Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ivan Ivec

Ograničenost pseudodiferencijalnih operatora i poopćenja H-mjera

Doktorski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nenad Antonić

Zagreb, 2013.

Predgovor

Proučavanje singularnih integralnih operatora i njihova primjena na pseudodiferencijalne operatore imaju svoj početak u radovima Alberta Calderóna i Antonia Zygmunda iz pedesetih godina prošlog stoljeća. Time je dobivena metoda kojom je moguće dokazati neprekinutost klasičnih pseudodiferencijalnih operatora reda nula na klasičnim Lebesgueovim prostorima. Razvijene su i druge metode i danas je neprekinutost raznih tipova pseudodiferencijalnih operatora na Lebesgueovim i Soboljevljevim prostorima prilično zaokružena teorija, čak i za funkcije koje poprimaju vrijednosti u Banachovim prostorima.

Ipak, malo je toga rečeno za prostore s mješovitom normom koji imaju velike potencijalne primjene pri proučavanju specifičnih svojstava određenih tipova parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Značajan korak u tom smjeru napravili su Tuomas Hytönen i Pierre Portal [HP] u svom radu iz 2008, u kojem daju vrlo općenit rezultat, ali uz drugačije pretpostavke.

U prvom poglavlju ovog rada dajemo pregled osnovnih definicija i rezultata iz teorije pseudodiferencijalnih operatora slijedeći uglavnom [SR].

U drugom poglavlju slijedimo ideje Calderóna i Zygmunda kako bismo dokazali neprekinutost klasičnih Hörmanderovih operatora na Lebesgueovim i Soboljevljevim prostorima s mješovitom normom. Dokazana je gustoća Schwartzovog prostora u tim prostorima, te dokazana prilagođena varijanta Marcinkiewiczevog teorema interpolacije (Lema II.3), koja je zatim uspješno primijenjena u slučaju pseudodiferencijalnih operatora. Na kraju su dobiveni i neki dodatni rezultati za eliptičke operatore te je pojašnjena veza s rezultatom Hytönena i Portala.

H-mjere su uveli neovisno Luc Tartar [Ta1] i Patrick Gerard [G] početkom devedesetih godina prošlog stoljeća i uspješno su primijenjene u proučavanju hiperboličkih zadaća. Nedavno su razvijene varijante H-mjera (v. [AL1], [AL3]) prilagođene primjenama na paraboličke zadaće. Pregled osnovnih definicija i rezultata iz teorije H-mjera, slijedeći uglavnom [Ta1], dajemo u trećem poglavlju. Pri proučavanju H-mjera prirodno se pojavljuju posebne vrste pseudodiferencijalnih operatora, tzv. množitelji (v. Lema III.1).

U četvrtom i petom poglavlju nastojimo dodatno razraditi Tartarov opći oblik prve komutacijske leme te sistematizirati moguća poopćenja H-mjera. Dio tih rezultata već je objavljen u suautorstvu s prof. Darkom Mitrovićem [MI]. Prikazane su moguće primjene na razlomljeni zakon sačuvanja i definiran je pojam razlomljenih H-mjera, kao prirodno poopćenje klasičnih i paraboličkih H-mjera, s potencijalnim primjenama na razne tipove parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Na kraju je dokazano lokalizacijsko svojstvo za razlomljene H-mjere.

Ovaj rad je nastao pod vodstvom prof. dr. sc. Nenada Antonića, mog mentora i prijatelja. Najtoplije mu se zahvaljujem na svoj dosadašnjoj potpori i suradnji, te znanju koje je prenio na mene. Također zahvaljujem akademiku Stevanu Pilipoviću, redovitom profesoru PMF-a u Novom Sadu, prof. dr. sc. Marku Vrdoljaku i doc. dr. sc. Martinu Lazaru na posvećenom vremenu i korisnim primjedbama koje su doprinijele preciznosti i jasnoći ovog rada.

U Zagrebu, svibnja 2013.

Ivan Ivec

Sadržaj

I. Pseudodiferencijalni operatori

1. Uvod i oznake

U ovom poglavlju uvodimo oznake i pripremni materijal za daljnja razmatranja. Svi rezultati su dani bez dokaza, jer ih nalazimo u brojnoj literaturi (npr. [St], [W]).

Osnovna domena na kojoj radimo je d-dimenzionalni Euklidski prostor $\mathbf{R}^d$. Koristit ćemo razne p-norme na $\mathbf{R}^d$, točnije

$$|\mathbf{x}|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \qquad |\mathbf{x}|_2 = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}, \qquad |\mathbf{x}|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i|,$$

kao i činjenicu da su te norme međusobno ekvivalentne, tj.

$$|\mathbf{x}|_\infty \leqslant |\mathbf{x}|_2 \leqslant |\mathbf{x}|_1 \leqslant d|\mathbf{x}|_\infty.$$

Na $\mathbf{R}^d$ koristimo isključivo Lebesgueovu mjeru, te s $\mathsf{vol}E$ označavamo mjeru skupa $E \subseteq \mathbf{R}^d$. Otvorene euklidske kugle označavamo s $\mathrm{K}(\mathbf{x}, R)$, a zatvorene s $\mathrm{K}[\mathbf{x}, R]$. Oznaka za standardni skalarni produkt na $\mathbf{R}^d$ je

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d.$$

Za multiindeks $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbf{N}_0^d$ definiramo

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d, \quad \boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!.$$

Koriteći pojam multiindeksa definiramo potencije

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$$

te parcijalne derivacije

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_d^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_d}^{\alpha_d}}.$$

Koristimo i oznaku

$$\frac{1}{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_d}\right).$$

Također, $\partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} \partial_{\boldsymbol{\xi}}^{\boldsymbol{\beta}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ označavamo kraće kao $\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\beta}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, a radi dobivanja elegantnijih formula koristimo još i oznake

$$D_j = \frac{1}{2\pi i}\partial_j, \quad D_{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \partial_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad D^{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \partial^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Uglavnom proučavamo funkcije d realnih varijabli s kompleksnim vrijednostima, tj. funkcije s $\mathbf{R}^d$ u $\mathbf{C}$. Od posebnog interesa su nam neki potprostori prostora svih takvih funkcija.

Sa $\mathcal{S}$ označavamo Schwartzov prostor koji se sastoji od onih $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ funkcija φ za koje vrijedi

$$(\forall\, k \in \mathbf{N}_0) \quad |\varphi|_k = \sup_{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant k} \ \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d} |\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\beta}} \varphi(\mathbf{x})| < \infty.$$

$|\cdot|_k$ je rastući niz polunormi koje generiraju standardnu topologiju na $\mathcal{S}$. Bazu te topologije čine konačni presjeci skupova oblika

$$\{\varphi \in \mathcal{S} : |\varphi - \psi|_k < \varepsilon\},$$

za proizvoljne $k \in \mathbf{N}_0$, $\varepsilon > 0$ i $\psi \in \mathcal{S}$. Uz ovu topologiju je $\mathcal{S}$ Fréchetov prostor. Udaljenost možemo zadati, na primjer, s

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|\varphi - \psi|_k}{1 + |\varphi - \psi|_k} \ .$$

S $\mathcal{O}$ označavamo prostor funkcija polinomijalnog rasta: sastoji od onih $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ funkcija φ za koje vrijedi

$$(\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d)(\exists\, C \in \mathbf{R}_0^+)(\exists\, N \in \mathbf{N})(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d) \quad |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi(\mathbf{x})| \leqslant C(1 + |\mathbf{x}|^2)^N.$$

Očito je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$, kao i da su ti prostori zatvoreni na operacije deriviranja i množenja polinomom, ali vrijedi i više: $\mathcal{S}$ je zatvoren na množenje s funkcijama iz $\mathcal{O}$.

S $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, $p \in [1, \infty]$ definiramo (klasični) Lebesgueov prostor: sastoji se od klasa skoro svuda jednakih izmjerivih funkcija f takvih da je

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)} = \begin{cases} (\int_{\mathbf{R}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x})^{\frac{1}{p}}, & \text{ako je } p \in [1, \infty\rangle \\ \inf\{C \in \mathbf{R}^+ : |f(\mathbf{x})| \leqslant C \text{ (ss)}\}, & \text{ako je } p = \infty \end{cases} < \infty.$$

Gornjom formulom dana je norma uz koju je $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ Banachov prostor.

Također, za dvije izmjerive funkcije f i g takve da je $f\bar{g} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ uvodimo oznaku

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} f(\mathbf{x}) \bar{g}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

što je ujedno i formula za skalarni produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ koji time postaje Hilbertov prostor.

To je npr. slučaj ako je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, $g \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^d)$, gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, i u tom slučaju vrijedi poznata Hölderova nejednakost:

$$|\langle f, g \rangle| \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}}.$$

2. Fourierova pretvorba i distribucije

U ovom odjeljku definiramo Fourierovu pretvorbu i iznosimo njena osnovna svojstva, definiramo distribucije i pojmove vezane uz njih, a definiramo i neke Soboljevljeve prostore. Ne iznosimo kompletnu teoriju, već ćemo se usredotočiti na rezultate koje koristimo u kasnijim razmatranjima.

Za funkciju $u \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ dobro je definirana sljedeća funkcija:

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Preslikavanje $\mathcal{F} : u \mapsto \hat{u}$ je omeđeno linearno preslikavanje s $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ (sa supremum normom; ta je činjenica poznata kao Riemann-Lebesgueova lema), i naziva se *Fourierovom pretvorbom*. Štoviše, ta je definicija poseban slučaj sljedeće definicije za omeđene Borelove mjere μ (funkciju $u \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ možemo poistovjetiti s mjerom kojoj je ta funkcija gustoća, s obzirom na Lebesgueovu mjeru):

$$\hat{\mu}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, d\mu(\mathbf{x}).$$

Funkcija $\hat{\mu} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$, i Fourierova pretvorba je omeđeno preslikavanje (na prostoru omeđenih Borelovih mjerâ $\mathcal{M}_b$ norma je jednaka totalnoj varijaciji mjere).

Posebno zgodna svojstva $\mathcal{F}$ ima restringirana na Schwartzov prostor: restrikcija Fourierove pretvorbe na prostor $\mathcal{S}$ je bijekcija tog skupa na samog sebe; štoviše, vrijedi

$$\hat{\hat{\varphi}} = \tilde{\varphi}, \qquad \hat{\hat{\hat{\varphi}}} = \check{\varphi} = \bar{\mathcal{F}}\varphi = \mathcal{F}^{-1}\varphi,$$

pri čemu je $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(-\mathbf{x})$, a

$$\check{\varphi}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \varphi(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Posljednju formulu zovemo formula inverzije.

Na $\mathcal{S}$ vrijede sljedeće formule:

$$(D_{\boldsymbol{\alpha}} u)^\wedge = \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{u} \qquad \text{i} \qquad (\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} u)^\wedge = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} D^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{u}. \tag{1}$$

Fourierova se pretvorba na jedinstven način proširuje sa $\mathcal{S}$ do unitarnog operatora s $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ na samog sebe i za to proširenje vrijedi Parsevalova formula

$$\langle\, \hat{u} \mid \hat{v} \,\rangle = \langle\, u \mid v \,\rangle.$$

Gornja je činjenica poznata i kao Plancherelov teorem. Uočimo da smo ovo isto proširenje mogli dobiti i polazeći od većeg prostora $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, na kome je Fourierova pretvorba i dalje definirana s pomoću integrala.

Premda ćemo i ovo proširenje često zapisivati s pomoću integrala, važno je uočiti da se tu radi samo o formalnom zapisu, dok je pravi smisao proširenje koje se temelji na teoremu iz funkcionalne analize, a ne na teoriji mjere i integralu.

Osim proširenja po gustoći, moguće je i proširenje po dualnosti na $\mathcal{S}'$, prostor *temperiranih distribucija* (topološki dual prostora $\mathcal{S}$). Temperirana distribucija je antilinearan funkcional na $\mathcal{S}$ takav da vrijedi

$$(\exists\, C \in \mathbf{R}^+)(\exists\, N \in \mathbf{N})(\forall\, \varphi \in \mathcal{S}) \quad |\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C|\varphi|_N,$$

a samo proširenje je dano formulom

$$\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle \tilde{u}, \hat{\varphi}\rangle,$$

pri čemu je $\langle \tilde{u}, \varphi\rangle = \langle u, \tilde{\varphi}\rangle$. Tako proširena Fourierova pretvorba ponovno je bijekcija prostora $\mathcal{S}'$ na samog sebe. Napomenimo da se ovo proširenje podudara s ranijom definicijom na prostoru svih konačnih Radonovih mjera. Na $\mathcal{S}'$ (pa i na svakom potprostoru) i dalje vrijede formule (1).

Uočimo da je zamjena varijabli $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$ u gornjoj definiciji posljedica činjenice da smo koristili seskvilinearan produkt:

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} u(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Da smo namjesto njega koristili bilinearan produkt (kako to čini Laurent Schwartz i mnogi drugi, ali što nije u skladu s definicijom skalarnog produkta na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$)

$$(u, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^d} u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

koristili bismo sljedeću definiciju:

$$(\hat{u}, \varphi) = (u, \hat{\varphi})$$

(naravno, uz ovu nijansu u oznakama gornje su dvije definicije ekvivalentne).

Pomoću Fourierove pretvorbe možemo definirati Soboljevljev prostor $\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)$ za proizvoljan $s \in \mathbf{R}$. Taj prostor sastoji se od svih temperiranih distribucija u takvih da je $\lambda^s \hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, gdje je $\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{1 + 4\pi^2 |\boldsymbol{\xi}|^2}$. Prostor je normiran (dapače Hilbertov) s normom

$$\|u\|_{\mathrm{H}^s} = \|\lambda^s \hat{u}\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Ova definicija poopćuje definiciju klasičnih Soboljevljevih prostora (za $s = 0$ dobivamo prostor $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, za $s = 1$ prostor $\mathrm{W}^{1,2}(\mathbf{R}^d), \ldots$).

Definiramo i prostor $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ koji se sastoji od svih temperiranih distribucija u takvih da je $\varphi u \in \mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)$ za proizvoljnu $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$, uz topologiju definiranu familijom polunormi

$$u \mapsto \|\varphi u\|_{\mathrm{H}^s}, \quad \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d).$$

Pritom je za φ dovoljno uzeti prebrojivo mnogo funkcija (φ_n) takvih da je $\varphi_n \equiv 1$ na $\mathrm{K}[\mathbf{0}, n]$ te $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq \mathrm{K}[\mathbf{0}, n+1]$, što posebno znači da je $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ Fréchetov prostor.

U slučajevima kad nam nije potrebna Fourierova pretvorba definiramo mnogo širu klasu distribucija od prostora $\mathcal{S}'$. Po toj definiciji, distribucija je antilinearan funkcional na $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ takav da za proizvoljan kompaktan skup $K \subset \mathbf{R}^d$ vrijedi

$$(\exists\, C_K \in \mathbf{R}^+)(\exists\, N_K \in \mathbf{N})(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)) \quad \operatorname{supp} \varphi \subseteq K \quad \Longrightarrow \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C_K |\varphi|_{N_K},$$

a prostor svih distribucija označavamo s $\mathcal{D}'$.

Za svaku distribuciju $u \in \mathcal{D}'$ definiramo pojam nosača $\operatorname{supp} u$ i singularnog nosača $\operatorname{supp\,sing} u$. Kažemo da $\mathbf{x} \notin \operatorname{supp} u$ ako postoji okolina ω točke $\mathbf{x}$ na kojoj je $u = 0$, odnosno da $\mathbf{x} \notin \operatorname{supp\,sing} u$ ako postoji okolina ω točke $\mathbf{x}$ na kojoj se u podudara s glatkom funkcijom ψ, tj.

$$\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\omega) \quad \Longrightarrow \quad \langle u, \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle.$$

Prostor svih distribucija s kompaktnim nosačem označavamo s $\mathcal{E}'$.

3. Pseudodiferencijalni simboli

Osnovna svojstva Fourierove pretvorbe za $\varphi \in \mathcal{S}$ daju

$$\widehat{D_{\boldsymbol{\alpha}} \varphi}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}),$$

pa po formuli inverzije dobivamo

$$D_{\boldsymbol{\alpha}} \varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Za linearan parcijalni diferencijalni operator $a(\mathbf{x}, D) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) D^{\boldsymbol{\alpha}}$ gornje formule vode do izraza

$$a(\mathbf{x}, D)\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}, \tag{2}$$

gdje je *simbol* $a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ operatora $a(\mathbf{x}, D)$ polinom $a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}$. Točnije, zahtijevamo da funkcije $a_{\boldsymbol{\alpha}}$ budu glatke i omeđene, jer da bismo osigurali dobru teoriju, koja će prije svega omogućiti pronalaženje približnih inverza za klasu tzv. eliptičkih operatora, moramo ograničiti klasu dopustivih simbola. Ipak, dopustit ćemo i simbole koji nisu polinomi, tj. vođeni ovim i još nekoliko drugih primjera dolazimo do sljedeće definicije:

Definicija 1. *Kažemo da je $a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d; \mathbf{C})$ klasičan simbol reda $m \in \mathbf{R}$, u oznaci $a \in \mathrm{S}^m_{1,0}$, ako*

$$(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)\ (\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad |\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| \leqslant C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \lambda^{m-|\boldsymbol{\beta}|}(\boldsymbol{\xi}),$$

gdje je $\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{1 + 4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^2}$, a $C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ konstanta koja ovisi samo o $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$.

Primijetimo da je $\mathrm{S}^l_{1,0} \subseteq \mathrm{S}^m_{1,0}$ za $l \leqslant m$ pa su smislene i definicije

$$\mathrm{S}^\infty_{1,0} = \bigcup_m \mathrm{S}^m_{1,0}, \quad \mathrm{S}^{-\infty}_{1,0} = \bigcap_m \mathrm{S}^m_{1,0}.$$

Glavni alat teorije pseudodiferencijalnih simbola je asimptotički račun sadržan u sljedećoj lemi.

Lema 1. *Neka su za svaki $j \in \mathbf{N}_0$ dani simboli $a_j \in \mathrm{S}^{m-j}_{1,0}$. Onda postoji simbol $a \in \mathrm{S}^m_{1,0}$ (jedinstven do na razliku sadržanu u $\mathrm{S}^{-\infty}_{1,0}$) takav da za proizvoljan $k \in \mathbf{N}_0$ vrijedi*

$$a - \sum_{j<k} a_j \in \mathrm{S}^{m-k}_{1,0}.$$

Štoviše, a se može izabrati tako da je $\operatorname{supp} a \subseteq \cup_j \operatorname{supp} a_j$. *Pišemo $a \sim \sum_j a_j$.*

Dem. Budući da red $\sum_j a_j$ općenito nije konvergentan, definirat ćemo a preko konvergentnog reda $\sum_j b_j$, gdje su b_j aproksimacije za a_j. Neka je $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ takva da je $\varphi \equiv 1$ na $\mathrm{K}[\mathbf{0}, 1]$ i $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \mathrm{K}[\mathbf{0}, 2]$. Za niz realnih brojeva $(\varepsilon_j) \in \langle 0, 1\rangle^{\mathbf{N}}$ s limesom 0 definirat ćemo

$$b_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = (1 - \varphi(\varepsilon_j\boldsymbol{\xi}))a_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Budući da je $b_j(\mathbf{x}, \cdot) \equiv a_j(\mathbf{x}, \cdot)$ izvan kompaktnog skupa u $\mathbf{R}^d$, slijedi da je $b_j - a_j \in \mathrm{S}^{-\infty}_{1,0}$ i prema tome $b_j \in \mathrm{S}^{m-j}_{1,0}$. Ipak, za dobivanje svih željenih svojstava morat ćemo zahtijevati preciznije ocjene na ε_j.

Za $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \frac{2}{\varepsilon_j}$ je $\varepsilon_j\lambda(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \sqrt{1 + 16\pi^2}$ i prema tome

$$|\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} b_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| \leqslant \sum_{\boldsymbol{\gamma}\leqslant\boldsymbol{\beta}} C_{\boldsymbol{\gamma}} \varepsilon_j^{|\boldsymbol{\gamma}|} |\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}} a_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| \leqslant C^j_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} \lambda^{m-j-|\boldsymbol{\beta}|}(\boldsymbol{\xi}),$$

za neke konstante $C^j_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$, a ocjenu istog tipa imamo i za $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant \frac{2}{\varepsilon_j}$, jer je u tom slučaju $b_j \equiv a_j$. Štoviše, budući da je $1 \leqslant \varepsilon_j|\boldsymbol{\xi}|$ na skupu $\operatorname{supp}(1-\varphi) \supseteq \operatorname{supp} b_j$, ocjenu možemo i profiniti:

$$|\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} b_j(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \leqslant \varepsilon_j\lambda(\boldsymbol{\xi})|\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} b_j(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \leqslant \varepsilon_j C^j_{\boldsymbol{\alpha\beta}}\lambda^{m+1-j-|\boldsymbol{\beta}|}(\boldsymbol{\xi}).$$

Prema tome, ako izaberemo

$$\varepsilon_j \leqslant \min\left\{\frac{1}{C^j_{\boldsymbol{\alpha\beta}}} : |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leqslant j\right\},$$

dobivamo

$$|\lambda^{|\boldsymbol{\beta}|-m}(\boldsymbol{\xi})\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} b_j(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \leqslant \lambda^{1-j}(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{za } |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leqslant j. \tag{3}$$

Nadalje, budući da $\varepsilon_j \longrightarrow 0$, suma $a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) := \sum_{j\geqslant 0} b_j(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ je konačna u okolini proizvoljnog fiksnog $\boldsymbol{\xi}$ i prema tome definira funkciju $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d;\mathbf{C})$. Također, za proizvoljne $k \in \mathbf{N}_0$ i $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$, možemo definirati $N = \max\{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|, k+1\}$ i promatrati rastav

$$a - \sum_{j<k} a_j = \sum_{j<k}(b_j - a_j) + \sum_{k\leqslant j<N} b_j + \sum_{j\geqslant N} b_j.$$

Prve dvije sume na desnoj strani su konačne sume članova iz $\mathrm{S}^{m-k}_{1,0}$ ($b_j - a_j$ je čak iz $\mathrm{S}^{-\infty}_{1,0}$) pa i same pripadaju tom prostoru. Preostaje provjeriti da je i posljednja suma u $\mathrm{S}^{m-k}_{1,0}$. To slijedi iz ocjene

$$\begin{aligned}\left|\lambda(\boldsymbol{\xi})^{|\boldsymbol{\beta}|-(m-k)}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}}\sum_{j\geqslant N} b_j(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\right| &\leqslant \sum_{j\geqslant N}|\lambda(\boldsymbol{\xi})^{|\boldsymbol{\beta}|-m+k}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} b_j(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \\ &\leqslant \sum_{j\geqslant k+1}\lambda^{k+1-j}(\boldsymbol{\xi})\chi_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant 1} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{\sqrt{1+4\pi^2}-1},\end{aligned}$$

gdje smo koristili ocjenu (3) i činjenicu da je $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant \frac{1}{\varepsilon_j} \geqslant 1$, te stoga $\lambda(\boldsymbol{\xi}) \geqslant \sqrt{1+4\pi^2}$ na $\operatorname{supp} b_j$. Time smo pokazali da je

$$a - \sum_{j<k} a_j \in \mathrm{S}^{m-k}_{1,0},$$

te posebno za $k=0$ slijedi $a \in \mathrm{S}^m_{1,0}$. Ocjena na $\operatorname{supp} a$ slijedi neposredno iz konstrukcije.

Q.E.D.

Drugi alat su titrajni integrali. Definirajmo najprije pojam amplitude.

Definicija 2. *Kažemo da je $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C})$ amplituda reda $m \geqslant 0$, u oznaci $a \in A^m$, ako*

$$(\forall\,\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d) \quad |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} a(\mathbf{x})| \leqslant C_{\boldsymbol{\alpha}}\lambda^m(\mathbf{x}),$$

gdje je $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ konstanta koja ovisi samo o $\boldsymbol{\alpha}$.

Na A^m definiramo polunorme

$$\|a\|_k = \max_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant k} \|\lambda(\mathbf{x})^{-m}\,\partial^{\boldsymbol{\alpha}} a(\mathbf{x})\|_{\mathrm{L}^\infty}, \quad k \in \mathbf{N}_0,$$

a titrajni integrali definirani su limesom koji je dan u sljedećem teoremu:

Teorem 1. *Neka je q nedegenerirana kvadratna forma na $\mathbf{R}^d$, $a \in A^m$ i $\varphi \in \mathcal{S}$ takva da je $\varphi(\mathbf{0}) = 1$. Onda postoji limes*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x})\varphi(\varepsilon\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{4}$$

koji ne ovisi o φ i jednak je $\int e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ za $a \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$. Za $a \notin \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ limes i dalje označavamo s $\int e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, te pri tom vrijedi ocjena

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\Big| \leqslant C_{q,m}\|a\|_{m+d+1}.$$

Dem. Za $a \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ tvrdnja slijedi neposredno iz teorema o dominiranoj konvergenciji. Općenito, izaberimo funkciju $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ takvu da je $\psi \equiv 1$ na $\mathrm{K}[\mathbf{0}, 1]$ i $\operatorname{supp}\psi \subseteq \mathrm{K}[\mathbf{0}, 2]$, i definirajmo

$$I_j = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x})\psi(2^{-j}\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Dokazat ćemo da postoji $\lim_{j\to\infty} I_j$ i da se podudara s limesom (4), čime ćemo dokazati i njegovo postojanje, i neovisnost o $\varphi \in \mathcal{S}$. Štoviše, budući da po teoremu o dominiranoj konvergenciji za fiksni $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x})\varphi(\varepsilon\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x})\varphi(\varepsilon\mathbf{x})\psi(2^{-j}\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

definirat ćemo i

$$I_j(\varepsilon) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x})(1 - \varphi(\varepsilon\mathbf{x}))\psi(2^{-j}\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

i tada je dovoljno pokazati da $\lim_{j\to\infty} I_j$ postoji, te da je $\lim_{j\to\infty} I_j(\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

Zamjenom varijabli $\mathbf{y} = 2^{-j}\mathbf{x}$ dobivamo

$$\begin{aligned} I_j - I_{j-1} &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i 2^{2j} q(\mathbf{y})} a(2^j\mathbf{y})(\psi(\mathbf{y}) - \psi(2\mathbf{y}))2^{jd}\,d\mathbf{y}, \\ I_j(\varepsilon) - I_{j-1}(\varepsilon) &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i 2^{2j} q(\mathbf{y})} a(2^j\mathbf{x})(1 - \varphi(\varepsilon 2^j\mathbf{y}))(\psi(\mathbf{y}) - \psi(2\mathbf{y}))2^{jd}\,d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

i sada primjenom sljedeće leme slijedi

$$|I_j - I_{j-1}| \leqslant C_{q,m}2^{-j}\|a\|_{m+d+1}, \quad |I_j(\varepsilon) - I_{j-1}(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon C 2^{-j},$$

gdje konstante $C_{q,m}$ i C ne ovise o j i ε. Dobivene nejednakosti povlače tvrdnju teorema.

Q.E.D.

Lema 2. *Neka je q nedegenerirana kvadratna forma na $\mathbf{R}^d$ i $\chi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ takva da je $\chi \equiv 0$ u okolini $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^d$. Tada za svaki $N \in \mathbf{N}_0$ vrijedi*

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i\mu^2 q(\mathbf{y})} b(\mu\mathbf{y})\chi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\Big| \leqslant C_N \mu^{-N} \sup_{\mathbf{y}\in\operatorname{supp}\chi,\,|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant N} |(\partial^{\boldsymbol{\alpha}} b)(\mu\mathbf{y})|,$$

gdje konstanta C_N ne ovisi ni o $\mu \geqslant 1$ ni o $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$. ∎

Dokaz prethodne leme, kao i dokazi rezultata koji slijede mogu se pronaći u [SR]. Titrajni integrali zadržavaju dobra svojstva apsolutno konvergentnih integrala. Točnije, vrijede formule zamjene varijable i parcijalne integracije, moguće je prijeći s derivacijom pod znak integrala, te zamijeniti poredak integracije. Sve je to precizirano sljedećim teoremom.

Teorem 2. *Za titrajne integrale definirane Teoremom 1 vrijede sljedeća svojstva:*

(a) Ako je $\mathbf{A}$ regularna realna matrica, vrijedi

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{A}\mathbf{y})} a(\mathbf{A}\mathbf{y})|\det\mathbf{A}|\,d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

(b) Za $a \in A^m$, $b \in A^l$ i $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ vrijedi

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x})\partial^{\boldsymbol{\alpha}} b(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^d} b(\mathbf{x})(-\partial)^{\boldsymbol{\alpha}}(e^{2\pi i q(\mathbf{x})}a(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}.$$

(c) Ako je $a \in A^m(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^r)$, onda je $\int e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x} \in A^m(\mathbf{R}^r)$ i

$$\partial_{\mathbf{y}}^{\boldsymbol{\alpha}} \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} \partial_{\mathbf{y}}^{\boldsymbol{\alpha}} a(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^r.$$

(d) Ako je $a \in A^m(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^r)$, a s nedegenerirana kvadratna forma na $\mathbf{R}^r$, onda je

$$\int_{\mathbf{R}^r} e^{2\pi i s(\mathbf{y})}\Big(\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i q(\mathbf{x})} a(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\Big)\,d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^r} e^{2\pi i (q(\mathbf{x})+s(\mathbf{y}))} a(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}.$$

∎

Koristeći pojam titrajnog integrala definiramo simbole a^* i $a\sharp b$ koji će redom odgovarati adjungiranom operatoru te kompoziciji operatora. Definicije i asimptotički razvoji dani su sljedećim teoremom (v. [SR, Theorem 2.7]):

Teorem 3. *Neka je $a \in \mathrm{S}_{1,0}^m$ i $b \in \mathrm{S}_{1,0}^l$. Onda titrajni integrali*

$$a^*(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-2\pi i \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\eta}} \bar{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y},\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\,d\mathbf{y}\,d\boldsymbol{\eta},$$
$$a\sharp b(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-2\pi i \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\eta}} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}) b(\mathbf{x}-\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})\,d\mathbf{y}\,d\boldsymbol{\eta}$$

definiraju operatore $a^* \in \mathrm{S}_{1,0}^m$ i $a\sharp b \in \mathrm{S}_{1,0}^{m+l}$ sa sljedećim asimtotičkim razvojima

$$a^* \sim \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\partial_{\boldsymbol{\xi}}^{\boldsymbol{\alpha}} D_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} \bar{a} \quad i \quad a\sharp b \sim \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\partial_{\boldsymbol{\xi}}^{\boldsymbol{\alpha}} a D_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} b.$$

∎

4. Pseudodiferencijalni operatori

Za $a \in \mathrm{S}^{\infty}_{1,0}$ i $\varphi \in \mathcal{S}$ integral u formuli (2) je apsolutno konvergentan i definira funkciju koja je ponovno u $\mathcal{S}$. Točnije, vrijedi

Teorem 4. *Za $a \in \mathrm{S}^{\infty}_{1,0}$ i $\varphi \in \mathcal{S}$ formula*

$$a(\mathbf{x}, D)\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}$$

definira funkciju $a(\cdot, D)\varphi \in \mathcal{S}$ te postoje konstante $N \in \mathbf{N}_0$ i C_k za $k \in \mathbf{N}_0$, koje ovise o a, takve da je

$$(\forall\, \varphi \in \mathcal{S}) \quad |a(\cdot, D)\varphi|_k \leqslant C_k |\varphi|_{k+N}.$$

∎

Sljedeći teorem otkriva pravo značenje simbola definiranih Teoremom 3.

