

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 745

**HIJERARHIJSKO OPTIMALNO
UPRAVLJANJE SUSTAVOM GRIJANJA I
HLAĐENJA U PROSTORIJAMA
NEBODERA FAKULTETA
ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA**

Anita Martinčević

Zagreb, srpanj 2013.

Zahvaljujem mentoru doc.dr.sc. Mariju Vašku na pomoći, strpljenju, prenesenom znanju i korisnim savjetima tijekom izrade rada te prof.dr.sc. Jadranku Matušku na pruženoj pomoći i stručnim savjetima.

Istraživanje vezano uz ovaj rad obavljeno je u sklopu projekta ENHEMS-Buildings – Unapređenje kapaciteta istraživanja, razvoja i transfera tehnologije vezanih uz sustave gospodarenja energijom u zgradama, Ugovor o dodjeli bespovratnih sredstava br. IPA2007/HR/16IPO/001-040510.

Research related to this thesis was performed within the scope of the project ENHEMS-Buildings – Enhancement of Research, Development and Technology Transfer Capacities in Energy Management Systems for Buildings, Grant Contract No. IPA2007/HR/16IPO/001-040510.

1	Uvod	1
2	Modeliranje termodinamičkih procesa	3
2.1	Električna analogija toplinskih tokova	6
2.2	Modeliranje toplinskih procesa u zgradarstvu	7
2.2.1	Modeliranje zidova i prozora	7
2.2.2	RC analogija toplinskih procesa unutar jedne prostorije	11
2.2.3	Toplinski model zgrade	12
3	Modeliranje sustava centralnog grijanja	15
3.1	Izmjenjivači topline	16
3.2	Ukupni koeficijent prijelaza topline	18
3.3	Ponašanje smjese zraka i vodene pare prilikom grijanja/hlađenja	28
3.3.1	Suhi i atmosferski zrak	28
3.3.2	Apsolutna i relativna vlažnost zraka	29
3.3.3	Temperatura rosišta	30
3.4	Matematički model ventilokonvektora	32
3.5	Fizikalna ograničenja sustava	40
3.6	Ostali načini analize izmjenjivača topline	44
3.6.1	Analiza izmjenjivača topline korištenjem srednje logaritamske temperaturne razlike	44
3.6.2	Analiza izmjenjivača topline korištenjem NTU metode	48

4	Hijerarhijsko optimalno upravljanje	51
4.1	Stohastičko modelsko prediktivno upravljanje	54
4.2	Mješovito cjelobrojno nelinearno programiranje	59
4.2.1	Metoda grananja i ograđivanja	60
4.3	Optimalno upravljanje ventilokonvektorima	62
4.4	Implementacija hijerarhijskog optimalnog upravljanja	66
5	Zaključak	73
	Sažetak	77
	Abstract	78

2.1	Prikaz toplinskih tokova unutar zgrade na jednom zidu.	4
2.2	RC analogija prijenosa topline kroz zid.	8
2.3	RC analogija prijenosa topline kroz zid - primjer višeslojnog zida.	9
2.4	Prijenos toplinske energije kroz prozor.	10
2.5	RC analogija prijenosa topline kroz prozor.	11
2.6	RC analogija prijenosa topline unutar jedne sobe.	11
2.7	Nacrt prostorija koje se modeliraju.	12
2.8	Usporedba odziva MATLAB i TRNSYS modela.	13
2.9	Usporedba odziva MATLAB i TRNSYS modela.	14
3.1	Načelna shema izvedbe sustava centralnog grijanja.	15
3.2	Paralelno protustrujni i istostrujni izmjenjivač topline.	16
3.3	Unakrsni izmjenjivač topline s lameliranim i glatkim cijevima.	17
3.4	Izmjenjivači topline s kombiniranim strujanjem nosilaca topline.	17
3.5	Profil temperature kod izmjenjivača s okruglim cijevima.	18
3.6	Stvaranje nečistoća na stjenkama cijevi.	19
3.7	Geometrija lameliranog izmjenjivača topline sa šahovskim poretkom cijevi.	20
3.8	Visokoeffikasne (lijevo) i niskoeffikasne (desno) lamele.	22
3.9	Ovisnost koeficijenta prijelaza topline h_w o masenom protoku vode.	23
3.10	Ovisnost koeficijenta prijelaza topline o protocima i temperaturama.	25
3.11	Ovisnost ukupnog koeficijenta prijelaza topline po površni o protoku zraka i medija u cijevima.	25
3.12	Ovisnost ukupnog koeficijenta prijelaza topline po površni o protoku zraka i medija u cijevima.	26

3.13 Ovisnost ukupnog koeficijenta prijelaza topline po površni o protoku zraka i medija u cijevima.	27
3.14 Ts dijagram vodene pare.	29
3.15 Ovisnost temperature rosišta o temperaturi i vlažnosti zraka.	31
3.16 Shematski prikaz ventilokonvektora	33
3.17 Pojednostavljena shema procesa grijanja.	34
3.18 Analiza utjecaja vlažnosti zraka na porast entropije zraka.	36
3.19 Analiza utjecaja vlažnosti zraka na ukupnu masu zraka u prostoriji. . .	37
3.20 Pojednostavljena shema procesa hlađenja.	38
3.21 Fizikalna ograničenja koeficijenta prijenosa topline	41
3.22 Ovisnost snage P o ulaznim protocima.	42
3.23 Raspodjela temperature za istosmjerni i protusmjerni paralelni izmjenjivač topline.	46
4.1 Načelna shema hijerarhijskog optimalnog upravljanja.	52
4.2 Grafički prikaz algoritma grananja i ograđivanja na primjeru minimizacije zadane nelinearne funkcije cilja.	62
4.3 Slijedenje referentne snage tijekom siječnja.	66
4.4 Optimalni upravljački ulazi	67
4.5 Rezultati optimalnog upravljanja procesom grijanja u prostoriji	70
4.6 Rezultati optimalnog upravljanja procesom hlađenja u prostoriji	71
4.7 Rezultati optimalnog upravljanja procesom grijanja u prostoriji	72

POPIS SIMBOLA

h	koeficijent prijelaza topline - toplinska provodljivost [W/(m ² K)]
h_a	entalpija zraka [J/kg] (zrak = mješavina suhog zraka i vodene pare)
h_{da}	entalpija suhog zraka [J/kg]
h_v	entalpija vodene pare [J/kg]
H	toplinski tok [W]
I_o, I_1	Besselove funkcije prve vrste, nultog i prvog reda
j	Colburnov faktor
k	koeficijent toplinske vodljivosti [W/(m·K)]
k_v	konstanta ventila [(kg·m) ^{0.5}]
K_o, K_1	Besselove funkcije druge vrste, nultog i prvog reda
A_b	ukupna površina baze cijevi preko koje se prenosi toplina [m ²]
m	masa [kg]
N_u	Nusseltov broj
P	tlak [Pa]
P_{sat}	tlak zasićenja [Pa]
P_L	horizontalni razmak između cijevi [m]

