka iz G, dokazali smo da je G otvoren u Z.

Dakle, G je povezan, otvoren podskup od Z i $p \in G \subseteq N$. Pokazavši da postoji takav G za proizvoljan $p \in Z$ i za proizvoljnu okolinu N od p, dokazali smo da je Z lokalno povezan. ■

Teorem 3.16 (Wojdyslawski) *Ako je X Peanov kontinuum, onda su 2^X i $C(X)$ apsolutni retrakti.*

3.4 Curtis-Schorijev teorem za 2^X i $C(X)$

U ovom odjeljku ćemo dokazati Curtis-Schorijev teorem, ali prije toga pokažimo kada su 2^X_K i $C_K(X)$ Z-skupovi.

Lema 3.17 *Neka je J luk s rubnim točkama p i q. Tada postoji preslikavanje $\varphi : 2^J \to 2^J$ sa sljedećim svojstvima: Ako je $A \in 2^J$ i $S \subseteq \{p, q\}$, onda $\varphi(A) \neq J$, $\varphi(S) = S$ i $\varphi(A \cup S) = \varphi(A) \cup S$.*

Dokaz. Prvo dokažimo slučaj kada je $Y = [-1, 1]$. Ako je $A \in 2^Y$, neka je

$$\begin{aligned} a^+ &= \inf A \cap [0,1] && \text{ako je } A \cap [0,1] \neq \varnothing, \\ a^- &= \sup A \cap [-1,0] && \text{ako je } A \cap [-1,0] \neq \varnothing, \\ a^0 &= \inf \{|a| : a \in A\}. \end{aligned}$$

Ako je $A \in 2^Y$ takav da $0 \notin A$, neka je

$$\gamma(A) = \begin{cases} A \cup \{2a^+ - 1\}, & \text{ako je } A \subseteq (0,1] \\ A \cup \{2a^- + 1\}, & \text{ako je } A \subseteq [-1,0) \\ A \cup \{2a^+ - 1, 2a^- + 1\}, & \text{ako je } A \cap [-1,0) \neq \varnothing \neq A \cap (0,1]. \end{cases}$$

Primijetimo da je γ neprekidna na $2^Y \backslash 2_0^Y$. Konačno, definirajmo $\varphi : 2^Y \to 2^Y$ na sljedeći način:

$$\varphi(A) = \begin{cases} \gamma(A), & \text{ako je } A \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \varnothing \\ [A \backslash (-1,1)] \cup \{-1, 1\}, & \text{ako je } 0 \in A \\ (\gamma(A) \setminus (2a^0 - 1, 1 - 2a^0)) \cup \{2a^0 - 1, 1 - 2a^0\}, & \text{ako je } 0 < a^0 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Tvrdimo da φ zadovoljava tražena svojstva iz leme. Očito vrijedi da je $\varphi(A) \neq Y$ za svaki $A \in 2^Y$. Pokažimo da je $\varphi(S) = S$. Neka je $S \subseteq \{-1, 1\}$. Vrijedi da je $\varphi(S) = \gamma(S)$ (budući da je $S \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \varnothing$ za svaki $S \subseteq \{-1, 1\}$). Ako je $S = \{-1\}$, onda je $\varphi(S) = \gamma(S) = S \cup \{2a^- + 1\} = S \cup \{-1\} = S$. Slično pokažemo za $S = \{1\}$ i $S = \{-1, 1\}$. Dakle, pokazali smo da vrijedi $\varphi(S) = S$. $\varphi(A \cup S) = \varphi(A) \cup \varphi(S) = \varphi(A) \cup S$ čime smo pokazali da φ zadovoljava svojstva iz leme.

Opći rezultati za proizvoljni luk J sada očito slijede. Naime, neka je $h : J \to Y$ homeomorfizam, neka je $h^* : 2^J \to 2^Y$ funkcija iz dokaza Teorema 1.7 i neka je $\varphi : 2^Y \to 2^Y$ upravo konstruirana funkcija. Tada je $(h^*)^{-1} \circ \varphi \circ h^*$ traženo preslikavanje za 2^J.

■

Neka je X kompaktum i $u : 2^{2^X} \to 2^X$ funkcija definirana sa

$$u(\mathcal{A}) = \cup \mathcal{A}, \ \forall \mathcal{A} \in 2^{2^X}.$$

Funkcija u se naziva unija preslikavanje i ima slijedeća svojstva

(U1) u je surjekcija.

(U2) u je neprekidna i vrijedi $H(\cup\mathcal{A}, \cup\mathcal{B}) \leq H_H(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ za svaki $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in 2^{2^X}$.

(U3) u preslikava $C(C(X))$ u 2^X.

Neka je A luk u prostoru X. Kažemo da je A *slobodan luk u* X ako je A bez rubova otvoren skup u X.

Teorem 3.18 *Neka je X nedegenerirani Peanov kontinuum i K zatvoren podskup od X takav da je $intK \neq \varnothing$. Tada je 2^X_K Z-skup u 2^X. Nadalje, ako K ne sadrži slobodne lukove, onda je $C_K(X)$ Z-skup u $C(X)$.*

Dokaz. Uočimo da je 2^X_K zatvoren u 2^X po Propoziciji 1.5. Također vrijedi da je $C_K(X)$ zatvoren u $C(X)$.

Prvo dokažimo teorem za 2^X_K pretpostavivši da K sadrži barem jedan slobodan luk u X. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada, budući da K sadrži slobodan luk u X, sadrži luk J takav da vrijedi

$$diam_d(J) < \varepsilon.$$

Neka su p i q rubne točke od J i neka je $\varphi : 2^J \to 2^J$ funkcija iz Leme 3.17. Definirajmo $f_\varepsilon : 2^X \to 2^X$ na sljedeći način:

$$f_\varepsilon(B) = \begin{cases} B, & \text{ako je } B \cap J = \varnothing \\ (B \backslash IntJ) \cup \varphi(B \cap J), & \text{ako je } B \cap J \neq \varnothing. \end{cases}$$

Neprekidnost od f_ε slijedi iz činjenice da je J slobodan luk u X i iz svojstva od φ u Lemi 3.17. Budući da je $J \subseteq K$ i $\varphi(A) \supseteq J$, za svaki $A \in 2^J$ (po Lemi 3.17), f_ε preslikava 2^X u $2^X \backslash 2^X_K$. Konačno, f_ε je u $\varepsilon-$okolini identitete na 2^X (s obzirom na H_d) budući da je $diam_d(J) < \varepsilon$. Dakle, dokazali smo da je 2^X_K Z-skup u 2^X ako K sadrži slobodan luk u X.

Dalje, dokažimo teorem za 2^X_K pretpostavivši da K ne sadrži luk slobodan u X. Drugim riječima, pokažimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji preslikavanje g_ε iz 2^X u $2^X \backslash 2^X_K$ takva da je u $\varepsilon-$okolini identitete na 2^X (s obzirom na H_d).

Neka je $\varepsilon > 0$, $intK \neq \varnothing$ i $p \in intK$. Po Teoremu 3.9, $X = \cup_{i=1}^{n} X_i$, gdje je svaki X_i Peanov kontinuum i

$$diam_d(X_i) < \varepsilon/4, \; i = 1, \ldots, n.$$

Definirajmo sada *zvijezdu* od p s obzirom na $X_1, \ldots, X_n$ na sljedeći način:

$$St(p) = \cup \{X_i : p \in X_i\}.$$

Bez gubitka općenitosti, možemo pretpostaviti da je ε dovoljno malen da vrijedi $St(p) \subseteq K$ i $St(p) \neq X$. Neka je

$$\mathcal{C} = \{X_j : p \notin X_j \text{ i } X_j \cap St(p) \neq \varnothing\}.$$

Budući da je $St(p) \neq X$ i $X = \cup_{i=1}^{n} X_i$ povezan, slijedi da je $\mathcal{C} \neq \varnothing$. U protivnom, ako je $\mathcal{C} = \varnothing$, X se može prikazati kao unija dvaju zatvorenih i disjunktnih skupova, $St(p)$ i $X \backslash St(p)$, odakle bi slijedilo da je X nepovezan što je kontradikcija.
Za svaki $X_j \in \mathcal{C}$, neka je $p_j \in X_j \cap St(p)$. Točke p_j postoje budući da je $\mathcal{C} \neq \varnothing$. Po Propoziciji 3.15 vrijedi da je $St(p)$ Peanov kontinuum. Nadalje, iz Teorema 3.10 slijedi da postoji luk A_j u $St(p)$ od p do p_j, za svaki j. S A označimo uniju svih A_j i neka je

$$Y = A \cup (\cup \mathcal{C}).$$

Iz Propozicije 3.15 slijedi da je Y Peanov kontinuum. Nadalje, iz Teorema 3.16 slijedi da je $C(Y)$ apsolutni retrakt. Definirajmo $\alpha : Y \to C(Y)$ na sljedeći način:

$$\alpha(y) = \{y\} \text{ za svaki } y \in Y.$$

Sada, budući da je $C(Y)$ apsolutni retrakt, iz Teorema 3.3 slijedi da se α može proširiti u preslikavanje $\beta : St(p) \cup Y \to C(Y)$. Sada proširimo funkciju β u $\gamma : X \to C(X)$ na sljedeći način:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \beta(x), & \text{ako je } x \in St(p) \cup Y \\ \{x\}, & \text{ako je } x \in X \backslash (St(p) \cup Y). \end{cases}$$

Pokazat ćemo da je γ neprekidna, no prvo pokažimo kako ćemo funkciju γ upotrijebiti da na 2^X definiramo funkciju g_ε.

Za svaki $B \in 2^X$ neka je

$$g_\varepsilon(B) = \cup\{\gamma(b) : b \in B\}.$$

Pokažimo da g_ε ima sljedeća tri svojstva:

(i) g_ε preslikava 2^X u 2^X i g_ε je neprekidna,

(ii) $g_\varepsilon(B) \supseteq K$ za svaki $B \in 2^X$,

(iii) g_ε se nalazi u $\varepsilon-$okolini identitete na 2^X (s obzirom na H_d).

Dokažimo (i).

Prvo dokažimo da je funkcija g_ε neprekidna. Gore definirana funkcija β je neprekidna i vrijedi $\beta(y) = \{y\}$ za svaki $y \in Y$. Neprekidnost funkcije γ slijedi iz sljedeće tvrdnje:

$$Cl(X \backslash St(p)) \cap St(p) \subseteq Y. \tag{1}$$

Dokažimo (1). Neka je $z \in (Cl(X \backslash St(p))) \cap St(p)$. Neka je $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ niz u $X \backslash St(p)$ takav da $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ konvergira prema z. Budući da je $X = \cup_{i=1}^n X_i$ i $n \in \mathbb{N}$, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $z_k \in X_m$ za beskonačno mnogo k. To implicira da X_m ima sljedeća tri svojstva:

(a) $z \in X_m$;

(b) $p \notin X_m$ (budući da $z_k \notin St(p)$ za svaki k);

(c) $X_m \cap St(p) \neq \varnothing$ (iz (a) budući da je $z \in St(p)$).

Iz (b) i (c) slijedi da je $X_m \in \mathcal{C}$. Dakle, iz (a) slijedi da je $z \in Y$. S ovim smo dokazali (1). Budući da je $Cl(X \backslash St(p)) \cap St(p) \subseteq Y$ i $\beta(y) = \{y\}, \forall y \in Y$, slijedi da se funkcija γ može definirati i ovako:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \beta(x), & \text{ako je } x \in St(p) \cup Y \\ \{x\}, & \text{ako je } x \in Cl(X \backslash St(p)). \end{cases}$$

Kako su $St(p) \cup Y$ i $Cl(X \backslash St(p))$ zatvoreni podskupi od X, β neprekidna funkcija i $\gamma | Cl(X \backslash St(p))$ neprekidna, to slijedi da je i γ neprekidna.

Sada ćemo iskoristiti neprekidnost od γ da bi dokazali (i). Neka je $B \in 2^X$. Budući da je γ preslikavanje iz X u $C(X)$, $\gamma(B)$ je neprazni kompaktni podskup od $C(X)$. Dakle, $\gamma(B) \in 2^{2^X}$. Nadalje, budući da je $g_\varepsilon(B) = \cup\gamma(B)$, iz svojstva (U1) unija preslikavanja slijedi $g_\varepsilon(B) \in 2^X$. Ovime smo pokazali da g_ε preslikava 2^X u 2^X. Neprekidnost od g_ε slijedi iz neprekidnosti od γ i iz svojstva (U2) unija preslikavanja na sljedeći način. Neka je u unija preslikavanje i $\gamma^* : 2^X \to 2^{2^X}$ definirana sa

$$\gamma^*(B) = \gamma(B) \text{ za svaki } B \in 2^X.$$

Sada vrijedi da je $g_\varepsilon = u \circ \gamma^*$. γ^* je neprekidna, budući da je γ neprekidna, a onda slijedi iz (i) u dokazu oTeorema 1.7. Dalje, u je po svojstvu (U1) neprekidna. Dakle, g_ε je neprekidna. Ovime smo dokazali (i).

Dokažimo sada (ii).