Teorem 5. *Za proizvoljne $a, b \in \mathrm{S}^{\infty}_{1,0}$ i $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ vrijedi*

(a) $\langle a^*(\cdot, D)\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, a(\cdot, D)\psi\rangle$,

(b) $\langle a\sharp b(\cdot, D)\varphi, \psi\rangle = \langle a(\cdot, D)b(\cdot, D)\varphi, \psi\rangle$.

∎

Prethodna dva teorema omogućuju proširenje operatora $a(\cdot, D) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ do operatora sa $\mathcal{S}'$ u $\mathcal{S}'$:

Definicija 3. *Za $a \in \mathrm{S}^{\infty}_{1,0}$ definiramo pseudodiferencijalni operator sa simbolom a kao operator $a(\cdot, D) : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ formulom*

$$\langle a(\cdot, D)u, \varphi\rangle = \langle u, a^*(\cdot, D)\varphi\rangle, \quad u \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}.$$

Za $a \in \mathrm{S}^{m}_{1,0}$ kažemo da je $a(\cdot, D)$ reda m i skup svih pseudodiferencijalnih operatora reda m označavamo s $\Psi^{m}_{1,0}$. Skup svih pseudodiferencijalnih operatora definiranog tipa je $\Psi^{\infty}_{1,0} = \cup_m \Psi^{m}_{1,0}$, a elemente skupa $\Psi^{-\infty}_{1,0} = \cap_m \Psi^{m}_{1,0}$ zovemo izglađujući operatori zbog svojstva danog sljedećim teoremom.

Teorem 6. *Operator $a(\cdot, D) \in \Psi^{-\infty}_{1,0}$ preslikava $\mathcal{E}'$ u $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ u $\mathcal{O}$. Također, proizvoljan $a(\cdot, D) \in \Psi^{\infty}_{1,0}$ preslikava $\mathcal{S}$ u $\mathcal{S}$ i $\mathcal{O}$ u $\mathcal{O}$, te zadovoljava tzv. pseudolokalno svojstvo*

$$\operatorname{supp}\operatorname{sing}(a(\cdot, D)u) \subseteq \operatorname{supp}\operatorname{sing} u, \quad u \in \mathcal{S}'.$$

Za eliptičke operatore, koje definiramo i proučavamo u sljedećem poglavlju, vrijedi i

$$\operatorname{supp}\operatorname{sing}(a(\cdot, D)u) = \operatorname{supp}\operatorname{sing} u, \quad u \in \mathcal{S}'.$$

∎

Dokaz prethodnog teorema oslanja se na ograničenost pseudodiferencijalnih operatora kao operatora između odgovarajućih Soboljevljevih prostora, rezultat koji je dan sljedećim teoremom.

Teorem 7. *Neka je $a(\cdot, D) \in \Psi^{m}_{1,0}$. Onda za proizvoljne $s \in \mathbf{R}$ i $u \in \mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)$ vrijedi $a(\cdot, D)u \in \mathrm{H}^{s-m}(\mathbf{R}^d)$ i postoji konstanta C_s, koja ovisi samo o s, takva da je*

$$\|a(\cdot, D)u\|_{\mathrm{H}^{s-m}} \leqslant C_s \|u\|_{\mathrm{H}^s}.$$

∎

Za $s = 0$ i $m = 0$ kao poseban slučaj dobivamo ograničenost operatora reda nula na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$. Više je autora (v. npr. [St, Proposition VI.5.4] i [W, Theorem 9.7]) pokazalo da rezultat vrijedi i za $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$. Taj rezultat, kao i sam Teorem 7, poopćujemo u sljedećem poglavlju.

5. Kvantizacija

Formula (2) nije jedini način kako simbolu (diferencijalnog operatora, ili općenitije pseudodiferencijalnog) pridružiti operator. Takvi postupci zovu se kvantizacija. Cilj nam nije razvijanje opće teorije, već samo kratak pregled nekih poznatih kvantizacija.

Najprije primijetimo da se primjenom definicije Fourierove pretvorbe, formula (2) može dalje raspisati u obliku

$$a(\mathbf{x}, D)\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}.$$

Vrijedi i općenitija tvrdnja: ako je $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, onda je za svaki $u \in \mathcal{S}'$ dobro definirano djelovanje sljedećeg operatora:

$$[\mathrm{Op}(a)u](\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi},$$

čime je dana *Kohn-Nirenbergova* (standardna, još u oznaci $a^S(\mathbf{x}, D)$) kvantizacija hamiltonijana a.

Ukoliko pođemo od diferencijalnog operatora u konzervativnom obliku

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} D^{\boldsymbol{\alpha}}(a_{\boldsymbol{\alpha}}\,\cdot),$$

koristeći ranije formule za Fourierovu pretvorbu derivacije (1), dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} D^{\boldsymbol{\alpha}}(a_{\boldsymbol{\alpha}}u)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} (D^{\boldsymbol{\alpha}}(a_{\boldsymbol{\alpha}}u))^\wedge(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}(a_{\boldsymbol{\alpha}}u)^\wedge(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{y})u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}} \Big(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{y})\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\Big) u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi},
\end{aligned}$$

čime smo motivirali *adjungiranu kvantizaciju*

$$[a^{Ad}(\mathbf{x}, D)u](\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}.$$

Mogući su i drugi izbori. Posebno, u kvantnoj mehanici poznata je *Weylova kvantizacija* (iz 1931., v. [We]):

$$[a^W(\mathbf{x}, D)u](\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} a\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}, \boldsymbol{\xi}\right) u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi},$$

a sve navedeno su posebni slučajevi τ-*kvantizacije* (v. [NR]):

$$[\mathrm{Op}_\tau(a)u](\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} a((1-\tau)\mathbf{x}+\tau\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}.$$

II. Ograničenost pseudodiferencijalnih operatora na $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathbf{R}^d)$ prostorima

1. Uvod

U ovom poglavlju najprije definiramo Lebesgueove prostore s mješovitom normom te dokazujemo neka njihova svojstva, od kojih je gustoća Schwartzovog prostora ključna za daljnje rezultate. Zatim kroz niz lema, oslanjajući se na modificiranu varijantu Marcinkiewiczevog teorema interpolacije i ideje koje su u [BIN] autori primijenili na integralne operatore, dokazujemo glavni rezultat: ograničenost pseudodiferencijalnih operatora reda nula na Lebesgueovim prostorima s mješovitom normom.

Za operatore pozitivnog reda dokazujemo rezultate ograničenosti između odgovarajućih Soboljevljevih prostora te rezultate zatvorenosti na $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ u eliptičkom slučaju.

Dokazujemo i globalni rezultat regularnosti rješenja eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi na Lebesgueovim prostorima s mješovitom normom.

Podsjetimo se, kažemo da je $a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d; \mathbf{C})$ simbol reda $m \in \mathbf{R}$, u oznaci $a \in \mathrm{S}^m_{1,0}$, ako vrijedi

$$(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)\ (\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad |\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \leqslant C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \lambda^{m-|\boldsymbol{\beta}|}(\boldsymbol{\xi}), \tag{1}$$

gdje je $\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{1+4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^2}$, a $C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ konstanta koja ovisi samo o $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$. Za takav a definiramo operator $a(\cdot, D) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ formulom

$$(a(\mathbf{x}, D)\varphi)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}. \tag{2}$$

Koristeći pojam adjungiranog operatora $a^*(\cdot, D)$, formulom $\langle a(\cdot,D)u, \varphi\rangle = \langle u, a^*(\cdot,D)\varphi\rangle$ proširujemo operator $a(\cdot, D)$ do operatora na prostoru temperiranih distribucija, u istoj oznaci. Tako definiran operator $a(\cdot, D) : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ zovemo pseudodiferencijalnim operatorom reda m. Za detalje vidjeti prethodno poglavlje ili [SR].

Za $a \in \mathrm{S}^m_{1,0}$ iz ocjene (1) lako slijedi da je, za fiksni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, $a(\mathbf{x}, \cdot) \in \mathcal{S}'$ pa postoji temperirana distrubucija $k(\mathbf{x}, \cdot)$ takva da je $\widehat{k(\mathbf{x}, \cdot)} = a(\mathbf{x}, \cdot)$. Prema svojstvima konvolucije i Fourierove pretvorbe [F, str. 295–296] sada slijedi da se za $\varphi \in \mathcal{S}$ formula (2) može zapisati u obliku

$$(a(\mathbf{x}, D)\varphi)(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}, \cdot) * \varphi. \tag{3}$$

U [St, Proposition VI.4.1] je pokazano da se izvan okoline ishodišta *jezgra* $k(\mathbf{x}, \cdot)$ podudara s funkcijom koja brzo opada u beskonačnosti. Točnije, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1. *Neka je $a \in \mathrm{S}^m_{1,0}$. Tada je $k \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\})$ i zadovoljava ocjenu*

$$|\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} k(\mathbf{x},\mathbf{z})| \leqslant C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},N} |\mathbf{z}|^{-d-m-|\boldsymbol{\beta}|-N}, \qquad \mathbf{z} \neq \mathbf{0},$$

za proizvoljne multiindekse $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$, i svaki $N \in \mathbf{N}_0$ takav da je $d + m + |\boldsymbol{\beta}| + N > 0$. ∎

Posebno, za $m = 0$, $N = 1$ i $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ dobivamo da vrijedi:

$$|k(\mathbf{x},\mathbf{z})| \leqslant C|\mathbf{z}|^{-d-1}, \qquad \mathbf{z} \neq \mathbf{0}. \tag{4}$$

S druge strane, već smo definirali proširenje operatora $a(\cdot, D)$ na $\mathcal{S}'$, što posebno uključuje i $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$. Vrijedi sljedeća reprezentacija:

Korolar 1. *Za* $a \in \mathrm{S}^0_{1,0}$, $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$ *i skoro svaki* $\mathbf{x} \notin \operatorname{supp} f$ *vrijedi:*

$$(a(\mathbf{x}, D)f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} k(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \tag{5}$$

Dem. Zbog ocjene (4) očito se (3) može zapisati u obliku (5) za svaku funkciju $f \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ i za svaki $\mathbf{x} \notin \operatorname{supp} f$. Ako je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, te $\mathbf{x} \notin \operatorname{supp} f$, Hölderova nejednakost daje ocjenu

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^d} k(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\Big| \leqslant C \Big\| |\mathbf{x} - \cdot|^{-d-1} \chi_{\operatorname{supp} f} \Big\|_{\mathrm{L}^{p'}} \cdot \|f\|_{\mathrm{L}^p} < \infty\,,$$

jer je funkcija $|\mathbf{x} - \cdot|^{-d-1}\chi_{\operatorname{supp} f} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^d)$, pa je desna strana formule (5) dobro definirana.

Nadalje, zbog gustoće postoji niz (f_n) u $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ takav da

$$f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^p} f;\ \text{pritom možemo postići da je } \operatorname{supp} f_n \subseteq \operatorname{supp} f + \mathrm{K}[0, 1/n].$$

Dakle, za $\mathbf{x} \notin \operatorname{supp} f$ i dovoljno veliki n vrijedi

$$(a(\mathbf{x}, D)f_n)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} k(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) f_n(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Tvrdnja sada slijedi na limesu. Zbog neprekinutosti pseudodiferencijalnih operatora reda nula na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ za $1 < p < \infty$, lijeva strana konvergira prema $(a(\mathbf{x}, D)f)(\mathbf{x})$, a konvergencija desne strane slijedi uz pomoć ocjene (4):

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^d} k(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y})(f_n - f)(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\Big| \leqslant C \Big\| |\mathbf{x} - \cdot|^{-d-1} \chi_{\operatorname{supp}(f_n - f)} \Big\|_{\mathrm{L}^{p'}} \cdot \|f_n - f\|_{\mathrm{L}^p} \longrightarrow 0.$$

Budući da konvergencija u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, $1 < p < \infty$ povlači konvergenciju skoro svuda na podnizu, tvrdnja je dokazana.

Q.E.D.

2. Lebesgueovi prostori s mješovitom normom

U ovom radu $\mathbf{p}$ označava d-torku $(p_1, \dots, p_d) \in [1, \infty]^d$, te koristimo standardni parcijalni uređaj na $[1, \infty]^d$. $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ je za $\mathbf{p} \in [1, \infty\rangle^d$ (uz identifikaciju skoro svuda jednakih funkcija) prostor svih izmjerivih kompleksnih funkcija f na $\mathbf{R}^d$ za koje je

$$\|f\|_{\mathbf{p}} = \Big(\int \cdots \Big(\int\Big(\int |f(x_1, \dots, x_d)|^{p_1} dx_1\Big)^{p_2/p_1} dx_2\Big)^{p_3/p_2} \cdots dx_d\Big)^{1/p_d} < \infty,$$

tj. za $i = 1, \dots, d$ se redom računaju $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p_i}}$ norme po varijabli x_i. $\|\cdot\|_{\mathbf{p}}$ je norma uz koju $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ postaje Banachov prostor. Analogno definiramo tu normu i u slučaju da je neki p_i jednak ∞.

U ovom odjeljku dokazat ćemo da je $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'$, te da je za $\mathbf{p} \in [1, \infty\rangle^d$, $\mathcal{S}$ gust u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$. Također navodimo neke važne tvrdnje o spomenutim prostorima. Koristeći ocjenu

$$|\varphi(\mathbf{x})| \leqslant \Big(\sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d} \Big|\varphi(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^d (1 + x_i^2)\Big|\Big) \prod_{i=1}^d (1 + x_i^2)^{-1} \leqslant 2^d |\varphi|_{2d} \prod_{i=1}^d (1 + x_i^2)^{-1},$$

te ocjenu

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-p_i}\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1}\, dx = \pi,$$

uzastopnim potenciranjem i integriranjem lako dobivamo ocjenu $\|\varphi\|_{\mathbf{p}} \leqslant (2\pi)^d |\varphi|_{2d}$. Time je pokazana inkluzija $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, štoviše i neprekinuto ulaganje $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

Druga inkluzija $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'$ sada lako slijedi korištenjem Hölderove nejednakosti (v. Teorem 5):

$$(\forall\, u \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d))(\forall\, \varphi \in \mathcal{S}) \quad \Big|\int u(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\Big| \leqslant \|u\|_{\mathbf{p}} \|\varphi\|_{\mathbf{p}'} \leqslant (2\pi)^d \|u\|_{\mathbf{p}} |\varphi|_{2d}.$$

Dapače, u [BP] je pokazano da je $\mathrm{L}^{\mathbf{p}'}(\mathbf{R}^d)$ topološki dual prostora $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, za $\mathbf{p} \in [1,\infty\rangle^d$ i $1/\mathbf{p} + 1/\mathbf{p}' = (1,\ldots,1) =: \mathbf{1}$, gdje je

$$\mathbf{p}' = (p_1',\ldots,p_d'), \qquad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'} = 1,$$

pa iz gustoće $\mathcal{S}$ u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}'}(\mathbf{R}^d)$ (koju ćemo uskoro dokazati) i opće teorije transponiranih operatora (v. [BC, str. 41–45]) slijedi da je $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}'$, $\mathbf{p} \in \langle 1,\infty]^d$. To nam omogućuje da zaključimo da je u slučaju $\mathbf{p} \in \langle 1,\infty\rangle^d$ za ograničenost pseudodiferencijalnog operatora na $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ dovoljno provjeriti da

$$(\exists\, C > 0)(\forall\, f \in \mathcal{S}) \quad \|a(\cdot, D)f\|_{\mathbf{p}} \leqslant C\|f\|_{\mathbf{p}}.$$

Za dokaz gustoće trebat će nam sljedeće poopćenje poznatog teorema o konvergenciji Lebesgueovog integrala:

Teorem 2. (o dominiranoj konvergenciji za $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ prostore, $\mathbf{p} \in [1,\infty\rangle^d$) *Neka je (f_n) niz izmjerivih funkcija. Ako $f_n \longrightarrow f$ (ss), te ako postoji funkcija $G \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ takva da je $|f_n| \leqslant G$ (ss), za $n \in \mathbf{N}$, onda $\|f_n - f\|_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0$.*

Dem. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po broju varijabli. Za $d = 1$ tvrdnja slijedi po klasičnom teoremu o dominiranoj konvergenciji iz ocjene $|f_n - f|^p \leqslant (2G)^p$ (ss). Dokažimo sada da tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije, tj. ako je istinita u dimenziji $d-1$.

Označimo $\bar{\mathbf{x}} = (x_1,\ldots,x_{d-1})$, tj. $\mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}, x_d)$, te analogno $\mathbf{p} = (\bar{\mathbf{p}}, p_d)$. Također, za izmjeriv $E \subseteq \mathbf{R}^d$ označimo $E_{x_d} = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{d-1} : (\bar{\mathbf{x}}, x_d) \in E\}$. Prema Fubinijevom teoremu (v. [AV], Teorem III.11) je

$$\mathsf{vol} E = \int_{\mathbf{R}} \mathsf{vol} E_{x_d}\, dx_d\,,$$

pa možemo zaključiti da je

$$\mathsf{vol} E = 0 \iff \mathsf{vol} E_{x_d} = 0 \text{ (ss } x_d).$$

Konkretno,

$$(*) \qquad f_n \longrightarrow f \text{ (ss)} \iff f_n(\cdot, x_d) \longrightarrow f(\cdot, x_d) \text{ (ss)}, \text{ za skoro svaki } x_d,$$

$$(**) \qquad |f_n| \leqslant G \text{ (ss)} \iff |f_n(\cdot, x_d)| \leqslant G(\cdot, x_d) \text{ (ss)}, \text{ za skoro svaki } x_d.$$

Prvo dokazujemo da za skoro svaki x_d postoji funkcija $H_1(\cdot, x_d) \in \mathrm{L}^{\bar{\mathbf{p}}}(\mathbf{R}^{d-1})$ takva da je

$$|f_n(\cdot, x_d)| \leqslant H_1(\cdot, x_d) \text{ (ss)},$$

da bismo po pretpostavci indukcije mogli zaključiti da

$$\|f_n - f\|_{\bar{\mathbf{p}}} \longrightarrow 0 \text{ (ss } x_d).$$

Konačnost $\Big\| \|G(\cdot, x_d)\|_{\bar{\mathbf{p}}} \Big\|_{p_d}$ i $p_d < \infty$ povlači $\|G(\cdot, x_d)\|_{\bar{\mathbf{p}}} < \infty$ (ss), pa možemo uzeti

$$H_1(\cdot, x_d) = \begin{cases} G(\cdot, x_d), & \text{ako je } \|G(\cdot, x_d)\|_{\bar{\mathbf{p}}} < \infty, \\ 0, & \text{ako je } \|G(\cdot, x_d)\|_{\bar{\mathbf{p}}} = \infty. \end{cases}$$

Sada želimo pokazati da postoji $H_2 \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ takva da je

$$\|f_n(\cdot, x_d) - f(\cdot, x_d)\|_{\bar{\mathbf{p}}}^{p_d} \leqslant H_2(x_d) \text{ (ss)},$$

da bi po klasičnom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedilo

$$\|f_n - f\|_{\mathbf{p}} = \Big\| \|f_n - f\|_{\bar{\mathbf{p}}} \Big\|_{p_d} \longrightarrow 0.$$

Zbog $(*)$ i $(**)$ slijedi

$$\|f_n - f\|_{\bar{\mathbf{p}}} \leqslant \|f_n\|_{\bar{\mathbf{p}}} + \|f\|_{\bar{\mathbf{p}}} \leqslant 2\|G\|_{\bar{\mathbf{p}}} \text{ (ss)},$$

tj. možemo uzeti

$$H_2(x_d) = 2^{p_d} \|G(\cdot, x_d)\|_{\bar{\mathbf{p}}}^{p_d}.$$

Q.E.D.

Neka je sada $\mathbf{p} \in [1, \infty\rangle^d$ i $f \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$. Nadalje, neka je χ_n karakteristična funkcija kugle $\mathrm{K}[0, n]$. Za dovoljno velik n prema prethodnom teoremu funkcija $f\chi_n$ po volji aproksimira funkciju f u normi prostora $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, tj. bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\operatorname{supp} f \subset \mathrm{K}[0, n]$. Poznato je da postoji niz jednostavnih funkcija (f_n) takav da je $|f_n| \leqslant |f|$ te da $f_n \longrightarrow f$ (ss). Ponovnom primjenom Teorema 2 slijedi da su funkcije $g = \sum_1^m a_k \chi_{E_k}$, gdje su E_k ograničeni, guste u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

Sljedeći korak je dokazati gustoću $\mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$. Zbog prethodno dokazanog dovoljno je za omeđen izmjeriv skup E aproksimirati χ_E. Zbog regularnosti Lebesgueove mjere skup E možemo aproksimirati otvorenim i kompaktnim skupovima. Točnije, za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoje kompaktan skup $K_n \subset E$ i otvoren skup $U_n \supset E$ takvi da je $\mathsf{vol}(U_n \backslash K_n) < 1/n$. Pritom možemo postići da su svi razmatrani skupovi omeđeni, da je niz (K_n) rastući, te niz (U_n) padajući. Sada po Teoremu 2 za svaki $\varepsilon > 0$ možemo izabrati $n \in \mathbf{N}$ takav da je $\|\chi_{U_n \backslash K_n}\|_{\mathbf{p}} < \varepsilon$. Konačno, Urysohnova lema osigurava postojanje funkcije $f_n \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$ takve da je $\chi_{K_n} \leqslant f_n \leqslant \chi_{U_n}$, pa slijedi

$$\|\chi_E - f_n\|_{\mathbf{p}} \leqslant \|\chi_{U_n \backslash K_n}\|_{\mathbf{p}} < \varepsilon.$$

Posljednji korak, u kojem izglađivanjem konvolucijom dokazujemo da je $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ (dakle i $\mathcal{S}$) gust u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, oslanja se na sljedeću tvrdnju:

Teorem 3. *Za proizvoljni* $\mathbf{p} \in [1,\infty\rangle^d$ *translacija je neprekinuta u* $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}$ *normi, tj. za* $f \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ *i* $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^d$ *vrijedi*

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{0}} \|\tau_{\mathbf{y}+\mathbf{z}} f - \tau_{\mathbf{z}} f\|_{\mathbf{p}} = 0,$$

gdje je $\tau_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$.

Dem. Budući da je $\tau_{\mathbf{y}+\mathbf{z}} = \tau_{\mathbf{y}}\tau_{\mathbf{z}}$, možemo zamjenom f s $\tau_{\mathbf{z}} f$ bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Pretpostavimo najprije da je $f \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$. Za $|\mathbf{y}| \leqslant 1$ nosači funkcija $\tau_{\mathbf{y}} f$ sadržani su u zajedničkom kompaktnom skupu K, pa ako s K_i označimo projekciju skupa K na i-tu koordinatnu os, vrijedi

$$\|\tau_{\mathbf{y}} f - f\|_{\mathbf{p}} \leqslant \|\tau_{\mathbf{y}} f - f\|_\infty \prod_{i=1}^d (\mathsf{vol} K_i)^{1/p_i} \longrightarrow 0 \text{ kad } \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Posljednja konvergencija je zapravo dobro poznata činjenica o jednolikoj neprekinutosti funkcije f.

Pretpostavimo sada da je $f \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$. Za $\varepsilon > 0$, prema ranije dokazanom postoji $g \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$ takva da je $\|g - f\|_{\mathbf{p}} < \varepsilon/3$, tako da je

$$\|\tau_{\mathbf{y}} f - f\|_{\mathbf{p}} \leqslant \|\tau_{\mathbf{y}}(f-g)\|_{\mathbf{p}} + \|\tau_{\mathbf{y}} g - g\|_{\mathbf{p}} + \|g - f\|_{\mathbf{p}} < \frac{2}{3}\varepsilon + \|\tau_{\mathbf{y}} g - g\|_{\mathbf{p}},$$

a $\|\tau_{\mathbf{y}} g - g\|_{\mathbf{p}} < \varepsilon/3$ ako je $|\mathbf{y}|$ dovoljno malo.

Q.E.D.

Neka je u nastavku ϕ proizvoljna funkcija u $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ takva da je $\int_{\mathbf{R}^d} \phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1$ i neka je za $t > 0$

$$\phi_t(\mathbf{x}) = t^{-d}\phi(t^{-1}\mathbf{x}).$$

Možemo npr. uzeti

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-|\mathbf{x}|^2}}, & \text{ako je } |\mathbf{x}| < 1, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

gdje konstantu C biramo tako da je $\int_{\mathbf{R}^d} \phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1$.

Kako je poznato da je $g * \phi_t \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ za proizvoljnu $g \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$, to će dokaz gustoće biti završen ako pokažemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \|g * \phi_{1/n} - g\|_{\mathbf{p}} = 0.$$

Za $\mathbf{y} = t\mathbf{z}$ vrijedi

$$\begin{aligned} g * \phi_t(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) &= \int (g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}))\phi_t(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\ &= \int (g(\mathbf{x}-t\mathbf{z}) - g(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \\ &= \int (\tau_{t\mathbf{z}} g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Primjenom Teorema 4 (slijedi u nastavku) za $t = 1/n$ dobivamo

$$\|g * \phi_{1/n} - g\|_{\mathbf{p}} \leqslant \int \|\tau_{\mathbf{z}/n} g - g\|_{\mathbf{p}} |\phi(\mathbf{z})|\, d\mathbf{z}.$$

Niz funkcija $\mathbf{z} \mapsto \|\tau_{\mathbf{z}/n} g - g\|_{\mathbf{p}}$ je jednoliko omeđen s $2\|g\|_{\mathbf{p}}$, a po točkama teži prema nuli (Teorem 3), pa $\|g * \phi_{1/n} - g\|_{\mathbf{p}}$ teži prema nuli po Teoremu 2 (o dominiranoj konvergenciji).

Navodimo na kraju i poopćenja Minkowskijeve nejednakosti za integrale i Hölderove nejednakosti, koja se lako dokazuju uzastopnom primjenom klasičnih nejednakosti, po svakoj varijabli posebno, i koja zato zovemo istim imenima. Nalazimo in npr. u [BIN, 2.4, 2.12].

Teorem 4. **(Minkowskijeva nejednakost za integrale)** *Za svaki* $\mathbf{p} \in [1, \infty]^{d_1}$ *i proizvoljnu funkciju* $f \in \mathrm{L}^{(\mathbf{p},1,\ldots,1)}(\mathbf{R}^{d_1+d_2})$ *vrijedi*

$$\Big\| \int_{\mathbf{R}^{d_2}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \Big\|_{\mathbf{p}} \leqslant \int_{\mathbf{R}^{d_2}} \|f(\cdot, \mathbf{y})\|_{\mathbf{p}}\, d\mathbf{y}.$$

∎

Teorem 5. **(Hölderova nejednakost)** *Za svaki* $\mathbf{p} \in [1, \infty]^{d}$ *i izmjerive* f *i* g *vrijedi*

$$\Big| \int_{\mathbf{R}^{d}} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \Big| \leqslant \|f\|_{\mathbf{p}} \|g\|_{\mathbf{p}'}.$$

∎

U [BP] dokazan je i sljedeći teorem, a mi ćemo kasnije koristiti korolar koji slijedi.

Teorem 6. *Za svaki* $\mathbf{p} \in [1, \infty]^{d}$ *i izmjerivu* f *vrijedi*

$$\|f\|_{\mathbf{p}} = \sup_{g \in \mathrm{S}_{\mathbf{p}'}} \Big| \int f g \, d\mathbf{x} \Big|,$$

gdje je $\mathrm{S}_{\mathbf{p}'}$ *jedinična sfera u* $\mathrm{L}^{\mathbf{p}'}(\mathbf{R}^d)$. ∎

Korolar 2. *Za svaki* $\mathbf{p} \in \langle 1, \infty]^{d}$ *i proizvoljnu* $f \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ *vrijedi*

$$\|f\|_{\mathbf{p}} = \sup_{g \in \mathrm{S}_{\mathbf{p}'} \cap \mathcal{S}} \Big| \int f g \, d\mathbf{x} \Big|.$$

Dem. Zbog Teorema 6 dovoljno je provjeriti da

$$(\forall\, f \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d))(\forall\, g \in \mathrm{S}_{\mathbf{p}'})(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, g_\varepsilon^0 \in \mathrm{S}_{\mathbf{p}'} \cap \mathcal{S}) \quad \Big| \int f(g - g_\varepsilon^0)\, d\mathbf{x} \Big| < \varepsilon.$$

Štoviše, zbog Hölderove nejednakosti dovoljno je dokazati da

$$(\forall\, g \in \mathrm{S}_{\mathbf{p}'})(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, g_\varepsilon^0 \in \mathrm{S}_{\mathbf{p}'} \cap \mathcal{S}) \quad \|g - g_\varepsilon^0\|_{\mathbf{p}'} < 3\varepsilon.$$

Neka je $g \in \mathrm{S}_{\mathbf{p}'}$ proizvoljna. Zbog gustoće postoji $g_\varepsilon \in \mathcal{S}$ takva da je $\|g - g_\varepsilon\|_{\mathbf{p}'} < \varepsilon$. Pokažimo da za

$$g_\varepsilon^0 := \frac{g_\varepsilon}{\|g_\varepsilon\|_{\mathbf{p}'}} \in \mathrm{S}_{\mathbf{p}'} \cap \mathcal{S}$$

vrijedi $\|g - g_\varepsilon^0\|_{\mathbf{p}'} < 3\varepsilon$. Zbog nejednakosti trokuta slijedi

$$1 - \varepsilon < \|g\|_{\mathbf{p}'} - \|g - g_\varepsilon\|_{\mathbf{p}'} \leqslant \|g_\varepsilon\|_{\mathbf{p}'} \leqslant \|g\|_{\mathbf{p}'} + \|g - g_\varepsilon\|_{\mathbf{p}'} < 1 + \varepsilon,$$

pa je g_ε^0 dobro definirana i vrijedi ocjena

$$
\begin{aligned}
\|g-g_\varepsilon^0\|_{\mathbf{p}'} &= \frac{\Big\|(\|g_\varepsilon\|_{\mathbf{p}'}-1)g+g-g_\varepsilon\Big\|_{\mathbf{p}'}}{\|g_\varepsilon\|_{\mathbf{p}'}} \leqslant \frac{\Big|\|g_\varepsilon\|_{\mathbf{p}'}-1\Big|\|g\|_{\mathbf{p}'}+\|g-g_\varepsilon\|_{\mathbf{p}'}}{\|g_\varepsilon\|_{\mathbf{p}'}} \\
&< \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} < 3\varepsilon, \quad \text{ako je } \varepsilon < \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

3. Glavni teorem

U ovom odjeljku s $a(\cdot, D)$ označujemo pseudodiferencijalni operator reda nula te kroz nekoliko lema dokazujemo sljedeću tvrdnju.

Teorem 7. *Pseudodiferencijalni operatori reda nula ograničeni su na* $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, $\mathbf{p} \in \langle 1, \infty\rangle^d$.