P_T	vertikalni razmak između cijevi [m]
Pr	Prandtlov broj
Q	maseni protok [kg/s]
r	polumjer [m]
R	toplinski otpor [K/W]
A_f	ukupna površina lamela preko kojih se prenosi toplina [m ²]
R_{da}	specifična plinska konstanta suhog zraka [J/(kg·mol)]
R_v	specifična plinska konstanta vodene pare [J/(kg·mol)]
R_f	faktor zaprljanja [m ² K/W]
R_{fin}	toplinski otpor lamela [K/W]
R_{wall}	toplinski otpor stjenke cijevi [K/W]
R_{eq}	ekvivalentni radijus okruglih lamela [m]
Re	Reynoldsov broj
T	temperatura [K]
T_{dp}	temperatura rosišta [K]
U	ukupni koeficijent prijelaza topline [W/m ² K]
c	specifični toplinski kapacitet [J/K]
V	volumen [m ³]
X_L	geometrijski parametar lamele
X_M	geometrijski parametar lamele
x_v	otvorenost ventila - $x_v \in [0,100]$ %
η_0	ukupna korisnost/efikasnost vanjske/nutarnje površine [%]
η_f	iskoristivost jedne lamele [%]
$\eta_{f,wet}$	iskoristivost jedne lamele u slučaju kada dolazi do kondenzacije [%]

σ_f	debljina lamele [m]
σ	Stefan-Boltzmanova konstanta = $5,67 \cdot 10^{-8}$ [W/(m ² K ⁴)]
ρ	gustoća [kg/m ³]
D	promjer [m]
μ	viskoznost [Pa s]
ω	apsolutna vlažnost zraka [kg vodene pare/kg zraka]
ϕ	relativna vlažnost zraka [%]
D_h	hidraulički promjer [m]
D_c	promjer obujmice lamele [m]
f	faktor trenja
F_p	razmak između lamela [m]
A	ukupna površina preko koje se prenosi toplina [m ²], $A = A_b + A_f$
\square_a	indeks koji se odnosi na zrak (eng. <i>air</i>)
\square_c	indeks koji se odnosi na hladan fluid (eng. <i>cold</i>)
\square_f	indeks koji se odnosi na lamelu (eng. <i>fin</i>)
\square_h	indeks koji se odnosi na topli fluid (eng. <i>hot</i>)
\square_i, \square_{in}	indeks koji se odnosi na unutarnji (eng. <i>in</i>)
\square_o, \square_{out}	indeks koji se odnosi na vanjski (eng. <i>out</i>)
\square_v	indeks koji se odnosi na vodenu paru (eng. <i>vapour</i>)
\square_w	indeks koji se odnosi na vodu (eng. <i>water</i>)
\square_{da}	indeks koji se odnosi na suhi zrak (eng. <i>dry air</i>)
\mathbb{R}	skup realnih brojeva
\mathbb{R}^n	n -dimenzionalni vektor realnih brojeva
$\mathbb{R}^{m \times n}$	realna matrica dimenzija $m \times n$
\mathbb{Z}	skup cijelih brojeva

Uvod

Jedan od najvećih izazova, s kojima se svijet susreće danas, je potreba za realizacijom masovnih ušteda energije. Zgrade sudjeluju s oko 40% u ukupnoj potrošnji energije u svijetu pa je zgradarstvo najveći potrošač u kojem se troši više energije nego u prometu i industriji. Najveći potrošač energije u zgradama su sustavi za grijanje, ventilaciju i klimatizaciju, tzv. HVAC sustavi. Energetski efikasno upravljanje toplinskim procesima u zgradama može imati veliki doprinos u uštedi energije. Pravilnim dizajnom i upotrebom sustava automatskog upravljanja potrošnja energenta može se smanjiti značajno, a u nekim slučajevima i drastično. U okviru projekta ENHEMS-Buildings cilj uvođenja naprednog sustava upravljanja HVAC sustavom unutar zgrade Fakulteta elektrotehnike i računarstva je ušteda energije od najmanje 10%. U ovom radu razvija se i analizira strategija hijerarhijskog optimalnog upravljanja procesom grijanja i hlađenja u zgradama s ventilokonvektorskim aktuatorima za grijanje i hlađenje. Na višoj razini odlučuje se o optimalnim toplinskim tokovima za prostorije kako bi se održao željeni profil temperature u prostoriji, dok se na nižoj razini navedeni toplinski tokovi ostvaruju optimalnim upravljačkim akcijama na ventilokonvektore. Na obje razine u svrhu postizanja optimalnog vladanja sustava korišten je princip modelskog prediktivnog upravljanja (*eng. Model Predictive Control*).

MPC je napredna metoda za upravljanje procesima koja se često primjenjuje u industriji. Oslanja se na dinamički model procesa, najčešće je to linearni empirijski dobiven model. Prednost MPC regulatora nad klasičnim PID regulatorom je u korištenju budućih informacija pri donošenju trenutnih upravljačkih odluka (npr. predviđena vanjska temperatura ili solarno zračenje na vanjskim zidovima), baratanje sa sustavima s više ulaza i izlaza (MIMO), poštivanje ograničenja postavljenih nad sustavom upravljanja (maksimalna moguća snaga aktuatora za grijanje/hlađenje,

dozvoljena temperatura prostorije) i usmjerenost upravljačkih akcija ka krajnjem cilju upravljanja koji može biti minimizacija potrošnje energije i/ili ekvivalentne CO₂ emisije te samim time ušteda novca. Princip modelskog prediktivnog upravljanja toplinskim procesom je davanje upravljačkih signala temeljeno na trenutnim stanjima procesa x_k i predikciji budućih poremećaja d_k . Sam MPC regulator uzima u obzir ograničenja snage aktuatora za grijanje i hlađenje i ograničenja postavljena nad određenim stanjima za vrijeme proračuna optimalnih upravljačkih signala koji osiguravaju minimalnu potrošnju energije. Upravo ta karakteristika ih najviše razlikuje od standardnih regulatora. Budući da se vanjski vremenski uvjeti (poremećaji za planirani sustav upravljanja) mogu u budućnosti odrediti samo s određenim granicama nesigurnosti, tj. stohastički, razvija se i analizira strategija stohastičkog modelskog prediktivnog upravljanja (SMPC) koja ima sve karakteristike determinističkog MPC-a te dodatno u obzir uzima nesigurnost (stohastičku prirodu) poremećaja koji djeluju na proces. Uvođenjem slučajnih poremećajnih varijabli s Gaussovom funkcijom gustoće razdiobe u sintezu regulatora, za razliku od determinističkog principa, ograničenja mogu biti ispunjena samo s određenom vjerojatnošću. Na taj način sama strategija postaje bliža realnim sustavima koji su puni nelinearnosti i nesigurnosti te nas uvodi u kompleksnost efikasnog upravljanja toplinskim procesima u zgradarstvu. Verifikacija strategije provedena je nad toplinskim modelom triju prostorija Fakulteta elektrotehnike i računarstva. Kako bi sustav bio što bliže realnom sustavu, sustav grijanja i hlađenja i sami aktuatori modelirani su sukladno izvedbi sustava grijanja i hlađenja u spomenutim prostorijama.

Rad je strukturiran u dva dijela. Prvi dio govori o modeliranju toplinskih procesa u zgradama, modeliranju aktuatora i problemima koji postoje na navedenim područjima. Drugi dio opisuje postupke sinteze hijerarhijskog optimalnog upravljanja i donosi rezultate i potvrdu ove strategije uštede energije kroz simulacije u različitim vremenskim uvjetima.