Prvo pokažimo

$$St(p) \nsubseteq Y. \qquad (*)$$

Neka je $U = X \setminus \cup \{X_i : p \notin X_i\}$. Primijetimo da vrijedi

$$U \subseteq St(p) \setminus \cup\mathcal{C}.$$

Sada, da bismo dokazali $(*)$, dovoljno je dokazati da $U \setminus A \neq \varnothing$ (budući da je $Y = A \cup (\cup\mathcal{C})$). Prisjetimo se sada da je A definiran kao konačna unija lukova iz $St(p)$ i da je $St(p) \subseteq K$. Također se prisjetimo pretpostavke da K ne sadrži slobodne lukove u X. Dakle, A je konačna unija lukova koji imaju prazne interiore u X. Dakle, vrijedi $intA = \varnothing$. Sada, budući da je U očito neprazan i otvoren u X, vrijedi $U \nsubseteq A$, odnosno $U \setminus A \neq \varnothing$. Time smo dokazali $(*)$.

Dovršimo sada dokaz za (ii). Iz $(*)$ slijedi da postoji točka $q \in St(p) \setminus Y$. Prisjetimo se pravila od γ i da je $C(Y)$ kodomena od β. Sada slijedi da $q \notin \gamma(x)$ za svaki $x \in X$. Iz pravila od g_ε slijedi $q \notin g_\varepsilon(B)$, za svaki $B \in 2^X$. Dakle, budući da je $q \in St(p) \subseteq K$, očito je $g_\varepsilon(B) \supseteq K$ za svaki $B \in 2^X$. Ovime smo dokazali (ii).

Dokažimo sada (iii).

Primijetimo da vrijedi $diam_d(St(p) \cup Y) < \varepsilon$. Dalje, iz definicije od γ i činjenice da je $C(Y)$ kodomena od β slijedi

$$diam_d(\{x\} \cup \gamma(x)) < \varepsilon \text{ za svaki } x \in X.$$

Dakle, za svaki $B \in 2^X$ vrijedi $B \subseteq N_d(\varepsilon, g_\varepsilon(B))$ i $g_\varepsilon(B) \subseteq N_d(\varepsilon, B)$. Iz Korolara 1.17 sada slijedi $H_d(g_\varepsilon(B), B) < \varepsilon$ za svaki $B \in 2^X$. Ovime smo dokazali (iii).

Iz $(i) - (iii)$ slijedi da je 2^X_K Z-skup u 2^X.

Dokaz teorema za $C_K(X)$ je sada jednostavan. Razmotrimo preslikavanje $g_\varepsilon|C(X)$, gdje je g_ε gore definirana funkcija. Pokažimo da $g_\varepsilon|C(X)$ preslikava $C(X)$ u $C(X)$. Neka je $B \in C(X)$. Sada, budući da je $\gamma : X \to C(X)$ neprekidna, $\gamma(B)$ je podkontinuum od $C(X)$, odnosno $\gamma(B) \in C[C(X)]$. Dalje, budući da je $g_\varepsilon(B) = \cup\gamma(B)$, iz svojstva (U3) unija preslikavanja slijedi $g_\varepsilon(B) \in C(X)$. Dakle, dokazali smo da $g_\varepsilon|C(X)$ preslikava $C(X)$ u $C(X)$. Dakle, koristeći tvrdnje analogne $(i) - (iii)$, slijedi da je $C_K(X)$ Z-skup u $C(X)$. ■

Teorem 3.19 (Curtis-Schori) *Neka je X nedegenerirani Peanov kontinuum. Tada vrijede slijedeće tvrdnje.*

(i) 2^X *je Hilbertov kvadar.*

(ii) $C(X)$ *je Hilbertov kvadar kada nema slobodnog luka u X.*

Dokaz. (i) : Za dokaz koristimo Teorem 3.8. Što se tiče prve pretpostavke u Teoremu 3.8 vrijedi da su 2^X i $C(X)$ apsolutni retrakt po Teoremu 3.16.

Provjerit ćemo drugu pretpostavku u Teoremu 3.8 za 2^X, a onda i za $C(X)$.

U tu svrhu, po Teoremu 3.11 pretpostavimo da je d konveksna metrika za X.

Neka je $\varepsilon > 0$. Po Teoremu 3.8 moramo pokazati da postoji Z-preslikavanje iz 2^X u 2^X koje je unutar ε okoline identitete na 2^X. Definirajmo $\Phi_\varepsilon : 2^X \to 2^X$ na sljedeći način

$$\Phi_\varepsilon(A) = C_d(\varepsilon, A), \text{ za svaki } A \in 2^X$$

Po Propoziciji 3.13, Φ_ε je neprekidna. Očito je Φ_ε od identitete na 2^X udaljena najviše za ε (s obzirom na H_d). Konačno, pokažimo da je Φ_ε

Z-preslikavanje. Budući da je X kompakt, postoji konačno mnogo točaka $p_1, \ldots, p_n$ u X takvih da vrijedi

$$X = \cup_{i=1}^{n} C_d \left(\varepsilon/2, \{p_i\}\right).$$

Neka je $K_i = C_d \left(\varepsilon/2, \{p_i\}\right)$, za svaki $i = 1, \ldots, n$. Po prvom dijelu Teorema 3.18, $2^X_{K_i}$ je Z-skup u 2^X, za svaki i. Dakle, po Propoziciji 3.6 $\cup_{i=1}^{n} 2^X_{K_i}$ je Z-skup u 2^X. Dalje, za svaki $A \in 2^X$ postoji j takav da vrijedi $\Phi_\varepsilon (A) \in 2^X_{K_j}$. Naime, budući da je $X = \cup_{i=1}^{n} C_d \left(\varepsilon/2, \{p_i\}\right)$, postoji j takav da je $A \cap C_d \left(\varepsilon/2, \{p_j\}\right) \neq \varnothing$. Budući da je $diam C_d \left(\varepsilon/2, \{p_j\}\right) \leq \varepsilon$ vrijedi da je $C_d \left(\varepsilon/2, \{p_j\}\right) \subseteq C_d (\varepsilon, A)$ odnosno da je $C_d (\varepsilon, A) = \Phi_\varepsilon (A) \in 2^X_{K_j}$. Drugim riječima,

$$\Phi_\varepsilon \left(2^X\right) \subseteq \cup_{i=1}^{n} 2^X_{K_i}.$$

Dakle, budući da je zatvoren podskup Z-skupa Z-skup, $\Phi_\varepsilon \left(2^X\right)$ je Z-skup u 2^X. Dakle, dokazali smo da je Φ_ε Z-preslikavanje.
Iz Teorema 3.8 slijedi da je 2^X Hilbertov kvadar. Time smo dokazali (i).

(ii) : Pretpostavimo da u X nema slobodnih lukova. Da bismo dokazali da $C(X)$ zadovoljava drugu pretpostavku u Teoremu 3.8, koristimo se dokazom za 2^X. Dakle, neka je Φ_ε definirana kao u dokazu od (i) i neka je $\varphi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon | C(X)$. Po Propoziciji 3.14, φ_ε preslikava $C(X)$ u $C(X)$. Iz svojstava od Φ_ε, slijedi da je φ_ε neprekidna i da je u ε okolini od identitete na $C(X)$. Da dokažemo da je φ_ε Z-preslikavanje, neka je K_i definiran kao gore za svaki $i = 1, \ldots, n$. Dalje, po drugom dijelu Teorema 3.18, $C_{K_i}(X)$ je Z-skup u $C(X)$ za svaki i. Nadalje, prilagodimo li dokaz od (i), slijedi da je φ_ε Z-preslikavanje. Dakle, po Teoremu 3.8, $C(X)$ je Hilbertov kvadar. ■

Poglavlje 4

Lukovi u hiperprostorima

Istraživanje lukova u hiperprostoru je najvažnija zadaća u općoj teoriji o hiperprostorima. U ovom poglavlju ćemo sistematski obraditi strukturu luka u 2^X i $C(X)$ kada je X kompaktum. Također ćemo obraditi neke povezane teme kao što su prostori segmenata.

Poglavlje započinjemo uvodnim odjeljkom o kvazikomponentama, a zatim odjeljkom o Whitneyjevim preslikavanjima. Materijal iz ova dva odjeljka ćemo koristiti kroz čitavo poglavlje.

4.1 Uvod: Separacija, kvazikomponente

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za dva podskupa, E i F, od X kažemo da su *međusobno separirani u* X ako vrijedi

$$\overline{E} \cap F = \varnothing = E \cap \overline{F}.$$

Primijetimo da međusobna separiranost ovisi samo o relativnoj topologiji na $E \cup F$. Dakle, može se jednostavno reći da su E i F međusobno separirani (bez naglašavanja u kojem prostoru).

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $Y \subseteq X$. Tada pišemo $Y = E|F$ ako je $Y = E \cup F$, gdje su E i F neprazni i međusobno separirani. Dakle, slijedi da Y nije povezan.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i neka su K, L i B podskupovi od X. Kažemo da su K i L *separirani skupom* B ako vrijedi

$$X \backslash B = E|F, \; K \subseteq E \text{ i } L \subseteq F.$$

Ako su K i L separirani skupom $B = \varnothing$, onda samo kažemo da su K i L separirani u X. Ako je bilo koji od skupova K, L ili B jednotočkovni, označimo ga na primjer sa $\{x\}$, onda radije koristimo oznaku x u označavanju i terminologiji.
Ako su skupovi K i L separirani, onda su očito i međusobno separirani. Obrat ne vrijedi.
Naime, neka je $X = [0,1]$, $K, L \subseteq [0,1]$, $K = (0,m)$ i $L = (n,1)$, $0 \leq m < n \leq 1$. $\overline{K} = [0,m]$ i $\overline{L} = [n,1]$. Vrijedi $\overline{K} \cap L = \varnothing = K \cap \overline{L}$. Dakle, K i L su međusobno separirani, a budući da je X povezan, ne postoje E i F takvi da je $Y = E|F$.

Propozicija 4.1 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i neka su K, L i B podskupovi od X. Tada su K i L separirani u X s B ako i samo ako postoji neprazan podskup G od $X \backslash B$ takav da je G otvoreno-zatvoren u $X \backslash B$, $K \subseteq G$ i $G \cap L = \varnothing$.*

Dokaz. Nužnost je očita. Dovoljno je staviti $G = E$.
Naime,

$$\begin{aligned} \overline{E} \cap (X \backslash B) &= \overline{E} \cap (E \cup F) = \left(\overline{E} \cap E\right) \cup \left(\overline{E} \cap F\right) = E, \\ \overline{F} \cap (X \backslash B) &= F. \end{aligned}$$

Dakle, E i F su zatvoreni u $X \backslash B$ i $E \cap F = \varnothing$ pa je E otvoreno-zatvoren u $X \backslash B$, $K \subseteq E$ i $E \cap L = \varnothing$.
Obratno, pretpostavimo da postoji G s traženim svojstvima. Tvrdimo da je $X \backslash B = G| \left((X \backslash B) \backslash G\right), K \subseteq G, L \subseteq (X \backslash B) \backslash G$.

Naime, $G \cup ((X \backslash B) \backslash G) = X \backslash B$. Dalje, vrijedi

$$\begin{aligned}
\overline{G} \cap ((X \backslash B) \backslash G) &= G \cap ((X \backslash B) \backslash G) = \varnothing \text{ i} \\
G \cap \overline{((X \backslash B) \backslash G)} &= G \cap \overline{(X \backslash (B \cup G))} = G \cap (X \backslash Int\,(B \cup G)) = \\
&= G \cap (X \backslash (IntB \cup IntG)) = G \cap (X \backslash (IntB \cup G)) = \\
&= G \cap ((X \backslash IntB) \backslash G) = \varnothing.
\end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana. ■

Lema 4.2 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $p \in X$ i C neprazan, kompaktan podksup od X. Ako su p i svaka točka iz C separirani u X, onda su p i C separirani u X.*

Dokaz. Za svaki $c \in C$ postoji skup G_c, otvoreno-zatvoren u X, takav da je $c \in G_c$ i $p \notin G_c$ (po Propoziciji 4.1). Budući da je C kompaktan, sadržan je u uniji G od konačno mnogo skupova G_c. Očito je G otvoreno-zatvoren u X i $p \notin G$. Dakle, budući da je po Propoziciji 4.1 $C \subseteq G$, p i C su separirani u X. ■

Propozicija 4.3 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, B i C neprazni kompaktni podskupovi od X. Ako su sve točke iz B i sve točke iz C separirane u X, onda su B i C separirani u X.*

Dokaz. Po Lemi 4.2, B i svaka točka iz C su separirani u X. Dakle, ponovimo li dokaz od Leme 4.2 (p zamijenimo s B), slijedi da su B i C separirani u X. ■

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i neka je $A \subseteq X$. Granica skupa A u X je skup

$$FrA = ClA \cap Cl\,(X \backslash A)\,.$$

Propozicija 4.4 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $A \subseteq X$ i $p \in A$. Ako su p i FrA separirani u X, onda su p i $X \backslash A$ separirani u X.*

Dokaz. Po Propoziciji 4.1 postoji otvoreno-zatvoren skup G u X takav da je $p \in G$ i $G \cap FrA = \varnothing$. Skup $G \cap A$ je otvoreno-zatvoren u X. Naime kako je $G \cap FrA = \varnothing$ slijedi

$$G \cap A = G \cap ClA \text{ i } G \cap A = G \cap IntA,$$

a budući da je G otvoreno-zatvoren u X, isto slijedi i za $G \cap A$. Također, $p \in G \cap A$, a $G \cap A$ i $X \backslash A$ su disjunktni pa iz Propozicije 4.1 slijedi da su p i $X \backslash A$ separirani u X. ■

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i neka je $p \in X$. *Komponenta od* p *u* X je skup koji se sastoji od svih točaka, $x \in X$, takvih da p i x leže u istom povezanom podskupu od X. Drugim riječima, komponenta od p u X je unija svih povezanih podskupa od X koji sadrže p. *Kvazikomponenta od* p *u* X je skup svih točaka, $x \in X$, takvih da p i x nisu separirani u X. Drugim riječima, kvazikomponenta od p u X je presjek svih skupova otvoreno-zatvorenih u X koji sadrže p.
Kada kažemo komponenta od X i kvazikomponenta od , mislimo (redom) na komponentu i kvazikomponentu neke točke u X.