∎

Glavna ideja je u kombiniranju Marcinkiewiczevog teorema interpolacije (koristimo varijantu danu u Lemi 3) i Leme 5 koja nam omogućuje pokrivanje punog raspona $\mathbf{p} \in \langle 1, \infty\rangle^d$ te iterativni dokaz Teorema 7. Prva lema je važna klasična tvrdnja o rastavu sumabilne funkcije na dva dijela, od kojih je jedan ograničen, a drugi je nošen na skupu konačne mjere. Dokaz je preuzet iz [So, Lemma 0.2.7].

Lema 1. (Calderón–Zygmund) *Neka je* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ *i* $\alpha > 0$. *Tada postoji rastav:*

$$
f = g + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{a}
$$

gdje je

$$
\|g\|_{\mathrm{L}^1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|b_k\|_{\mathrm{L}^1} \leqslant 3\|f\|_{\mathrm{L}^1}, \tag{b}
$$

$$
|g(\mathbf{x})| < 2^d\alpha \ (\mathrm{ss}), \tag{c}
$$

i za određene nepreklapajuće kocke Q_k *vrijedi:*

$$
b_k(\mathbf{x}) = 0 \ \ \textit{za } \mathbf{x} \notin Q_k \quad \textit{i} \quad \int b_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \ \textit{te} \tag{d}
$$

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{vol} Q_k \leqslant \alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1}. \tag{e}
$$

Dem. Podijelimo prvo $\mathbf{R}^d$ na kocke od kojih svaka ima volumen veći od $\alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1}$. Ako je, dakle, Q jedna od tih kocaka, vrijedi

$$
⨍_Q |f|\, d\mathbf{x} < \alpha \tag{6}
$$

(na lijevoj strani (6) dana je srednja vrijednost funkcije $|f|$ na Q). Podijelimo nadalje svaku kocku na 2^d sukladnih nepreklapajućih kocaka i s $Q_{11}, Q_{12}, \ldots$ označimo one među njima za koje (6) više ne vrijedi.

Promotrimo sada sve kocke koje nisu u $\{Q_{1k} : k \in \mathbf{N}\}$. Svaka od njih zadovoljava (6). Kao i ranije, dijelimo ih na 2^d dijelova i s $Q_{21}, Q_{22}, \ldots$ označimo one dijelove za koje ocjena (6) ne vrijedi. Nastavljajući postupak dobivamo kocke Q_{jk} te ih prenumeriramo u niz (Q_k). Za svaku od njih vrijedi

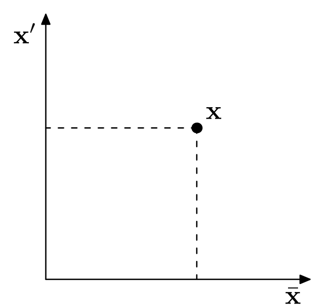
$$\alpha \,\mathsf{vol} Q_k \leqslant \int_{Q_k} |f| \, d\mathbf{x} \leqslant \int_Q |f| \, d\mathbf{x} < \alpha \,\mathsf{vol} Q = 2^d \alpha \,\mathsf{vol} Q_k. \tag{7}$$

Označimo $E = \bigcup_k Q_k$ i definirajmo

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), \quad \text{ako je } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \backslash E, \\ ⨍_{Q_k} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \text{ako je } \mathbf{x} \in Q_k, \end{cases}$$
$$b_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}), \quad \text{ako je } \mathbf{x} \in Q_k, \\ 0, \quad \text{ako } \mathbf{x} \notin Q_k. \end{cases}$$

Tvrdnje (a), (b) i (d) slijede direktno iz konstrukcije. Tvrdnja (e) i ocjena (c) za $\mathbf{x} \in E$ slijede uz pomoć (7). Konačno, ocjena (c) za $\mathbf{x} \notin E$ slijedi prema Lebesgueovom teoremu o diferenciranju, jer postoje proizvoljno male kocke koje sadrže $\mathbf{x}$ i na kojima je srednja vrijednost $|f|$ manja od α.

Q.E.D.



Slika 1: Koordinate

Sada uvodimo oznake $\mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}')$, $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_r)$, $\mathbf{x}' = (x_{r+1}, \ldots, x_d)$, $0 \leqslant r \leqslant d-1$, te

$$\mathrm{L}^{\bar{\mathbf{p}}, p}(\mathbf{R}^d) = \mathrm{L}^{(\bar{\mathbf{p}}, p, \ldots, p)}(\mathbf{R}^d), \ \|f\|_{\bar{\mathbf{p}}, p} = \|f\|_{(\bar{\mathbf{p}}, p, \ldots, p)}, \ \bar{\mathbf{p}} = (p_1, \ldots, p_r).$$

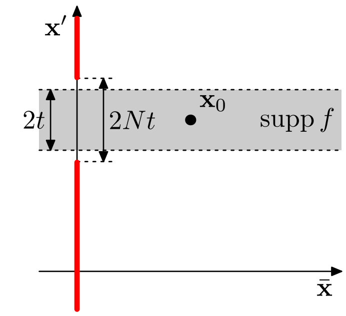
U slučaju $r = 0$ podrazumijevamo da je $\|f(\cdot, \mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}} = |f(\mathbf{x}')|$, i $\|f\|_{\bar{\mathbf{p}}, p} = \|f\|_{\mathrm{L}^p}$.

Lema 2. *Za svaku konstantu $N > d$ postoji konstanta $c > 0$ takva da za svaki $\bar{\mathbf{p}} \in \langle 1, \infty\rangle^r$ i svaku funkciju f koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

$$f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d), \ \text{za neki } p \in \langle 1, \infty\rangle,$$
$$\operatorname{supp} f \subseteq \mathbf{R}^r \times \{\mathbf{x}' : |\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0|_\infty \leqslant t\}, \ \text{za neke } \mathbf{x}'_0 \in \mathbf{R}^{d-r} \ \text{i} \ t > 0,$$
$$\int f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' = 0 \ \text{ za svaki } \bar{\mathbf{x}},$$

vrijedi ocjena

$$\int\limits_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0|_\infty > Nt} \|a(\cdot, D) f\|_{\bar{\mathbf{p}}} \, d\mathbf{x}' \leqslant c \|f\|_{\bar{\mathbf{p}}, 1}.$$



Slika 2: Disjunktnost nosača funkcije i područja integracije

Dem. Za proizvoljni $N > 1$, koristeći Korolar 1, dvije linearne zamjene varijabli te Minkowskijevu nejednakost za integrale, dobivamo

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}'_0|_\infty > Nt} \|a(\cdot, D)f\|_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\mathbf{x}' \\
&= \int\limits_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}'_0|_\infty > Nt} \Big\| \iint k(\cdot, \mathbf{x}', \cdot - \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}' - \mathbf{y}') f(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}')\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{y}' \Big\|_{\bar{\mathbf{p}}} d\mathbf{x}' \\
&= \int\limits_{|\mathbf{x}'|_\infty > Nt} \Big\| \iint \Big(k(\cdot, \mathbf{x}'+\mathbf{x}'_0, \cdot - \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}'-\mathbf{y}') - k(\cdot, \mathbf{x}'+\mathbf{x}'_0, \cdot - \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}') \Big) f(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}'+\mathbf{x}'_0)\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{y}' \Big\|_{\bar{\mathbf{p}}} d\mathbf{x}' \\
&= \int\limits_{|\mathbf{x}'|_\infty > Nt} \Big\| \iint \Big(k(\cdot, \mathbf{x}'+\mathbf{x}'_0, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}'-\mathbf{y}') - k(\cdot, \mathbf{x}'+\mathbf{x}'_0, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}') \Big) f(\cdot - \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}'+\mathbf{x}'_0)\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{y}' \Big\|_{\bar{\mathbf{p}}} d\mathbf{x}' \\
&\leqslant \int\limits_{|\mathbf{x}'|_\infty > Nt} \iint \Big\| \Big(k(\cdot, \mathbf{x}'+\mathbf{x}'_0, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}'-\mathbf{y}') - k(\cdot, \mathbf{x}'+\mathbf{x}'_0, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}') \Big) f(\cdot - \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}'+\mathbf{x}'_0) \Big\|_{\bar{\mathbf{p}}} d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{y}'\, d\mathbf{x}' \\
&= I.
\end{aligned}$$

Nadalje, koristeći Teorem 1 i teorem o srednjoj vrijednosti, za $|\mathbf{x}'|_\infty > Nt$ i $|\mathbf{y}'|_\infty \leqslant t$ imamo ocjenu

$$\begin{aligned}
|k(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}'+\mathbf{x}'_0, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}'-\mathbf{y}') - k(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}'+\mathbf{x}'_0, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}')| &= |\nabla_{\mathbf{y}'} k(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}'+\mathbf{x}'_0, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}'-\vartheta\mathbf{y}') \cdot \mathbf{y}'| \\
&\leqslant C|(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}'-\vartheta\mathbf{y}')|^{-d-1} |\mathbf{y}'|_\infty \\
&\leqslant C|(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}'-\vartheta\mathbf{y}')|^{-d-1}\, t,
\end{aligned}$$

za neke konstante $\vartheta \in \langle 0, 1\rangle$ i $C > 0$, pa zbog pretpostavke na nosač funkcije f možemo nastaviti ocjenu

$$\begin{aligned}
I &\leqslant Ct \int\limits_{|\mathbf{x}'|_\infty > Nt} \int\limits_{|\mathbf{y}'|_\infty \leqslant t} \int |(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}'-\vartheta\mathbf{y}')|^{-d-1} \|f(\cdot - \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}'+\mathbf{x}'_0)\|_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{y}'\, d\mathbf{x}' \\
&= Ct \int\limits_{|\mathbf{x}'|_\infty > Nt} \int\limits_{|\mathbf{y}'|_\infty \leqslant t} \int |(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}'-\vartheta\mathbf{y}')|^{-d-1} \|f(\cdot, \mathbf{y}'+\mathbf{x}'_0)\|_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{y}'\, d\mathbf{x}' \\
&= Ct \int\limits_{|\mathbf{y}'|_\infty \leqslant t} \|f(\cdot, \mathbf{y}'+\mathbf{x}'_0)\|_{\bar{\mathbf{p}}} \int\limits_{|\mathbf{x}'|_\infty > Nt} \int |(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}'-\vartheta\mathbf{y}')|^{-d-1}\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{x}'\, d\mathbf{y}'.
\end{aligned}$$

Dakle, za završetak dokaza potrebno je provjeriti da je

$$II = t \int\limits_{|\mathbf{x}'|_\infty > Nt} \int |(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}' - \vartheta \mathbf{y}')|^{-d-1}\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{x}'$$

ograničeno na $|\mathbf{y}'|_\infty \leqslant t$, za proizvoljni $N > d$. Računamo

$$\begin{aligned} d^{-d-1} II &\leqslant t \int\limits_{|\mathbf{x}'| > Nt} \int (|\bar{\mathbf{y}}|_1 + |\mathbf{x}' - \vartheta \mathbf{y}'|_1)^{-d-1}\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{x}' \\ &\leqslant t \int\limits_{|\mathbf{x}'| > Nt} \int (|\bar{\mathbf{y}}|_1 + |\mathbf{x}'|_1 - |\mathbf{y}'|_1)^{-d-1}\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{x}' \\ &\leqslant t \int\limits_{|\mathbf{x}'| > Nt} \int (|\bar{\mathbf{y}}|_1 + |\mathbf{x}'|_1 - dt)^{-d-1}\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{x}' \\ &= \int\limits_{|\mathbf{x}'| > N} \int (|\bar{\mathbf{y}}|_1 + |\mathbf{x}'|_1 - d)^{-d-1}\, d\bar{\mathbf{y}}\, d\mathbf{x}', \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku koristili linearnu zamjenu varijabli. Označimo sada $\mathbf{z} = (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}')$, pa prijelazom na polarne koordinate slijedi

$$\begin{aligned} d^{-d-1} II &\leqslant \int_{|\mathbf{z}| > N} (|\mathbf{z}|_1 - d)^{-d-1}\, d\mathbf{z} \\ &\leqslant \int_{|\mathbf{z}| > N} (|\mathbf{z}| - d)^{-d-1}\, d\mathbf{z} \\ &= \sigma(S^{d-1}) \int_N^\infty (r-d)^{-d-1} r^{d-1}\, dr \\ &= \sigma(S^{d-1}) \int_{N-d}^\infty r^{-d-1} (r+d)^{d-1}\, dr \\ &= \sigma(S^{d-1}) \int_{N-d}^\infty (r^{-2} + d(d-1) r^{-3} + \cdots + d^{d-1} r^{-d-1})\, dr < \infty, \end{aligned}$$

gdje je $\sigma(S^{d-1})$ oplošje jedinične sfere u $\mathbf{R}^d$, čime je dokaz završen.

Q.E.D.

U nastavku ćemo koristiti prostor $\mathcal{X} = \bigcap\limits_{\mathbf{p} \in [1,\infty]^d} \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, te funkciju distribucije izmjerive funkcije f:

$$\lambda_f(\alpha) = \lambda(f; \alpha) = \mathsf{vol}\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : |f(\mathbf{x})| > \alpha\}.$$

Lako se dokazuju (v. [F, str. 197]) sljedeća svojstva te funkcije:

(a) λ_f je nerastuća i neprekinuta zdesna.
(b) Ako je $|f| \leqslant |g|$, onda je $\lambda_f \leqslant \lambda_g$.
(c) Ako $|f_n| \nearrow |f|$, onda i $\lambda_{f_n} \nearrow \lambda_f$.
(d) Ako je $f = g + h$, onda vrijedi $\lambda(f; \alpha) \leqslant \lambda(g; \frac{\alpha}{2}) + \lambda(h; \frac{\alpha}{2})$.

Koristeći svojstvo (d), dokazujemo sljedeću lemu.

Lema 3. *Pretpostavimo da za neki* $\bar{\mathbf{p}} \in \langle 1, \infty\rangle^r$ *i neki* $q \in \langle 1, \infty\rangle$ *postoje konstante* $c_1, c_q > 0$ *takve da za svaki* $\alpha > 0$ *i proizvoljni* $f \in \mathcal{X}$ *vrijedi:*

$$\lambda(\|a(\cdot, D)f\|_{\bar{\mathbf{p}}}; \alpha) \leqslant c_1\alpha^{-1}\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},1},$$
$$\lambda(\|a(\cdot, D)f\|_{\bar{\mathbf{p}}}; \alpha) \leqslant c_q\alpha^{-q}\|f\|^q_{\bar{\mathbf{p}},q}.$$

Tada za svaki $p \in \langle 1, q\rangle$ *postoji* $c_p > 0$ *takva da je (za svaki* $f \in \mathcal{S}$*)*

$$\|a(\cdot, D)f\|_{\bar{\mathbf{p}},p} \leqslant c_p\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},p}.$$

Dem. Dokaz ove leme analogan je dokazu Marcinkiewiczevog teorema interpolacije. U dokazu koristimo formulu *slojevitog kolača*

$$\int_{\mathbf{R}^d} |g(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(g; \alpha)\, d\alpha,$$

koja vrijedi za $0 < p < \infty$. Dokaz te formule može se na naći u [F, str. 197–198].

Također koristimo rastav $f = f_1 + f_2$, gdje su

$$f_1(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}') = \begin{cases} f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}'), & \text{ako je } \|f(\cdot, \mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}} > \frac{\alpha}{2}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$
$$f_2(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}') = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \|f(\cdot, \mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}} > \frac{\alpha}{2}, \\ f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}'), & \text{inače}. \end{cases}$$

Neka je sada $f \in \mathcal{S}$ proizvoljna. Budući da je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$, očito je da funkcije f_1 i f_2 pripadaju skupu $\mathcal{X}$, pa ćemo na njih moći primijeniti pretpostavke ove leme. Slijedi

$$\begin{aligned}
&\|a(\cdot, D)f\|^p_{\bar{\mathbf{p}},p} \\
&= \int_{\mathbf{R}^{d-r}} \|(a(\cdot, D)f)(\cdot, \mathbf{x}')\|^p_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\mathbf{x}' \\
&= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(\|(a(\cdot, D)f)(\cdot, \mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}; \alpha)\, d\alpha \\
&\leqslant p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda\Big(\|(a(\cdot, D)f_1)(\cdot, \mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}; \frac{\alpha}{2}\Big)\, d\alpha + p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda\Big(\|(a(\cdot, D)f_2)(\cdot, \mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}; \frac{\alpha}{2}\Big)\, d\alpha \\
&\leqslant p\int_0^\infty \alpha^{p-1}c_1 2\alpha^{-1}\|f_1\|_{\bar{\mathbf{p}},1}\, d\alpha + p\int_0^\infty \alpha^{p-1}c_q 2^q\alpha^{-q}\|f_2\|^q_{\bar{\mathbf{p}},q}\, d\alpha \\
&= 2pc_1\int_0^\infty \alpha^{p-2}\int_{\mathbf{R}^{d-r}} \|f_1(\cdot, \mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\mathbf{x}'\, d\alpha + 2^q pc_q\int_0^\infty \alpha^{p-1-q}\int_{\mathbf{R}^{d-r}} \|f_2(\cdot, \mathbf{x}')\|^q_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\mathbf{x}'\, d\alpha \\
&= 2pc_1\int_0^\infty \alpha^{p-2}\int_{\|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}>\frac{\alpha}{2}} \|f(\cdot, \mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\mathbf{x}'\, d\alpha + 2^q pc_q\int_0^\infty \alpha^{p-1-q}\int_{\|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}\leqslant\frac{\alpha}{2}} \|f(\cdot, \mathbf{x}')\|^q_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\mathbf{x}'\, d\alpha
\end{aligned}$$

$$= 2pc_1 \int\limits_{\mathbf{R}^{d-r}} \|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}} \int\limits_0^{2\|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}} \alpha^{p-2}\,d\alpha\,d\mathbf{x}' + 2^q pc_q \int\limits_{\mathbf{R}^{d-r}} \|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}^q \int\limits_{2\|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}}^{\infty} \alpha^{p-1-q}\,d\alpha\,d\mathbf{x}'$$

$$= 2pc_1 \int\limits_{\mathbf{R}^{d-r}} \|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}} \frac{2^{p-1}\|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}^{p-1}}{p-1}\,d\mathbf{x}' + 2^q pc_q \int\limits_{\mathbf{R}^{d-r}} \|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}^q \frac{2^{p-q}\|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}^{p-q}}{q-p}\,d\mathbf{x}',$$

tj.

$$\|a(\cdot,D)f\|_{\bar{\mathbf{p}},p}^p = \Big(\frac{2^p pc_1}{p-1} + \frac{2^p pc_q}{q-p}\Big)\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},p}^p.$$

Korjenovanjem slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Lema 4. *Ako za neki* $\bar{\mathbf{p}} \in \langle 1,\infty\rangle^r$ *i neki* $q \in \langle 1,\infty\rangle$ *postoji konstanta* $c_q > 0$ *takva da za svaki* $\alpha > 0$ *i proizvoljni* $f \in \mathrm{L}^{\bar{\mathbf{p}},q}(\mathbf{R}^d)$ *vrijedi*

$$\lambda(\|a(\cdot,D)f\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha) \leqslant c_q\alpha^{-q}\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},q}^q, \tag{8}$$

onda za svaki $p \in \langle 1,q\rangle$ *postoji* $c_p > 0$ *takva da je (za svaki* $f \in \mathcal{S}$*)*

$$\|a(\cdot,D)f\|_{\bar{\mathbf{p}},p} \leqslant c_p\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},p}.$$

Dem. Fiksirajmo $\alpha > 0$ i $f \in \mathcal{X}$. Neka su Q_k nepreklapajuće kocke koje prema Lemi 1 određuje sumabilna funkcija $\|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}$ i definirajmo rastav

$$f = g + h = g + \sum_{k=1}^{\infty} h_k,$$

gdje su

$$g(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{x}') = \begin{cases} f(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{x}'), & \text{ako je } \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^{d-r}\setminus\bigcup_k Q_k,\\ ⨍_{Q_k} f(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{y}')\,d\mathbf{y}', & \text{ako je } \mathbf{x}' \in Q_k,\end{cases}$$

$$h_k(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{x}') = \begin{cases} f(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{x}') - g(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{x}'), & \text{ako je } \mathbf{x}' \in Q_k,\\ 0, & \text{ako } \mathbf{x}' \notin Q_k.\end{cases}$$

Po definiciji i Minkowskijevoj nejednakosti za integrale slijedi

$$\|g(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}} \leqslant \begin{cases} \|f(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}, & \text{ako je } \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^{d-r}\setminus\bigcup_k Q_k,\\ ⨍_{Q_k} \|f(\cdot,\mathbf{y}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}\,d\mathbf{y}', & \text{ako je } \mathbf{x}' \in Q_k,\end{cases}$$

pa po Lemi 1 i njenom dokazu dobivamo

$$\|g(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}} \leqslant 2^d\alpha, \text{ za skoro svaki } \mathbf{x}'.$$

Također lako slijedi $\|g\|_{\bar{\mathbf{p}},1} \leqslant \|f\|_{\bar{\mathbf{p}},1}$ i $\|h\|_{\bar{\mathbf{p}},1} \leqslant 2\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},1}$.

Posebno je

$$g \in \mathrm{L}^{\bar{\mathbf{p}},1}(\mathbf{R}^d) \cap \mathrm{L}^{\bar{\mathbf{p}},\infty}(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathrm{L}^{\bar{\mathbf{p}},q}(\mathbf{R}^d),$$

pa ćemo na g moći primijeniti ocjenu (8).

Budući da je $f \in \mathcal{X} \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, te

$$\begin{aligned}
\|g\chi_{Q_k}\|^2_{\mathrm{L}^2} &= \iiint \Big| \fint_{Q_k} f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}')\,d\mathbf{y}'\Big|^2 \chi_{Q_k}(\mathbf{x}')\,d\bar{\mathbf{x}}\,d\mathbf{x}' \\
&\leqslant \frac{1}{(\mathsf{vol}Q_k)^2}\int\Big(\int_{Q_k}\|f(\cdot,\mathbf{y}')\|_{\mathrm{L}^2}\,d\mathbf{y}'\Big)^2\chi_{Q_k}(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' \\
&= \frac{1}{\mathsf{vol}Q_k}\Big(\int_{Q_k}\|f(\cdot,\mathbf{y}')\|_{\mathrm{L}^2}\,d\mathbf{y}'\Big)^2 \\
&\leqslant \frac{1}{\mathsf{vol}Q_k}\|f\|^2_{2,1} < \infty,
\end{aligned}$$

to slijedi da je i $h_k \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, a očito je da h_k zadovoljava i ostale pretpostavke Leme 2.

Zbog Leme 3 i ocjene

$$\begin{aligned}
\lambda(\|a(\cdot,D)f\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha) &= \lambda(\|a(\cdot,D)g + a(\cdot,D)h\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha) \\
&\leqslant \lambda(\|a(\cdot,D)g\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha/2) + \lambda(\|a(\cdot,D)h\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha/2),
\end{aligned}$$

dovoljno je dokazati postojanje konstanti $c_1', c_1'' > 0$, neovisnih o α i f, takvih da je

$$\begin{aligned}
\lambda(\|a(\cdot,D)g\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha/2) &\leqslant c_1'\alpha^{-1}\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},1}, \\
\lambda(\|a(\cdot,D)h\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha/2) &\leqslant c_1''\alpha^{-1}\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},1}.
\end{aligned}$$

Po pretpostavci (8) i svojstvima funkcije g slijedi

$$\begin{aligned}
\lambda(\|a(\cdot,D)g\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha/2) &\leqslant c_q 2^q\alpha^{-q}\|g\|^q_{\bar{\mathbf{p}},q} \leqslant c_q 2^q \alpha^{-q}\int (2^d\alpha)^{q-1}\|g(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}\,d\mathbf{x}' \\
&= c_1'\alpha^{-1}\|g\|_{\bar{\mathbf{p}},1} \leqslant c_1'\alpha^{-1}\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},1}.
\end{aligned}$$

Time je dokazana prva ocjena. Nadalje je

$$\Big|\sum_{k=1}^K h_k\Big| \leqslant \sum_{k=1}^\infty |h_k| = |h| \leqslant |f| + |g| \in \mathrm{L}^{\bar{\mathbf{p}},q}(\mathbf{R}^d),$$

pa prema Teoremu 2 zaključujemo da $\sum_{k=1}^K h_k \longrightarrow h$ u normi prostora $\mathrm{L}^{\bar{\mathbf{p}},q}(\mathbf{R}^d)$.

Zbog toga i pretpostavke leme $\|a(\cdot,D)h - a(\cdot,D)(\sum_{k=1}^K h_k)\|_{\bar{\mathbf{p}}} \longrightarrow 0$ u mjeri, dakle skoro svuda na podnizu. Radi jednostavnosti označimo taj podniz kao i polazni niz. Zbog ocjene

$$\|a(\cdot,D)h\|_{\bar{\mathbf{p}}} \leqslant \Big\|a(\cdot,D)h - a(\cdot,D)(\sum_{k=1}^K h_k)\Big\|_{\bar{\mathbf{p}}} + \sum_{k=1}^K \|a(\cdot,D)h_k\|_{\bar{\mathbf{p}}},$$

na limesu za skoro svaki $\mathbf{x}'$ dobivamo

$$\|(a(\cdot,D)h)(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}} \leqslant \sum_{k=1}^\infty \|(a(\cdot,D)h_k)(\cdot,\mathbf{x}')\|_{\bar{\mathbf{p}}}. \tag{9}$$

Ako je $\mathsf{Int}\,Q_k = \{\mathbf{x}' : |\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0'|_\infty < t\}$, označimo $\tilde{Q}_k = \{\mathbf{x}' : |\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0'|_\infty \leqslant Nt\}$, gdje je $N > d$ proizvoljan (kao u Lemi 2). Označimo također $E = \bigcup_k Q_k$ i $F = \bigcup_k \tilde{Q}_k$. Prema (9) i Lemi 2 dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^{d-r}\setminus F} \|a(\cdot,D)h\|_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\mathbf{x}' &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^{d-r}\setminus F} \|a(\cdot,D)h_k\|_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\mathbf{x}' \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^{d-r}\setminus \tilde{Q}_k} \|a(\cdot,D)h_k\|_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\mathbf{x}' \\ &\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|_{\bar{\mathbf{p}},1} = c\|h\|_{\bar{\mathbf{p}},1},\end{aligned}$$

dok je prema Markovljevoj nejednakosti

$$\begin{aligned}\lambda(\|a(\cdot,D)h\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha/2) &\leqslant \mathsf{vol}F + 2\alpha^{-1}\int_{\mathbf{R}^{d-r}\setminus F} \|a(\cdot,D)h\|_{\bar{\mathbf{p}}}\, d\mathbf{x}' \\ &\leqslant N^{d-r}\,\mathsf{vol}E + 2c\alpha^{-1}\|h\|_{\bar{\mathbf{p}},1}.\end{aligned}$$

Budući da je $\|h\|_{\bar{\mathbf{p}},1} \leqslant 2\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},1}$, i (po Lemi 1(e))

$$\mathsf{vol}E = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{vol}Q_k \leqslant \alpha^{-1}\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},1},$$

zaključujemo da je

$$\lambda(\|a(\cdot,D)h\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha/2) \leqslant c_1''\alpha^{-1}\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},1},$$

za $c_1'' = N^{d-r} + 4c$.

Q.E.D.

Lema 5. *Ako za neki $\bar{\mathbf{p}} \in \langle 1,\infty\rangle^r$ i neki $q \in \langle 1,\infty\rangle$ postoji $c_q > 0$ takva da za svaki $f \in \mathcal{S}$ vrijedi*

$$\|a(\cdot,D)f\|_{\bar{\mathbf{p}},q} \leqslant c_q\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},q},$$

onda za svaki $p \in \langle 1,\infty\rangle$ postoji $c_p > 0$ takva da je (za svaki $f \in \mathcal{S}$)

$$\|a(\cdot,D)f\|_{\bar{\mathbf{p}},p} \leqslant c_p\|f\|_{\bar{\mathbf{p}},p}.$$

Dem. Pretpostavka ove leme je zapravo zadovoljena za proizvoljnu funkciju $f \in \mathrm{L}^{\bar{\mathbf{p}},q}(\mathbf{R}^d)$. Budući da po Markovljevoj nejednakosti imamo

$$\lambda(\|a(\cdot,D)f\|_{\bar{\mathbf{p}}};\alpha) \leqslant \alpha^{-q}\|a(\cdot,D)f\|^q_{\bar{\mathbf{p}},q} \leqslant c_q^q\alpha^{-q}\|f\|^q_{\bar{\mathbf{p}},q},$$

po Lemi 4 slijedi tvrdnja za $p \leqslant q$.

Tvrdnju za $p > q$ dobivamo prelaskom na adjungirani operator $a^*(\cdot,D)$, koji je također pseudodiferencijalni operator reda nula, koristeći pritom Teorem 5 i Korolar 2 iz prethodnog odjeljka. Neka je p' konjugirani eksponent p, tj. $1/p + 1/p' = 1$. Tada je (za proizvoljne $\varphi,\psi \in \mathcal{S}$)

$$\begin{aligned}|\langle \varphi, a^*(\cdot,D)\psi\rangle| &= |\langle a(\cdot,D)\varphi,\psi\rangle| \\ &= \Big|\int a(\cdot,D)\varphi\bar{\psi}\, d\mathbf{x}\Big| \\ &\leqslant \|a(\cdot,D)\varphi\|_{\bar{\mathbf{p}},q}\|\psi\|_{\bar{\mathbf{p}}',q'} \leqslant c_q\|\varphi\|_{\bar{\mathbf{p}},q}\|\psi\|_{\bar{\mathbf{p}}',q'},\end{aligned}$$

pa uzimanjem supremuma po $\varphi \in \mathrm{S}_{\bar{\mathbf{p}},q} \cap \mathcal{S}$ slijedi

$$\|a^*(\cdot, D)\psi\|_{\bar{\mathbf{p}}',q'} \leqslant c_q \|\psi\|_{\bar{\mathbf{p}}',q'},$$

te prema već dokazanom za $p' < q'$ postoji $c_p > 0$ takva da je (za svaki $\psi \in \mathcal{S}$)

$$\|a^*(\cdot, D)\psi\|_{\bar{\mathbf{p}}',p'} \leqslant c_p \|\psi\|_{\bar{\mathbf{p}}',p'}.$$

Sada (opet za proizvoljne $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$) imamo

$$\begin{aligned} |\langle a(\cdot, D)\varphi, \psi\rangle| &= |\langle \varphi, a^*(\cdot, D)\psi\rangle| \\ &= \Big| \int \varphi \overline{a^*(\cdot, D)\psi}\, d\mathbf{x} \Big| \\ &\leqslant \|\varphi\|_{\bar{\mathbf{p}},p} \|a^*(\cdot, D)\psi\|_{\bar{\mathbf{p}}',p'} \leqslant c_p \|\varphi\|_{\bar{\mathbf{p}},p} \|\psi\|_{\bar{\mathbf{p}}',p'}, \end{aligned}$$

pa uzimanjem supremuma po $\psi \in \mathrm{S}_{\bar{\mathbf{p}}',p'} \cap \mathcal{S}$ slijedi

$$\|a(\cdot, D)\varphi\|_{\bar{\mathbf{p}},p} \leqslant c_p \|\varphi\|_{\bar{\mathbf{p}},p},$$

gdje $p' < q'$ povlači $p > q$, čime je tvrdnja dokazana.