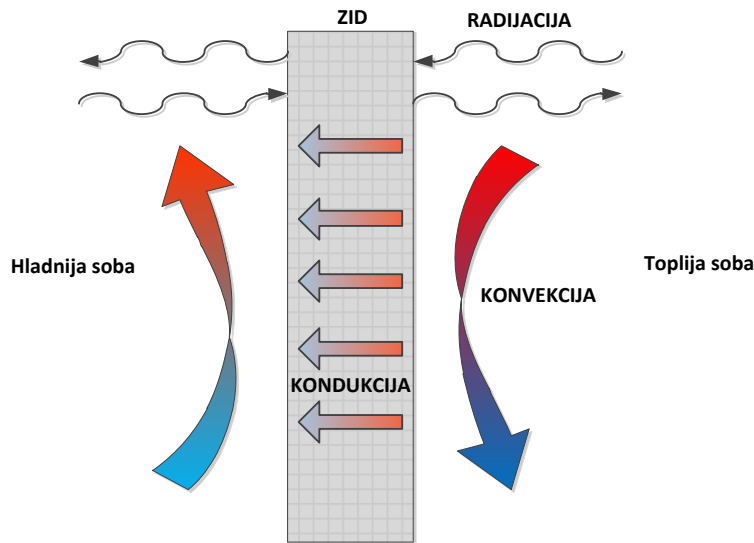
Modeliranje termodinamičkih procesa

Toplina je energija koja zbog razlike temperatura prelazi iz područja više u područje niže temperature. Glavni principi rasprostiranja topline su:

1. vođenje (kondukcija),
2. prijenos (konvekcija),
3. zračenje (radijacija).

Ako u nekom sredstvu postoji temperaturna razlika, toplinska će energija kondukcijom prelaziti s mjesta više temperature prema mjestu niže temperature. U fluidima (tekućinama i plinovima) toplina se obično prenosi konvekcijom. Za razliku od kondukcije topline gdje se prijenos topline ostvaruje molekularnim gibanjem, a samo sredstvo je na miru, pri prenošenju topline konvekcijom giba se i samo sredstvo. Zato je konvekcija moguća samo u tekućinama i plinovima. Kondukcija topline u plinovima dolazi do izražaja samo ako nije moguć prijenos topline konvekcijom. Pri prijenosu topline zračenjem, termička energija tijela pretvara se u elektromagnetsko zračenje koje tijelo emitira u okolni prostor. Energija koja se zračenjem prenosi od jednog tijela do drugog znatno ovisi o temperaturi tijela. Svako tijelo ugrijano na neku temperaturu emitira toplinsko zračenje čiji sastav i energija bitno ovise o temperaturi tijela.

Na Slici 2.1 nalazi se prikaz izmjene toplinskih tokova između dvije prostorije na primjeru jednog zida. Zrak u toplijoj sobi kondukcijom predaje toplinu zidu, hladi se i pada na tlo. Zbog razlike temperatura zraka dolazi do konvekcije zraka u prostoriji. Zbog razlike temperatura unutar zida dolazi do kondukcije topline.



Slika 2.1: Prikaz toplinskih tokova unutar zgrade na jednom zidu.

U hladnijoj sobi zid kondukcijom predaje energiju zraku stvarajući pritom razliku temperatura i izazivajući konvekciju. Zagrijani zrak se diže, a na njegovo mjesto dolazi hladan zrak s poda. Radi jednostavnosti pretpostavlja se da su svi toplinski tokovi unutar zgrade jednodimenzionalni. Fourierov zakon vođenja topline iskazuje da je vremenska učestalost (tj. brzina) prijenosa topline kroz materijal proporcionalna negativnom gradijentu temperature te površini pod pravim kutom, na taj gradijent, kroz koju toplina protječe:

$$H_{cd} = -k \oint_A \nabla T dS, \quad (2.1)$$

pri čemu je H_{cd} konduksijski toplinski tok, k provodljivost materijala, A površina kroz koju se prenosi toplina i T temperatura. Ako se pretpostavi jednolika raspodjela temperatura duž jednakih površina savršeno izoliranih strana, Fourierov zakon vođenja topline može se zapisati kao:

$$H_{cd} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (2.2)$$

Za rasprostiranje topline od fluida na kruto tijelo i obratno relacija (2.2) može se nadomjestiti relacijom:

$$H_{cd} = -hA \Delta T, \quad (2.3)$$

gdje je h provodljivost materijala, a ΔT temperaturna razlika između medija koji izmjenjuju toplinu. Kao što je ranije spomenuto u fluidima se toplina uglavnom prenosi

strujanjem ili konvekcijom. Konvekcijski toplinski tok definira se kao:

$$H_{cv} = Qc_pT, \quad (2.4)$$

pri čemu je Q maseni protok fluida, c_p specifični toplinski kapacitet fluida i T apsolutna temperatura fluida. Rasprostiranje topline zračenjem može se odrediti prema Stefan-Boltzmanovom zakonu koji za idealno crno tijelo glasi:

$$H_r = \sigma AT^4, \quad (2.5)$$

gdje je σ Stefan-Boltzmanova konstanta. Energija pohranjena u nekom tijelu u jedinici vremena definirana je kao:

$$H = \rho c_p V \frac{dT}{dt}, \quad (2.6)$$

tj. uzimajući u obzir relaciju $m = \rho V$,

$$H = c_p m V. \quad (2.7)$$

Ukupna promjena toplinske energije nekog tijela u jedinici vremena jednaka je ukupnoj bilanci kondukcijskih, konvekcijskih i radijacijskih tokova:

$$m c_p \frac{dT}{dt} = \sum (H_{cd} + H_{cv} + H_r). \quad (2.8)$$

2.1 Električna analogija toplinskih tokova

Toplinski procesi mogu se prikazati pomoću električnih krugova, točnije pomoću RC mreže. Analogija je prikazana u Tablici (2.1):

Tablica 2.1: Električna analogija toplinskih krugova.

	Električna mreža	Toplinski procesi
Napon	Napon [V]	Temperatura [K]
Tok	Struja [A]	Toplinski tok [W]
Otpor	Električni otpor [Ω]	Toplinski otpor [K/W]
Kapacitet	Električni kapacitet [F]	Toplinski kapacitet [J/K]
Induktivitet	Električni induktivitet [H]	/

Kao što je vidljivo iz tablice kod toplinskih procesa ne postoji toplinski induktivitet koji bi odgovarao induktivitetu u električnim krugovima ili tromosti u mehaničkim krugovima. Toplinski otpor je definiran kao omjer promjene napora i promjene toka. Toplinski otpor kod kondukcije između fluida i krutog tijela definiran je kao:

$$R = \frac{\Delta T}{\Delta H} = \frac{1}{hA}, \quad (2.9)$$

tj. kod kondukcije unutar nekog čvrstog tijela:

$$R \approx \frac{\Delta x}{kA}. \quad (2.10)$$

Toplinski kapacitet definiran je kao omjer promjene pohranjene veličine (PV) i promjene napora:

$$C = \frac{\Delta PV}{\Delta T}, \quad (2.11)$$

pohranjena veličina definirana je kao vremenski interval toka:

$$\Delta PV = \int H dt = \int mc_p \frac{dT}{dt} dt = mc_p \Delta T, \quad (2.12)$$

iz čega slijedi:

$$C = mc_p. \quad (2.13)$$

2.2 Modeliranje toplinskih procesa u zgradarstvu

Za implementaciju hijerarhijskog optimalnog upravljanja sustavom grijanja i hlađenja odabrane su tri prostorije unutar Fakulteta elektrotehnike i računarstva. Matematički model odabranog sustava dobiva se korištenjem principa rasprostiranja topline i analogije toplinskih procesa s električnim krugovima. Da bi se dobio termalni model zgrade potrebno je modelirati pojedine dijelove koji sačinjavaju zgradu poput zidova i prozora. Korištenjem principa rasprostiranja topline i jednadžbi očuvanja energije dobiva se konačni toplinski model zgrade.