Lema 4.5 *Svaka kvazikomponenta prostora X je zatvorena u X.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz činjenice da je svaka kvazikomponenta od X presjek skupova otvoreno-zatvorenih u X. ■

Lema 4.6 *Svaka kvazikomponenta prostora X je unija nekih komponenti od X.*

Dokaz. Neka je Q kvazikomponenta točke p u X. Neka je $x \in Q$ i C komponenta od x u X. Neka je G otvoreno-zatvoren u X takav da je $p \in G$. Tada po definiciji kvazikomponente vrijedi $G \supseteq Q$. Dakle, $G \cap C \neq \varnothing$. Budući da je $G \cap C$ otvoreno-zatvoren u C, a C je povezan, vrijedi da je $G \cap C = C$, odnosno $G \supseteq C$. Dakle, budući da je Q presjek svih skupova otvoreno-zatvorenih u X koji sadrže p, slijedi da je $Q \supseteq C$. ■

Teorem 4.7 *U kompaktnom Hausdorffovom prostoru, komponente i kvazikomponente se podudaraju.*

Dokaz. Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor. Po Lemi 4.6 dovoljno je dokazati da je svaka kvazikomponenta povezana. Neka je Q kvazikomponenta u X. Pretpostavimo da Q nije povezana u X, odnosno da je $Q = E|F$. Iz Leme 4.5 slijedi da su E i F zatvoreni u X. Dakle, budući da je X normalan prostor, postoji otvoreni podskup U od X takav da vrijedi

(i) $\quad E \subseteq U$ i $F \cap \overline{U} = \varnothing$

Nadalje, budući da je U otvoren u X, vrijedi $FrU = \overline{U} \backslash U$. Dakle, kako je $Q = E \cup F$, iz (i) slijedi

(ii) $\quad Q \cap FrU = \varnothing$.

Neka je $p \in E$. Tada, budući da je $p \in Q$, iz (ii) slijedi

(iii) $\quad p$ i svaka točka iz FrU su separirani u X.

Iskoristit ćemo Lemu 4.2 da dokažemo da su p i FrU separirani u X. U tu svrhu ćemo dokazati tvrdnje (iv) i (v):

(iv) $\quad FrU \neq \varnothing$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $FrU = \varnothing$. Tada bi skup U bio otvoreno-zatvoren u X. Međutim, budući da je $U \cap Q \neq \varnothing$ i $U \not\supseteq Q$ (po (i)), došli smo do kontradikcije i time dokazali (iv).

Budući da je X kompaktan i FrU zatvorena u X, vrijedi

(v) $\quad FrU$ je kompaktan.

Sada iz $(iii) - (v)$ i Leme 4.2 slijedi da su p i FrU separirani u X. Dalje, budući da je $p \in U$ $(E \subseteq U)$, iz Propozicije 4.4 slijedi da su p i $X \backslash U$ separirani u X. Međutim, došli smo do kontradikcije, jer je $p \in Q$ i F je neprazan podskup od Q takav da je $F \subseteq X \backslash U$. Dakle, Q je povezana. ■

Propozicija 4.8 *Za svaki topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ sljedeće dvije tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) svake dvije komponente od X su separirane u X

(ii) kvazikomponente od X i komponente od X se podudaraju.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (i). Neka je Q kvazikomponenta točke $p \in X$. Pretpostavimo suprotno, tj. da Q nije komponenta. Po Lemi 4.6 je Q unija nekih komponenti pa neka su C_1 i C_2 komponente takve da je $C_1 \subseteq Q$ i $C_2 \subseteq Q$ i C_1 komponenta od p. No kako su po (i) C_1 i C_2 separirane, postoji neprazan podskup G od X takav da je G otvoreno-zatvoren u X, $C_1 \subseteq G$ i $G \cap C_2 = \varnothing$. No tada je $G \cap Q$ otvoreno-zatvoren u X, $p \in G \cap Q$ i $G \cap Q \subseteq Q$ što je kontradikcija s činjenicom da je Q kvazikomponenta od p.

Pretpostavimo da vrijedi (ii). Neka su C_1 i C_2 dvije proizvoljne komponente od X. No kako su C_1 i C_2 također i kvazikomponente od X slijedi da su otvoreno-zatvorene u X. No onda su po Propoziciji 4.1 separirane u X. Naime, C_1 je otvoreno-zatvoren skup u X takav da je $C_1 \subseteq C_1$ i $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.
■

Korolar 4.9 *Svake dvije komponente kompaktnog Hausdorffovog prostora su separirane u prostoru.*

Dokaz. Slijedi iz Teorema 4.7 i Propozicije 4.8. ■
Sada ćemo dokazati dva glavna teorema ovog odjeljka.

Teorem 4.10 *Neka je Y kompaktan Hausdorffov prostor, B i C neprazni i zatvoreni podskupovi od X. Ako ne postoji povezan podskup od Y koji siječe i B i C, onda su B i C separirani u X.*

Dokaz. Po pretpostavci ne postoji komponenta koja siječe i B i C. Dakle, po Teoremu 4.7 ne postoji kvazikomponenta koja siječe i B i C. Drugim riječima, svaka točka iz B i svaka točka iz C su separirani u Y. Dakle, po Propoziciji 4.3, B i C su separirani u Y. ■
Kontinuum je po definiciji, metrizabilan prostor. Neprazan, kompaktan, povezan Hausdorffov prostor zovemo Hausdorffov kontinuum.

Lema 4.11 *Ako je $(X, \mathcal{T})$ povezan topološki prostor i A neprazan, pravi podskup od X, onda je $FrA \neq \varnothing$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. Neka je $FrA = \varnothing$. No onda slijedi da je $ClA \cap Cl\,(X \backslash A) = \varnothing$, a odatle da je $ClA \cap (X \backslash A) = \varnothing$ i $A \cap Cl\,(X \backslash A)$. Dakle, skupovi A i $X \backslash A$ su međusobno separirani, $A \cup (X \backslash A) = X$ pa je $X = A|\,(X \backslash A)$, a odatle slijedi da nije povezan čime smo došli do kontradikcije. ■

Teorem 4.12 *Neka je X Hausdorffov kontinuum, U neprazan, otvoren, pravi podskup od X. Ako je K komponenta od $\overline{U}$, onda je*

$$K \cap FrU \neq \varnothing, \text{ odnosno, } K \cap (X \backslash U) \neq \varnothing.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $K \cap FrU = \varnothing$. Tada, budući da je K najveći povezan podskup od $\overline{U}$, slijedi da ne postoji povezan podskup od $\overline{U}$ takav da siječe i K i FrU. Također, primijetimo da su K i FrU zatvoreni podskupovi od $\overline{U}$, $K \neq \varnothing$ i $FrU \neq \varnothing$ (vrijedi po Lemi 4.11). Dakle, iz Teorema 4.10 slijedi da su K i FrU separirani u $\overline{U}$. Drugim riječima,

$$\overline{U} = E|F, \; K \subseteq E \text{ i } FrU \subseteq F.$$

Pokažimo da vrijedi

$$X = E|\,(F \cup (X \backslash U)).$$

Naime vrijedi:

(*i*) $E \cup F \cup (X \backslash U) = \overline{U} \cup (X \backslash U) = X$

(*ii*) $\overline{E} \cap (F \cup (X \backslash U)) = \left(\overline{E} \cap F\right) \cup \left(\overline{E} \cap (X \backslash U)\right) = \overline{E} \cap (X \backslash U) = \varnothing$

(*iii*) $E \cap \overline{F \cup (X \backslash U)} = E \cap \left(\overline{F} \cap \overline{X \backslash U}\right) = \left(E \cap \overline{F}\right) \cup \left(E \cap \overline{X \backslash U}\right) =$
$= E \cap \overline{X \backslash U} = \varnothing.$

S ovime smo došli u kontradikciju s činjenicom da je X povezan. Dakle, $K \cap FrU \neq \varnothing$. ■

Pokažimo dvije jednostavne primjene dvaju prethodnih teorema. Prva primjena se se odnosi na vezu između nul-dimenzionalnih prostora i potpuno nepovezanih prostora. Za topološki prostor Y kažemo da je nul-dimenzionalan, pišemo $\dim Y = 0$, ako je $Y \neq \varnothing$ i ako postoji baza topologije od Y takva da je svaki član baze otvoreno-zatvoren u Y. Za topološki prostor X kažemo

da je *potpuno nepovezan* ako je $X \neq \emptyset$ i ako su povezani podskupovi od X najviše jednotočkovni (odnosno da svaka komponenta od X sadrži najviše jednu točku).
Dokažimo sljedeću primjenu Teorema 4.10.

Teorem 4.13 *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor. Tada je* $\dim X = 0$ *ako i samo ako je X potpuno nepovezan.*

Dokaz. Neka je $\dim X = 0$ (dakle, $X \neq \emptyset$). Pretpostavimo suprotno, odnosno da X nije potpuno nepovezan. Tada, budući da je $X \neq \emptyset$, postoji povezan podskup C od X takav da C sadrži najmanje dvije točke, označimo ih s p i q. Budući da je $\dim X = 0$ i X je T_1-prostor, postoji okolina N točke p, otvoreno-zatvorena u X takva da $q \notin N$. $N \cap C$ je neprazan, pravi, otvoreno-zatvoren podskup od C. Dakle, došli smo u kontradikciju s činjenicom da je C povezan. Dakle, X je potpuno nepovezan.

Dokažimo sada obrat. Neka je X potpuno nepovezan. Neka je $p \in X$ i neka je U otvorena okolina od p u X. Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je $U \neq X$. $\{p\}$ i $X \backslash U$ su neprazni, zatvoreni podskupovi od X. Također, budući da je X potpuno nepovezan, ne postoji povezan podskup od X koji siječe i $\{p\}$ i $X \backslash U$. Dakle, po Teoremu 4.10 vrijedi da su p i $X \backslash U$ separirani u X. Dalje, po Propoziciji 4.1 postoji skup G, otvoreno-zatvoren u X, takav da je $p \in G$ i $G \subseteq U$. Budući da je $X \neq \emptyset$, dokazali smo da je $\dim X = 0$. ■
Sljedeći teorem je važan rezultat o strukturi kontinuuma i jednostavna je posljedica Teorema 4.12.

Teorem 4.14 *Neka je X nedegeneriran Hausdorffov kontinuum. Tada X sadrži nedegeneriran, pravi Hausdorffov podkontinuum. Dalje, neka je A pravi Hausdorffov podkontinuum od X i neka je U otvoreni podskup od X takav da je $A \subseteq U$. Tada postoji Hausdorffov podkontinuum B od U takav da je $B \supseteq A$ i $B \neq A$.*

Dokaz. Prvo dokažimo drugi dio teorema. Dakle, pretpostavimo da A i U zadovoljavaju uvjete drugog dijela teorema. Tada, budući da je X normalan prostor, postoji otvoren podskup V od X takav da je $A \subseteq V$, $\overline{V} \subseteq U$ i $V \neq X$. Neka je B komponenta od $\overline{V}$ koja sadrži A (B postoji jer je A povezan podskup od $\overline{V}$). Po Teoremu 4.12 vrijedi

$$B \cap (X \backslash V) \neq \varnothing$$

pa, budući da je $A \subseteq V$, slijedi $B \neq A$. Primijetimo da je $B \subseteq U$, budući da je $\overline{V} \subseteq U$. B je zatvoren podskup kompakta, pa je kompaktan, komponenta je od $\overline{V}$ pa je povezan, a odatle slijedi da je Hausdorffov podkontinuum od U.

Sada ćemo pokazati kako prvi dio teorema slijedi iz drugog dijela. Neka je $p \in X$ i neka je U pravi otvoreni podskup od X takav da je $p \in U$. Tada po drugom dijelu teorema ($A = \{p\}$), postoji Hausdorffov podkontinuum B od U takav da je $p \in B$ i $B \neq \{p\}$. Očito je B pravi, nedegeneriran Hausdorffov podkontinuum od X. ■

4.2 Whitneyjeva preslikavanja

Whitneyjeva preslikavanja su usko povezana sa strukturom lukova u hiperprostorima. Sljedeći odjeljak posvećujemo konstrukciji Whitneyjevih preslikavanja za proizvoljni hiperprostor i time dokazujemo da Whitneyjeva preslikavanja uvijek postoje.

Definicija 4.15 *Neka je X kompaktum i $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Preslikavanje $w : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ naziva se Whitneyjevim preslikavanjem ako zadovoljava sljedeća dva uvjeta:*

(i) $\forall A,\ B \in \mathcal{H}$ sa svojstvom $A \subseteq B$ i $A \neq B$ vrijedi $w(A) < w(B)$,

(ii) $w(A) = 0$ ako i samo ako je $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$.