Q.E.D.

Dem. **(Teorema 7)** Već smo vidjeli da je dovoljno provjeriti da vrijedi

$$(\exists\, C > 0)(\forall\, f \in \mathcal{S}) \quad \|a(\cdot, D)f\|_{\mathbf{p}} \leqslant C\|f\|_{\mathbf{p}}. \tag{10}$$

Poznato je da ta tvrdnja vrijedi za $\mathbf{p} = (p_1, p_1, \ldots, p_1)$ (klasični slučaj), pa primjenom Leme 5 dobivamo da vrijedi i za $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_2)$. Ponovnom primjenom Leme 5 dobivamo da tvrdnja onda vrijedi i za $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_3)$. I tako dalje, tj. uzastopnom primjenom Leme 5 dobivamo nakon $d-1$ koraka ocjenu (10).

Q.E.D.

Napomena. Tvrdnja Teorema 7 vrijedi i za operatore sa simbolima iz klase $S^0_{1,\delta}$, $0 \leqslant \delta < 1$ koji zadovoljavaju ocjenu

$$(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)\ (\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad |\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\beta}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| \leqslant C_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \lambda^{m-|\boldsymbol{\beta}|+\delta|\boldsymbol{\alpha}|}(\boldsymbol{\xi}).$$

Naime, tvrdnju Teorema 1 koristili smo samo za $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, a u tom se slučaju tvrdnja tog teorema, s identičnim dokazom, može proširiti na upravo spomenutu klasu $S^0_{1,\delta}$. Klasični rezultat ograničenosti na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ operatora sa simbolima iz te klase može se pronaći u [T, str. 271], odnosno [KuN]. ∎

4. Primjena na Soboljevljeve prostore

U [St, str. 251–252] i [W, str. 90–97] prikazane su opće metode prenošenja rezultata ograničenosti pseudodiferencijalnih operatora s Lebesgueovih na Soboljevljeve prostore. Zato ćemo ovdje samo definirati Soboljevljeve prostore s mješovitom normom, iskazati naš rezultat i skicirati dokaz.

Za $s \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{p} \in [1, \infty]^d$ definiramo Soboljevljev prostor $\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ svih temperiranih distribucija f za koje je

$$\lambda^s(D)f \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d),$$

gdje je $\lambda^s(D)$ pseudodiferencijalni operator pridružen simbolu $\lambda^s(\boldsymbol{\xi}) = (1+4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2}$, a norma je dana s $\|f\|_{\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}} = \|\lambda^s(D)f\|_{\mathbf{p}}$.

Za $s = k \in \mathbf{N}_0$ postoji mnogo intuitivnija, a ekvivalentna definicija. Definiramo

$$\mathrm{W}^{k,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d) := \{f \ : \ \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d),\ 0 \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant k\}.$$

Norma na $\mathrm{W}^{k,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ dana je s

$$\|f\|_{\mathrm{W}^{k,\mathbf{p}}} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant k} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\|_{\mathbf{p}}.$$

Za $k \in \mathbf{N}_0$ je $\mathrm{W}^{k,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d) = \mathrm{H}^{k,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, s ekvivalentnim normama. Ta ekvivalencija slijedi iz Teorema 8 (koji slijedi u nastavku) kako je to u klasičnom slučaju pokazano u [St, str. 252].

Neposredno iz definicije lako slijedi (v. [W, str. 90–91]):

(a) $\lambda^s(D)\lambda^t(D) = \lambda^{s+t}(D)$.

(b) $\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ je uz danu normu Banachov prostor.

(c) $\lambda^s(D)$ je izometrija s $\mathrm{H}^{t,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ na $\mathrm{H}^{t-s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

Konačno, vrijedi sljedeći

Teorem 8. *Neka je $a(\cdot, D)$ pseudodiferencijalni operator reda $m \in \mathbf{R}$. Za $\mathbf{p} \in \langle 1, \infty\rangle^d$ je $a(\cdot, D)$ ograničen kao operator s $\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{H}^{s-m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.*

Dem. Budući da je za svaki $s \in \mathbf{R}$ operator $\lambda^s(D)$ reda s, dok se komponiranjem operatora njihov red zbraja (v. [SR, Teorem 2.7, 3.2], [W, Teorem 6.1]), slijedi da je operator

$$\lambda^{s-m}(D)a(\cdot, D)\lambda^{-s}(D)$$

reda nula, pa je po Teoremu 7 ograničen na $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

Tvrdnja teorema sada slijedi iz činjenice da je $\lambda^s(D)$ izometrički operator s $\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, za svaki $s \in \mathbf{R}$.

Q.E.D.

Teorem 7 možemo iskoristiti i da dokažemo da su Soboljevljevi prostori opadajući po s:

Teorem 9. *Za $\mathbf{p} \in \langle 1, \infty\rangle^d$ i $s \leqslant t$ je $\mathrm{H}^{t,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, te*

$$(\exists\, C > 0) \quad \|f\|_{\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{H}^{t,\mathbf{p}}}, \quad f \in \mathrm{H}^{t,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d).$$

Dem. Koristimo činjenicu da je $\lambda^{s-t}(D)$ reda $s-t \leqslant 0$, pa po definiciji i Teoremu 7 slijedi

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}} = \|\lambda^s(D)f\|_{\mathbf{p}} &= \|\lambda^{s-t}(D)\lambda^t(D)f\|_{\mathbf{p}} \\ &\leqslant C\|\lambda^t(D)f\|_{\mathbf{p}} = C\|f\|_{\mathrm{H}^{t,\mathbf{p}}}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Na kraju primijetimo da se i gustoća Schwartzovog prostora lako prenosi s $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ na $\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

Neka je $f \in \mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, $\mathbf{p} \in [1,\infty\rangle^d$. Tada je, po definiciji, $\lambda^s(D)f \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ pa postoji niz (φ_n) u $\mathcal{S}$ takav da $\varphi_n \to \lambda^s(D)f$ u normi prostora $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$. Budući da pseudodiferencijalni operatori preslikavaju Schwartzov prostor u samog sebe, to slijedi da je i

$$\psi_n := \lambda^{-s}(D)\varphi_n \in \mathcal{S},$$

pa ponovo po definiciji prostora $\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ slijedi

$$\|\psi_n - f\|_{\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}} = \|\lambda^s(D)\psi_n - \lambda^s(D)f\|_{\mathbf{p}} = \|\varphi_n - \lambda^s(D)f\|_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0,$$

čime je gustoća $\mathcal{S}$ u $\mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, $\mathbf{p} \in [1,\infty\rangle^d$ dokazana.

5. Primjena na eliptičke operatore

Iz Teorema 8 je jasno da za $m > 0$ operator reda m općenito nije ograničen na $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ (npr. diferencijalni operator nije ograničen na $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$). U ovom odjeljku dokazat ćemo da je za posebnu klasu eliptičkih operatora, koja se često pojavljuje u primjenama, restrikcija takvog operatora na $\mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ zatvorena u normi prostora $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$. Dokazujemo i druga lijepa svojstva tog zatvorenoga operatora.

Također dokazujemo globalni rezultat regularnosti rješenja eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi na Lebesgueovim prostorima s mješovitom normom, a druge primjene (npr. na evolucijske jednadžbe) očekuju se proučavanjem operatora s manje glatkim simbolima, što je plan za budućnost.

Kažemo da je simbol $a \in \mathrm{S}^m_{1,0}$ *eliptički* ako postoje pozitivne konstante C i R za koje vrijedi

$$|a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \geqslant C(1+|\boldsymbol{\xi}|)^m, \quad |\boldsymbol{\xi}| \geqslant R, \tag{11}$$

što je ekvivalentno s

$$|a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \geqslant C\lambda^m(\boldsymbol{\xi}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \geqslant R,$$

gdje je, podsjećamo, $\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{1+4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^2}$.

Naravno, pseudodiferencijalni operator $a(\cdot,D)$ je *eliptički* ako je njegov simbol eliptički, a temeljno svojstvo takvih operatora je postojanje približnog inverza, poznatijeg u literaturi pod imenom *parametrica*, što je sadržaj sljedećeg teorema (v. [W, Teorem 8.1]).

Teorem 10. *Neka je $a(\cdot,D)$ eliptički pseudodiferencijalni operator reda m. Tada postoji pseudodiferencijalni operator $b(\cdot,D)$ reda $-m$, te izglađujući operatori R i S sa simbolima u $\mathrm{S}^{-\infty}_{1,0} = \bigcap\limits_{k\in\mathbf{R}} \mathrm{S}^k_{1,0}$ takvi da je*

$$b(\cdot,D)a(\cdot,D) = I + R$$

i

$$a(\cdot,D)b(\cdot,D) = I + S,$$

gdje je I jedinični operator. ∎

Ponovimo sada osnovne rezultate iz teorije neomeđenih zatvorenih operatora. Neka su X i Y kompleksni Banachovi prostori i promatramo operatore koji preslikavaju gust potprostor prostora X u prostor Y. Pritom s $\mathcal{D}(A)$ označavamo domenu operatora A i kažemo da je takav operator *zatvoren* ako je njegov graf zatvoren, tj. ekvivalentno, ako za svaki niz (x_n) u $\mathcal{D}(A)$ koji konvergira prema x u X i za koji $Ax_n \to y$ u Y vrijedi da je $x \in \mathcal{D}(A)$ i $Ax = y$.

Također kažemo da je operator A *zatvoriv* ako za svaki niz (x_n) u $\mathcal{D}(A)$ koji konvergira prema 0 u X i za koji $Ax_n \to y$ u Y vrijedi da je i $y = 0$.

Lako se pokazuje (v. [W, 11.4]) da linearan operator ima zatvoreno proširenje ako i samo ako je zatvoriv, a jedno takvo (minimalno) proširenje definira se na isti način kao i operator $a_0(\cdot, D)$ u nastavku.

Sada definiramo tri operatora koja su međusobno usko povezana (v. Teorem 11 u nastavku) i tako detaljno opisujemo svojstva promatranog zatvorenog operatora. Za pseudodiferencijalni operator $a(\cdot, D) : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ sa simbolom $a \in \mathrm{S}^m_{1,0}$ definirajmo operator $a_0(\cdot, D)$ iz $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, s domenom $\mathcal{D}(a_0(\cdot, D))$ koja se sastoji od svih funkcija $u \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ za koje postoje niz (φ_n) u $\mathcal{S}$ i $v_0 \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ takvi da

$$\|\varphi_n - u\|_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0$$

i

$$\|a(\cdot, D)\varphi_n - v_0\|_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0.$$

Za $u \in \mathcal{D}(a_0(\cdot, D))$ definiramo $a_0(\cdot, D)u := v_0$.

Nadalje, definirajmo operator $a_1(\cdot, D)$ iz $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, s domenom $\mathcal{D}(a_1(\cdot, D))$ koja se sastoji od svih funkcija $u \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ za koje postoji $v_1 \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ tako da vrijedi

$$(\forall\, \varphi \in \mathcal{S}) \qquad \langle u, a^*(\cdot, D)\varphi\rangle = \langle v_1, \varphi\rangle,$$

gdje je

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} f\bar{g}\, d\mathbf{x}.$$

Za $u \in \mathcal{D}(a_1(\cdot, D))$ definiramo $a_1(\cdot, D)u := v_1$. Iz same definicije je jasno da se $a_1(\cdot, D)u$ i $a(\cdot, D)u$ podudaraju u smislu distribucija, a preciznu vezu između upravo definiranih operatora dokazujemo u Teoremu 11.

Konačno, definirajmo operator $a^t(\cdot, D)$ iz $\mathrm{L}^{\mathbf{p}'}(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}'}(\mathbf{R}^d)$, s domenom $\mathcal{D}(a^t(\cdot, D))$ koja se sastoji od svih funkcija $u \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}'}(\mathbf{R}^d)$ za koje postoji $v_t \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}'}(\mathbf{R}^d)$ tako da vrijedi

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)) \quad a(\cdot, D)\varphi \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d) \quad \Longrightarrow \quad \langle u, a(\cdot, D)\varphi\rangle = \langle v_t, \varphi\rangle.$$

Za $u \in \mathcal{D}(a^t(\cdot, D))$ definiramo $a^t(\cdot, D)u := v_t$.

Lako se vidi da su sve definicije dobre, da je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}(a^t(\cdot, D))$ i da je $a^t(\cdot, D) = a^*(\cdot, D)$ na $\mathcal{S}$.

Naš prvi rezultat je

Teorem 11. *Neka je $a(\cdot, D)$ eliptički pseudodiferencijalni operator reda $m \geqslant 0$. Tada je:*

(a) $a_0(\cdot, D) = a_1(\cdot, D)$*, s domenom* $\mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

(b) $a_0(\cdot, D)$ *je zatvoren na* $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ *i podudara se s* $a(\cdot, D)$ *na* $\mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

(c) $a_0(\cdot, D)$ *je maksimalno zatvoreno proširenje operatora* $a(\cdot, D) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ *takvo da je i*

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}(a_0^t(\cdot, D)).$$

Dem.

(a) Ključni korak u dokazu je nejednakost

$$C_1\|u\|_{\mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}} \leqslant \|a(\cdot,D)u\|_{\mathbf{p}} + \|u\|_{\mathbf{p}} \leqslant C_2\|u\|_{\mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}}, \quad u \in \mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d), \tag{12}$$

koja vrijedi za neke pozitivne konstante C_1, C_2.

Desna nejednakost slijedi iz Teorema 8 i Teorema 9, a lijeva slijedi iz Teorema 8 i jednakosti

$$u = b(\cdot,D)a(\cdot,D)u - Ru,$$

koja po Teoremu 10 vrijedi za neki operator $b(\cdot,D)$ reda $-m$ i izglađujući operator R.

Sada redom dokazujemo da je $a_1(\cdot,D)$ proširenje $a_0(\cdot,D)$, da je $\mathcal{D}(a_0(\cdot,D)) = \mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, te da je $\mathcal{D}(a_1(\cdot,D)) \subseteq \mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

Neka je $u \in \mathcal{D}(a_0(\cdot,D))$, $a_0(\cdot,D)u = f$ i (φ_n) niz iz definicije operatora $a_0(\cdot,D)$. Za svaki $\psi \in \mathcal{S}$ je

$$\langle \varphi_n, a^*(\cdot,D)\psi\rangle = \langle a(\cdot,D)\varphi_n, \psi\rangle,$$

odakle na limesu slijedi

$$\langle u, a^*(\cdot,D)\psi\rangle = \langle f, \psi\rangle,$$

čime je dokazano da je $u \in \mathcal{D}(a_1(\cdot,D))$ i $a_1(\cdot,D)u = f$.

Neka je sada $u \in \mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$. Zbog gustoće, postoji niz (φ_n) u $\mathcal{S}$ takav da

$$\|\varphi_n - u\|_{\mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}} \longrightarrow 0.$$

Po desnoj nejednakosti u (12) su nizovi $(a(\cdot,D)\varphi_n)$ i (φ_n) Cauchyjevi u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ pa postoje $u, f \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ takve da

$$\|\varphi_n - u\|_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0$$

i

$$\|a(\cdot,D)\varphi_n - f\|_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0,$$

što upravo znači da je $u \in \mathcal{D}(a_0(\cdot,D))$ i $a_0(\cdot,D)u = f$.

S druge strane, ako je $u \in \mathcal{D}(a_0(\cdot,D))$ i (φ_n) niz iz definicije operatora $a_0(\cdot,D)$, nizovi $(a(\cdot,D)\varphi_n)$ i (φ_n) su Cauchyjevi u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, pa je po lijevoj nejednakosti u (12) (φ_n) Cauchyjev i u $\mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, tj. zbog potpunosti postoji $v \in \mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ takva da

$$\|\varphi_n - v\|_{\mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}} \longrightarrow 0.$$

Po Teoremu 9 je i

$$\|\varphi_n - v\|_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0,$$

odakle zbog jedinstvenosti limesa slijedi $u = v$ i $u \in \mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

Konačno, neka je $u \in \mathcal{D}(a_1(\cdot,D))$ i

$$u = b(\cdot,D)a(\cdot,D)u - Ru$$

rastav dan Teoremom 10. Iz same definicije operatora $a_1(\cdot,D)$ je jasno da je $a_1(\cdot,D)u \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, da se $a_1(\cdot,D)u$ i $a(\cdot,D)u$ podudaraju u smislu distribucija, pa je i $a(\cdot,D)u \in \mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

Prema Teoremu 8 je sada $b(\cdot,D)a(\cdot,D)u \in \mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ i $Ru \in \mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, čime je dokazano da je i $u \in \mathrm{H}^{m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.

(b) Zbog prethodno dokazanog dovoljno je dokazati da je $a(\cdot, D)$, kao operator iz $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ s domenom $\mathcal{S}$, zatvoriv.

Neka je dakle (φ_n) niz u $\mathcal{S}$ takav da

$$\|\varphi_n\|_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0$$

i

$$\|a(\cdot, D)\varphi_n - f\|_{\mathbf{p}} \longrightarrow 0.$$

Iz jednakosti

$$\langle a(\cdot, D)\varphi_n, \psi\rangle = \langle \varphi_n, a^*(\cdot, D)\psi\rangle, \quad \psi \in \mathcal{S}$$

na limesu dobivamo $\langle f, \psi\rangle = 0$, za svaki $\psi \in \mathcal{S}$, pa zbog gustoće $\mathcal{S}$ u $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$ slijedi $f = 0$.

(c) Inkluzija je očita. Dokažimo maksimalnost.

Neka je $a_2(\cdot, D)$ proizvoljno zatvoreno proširenje operatora $a(\cdot, D) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ takvo da je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}(a_2^t(\cdot, D))$. Tada je također $a^t(\cdot, D)$ proširenje $a_2^t(\cdot, D)$. Tvrdimo da je $a_0(\cdot, D)$ proširenje $a_2(\cdot, D)$.

Neka je dakle $u \in \mathcal{D}(a_2(\cdot, D))$. Za svaki $\psi \in \mathcal{S}$ po definiciji $a_2^t(\cdot, D)$ je

$$\langle \psi, a_2(\cdot, D)u\rangle = \langle a_2^t(\cdot, D)\psi, u\rangle,$$

što zapravo znači

$$\langle \psi, a_2(\cdot, D)u\rangle = \langle a^t(\cdot, D)\psi, u\rangle = \langle a^*(\cdot, D)\psi, u\rangle.$$

To pak znači da je $u \in \mathcal{D}(a_1(\cdot, D)) = \mathcal{D}(a_0(\cdot, D))$ i $a_1(\cdot, D)u = a_0(\cdot, D)u = a_2(\cdot, D)u$.

Q.E.D.

U nastavku promatramo linearne parcijalne diferencijalne operatore

$$P(\cdot, D) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot) D^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad a_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d),$$

koji za neki $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^d$ i svaki $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$ dodatno zadovoljavaju uvjete:

$$(\forall\, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d) \quad \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d} |D^{\boldsymbol{\beta}} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})| < \infty, \quad |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m, \tag{13}$$

$$(\exists\, C_1 > 0) \quad \Big| \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = m} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x_0}) \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \Big| \geqslant C_1 |\boldsymbol{\xi}|^m, \tag{14}$$

$$(\exists\, C_2 > 0) \quad \Big| \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = m} (a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) - a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x_0})) \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} \Big| \leqslant C_2 |\boldsymbol{\xi}|^m, \tag{15}$$

gdje je $C_2 < C_1$.

Klasičan je i elementaran rezultat (v. [W, Lema 13.3]) da takvi operatori zadovoljavaju (11), tj. pripadaju klasi eliptičkih pseudodiferencijalnih operatora reda m, sa simbolom

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Naš drugi rezultat je sljedeći teorem o regularnosti rješenja linearnih diferencijalnih jednadžbi. Tvrdnja očito vrijedi i za sve eliptičke pseudodiferencijalne operatore.

Teorem 12. *Neka je $P(\cdot, D)$ linearan diferencijalni operator reda m koji zadovoljava (13), (14) i (15). Ako je $u \in \mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, $P(\cdot, D)u = f$ i $f \in \mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, onda je zapravo $u \in \mathrm{H}^{s+m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$.*

Dem. Budući da je $P(\cdot, D)$ eliptički pseudodiferencijalni operator reda m, prema Teoremu 10 postoje operator $Q(\cdot, D)$ reda $-m$ i izglađujući operator R takvi da je

$$Q(\cdot, D)P(\cdot, D) = I + R. \tag{16}$$

Primijenimo li (16) na u dobivamo $u = Q(\cdot, D)f - Ru$. Budući da je $f \in \mathrm{H}^{s,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, a $Q(\cdot, D)$ reda $-m$, prema Teoremu 8 slijedi da je $Q(\cdot, D)f \in \mathrm{H}^{s+m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, a očito je iz istih razloga i $Ru \in \mathrm{H}^{s+m,\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, čime je tvrdnja dokazana.

Q.E.D.

6. Usporedba s poznatim rezultatima

U literaturi smo pronašli vrlo malo rezultata vezanih uz prostore s mješovitom normom. Rezultat najbliskiji našem proučavanju nalazimo u radu Tuomasa Hytönena i Pierrea Portala [HP, Teorem 17]. Oni su dokazali da su pseudodiferencijalni operatori pridruženi *R-Yamazakijevim simbolima* ograničeni na $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d)$, štoviše na $\mathrm{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^d; X)$ za X iz odgovarajuće klase Banachovih prostora, $\mathbf{p} \in \langle 1, \infty\rangle^d$.

Preciznije, Hytönen i Portal su promatrali rastav prostora

$$\mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{d_N}$$

i razvili teoriju kojom dokazuju ograničenost spomenutih pseudodiferencijalnih operatora na prostorima koji su za $\overline{p} := (p_1, \ldots, p_N)$ dani sljedećom induktivnom definicijom

$$\mathrm{L}^{\overline{p}}(\mathbf{R}^d; X) := \mathrm{L}^{p_N}(\mathbf{R}^{d_N}; \mathrm{L}^{(p_1,\ldots,p_{N-1})}(\mathbf{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{d_{N-1}}; X)).$$

U našim ranijim oznakama, za $X = \mathbf{C}$ radi se zapravo o prostoru

$$\mathrm{L}^{(p_1,\ldots,p1,\ldots,p_N,\ldots,p_N)}(\mathbf{R}^d),$$

gdje p_i uzimamo d_i puta, $i = 1, \ldots, N$.

Da bismo time pokrili sve Lebesgueove prostore s mješovitom normom mora nužno biti $N = d$ i $d_1 = d_2 = \cdots = d_N = 1$ pa u nastavku promatramo samo taj slučaj i slučaj $X = \mathbf{C}$.

Da bismo definirali *R-Yamazakijeve simbole* (u slučaju koji nas zanima), moramo najprije uvesti odgovarajuću terminologiju. S $\triangle_h^j$ definiramo operator diferencije prvog reda:

$$\triangle_h^j f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - h, x_{j+1}, \ldots, x_d) - f(\mathbf{x}),$$

a s $J = \{j_1, \ldots, j_{|J|}\}$ označavamo proizvoljni podskup skupa $\{1, \ldots, d\}$.

Kažemo da je skup funkcija $\{\omega_J \in \mathrm{C}((\mathbf{R}^+)^{|J|}; \mathbf{R}^+) : J \subseteq \{1, \ldots, d\}\}$ *modul neprekinutosti* ako su zadovoljena sljedeća tri uvjeta:

(i) Za svaki $J \subseteq \{1, \ldots, d\}$, ω_J je rastuća i konkavna po svakoj varijabli posebno;
(ii) Za svaki $J \subseteq \{1, \ldots, d\}$, ω_J je invarijantna na permutaciju varijabli;
(iii) Za svaki $J_1 \subset J_2 \subseteq \{1, \ldots, d\}$, vrijedi nejednakost $2^{|J_1|}\omega_{J_2}(\mathbf{t}, \mathbf{t}') \leqslant 2^{|J_2|}\omega_{J_1}(\mathbf{t})$ za proizvoljne $\mathbf{t} \in (\mathbf{R}^+)^{|J_1|}$ i $\mathbf{t}' \in (\mathbf{R}^+)^{|J_2|-|J_1|}$.

Konačno, kažemo da je funkcija $a : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{C}$ *R-Yamazakijev simbol* ako postoje modul neprekinutosti $(\omega_J)_{J\subseteq\{1,\dots,d\}}$ i realna konstanta C takvi da je

$$(a) \qquad (\forall\, J \subseteq \{1,\dots,d\}) \quad \int_{[0,1]^{|J|}} \frac{\omega_J(\mathbf{t})^2}{t_1\cdots t_{|J|}}\, d\mathbf{t} \leqslant C;$$

$$(b) \qquad (\forall\, J \subseteq \{1,\dots,d\})(\forall\, l \in \{1,\dots,d\})(\forall\, k \in \{0,\dots,d+1\})(\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d)$$

$$|\triangle^{j_1}_{y_{j_1}}\cdots\triangle^{j_{|J|}}_{y_{j_{|J|}}}\partial^k_{\xi_l} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \leqslant C\omega_J(|y_{j_1}|,\dots,|y_{j_{|J|}}|)(1+|\xi_l|)^{-k}.$$

Za klasični simbol $a \in \mathrm{S}^0_{1,0}$, koristeći Lagrangeev teorem srednje vrijednosti, dobivamo ocjenu

$$|\triangle^{j_1}_{y_{j_1}}\cdots\triangle^{j_{|J|}}_{y_{j_{|J|}}}\partial^k_{\xi_l} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \leqslant C'|y_{j_1}|\cdots|y_{j_{|J|}}|(1+|\boldsymbol{\xi}|)^{-k},$$

pa je jedini očiti način kako zadovoljiti (b), pronaći modul neprekinutosti (ω_J) takav da je

$$\omega_J(t_1,\dots,t_{|J|}) \geqslant C'' t_1\cdots t_{|J|},$$

za neku konstantu $C'' > 0$. No očito je nemoguće istovremeno zadovoljiti taj uvjet i uvjet (iii), jer bi tada slijedilo

$$C'' t_1\cdots t_{|J_1|} t_{|J_1|+1}\cdots t_{|J_2|} \leqslant \omega_{J_2}(t_1,\dots,t_{|J_2|}) \leqslant 2^{|J_2|-|J_1|}\omega_{J_1}(t_1,\dots,t_{|J_1|}),$$

tj.

$$C'' t_{|J_1|+1}\cdots t_{|J_2|} \leqslant \frac{2^{|J_2|-|J_1|}\omega_{J_1}(t_1,\dots,t_{|J_1|})}{t_1\cdots t_{|J_1|}},$$

što je očita kontradikcija (desna strana ne ovisi o varijablama na lijevoj strani), osim ako nekako ne ograničimo lijevu stranu. To možemo npr. učiniti zahtjevom da simbol a ima kompaktan nosač po $\mathbf{x}$, pa tada možemo i $\mathbf{y}$ birati samo iz kompaktnog skupa, i tada možemo uzeti

$$\omega_J(t_1,\dots,t_{|J|}) = 2^{|J|-1}\min(t_1,\dots,t_{|J|}).$$

S druge strane, $\triangle^{j_1}_{y_{j_1}}\cdots\triangle^{j_{|J|}}_{y_{j_{|J|}}}\partial^k_{\xi_l} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ je konačna linearna kombinacija (s koeficijentima jednakima 1 ili -1) brojeva oblika $\partial^k_{\xi_l} a(\mathbf{z},\boldsymbol{\xi})$ (za fiksni $\boldsymbol{\xi}$ i $2^{|J|}$ raznih $\mathbf{z}$-ova), pa iz toga slijedi ocjena

$$|\triangle^{j_1}_{y_{j_1}}\cdots\triangle^{j_{|J|}}_{y_{j_{|J|}}}\partial^k_{\xi_l} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \leqslant \tilde{C}|(1+|\boldsymbol{\xi}|)^{-k},$$

te je sada jedini očiti način kako zadovoljiti (b), pronaći modul neprekinutosti (ω_J) takav da je

$$\omega_J(t_1,\dots,t_{|J|}) \geqslant \bar{C},$$

za neku konstantu $\bar{C} > 0$. To je pak kontradikcija s uvjetom (a), jer je

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\, dt = \infty.$$

Možemo zaključiti da su *R-Yamazakijevi simboli lokalni*, dok je naš rezultat omeđenost za *globalne simbole*, i da veza među promatranim simbolima nije očita.

III. H–mjere

1. Definicija

H-mjere opisuju specifična svojstva slabo konvergentnih nizova u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$. Kažemo da niz (u_n) u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ konvergira slabo prema $u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ i pišemo $u_n \rightharpoonup u$ ako

$$(\forall\, v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)) \quad \langle\, u_n \mid v\,\rangle = \langle\, u \mid v\,\rangle.$$

H-mjere su kompleksne Radonove mjere koje se na danom lokalno kompaktnom Hausdorffovom topološkom prostoru X mogu poistovjetiti s neprekinutim linearnim funkcionalima na $\mathrm{C}_0(X)$, tj. s elementima prostora $(\mathrm{C}_0(X))'$. Prostor $\mathrm{C}_0(X)$ je zatvarač prostora $\mathrm{C}_c(X)$ u $\mathrm{L}^\infty(X)$ i za lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor X može se karakterizirati kao prostor neprekinutih funkcija koje teže k nuli u beskonačnosti, tj. takvih $f \in \mathrm{C}(X)$ da je za svaki $\varepsilon > 0$

$$\{\mathbf{x} \in X : |f(\mathbf{x})| \geqslant \varepsilon\}$$

kompaktan.

H-mjere uveli su neovisno Luc Tartar [Ta1] i Patrick Gérard [G] početkom 90-tih godina dvadesetog stoljeća i njihovo postojanje definirano je sljedećim teoremom.

Teorem 1. *Ako je (u_n) niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ takav da $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$, onda postoje podniz $(\mathsf{u}_{n'})$ i pozitivno definitna kompleksna matrična Radonova mjera $\boldsymbol{\mu} = \{\mu^{ij}\}_{i,j=1,\dots,r}$ na $\mathbf{R}^d \times S^{d-1}$ takvi da za proizvoljne $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, $\psi \in \mathrm{C}(S^{d-1})$, te $i, j = 1, \dots, r$ vrijedi:*

$$\begin{aligned}\lim_{n' \to \infty} \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_1 u^i_{n'})(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{A}_\psi(\varphi_2 u^j_{n'})(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} &= \langle \mu^{ij}, (\varphi_1 \overline{\varphi_2}) \boxtimes \overline{\psi} \rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^d \times S^{d-1}} \varphi_1(\mathbf{x}) \overline{\varphi_2(\mathbf{x}) \psi(\boldsymbol{\xi})}\, d\mu^{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),\end{aligned} \tag{1}$$

gdje je $\mathcal{F}(\mathcal{A}_\psi v)(\boldsymbol{\xi}) = \psi(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}) \mathcal{F}v(\boldsymbol{\xi})$. ∎

Kompleksna matrična Radonova mjera $\{\mu^{ij}\}_{i,j=1,\dots,r}$ definirana prethodnim teoremom zove se H-mjera pridružena podnizu $(\mathsf{u}_{n'}) \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$.