2.2.1 Modeliranje zidova i prozora

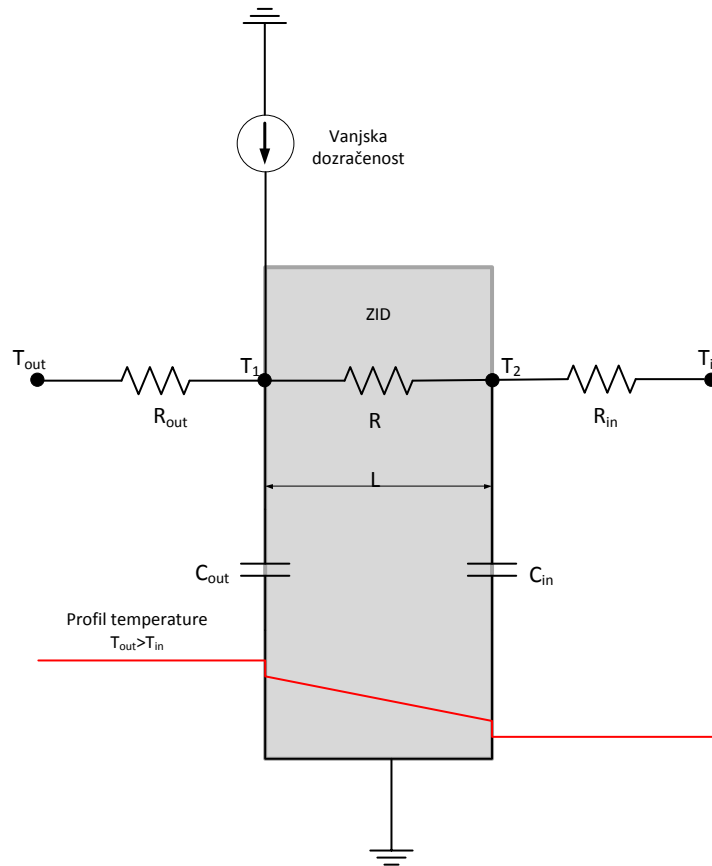
Svaki zid sastoji se od nekoliko slojeva različitih materijala. Ti materijali sa svojim toplinskim svojstvima definiraju toplinska svojstva zida te na taj način utječu na temperaturu unutar prostorije. U današnje vrijeme kada se sve više osjeća potreba za smanjenjem utroška električne energije veoma je važan pravilan odabir građevinskih materijala i dobra toplinska izolacija u zgradama. Toplinska izolacija zgrada smanjuje toplinske gubitke zimi, pregrijavanje prostora ljeti te štiti nosivu konstrukciju od vanjskih uvjeta i velikih temperaturnih naprezanja. Na Slici 2.2 prikazana je električna analogija prijenosa topline kroz zid uz pretpostavku da se zid sastoji od samo jednog materijala. Toplinski otpori R_{out} i R_{in} predstavljaju toplinske otpore usred kondukcije između fluida i krutog tijela (vanjsko i unutarnje lice zida). Kapaciteti C_{out} i C_{in} predstavljaju toplinski kapacitet zida. Naponi na kondenzatorima predstavljaju temperature vanjskog, tj. unutarnjeg lica zida. Crvenom bojom označen je profil temperature za slučaj kada je vanjska temperatura T_{out} veća od unutarnje temperature T_{in} . Prema ranijim definicijama vrijedi:

$$R_{out} = \frac{1}{h_{out}A}, \quad R_{in} = \frac{1}{h_{in}A}, \quad R = \frac{L}{kA}, \quad (2.14)$$

$$C_{out} = C_{in} = \frac{\rho L A c_p}{2}. \quad (2.15)$$

pri čemu je A površina zida, a h_{out} i h_{in} koeficijenti provodljivosti zraka na vanjskom odnosno unutarnjem licu zida. U slučaju da se toplinski model zida s više slojeva želi prikazati pomoću ovakve analogije, tj. korištenjem samo dvaju kondenzatora, ukupni toplinski konvekcijski otpor R definiran je kao:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \frac{L_1}{k_1A} + \frac{L_2}{k_2A} + \dots + \frac{L_n}{k_nA} = \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_iA}, \quad (2.16)$$



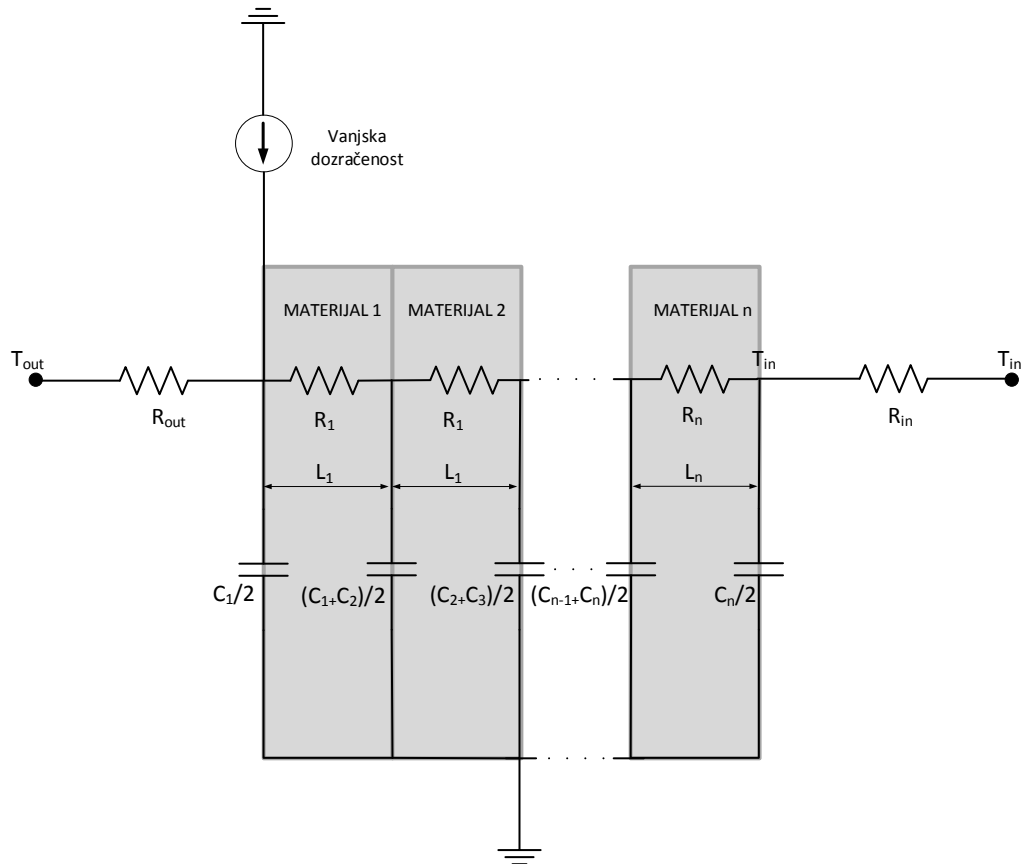
Slika 2.2: RC analogija prijenosa topline kroz zid.

pri čemu su L_i i k_i debljina i toplinska vodljivost pojedinih materijala koji sačinjavaju zid. Analogno vrijedi i za kapacitete:

$$C_{out} = C_{in} = \frac{A \sum_{i=1}^2 L_i \rho_i c_{p,i}}{2}. \quad (2.17)$$

Ovisno o željenoj točnosti modela mogu se koristiti modeli s više kondenzatora, pri čemu se svaki sloj unutar zida može prikazati pomoću posebnog kondenzatora (Slika 2.3). Na ovaj način povećava se točnost modela ali se istovremeno povećava i složenost, što za primjene u upravljanju nije poželjno. Matematički zapis RC reprezentacije prijenosa topline kroz zid mreže može se zapisati pomoću sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} C_{out} \frac{dT_1}{dt} &= h_{out} A (T_{out} - T_1) + \frac{T_2 - T_1}{R} + P_i, \\ C_{in} \frac{dT_2}{dt} &= h_{in} A (T_{in} - T_2) + \frac{T_1 - T_2}{R}, \end{aligned} \quad (2.18)$$