Neka je X kompaktum s metrikom d. *Dijametar preslikavanje s obzirom na d* je funkcija $diam_d : 2^X \to [0, \infty)$ koja je definirana na sljedeći način: za svaki $A \in 2^X$,

$$diam_d(A) = \sup\{d(x, y) : x,\ y \in A\}.$$

Ako je na $[0,1]$ definirana standardna euklidska metrika d, onda je $diam_d : C(X) \to [0,\infty)$ Whitneyjevo preslikavanje. S druge strane, ako je $X = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ i d_2 euklidska metrika na X onda $diam_{d_2} : S^1 \to [0,\infty)$ nije Whitneyjevo preslikavanje. Naime, ako je A "gornja polukružnica" tj. $A = \{(x,y) \in S^1 : y \geq 0\}$ i $B = A \cup B'$, gdje je $B' = \{(x,y) \in S^1 : x \leq 0,\ y \leq 0\}$, onda je $A \subseteq B, A \neq B$, ali $diam_{d_2} A = diam_{d_2} B = 1$.

Lema 4.16 *Neka je X kompaktum s metrikom d. Tada je dijametar preslikavanje $diam_d : 2^X \to [0,\infty)$ neprekidno.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka su $A,\ B \in 2^X$ takvi da je $H_d(A,B) < \varepsilon$. Budući da je A kompaktan, postoje $a_1,\ a_2 \in A$ takvi da je

$$diam_d(A) = d(a_1,a_2).$$

Budući da su $a_1,\ a_2 \in A$ i $A \subseteq N_d(\varepsilon,B)$, postoji $b_1,\ b_2 \in B$ takvi da je $d(a_1,b_1) < \varepsilon$ i $d(a_2,b_2) < \varepsilon$. Dakle,

$$d(a_1,a_2) < d(a_1,b_1) + d(b_1,b_2) + d(b_2,a_2) < d(b_1,b_2) + 2\varepsilon.$$

Odatle slijedi

(i) $\quad diam_d(A) < d(b_1,b_2) + 2\varepsilon \leq diam_d(B) + 2\varepsilon.$

Analogno pokažemo da vrijedi

(ii) $\quad diam_d(B) < diam_d(A) + 2\varepsilon.$

Iz (i) i (ii) slijedi $|diam_d(A) - diam_d(B)| < 2\varepsilon$. ■

Lema 4.17 *Neka su X i Y kompaktumi, $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Neka je $f^* : 2^X \to 2^Y$ definirana na sljedeći način:*

$$f^*(A) = f[A],\ \forall A \in 2^X.$$

Tada je f^* neprekidna.

Dokaz. Neka su $W_1,\ldots,W_n$ otvoreni podskupovi od Y. Tada, koristeći činjenicu da je f zatvoreno preslikavanje vrijedi sljedeće:

$$(f^*)^{-1}(\langle W_1,\ldots,W_n\rangle) = \left\langle f^{-1}(W_1),\ldots,h^{-1}(W_n)\right\rangle.$$

Sada, budući da je f neprekidno, iz Teorema 1.2 slijedi da je f^* neprekidno. ■

Teorem 4.18 *Neka je X kompaktum i $\mathcal{H}$ proizvoljni hiperprostor od X. Tada postoji Whitneyjevo preslikavanje $w : \mathcal{H} \to [0, \infty)$.*

Dokaz. Uočimo slijedeće: Ako je $w : 2^X \to [0, \infty)$ Whitneyjevo preslikavanje i $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, onda je restrikcija $w|\mathcal{H} : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. Dakle, dovoljno je pokazati da postoji Whitneyjevo preslikavanje na 2^X.

Neka je d metrika na X. Neka je $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$ prebrojiv i gust podskup od X. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $f_n : X \to [0, 1]$ na sljedeći način:

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + d(z_n, x)}, \ \forall x \in X.$$

Dalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $w_n : 2^X \to [0, 1]$ na sljedeći način:

$$w_n(A) = diam(f_n[A]), \ \forall A \in 2^X.$$

Konačno definirajmo $w : 2^X \to [0, 1]$:

$$w(A) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} w_n(A), \ \forall A \in 2^X.$$

Za svaki n su funkcije w_n neprekidne i to po Lemama 4.16 i 4.17 ($w_n = diam_\rho \circ f_n^*$, gdje je ρ standardna metrika na $[0, 1]$) pa slijedi da je i funkcija w neprekidna.

Sada pokažimo da je w Whitneyjevo preslikavanje.

Neka su $A,\ B \in 2^X$ takvi da je $A \subseteq B$ i $A \neq B$. Budući da je $A \subseteq B$, očito vrijedi $f_n(A) \subseteq f_n(B)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dalje, vrijedi $w_n(A) \leq w_n(B)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, da pokažemo $w(A) < w(B)$, dovoljno je pokazati sljedeće:

$$w_i(A) < w_i(B), \text{ za neke } i \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dokažimo (1).

Neka je $p \in B \backslash A$ i neka je $r = \frac{1}{2} d(p, A)$. Primijetimo da je $r > 0$, jer je $p \notin A$ i A zatvoren u X. Budući da je Z gust na X, postoji $z_i \in Z$ takav da

je $d(p, z_i) < r$. Stoga vrijedi
(i) $\quad f_i(p) = \frac{1}{1+d(z_i,p)} > \frac{1}{1+r}$.
Kako je $d(z_i, A) > r$, vrijedi
(ii) $\quad f_i(a) = \frac{1}{1+d(z_i,a)} < \frac{1}{1+r}$, za svaki $a \in A$.
Iz (i) i (ii) slijedi
(iii) $\quad \sup f_i[A] \leq \frac{1}{1+r} < f_i(p)$.
Sada, budući da je $p \in B$, iz (iii) slijedi
(iv) $\quad \sup f_i[A] < \sup f_i[B]$.
Sada izravno iz (iv) i (v) slijedi $w_i(A) < w_i(B)$. Ovime smo dokazali (1) i time dokazali da funkcija w zadovoljava svojstvo (i) za Whitneyjevo preslikavanje. Nadalje, budući da je $f_i[A] \subseteq f_i[B]$ vrijedi
(v) $\inf f_i[B] \leq \inf f_i[A]$

Na kraju, pokažimo da w zadovoljava i svojstvo (ii). Neka je $A \in 2^X$. Prvo, pretpostavimo da je $A \in F_1(X)$ i neka je $A = \{x\}$. Sada, za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$w_n(A) = diam(f_n[\{x\}]) = 0.$$

Dakle, $w(A) = 0$. Sada pretpostavimo da $A \notin F_1(X)$. Za neki $k \in \mathbb{N}$, $f_k(A)$ je nedegeneriran, budući da je Z gust u X. Dakle $w_k(A) > 0$, a iz toga slijedi $w(A) > 0$, što smo i trebali pokazati. ■

4.3 Uređeni lukovi i povezanost putovima u 2^X i $C(X)$

Na svakom luku se se može definirati potpuni uređaj, a na svakom hiperprostoru parcijalni uređaj na prirodan način. Uređeni luk u hiperprostoru $\mathcal{H}$ je luk $\alpha \subseteq \mathcal{H}$ takav da se parcijalni uređaj na $\mathcal{H}$ slaže na α s potpunim uređajem na α.

Prisjetimo se da familiju $\mathcal{N}$ skupova zovemo gnijezdo, ako za svaki $N_1,\ N_2 \in \mathcal{N}$ vrijedi $N_1 \subseteq N_2$ ili $N_2 \subseteq N_1$.

Definicija 4.19 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ i α luk u $\mathcal{H}$. Kažemo da je α uređeni luk, ako je α gnijezdo elemenata iz $\mathcal{H}$.*

Lema 4.20 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ i $w : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ Whitneyjevo preslikavanje. Ako je $\mathcal{N}$ kompaktno gnijezdo u $\mathcal{H}$, onda je $w|\mathcal{N} : \mathcal{N} \to w(\mathcal{N})$ homeomorfizam.*

Dokaz. w je preslikavanje pa je i $w|\mathcal{N}$ preslikavanje. Dakle, preostaje nam dokazati da je $w|\mathcal{N}$ injekcija. Neka su $A, B \in \mathcal{N}$ i $A \neq B$. Budući da je $\mathcal{N}$ gnijezdo, vrijedi $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A$. Pretpostavimo da je $A \subseteq B$. No kako je $A \neq B$, slijedi $w(A) < w(B)$, a onda i $w(A) \neq w(B), A, B \in \mathcal{N}$. Dakle, $w|\mathcal{N}$ je injekcija, a odatle slijedi da je i homeomorfizam. ■

Gnijezdo od A_0 do A_1 je gnijezdo $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$ takvo da je A_0, $A_1 \in \mathcal{N}$ i $A_0 \subseteq N \subseteq A_1$ za svaki $N \in \mathcal{N}$. Kažemo da je $\mathcal{N}$ maksimalno gnijezdo od A_0 do A_1 ako za svako gnijezdo $\mathcal{M}$ od A_0 do A_1 vrijedi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

Lema 4.21 *Neka je X kompaktum i neka su A_0, $A_1 \in C(X)$ takvi da je $A_0 \subseteq A_1$. Ako je $\mathcal{M}$ maksimalno gnijezdo u $C(X)$ od A_0 do A_1, onda je $\mathcal{M}$ kompaktan.*

Dokaz. Po Korolaru 1.27 je $C(X)$ kompaktan, pa je dovoljno dokazati da je $\mathcal{M}$ zatvoren u $C(X)$. Neka je $M_i \in \mathcal{M}$, $i \in \mathbb{N}$, takav da $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema nekom $A \in C(X)$. Pokažimo da je $A \in \mathcal{M}$.

Prvo pokažimo da je $\mathcal{M} \cup \{A\}$ gnijezdo. Neka je $M \in \mathcal{M}$. Budući da je $\mathcal{M}$ gnijezdo, $M_i \supseteq M$ za beskonačno mnogo i ili $M_i \subseteq M$ za beskonačno mnogo i. U prvom slučaju vrijedi $A \supseteq M$ (po Propoziciji 1.5 skup $\mathcal{M}_M$ je zatvoren pa je A kao limes element tog skupa). U drugom slučaju, $A \subseteq M$, budući da je $C(M)$ po Korolaru 1.27 kompaktan. Dakle, budući da je $\mathcal{M}$ gnijezdo, slijedi da je $\mathcal{M} \cup \{A\}$ gnijezdo.
Dalje, budući da je $A_0 \subseteq M_i \subseteq A_1$ za svaki i, vrijedi $A_0 \subseteq A \subseteq A_1$.

Dakle, pokazali smo da je $\mathcal{M} \cup \{A\}$ gnijezdo u $C(X)$ od A_0 do A_1. Budući da je $\mathcal{M}$ maksimalan, vrijedi $A \in \mathcal{M}$. ■

Lema 4.22 *Neka je X kompaktum i $A_0,\ A_1 \in C(X)$ takvi da je $A_0 \subseteq A_1$ i $A_0 \neq A_1$. Ako je $\mathcal{M}$ maksimalno gnijezdo u $C(X)$ od A_0 do A_1, onda je $\mathcal{M}$ luk od A_0 do A_1.*

Dokaz. Po Teoremu 4.18 postoji Whitneyjevo preslikavanje $w : C(X) \to [0, \infty)$. Neka je $t_0 = w(A_0)$ i neka je $t_1 = w(A_1)$. Budući da je $\mathcal{M}$ gnijezdo od A_0 do A_1 i $A_0 \neq A_1$, slijedi $t_0 < t_1$ i $w[\mathcal{M}] \subseteq [t_0, t_1]$. Također, iz Leme 4.21 slijedi da je $\mathcal{M}$ kompaktan. Dakle, da bismo dokazali da je $\mathcal{M}$ luk od A_0 do A_1, po Lemi 4.20 dovoljno je dokazati da je $w[\mathcal{M}] = [t_0, t_1]$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $w[\mathcal{M}] \neq [t_0, t_1]$. Budući da je $t_0, t_1 \in w[\mathcal{M}]$ i $w[\mathcal{M}]$ kompaktan podskup od $[t_0, t_1]$, postoje $s_0, s_1 \in w[\mathcal{M}]$ takvi da je $s_0 < s_1$ i $w[\mathcal{M}] \cap (s_0, s_1) = \varnothing$. Drugim riječima, otvoreni interval (s_0, s_1) je komponenta od $[t_0, t_1] \backslash w[\mathcal{M}]$. Neka su $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ takvi da je $w(M_0) = s_0$ i $w(M_1) = s_1$. Budući da je $s_0 < s_1$ i $\mathcal{M}$ je gnijezdo, slijedi $M_0 \subseteq M_1$ i $M_0 \neq M_1$. Kako je $\mathcal{M} \subseteq C(X)$, M_0 je pravi podkontinuum kontinuuma M_1, pa po drugom dijelu Propozicije 4.14, postoji pravi podkontinuum B od M_1 takav da je $B \supseteq M_0$ i $B \neq M_0$.

Pokažimo da je $\mathcal{M} \cup \{B\}$ gnijezdo. Neka je $M \in \mathcal{M}$. Budući da je $w[\mathcal{M}] \cap (s_0, s_1) = \varnothing$, vrijedi $w(M) \leq s_0$ ili $w(M) \geq s_1$. Ako je $w(M) \leq s_0$, onda vrijedi $M \subseteq M_0$. Ako je $w(M) \geq s_1$, onda analogno vrijedi $M \supseteq M_1$ Dakle, budući da je $M_0 \subseteq B \subseteq M_1$, vrijedi $M \subseteq B$ ili $M \supseteq B$, dakle $\mathcal{M} \cup \{B\}$ je gnijezdo.