H-mjere opisuju odstupanje niza $(\mathsf{u}_n) \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ od jake konvergencije. Pojasnimo to na primjeru jednodimenzionalnog niza ($r = 1$). Primijetimo najprije da primjenom Plancherelovog teorema lijevu stranu formule (1) možemo zapisati u obliku

$$\lim_{n' \to \infty} \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{\varphi_1 u_{n'}} \overline{\psi \widehat{\varphi_2 u_{n'}}}\, d\boldsymbol{\xi}, \tag{2}$$

gdje je $\hat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}u(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} u(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, d\mathbf{x}$ Fourierova pretvorba funkcije u. Sada nije teško vidjeti da je za niz (u_n) koji jako konvergira u L^2 odgovarajuća H-mjera trivijalna. Obratno, ako je H-mjera trivijalna, onda $u_n \longrightarrow 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$.

Dokaz Teorema 1 oslanja se na sljedeću lemu (v. [Ta1, Lema 1.7]).

Lema 1. (prva komutacijska lema) *Neka su $a \in \mathrm{C}(S^{d-1})$ i $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$. Neka su nadalje $\mathcal{A}$ Fourierov množitelj sa simbolom a te B operator množenja definirani formulama:*

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}u)(\boldsymbol{\xi}) = a\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) \mathcal{F}u(\boldsymbol{\xi}) \ \ (\text{ss } \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d), \tag{3}$$

$$Bu(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \ \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d). \tag{4}$$

Tada je $C = \mathcal{A}B - B\mathcal{A}$ kompaktan operator s $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$.

Dem. Primijetimo da je operator C ograničen na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ i da njegova norma zadovoljava

$$\|C\| \leqslant 2 \sup_{\boldsymbol{\xi}} |a(\boldsymbol{\xi})| \sup_{\mathbf{x}} |b(\mathbf{x})|.$$

Funkciju a možemo jednoliko aproksimirati nizom funkcija $a_n \in \mathrm{C}^1(S^{d-1})$. Nadalje, funkciju b možemo jednoliko aproksimirati nizom funkcija $f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, te zatim u L^1 normi aproksimirati $\hat{f}_n$ nizom $g_{nm} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ tako da $\mathcal{F}^{-1} g_{nm}$ aproksimira f_n jednoliko.

Sada primjenjujući Cantorov dijagonalni postupak dobivamo niz $b_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ koji aproksimira b jednoliko te pritom $\hat{b}_n$ ima kompaktan nosač.

Operatori $\mathcal{A}_n$ i B_n, koje pridružimo funkcijama a_n i b_n u skladu s formulama (3) i (4), konvergiraju u normi prema $\mathcal{A}$ i B tako da i $C_n = \mathcal{A}_n B_n - B_n \mathcal{A}_n$ konvergira u operatorskoj normi prema C. Zato je za kompaktnost operatora C dovoljno provjeriti da je svaki operator C_n kompaktan.

Sada primjenjujući formule (3) i (4), te svojstva Fourierove pretvorbe možemo raspisati

$$\mathcal{F}(C_n u)(\boldsymbol{\xi}) = a_n\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) \int_{\mathbf{R}^d} \hat{b}_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \hat{u}(\boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta} - \int_{\mathbf{R}^d} \hat{b}_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) a_n\Big(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\Big) \hat{u}(\boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta} \ \ (\text{ss } \boldsymbol{\xi}),$$

odnosno možemo pisati

$$\mathcal{F}(C_n u)(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^d} K_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \hat{u}(\boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta},$$

gdje je jezgra K_n dana formulom

$$K_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \hat{b}_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \Big(a_n\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) - a_n\Big(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\Big) \Big).$$

Budući da je $\operatorname{supp} \hat{b}_n$ kompaktan, a $a_n \in \mathrm{C}^1(S^{d-1})$ lako se vidi da je $a_n\big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\big) - a_n\big(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\big)$ ograničeno te da za velike $|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}|$, uz $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta} \in \operatorname{supp} \hat{b}_n$, vrijedi ocjena

$$\Big| a_n\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) - a_n\Big(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\Big) \Big| \leqslant \frac{C}{|\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\eta}|},$$

za neku konstantu C. Prema tome, možemo pisati

$$K_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \hat{b}_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) X_{nm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \hat{b}_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) Y_{nm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}),$$

gdje je X_{nm} ograničena i s kompaktnim nosačem, a Y_{nm} je ograničena s $\frac{1}{m}$.

Prema tome, prvi dio jezgre $(\hat{b}_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) X_{nm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}))$ definira Hilbert-Schmidtov operator za koji znamo da je kompaktan, a drugi dio operator čija norma teži prema nuli kad $m \longrightarrow \infty$. C_n je stoga limes u normi Hilbert-Schmidtovih operatora pa je i sam kompaktan.

Q.E.D.

Dem. **(Teorema 1)** Prema Lemi 1 je $\mathcal{A}_\psi(\varphi_2 u^j_{n'}) - \varphi_2 \mathcal{A}_\psi u^j_{n'} = C u^j_{n'}$ za kompaktan operator C pa

$$\mathcal{A}_\psi(\varphi_2 u^j_{n'}) - \varphi_2 \mathcal{A}_\psi u^j_{n'} \longrightarrow 0 \ \text{ u } \ \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d).$$

To znači da limes na lijevoj strani jednakosti (1) možemo napisati i u obliku

$$\lim_{n'\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d}(\varphi_1\overline{\varphi_2}u^i_{n'})(\mathbf{x})\overline{\mathcal{A}_\psi u^j_{n'}(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}.$$

Gornji integral je ograničen s $C\|\varphi_1\|_{\mathrm{L}^\infty}\|\varphi_2\|_{\mathrm{L}^\infty}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty}$, gdje je C gornja međa za $\|u^i_{n'}\|_{\mathrm{L}^2}\|u^j_{n'}\|_{\mathrm{L}^2}$, pa koristeći kompaktnost na $\mathbf{R}$ i Cantorov dijagonalni postupak možemo pronaći podniz za koji gornji limes postoji za funkcije φ_1, φ_2 i ψ iz prebrojivog gustog podskupa prostora $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, odnosno $\mathrm{C}(S^{d-1})$.

Taj limes je linearan po $\varphi_1, \overline{\varphi_2}$ i $\overline{\psi}$, te ovisi samo o umnošku $\varphi_1\overline{\varphi_2}$, pa definira preslikavanje $\langle\mu^{ij}, (\varphi_1\overline{\varphi_2})\boxtimes\overline{\psi}\rangle$ koje se po neprekinutosti može proširiti do neprekinutog bilinearnog funkcionala na $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)\times\mathrm{C}(S^{d-1})$. Birajući $\varphi_1=\varphi_2$ i nenegativnu ψ zaključujemo da je za $i=j$ dobiveni funkcional pozitivan.

Sada možemo po Schwartzovom teoremu o jezgri (v. [Tr2, Theorem 51.7]) taj funkcional proširiti do distribucije na $\mathbf{R}^d\times S^{d-1}$ (koju radi jednostavnosti nastavljamo označivati s μ^{ij}). Zbog pozitivnosti, koristeći Schwartzovu lemu o nenegativnim distribucijama, zaključujemo da su μ^{ii} zapravo Radonove mjere.

Preostaje dokazati da su i nedijagonalni elementi μ^{ij} za $i\neq j$ također Radonove mjere. Da se zapravo radi o kompleksnim Radonovim mjerama u smislu teorije mjere će tada slijediti prema Rieszovom teoremu reprezentacije (v. [AV, Teorem IV.21]).

μ^{ii} je zapravo H-mjera pridružena nizu (u^i_n) (preciznije, njegovom podnizu), a μ^{jj} je H-mjera pridružena nizu (u^j_n) i već smo pokazali da se radi o Radonovim mjerama, tj. dokazali smo teorem u jednodimenzionalnom slučaju $r=1$. Direktno iz definicije sada slijedi da je nizu $(u^i_n+u^j_n)$ pridružena H-mjera $\mu^{ii}+\mu^{jj}+2\mathrm{Re}\,\mu^{ij}$, odakle slijedi da je distribucija $\mathrm{Re}\,\mu^{ij}$ također Radonova mjera.

Analogno dobivamo da je nizu $(u^i_n+iu^j_n)$ (gdje je i ispred funkcije sada imaginarna jedinica) pridružena H-mjera $\mu^{ii}+\mu^{jj}+2\mathrm{Im}\,\mu^{ij}$, pa je i $\mathrm{Im}\,\mu^{ij}$ Radonova mjera, čime je teorem dokazan.

Q.E.D.

2. Lokalizacijsko i prijenosno svojstvo

U nastavku opisujemo dva važna svojstva H-mjera, a to su lokalizacijsko i prijenosno svojstvo. Lokalizacijsko svojstvo daje ocjenu za nosač H-mjere i dano je sljedećim teoremom:

Teorem 2. *Ako je* (u_n) *niz u* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ *takav da* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$, *ako mu je pridružena H-mjera* $\boldsymbol{\mu}$, *i ako* u_n *zadovoljava*

$$\sum_{k=1}^d \partial_k(\mathbf{A}_k\mathsf{u}_n)\longrightarrow\mathsf{0}\ \textit{jako u}\ \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d), \tag{5}$$

gdje su (matrični) koeficijenti $\mathbf{A}_k$ *neprekinuti na* $\mathbf{R}^d$, *onda vrijedi*

$$\Big(\sum_{k=1}^d \xi_k\mathbf{A}_k(\mathbf{x})\Big)\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}\ \textit{na}\ \mathbf{R}^d\times S^{d-1}.$$

Dem. Najprije uočimo da i $\varphi \mathsf{u}_n$ zadovoljava uvjet (5), gdje je $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$, jer

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d} A_{ik} u_n^i \partial_k \varphi \longrightarrow 0 \text{ u } \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$$

pa prema tome konvergira i jako u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$. Sada po tom uvjetu i definiciji norme na $\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d)$ slijedi

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d} \frac{2\pi i \xi_k}{\sqrt{1+4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^2}} \mathcal{F}(\varphi A_{ik} u_n^i) \longrightarrow 0 \text{ u } \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d),$$

a nakon malo elementarnog računa dobivamo i

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d} \frac{\xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|} \mathcal{F}(\varphi A_{ik} u_n^i) \longrightarrow 0 \text{ u } \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d). \tag{6}$$

Preciznije, na skupu $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant \eta > 0$ gornja konvergencija je očita, a za $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \eta$, koristeći činjenicu da je niz $(\mathcal{F}(\varphi A_{ik} u_n^i))$ omeđen u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$, zaključujemo prijelazom na limes $\eta \longrightarrow 0$.

Množenjem (6) s $\overline{\mathcal{F}(\varphi u_n^j)}\psi(\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|)$ i integriranjem, na limesu dobivamo

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d} \langle \mu^{ij}, \varphi A_{ik} \frac{\xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|} \overline{\varphi} \psi \rangle = 0.$$

Budući da je posljednja jednakost istinita za proizvoljne φ i ψ, konačno zaključujemo

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{d} A_{ik} \xi_k \mu^{ij} = 0.$$

Q.E.D.

Argument korišten u dokazu (6) zapisujemo sada u općenitijem obliku, u kojem ćemo ga koristiti u poglavlju V.

Lema 2. *Neka je* f *izmjeriva vektorska funkcija na* $\mathbf{R}^d$*, te* h *neprekinuta skalarna funkcija oblika* $h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d |2\pi x^i|^{\alpha_i}, \alpha_i \in \mathbf{R}^+$*. Pretpostavimo da je* (u_n) *niz vektorskih funkcija s nosačima sadržanima u fiksnom kompaktnom skupu, takav da* $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$ *u* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$*, i*

$$\frac{\mathsf{f}}{(1+h)^\beta} \cdot \hat{\mathsf{u}}_n \longrightarrow 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$$

za neku konstantu $\beta \in \mathbf{R}^+$*. Ako je* $h^{-\beta}\mathsf{f} \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$*, tada također*

$$\frac{\mathsf{f}}{h^\beta} \cdot \hat{\mathsf{u}}_n \longrightarrow 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d).$$

∎

Dokaz prethodne leme se za skalarni slučaj i $\alpha_i \in \mathbf{N}$ može pronaći u [AL2, Lema 3], a dokaz ovog općenitijeg slučaja je posve analogan i ne donosi ništa novoga. Štoviše, ideja dokaza je već dana u dokazu Teorema 2.

Za izvod prijenosnih svojstava H-mjera potrebna nam je tzv. druga komutacijska lema. Rezultate koji slijede ne koristimo u kasnijim poglavljima te ih navodimo bez dokaza. Dokazi se mogu pronaći u [Ta1, str. 205-209], a za više detalja pogledati i [Ta5].

Definicija 1. *S* $\mathrm{X}^m(\mathbf{R}^d)$ *označujemo prostor funkcija u čije derivacije do uključivo rada* m *pripadaju prostoru* $\mathcal{F}\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$. *Prostor* $\mathrm{X}^m(\mathbf{R}^d)$ *opremljen normom*

$$\|u\|_m = \int_{\mathbf{R}^d} (1 + 4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}} |\mathcal{F}u(\boldsymbol{\xi})| \, d\boldsymbol{\xi}$$

je Banachov prostor. Nadalje, s $\mathrm{X}^m_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ *označavamo prostor funkcija* u *takvih da je* $\varphi u \in \mathrm{X}^m(\mathbf{R}^d)$ *za proizvoljnu* $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$.

Očito je $\mathrm{X}^m(\mathbf{R}^d) \subset \mathrm{C}^m(\mathbf{R}^d)$, a sve derivacije (do reda m) funkcija iz $\mathrm{X}^m(\mathbf{R}^d)$ pripadaju prostoru $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$. S druge strane, za $s > m + d/2$ vrijedi $\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d) \subset \mathrm{X}^m(\mathbf{R}^d)$.

Lema 3. **(druga komutacijska lema)** *Neka su* $\mathcal{A}$ *i* B *operatori pridruženi funkcijama* $a(\boldsymbol{\xi})$ *i* $b(\mathbf{x})$, *kao u Lemi 1. Pretpostavimo nadalje da je zadovoljen jedan od sljedeća dva uvjeta:*

(i) *a je klase* $\mathrm{C}^1(S^{d-1})$, *a* b *pripada prostoru* $\mathrm{X}^1(\mathbf{R}^d)$; *ili*

(ii) *a pripada prostoru* $\mathrm{X}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\})$, *a* b *je klase* $\mathrm{C}^1_0(\mathbf{R}^d)$.

Onda je $C = \mathcal{A}B - B\mathcal{A}$ *neprekidan operator s* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ *u* $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)$ *i, proširujući a po homogenosti,*

$$\partial_j(\mathcal{A}B - B\mathcal{A}) \textit{ ima simbol } \xi_j \sum_{k=1}^d \frac{\partial a}{\partial \xi_k} \frac{\partial b}{\partial x_k}.$$

∎

Prijenosno se svojstvo može pridružiti različitim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. Promatrat ćemo jednostavnu jednadžbu

$$\sum_{j=1}^d b_j \partial_j u_n + c u_n = f_n \,, \tag{7}$$

na primjeru koje ćemo ilustrirati statički rezultat koji slijedi primjenom lokalizacijskog svojstva i dinamički rezultat kojeg zovemo prijenosno svojstvo pridružene H-mjere. Pretpostavljamo $b_j \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^d)$, $c \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d)$ i $u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$.

Ako niz (u_n) definira H-mjeru μ i ako f_n konvergira prema nuli u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, onda prema Teoremu 2 vrijedi da je $(\sum_j b_j \xi_j)\mu = 0$. Ako definiramo karakteristični polinom P pridružen jednadžbi (7) formulom

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j(\mathbf{x}) \xi_j \,,$$

vidimo da je nosač mjere μ sadržan u skupu svih nultočaka polinoma P.

Za izvod prijenosnog svojstva pretpostavljamo da i $f_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, te promatramo H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$ pridruženu nizu (u_n, f_n). Nadalje, pretpostavljamo da su koeficijenti b_j realne funkcije, a uvodimo i pokratu (tzv. Poissonovu zagradu)

$$\{g, h\} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} \frac{\partial h}{\partial x_k} - \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial \xi_k}.$$

Prijenosno svojstvo dano je sada sljedećim teoremom:

Teorem 3. *Ako je $\boldsymbol{\mu}$ H-mjera pridružena nizu (u_n, f_n), ako za svaki $n \in \mathbf{N}$ funkcije u_n i f_n zadovoljavaju jednadžbu (7), i ako vrijede sve ranije spomenute pretpostavke, onda mjera $\boldsymbol{\mu}$ zadovoljava jednadžbu*

$$\langle \mu^{11}, \{\Phi, P\} \rangle - \langle \mu^{11}, \Phi \,\mathsf{div}\, \mathbf{b} \rangle + 2\langle \mu^{11}, \mathrm{Re}\,(c\,\Phi) \rangle = 2\langle \mathrm{Re}\,\mu^{12}, \Phi \rangle,$$

za svaku test funkciju $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^d \times S^{d-1})$, s kompaktnim nosačem po $\mathbf{x}$ i proširenu po homogenosti po $\boldsymbol{\xi}$ na $\mathbf{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$. ∎

IV. Varijante prve komutacijske leme

1. Uvod

Nedostatak Teorema III.1 je korištenje simbola definiranih na sferi S^{d-1} i skaliranja duž pravaca kroz ishodište što H-mjere čini prikladnim za proučavanje samo hiperboličkih zadaća. Nedavno je (v. [AL1]) prva komutacijska lema proširena na slučaj kada je simbol a definiran na mnogostrukosti $P = \{(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d : \tau^2 + |\boldsymbol{\xi}|^4 = 1\}$, uz skaliranje duž parabola, što je autorima omogućilo da u Teoremu 1 zamijene sferu S^{d-1} s P te tako dobivene (paraboličke) H-mjere primijene na paraboličke zadaće.

Slijedeći dokaz Leme III.1 možemo uočiti da se dokaz oslanja na jednostavnu činjenicu da je dijametar projekcije (duž pravaca kroz ishodište) kompaktnog skupa K na sferu S^{d-1} to manji što je udaljenost skupa K od ishodišta veća. Točnije, lako slijedi sljedeće poopćenje (v. [Ta5, Lema 28.2]):

Lema 1. *Neka je $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ i neka $a \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ zadovoljava*

$$(\forall R > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^d)$$
$$|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}| > r \ \&\ \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{K}[\mathbf{0}, R] \quad \Longrightarrow \quad |a(\boldsymbol{\xi}) - a(\boldsymbol{\eta})| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Neka su nadalje Fourierov množitelj $\mathcal{A}$ sa simbolom a te operator množenja B definirani formulama:

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}u)(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi})\mathcal{F}u(\boldsymbol{\xi}) \ \ (\text{ss } \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d),$$
$$Bu(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \ \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d).$$

Tada je $C = \mathcal{A}B - B\mathcal{A}$ kompaktan operator s $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$. ∎

Sada u cilju uvođenja uvjeta intuitivnijih od (1) dokazujemo dvije varijante prve komutacijske leme koje svoje uporište nalaze u konkretnim krivuljama i mnogostrukostima. Varijanta A se već spominje u [MI], a ovdje je dana u dotjeranom obliku. Varijanta B je pak prikladnija za provjeru daljnjih rezultata danih u [MI], o čemu će biti riječi u primjeru koji slijedi.

2. Varijanta A

U ovoj varijanti promatramo kompaktnu neprekinutu mnogostrukost $P \subseteq \mathbf{R}^d$ takvu da postoji familija neprekinutih funkcija $\varphi_\lambda : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^d$ (zvat ćemo ih krivulje), indeksiranih s $\lambda \in S^{d-1}$; koje zadovoljavaju

$$\varphi_\lambda(1) = \lambda, \quad |\varphi_\lambda(t)| = t, \qquad (2)$$

sa svojstvima:

(a_1) $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\})(\exists!\, t \in \mathbf{R}^+)(\exists!\, \lambda \in S^{d-1}) \quad \mathbf{x} = \varphi_\lambda(t)$;

(a_2) postoji rastuća realna funkcija f, $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ tako da

$$(\forall \lambda_1, \lambda_2 \in S^{d-1})(\forall t_1, t_2 \in [1, \infty\rangle)\ |\varphi_{\lambda_1}(t_1) - \varphi_{\lambda_2}(t_2)| \geqslant f(\min\{t_1, t_2\})|\lambda_1 - \lambda_2|;$$

(a_3) $(\forall \lambda \in S^{d-1})(\exists!\, \mu \in P)\ \mu \in \{\varphi_\lambda(t) : t \in \mathbf{R}^+\}$, i preslikavanje $\lambda \mapsto \mu$ je neprekinuto.

Reći ćemo da je takva mnogostrukost *A-dopustiva*. Uočimo da iz svojstava (a_1), (a_2) i (a_3) slijedi da je preslikavanje $\lambda \mapsto \mu$ zapravo homeomorfizam između S^{d-1} i P. Ipak, dublje primjene dobivenih varijanti H-mjera ne očekuju se bez dodatnih pretpostavki na glatkoću mnogostrukosti P.

Također uočimo da svojstvo (a_1) u stvari znači da izabrane krivulje definiraju koordinatni sustav na $\mathbf{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$. Posljednji skup u daljnjem kraće označavamo $\mathbf{R}^d_*$, a vanjštinu otvorene jedinične kugle $\mathbf{R}^d_{**}$.

Lema 2. (varijanta prve komutacijske leme) *Neka je* $\mathcal{C} = \{\varphi_\lambda : \lambda \in S^{d-1}\}$ *familija krivulja koje zadovoljavaju (2) te svojstva* (a_1) *i* (a_2)*. Nadalje, neka je* $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ *i neka* $a \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ *zadovoljava*

$$(\exists\, a_\infty \in \mathrm{C}(S^{d-1})) \quad \lim_{t\to\infty} a(\varphi_\lambda(t)) = a_\infty(\lambda), \text{ jednoliko po } \lambda \in S^{d-1}. \tag{3}$$

Neka su također Fourierov množitelj $\mathcal{A}$ *sa simbolom* a *te operator množenja* B *definirani formulama:*

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}u)(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi})\mathcal{F}u(\boldsymbol{\xi}) \ \ (\text{ss } \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d),$$
$$Bu(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \ \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d).$$

Tada je $C = \mathcal{A}B - B\mathcal{A}$ *kompaktan operator s* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ *u* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$*.*

Dem. Prema Lemi 1 dovoljno je dokazati (1). Uočimo prvo da prema svojstvu (a_2), za proizvoljne $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^d_{**}$ takve da je $\boldsymbol{\xi} = \varphi_{\lambda_1}(t_1)$, $\boldsymbol{\eta} = \varphi_{\lambda_2}(t_2)$, vrijedi

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leqslant \frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|}{f(\min\{t_1, t_2\})}. \tag{4}$$

Neka su sada $R > 0$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni, a $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^d_{**}$ takvi da je $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{K}[\mathbf{0}, R]$. Prema svojstvu (a_1) postoje jedinstveni $\lambda_1, \lambda_2 \in S^{d-1}$ i $t_1, t_2 \in \mathbf{R}^+$ takvi da je

$$\boldsymbol{\xi} = \varphi_{\lambda_1}(t_1),\ \boldsymbol{\eta} = \varphi_{\lambda_2}(t_2).$$

Nadalje, S^{d-1} je kompaktna pa je a_∞ jednoliko neprekinuta:

$$(\exists\, \delta > 0) \quad |\lambda_1 - \lambda_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |a_\infty(\lambda_1) - a_\infty(\lambda_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zatim, prema (3) postoji $r_1 > 0$ takav da

$$t_1, t_2 > r_1 \quad \Longrightarrow \quad |a(\boldsymbol{\xi}) - a_\infty(\lambda_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ i } \ |a(\boldsymbol{\eta}) - a_\infty(\lambda_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Konačno, prema (4) i svojstvima funkcije f slijedi

$$(\exists\, r_2 > 1) \quad t_1, t_2 > r_2 \quad \Longrightarrow \quad |\lambda_1 - \lambda_2| \leqslant \frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|}{f(r_2)} \leqslant \frac{R}{f(r_2)} < \delta,$$

pa za $r = \max\{r_1, r_2\}$, $|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}| > r$ i $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{K}[\mathbf{0}, R]$ imamo

$$|a(\boldsymbol{\xi}) - a(\boldsymbol{\eta})| \leqslant |a(\boldsymbol{\xi}) - a_\infty(\lambda_1)| + |a_\infty(\lambda_1) - a_\infty(\lambda_2)| + |a_\infty(\lambda_2) - a(\boldsymbol{\eta})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Q.E.D.

Primijetimo da svojstvo (a_3) zasad nismo koristili. Ono će biti bitno tek u sljedećem poglavlju kod definicije poopćenja H-mjera, ali navodimo ga i ovdje radi potpunosti. Ova varijanta prve komutacijske leme ima dakle prednost što je neovisna o izboru mnogostrukosti P. Točnije, možemo prvo izabrati dobre krivulje, a zatim kod definiranja odgovarajućih H-mjera izabrati prikladnu mnogostrukost. Budući da svojstva (a_1), (a_2) i (a_3) može biti vrlo teško provjeriti, iskazujemo i dokazujemo još jednu varijantu prve komutacijske leme u kojoj se izbjegava eksplicitno korištenje sfere, ali u kojoj moramo odjednom izabrati i krivulje i mnogostrukost. Tu varijantu ćemo zvati varijanta B i ona je zapravo poopćenje varijante A. Ipak, i varijanta A, preko dodatnog svojstva (a_3), omogućuje da se komutacijska lema, iako izvorno iskazana za sferu, primijeni i na neku drugu, njoj homeomorfnu mnogostrukost.

Također ćemo u ocjeni tipa (a_2) koristiti proizvoljnu metriku d sa svojstvom da su euklidske kugle ograničene u toj metrici:

$$(\forall\, R > 0)(\exists\, C_R > 0)(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d) \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathrm{K}[\mathbf{0}, R] \quad \Longrightarrow \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < C_R. \tag{5}$$

3. Varijanta B

Za kompaktnu neprekinutu mnogostrukost $P \subseteq \mathbf{R}^d$ reći ćemo da je *B-dopustiva* ako postoji familija neprekinutih funkcija (krivulja) $\varphi_\mu : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^d$, indeksiranih s $\mu \in P$; koje zadovoljavaju

$$\varphi_\mu(1) = \mu, \tag{6}$$

sa svojstvima:

(b_1) $(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d_*)(\exists!\, s \in \mathbf{R}^+)(\exists!\, \mu \in P) \quad \mathbf{x} = \varphi_\mu(s)$;

(b_2) postoji rastuća realna funkcija f, $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ tako da

$$(\forall\, \mu_1, \mu_2 \in P)(\forall\, s_1, s_2 \in [1, \infty\rangle)\; d(\varphi_{\mu_1}(s_1), \varphi_{\mu_2}(s_2)) \geqslant f(\min\{t_1, t_2\})|\mu_1 - \mu_2|,$$

za neku metriku d sa svojstvom (5), te $t_1 = |\varphi_{\mu_1}(s_1)|$ i $t_2 = |\varphi_{\mu_2}(s_2)|$;

(b_3) funkcija $t = t_\mu(s) = |\varphi_\mu(s)|$ je strogo rastuća (barem za velike s) i

$$\lim_{s\to\infty} t_\mu(s) = \infty, \text{ jednoliko po } \mu \in P.$$

Primijetimo da svojstvo (b_3) u stvari znači da se krivulje udaljavaju od ishodišta i odlaze u beskonačnost. Također primijetimo da i inverzna funkcija $s = s_\mu(t)$ ima analogna svojstva.

Lema 3. (varijanta prve komutacijske leme) *Neka je P B-dopustiva mnogostrukost i $\mathcal{C} = \{\varphi_\mu : \mu \in P\}$ familija krivulja koje zadovoljavaju (6) te svojstva (b_1), (b_2) i (b_3). Nadalje, neka je $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ i neka $a \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ zadovoljava*

$$(\exists\, a_\infty \in \mathrm{C}(P)) \quad \lim_{s\to\infty} a(\varphi_\mu(s)) = a_\infty(\mu), \textit{ jednoliko po } \mu \in P. \tag{7}$$

Neka su također Fourierov množitelj $\mathcal{A}$ sa simbolom a te operator množenja B definirani formulama:

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}u)(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi})\mathcal{F}u(\boldsymbol{\xi}) \;\; (\text{ss } \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d),$$
$$Bu(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \;\; (\text{ss } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d).$$

Tada je $C = \mathcal{A}B - B\mathcal{A}$ kompaktan operator s $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$.

Dem. Prema Lemi 1 dovoljno je dokazati (1). Koristeći (b_1) za proizvoljne $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^d_*$ definiramo $s_1, s_2, \mu_1, \mu_2, t_1$ i t_2 takve da je

$$\boldsymbol{\xi} = \varphi_{\mu_1}(s_1),\; \boldsymbol{\eta} = \varphi_{\mu_2}(s_2),\; t_1 = |\boldsymbol{\xi}|,\; t_2 = |\boldsymbol{\eta}|.$$

Zbog (b_2) i (b_3) postoji $r_0 > 0$ takav da za $t_1, t_2 \geqslant r_0$ vrijedi

$$|\mu_1 - \mu_2| \leqslant \frac{d(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{f(\min\{t_1, t_2\})}. \tag{8}$$

Neka su sada $R > 0$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni, a $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^d_*$ takvi da vrijedi (8) i da je $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{K}[\mathbf{0}, R]$.

Nadalje, P je kompaktna pa je a_∞ jednoliko neprekinuta:

$$(\exists\, \delta > 0) \quad |\mu_1 - \mu_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |a_\infty(\mu_1) - a_\infty(\mu_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zatim, prema (7) postoji $r_1 > 0$ takav da

$$s_1, s_2 > r_1 \quad \Longrightarrow \quad |a(\boldsymbol{\xi}) - a_\infty(\mu_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ i } \ |a(\boldsymbol{\eta}) - a_\infty(\mu_2)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

pa zbog svojstva (b_3) postoji $r_2 > 0$ takav da

$$t_1, t_2 > r_2 \quad \Longrightarrow \quad |a(\boldsymbol{\xi}) - a_\infty(\mu_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ i } \ |a(\boldsymbol{\eta}) - a_\infty(\mu_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Konačno, prema (8) te svojstvima funkcije f i metrike d slijedi

$$(\exists\, r_3 > r_0) \quad t_1, t_2 > r_3 \quad \Longrightarrow \quad |\mu_1 - \mu_2| \leqslant \frac{d(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{f(r_3)} \leqslant \frac{C_R}{f(r_3)} < \delta,$$

pa za $r = \max\{r_2, r_3\}$, $|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}| > r$ i $\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta} \in \mathrm{K}[\mathbf{0}, R]$ imamo

$$|a(\boldsymbol{\xi}) - a(\boldsymbol{\eta})| \leqslant |a(\boldsymbol{\xi}) - a_\infty(\mu_1)| + |a_\infty(\mu_1) - a_\infty(\mu_2)| + |a_\infty(\mu_2) - a(\boldsymbol{\eta})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Q.E.D.