Slika 2.3: RC analogija prijenosa topline kroz zid - primjer višeslojnog zida.

pri čemu su T_1 i T_2 temperatura vanjskog i unutarnjeg lica zida, a P_i vanjska dozračenost zida. Navedeni zapis može se prebaciti u zapis u prostoru stanja, pri čemu su stanja \mathbf{x} temperature vanjskog i unutarnjeg lica zida:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}' \quad (2.19)$$

Ulazi \mathbf{u} u sustav su vanjska temperatura T_{out} , unutarnja temperatura T_{in} i dozračenost zida:

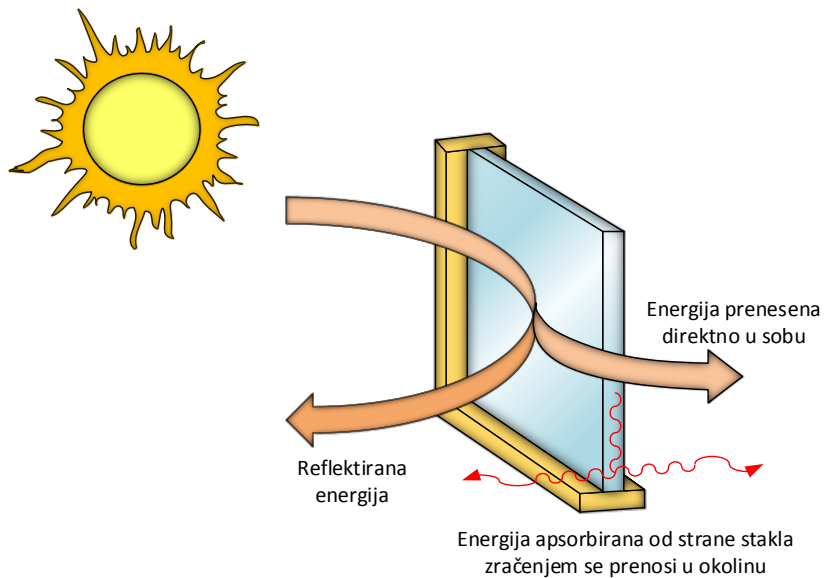
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T_{out} & T_{in} & P_i \end{bmatrix}' \quad (2.20)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_{out}} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{out}} \right) & \frac{1}{RC_{out}} \\ \frac{1}{RC_{in}} & -\frac{1}{C_{in}} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{in}} \right) \end{bmatrix},$$

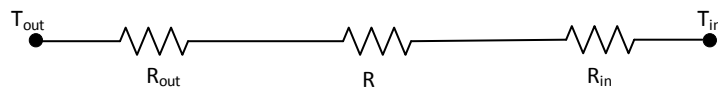
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{out}C_{out}} & 0 & \frac{1}{C_{out}} \\ 0 & \frac{1}{R_{in}C_{in}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Na navedeni način modelirani su toplinski tokovi do kojih dolazi uslijed konvekcije i kondukcije. Svaki zid zagrijan je na neku temperaturu, stoga dolazi do stvaranja radijacijskih tokova. Radijacijski tokovi između zidova veoma su malog iznosa pa ne utječu znatno na dinamiku sustava, te će stoga u nastavku rada biti zanemareni [15]. Dozračenost zida ima veliki utjecaj na temperaturu vanjskog lica zida, a samim time i na temperaturu unutar prostorije. Za razliku od zidova kod kojih se dio dozračenosti reflektira a dio utroši na zagrijavanje vanjskog lica zida, kod prozora se energija koja nije reflektirana prenosi direktno u sobu (Slika 2.4). Postotak apsorbirane energije i



Slika 2.4: Prijenos toplinske energije kroz prozor.

energije koja direktno ulazi u sobu ovisi o vrsti prozora. Gubici energije kroz prozore mogu sačinjavati i do 50% ukupnih gubitaka energije, pa je stoga veoma važno posvetiti pozornost energetskej efikasnosti prozora. Da bi se sačuvala jednostavnost modela prozori su modelirani samo pomoću otpora (Slika 2.5). Zbog veoma malog iznosa toplinskog kapaciteta kojeg prozori posjeduju, njihov toplinski kapacitet je zanemaren [15].



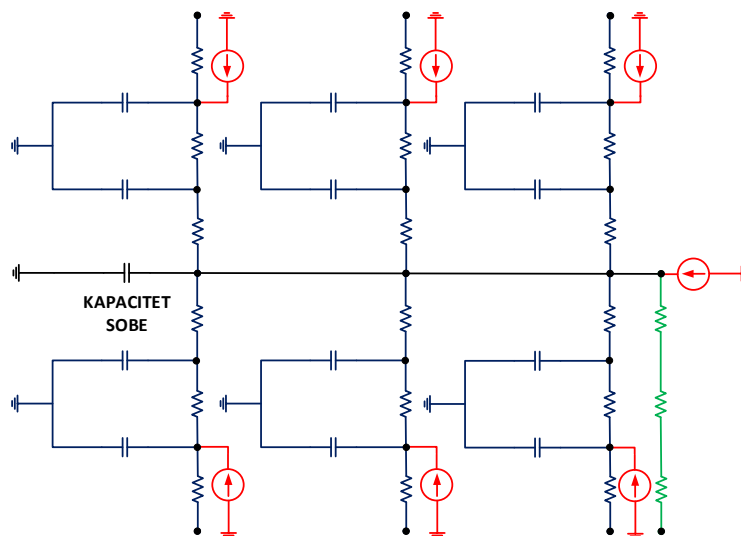
Slika 2.5: RC analogija prijenosa topline kroz prozor.

2.2.2 RC analogija toplinskih procesa unutar jedne prostorije

Soba, tj. zrak u sobi prikazuje se pomoću jednog kapaciteta C_{room} :

$$C_{room} = \rho_a V_{room} c_a = m_a c_a. \quad (2.23)$$

Na Slici 2.6 prikazana je RC analogija toplinskih procesa unutar jedne prostorije. Vanjski konektori predstavljaju temperature okolnih prostorija, tj. vanjsku temperaturu ako se radi o vanjskom zidu. Plavom bojom označeni su zidovi, zelenom

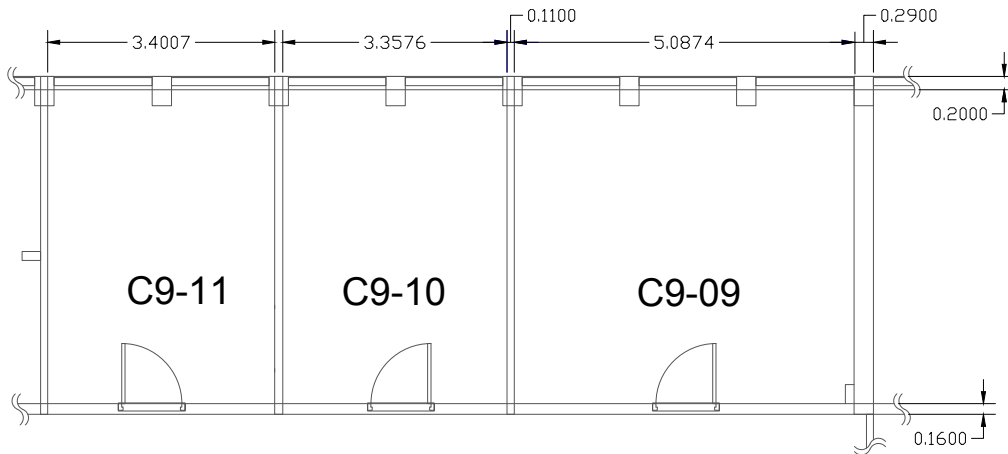


Slika 2.6: RC analogija prijenosa topline unutar jedne sobe.