Nadalje, $\mathcal{M} \cup \{B\}$ je gnijezdo u $C(X)$ od A_0 do A_1 (budući da je $B \in C(X)$ i budući da je $A_0 \subseteq M_0 \subseteq B \subseteq M_1 \subseteq A_1$). Sada zbog maksimalnosti od $\mathcal{M}$ vrijedi $B \in \mathcal{M}$. Međutim, također vrijedi $B \notin \mathcal{M}$ jer je $w[\mathcal{M}] \cap (s_0, s_1) = \varnothing$ pa mora biti $s_0 < w(B) < s_1$.
Ovime je dobivena kontradikcija pa mora biti $w[\mathcal{M}] = [t_0, t_1]$. ■

Lema 4.23 (Zornova lema) *Neka je X parcijalno uređen skup u kojem svaki lanac ima gornju među. Tada X ima barem jedan maksimalni element.*

Lema 4.24 *Neka je X kompaktum i $A_0, A_1 \in C(X)$ takvi da je $A_0 \subseteq A_1$. Tada postoji maksimalno gnijezdo u $C(X)$ od A_0 do A_1.*

Dokaz. Za svako gnijezdo $\mathcal{N} \subseteq C(X)$ od A_0 do A_1, A_1 je gornja međa. Tvrdnja sada slijedi iz Leme 4.23. ∎

Sljedeći teorem je važna posljedica dvaju prethodnih lema.

Teorem 4.25 *Neka je X kompaktum i A_0, $A_1 \in C(X)$ takvi da je $A_0 \subseteq A_1$ i $A_0 \neq A_1$. Tada postoji uređeni luk u $C(X)$ od A_0 do A_1.*

Dokaz. Po Lemi 4.24 postoji maksimalno gnijezdo $\mathcal{M}$ u $C(X)$ od A_0 do A_1. Po Lemi 4.22, $\mathcal{M}$ je luk od A_0 do A_1. Dakle, $\mathcal{M}$ je uređeni luk u $C(X)$ od A_0 do A_1. ∎

Lema 4.26 *Neka je X kompaktum i $\mathcal{A}$ nedegenerirani podkontinuum od 2^X. Ako je $\mathcal{A}$ gnijezdo, onda je $\mathcal{A}$ uređeni luk.*

Dokaz. Po Teoremu 4.18 postoji Whitneyjevo preslikavanje $w : 2^X \to [0, \infty)$. Po Lemi 4.20 slijedi da je $w|\mathcal{A}$ homeomorfizam iz $\mathcal{A}$ u nedegenerirani, zatvoreni i omeđeni interval. Dakle, $\mathcal{A}$ je luk i gnijezdo pa je i uređeni luk. ∎

Navodimo sada elementarne leme nužne za dokaz Teorema 4.29

Lema 4.27 *Neka je Y prostor i $p \in Y$ proizvoljna točka.Ako za svaku točku $y \in Y \setminus \{p\}$ postoji luk u Y od y do p, onda je Y putovima povezan.*

Dokaz. Neka su $y_1, y_2 \in Y \setminus \{p\}$ proizvoljne točke. Trebamo dokazati da postoji luk od y_1 do y_2. Po pretpostavci postoji luk od y_1 do p i luk od p do y_2. Označimo ih redom s L_1 i L_2. L_1 i L_2 su lukovi pa su homeomorfni s $[0, 1]$, a onda i sa svakim segmentom u $\mathbb{R}$. Neka su $h_1 : L_1 \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ i $h_2 : L_2 \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ traženi homeomorfizmi i neka je $h_1(y_1) = 0, h_1(p) = \frac{1}{2}, h_2(p) = \left(\frac{1}{2}\right), h_2(p) = 1$. Neka je $h : L_1 \cup L_2 \to [0, 1]$ funkcija takva da je $h(y) = h_1(y), y \in L_1$ i $h(y) = h_2(y), y \in L_2$. h je traženi homeomorfizam pa je Y putovima povezan. ∎

Lema 4.28 *Unija preslikavanje $u : CL(X) \times CL(X) \to CL(X)$ definirano sa $u(A, B) = A \cup B$ za svaki $A, B \in CL(X)$, je neprekidno.*

Dokaz. Pokažimo da je $u(Cl(A,B)) = Clu(A,B)$, za svaki $A, B \subseteq CL(X)$. Dakle, neka su A, B proizvoljni podskupovi od $CL(X)$.

$$u(Cl(A,B)) = u(ClA, ClB) = ClA \cup ClB = Cl(A \cup B) = Cl(u(A,B)).$$

Dakle vrijedi da je $u(Cl(A,B)) \subseteq Cl(u(A,B))$ što znači da je u neprekidna. ■

Teorem 4.29 *Ako je X kontinuum, onda su 2^X i $C(X)$ putovima povezani.*

Dokaz. Neka je $K \in 2^X$ takav da je $K \neq X$. Neka je A_0 proizvoljna komponenta od K. Primijetimo da su $A_0, X \in C(X)$ i $A_0 \neq X$. Dalje, po Teoremu 4.25 postoji uređeni luk α u $C(X)$ od A_0 do X. Neka je $h : [0,1] \to \alpha$ homeomorfizam takav da je $h(0) = A_0$ i $h(1) = X$. Definirajmo funkciju $f : [0,1] \to 2^X$ pravilom

$$f(t) = K \cup h(t), \ t \in [0,1].$$

Primijetimo da je $f(0) = K$, $f(1) = X$. Nadalje, f je neprekidna po Propoziciji 4.28 , budući da je h neprekidna. Dakle, $f([0,1])$ je nedegenerirani podkontinuum od 2^X. Uočimo da je $f([0,1])$ gnijezdo od K do X, jer je α uređeni luk od A_0 do X i $A_0 \subseteq K$. Po Lemi 4.27, $f([0,1])$ je uređeni luk u 2^X od K do X.

Pokazali smo da za svaki $K \in 2^X$ takav da je $K \neq X$ postoji luk u 2^X od K do X. Po Lemi 4.27 da je 2^X putovima povezan.

Primjenom Teorema 4.25 za $A_1 = X$ i Leme 4.27 zaključujemo da je $C(X)$ putovima povezan. ■

Važno je primijetiti da prostor X u Teoremu 4.29 ne mora biti putovima povezan. Dapače, ne mora sadržavati nijedan luk.

U drugom dijelu Propozicije 1.12 već smo pokazali da je 2^X povezan ako je X povezan. Međutim, Teorem 4.29 je prvi rezultat iz kojeg slijedi da je $C(X)$ povezan, ako je X kontinuum.

Korolar 4.30 *Ako je X kontinuum, onda su 2^X i $C(X)$ putovima povezani kontinuumi.*

Dokaz. Hiperprostori 2^X i $C(X)$ su kompaktumi po Teoremima 1.20 i 1.25 i Korolaru 1.27. Dakle, po Teoremu 4.29, 2^X i $C(X)$ su putovima povezani kontinuumi. ■

4.4 Postojanje uređenih lukova od A_0 do A_1

Definicija 4.31 *Za uređeni luk α kažemo da je uređeni luk od A_0 do A_1 ako vrijedi $A_0 \subseteq A_1$ gdje su A_0 i A_1 rubne točke od α.*

Dakle, uređeni luk od A_0 do A_1 nije uređeni luk od A_1 do A_0 dok je, naravno, uređeni luk od A_0 do A_1 ujedno i luk od A_1 do A_0.

Neka su $A_0, A_1 \in C(X)$ takvi da je $A_0 \neq A_1$. Već znamo nužan i dovoljan uvjet za postojanje uređenog luka u $C(X)$ od A_0 do A_1: Uvjet je da vrijedi $A_0 \subseteq A_1$ (iz Teorema 4.25 i Definicije 4.31). Međutim, kada su $A_0, A_1 \in 2^X$, ovaj uvjet nije uvijek dovoljan. Na primjer, ne postoji uređeni luk u $2^{[0,1]}$ od $\{0\}$ do $\{0,1\}$.

Sljedeći nam je cilj odrediti nužan i dovoljan uvjet za postojanje uređenog luka u 2^X od A_0 do A_1.

Lema 4.32 *Neka je X kompaktum i $M_0, M_1 \in 2^X$ takvi da je $M_0 \subseteq M_1, M_0 \neq M_1$ i svaka komponenta od M_1 siječe M_0. Tada postoji $C \in 2^X$ takav da je $M_0 \subseteq C \subseteq M_1, M_0 \neq C \neq M_1$ i svaka komponenta od C siječe M_0.*

Dokaz. Budući da $M_0 \subsetneq M_1$, postoji $p \in M_1 \backslash M_0$. Neka je K_1 komponenta od M_1 koja sadrži p. Tada, po pretpostavci vrijedi, $K_1 \cap M_0 \neq \varnothing$. Budući da je K_1 komponenta od M_1 i $M_1 \supseteq M_0$, K_1 sadrži komponentu K_0 od M_0. Primijetimo da je $K_0 \subseteq K_1 \backslash \{p\}$ i da je K_0 pravi subkontinuum kontinuuma K_1. Po drugom dijelu Teorema 4.14 postoji podkontinuum B od $K_1 \backslash \{p\}$ takav da je $B \supseteq K_0$ i $B \neq K_0$. Sada, neka je

$$C = M_0 \cup B.$$

Pokažimo da C zadovaljava uvjete leme. Očito je $C \in 2^X$ i $M_0 \subseteq C \subseteq M_1$. Dokažimo da je $M_0 \neq C$. Prisjetimo se da je K_0 komponenta od M_0 i da je

B kontinuum čiji je K_0 pravi podskup. Dalje, $B \subseteq M_0$ pa slijedi $C \neq M_0$. Da je $C \neq M_1$ slijedi iz činjenice da je $p \in M_1$ i $p \notin C$.

Konačno, dokažimo da svaka komponenta od C siječe M_0. Neka je L komponenta od C. Ako je $L \cap B = \varnothing$, onda je $L \subseteq M_0$, a onda $L \cap M_0 \neq \varnothing$. Dakle, neka je $L \cap B \neq \varnothing$. Budući da je B povezan podskup od C, vrijedi $L \supseteq B$. Dalje, budući da je $B \supseteq K_0$, vrijedi $L \supseteq K_0$. Dakle, budući da je $K_0 \subseteq M_0$ i $K_0 \neq \varnothing$, opet smo dobili da je $L \cap M_0 \neq \varnothing$. ■

Definicija 4.33 *Neka je $\mathcal{C}$ familija skupova. Maksimalan član od $\mathcal{C}$ je skup $F \in \mathcal{C}$ takav da nijedan član od $\mathcal{C}$ ne sadrži F. Minimalan član od $\mathcal{C}$ je skup $E \in \mathcal{C}$ takav da E ne sadrži nijedan član od $\mathcal{C}$.*

Teorem 4.34 *Neka je X kompaktum. Ako je $\mathcal{C}$ neprazan, zatvoren podskup od 2^X, onda postoje i maksimalan i minimalan član od $\mathcal{C}$.*

Dokaz. Budući da je X metrizabilan i kompaktan, po Teoremu 1.25 slijedi da je 2^X kompaktan $\left(2^X = CL(X), \text{ jer je } X \text{ kompaktan}\right)$. Nadalje, $\mathcal{C}$ je zatvoren podskup kompaktnog skupa pa je također kompaktan. Snabdijeven Vietorisovom topologijom $\mathcal{C}$ je hiperprostor.

Nadalje, po Teoremu 4.18 postoji Whitneyevo preslikavanje w na $\mathcal{C}$. Dakle, $w : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ je preslikavanje sa kompaktnog prostora $\mathcal{C}$ pa postoje $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ takvi da je $w(A_1) \leq w(A) \leq w(A_2), \forall A \in \mathcal{C}$, tj. $A_1 \subseteq A \subseteq A_2, \forall A \in \mathcal{C}$. Dakle, A_1 je minimalan, a A_2 je maksimalan član skupa $\mathcal{C}$. ■

Teorem 4.35 *Neka X kompaktum i $A_0, A_1 \in 2^X$ takvi da je $A_0 \neq A_1$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) Postoji uređeni luk u 2^X od A_0 do A_1

(ii) $A_0 \subseteq A_1$ i svaka komponenta od A_1 siječe A_0.

Dokaz. $(i) \implies (ii)$. Neka je α uređeni luk u 2^X od A_0 do A_1. Očito je $A_0 \subseteq A_1$. Pokažimo da vrijedi i drugi dio tvrdnje (ii). Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji komponenta K od A_1 takva da je $K \cap A_0 = \varnothing$.

Tada, budući da je $A_0 \subseteq A_1$, po Teoremu 4.10 vrijedi da su K i A_0 separirani u A_1. Dakle, postoje E i F takvi da vrijedi

$$A_1 = E|F, \text{ gdje je } A_0 \subseteq E, K \subseteq F.$$

Neka je $\mathcal{E} = \{A \in \alpha : A \subseteq E\}$ i neka je $\mathcal{F} = \{A \in \alpha : A \cap F \neq \varnothing\}$. Primijetimo da $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ imaju sljedeća svojstva: $\mathcal{E} \neq \varnothing$ (budući da je $A_0 \in \mathcal{E}$), $\mathcal{F} \neq \varnothing$ (budući da je $A_1 \in \mathcal{F}$), $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} = \alpha$ (budući da za svaki $A \in \alpha, A \subseteq A_1 = E \cup F$), $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \varnothing$ (budući da je $E \cap F = \varnothing$) i $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ su zatvoreni u α (jer su E i F po Definiciji 1.1 zatvoreni u X). Dakle, α nije povezan. To je u kontradikciji s činjenicom da je α luk. Dakle, svaka komponenta od A_1 siječe A_0.