Iako smo ovu varijantu prve komutacijske leme iskazali za općenitu *B-dopustivu* mnogostrukost P (za razliku od varijante A koja je iskazana za sferu), prirodno se postavlja pitanje možemo li osmisliti analogon svojstva (a_3) koji bi omogućio prijelaz s jedne mnogostrukosti na drugu. Preciznije, ako definiramo H-mjere na $\mathbf{R}^d \times P$ za *B-dopustivu* mnogostrukost P, moći ćemo ih tada definirati i na $\mathbf{R}^d \times Q$ (za mnogostrukost Q za koju ne znamo da li je *dopustiva*) ako je zadovoljen sljedeći uvjet:

(b_4) $(\forall\, \mu \in P)(\exists!\, \eta \in Q)\ \eta \in \{\varphi_\mu(s) : s \in \mathbf{R}^+\}$, i preslikavanje $\mu \mapsto \eta$ je neprekinuto.

Ideju kako to napraviti nalazimo u dokazu Teorema V.5. Tamo je (u jednom posebnom slučaju) napravljeno i malo više, tj. indeksiranje krivulja prilagođeno je novoj mnogostrukosti.

4. Primjer

U [MI] korištena je mnogostrukost

$$P = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d : \sum_{k=1}^{d} |\xi_k|^{\alpha_k} = 1\},$$

gdje su $\alpha_k \in \langle 0,1]$, $k=1,\dots,d$. Pritom je svakoj točki $(\mu_1,\dots,\mu_d)\in P$ pridružena krivulja, parametrizirana po koordinatama:

$$\xi_k(s)=\mu_k\, s^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad s>0,\quad k=1,\dots,d. \tag{9}$$

Ovdje je ξ_k pokrata za $(\varphi_\mu)_k$ (uz fiksni μ) i uz taj dogovor je očito da krivulje (9) zadovoljavaju (6). Provjerimo da zadovoljavaju i svojstva (b_1), (b_2) i (b_3) (Varijanta B).

Za proizvoljni $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d_*$ i $\mu\in P$ iz $x_k=\mu_k\, s^{\frac{1}{\alpha_k}}$ potenciranjem i sumiranjem dobivamo

$$\sum_{k=1}^d |x_k|^{\alpha_k}=s, \tag{10}$$

a zatim uvrštavanjem u početnu jednakost slijedi

$$\mu_k=\frac{x_k}{\left(\sum_{j=1}^d |x_j|^{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}}, \tag{11}$$

čime je pokazano da vrijedi svojstvo (b_1).

Da bismo dokazali (b_2) i (b_3), prvo ćemo reparametrizirati danu familiju krivulja po parametru $t=|\xi_k(s)|$. Točnije, za dani $\mu\in P$ zapisujemo (9) u obliku

$$\xi_k(t)=\mu_k\, s(t)^{\frac{1}{\alpha_k}},$$

gdje funkciju $s(t)$ tražimo iz uvjeta

$$\sum_{k=1}^d \mu_k^2\, s(t)^{\frac{2}{\alpha_k}}=t^2.$$

Dakle, provjeravamo da funkcija

$$F(t,s)=\sum_{k=1}^d \mu_k^2\, s^{\frac{2}{\alpha_k}}-t^2$$

uvjetom $F(t,s)=0$ implicitno definira jedinstvenu funkciju $s(t):\mathbf{R}^+\longrightarrow\mathbf{R}^+$.

Primijetimo prvo da uvjet $F(t,s)=0$ eksplicitno definira jedinstvenu rastuću funkciju $t(s):\mathbf{R}^+\longrightarrow\mathbf{R}^+$, da je $\lim_{s\to 0} t(s)=0$ i $\lim_{s\to\infty} t(s)=\infty$ pa je jedinstveno definirana i inverzna funkcija $s(t)$ s istim svojstvima. Nadalje, funkcija $t(s)$ je očito glatka, a po Teoremu o inverznom preslikavanju glatka je i $s(t)$ jer je

$$t'(s)=\frac{\sum\limits_{k=1}^d \frac{\mu_k^2}{\alpha_k} s^{\frac{2}{\alpha_k}-1}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^d \mu_k^2\, s^{\frac{2}{\alpha_k}}}}\neq 0,$$

za proizvoljne $\mu\in P$ i $s\in\mathbf{R}^+$.

Dakle, da bismo provjerili (b_3) preostaje još samo vidjeti da je limes u (b_3) jednolik po $\mu\in P$. Uz oznaku $x_k=\xi_k(t)$ je $t(s)=\sqrt{\sum_{k=1}^d |x_k|^2}$. Neka je $t_0\geqslant 1$ proizvoljan i neka je $s > dt_0$. Prema (10) postoji $l \in \{1, \dots, d\}$ takav da je $|x_l|^{\alpha_l} > t_0$ pa onda i $|x_l| > t_0$. Slijedi da je i $t(s) \geqslant |x_l| > t_0$, tj. izabrali smo s, neovisan o $\mu \in P$, takav da je $t(s) > t_0$ pa je (b_3) provjereno.

Preostaje dokazati svojstvo (b_2). Neka je dakle $s_1, s_2 \geqslant 1$ dok $\mu_1, \mu_2 \in P$ uzimamo proizvoljne.

Neka su $\mathbf{x} = \varphi_{\mu_1}(s_1)$ i $\mathbf{y} = \varphi_{\mu_2}(s_2)$, te primijećujemo da je

$$x_k = \mu_1^k s_1(t_1)^{\frac{1}{\alpha_k}} \quad \text{i} \quad y_k = \mu_2^k s_2(t_2)^{\frac{1}{\alpha_k}},$$

gdje su svojstva funkcija s_1, s_2 upravo opisana (rastuće funkcije koje u beskonačnosti teže u beskonačnost, implicitno dane formulom (10) i izrazima $t_1 = |\mathbf{x}|$ i $t_2 = |\mathbf{y}|$).

Prepostavit ćemo (bez smanjenja općenitosti) da je $s_1(t_1) \geqslant s_2(t_2)$, te dokazati da svojstvo (b_2) vrijedi uz $f(t) = cs_1(t)$, za neku konstantu $c > 0$.

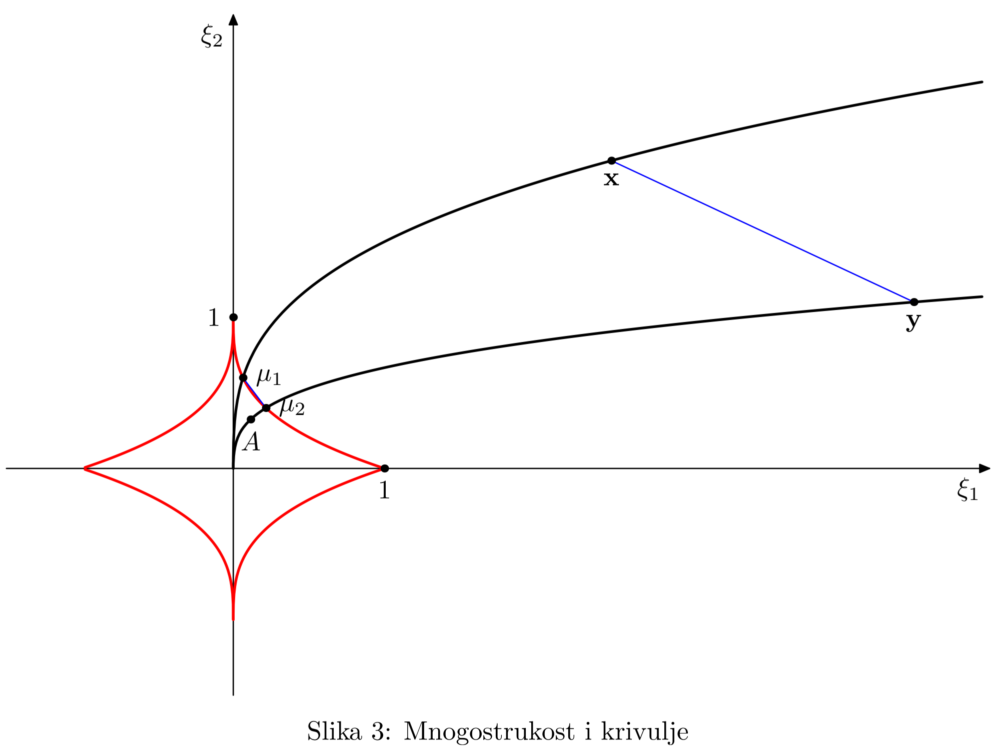
Za proizvoljni $k = 1, \dots, d$ vrijedi

$$\begin{aligned} |\mu_1^k - \mu_2^k| &= \left|\mu_1^k - \mu_2^k\left(\frac{s_2(t_2)}{s_1(t_1)}\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} + \mu_2^k\left(\frac{s_2(t_2)}{s_1(t_1)}\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} - \mu_2^k\right| \\ &\leqslant \left(\frac{1}{s_1(t_1)}\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}\left(|x_k - y_k| + \left|y_k - y_k\left(\frac{s_1(t_1)}{s_2(t_2)}\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}\right|\right). \end{aligned}$$

Na donjoj slici je, u dvije dimenzije, s A označena točka

$$\left(\mu_2^1\left(\frac{s_2(t_2)}{s_1(t_1)}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}, \dots, \mu_2^d\left(\frac{s_2(t_2)}{s_1(t_1)}\right)^{\frac{1}{\alpha_d}}\right)$$

čije se koordinate pojavljuju u gornjem računu. Primijetimo da je ta točka zapravo jednaka $\left(\frac{\mu_1^1 y_1}{x_1}, \dots, \frac{\mu_1^d y_d}{x_d}\right)$.



Slika 3: Mnogostrukost i krivulje

Uz oznake $p = \frac{1}{s_1(t_1)}$ i $q = \frac{1}{s_2(t_2)}$ dalje slijedi

$$|\mu_1^k - \mu_2^k| \leqslant \frac{1}{s_1(t_1)}|x_k - y_k| + (q^{\frac{1}{\alpha_k}} - p^{\frac{1}{\alpha_k}})|y_k|,$$

tj. sumiranjem po $k = 1, \ldots, d$ dobivamo

$$|\mu_1 - \mu_2|_1 \leqslant \frac{1}{s_1(t_1)}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_1 + \sum_{k=1}^{d}(q^{\frac{1}{\alpha_k}} - p^{\frac{1}{\alpha_k}})|y_k|. \tag{12}$$

Budući da je maksimum dvije metrike na $\mathbf{R}^d$ koje zadovoljavaju (5) ponovno metrika tog tipa, preostaje ocijeniti posljednju sumu, označimo je s S_{pq}. Prvo po Lagrangeevom teoremu srednje vrijednosti dobivamo

$$S_{pq} \leqslant \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{\alpha_k} q^{\frac{1}{\alpha_k}-1}(q-p)|y_k|,$$

a zatim uz pomoć ocjene

$$q = \frac{1}{s_2(t_2)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{d} |y_j|^{\alpha_j}} \leqslant \frac{1}{|y_k|^{\alpha_k}}$$

slijedi

$$\begin{aligned} S_{pq} &\leqslant (q-p)\sum_{k=1}^{d}\frac{1}{\alpha_k}|y_k|^{\alpha_k} \\ &\leqslant C(q-p)s_2(t_2), \end{aligned}$$

gdje je

$$C = \max_{k=1..d} \frac{1}{\alpha_k}.$$

Za nastavak ocjene trebamo sljedeću lemu.

Lema 4. *Formulom* $d_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|^{\alpha_k}$, $\alpha_k \in \langle 0, 1]$ *dana je metrika na* $\mathbf{R}^d$ *i ta metrika zadovoljava svojstvo (5).*

Dem. Netrivijalno je provjeriti jedino nejednakost trokuta. Za nejednakost trokuta dovoljno je pak provjeriti da za nenegativne brojeve a, b vrijedi

$$(a+b)^{\alpha_k} \leqslant a^{\alpha_k} + b^{\alpha_k},$$

tj.

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^{\alpha_k} \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha_k} + 1,$$

gdje smo bez smanjenja općenitosti pretpostavili da je $b \neq 0$.

Posljednja će pak nejednakost slijediti iz činjenice da je funkcija

$$f(x) = (x+1)^{\alpha_k} - x^{\alpha_k} - 1$$

opadajuća na intervalu $[0, \infty\rangle$. Budući da je

$$f'(x) = \alpha_k((x+1)^{\alpha_k - 1} - x^{\alpha_k - 1})$$

i budući da je $\alpha_k - 1 \leqslant 0$, slijedi da je $f'(x) \leqslant 0,\ x \in \langle 0, \infty\rangle$, čime je lema dokazana.

Q.E.D.

Sada zbog

$$\begin{aligned} q - p &= \frac{1}{s_2(t_2)} - \frac{1}{s_1(t_1)} = \frac{s_1(t_1) - s_2(t_2)}{s_2(t_2)s_1(t_1)} \\ &= \frac{1}{s_2(t_2)s_1(t_1)}(d_\alpha(\mathbf{0}, \mathbf{x}) - d_\alpha(\mathbf{0}, \mathbf{y})) \\ &\leqslant \frac{1}{s_2(t_2)s_1(t_1)} d_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned}$$

slijedi

$$S_{pq} \leqslant \frac{C}{s_1(t_1)} d_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

što zajedno s (12) daje

$$|\mu_1 - \mu_2|_1 \leqslant \frac{1}{s_1(t_1)}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_1 + C d_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

čime je zbog ekvivalencije svih normi na $\mathbf{R}^d$ i svojstvo (b_2) provjereno.

5. Zaključak

U ovom poglavlju nastojali smo sistematizirati ideje kojima su se služili Nenad Antonić, Martin Lazar i Evgenij Jurjevič Panov (v. [AL3], [P3]) prilikom definiranja paraboličkih i ultra-paraboličkih H-mjera. U [Ta5] i [LM] su autori pokazali da se određeni rezultati mogu elegantno dobiti i direktno primjenom Leme 1. No ti rezultati zahtijevaju glatkoću promatrane mnogostrukosti, točnije eksplicitnu formulu (s lijepim svojstvima) za odgovarajuće projekcije pa rezultati ovog poglavlja daju alternativni pristup u slučajevima kada to nije tako.

Za kompaktnu neprekinutu mnogostrukost P reći ćemo da je *A-dopustiva* ako postoji familija krivulja koje zadovoljavaju (2) i svojstva (a_1), (a_2) i (a_3), odnosno *B-dopustiva* ako postoji familija krivulja koje zadovoljavaju (6) i svojstva (b_1), (b_2) i (b_3). U narednom poglavlju definiramo varijante H-mjera za proizvoljnu dopustivu mnogostrukost P. Pritom se radi o očitom poopćenju klasičnih i paraboličkih H-mjera. Također pokazujemo da je u većini zanimljivih slučajeva elipsoid dobar izbor za mnogostrukost P.

V. Poopćenja H–mjera

1. Varijanta A

Definicija 1. *Neka je $P \subseteq \mathbf{R}^d$ A-dopustiva mnogostrukost i neka su $\varphi_\lambda,\ \lambda \in S^{d-1}$ krivulje dane u definiciji A-dopustivosti. Kažemo da je funkcija $\tilde\psi \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d_*)$ PA-dopustiv simbol ako limes*

$$\lim_{t\to\infty} \tilde\psi(\varphi_\lambda(t)) = \psi(\mathbf{y})$$

postoji jednoliko po $\lambda \in S^{d-1}$, gdje je $\mathbf{y} \in \{\varphi_\lambda(t) : t \in \mathbf{R}^+\} \cap P$, i definira neprekidnu funkciju $\psi \in \mathrm{C}(P)$.

Zbog $|\varphi_\lambda(t)| = t$ očito je limes iz gornje definicije ekvivalentan s limesom

$$\lim_{\boldsymbol\xi\to\infty} (\tilde\psi - \psi\circ\pi_P)(\boldsymbol\xi) = 0,$$

gdje je π_P projekcija na mnogostrukost P duž krivulja φ_λ.

Teorem 1. *Neka je P A-dopustiva mnogostrukost. Ako je (u_n) niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ takav da $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{0}$, onda postoji podniz $(\mathsf{u}_{n'})$ i hermitska matrična Radonova mjera $\boldsymbol\mu = \{\mu^{ij}\}_{i,j=1,\dots,r}$ na $\mathbf{R}^d \times P$ takvi da za proizvoljne $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, PA-dopustiv simbol $\tilde\psi \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d_*)$, te $i,j = 1,\dots,r$ vrijedi:*

$$\begin{aligned}\lim_{n'\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_1 u^i_{n'})(\mathbf{x})\overline{\mathcal{A}_{\tilde\psi}(\varphi_2 u^j_{n'})(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x} &= \langle \mu^{ij}, (\varphi_1\overline{\varphi_2})\boxtimes\overline{\psi}\rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^d\times P} \varphi_1(\mathbf{x})\overline{\varphi_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol\xi)}\,d\mu^{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol\xi),\end{aligned}\tag{1}$$

gdje je $\psi \in \mathrm{C}(P)$ dana Definicijom 1, a $\mathcal{F}(\mathcal{A}_{\tilde\psi}v)(\boldsymbol\xi) = \tilde\psi(\boldsymbol\xi)\mathcal{F}v(\boldsymbol\xi)$.

Dem. Primijetimo prvo da je prema Plancherelovom teoremu

$$\int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_1 u^i_{n'})(\mathbf{x})\overline{\mathcal{A}_{\tilde\psi}(\varphi_2 u^j_{n'})(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(\varphi_1 u^i_{n'})(\boldsymbol\xi)\overline{\mathcal{F}(\varphi_2 u^j_{n'})(\boldsymbol\xi)\tilde\psi(\boldsymbol\xi)}\,d\boldsymbol\xi.\tag{2}$$

Nadalje, raspišimo

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(\varphi_1 u^i_{n'})(\boldsymbol\xi)\overline{\mathcal{F}(\varphi_2 u^j_{n'})(\boldsymbol\xi)\tilde\psi(\boldsymbol\xi)}\,d\boldsymbol\xi \\ &\quad= \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(\varphi_1 u^i_{n'})(\boldsymbol\xi)\overline{\mathcal{F}(\varphi_2 u^j_{n'})(\boldsymbol\xi)(\psi\circ\pi_P)(\boldsymbol\xi)}\,d\boldsymbol\xi \\ &\qquad+ \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(\varphi_1 u^i_{n'})(\boldsymbol\xi)\overline{\mathcal{F}(\varphi_2 u^j_{n'})(\boldsymbol\xi)\Big(\tilde\psi(\boldsymbol\xi) - (\psi\circ\pi_P)(\boldsymbol\xi)\Big)}\,d\boldsymbol\xi.\end{aligned}\tag{3}$$

Sada dokazujemo da posljednji integral u (3) možemo zanemariti, tj. da je

$$\lim_{n'\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(\varphi_1 u^i_{n'})(\boldsymbol\xi)\overline{\mathcal{F}(\varphi_2 u^j_{n'})(\boldsymbol\xi)\Big(\tilde\psi(\boldsymbol\xi) - (\psi\circ\pi_P)(\boldsymbol\xi)\Big)}\,d\boldsymbol\xi = 0.\tag{4}$$

Primijetimo prvo da zbog gustoće i neprekinutosti možemo pretpostaviti da su $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$. Neka je sada $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Prema Definiciji 1

$$(\exists\, R > 0)\quad |\boldsymbol\xi| > R \quad\Longrightarrow\quad |\tilde\psi(\boldsymbol\xi) - (\psi\circ\pi_P)(\boldsymbol\xi)| < \varepsilon.$$

Sada ćemo u integralu iz (4) područje integracije podijeliti na dva dijela, na kuglu $\mathrm{K}[0,R]$ i njenu vanjštinu. Zbog pretpostavki na φ_1 i (u_n) lako slijedi $\mathcal{F}(\varphi_1 u^i_{n'}) \longrightarrow 0$ po točkama pa Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji daje

$$\lim_{n'\to\infty} \int_{\mathrm{K}[0,R]} \mathcal{F}(\varphi_1 u^i_{n'})(\boldsymbol{\xi})\overline{\mathcal{F}(\varphi_2 u^j_{n'})(\boldsymbol{\xi})\Big(\tilde{\psi}(\boldsymbol{\xi}) - (\psi\circ\pi_P)(\boldsymbol{\xi})\Big)}\, d\boldsymbol{\xi} = 0.$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{|\boldsymbol{\xi}|>R} \mathcal{F}(\varphi_1 u^i_{n'})(\boldsymbol{\xi})\overline{\mathcal{F}(\varphi_2 u^j_{n'})(\boldsymbol{\xi})\Big(\tilde{\psi}(\boldsymbol{\xi}) - (\psi\circ\pi_P)(\boldsymbol{\xi})\Big)}\, d\boldsymbol{\xi}\right| \\
&\qquad \leqslant \varepsilon \int_{|\boldsymbol{\xi}|>R} |\mathcal{F}(\varphi_1 u^i_{n'})(\boldsymbol{\xi})|\cdot|\mathcal{F}(\varphi_2 u^j_{n'})(\boldsymbol{\xi})|\, d\boldsymbol{\xi} \\
&\qquad \leqslant \varepsilon \|\mathcal{F}(\varphi_1 u^i_{n'})\|_{\mathrm{L}^2} \|\mathcal{F}(\varphi_2 u^j_{n'})\|_{\mathrm{L}^2} \\
&\qquad = \varepsilon \|\varphi_1 u^i_{n'}\|_{\mathrm{L}^2} \|\varphi_2 u^j_{n'}\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \varepsilon\, C \|u^i_{n'}\|_{\mathrm{L}^2} \|u^j_{n'}\|_{\mathrm{L}^2} < \varepsilon\, C',
\end{aligned}$$

za neke konstante $C, C' > 0$. Pritom su u posljednje dvije nejednakosti iskorištene činjenice da su funkcije φ_1, φ_2 omeđene te da je slabo konvergentni niz (u_n) omeđen.

Time je (4) dokazano i sada iz (2), (3) i (4) lako slijedi

$$\lim_{n'\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_1 u^i_{n'})(\mathbf{x})\overline{\mathcal{A}_{\tilde{\psi}}(\varphi_2 u^j_{n'})(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} = \lim_{n'\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_1 u^i_{n'})(\mathbf{x})\overline{\mathcal{A}_{\psi\circ\pi_P}(\varphi_2 u^j_{n'})(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x},$$

čime dobivamo da je (1) dovoljno dokazati za množitelje sa simbolima definiranima na P. Dokaz sada u potpunosti prati dokaz Teorema III.1. Opišimo ga ukratko.

Zbog svojstva (a_3) je u Definiciji 1 dobro definirana neprekinuta funkcija $\lambda \mapsto \mathbf{y}$ sa S^{d-1} u P, pa je i kompleksna funkcija $a_\infty(\lambda) = \psi(\mathbf{y}(\lambda))$ neprekinuta na S^{d-1}, te možemo primijeniti Lemu IV.2 uz $a = \psi\circ\pi_P$ i upravo definiranu funkciju a_∞, čime dobivamo da je

$$(\varphi_1\overline{\varphi_2}, \overline{\psi}) \mapsto \lim_{n'\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_1 u^i_{n'})(\mathbf{x})\overline{\mathcal{A}_{\psi\circ\pi_P}(\varphi_2 u^j_{n'})(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}$$

neprekinut bilinearan funkcional na $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d) \times \mathrm{C}(P)$. Prema Schwartzovom teoremu o jezgri taj se funkcional može proširiti do neprekinutog linearnog funkcionala na $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d \times P)$. Budući da je za $i = j$ pozitivan, prema Schwartzovoj lemi o nenegativnim distribucijama slijedi da je u tom slučaju dobiveno proširenje Radonova mjera, čime je ujedno teorem i dokazan u jednodimenzionalnom slučaju $r = 1$. Zaključak za $i \neq j$ slijedi promatranjem nizova $(u^i_n + u^j_n)$ i $(u^i_n + iu^j_n)$, te njima pridruženih (pozitivnih) Radonovih mjera.

Q.E.D.

2. Varijanta B

Definicija 2. *Neka je $P \subseteq \mathbf{R}^d$ B-dopustiva mnogostrukost i neka su φ_μ, $\mu \in P$ krivulje dane u definiciji B-dopustivosti. Kažemo da je funkcija $\tilde{\psi} \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d_*)$ PB-dopustiv simbol ako limes*

$$\lim_{s\to\infty} \tilde{\psi}(\varphi_\mu(s)) = \psi(\mu)$$

postoji jednoliko po $\mu \in P$ i definira neprekidnu funkciju $\psi \in \mathrm{C}(P)$.

Zbog svojstva (b_3) limes iz gornje definicije je ekvivalentan s limesom

$$\lim_{\boldsymbol{\xi}\to\infty}(\tilde{\psi}-\psi\circ\pi_P)(\boldsymbol{\xi})=0,$$

gdje je π_P projekcija na mnogostrukost P duž krivulja φ_μ.

Teorem 2. *Neka je P B-dopustiva mnogostrukost. Ako je (u_n) niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ takav da $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$, onda postoji podniz $(\mathsf{u}_{n'})$ i hermitska matrična Radonova mjera $\boldsymbol{\mu}=\{\mu^{ij}\}_{i,j=1,\dots,r}$ na $\mathbf{R}^d\times P$ takvi da za proizvoljne $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, PB-dopustiv simbol $\tilde{\psi}\in\mathrm{C}(\mathbf{R}^d_*)$, te $i,j=1,\dots,r$ vrijedi:*

$$\begin{aligned}\lim_{n'\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d}(\varphi_1 u^i_{n'})(\mathbf{x})\overline{\mathcal{A}_{\tilde{\psi}}(\varphi_2 u^j_{n'})(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x} &= \langle\mu^{ij},(\varphi_1\overline{\varphi_2})\boxtimes\overline{\psi}\rangle\\ &=\int_{\mathbf{R}^d\times P}\varphi_1(\mathbf{x})\overline{\varphi_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi})}\,d\mu^{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

gdje je $\psi\in\mathrm{C}(P)$ dana Definicijom 2, a $\mathcal{F}(\mathcal{A}_{\tilde{\psi}}v)(\boldsymbol{\xi})=\tilde{\psi}(\boldsymbol{\xi})\mathcal{F}v(\boldsymbol{\xi})$.

Dem. Dokaz je u načelu isti kao i dokaz Teorema 1. Jedino se umjesto Leme IV.2 koristi Lema IV.3.

Q.E.D.

3. Primjene

Lema IV.2, Lema IV.3, Teorem 1 i Teorem 2 su općeniti rezultati za koje još nismo pronašli primjene u njihovoj punoj snazi. U ovom radu ukazat ćemo na moguće primjene u posebnom slučaju $a=\tilde{\psi}=\psi\circ\pi_P$, gdje je $\psi\in\mathrm{C}(P)$, a π_P projekcija na mnogostrukost P duž krivulja promatranih u IV.2, odnosno IV.3. Primijetimo da je tada (4) trivijalno ispunjeno.

Točnije, promatramo razlomljeni zakon sačuvanja

$$\sum_{k=1}^d \partial^{\alpha_k}_{x_k} f_k(\mathbf{x},u)=0, \tag{5}$$

gdje je $\alpha_k\in\langle 0,1]$ i $\mathcal{F}(\partial^{\alpha_k}_{x_k}f_k)=(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k}\mathcal{F}f_k$, $k=1,\dots,d$. Pritom su funkcije f_k ograničene varijacije po $\mathbf{x}$ te glatke po u.

Za jednadžbu (5) definiramo prvo pojam slabog rješenja i pojam kvazirješenja.

Definicija 3. *Kažemo da je $u\in\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ slabo rješenje jednadžbe (5) ako za svaki $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ vrijedi*

$$\int_{\mathbf{R}^d}\sum_{k=1}^d f_k(\mathbf{x},u(\mathbf{x}))\overline{\partial^{\alpha_k}_{x_k}\varphi(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}=0.$$

Nadalje, kažemo da je $u\in\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ kvazirješenje jednadžbe (5) ako za proizvoljne $\lambda\in\mathbf{R}$ i $\varphi_1\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ postoji kompaktan linearan operator $L_{\lambda,\varphi_1}:\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)\longrightarrow\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ takav da za svaki $\varphi_2\in\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d}\sum_{k=1}^d \operatorname{sign}(u-\lambda)(f_k(\mathbf{x},u)-f_k(\mathbf{x},\lambda))\varphi_1(\mathbf{x})\overline{\mathcal{A}_{\frac{(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k}}{|\xi_1|^{\alpha_1}+|\xi_2|^{\alpha_2}+\cdots+|\xi_d|^{\alpha_d}}}\varphi_2(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}&\\ =\int_{\mathbf{R}^d}L_{\lambda,\varphi_1}(\varphi_2)\,d\mathbf{x}.&\end{aligned}\tag{6}$$

Postojanje rješenja iz gornje definicije je otvoren problem. Ipak, znamo da uz određene pretpostavke postojanje niza kvazirješenja povlači i postojanje slabog rješenja zahvaljujući sljedećem rezultatu koji je dokazan u [MI].

Definicija 4. *Kažemo da je jednadžba (5) nedegenerirana ako za proizvoljni* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d_*$ *i skoro svaki* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ *preslikavanje*

$$\lambda \mapsto \sum_{k=1}^{d} \overline{(2\pi i \xi_k)^{\alpha_k}} \partial_\lambda f_k(\mathbf{x}, \lambda)$$

ne iščezava niti na jednom skupu pozitivne Lebesgueove mjere.

Teorem 3. *Neka je* (u_n) *omeđen niz kvazirješenja nedegenerirane jednadžbe (5). Pretpostavimo nadalje, da postoji podniz (koji nastavljamo označavati s* (u_n)*) takav da za proizvoljne* $\lambda \in \mathbf{R}$ *i* $\varphi_1 \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ *odgovarajući niz operatora* $(L^n_{\lambda,\varphi_1})$ *iz Definicije 3 posjeduje limes u smislu da postoji kompaktan operator* $L_{\lambda,\varphi_1} : \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d) \longrightarrow \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ *takav da za proizvoljne* $\rho \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R})$ *i* $\varphi_n \xrightarrow{*} 0$ *u* $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^d} \Big(L^n_{\lambda,\varphi_1}(\varphi_n) - L_{\lambda,\varphi_1}(\varphi_n) \Big) \rho(\lambda) \, d\mathbf{x} \, d\lambda = 0.$$

Tada niz (u_n) *ima podniz koji konvergira u* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$*.* ∎

Motivaciju za gornje definicije i spomenuti rezultat nalazimo u brojnim radovima: diferencijalne jednadžbe s razlomljenim derivacijama proučavane su npr. u [Al] i [DI], pojam kvazirješenja za klasični zakon sačuvanja nalazimo u [P2], a ideju za potrebnu modifikaciju nalazimo u [S].

Dokaz Teorema 3 je u načelu dan u [MI], ali uz manje nepotpunosti i bez provjere dopustivosti korištene mnogostrukosti koja je ovdje dana u IV.4. Stoga dokaz ponavljamo u nešto sređenijem, ali i sažetijem obliku. Za sam dokaz moramo pripremiti još neke rezultate.