prozori, a crvenom dodatni toplinski tokovi (sunčeva dozračenost, grijanje/hlađenje prostora). Ovisno da li se radi o vanjskim ili unutarnjim toplinskim tokovima, dodatni toplinski tokovi spajaju se na vanjski kondenzator zida ili unutarnji kondenzator koji predstavlja sobu. Na Slici 2.6 ilustrativno vanjski toplinski tokovi prikazani su na svakom zidu, što kao i postojanje dodatnih unutarnjih toplinskih tokova nije nužno.

2.2.3 Toplinski model zgrade

Za implementaciju hijerarhijskog optimalnog upravljanja sustavom grijanja i hlađenja odabrane su tri prostorije unutar Fakulteta elektrotehnike i računarstva. Prostorije koje se modelira prikazane su na Slici 2.7. Matematički model prikazanog sustava dobiven



Slika 2.7: Nacrt prostorija koje se modeliraju.

korištenjem analogije RC mreže s toplinskim procesima razvijen je u programskom alatu MATLAB/Simulink. Nakon razvijenog RC modela, navedeni model opisan je pomoću prikaza u prostoru stanja:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{35}$ sadrži temperature svih vanjskih i unutarnjih lica zidova te temperature prostorija, vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{13}$ sastoji se od ulaza u model: vanjske temperature, temperatura koje definiraju rubne uvijete odabranih triju prostorija (temperature susjednih soba, temperature gornjeg i donjeg kata), dozračenosti vanjskih zidova i dozračenosti koja ulazi u prostorije kroz prozore te dodatnih unutarnjih toplinskih tokova poput sustava grijanja/hlađenja. Matrica sustava \mathbf{A} i ulazna matrica \mathbf{B} su prikladno

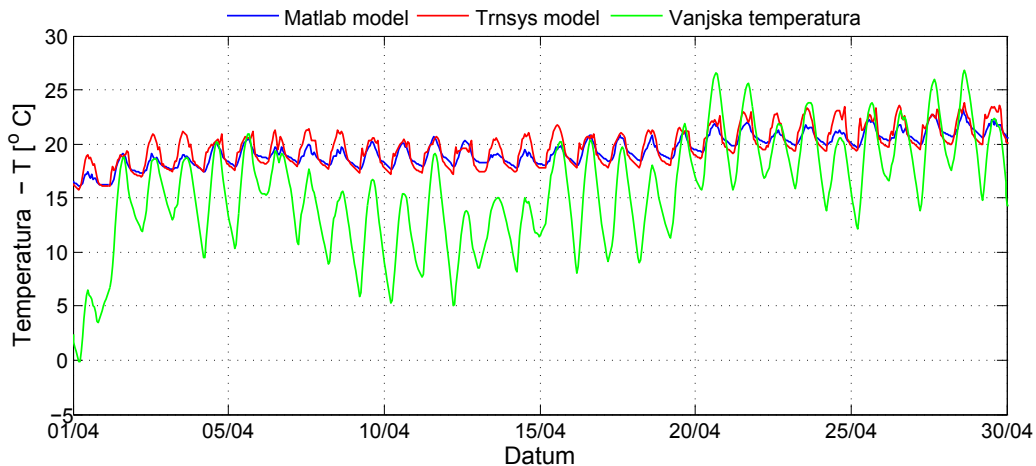
dimenzionirane matrice koje definiraju toplinski sustav:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{35 \times 35}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{35 \times 13}, \quad (2.25)$$

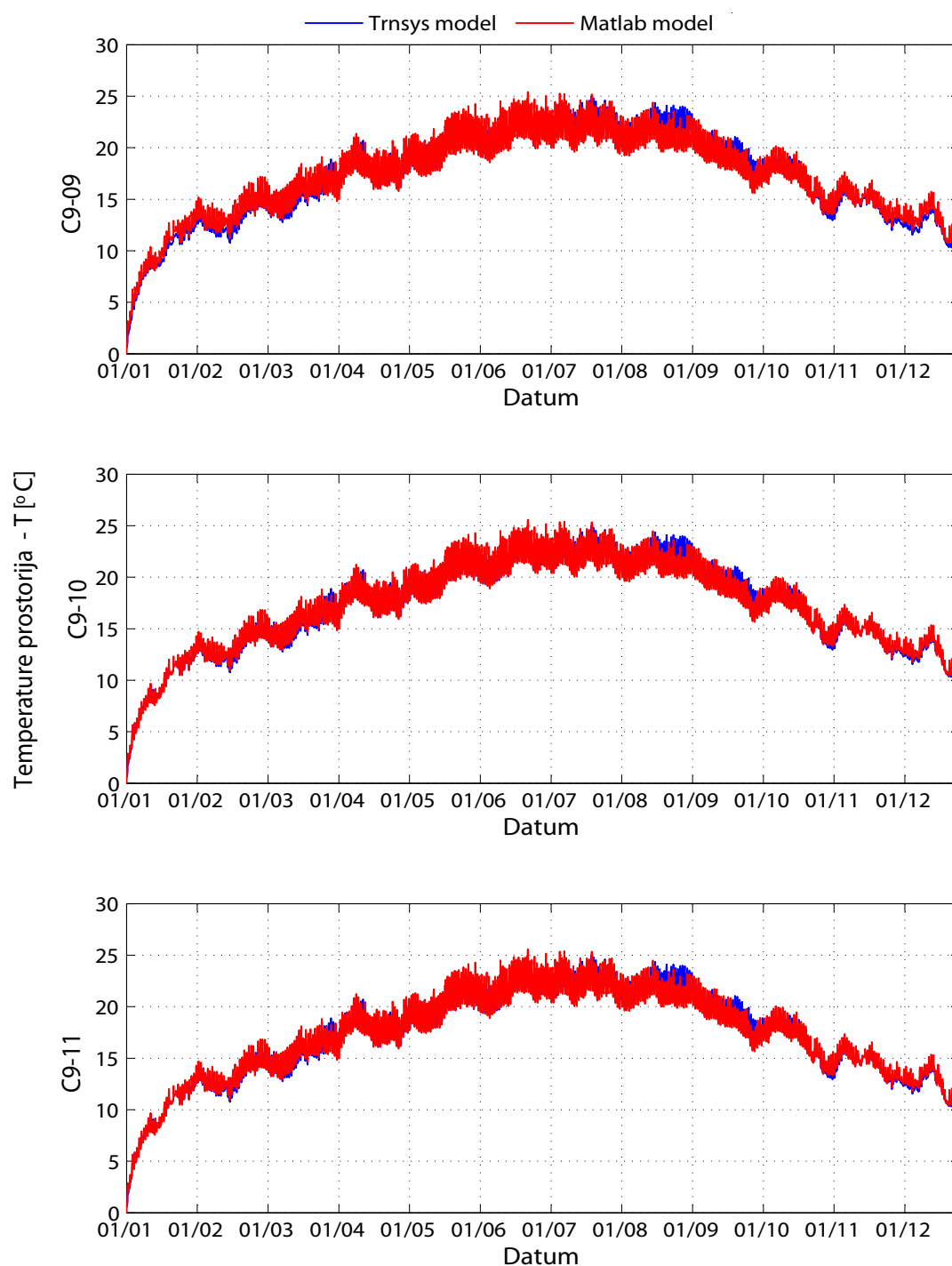
Izlazna jednadžba je, uz izlaze definirane kao $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p \times 35}$, pri čemu je p broj izlaza iz sustava, definirana pomoću matrica \mathbf{C} i \mathbf{D} pri čemu je:

$$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times 35}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times 13}. \quad (2.26)$$