$(ii) \implies (i)$. Neka je

$$\Gamma = \{\mathcal{N} \subseteq 2^X : \mathcal{N} \text{ je kompaktno gnijezdo od } A_0 \text{ do } A_1 \text{ i za svaki } N \in \mathcal{N}, \text{ svaka komponenta u } N \text{ siječe } A_0\}$$

Tada je $\Gamma \neq \varnothing$ (budući da je $\{A_0, A_1\} \in \Gamma$ po (ii)). Također, Γ je zatvoreni podskup od 2^{2^X}. Dakle, postoji maksimalan član $\mathcal{M}$ od Γ (vrijedi po Teoremu 4.34 ako X zamijenimo s 2^X). Pokazat ćemo da je $\mathcal{M}$ uređeni luk u 2^X od A_0 do A_1 čime ćemo pokazati da vrijedi (i). Budući da je $\mathcal{M}$ gnijezdo u 2^X od A_0 do A_1, preostaje nam samo pokazati da je $\mathcal{M}$ luk.

Neka je w Whitneyjevo preslikavanje na 2^X (postoji po Teoremu 4.18) i neka je $t_0 = w(A_0)$, $t_1 = w(A_1)$. Budući da je $\mathcal{M}$ gnijezdo od A_0 do A_1, slijedi da je $t_0 < t_1$ i da je $w[\mathcal{M}] \subseteq [t_0, t_1]$. Također primijetimo da je $\mathcal{M}$ kompaktan budući da je $\mathcal{M} \in \Gamma$. Dakle, da bismo pokazali da je $\mathcal{M}$ luk, dovoljno je po Lemi 4.20 dokazati da je $w[\mathcal{M}] = [t_0, t_1]$.

Pretpostavimo da je $w[\mathcal{M}] \neq [t_0, t_1]$. Budući da su $t_0, t_1 \in w[\mathcal{M}]$ i $w[\mathcal{M}]$ kompaktan podskup od $[t_0, t_1]$, postoje $s_0, s_1 \in w[\mathcal{M}]$ takvi da je $s_0 < s_1$ i $w[\mathcal{M}] \cap (s_0, s_1) = \varnothing$. Neka su $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ takvi da je $w(M_0) = s_0$ i $w(M_1) = s_1$.

Pokažimo da M_0 i M_1 zadovoljavaju pretpostavke u Lemi 4.32. Kako je $s_0 < s_1$, očito je $M_0 \neq M_1$ i $M_1 \nsubseteq M_0$. Dakle, budući da je $\mathcal{M}$ gnijezdo, vrijedi $M_0 \subseteq M_1$. Dokažimo da je ispunjena zadnja pretpostavka u Lemi 4.32. Neka je L komponenta od M_1.Tada je $M_1 \in \mathcal{M} \in \Gamma$, $L \cap A_0 \neq \varnothing$. Također, budući da je $M_0 \in \mathcal{M} \in \Gamma$, vrijedi $A_0 \subseteq M_0$. Dakle, $L \cap M_0 \neq \varnothing$.

Sada možemo upotrijebiti Lemu 4.32 da dobijemo $C \in 2^X$ sa slijedećim svojstvima:

(1) $M_0 \subseteq C \subseteq M_1$,

(2) $M_0 \neq C \neq M_1$,

(3) svaka komponenta od C siječe M_0.

$(1), (2), (3)$ ćemo upotrijebiti da dobijemo kontradikciju, preciznije, pokazat ćemo da vrijedi $C \in \mathcal{M}$ i $C \notin \mathcal{M}$.

Pokažimo da vrijedi $C \in \mathcal{M}$. Dovoljno je pokazati $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \Gamma$. Naime, tada slijedi $C \in \mathcal{M}$, jer je $\mathcal{M}$ maksimalan član od Γ.

Budući da je $\mathcal{M} \in \Gamma$ i $C \in 2^X$, da bi dokazali da je $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \Gamma$, moramo pokazati da C ima sljedeća svojstva:

(a) $M \subseteq C$ ili $C \subseteq M$, za svaki $M \in \mathcal{M}$,

(b) $A_0 \subseteq C \subseteq A_1$,

(c) svaka komponenta od C siječe A_0.

Dokažimo (a). Neka je $M \in \mathcal{M}$. Tada je $w(M) \leq s_0$ ili $w(M) \geq s_1$. Budući da je $\mathcal{M}$ gnijezdo, slijedi $M \subseteq M_0$ ili $M \supseteq M_1$, a onda po (1) vrijedi $M \subseteq C$ ili $C \subseteq M$. Ovime smo dokazali (a).

Dokažimo (b). Prisjetimo se da su $M_0, M_1 \in \mathcal{M} \in \Gamma$. Dakle, vrijedi $A_0 \subseteq M_0$ i $M_1 \subseteq A_1$. (b) sada slijedi izravno iz (1).

Preostaje dokazati (c). Neka je Q komponenta od C. Po (3) vrijedi $Q \cap M_0 \neq \varnothing$. Budući da je Q komponenta od C i $C \supseteq M_0$, Q sadrži komponentu Q_0 od M_0. Budući da je $M_0 \in \mathcal{M} \in \Gamma$, vrijedi $Q_0 \cap A_0 \neq \varnothing$. Budući da je $Q \supseteq Q_0$, slijedi $Q \cap A_0 \neq \varnothing$, što dokazuje (c).

Pokazavši $(a) - (c)$, pokazali smo da vrijedi $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \Gamma$, a time i da je $C \in \mathcal{M}$.

Međutim, budući da je $w[\mathcal{M}] \cap (s_0, s_1) = \varnothing$ i $s_0 < w(C) < s_1$, iz $(1), (2)$ i Definicije 4.15 slijedi $C \notin \mathcal{M}$. Time smo došli u kontradikciju pa vrijedi $w[\mathcal{M}] = [t_0, t_1]$. Dakle, $\mathcal{M}$ je uređeni luk u 2^X od A_0 do A_1. $\blacksquare$

Neka je α uređeni luk u 2^X od A_0 do A_1 i neka je $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Kažemo da α *počinje u* $\mathcal{H}$, ako je $A_0 \in \mathcal{H}$. Kažemo da α *ostaje u* $\mathcal{H}$ ako je $\alpha \subseteq \mathcal{H}$.

Korolar 4.36 *Neka je X kompaktum i α uređeni luk u 2^X. Ako α počinje u $C(X)$, onda α ostaje u $C(X)$.*

Dokaz. Po pretpostavci, α je uređeni luk u 2^X od A_0 do A_1, gdje je $A_0 \in C(X)$. Neka je $B \in \alpha$ takav da je $B \neq A_0$. S β označimo podluk od α od A_0 do B. Primijetimo da je β uređeni luk i da je $A_0 \subseteq B$. Dakle, β je uređeni luk od A_0 do B. Po Teoremu 4.35 svaka komponenta od B siječe A_0. Budući da je A_0 povezan podskup od B, B sadrži samo jednu komponentu. Drugim riječima, B je povezan pa je $B \in C(X)$. Dakle, $\alpha \subseteq C(X)$. ■

Korolar 4.37 *Za svaki kontinuum X, 2^X i $C(X)$ su lokalno povezani u točki X.*

Dokaz. S d označimo metriku na X. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $A_0 \in 2^X$ takav da je $A_0 \neq X$ i $H_d(A_0, X) < \varepsilon$. Po Teoremu 4.35 postoji uređeni luk α u 2^X od A_0 do X. Ako je $A_0 \in C(X)$, onda je po Korolaru 4.36 $\alpha \subseteq C(X)$. Sada iz Teorema 1.15 izlazi $H_d(A, X) < \varepsilon$ za svaki $A \in \alpha$, jer je $H_d(A, X) < H_d(A_0, X) < \varepsilon$. ■

4.5 Kelleyjevi segmenti

Neka je X kompaktum i neka je $w : 2^X \to [0, \infty)$ Whitneyjevo preslikavanje. Neka je α uređeni luk u 2^X od A_0 do A_1. Označimo s $a_0 = w(A_0)$ i $a_1 = w(A_1)$. Tada je $w|\alpha : \alpha \to [a_0, a_1]$ homeomorfizam po Lemi 4.20. Označimo s λ linearno preslikavanje $\lambda : [0,1] \to [a_0, a_1]$ dano sa

$$\lambda(t) = (1-t)\,a_0 + t a_1,\ \ t \in [0,1].$$

Konačno, definirajmo parametrizaciju $\sigma : [0,1] \to \alpha$ pravilom

$$\sigma = (w|\alpha)^{-1} \circ \lambda.$$

Istražimo svojstva funkcije σ.
Prva dva svojstva od σ su očita. σ je homeomorfizam, $\sigma(0) = A_0$ i $\sigma(1) = A_1$.
Sljedeće svojstvo od σ je da w "linearizira" σ. Eksplicitno, $w \circ \sigma = \lambda$, tj.

$$w(\sigma(t)) = (1-t)\, w(\sigma(0)) + tw(\sigma(1)),\ t \in [0,1].$$

Nadalje, σ čuva uređaj. Naime,

$$\sigma(t_1) \subseteq \sigma(t_2) \text{ ako je } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1.$$

To svojstvo slijedi iz činjenice da λ i $w|\alpha$ čuvaju uređaj.

Definicija 4.38 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$ i $A_0, A_1 \in \mathcal{H}$. Za fukciju $\sigma : [0,1] \to \mathcal{H}$ kažemo da je segment u $\mathcal{H}$ od A_0 do A_1 s obzirom na w ako σ ima sljedeća četiri svojstva:*

(S1) σ *je neprekidna,*

(S2) $\sigma(0) = A_0$ *i* $\sigma(1) = A_1$,

(S3) $w(\sigma(t)) = (1-t)\, w(\sigma(0)) + tw(\sigma(1))$ *za svaki* $t \in [0,1]$,

(S4) $\sigma(t_1) \subseteq \sigma(t_2)$ *kada je* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$.

Do kraja odjeljka ćemo se baviti rezultatima o segmentima.

Teorem 4.39 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ i w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. Tada je svaki uređeni luk u $\mathcal{H}$ slika segmenta s obzirom na w.*

Dokaz. Dokaz slijedi iz razmatranja koja prethode Definiciji 4.38. Naime, dovoljno je zamijeniti 2^X s $\mathcal{H}$ i pretpostaviti da je w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. ■

Lema 4.40 *Svaki segment, koji nije konstanta, je homeomorfizam.*

Dokaz. Neka je X kompaktum, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ i w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. Neka je $\sigma : [0,1] \to \mathcal{H}$ segment s obzirom na w, koji nije konstanta. σ je neprekidan. Dakle, dovoljno je dokazati da je σ injekcija.

Pretpostavimo suprotno, tj. σ nije injekcija. Tada postoje $s, t \in [0,1]$ takvi da je $s \neq t$ i $\sigma(s) = \sigma(t)$. Dakle, $w(\sigma(s)) = w(\sigma(t))$. Prema svojstvu (S3) od σ vrijedi

$$(s-t)\, w(\sigma(0)) = (s-t)\, w(\sigma(1)).$$

Dakle, $w(\sigma(0)) = w(\sigma(1))$. Također, po svojstvu (S4) vrijedi $\sigma(0) \subseteq \sigma(1)$. No, po Definiciji 4.15 (i) vrijedi $\sigma(0) = \sigma(1)$. Sada, iz (S4) slijedi da je σ konstanto preslikavanje čime smo došli do kontradikcije. Dakle, σ je injekcija. ■

Teorem 4.41 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$, $\sigma : [0,1] \to \mathcal{H}$ segment od A_0 do A_1 s obzirom na w, koji nije konstanta, i $\alpha = \sigma([0,1])$. Tada je α uređeni luk od A_0 do A_1 i $\sigma = (w|\alpha)^{-1} \circ \lambda$, gdje je λ jedinstveno rastuće linearno preslikavanje iz $[0,1]$ u $w(\alpha) = [w(A_0), w(A_1)]$.*

Dokaz. Prvo pokažimo da je α uređeni luk od A_0 do A_1. Po Lemi 4.40, σ je homeomorfizam iz $[0,1]$ u α. Dakle, α je luk s rubovima $\sigma(0)$ i $\sigma(1)$. Nadalje, po (S4), α je gnijezdo, a onda je i uređeni luk. Budući da su $\sigma(0)$ i $\sigma(1)$ rubovi od α, slijedi da su te rubne točke A_0 i A_1. Također, po (S4) vrijedi $A_0 \subseteq A_1$. Dakle, α je uređeni luk od A_0 do A_1.

Konačno, pokažimo da je $\sigma = (w|\alpha)^{-1} \circ \lambda$, gdje je λ kao u pretpostavci teorema. Primijetimo λ možemo prikazati na sljedećei način:

$$\lambda(t) = (1-t)\, w(A_0) + t w(A_1) \text{ za svaki } t \in [0,1].$$

Dakle, po (S3) i (S4), vrijedi $w \circ \sigma = \lambda$. Budući da je α uređeni luk od A_0 do A_1, po Lemi 4.20 slijedi da je $w|\alpha$ bijektivno preslikavanje iz α u $[w(A_0), w(A_1)]$. Dakle, $(w|\alpha)^{-1}$ je dobro definirano na cijelom $[w(A_0), w(A_1)]$. Budući da je $w \circ \sigma = \lambda$, očito vrijedi da je $\sigma = (w|\alpha)^{-1} \circ \lambda$. ■

Dokažimo sada dva korolara. Prvi karakterizira slike segmenata, a drugi daje jedinstvenost rezultata.