Prvo, derivirajući (6) po λ, uz $h(\mathbf{x}, \lambda) = \operatorname{sign}(u(\mathbf{x}) - \lambda)$ dobivamo, u smislu distribucija,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbf{R}^d} \sum_{k=1}^{d} h(\mathbf{x}, \lambda) \partial_\lambda f_k(\mathbf{x}, \lambda) \varphi_1(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{A}_{\frac{(2\pi i \xi_k)^{\alpha_k}}{|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_2} + \cdots + |\xi_d|^{\alpha_d}}} \varphi_2(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\mathbf{R}^d} \partial_\lambda L_{\lambda,\varphi_1}(\varphi_2) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

ili ekvivalentno, za proizvoljnu $\rho \in \mathrm{C}^1_c(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{k=1}^{d} h(\mathbf{x}, \lambda) \partial_\lambda f_k(\mathbf{x}, \lambda) \rho(\lambda) \varphi_1(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{A}_{\frac{(2\pi i \xi_k)^{\alpha_k}}{|\xi_1|^{\alpha_1} + |\xi_2|^{\alpha_2} + \cdots + |\xi_d|^{\alpha_d}}} \varphi_2(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x} \, d\lambda \\ = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^d} L_{\lambda,\varphi_1}(\varphi_2) \rho'(\lambda) \, d\mathbf{x} \, d\lambda. \end{aligned} \tag{7}$$

Kao što je najavljeno u IV.4, u dokazu se koristi *B-dopustiva* mnogostrukost

$$P = \Big\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d : \sum_{k=1}^{d} |\xi_k|^{\alpha_k} = 1 \Big\},$$

gdje su $\alpha_k \in \langle 0,1]$, $k=1,\dots,d$. Pritom je svakoj točki $(\mu_1,\dots,\mu_d)\in P$ pridružena krivulja, parametrizirana po koordinatama:

$$\xi_k(s)=\mu_k\, s^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad s>0,\quad k=1,\dots,d.$$

Izbor krivulja je takav da su simboli

$$\frac{(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k}}{|\xi_1|^{\alpha_1}+|\xi_2|^{\alpha_2}+\cdots+|\xi_d|^{\alpha_d}},\quad k=1,\dots,d$$

dopustivi u smislu Definicije 2 *(PB-dopustivi)* i to je ključni detalj dokaza.

Za spomenutu mnogostrukost prema tome vrijedi Teorem 2, no nama će trebati sljedeća modifikacija, koja se dokazuje na potpuno isti način kao i [P1, Teorem 3].

Pritom označujemo

$$h_n(\mathbf{x},\lambda)=\operatorname{sign}(u_n(\mathbf{x})-\lambda) \tag{8}$$

i pretpostavljamo da za $h\in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R})$ na podnizu vrijedi

$$h_n(\mathbf{x},\lambda)\xrightharpoonup{*} h(\mathbf{x},\lambda)\ \text{ u }\ \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d). \tag{9}$$

Teorem 4. *Neka je P proizvoljna B-dopustiva mnogostrukost.*
1. Za niz (h_n) i funkciju h definirane s (8) i (9) postoji skup $E\subseteq\mathbf{R}$ sa zanemarivim komplementom za koji postoji podniz $(h_{n'}-h)$ niza (h_n-h) i familija $\boldsymbol{\mu}=\{\mu^{pq}\}_{p,q\in E}$ Radonovih mjera na $\mathbf{R}^d\times P$ takvi da za proizvoljne $\varphi_1,\varphi_2\in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$, PB-dopustiv simbol $\tilde\psi\in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d_*)$, te $p,q\in E$ vrijedi:

$$\lim_{n'\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d}\varphi_1(\mathbf{x})(h_{n'}-h)(\mathbf{x},p)\overline{\mathcal{A}_{\tilde\psi}(\varphi_2(\cdot)(h_{n'}-h)(\cdot,q))(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}=\langle\mu^{pq},(\varphi_1\overline{\varphi_2})\boxtimes\overline{\psi}\rangle,$$

gdje je $\psi\in \mathrm{C}(P)$ dana Definicijom 2, a $\mathcal{F}(\mathcal{A}_{\tilde\psi}v)(\boldsymbol{\xi})=\tilde\psi(\boldsymbol{\xi})\mathcal{F}v(\boldsymbol{\xi})$.
2. Preslikavanje $(p,q)\mapsto\mu^{pq}$ je neprekinuto kao preslikavanje s $E\times E$ u $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d\times P)$, gdje je topologija na $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d\times P)$ definirana polunormama $\|\mu\|_K=(\operatorname{Var}\mu)(K)$, za proizvoljni kompakt $K\in\mathbf{R}^d\times P$. ∎

Sada možemo dokazati Teorem 3.

Dem. **(Teorema 3)** Mjere definirane u Teoremu 4 su Radonove mjere u smislu Bourbakija, tj. distribucije reda nula i općenito se ne mogu poistovjetiti s mjerom u smislu teorije Lebesgueovog integrala. Ipak, to poistovjećivanje možemo učiniti na svakom omeđenom skupu $K\subseteq\mathbf{R}^d$. Preciznije, neka je u nastavku K proizvoljna otvorena kugla u $\mathbf{R}^d$. Tada za $\varphi_1,\varphi_2\in \mathrm{C}_c(K)$ i *PB-dopustiv* simbol $\tilde\psi\in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d_*)$ možemo pisati

$$\langle\mu^{pq},(\varphi_1\overline{\varphi_2})\boxtimes\overline{\psi}\rangle=\int_{K\times P}\varphi_1(\mathbf{x})\overline{\varphi_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi})}\,d\mu^{pq}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}).$$

Neka su sada h_n i h funkcije definirane s (8) i (9), te $(h_{n'}-h)$ podniz dan Teoremom 4. Tada prema (7) slijedi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}^d}\sum_{k=1}^d(h_{n'}-h)(\mathbf{x},\lambda)\partial_\lambda f_k(\mathbf{x},\lambda)\rho(\lambda)\varphi_1(\mathbf{x})\overline{\mathcal{A}_{\frac{(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k}}{|\xi_1|^{\alpha_1}+|\xi_2|^{\alpha_2}+\cdots+|\xi_d|^{\alpha_d}}}\varphi_2(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}\,d\lambda\\ =\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}^d}\Big(L^{n'}_{\lambda,\varphi_1}(\varphi_2)-L_{\lambda,\varphi_1}(\varphi_2)\Big)\rho'(\lambda)\,d\mathbf{x}\,d\lambda,\end{aligned} \tag{10}$$

za proizvoljne $\rho \in \mathrm{C}^1_c(\mathbf{R})$, $\varphi_1 \in \mathrm{C}^\infty_c(K)$ i $\varphi_2 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$.

Sada za fiksni $p \in \mathbf{R}$ definirajmo

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \varphi_2^{n'}(\mathbf{x}, p) = (h_{n'} - h)(\mathbf{x}, p)\phi_2(\mathbf{x}, p), \quad \phi_2 \in \mathrm{C}_c(K \times \mathbf{R}).$$

Prema Teoremu 4 i zadanim uvjetima na $L^n_{\lambda,\varphi_1}(\varphi_2)$ i $L_{\lambda,\varphi_1}(\varphi_2)$ možemo u (10) prijeći na limes $n' \longrightarrow \infty$ i dobivamo za $p \in \mathbf{R}$:

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{K\times P} \sum_{k=1}^{d} \partial_\lambda f_k(\mathbf{x}, \lambda)\rho(\lambda)\varphi_1(\mathbf{x})\overline{\phi_2(\mathbf{x}, p)(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k}}\, d\mu^{\lambda p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, d\lambda = 0, \tag{11}$$

gdje je $\boldsymbol{\mu}$ odgovarajuća familija H-mjera pridružena podnizu $(h_{n'} - h)$.

Sada za fiksni $q \in \mathbf{R}$ u (11) stavljamo

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\rho}\Big(\frac{\lambda - q}{\varepsilon}\Big)\rho_0\Big(\frac{q + \lambda}{2}\Big), \\ \phi_2(\mathbf{x}, p) &= \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\rho}\Big(\frac{p - q}{\varepsilon}\Big)\rho_0\Big(\frac{q + p}{2}\Big)\varphi_1(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

gdje je $\tilde{\rho}$ nenegativna glatka funkcija s kompaktnim nosačem i integralom jednakim jedan, a $\rho_0 \in \mathrm{C}^1_c(\mathbf{R})$.

Budući da $\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\rho}(\frac{\cdot - q}{\varepsilon})$ konvergira prema Diracovoj masi δ_q u smislu Radonovih mjera, izračunavanjem integrala po λ, dodatnim integriranjem po $p \in \mathbf{R}$ i prijelazom na limes $\varepsilon \longrightarrow 0$ dobivamo

$$\int_{K\times P} \sum_{k=1}^{d} \overline{(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k}}\partial_q f_k(\mathbf{x}, q)|\varphi_1(\mathbf{x})\rho_0(q)|^2\, d\mu^{qq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0.$$

Prema uvjetu nedegeneriranosti iz Definicije 4, zbog proizvoljnosti K slijedi da je $\mu^{qq} \equiv 0$ za skoro svaki $q \in E$ (v. [P1, Teorem 5]). To zapravo znači da

$$h_{n'} \longrightarrow h \ \text{ u } \ \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}),$$

i da je $h(\mathbf{x}, \lambda) = \operatorname{sign}(u(\mathbf{x}) - \lambda)$, za neki $u \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$. Sada nije teško zaključiti da

$$u_{n'} \longrightarrow u \ \text{ u } \ \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d),$$

čime je dokaz završen.

Q.E.D.

4. Razlomljene H-mjere sa svojstvom ortogonalnosti

Krivulje oblika (IV.9), tj.

$$\xi_k(s) = \mu_k\, s^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad s > 0, \quad k = 1, \dots, d, \quad (\mu_1, \dots, \mu_d) \in P, \tag{12}$$

korištene su i u dosad poznatim varijantama H-mjera. Npr. hiperbolički je slučaj pokriven s $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_d = 1$ (polupravci iz ishodišta), a paraboličko je skaliranje dano s $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_d = 1$. To nije neobično, jer ti koeficijenti zapravo određuju omjer redova pojedinih derivacija. Upravo zbog toga ćemo se bez smanjenja općenitosti ograničiti na slučaj $\alpha_k \in \langle 0, 1]$.

U [AL3] je primijećeno da je za izvod prijenosnih svojstava H-mjera (preciznije, za izvod formule parcijalne integracije) vrlo važno da mnogostrukost P bude okomita na promatrane krivulje. Pokazat ćemo da je u tom smislu elipsoid dobar izbor za sve krivulje oblika (12).

Neka je $F(\xi_1, \ldots, \xi_d) = C$ jednadžba mnogostrukosti P. Za ortogonalnost mora vrijediti

$$\begin{aligned}
\partial_1 F(\mu_1, \ldots, \mu_d) &= c\,\dot{\xi}_1(1) = \frac{c}{\alpha_1}\mu_1, \\
\partial_2 F(\mu_1, \ldots, \mu_d) &= c\,\dot{\xi}_2(1) = \frac{c}{\alpha_2}\mu_2, \\
&\vdots \\
\partial_d F(\mu_1, \ldots, \mu_d) &= c\,\dot{\xi}_d(1) = \frac{c}{\alpha_d}\mu_d.
\end{aligned}$$

Integriranjem gornjih jednadžbi dobivamo

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_d) = \frac{c}{2\alpha_1}\xi_1^2 + \frac{c}{2\alpha_2}\xi_2^2 + \cdots + \frac{c}{2\alpha_d}\xi_d^2.$$

Konstante c i C možemo birati po volji pa konačno za jednadžbu mnogostrukosti P dobivamo

$$P \ldots \quad \frac{\xi_1^2}{\alpha_1} + \frac{\xi_2^2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{\xi_d^2}{\alpha_d} = 1. \tag{13}$$

Ipak, ovaj pristup ima i svoje nedostatke. Općenito je nemoguće dobiti eksplicitnu formulu za projekciju na mnogostrukost (13) duž familije krivulji (12), koja bi olakšala provjeru pretpostavki Leme IV.3. Naime, za proizvoljni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d_*$ i $\mu \in P$ iz $x_k = \mu_k\, s^{\frac{1}{\alpha_k}}$ dijeljenjem s $s^{\frac{1}{\alpha_k}}$ i kvadriranjem slijedi

$$\frac{x_k^2}{s^{\frac{2}{\alpha_k}}} = \mu_k^2,$$

odakle dijeljenjem s α_k i sumiranjem dobivamo

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{x_k^2}{\alpha_k s^{\frac{2}{\alpha_k}}} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\mu_k^2}{\alpha_k} = 1, \tag{14}$$

što je u najboljem slučaju (za lijepe α_k) algebarska jednadžba po s. Dakle, projekcije su dane formulom

$$\mu_k = \frac{x_k}{s(\mathbf{x})^{\frac{1}{\alpha_k}}}, \tag{15}$$

gdje je $s(\mathbf{x})$ rješenje jednadžbe (14).

U paraboličkom slučaju ($\alpha_1 = \frac{1}{2},\ \alpha_2 = \cdots = \alpha_d = 1$) jednadžba (14) je u stvari bikvadratna pa su autori u [AL3] izveli eksplicitnu formulu za projekciju duž parabola na elipsoid i vrlo efikasno primijenili paraboličke H-mjere. Ipak, pokušajmo pobliže ispitati rješenja jednadžbe (14).

Uočimo najprije da je lijeva strana jednadžbe (14) strogo opadajuća i neprekinuta po $s \in \mathbf{R}^+$ pa jednadžba (14) ima jedinstveno pozitivno realno rješenje. Time je pokazano da su projekcije (iako implicitno) dobro definirane gornjim formulama. Pritom je $s(\mu) = 1$.

Funkcija $s(\mathbf{x})$ je implicitno definirana formulom

$$F(\mathbf{x}, s) = \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{\alpha_k} x_k^2 s^{-\frac{2}{\alpha_k}} - 1,$$

i budući da je, za proizvoljne $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d_*$ i $s \in \mathbf{R}^+$,

$$\partial_s F(\mathbf{x}, s) = -\sum_{k=1}^{d} \frac{2}{\alpha_k^2} x_k^2 s^{-\frac{2}{\alpha_k}-1} \neq 0,$$

prema Teoremu o implicitnim funkcijama slijedi da je funkcija $s(\mathbf{x})$ glatka. Posebno, formulom (15) definirana je neprekinuta projekcija s $\mathbf{R}^d_*$ na P.

Druga očita stvar je da vrijedi

$$s(\lambda^{\frac{1}{\alpha_1}} x_1, \ldots, \lambda^{\frac{1}{\alpha_d}} x_d) = \lambda s(\mathbf{x}), \quad \lambda \in \mathbf{R}^+,$$

čime je pokazano da $s(\mathbf{x})$ na neki način mjeri udaljenost broja $\mathbf{x}$ od ishodišta. Točnije, slutnja je da je s

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} s(\mathbf{x} - \mathbf{y}), & \text{ako je } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \\ 0, & \text{ako je } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \end{cases}$$

dobro definirana metrika na $\mathbf{R}^d$.

Netrivijalno je provjeriti jedino nejednakost trokuta, ali ta provjera djeluje zamršeno i u ovom je trenutku ostavljamo kao otvoren problem.

Unatoč problemima na koje smo naišli, zahvaljujući ideji izloženoj u (IV. b_4), ipak smo u mogućnosti definirati varijantu H-mjera koja će posjedovati sva željena svojstva: omogućiti proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi s derivacijama proizvoljnog (ne nužno cjelobrojnog) reda, što će nam omogućiti skaliranje duž krivulja oblika (12), te omogućiti proučavanje prijenosnih svojstava zbog definicije na $\mathbf{R}^d \times Q$, gdje je mnogostrukost Q ortogonalna na spomenute krivulje i dana je formulom (13). Ipak, nedostatak eksplicitnih formula uvelike koči proučavanje daljnjih svojstava. Novi objekt zovemo razlomljene H-mjere sa svojstvom ortogonalnosti i dane su sljedećim teoremom:

Teorem 5. *Neka je Q mnogostrukost dana formulom*

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha_1} + \frac{\xi_2^2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{\xi_d^2}{\alpha_d} = 1,$$

i neka su za proizvoljni $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_d) \in Q$ krivulje $\varphi_\eta : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^d$ dane formulom

$$\varphi_\eta(s) = (\xi_1(s), \ldots, \xi_d(s)) = (\eta_1 s^{\frac{1}{\alpha_1}}, \ldots, \eta_d s^{\frac{1}{\alpha_d}}),$$

gdje su $\alpha_k \in \langle 0, 1]$, $k = 1, \ldots, d$. Nadalje, neka je π_Q projekcija na mnogostrukost Q duž krivulja φ_η.

Ako je (u_n) *niz u* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ *takav da* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$, *onda postoji podniz* $(\mathsf{u}_{n'})$ *i hermitska matrična Radonova mjera* $\boldsymbol{\mu} = \{\mu^{ij}\}_{i,j=1,\dots,r}$ *na* $\mathbf{R}^d \times Q$ *takvi da za proizvoljne* $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, $\psi \in \mathrm{C}(Q)$, *te* $i,j = 1,\dots,r$ *vrijedi:*

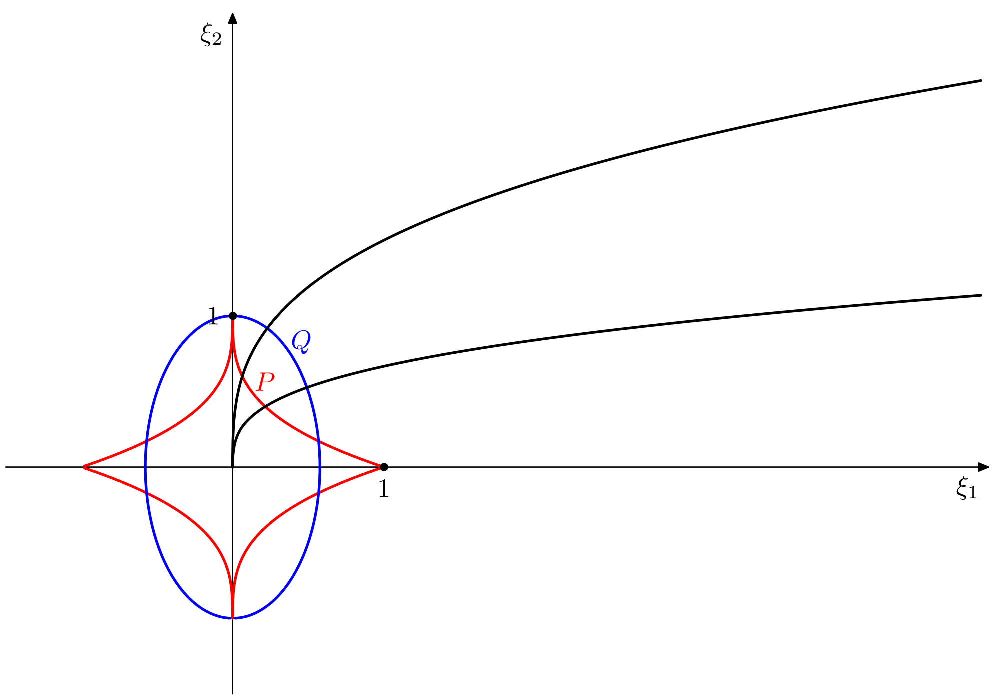
$$\begin{aligned}\lim_{n'\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d}(\varphi_1 u^i_{n'})(\mathbf{x})\overline{\mathcal{A}_{\psi\circ\pi_Q}(\varphi_2 u^j_{n'})(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x} &= \langle \mu^{ij}, (\varphi_1\overline{\varphi_2})\boxtimes\overline{\psi}\rangle\\ &= \int_{\mathbf{R}^d\times Q}\varphi_1(\mathbf{x})\overline{\varphi_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi})}\,d\mu^{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

gdje je $\mathcal{F}(\mathcal{A}_{\tilde\psi}v)(\boldsymbol{\xi}) = \tilde\psi(\boldsymbol{\xi})\mathcal{F}v(\boldsymbol{\xi})$.

Dem. Glavni problem je naravno primijeniti odgovarajuću varijantu prve komutacijske leme. Zbog nepoznavanja eksplicitne formule za π_Q nije jasno je li mnogostrukost Q *dopustiva*, ali možemo se poslužiti idejom izloženom u (IV. b_4). U tu svrhu definirajmo i mnogostrukost

$$P = \Big\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^d : \sum_{k=1}^d |\xi_k|^{\alpha_k} = 1\Big\},$$

za koju smo u IV.4 pokazali da je *B-dopustiva*. Cilj nam je primijeniti Lemu IV.3.



Slika 4: Mnogostrukosti i krivulje korištene u dokazu

Za proizvoljan $\eta\in Q$ prema (IV.10) i (IV.11) postoji jedinstveni $\mu\in P$ takav da je

$$\eta_k = \mu_k s_0^{\frac{1}{\alpha_k}} \quad \text{i} \quad s_0 = \sum_{j=1}^d |\eta_j|^{\alpha_j},$$

pa je, zbog

$$\xi_k(s) = \eta_k s^{\frac{1}{\alpha_k}} = \mu_k (s_0 s)^{\frac{1}{\alpha_k}},$$

zapravo $\varphi_\eta(s) = \varphi_\mu(s_0 s)$. Time smo pokazali da se krivulje iz ovog teorema mogu zapisati u obliku (IV.9), čime je omogućena primjena Leme IV.3.

Nadalje, za proizvoljnu $\psi \in \mathrm{C}(Q)$ definirajmo $\psi' \in \mathrm{C}(P)$ formulom

$$\psi' = (\psi \circ \pi_Q)|_P.$$

Funkcija ψ' je zaista neprekinuta jer smo u prethodnom odjeljku pokazali da je projekcija π_Q, dana formulom (15), neprekinuta. Također je očito

$$\psi \circ \pi_Q = \psi' \circ \pi_P. \tag{16}$$

Sada možemo primijeniti Lemu IV.3 uz $a = \psi' \circ \pi_P$ i $a_\infty = \psi'$. Točnije, prema (16) i Lemi IV.3 limes dan ovim teoremom možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\lim_{n'\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} &(\varphi_1 u^i_{n'})(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{A}_{\psi\circ\pi_Q}(\varphi_2 u^j_{n'})(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{n'\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_1 u^i_{n'})(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{A}_{\psi'\circ\pi_P}(\varphi_2 u^j_{n'})(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{n'\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_1 \overline{\varphi_2} u^i_{n'})(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{A}_{\psi'\circ\pi_P} u^j_{n'}(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \\
&= \lim_{n'\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_1 \overline{\varphi_2} u^i_{n'})(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{A}_{\psi\circ\pi_Q} u^j_{n'}(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Dokaz sada slijedi uobičajene korake dane u dokazu Teorema III.1.

Q.E.D.

Riješimo sad jednadžbu (14) u posebnom slučaju $\alpha_1 = \frac{1}{3},\ \alpha_2 = \cdots = \alpha_d = 1$, u želji dobivanja lokalizacijskog svojstva koje bi se uspješno primjenjivalo na neke jednadžbe trećeg reda, te u nadi dobivanja ideje kako ocijeniti rješenje u općem slučaju.

U tu svrhu uvedimo oznake

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) = (x_1, \mathbf{x}'),$$

uz koje jednadžba (14) glasi

$$\frac{3x_1^2}{s^6} + \frac{|\mathbf{x}'|^2}{s^2} = 1,$$

ili ekvivalentno

$$s^6 - |\mathbf{x}'|^2 s^4 - 3x_1^2 = 0.$$

Uz oznake $t = s^2,\ a = |\mathbf{x}'|^2,\ b = 3x_1^2$ to je jednadžba trećeg reda oblika

$$t^3 - at^2 - b = 0,$$

koja supstitucijom $z = t - \frac{a}{3}$ prelazi u oblik

$$z^3 - \frac{a^2}{3} z - \frac{2}{27} a^3 - b = 0,$$

pogodan za primjenu Cardanove formule.

Cardanova formula daje

$$z = \sqrt[3]{\frac{a^3}{27} + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3 b}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{a^3}{27} + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3 b}{27} + \frac{b^2}{4}}}.$$

Vraćanjem na polazne oznake dobivamo

$$s(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{|\mathbf{x}'|^2}{3} + \sqrt[3]{\frac{|\mathbf{x}'|^6}{27} + \frac{3x_1^2}{2} + \sqrt{\frac{|\mathbf{x}'|^6 x_1^2}{9} + \frac{9x_1^4}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{|\mathbf{x}'|^6}{27} + \frac{3x_1^2}{2} - \sqrt{\frac{|\mathbf{x}'|^6 x_1^2}{9} + \frac{9x_1^4}{4}}}}.$$

Već smo pokazali da jednadžba (14) ima jedinstveno pozitivno rješenje i upravo to rješenje se dobiva uzimanjem pozitivne determinacije kvadratnog korijena i realne determinacije kubnog korijena u gornjoj formuli.

Iako smo dobili eksplicitnu formulu, ona je evidentno jako komplicirana pa očekujemo da će za primjene biti zanimljivije ocjene koje za nju možemo dobiti. Točnije, vrijedi sljedeća lema.

Lema 1. *Postoje konstante $C_1, C_2 > 0$ takve da funkcija $s(\mathbf{x})$ dana gornjom formulom zadovoljava ocjenu*

$$C_1 \sqrt[6]{x_1^2 + |\mathbf{x}'|^6} \leqslant s(\mathbf{x}) \leqslant C_2 \sqrt[6]{x_1^2 + |\mathbf{x}'|^6},$$

za proizvoljni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d_*$.

Dem. Uz oznake

$$A = \frac{|\mathbf{x}'|^6}{27} + \frac{3x_1^2}{2}, \qquad B = \sqrt{\frac{|\mathbf{x}'|^6 x_1^2}{9} + \frac{9x_1^4}{4}}$$

dobivamo

$$s(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{|\mathbf{x}'|^2}{3} + \sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}.$$

Lako se provjeri da je $A \geqslant B$ pa vrijedi

$$(\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B})^3 = A+B+\sqrt[3]{(A+B)^2(A-B)} + \sqrt[3]{(A+B)(A-B)^2} + A - B \geqslant 2A,$$

tj. dobivamo

$$s(\mathbf{x}) \geqslant \sqrt{\frac{|\mathbf{x}'|^2}{3} + \sqrt[3]{2A}} \geqslant \sqrt[6]{2A} \geqslant \sqrt[6]{\frac{2}{27}} \sqrt[6]{x_1^2 + |\mathbf{x}'|^6}.$$

Za obratnu nejednakost koristimo poznatu nejednakost između aritmetičke i kubne sredine po kojoj je

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2} \leqslant \sqrt[3]{\frac{A+B+A-B}{2}} = \sqrt[3]{A},$$

te slijedi

$$s(\mathbf{x}) \leqslant \sqrt{\frac{|\mathbf{x}'|^2}{3} + 2\sqrt[3]{A}} \leqslant \sqrt{3\sqrt[3]{A}} \leqslant \sqrt{3} \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \sqrt[6]{x_1^2 + |\mathbf{x}'|^6}.$$

Q.E.D.

Gornji primjer daje nam ideju kako dobiti ocjenu u općem slučaju, što je sadržaj sljedeće leme.

Lema 2. *Postoje konstante $C_1, C_2 > 0$ takve da rješenje $s(\mathbf{x})$ jednadžbe (14) zadovoljava ocjenu*

$$C_1 \sum_{k=1}^{d} |x_k|^{\alpha_k} \leqslant s(\mathbf{x}) \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{d} |x_k|^{\alpha_k},$$

za proizvoljni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d_*$.

Dem. Uz oznake $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$, $y_k = |x_k|^{\alpha_k}$ moramo zapravo dobiti da $s = s(\mathbf{x})$ zadovoljava ocjenu

$$C_1 |\mathbf{y}|_1 \leqslant s \leqslant C_2 |\mathbf{y}|_1.$$

Uz ove oznake jednadžba (14) glasi

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{1}{\alpha_k} \Big(\frac{y_k}{s}\Big)^{\frac{2}{\alpha_k}} = 1. \tag{17}$$

Posebno je za svaki $k = 1, \dots, d$

$$\frac{1}{\alpha_k} \Big(\frac{y_k}{s}\Big)^{\frac{2}{\alpha_k}} \leqslant 1, \tag{18}$$

odakle slijedi

$$s \geqslant \alpha_k^{-\frac{\alpha_k}{2}} y_k,$$

tj. možemo uzeti

$$C_1 = \frac{1}{d} \min_k \alpha_k^{-\frac{\alpha_k}{2}}.$$

Za obratnu nejednakost, primijetimo da iz (18) slijedi i

$$\frac{y_k}{s} \leqslant \alpha_k^{\frac{\alpha_k}{2}} \leqslant 1$$

pa (17) daje

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{\min_k \alpha_k} \Big(\frac{y_k}{s}\Big)^{\frac{2}{\max_k \alpha_k}} \leqslant \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{\min_k \alpha_k} \Big(\frac{y_k}{s}\Big)^{2} \leqslant \frac{d\,(\max_k y_k)^2}{\min_k \alpha_k} \frac{1}{s^2},$$

tj. možemo uzeti

$$C_2 = \sqrt{\frac{d}{\min_k \alpha_k}}.$$

Q.E.D.

5. Lokalizacijsko svojstvo

Za proučavanje lokalizacijskog svojstva potrebni su nam odgovarajući funkcijski prostori i njihova osnovna svojstva. Radi se o prostorima koji su u literaturi proučavani kao odgovarajuća poopćenja Soboljevljevih prostora. U ovom izlaganju slijedimo uglavnom ideje dane u [L2, IV.2] i [AL3].

Posebno, zanimaju nas prostori koji se sastoje od temperiranih distribucija u takvih da je $k\hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, za neku težinsku funkciju k, koji su opisani u [Hö1, 10.1] i tamo su označeni s $B_{2,k}$. Preciznije, Hörmander je zahtijevao da težinska funkcija $k > 0$ zadovoljava ocjenu

$$k(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}) \leqslant (1+C|\boldsymbol{\xi}|)^N k(\boldsymbol{\eta}),$$

za neke pozitivne konstante C i N, te za proizvoljne $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^d$, dok mi uz iste oznake koristimo ocjenu

$$k(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}) \leqslant C(1+|\boldsymbol{\xi}|^N) k(\boldsymbol{\eta}). \tag{19}$$

Iz Hörmanderovog uvjeta slijedi da je funkcija k nužno neprekinuta, dok mi neprekinutost zahtijevamo kao dodatni uvjet. Mnogi rezultati iz Hörmanderove knjige vrijede i u ovoj novoj situaciji. U nastavku navodimo neke od njih.

Analogno klasičnom Soboljevljevom prostoru H^s, definiramo za $s \in \mathbf{R}$ i $\boldsymbol{\alpha} \in \langle 0,1]^d$ anizotropni Soboljevljev prostor

$$\mathrm{H}^{s,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d) := \{u \in \mathcal{S}' : \hat{u} \text{ je funkcija, } k^s_{\boldsymbol{\alpha}}\hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\},$$

gdje je

$$k_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) := \Bigl(1+\sum_{k=1}^d |\xi_k|^{\alpha_k}\Bigr).$$

U narednoj lemi pokazujemo da funkcija $k^s_{\boldsymbol{\alpha}}$ zaista zadovoljava uvjet (19), a zatim rezultate koji slijede dobivamo usporedbom s Hörmanderovom teorijom.