Radi provjere točnosti modela, model istih prostorija razvijen je i u programskom paketu TRNSYS [14]. TRNSYS je programski paket koji se koristi za modeliranje i simuliranje različitih sustava koji uključuju prijenos topline, vjetra, vlage itd. Detaljne informacije o programskom paketu TRNSYS kao i detaljne upute za korištenje mogu se pronaći u [15]. Na Slici 2.9 prikazana je usporedba odziva toplinskog modela zgrade modeliranog u MATLAB-u i odziva toplinskog modela zgrade modeliranog u TRNSYS-u. Oba odziva snimljena su na iste meteorološke podatke. Meteorološki podaci uzeti su iz TRNSYS-a i odgovaraju podacima mjerenima za geografsku lokaciju Zagreb. Na Slici 2.8 nalazi se uvećani prikaz odziva temperature sobe C9-10 tijekom mjeseca travnja. Do razlike između modela dolazi zbog zanemarivanja radijacije među zidovima kod modela implementiranog u MATLAB-u, kao i pojednostavljenog prikaza prozora. Iz prikazane usporedbe može se zaključiti da model realiziran u MATLAB-u zadovoljavajuće dobro opisuje dinamiku sustava te je pogodan za daljnju sintezu optimalnog upravljanja.



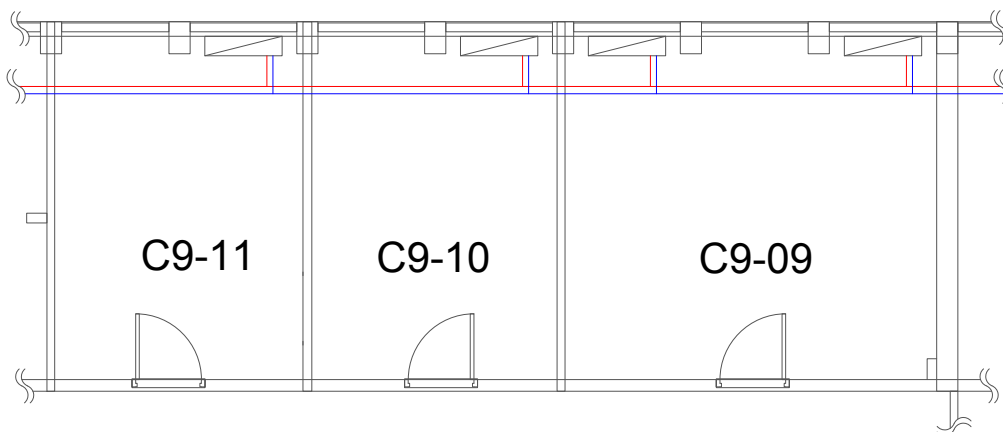
Slika 2.8: Usporedba odziva MATLAB i TRNSYS modela.



Slika 2.9: Usporedba odziva MATLAB i TRNSYS modela.

Modeliranje sustava centralnog grijanja

Načelna shema izvedbe sustava centralnog grijanja unutar odabranih prostorija prikazana je na Slici 3.1. Sustav se sastoji od četiri ventilokonvektora, po jedan u svakoj od manjih prostorija te dva u većoj prostoriji. Svi ventilokonvektori su istog tipa i imaju ventilator s tri moguće brzine rada. Radi se o dvocjevnom sustavu centralnog grijanja te stoga postoje dva režima rada: ljetni i zimski. Tijekom ljetnog režima rada sustav se iz rashladne stanice opskrbljuje vodom konstantne temperature $7\text{ }^{\circ}\text{C}$. Tijekom zimskog režima rada sustav se opskrbljuje vodom iz kotlovnice pri stalnoj temperaturi od $60\text{--}70\text{ }^{\circ}\text{C}$.

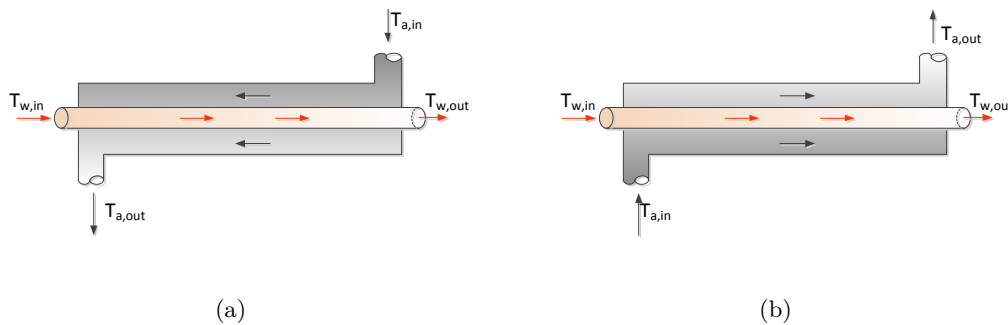


Slika 3.1: Načelna shema izvedbe sustava centralnog grijanja.

3.1 Izmjenjivači topline

Izmjenjivači topline su uređaji u kojima se izmjenjuje toplina između dva ili više medija (fluida) radi zagrijavanja ili hlađenja jednog medija drugim. Upotreba izmjenjivača topline veoma je rasprostranjena, od kućnih grijača i hladnjaka, automobilskih rashladnika, industrijskih izmjenjivača, HVAC sustava, itd. Osnovna podjela izmjenjivača topline je na rashladnike i grijače.

Najčešća konfiguracija izmjenjivača topline su izmjenjivači kod kojih su struje, odnosno fluidi razdvojeni međusobno čvrstom stjenkom. Razdjelna stjenka služi kao rashladna, odnosno ogrjevna površina, koja može biti pločastog ili cijevnog oblika. Osnovna je karakteristika konstrukcije izmjenjivača topline uzajamna geometrija fluida koji izmjenjuju toplinu. Najopćenitije konfiguracije izmjenjivača topline su paralelni protusmjerni i istosmjerni izmjenjivač topline (Slika 3.2). Kod protusmjernog

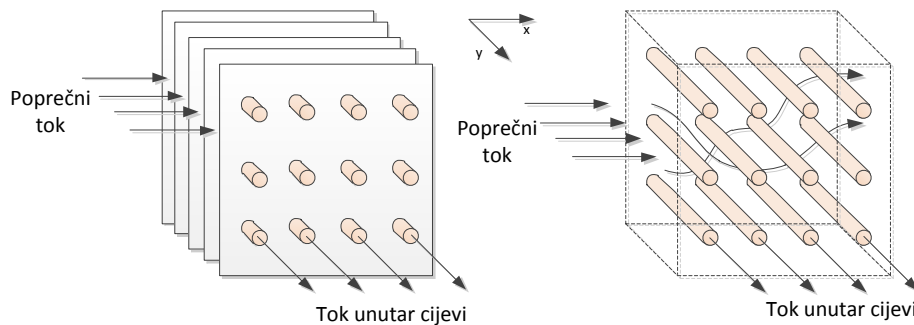


Slika 3.2: Paralelno (a) protustrujni i (b) istostrujni izmjenjivač topline.

izmjenjivača topline dva fluida struje paralelno, ali u suprotnim smjerovima (3.2.a). Kod istosmjernog izmjenjivača fluidi struje međusobno paralelno u istom smjeru. Jedan fluid struji kroz unutrašnju cijev a drugi kroz prstenasti prostor između dvije cijevi. Fluidi ulaze i izlaze na suprotnim krajevima. U praksi se unutar jedne cijevi velikog promjera (plašta) nalazi značajan broj manjih cijevi. Protusmjerni je izmjenjivač najefikasniji, pošto osigurava najbolju iskoristivost postojeće temperaturne razlike te se tako može postići najveća promjena temperature svakog od fluida.