Korolar 4.42 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ i w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. Podskup $\mathcal{S}$ od $\mathcal{H}$ je slika segmenta s obzirom na w ako i samo ako je $\mathcal{S}$ uređeni luk ili $\mathcal{S} \in F_1(\mathcal{H})$.*

Dokaz. Dovoljnost slijedi iz Teorema 4.39 i činjenice da je svako konstantno preslikavanje iz $[0,1]$ u $\mathcal{H}$ segment s obzirom na w. Nužnost slijedi iz Teorema 4.41. ■

Korolar 4.43 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ i w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. Tada je segment u $\mathcal{H}$ s obzirom na w jedinstveno određen svojom slikom. Drugim riječima, ako su σ_1 i σ_2 segmenti u $\mathcal{H}$ s obzirom na w takvi da je $\sigma_1([0,1]) = \sigma_2([0,1])$, onda je $\sigma_1 = \sigma_2$.*

Dokaz. Neka su σ_1 i σ_2 dani segmenti i neka je $\alpha = \sigma_1([0,1]) = \sigma_2([0,1])$. Tada je $\sigma_i = (w|\alpha)^{-1} \circ \lambda, i = 1,2$, po Teoremu 4.41 (s pretpostavkom da je λ konstantna ako je σ konstantna). Dakle, $\sigma_1 = \sigma_2$. ■
Ranije smo dokazali dva važna rezultata o uređenim lukovima, Teorem 4.35 i Korolar 4.36. Sada ćemo dokazati analogne tvrdnje za segmente.

Teorem 4.44 *Neka je X kompaktum, w Whitneyjevo preslikavanje na 2^X i $A_1, A_2 \in 2^X$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) Postoji segment s obzirom na w od A_0 do A_1.

(ii) $A_0 \subseteq A_1$ i svaka komponenta od A_1 siječe A_0.

Dokaz. Očito, obe tvrdnje su istinite ako je $A_0 = A_1$. Zato, pretpostavimo da je $A_0 \neq A_1$. Tada, po Teoremu 4.35, tvrdnja (ii) teorema ekvivalentna sljedećoj tvrdnji:

$(*)$ Postoji uređeni luk α u 2^X od A_0 do A.

Dakle, dovoljno je dokazati da je tvrdnja (i) teorema ekvivalentna $(*)$.
Pretpostavimo da vrijedi (i). Tada, budući da je $A_0 \neq A_1$, iz Teorema 4.41 slijedi da $(*)$ vrijedi.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $(*)$. Tada, po Teoremu 4.39, postoji segment σ s obzirom na w takav da je $\sigma([0,1]) = \alpha$, gdje je α kao u $(*)$.

Ako pokažemo da je $\sigma(0) = A_0$ i $\sigma(1) = A_1$, tvrdnja (i) će vrijediti po (S2). Primijetimo da, po Lemi 4.40, vrijedi da je σ homeomorfizam iz $[0,1]$ u α. Dakle, $\sigma(0)$ i $\sigma(1)$ su rubne točke od α. Također vrijedi $\sigma(0) \subseteq \sigma(1)$ po (S4). S druge strane, budući da je α uređen luk od A_0 do A_1, A_0 i A_1 rubne točke od α i $A_0 \subseteq A_1$. Dakle, vrijedi $\sigma(0) = A_0$ i $\sigma(1) = A_1$. ■

Teorem 4.45 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ i w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. Ako je σ segment u $\mathcal{H}$ s obzirom na w takav da je $\sigma(0) \in C(X)$, onda je $\sigma([0,1]) \subseteq C(X)$.*

Dokaz. Teorem očito vrijedi ako je σ konstanta pa pretpostavimo da σ nije konstanta. Po Korolaru 4.42, $\sigma([0,1])$ je uređeni luk, a iz Leme 4.40 slijedi da su $\sigma(0)$ i $\sigma(1)$ rubne točke od $\sigma([0,1])$. Nadalje, vrijedi da je $\sigma(0) \subseteq \sigma(1)$. Dakle, $\sigma([0,1])$ je uređeni luk od $\sigma(0)$ do $\sigma(1)$. Iz pretpostavke da je $\sigma(0) \in C(X)$ iz Korolara 4.36 slijedi da je $\sigma([0,1]) \subseteq C(X)$. ■

Teorem 4.46 *Neka je X kompaktum, w Whitneyjevo preslikavanje na $C(X)$ i $A_0, A_1 \in C(X)$. Tada postoji segment od A_0 do A_1 s obzirom na w ako i samo ako je $A_0 \subseteq A_1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji segment σ s obzirom na w od A_0 do A_1. Tada po (S2) i (S4) vrijedi da je $A_0 \subseteq A_1$. Obratno, pretpostavimo da je $A_0 \subseteq A_1$ i da je $A_0 \neq A_1$ (dokaz je trivijalan ako je $A_0 = A_1$). Tada, po Teoremu 4.25 postoji uređeni luk α u $C(X)$ od A_0 do A_1. Dalje, po Teoremu 4.39 postoji segment σ s obzirom na w takav da je $\sigma([0,1]) = \alpha$. Iz (S4) i Leme 4.40 slijedi da je σ segment od A_0 do A_1 (kao u dokazu Teorema 4.44).
■

Većinu rezultata u ovom odjeljku smo iskazali s obzirom na Whitneyjeva preslikavanja na $\mathcal{H}$, gdje je $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Sada je prirodno zapitati se je li svaki segment u $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ s obzirom na Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$ ujedno i segment s obzirom na Whitneyjevo preslikavanje na 2^X. Pokazat ćemo u sljedećem korolaru da je odgovor na to pitanje potvrdan.

Teorem 4.47 *Ako je X kompaktum, onda se svako Whitneyjevo preslikavanje na proizvoljnom zatvorenom podskupu od 2^X može proširiti do Whitneyjevog preslikavanja na 2^X.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{H}$ zatvoren podskup od 2^X i neka je w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. Neka je

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup F_1(X) \cup \{X\}.$$

Proširimo w do Whitneyjevog preslikavanja w' u $\mathcal{K}$ tako da stavimo $w'(\{x\}) = 0$ za svaki $\{x\} \in F_1(X)$ i $w'(X) = 1 + \sup w(\mathcal{H})$ ako $X \notin \mathcal{H}$. Sada se w' može proširiti do Whitneyjevog preslikavanja na 2^X. ■

Korolar 4.48 *Neka je X kompaktum i $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. $\sigma : [0,1] \to \mathcal{H}$ je segment s obzirom na Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$ ako i samo ako je σ segment s obzirom na Whitneyjevo preslikavanje na 2^X.*

Dokaz. Neka je w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$ takvo da je σ segment u $\mathcal{H}$ s obzirom na w. Neka je $\mathcal{G} = \sigma([0,1])$ i $g = w|\mathcal{G}$. Primijetimo da je $\mathcal{G}$ zatvoren u 2^X i da je g Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{G}$. Dakle, po Teoremu 4.47, g se može proširiti do Whitneyjevog preslikavanja g' u 2^X. Očito, σ je segment s obzirom na g'. Obrat slijedi iz činjenice da je restrikcija Whitneyjevog preslikavanja sa 2^X na $\mathcal{H}$ Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. ■

4.6 Prostor segmenata $S_w(\mathcal{H})$

Neka je Y kompaktum i neka je Z metrički prostor s metrikom d_Z. Tada sa Z^Y označavamo prostor svih preslikavanja iz Y u Z. Topologija za Z^Y je topologija inducirana uniformnom metrikom ρ koja je definirana na sljedeći način:

$$\forall f, g \in Z^Y, \ \rho(f,g) = \sup\{d_Z(f(y), g(y)) : y \in Y\}.$$

Tu topologiju nazivamo uniformnom topologijom da bismo naglasili kojom je metrikom inducirana.

Uniformna topologija ne ovisi o izboru metrike koja inducira topologiju na Z. Nadalje, konvergencija nizova s obzirom na uniformnu topologiju je uniformna konvergencija.

Definicija 4.49 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ i w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. Prostor segmenata u $\mathcal{H}$ s obzirom na w je prostor*

$$S_w(\mathcal{H}) = \left\{\sigma \in \mathcal{H}^{[0,1]} : \sigma \text{ je segment s obzirom na } w\right\}$$

snabdijeven uniformnom topologijom.

Prvo svojstvo prostora segmenata koje ćemo istražiti je kompaktnost. U tu svrhu podsjetimo se definicije ekvikontinuiranosti.

Neka su (Y, d_Y) i (Z, d_Z) kompaktni metrički prostori i neka je $\mathcal{F} \subseteq Z^Y$. Tada kažemo da je $\mathcal{F}$ ekvikontinuiran ako vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\, d_Y(y_1, y_2) < \delta \implies d_Z(f(y_1), f(y_2)) < \varepsilon,\ \forall\ f \in \mathcal{F}.$$

Lako se vidi da za kompaktume Y i Z, ekvikontinuiranost ovisi samo o topologijama na Y i Z, a ne danim metrikama na d_Y i d_Z.

Teorem 4.50 (Arzela-Ascoli) *Neka su Y i Z kompaktumi, Z^Y snabdijeven uniformnom topologijom i $\mathcal{F} \subseteq Z^Y$. $\mathcal{F}$ je kompaktan ako i samo ako je $\mathcal{F}$ ekvikontinuiran i zatvoren u Z^Y.*

Lema 4.51 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H}$ zatvoren podskup od 2^X i w Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}$. Tada, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\eta(\varepsilon) > 0$ sa sljedećim svojstvom: Ako su $A, B \in \mathcal{H}$ takvi da je $A \subseteq B$ i $|w(B) - w(A)| < \eta(\varepsilon)$, onda je $H(A, B) < \varepsilon$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da lema ne vrijedi za neki $\varepsilon > 0$. Tada, za svaki $i \in \mathbb{N}$, postoje $A_i, B_i \in \mathcal{H}$ takvi da je $A_i \subseteq B_i$, $|w(B_i) - w(A_i)| < \frac{1}{i}$ i $H(A, B) \geq \varepsilon$. Budući da je $\mathcal{H}$ kompaktum po Teoremima 1.20 i 1.25, možemo pretpostaviti da nizovi $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ i $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergiraju u $\mathcal{H}$ prema A i B redom. Tada vrijedi $A \subseteq B$ i $w(A) = w(B)$. Dakle mora vrijediti $A = B$ pa je $H(A, B) = 0$. Međutim, budući da je $H(A_i, B_i) \geq \varepsilon$ za svaki i, također vrijedi da je $H(A, B) \geq \varepsilon > 0$. Dakle, došli smo do kontradikcije. ■

Teorem 4.52 *Neka je X kompaktum, $\mathcal{H}$ zatvoren podskup od 2^X i $w : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ Whitneyjevo preslikavanje. Tada je $S_w(\mathcal{H})$ kompaktan.*

Dokaz. Pokažimo da je $S_w(\mathcal{H})$ ekvikontinuiran i zatvoren u $\mathcal{H}^{[0,1]}$. Tada tražena tvrdnja slijedi iz Teorema 4.50, budući da je $\mathcal{H}$ zatvoren, a onda i kompaktan podskup od 2^X.

Dokažimo da je $S_w(\mathcal{H})$ ekvikontinuiran. Neka je $\varepsilon > 0$ i $\eta(\varepsilon)$ kao u Lemi 4.51. Dalje, neka je $s = \sup(w[\mathcal{H}])$. Odaberimo $\delta > 0$ takav da je $\delta s < \eta(\varepsilon)$. Neka su $t_1, t_2 \in [0,1]$ takvi da je $|t_1 - t_2| < \delta$ i neka je $\sigma \in S_w(\mathcal{H})$. Iz (S3) izravno slijedi

$$w(\sigma(t_1)) - w(\sigma(t_2)) = (t_2 - t_1) w(\sigma(0)) - (t_2 - t_1) w(\sigma(1)).$$

Dakle,

$$|w(\sigma(t_1)) - w(\sigma(t_2))| = |t_2 - t_1| |w(\sigma(0)) - w(\sigma(1))| \leq |t_2 - t_1| s < \delta s < \eta(\varepsilon).$$

Prema (S4) vrijedi $\sigma(t_1) \subseteq \sigma(t_2)$ ili $\sigma(t_2) \subseteq \sigma(t_1)$. Dakle, budući da je $\eta(\varepsilon)$ kao u Teoremu 4.50, vrijedi $H(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) < \varepsilon$. Ovime smo dokazali da je $S_w(\mathcal{H})$ ekvikontinuiran.

Dokažimo sada da je $S_w(\mathcal{H})$ zatvoren u $\mathcal{H}^{[0,1]}$. Neka je $f \in \mathcal{H}^{[0,1]}$ takav da postoji niz $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ u $S_w(\mathcal{H})$ koji konvergira u $\mathcal{H}^{[0,1]}$ prema f. Pokažimo da je $f \in S_w(\mathcal{H})$. Budući da je $f \in \mathcal{H}^{[0,1]}$, f je neprekidna. Dakle, preostaje dokazati da f zadovoljava (S3) i (S4). Odaberimo $t \in [0,1]$. Pogledajmo sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} w(f(t)) &= w(Lim\sigma_i(t)) = \lim w(\sigma_i(t)) = \lim(1-t) w(\sigma_i(0)) + tw(\sigma_i(1)) = \\ &= (1-t) w(Lim\sigma_i(0)) + tw(Lim\sigma_i(1)) = (1-t) w(f(0)) + tw(f(1)). \end{aligned}$$

Jednakosti slijede iz neprekidnosti od w, konvergencije po točkama niza $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ prema f i iz činjenice da svaka funkcija σ_i zadovoljava (S3).