Lema 3. *Ako funkcija $k > 0$ zadovoljava (19), i funkcija k^s, za $s \in \mathbf{R}$ zadovoljava uvjet (19). Nadalje, ako k_1 i k_2 zadovoljavaju uvjet (19), i k_1+k_2 zadovoljava (19). Konačno, funkcija $k^s_{\boldsymbol{\alpha}}$ dana u prethodnoj definiciji zadovoljava uvjet (19).*

Dem. Za $s \geqslant 0$ prvi dio tvrdnje slijedi potenciranjem iz ocjene

$$\begin{aligned}(1+|\boldsymbol{\xi}|^N)^s &\leqslant (2\max\{1,|\boldsymbol{\xi}|^N\})^s\\ &= 2^s\max\{1,|\boldsymbol{\xi}|^{Ns}\} \leqslant 2^s(1+|\boldsymbol{\xi}|^{Ns}).\end{aligned}$$

Za $s < 0$ zamijenimo prvo $\boldsymbol{\eta}$ s $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ i $\boldsymbol{\xi}$ s $-\boldsymbol{\xi}$, a zatim potenciramo s $-s$.

Ako k_1 zadovoljava (19) uz konstante $C_1, N_1 > 0$, te k_2 zadovoljava (19) uz konstante $C_2, N_2 > 0$, gdje je $N_1 \leqslant N_2$, onda iz ocjene

$$C_1(1+|\boldsymbol{\xi}|^{N_1}) \leqslant C_1(2+|\boldsymbol{\xi}|^{N_2}) \leqslant 2C_1(1+|\boldsymbol{\xi}|^{N_2})$$

slijedi da k_1+k_2 zadovoljava ocjenu (19) uz konstante $C = \max\{2C_1, C_2\}$ i $N = N_2$.

Da bi dokazali da $k^s_{\boldsymbol{\alpha}}$ zadovoljava uvjet (19), na temelju upravo dokazanog dovoljno je provjeriti da funkcija

$$k_0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{d} + |\xi_k|^{\alpha_k}$$

zadovoljava uvjet (19). To slijedi iz ocjene

$$\begin{aligned}k_0(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{d}+|\xi_k+\eta_k|^{\alpha_k} &\leqslant \frac{1}{d}+(|\xi_k|+|\eta_k|)^{\alpha_k} \leqslant \frac{1}{d}+|\xi_k|^{\alpha_k}+|\eta_k|^{\alpha_k}\\ &\leqslant (1+d|\xi_k|^{\alpha_k})(\frac{1}{d}+|\eta_k|^{\alpha_k}) \leqslant d(1+|\boldsymbol{\xi}|^{\alpha_k})k_0(\boldsymbol{\eta}),\end{aligned}$$

gdje je druga nejednakost dokazana u dokazu Leme IV.4.

Q.E.D.

Uz skalarni produkt

$$\langle\, u \mid v \,\rangle_{\mathrm{H}^{s,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d)} := \langle\, k^s_{\boldsymbol{\alpha}}\, \hat{u} \mid k^s_{\boldsymbol{\alpha}}\, \hat{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}$$

$\mathrm{H}^{s,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d)$ je Hilbertov prostor.

Lema 4. *Za uvedene prostore vrijede gusta i neprekinuta ulaganja* $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathrm{H}^{s,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}'$. *Štoviše,* $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ *je gust u* $\mathrm{H}^{s,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d)$. ∎

Dokaz gornjih rezultata se u načelu može pronaći u [Hö1, Teorem 10.1.7]. Ipak, treba primijetiti da sve ocjene prolaze i uz modifikaciju (19). Isto vrijedi i za Lemu 5 u nastavku čija se varijanta nalazi u [Hö1, Teorem 10.1.10].

Za nastavak razmatranja ćemo bez smanjenja općenitosti (prenumeracijom varijabli, ako je to potrebno) pretpostaviti da je $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m < 1$, te $\alpha_{m+1} = \cdots = \alpha_d = 1$. Također uvodimo oznake $\mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}')$, $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_m)$, $\mathbf{x}' = (x_{m+1}, \dots, x_d)$, $0 \leqslant m \leqslant d$, te analogno za ostale vektorske varijable.

Lema 5. *Ako definiramo* $\mathrm{H}^{0,\,r}(\mathbf{R}^d)$ *kao skup svih* $u \in \mathcal{S}'$ *takvih da je* $\hat{u}$ *funkcija i*

$$\Bigl(1 + \sum_{k=m+1}^{d} |\xi_k|\Bigr)^r \hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d),$$

onda je za svaki kompaktan skup $K \subseteq \mathbf{R}^d$ *ulaganje*

$$\mathrm{H}^{0,\,-r}(\mathbf{R}^d) \cap \mathcal{E}'(K) \hookrightarrow \mathrm{H}^{-s,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d)$$

kompaktno, za $r < s$. ∎

Budući da je prostor $\mathrm{H}^{s,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d)$ *polulokalan* (v. [Hö1, loc. cit.]), najmanji *lokalan prostor* koji ga sadrži je

$$\mathrm{H}^{s,\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d) := \Bigl\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d) : (\forall\, \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)) \quad \varphi u \in \mathrm{H}^{s,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d) \Bigr\}\,.$$

Ovaj je prostor prirodno opskrpljen najslabijom topologijom u kojoj su preslikavanja $u \mapsto \varphi u$ neprekinuta.

Prisjetimo se sada definicije razlomljene derivacije reda α: ∂^α_k je pseudodiferencijalni operator sa simbolom $(2\pi i \xi_k)^\alpha$, tj.

$$\partial^\alpha_k u = \overline{\mathcal{F}}\left((2\pi i \xi_k)^\alpha\, \hat{u}(\xi)\right).$$

Uvedeni operator je dobro definiran na uniji Soboljevljevih prostora $\mathrm{H}^{-\infty}(\mathbf{R}^d) = \bigcup_{s\in\mathbf{R}} \mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)$. Razlomljene derivacije, kao i prostor

$$\mathrm{C}_b(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{q\times r}(\mathbf{C})) = \mathrm{C}(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{q\times r}(\mathbf{C})) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{q\times r}(\mathbf{C}))$$

koristimo u sljedećem teoremu.

Teorem 6. **(lokalizacijsko svojstvo)** *Neka je* (u_n) *niz u* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ *takav da* $\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{0}$, *neka su za proizvoljne* $n \in \mathbf{N}$ *i* $\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^{d-m}$ *nosači funkcija* $u_n(\cdot, \mathbf{x}')$ *sadržani u fiksnom kompaktnom skupu u* $\mathbf{R}^m$, *i neka za* $l \in \mathbf{N}$ *vrijedi*

$$\sum_{|\bar{\boldsymbol{\gamma}}|=l} \partial_1^{\alpha_1\gamma_1} \cdots \partial_m^{\alpha_m\gamma_m} (\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} \mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol{\gamma}'|=l} \partial^{\boldsymbol{\gamma}'}_{\mathbf{x}'} (\mathbf{A}^{\boldsymbol{\gamma}'} \mathsf{u}_n) \longrightarrow \mathsf{0} \;\; \textit{jako u} \;\; \mathrm{H}^{-l,\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d), \qquad (20)$$

gdje su $\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol\gamma}}, \mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'} \in \mathrm{C}_b(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{q\times r}(\mathbf{C}))$*, za neki* $q \in \mathbf{N}$*, uz* $\bar{\boldsymbol\gamma} \in \mathbf{N}_0^m, \boldsymbol\gamma' \in \mathbf{N}_0^{d-m}$.

Tada za pridruženu H-mjeru $\boldsymbol\mu$ *definiranu Teoremom 5 vrijedi*

$$\Big(\sum_{|\bar{\boldsymbol\gamma}|=l}\prod_{k=1}^m (2\pi i\,\xi_k)^{\alpha_k\gamma_k}\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol\gamma}} + \sum_{|\boldsymbol\gamma'|=l}(2\pi i\,\boldsymbol\xi')^{\boldsymbol\gamma'}\mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'}\Big)\boldsymbol\mu = \mathbf{0}.$$

Dem. Pokažimo da analogon relacije (20) vrijedi i za lokaliziran niz $(\phi\mathsf{u}_n)$, gdje je $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$. Uzmimo prvo da je $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{d-m})$ (funkcija koja ne ovisi o $\bar{\mathbf{x}}$), za koju imamo

$$\begin{aligned}\sum_{|\bar{\boldsymbol\gamma}|=l}&\partial_1^{\alpha_1\gamma_1}\cdots\partial_m^{\alpha_m\gamma_m}(\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol\gamma}}\phi\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol\gamma'|=l}\partial_{\mathbf{x}'}^{\boldsymbol\gamma'}(\mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'}\phi\mathsf{u}_n)\\ &= \phi\Big(\sum_{|\bar{\boldsymbol\gamma}|=l}\partial_1^{\alpha_1\gamma_1}\cdots\partial_m^{\alpha_m\gamma_m}(\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol\gamma}}\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol\gamma'|=l}\partial_{\mathbf{x}'}^{\boldsymbol\gamma'}(\mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'}\mathsf{u}_n)\Big)\\ &\qquad + \sum_{|\boldsymbol\gamma'|=l}\sum_{|\boldsymbol\delta|=1}^{l}\binom{\boldsymbol\gamma'}{\boldsymbol\delta}\partial_{\mathbf{x}'}^{\boldsymbol\delta}\phi\,\partial_{\mathbf{x}'}^{(\boldsymbol\gamma'-\boldsymbol\delta)}(\mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'}\mathsf{u}_n)\,.\end{aligned}$$

Prema Lemi 5, članovi zadnje sume konvergiraju jako prema nuli u $\mathrm{H}^{-l,\boldsymbol\alpha}(\mathbf{R}^d)$. Preostali članovi na desnoj strani konvergiraju u istom prostoru prema pretpostavci teorema, što dokazuje tvrdnju.

Za proizvoljnu $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$, postoji funkcija $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})^{d-m}$, neovisna o $\bar{\mathbf{x}}$, takva da je $\phi = \phi\varphi$. Dalje dobivamo

$$\begin{aligned}\Big\|&\sum_{|\bar{\boldsymbol\gamma}|=l}\partial_1^{\alpha_1\gamma_1}\cdots\partial_m^{\alpha_m\gamma_m}(\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol\gamma}}\phi\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol\gamma'|=l}\partial_{\mathbf{x}'}^{\boldsymbol\gamma'}(\mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'}\phi\mathsf{u}_n)\Big\|_{\mathrm{H}^{-l,\boldsymbol\alpha}(\mathbf{R}^d)}\\ &\leqslant \Big\|\sum_{|\bar{\boldsymbol\gamma}|=l}\frac{\prod_{k=1}^m(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k\gamma_k}}{\Big(\sum_{k=1}^d|\xi_k|^{\alpha_k}\Big)^l}\widehat{\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol\gamma}}\phi\mathsf{u}_n} + \sum_{|\boldsymbol\gamma'|=l}\frac{(2\pi i\boldsymbol\xi')^{\boldsymbol\gamma'}}{\Big(\sum_{k=1}^d|\xi_k|^{\alpha_k}\Big)^l}\widehat{\mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'}\phi\mathsf{u}_n}\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\\ &= \Big\|\sum_{|\bar{\boldsymbol\gamma}|=l}P_{\bar{\boldsymbol\gamma}}(\phi\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol\gamma}}\varphi\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol\gamma'|=l}P_{\boldsymbol\gamma'}(\phi\mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'}\varphi\mathsf{u}_n)\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\\ &\leqslant \Big\|\phi\Big(\sum_{|\bar{\boldsymbol\gamma}|=l}P_{\bar{\boldsymbol\gamma}}(\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol\gamma}}\varphi\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol\gamma'|=l}P_{\boldsymbol\gamma'}(\mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'}\varphi\mathsf{u}_n)\Big)\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\\ &\qquad + \Big\|\sum_{|\bar{\boldsymbol\gamma}|=l}[P_{\bar{\boldsymbol\gamma}}, M_\phi](\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol\gamma}}\varphi\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol\gamma'|=l}[P_{\boldsymbol\gamma'}, M_\phi](\mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'}\varphi\mathsf{u}_n)\Big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\,,\end{aligned}$$

gdje su $P_{\bar{\boldsymbol\gamma}}$ i $P_{\boldsymbol\gamma'}$ Fourierovi množitelji pridruženi simbolima $p_{\bar{\boldsymbol\gamma}}(\boldsymbol\xi) = \frac{\prod_{k=1}^m(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k\gamma_k}}{(\sum_{k=1}^d|\xi_k|^{\alpha_k})^l}$, odnosno $p_{\boldsymbol\gamma'}(\boldsymbol\xi) = \frac{(2\pi i\boldsymbol\xi')^{\boldsymbol\gamma'}}{(\sum_{k=1}^d|\xi_k|^{\alpha_k})^l}$, M_ϕ je operator množenja s ϕ, a $[P, M_\phi] = PM_\phi - M_\phi P$. Prema Lemi IV.3 i primjeru iz IV.4 komutatori $[P_{\bar{\boldsymbol\gamma}}, M_\phi]$ i $[P_{\boldsymbol\gamma'}, M_\phi]$ su kompaktni operatori na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, pa posljednji član u gornjem izrazu konvergira prema 0. Prema prvom dijelu dokaza, niz (φu_n) zadovoljava analogon relacije (20) pa prema Lemi III.2 niz funkcija $\sum_{|\bar{\boldsymbol\gamma}|=l}P_{\bar{\boldsymbol\gamma}}(\mathbf{A}^{\bar{\boldsymbol\gamma}}\varphi\mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol\gamma'|=l}P_{\boldsymbol\gamma'}(\mathbf{A}^{\boldsymbol\gamma'}\varphi\mathsf{u}_n)$ konvergira jako u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$. Time smo pokazali da $\sum_{|\bar{\gamma}|=l} \partial_1^{\alpha_1\gamma_1} \cdots \partial_m^{\alpha_m\gamma_m}(\mathbf{A}^{\bar{\gamma}}\phi \mathsf{u}_n) + \sum_{|\boldsymbol{\gamma}'|=l} \partial_{\mathbf{x}'}^{\boldsymbol{\gamma}'}(\mathbf{A}^{\boldsymbol{\gamma}'}\phi \mathsf{u}_n) \to \mathsf{0}$ u $\mathrm{H}^{-l,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d)$, a prema gornjem računu i Lemi 2 slijedi i

$$s^{-l}(\boldsymbol{\xi})\Bigg(\sum_{|\bar{\gamma}|=l}\prod_{k=1}^{m}(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k\gamma_k}\widehat{\mathbf{A}^{\bar{\gamma}}\phi\mathsf{u}_n} + \sum_{|\boldsymbol{\gamma}'|=l}(2\pi i\boldsymbol{\xi}')^{\boldsymbol{\gamma}'}\widehat{\mathbf{A}^{\boldsymbol{\gamma}'}\phi\mathsf{u}_n}\Bigg) \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d).$$

Nakon množenja n-tog člana gornjeg niza s $\widehat{\phi\mathsf{u}_n}$ i $\psi\circ\pi_Q$, za $\psi\in\mathrm{C}(Q)$, gdje je Q mnogostrukost iz Teorema 5, prema tom teoremu slijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d}(\psi\circ\pi_Q)\Bigg(\sum_{|\bar{\gamma}|=l}\frac{\prod_{k=1}^{m}(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k\gamma_k}}{s(\boldsymbol{\xi})^l}\widehat{\mathbf{A}^{\bar{\gamma}}\phi\mathsf{u}_n} + \sum_{|\boldsymbol{\gamma}'|=l}\frac{(2\pi i\boldsymbol{\xi}')^{\boldsymbol{\gamma}'}}{s(\boldsymbol{\xi})^l}\widehat{\mathbf{A}^{\boldsymbol{\gamma}'}\phi\mathsf{u}_n}\Bigg)\otimes\Big(\widehat{\phi\mathsf{u}_n}\Big)d\boldsymbol{\xi}\\ &= \Big\langle\frac{1}{s(\boldsymbol{\xi})^l}\Bigg(\sum_{|\bar{\gamma}|=l}\prod_{k=1}^{m}(2\pi i\xi_k)^{\alpha_k\gamma_k}\mathbf{A}^{\bar{\gamma}} + \sum_{|\boldsymbol{\gamma}'|=l}(2\pi i\boldsymbol{\xi}')^{\boldsymbol{\gamma}'}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\gamma}'}\Bigg)\boldsymbol{\mu}\,,\,|\phi|^2\boxtimes\psi\Big\rangle.\end{aligned}$$

Budući da je $s(\boldsymbol{\xi})=1$ na nosaču mjere $\boldsymbol{\mu}$, tvrdnja slijedi.

Q.E.D.

Napomena. Nosači funkcija u_n moraju biti sadržani u fiksnom kompaktnom skupu (po $\bar{\mathbf{x}}$), jer razlomljene derivacije nisu lokalne, te za njih ne postoji odgovarajuća varijanta Leibnizovog produktnog pravila.

Ipak, ova se pretpostavka može zamijeniti s uvjetom da koeficijenti $\mathbf{A}^{\bar{\gamma}}$ i $\mathbf{A}^{\boldsymbol{\gamma}'}$ imaju kompaktan nosač po $\bar{\mathbf{x}}$. ∎

Na kraju, kao jednostavan primjer primjene lokalizacijskog svojstva, dokazujemo sljedeći:

Korolar 1. *Neka je (u_n) niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ takav da $u_n \rightharpoonup 0$, neka su nosači funkcija u_n sadržani u fiksnom kompaktnom skupu, i neka je za svaki $n\in\mathbf{N}$ zadovoljena jednadžba*

$$\sum_{k=1}^{d}\partial_k^{\alpha}u + cu_n = f_n,$$

za neke $\alpha\in\langle 0,1\rangle$ i $c\in\mathrm{C}(\mathbf{R}^d)$. Ako označimo $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha,\dots,\alpha)$ i ako f_n konvergira prema nuli (jako) u $\mathrm{H}^{-1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d)$, onda je H-mjera μ definirana Teoremom 5 i pridružena nizu (u_n) trivijalna.

Dem. Prema Lemi 5 cu_n također konvergira prema nuli u $\mathrm{H}^{-1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{R}^d)$, pa direktna primjena Teorema 6 daje

$$\Bigg(\sum_{k=1}^{d}\xi_k^{\alpha}\Bigg)\mu = 0.$$

Ako je $\xi_k>0$, onda je i $\xi_k^{\alpha}>0$, a ako je $\xi_k<0$, onda se ξ_k^{α} nalazi u gornjoj (kompleksnoj) poluravnini. Dakle, izraz u gornjoj zagradi je jednak nuli ako i samo ako je $(\xi_1,\dots,\xi_d)=\mathbf{0}$. Budući da ishodište ne pripada promatranoj mnogostrukosti iz Teorema 5, zaključujemo da je $\mu=0$.

Q.E.D.

Literatura

[Ad] Robert A. Adams, John J. F. Fournier: *Sobolev spaces*, Academic Press, 2003.

[Al] Nathaël Alibaud: *Entropy formulation for fractal conservation laws*, *Journal of Evolution Equations* **7** (2007) 145–175

[A] Nenad Antonić: *H-measures applied to symmetric systems*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **126A** (1996) 1133–1155

[AL1] Nenad Antonić, Martin Lazar: *A parabolic variant of H-measures*, *Ann. Univ. Ferrara* **54** (2008) 183–201

[AL2] Nenad Antonić, Martin Lazar: *Parabolic variant of H-measures in homogenisation of a model problem based on Navier-Stokes equation*, *Nonlinear Anal. B: Real World Appl.* **11** (2010) 4500–4512

[AL3] Nenad Antonić, Martin Lazar: *Parabolic H-measures*, submitted

[AV] Nenad Antonić, Marko Vrdoljak: *Mjera i integral*, Zagreb, Prirodoslovno matematički fakultet, Matematički odjel, 2001.

[BC] Claudio Baiocchi, António Capelo: *Variational and quasi-variational inequalities*, Wiley, 1984.

[BP] Agnes Benedek, Rafael Panzone: *The spaces L^P, with mixed norm*, *Duke Math. J.* **28** (1961) 301–324

[BIN] Oleg V. Besov, Valentin P. Il'in, Sergeĭ M. Nikol'skiĭ: *Integral representations of functions and imbedding theorems*, V. H. Winston & Sons, 1978.

[Br] Haïm Brezis: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[CM] Ronald R. Coifman, Yves Meyer: *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, *Astérisque* **57** (1978)

[DI] Jérôme Droniou, Cyril Imbert: *Fractal first-order partial differential equations*, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **182** (2006) 299–331

[F] Gerald B. Folland: *Real analysis*, Wiley, 1984.

[Fr] Gilles A. Francfort: *An introduction to H-measures and their applications* u *Variational problems in materials science*, pp. 85–110, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **68**, Birkhäuser, 2006.

[GM] Gianluca Garello, Alessandro Morando: *L^p-continuity for pseudodifferential operators* u *Operator Theory: Advances and Applications* **164** (2006) 79–94

[G] Patrick Gérard: *Microlocal defect measures, Communications in Partial Differential Equations* **16** (1991) 1761–1794

[GT] David Gilbarg, Neil S. Trudinger: *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1983.

[Hö1] Lars Hörmander: *The analysis of linear partial differential Operators I–IV*, Springer, 1985–1990.

[Hö2] Lars Hörmander: *Continuity of pseudodifferential operators of type* $1,1$, *Comm. Partial Differential Equations* **14** (1989) (2) 231–243

[HP] Tuomas Hytönen, Pierre Portal: *Vector-valued multiparameter singular integrals and pseudodifferential operators*, *Advances in Mathematics* **217** (2008) 519–536

[KN] Joseph J. Kohn, Louis Nirenberg: *An algebra of pseudodifferential operators*, *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965) 269–305

[KuN] Hitoshi Kumano-go, Michihiro Nagase: L^p*-theory of pseudodifferential operators*, *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 138–142

[La] Serge Lang: *Real and Functional Analysis*, Springer, 1993.

[L1] Martin Lazar: *H-mjere i primjene*, Magistarski rad, Zagreb, 1998.

[L2] Martin Lazar: *Poopćenja H-mjera i primjene*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2007.

[LM] Martin Lazar, Darko Mitrović: *Velocity averaging – a general framework*, *Dyn. Partial Diff. Equ.* **9** (2012) (3) 239–260

[LL] Elliot H. Lieb, Michael Loss: *Analysis*, American Mathematical Society, 1996.

[MR] Qi Min-you, Luigi Rodino: *General theory of partial differential equations and microlocal analysis*, Longman, 1996.

[MI] Darko Mitrović, Ivan Ivec: *A generalization of H-measures and application on purely fractional scalar conservation laws*, *Comm. Pure Appl. Analysis* **10** (2011) (6) 1617–1627

[NR] Fabio Nicola, Luigi Rodino: *Global pseudodifferential calculus on Euclidean spaces*, Birkhäuser, 2010.

[N] Louis Nirenberg: *Pseudodifferential operators* u *Global Analysis: Proc. Sympos. Pure Math.* **16** (1968) 149–167

[P1] Evgenij J. Panov: *On sequences of measure-valued solutions of a first order quasilinear equations*, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* **81** (1995) 211–227

[P2] Evgenij J. Panov: *Existence of strong traces for quasi-solutions of multidimensional conservation laws*, *Journal of Hyperbolic Differential Equations* **4** (2007) 729–770

[P3] Evgenij J. Panov: *Ultra-parabolic equations with rough coefficients. Entropy solutions and strong pre-compactness property*, *Journal of Mathematical Sciences* **159** (2009) 180–228

[Pe] Bent E. Petersen: *Introduction to the Fourier transform and pseudodifferential operators*, Pitman, 1983.

[Pi1] Stevan Pilipović: *Colombeau's generalized functions and the pseudodifferential operators*, Lecture Notes of Tokyo University, 1993.

[Pi2] Stevan Pilipović: *Pseudodifferential operators and microlocalization in the space of Colombeau's generalized functions*, *Bull. Acad. Serbe Sci. Arts* **20** (1995) 13–27

[PS] Stevan Pilipović, Dora Seleši: *Mera i integral*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[SR] Xavier Saint-Raymond: *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*, CRC Press, 1991.

[S] Sergej A. Sazhenkov: *The genuinely nonlinear Graetz-Nusselt ultraparabolic equation*, *Siberian Math. J.* **47** (2006) 355–375

[Sh] Mikhail Shubin: *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Nauka, Moscow, 1978.

[So] Christopher D. Sogge: *Fourier integrals in classical analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[St] Elias M. Stein: *Harmonic analysis*, Princeton University Press, 1993.
[T] Michael E. Taylor: *Pseudodifferential operators*, Princeton University Press, 1981.
[Ta1] Luc Tartar: *H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **115A** (1990) 193–230
[Ta2] Luc Tartar: *H-measures and applications* u *Proceedings of the International congress of mathematicians (Kyoto, 1990)*, Vol II, pp. 1215–1223, Mathematical society of Japan, 1991.
[Ta3] Luc Tartar: *Oscillations and concentration effects in partial differential equations: why waves may behave like particles* u *XVII CEDYA: Congress on Differential Equations and Applications/VII CMA: Congress on Applied Mathematics (Salamanca, 2001)*, pp. 179–219, L. Ferragut et A. Santos (ur.), Departamento de Matemática Aplicada, Universida de Salamanca, Salamanca, 2001.
[Ta4] Luc Tartar: *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Springer, 2007.
[Ta5] Luc Tartar: *The general theory of homogenization*, Springer, 2009.
[Tr1] François Trèves: *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators I–II*, Plenum Press, 1980.
[Tr2] François Trèves: *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, 1967.
[We] Hermann Weyl: *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, 1950.
[W] Man W. Wong: *An introduction to pseudodifferential operators*, World Scientific, 1991.

Sažetak

Ponašanje pseudodiferencijalnih operatora na Lebesgueovim i Soboljevljevim prostorima je intenzivno proučavano u posljednjih nekoliko desetljeća i danas imamo prilično zaokruženu teoriju. Unatoč tome, malo je rečeno o prostorima s mješovitom normom.

Zato je prvi cilj ovog rada bio ispitati i pronaći što elementarniji dokaz za neprekinutost pseudodiferencijalnih operatora reda nula na Lebesgueovim prostorima s mješovitom normom. Pritom sam se uglavnom ograničio samo na klasične Hörmanderove simbole i Kohn-Nirenbergovu kvantizaciju.

H-mjere su u posljednjih dvadesetak godina dale brojne primjene na hiperboličke zadaće, a u posljednjih se nekoliko godina intenzivno proučavaju paraboličke H-mjere, prilagođene primjeni na paraboličke zadaće. Obje se varijante oslanjaju na pogodan oblik tzv. prve komutacijske leme. Moj je cilj bio proučiti domete Tartarovog općeg oblika prve komutacijske leme (Lema IV.1) i pronaći općenite postupke za konstrukciju varijanti H-mjera prilagođenih skaliranju duž odgovarajućih krivulja. Prvo je pronađena tzv. varijanta A, a zatim elegantnija varijanta B.

Dobiveni postupci su uspješno primijenjeni na neka pitanja vezana uz razlomljeni zakon sačuvanja, a na kraju su definirane i tzv. razlomljene H-mjere s odgovarajućim lijepim svojstvima i potencijalnim primjenama na razne tipove parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Unatoč nedostatku nekih eksplicitnih formula, dokazano je i lokalizacijsko svojstvo za tu varijantu H-mjera.

Summary

Pretty extensive study of the continuity of pseudo-differential operators on Lebesgue and Sobolev spaces has been done in the last few decades, resulting in well-rounded theory. However, a little has been said about behaviour on spaces with mixed norm.

The first goal of this work was so to study and to find the most elementary proof of continuity of zeroth order pseudo-differential operators on Lebesgue spaces with mixed norm. The study has been mainly oriented only to classical Hörmander symbols and Kohn-Nirenberg quantisation.

H-measures provided many results regarding hyperbolic equations in the last two decades, and in the last few years an extensive study of parabolic H-measures has been done, with some applications to parabolic equations. Both variants follow an appropriate version of the so called first commutation lemma. My goal was to study consequences of the general version of Tartar first commutation lemma (Lemma IV.1) and to find general methods for constructing variants of H-measures appropriate to use with scaling along certain curves. First the variant A had been found, and then more elegant variant B.

Those methods found application to certain questions about fractional scalar conservation laws, and fractional H-measures, with certain good properties and potential applications to various types of partial differential equations, have been defined. Despite the lack of certain explicit formulas, localisation principle for that variant has also been proved.

Životopis

Ivan Ivec rođen je 29. svibnja 1976. u Koprivnici, a osnovnu školu i prirodoslovno-matematičku gimnaziju završio je u Križevcima. Talent za matematiku otkrio je u četvrtom razredu osnovne škole uspješno rješavajući zadatke iz jedne zbirke zabavnih matematičkih problema. Kao gimnazijalac redovito je sudjelovao na matematičkim natjecanjima, osvajao nagrade, a 1994. predstavljao je Hrvatsku na međunarodnoj matematičkoj olimpijadi u Hong Kongu, osvojivši brončanu medalju.

Nakon gimnazije upisao je studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirao je 31. siječnja 2001, stekavši stručni naziv diplomirani inženjer matematike, smjer Primijenjena matematika. Diplomski rad Soboljevljeve nejednakosti i primjene izradio je pod mentorstvom prof. Nenada Antonića. Prosječna ocjena na dodiplomskom studiju mu je 4,24.

Nakon studija radio je u nekoliko srednjih škola. Paralelno s radom u školi tri je semestra držao predavanja i vježbe na splitskom Veleučilištu u Križevcima: Elementarnu matematiku, Matematiku i Numeričke metode (MATLAB), a jedan trimestar radio je i na Američkoj školi za menadžment i tehnologiju u Zagrebu. Trenutačno drži vježbe iz Integrala funkcija više varijabli na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Već devetu godinu radi u Gimnaziji A. G. Matoša u Samoboru kao nastavnik matematike i informatike. Oženio se 2006. i nakon toga preselio u Zagreb. Otac je dvoje djece.

U želji usavršavanja u struci, u akademskoj godini 2006/2007. upisao je doktorski studij matematike. Područje specijalizacije mu je matematička analiza, a područje interesa prvenstveno teorija multiplikatora i interpolacija Banachovih prostora.

U listopadu 2009. godine učestvovao je na DAAD poslijediplomskoj školi Measure theoretic tools in partial differential equations u Budvi (http://www.ttm2009.prona.org). Tijekom trajanja škole započeo je raditi na jednom otvorenom problemu s doc. Darkom Mitrovićem (organizatorom škole), a rezultat te suradnje je rad *A generalization of H-measures and application on purely fractional scalar conservation laws*, objavljen u znanstvenom časopisu *Communications in Pure and Applied Analysis*.

Održao je predavanje *Boundedness of pseudodifferential operators on mixed-norm spaces* na sedmoj konferenciji Applied mathematics and scientific computing u Trogiru, 2011. te predavanje *Some generalisations of H-measures* na međunarodnoj konferenciji Topics in PDE, Microlocal and time-frequency analysis u Novom Sadu, 2012.