Ovime smo pokazali da f zadovoljava (S3). Preostaje dokazati da f zadovoljava (S4). Neka su $t_1, t_2 \in [0,1]$ takvi da je $t_1 \leq t_2$. Tada, budući da, za svaki i, σ_i zadovoljava (S4) vrijedi

$$\sigma_i(t_1) \subseteq \sigma_i(t_2), \text{ za svaki } i.$$

Dalje, budući da je $f(t_1) = Lim\sigma_i(t_1)$ i $f(t_2) = Lim\sigma_i(t_2)$ (po Korolaru 1.39), lako slijedi da je $f(t_1) \subseteq f(t_2)$. Ovime smo pokazali da f zadovoljava (S4), a time da je $f \in S_w(\mathcal{H})$. Dakle, dokazali smo da je $S_w(\mathcal{H})$ zatvoren u $\mathcal{H}^{[0,1]}$. ■

Korolar 4.53 *Ako je X kompaktum, onda su $S_w\left(2^X\right)$ i $S_w(C(X))$ kompaktumi.*

Dokaz. Slijedi iz Teorema 4.52. Uočimo da Teorem 4.52 smijemo primijeniti na $S_w(C(X))$ prema Propoziciji 1.8. ■

4.7 Prostor uređenih lukova, $\mathcal{O}(\mathcal{H})$

Sljedeći teorem nam daje drugačiji pogled na prostore segmenata. Vidjet ćemo da je posljedica toga da su prostori segmenata, topološki gledano, neovisni o izboru Whitneyjevog preslikavanja. Ključna ideja je u sljedećoj definiciji:

Definicija 4.54 *Neka je X kompaktum i $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Prostor uređenih lukova u $\mathcal{H}$ je prostor $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ definiran s:*

$$\mathcal{O}(\mathcal{H}) = \left\{\alpha \in 2^{\mathcal{H}} : \alpha \text{ je uređeni luk u } \mathcal{H}\right\}.$$

Zatvoreni prostor uređenih lukova u $\mathcal{H}$ je prostor $\overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$ definiran s

$$\overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H}) = \mathcal{O}(\mathcal{H}) \cup F_1(\mathcal{H}),$$

gdje su topologije na $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ i $\overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$ inducirane Hausdorffovom metrikom na $2^{\mathcal{H}}$.

Teorem 4.55 *Neka je X kompaktum i $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Tada su $S_w(\mathcal{H})$ i $\overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$ homeomorfni prostori.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $f_w : S_w(\mathcal{H}) \to \overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$ na sljedeći način:

$$f_w(\sigma) = \sigma([0,1]) \ \forall \sigma \in S_w(\mathcal{H}).$$

Po Korolaru 4.42, f_w je surjekcija iz $S_w(\mathcal{H})$ u $\overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$, a po Korolaru 4.43, f_w je injekcija.

Dalje, pokažimo da je f_w neprekidna. Uvedimo sljedeće oznake: s H označimo Hausdorffovu metrika na $\mathcal{H}$, s H_H označimo Hausdorffovu metriku na $2^{\mathcal{H}}$ induciranu s H kao u Teoremu 1.7 i s ρ označimo uniformnu metriku na $S_w(\mathcal{H})$. Pokažimo da vrijedi

$$H_H(f_w(\sigma_1), f_w(\sigma_2)) \leq \rho(\sigma_1, \sigma_2) \ \ \forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_w(\mathcal{H}). \tag{1}$$

Dokažimo (1). Odaberimo $\sigma_1, \sigma_2 \in S_w(\mathcal{H})$. Neka je $r > \rho(\sigma_1, \sigma_2)$. Tada iz definicije od ρ slijedi

$$H(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) < r \text{ za svaki } t \in [0,1].$$

Dakle vrijedi $\sigma_1([0,1]) \subseteq N_H(r, \sigma_2([0,1]))$ i $\sigma_2([0,1]) \subseteq N_H(r, \sigma_1([0,1]))$. Po prvom dijelu Korolara 1.17 vrijedi

$$H_H(\sigma_1([0,1]), \sigma_2([0,1])) < r.$$

Dakle, pokazali smo da vrijedi $H_H(f_w(\sigma_1), f_w(\sigma_2)) < r$, za svaki $r > \rho(\sigma_1, \sigma_2)$, a odatle slijedi (1). Iz (1) očito slijedi da je f_w neprekidna.

Konačno, pokažimo da je funkcija $f_w^{-1} : \overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H}) \to S_w(\mathcal{H})$ neprekidna. Neka je $\alpha \in \overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$ i neka su $\alpha_i \in \overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, takvi da niz $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira u $\overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$ prema α. Neka je $\sigma = f_w^{-1}(\alpha)$ i neka je $\sigma_i = f_w^{-1}(\alpha_i)$ za svaki i. Dokažimo sljedeću tvrdnju:

$(*)$ Postoji kompaktni podskup Σ od $S_w(\mathcal{H})$ takav da je $\sigma \in \Sigma$ i $\sigma_i \in \Sigma$ za svaki i.

Dokažimo $(*)$. Neka je $\mathcal{H}' = \alpha \cup (\cup_{i=1}^{\infty} \alpha_i)$ i $w' = w|\mathcal{H}'$. Primijetimo da je w' Whitneyjevo preslikavanje na $\mathcal{H}'$ i neka je

$$\Sigma = S_{w'}(\mathcal{H}').$$

Pokažimo da Σ zadovoljava svojstva u $(*)$. Lako je pokazati da je $\mathcal{H}'$ kompaktan. Naime, neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $\mathcal{H}'$. Budući da je α limes niza $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, skup $U \in \mathcal{U}$ koji sadrži α, sadrži gotovo sve elemente niza

$\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ koje pokrijemo s konačno mnogo skupova, odakle slijedi da $\mathcal{U}$ ima konačan potpokrivač. Dakle, $\mathcal{H}'$ je kompaktan. Dalje, po Teoremu 4.52, Σ je kompaktan. Budući da je $w' = w|\mathcal{H}'$ i $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ očito vrijedi

$$\Sigma = \{\sigma' \in S_w(\mathcal{H}) : \sigma'([0,1]) \subseteq \mathcal{H}'\}.$$

Dakle, vrijedi $\Sigma \subseteq S_w(\mathcal{H}), \sigma \in \Sigma$ i $\sigma_i \in \Sigma$ za svaki i. Ovime smo dokazali $(*)$.

Iskoristimo sada $(*)$ da dokažemo da niz $\{f_w^{-1}(\alpha_i)\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira u $S_w(\mathcal{H})$ prema $f_w^{-1}(\alpha)$ .Već smo pokazali da je f_w neprekidna injekcija iz $S_w(\mathcal{H})$. Po $(*)$ vrijede slijedeće tvrdnje

(1) $f_w|\Sigma$ je homeomorfizam.

(2) $\alpha \in f_w(\Sigma)$ i $\alpha_i \in f_w(\Sigma)$ za svaki i.

Konačno, niz $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira prema α pa po (1) i (2) niz $\{f_w^{-1}(\alpha_i)\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira u Σ prema $f_w^{-1}(\alpha)$. Budući da je $\Sigma \subseteq S_w(\mathcal{H})$, pokazali smo da $\{f_w^{-1}(\alpha_i)\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira u $S_w(\mathcal{H})$ prema $f_w^{-1}(\alpha)$, a time i da je f_w^{-1} neprekidna. ■

Korolar 4.56 *Neka je X kompaktum i $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Tada za svaka dva Whitney-jeva preslikavanja w_1 i w_2 u $\mathcal{H}$ vrijedi da su $S_{w_1}(\mathcal{H})$ i $S_{w_2}(\mathcal{H})$ homeomorfni.*

Dokaz. Po Teoremu 4.55 vrijedi da su $S_{w_1}(\mathcal{H})$ i $\overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$ te $S_{w_2}(\mathcal{H})$ i $\overline{\mathcal{O}}(\mathcal{H})$ homeomorfni. ■

4.8 $S_w(2^X)$, $S_w(C(X))$ kada je X Peanov kontinuum

Navodimo, bez dokaza, neke važne rezultate o prostoru $\overline{\mathcal{O}}(2^X)$.

Propozicija 4.57 *Ako je X Peanov kontinuum, onda je i $\overline{\mathcal{O}}(2^X)$ Peanov kontinuum.*

Propozicija 4.58 *Za svaki kompaktum X, $F_1(\overline{\mathcal{O}}(2^X))$ je retrakt od $2^{\overline{\mathcal{O}}(2^X)}$.*

Propozicija 4.59 *Neka je X kompaktum. Tada je $\overline{\mathcal{O}}(C(X))$ retrakt od $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$ ako i samo ako je $C(X)$ retrakt od 2^X.*

Dokazat ćemo teorem analogan Teoremu 3.19.

Teorem 4.60 *Neka je X nedegeneriran Peanov kontinuum. Tada vrijedi,*

(i) $S_w\left(2^X\right)$ *je Hilbertov kvadar,*

(ii) $S_w(C(X))$ *je Hilbertov kvadar ako ne postoji slobodan luk u X,*

(iii) $S_w(C(X))$ *je apsolutni retrakt.*

Dokaz. Prema Teoremu 4.55 dovoljno je dokazati da je $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$ Hilbertov kvadar i da je $\overline{\mathcal{O}}(C(X))$ Hilbertov kvadar ukoliko X ne sadrži slobodan luk. Dokaz ćemo provesti koristeći Toruńczykov teorem.

Po Propoziciji 4.57, $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$ je Peanov kontinuum, pa je, po Teoremu 3.16, $2^{\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)}$ apsolutni retrakt. Dalje, po Propoziciji 4.58, $\overline{\mathcal{O}}(2^x)$ je apsolutni retrakt. Dakle, budući da je po Teoremu 3.16 $C(X)$ retrakt od 2^X, iz Propozicije 4.59 slijedi da je $\overline{\mathcal{O}}(C(X))$ apsolutni retrakt. Time smo dokazali (iii).

Pokažimo sada da prema identitetima na $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$ i $\overline{\mathcal{O}}(C(X))$ uniformno konvergiraju neki nizovi Z-preslikavanja.
Za svaki zatvoreni podskup K od X takav da je $IntK \neq \varnothing$, neka je

$$\overline{\mathcal{O}}_K\left(2^X\right) = \left\{\alpha \in \overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right) : \cap\alpha \supseteq K\right\}.$$

Pokažimo da je $\overline{\mathcal{O}}_K\left(2^X\right)$ Z-skup u $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Po Teoremu 3.18 postoji preslikavanje $f_\varepsilon : 2^X \to 2^X \backslash 2^X_K$ takvo da je f_ε u $\varepsilon-$okolini identitete na 2^X. Neka je $f^*_\varepsilon : 2^{2^X} \to 2^{2^X}$ inducirano preslikavanje iz Leme 4.17. Sada lako slijedi da $f^*_\varepsilon|\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$ preslikava $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$ u $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)\backslash\overline{\mathcal{O}}_K\left(2^X\right)$ i da je $f^*_\varepsilon|\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$ u $\varepsilon-$okolini identitete na $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$. Ovime smo pokazali da je $\overline{\mathcal{O}}_K(2^x)$ Z-skup u $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$.
Za svaki zatvoreni podskup K od X takav da je $IntK \neq \varnothing$ i K ne sadrži slobodne lukove, neka je

$$\overline{\mathcal{O}}_K(C(X)) = \left\{\alpha \in \overline{\mathcal{O}}(C(X)) : \cap\alpha \supseteq K\right\}.$$

Tada je $\overline{\mathcal{O}}_K (C(X))$ Z-skup u $\overline{\mathcal{O}}(C(X))$. Dokaz je sličan dokazu za $\overline{\mathcal{O}}_K \left(2^X\right)$.

Konačno, dokažimo da prema identitetama na $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$ i $\overline{\mathcal{O}}(C(X))$ uniformno konvergiraju neki nizovi Z-preslikavanja. Neka je $\varepsilon > 0$. Zamijenimo $\Phi_\varepsilon : 2^X \to 2^X$ iz dokaza Teorema 3.19 s $\Phi_\varepsilon^* : \overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right) \to \overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$ danim pravilom

$$\Phi_e^*(\alpha) = \{C_d(\varepsilon, A) : A \in \alpha\} \text{ za svaki } \alpha \in \overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right).$$

Zamijenimo $2^X_{K_i}$ u dokazu Teorema 3.19 s $\overline{\mathcal{O}}_{K_i}\left(2^X\right)$. Napravimo li očite zamjene u dokazu Teorema 3.19, vrijedi da je Φ_ε^* Z-preslikavanje i da je unutar $\varepsilon-$okoline identitete na $\overline{\mathcal{O}}\left(2^X\right)$. Također, zamijenimo li $C_{K_i}(X)$ u dokazu Teorema 3.19 s $\overline{\mathcal{O}}_{K_i}(C(X))$, vrijedi da je $\Phi_\varepsilon^*|\overline{\mathcal{O}}(C(X))$ Z-preslikavanje iz $\overline{\mathcal{O}}(C(X))$ u $\overline{\mathcal{O}}(C(X))$ i da je $\Phi_\varepsilon^*|\overline{\mathcal{O}}(C(X))$ unutar $\varepsilon-$okoline od identitete na $\overline{\mathcal{O}}(C(X))$. $\blacksquare$

Literatura

[1] R. Engelking, *General topology*, PNW, Warszawa, 1977.

[2] Alejandro Illanes, Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces,* Marcel Dekker, New York, 1999.

[3] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom prostoru*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[4] Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker, New York, 1978.

[5] Sam B. Nadler Jr., *Continuum theory*, Marcel Dekker, New York, 1992.