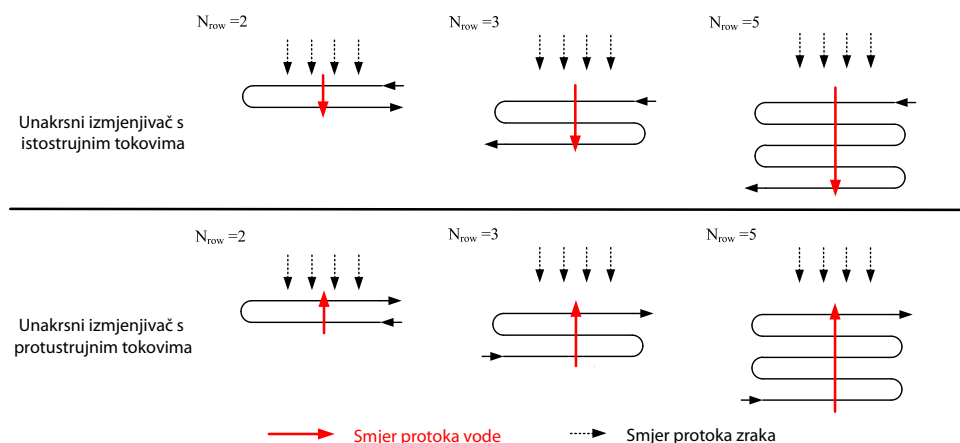
Kod izmjenjivača topline s unakrsnim tokom dva fluida struje pod pravim kutom jedan spram drugoga. Shematski prikaz dvije varijante unakrsnog izmjenjivača topline dan je na Slici 3.3. Unakrsno strujanje može se razlikovati s obzirom na to da li kod prolaza fluida kroz izmjenjivač dolazi do miješanja u nekom od fluida, ili je omogućen protok u samo jednom smjeru. Primjer unakrsnog izmjenjivača kod kojeg ne dolazi

do miješanja fluida prikazan ja na Slici 3.3 (lijevo). Postavljanjem lamela na cijevi sprječava se strujanje zraka u y-smjeru. Kod stvarnih izmjenjivača topline konfiguracija



Slika 3.3: Unakrsni izmjenjivač topline s lameliranim i glatkim cijevima.

strujanja fluida često odgovara nekoj od idealiziranih shema prikazanih na Slici 3.4. Te se sheme klasificiraju kao unakrsne s protusmjernim ili istosmjernim tokovima, tj. s kombiniranim strujanjem. Broj prolaza pritom nije ograničen. Izmjenjivače topline s kombiniranim strujanjem fluida može se analizirati kao kompromis između zahtjeva za visokom efikasnošću i jednostavnom konstrukcijom. Što je veći broj prolaza to je izmjenjivač topline bliže po ekonomičnosti idealiziranim paralelnim protusmjernim i istosmjernim izmjenjivačima. Različite kombinacije idealiziranih tipova izmjenjivača topline mogu se javiti unutar stvarnih sustava izmjenjivača topline. Većina realnih izmjenjivača topline ima mješoviti protok fluida, no u velikom broju slučajeva mogu se tretirati sa stajališta dominantnog tipa protoka.



Slika 3.4: Izmjenjivači topline s kombiniranim strujanjem nosilaca topline.

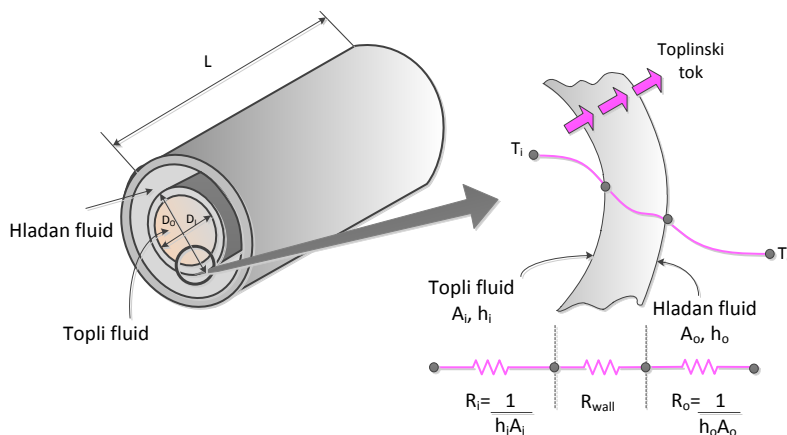
3.2 Ukupni koeficijent prijelaza topline

Najbitniji i često najnepouzdaniji dio svake analize izmjenjivača topline je određivanje ukupnog koeficijenta prijelaza topline (U). Ukupni koeficijent prijelaza topline može se definirati pomoću pojedinačnih toplinskih otpora kondukcije i konvekcije između dva ili više fluida koji su odvojeni jednom ili više stjenki.

Izmjenjivač topline najčešće se sastoji od sustava cijevi kroz koje protječe ogrjevni/rashladni medij. Ventilokonvektori se dodatno sastoje od jednog ili više ventilatora koji stvaranjem prisilne konvekcije poboljšavaju efikasnost prijenosa topline s ogrjevnog/rashladnog medija na zrak. Unutar sustava cijevi toplina se prenosi:

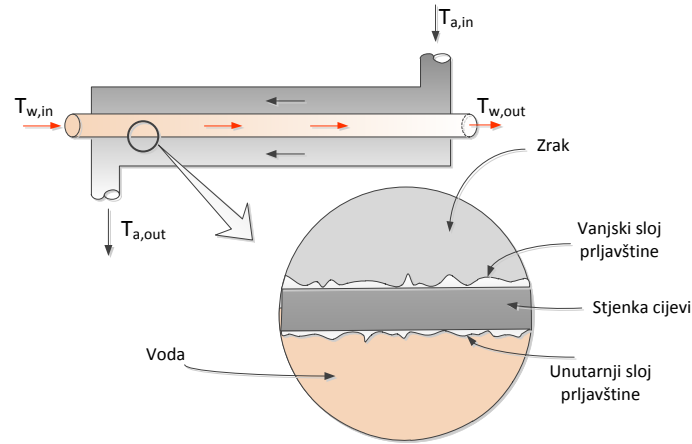
- s ogrjevnog/rashladnog medija na stjenke cijevi - konvekcija,
- kroz stjenku cijevi - kondukcija,
- sa stjenke na medij izvan cijevi - konvekcija.

Ukupni toplinski otpor sastoji se od dva konvekcijska toplinska otpora R_i i R_o i jednog kondukcijskog R_{wall} (Slika 3.5). Tijekom normalnog rada izmjenjivača topline, površine



Slika 3.5: Profil temperature kod izmjenjivača s okruglim cijevima.

se često onečišćavaju nečistoćama iz fluida, nastajanjem korozije i slično. Naslage koje na ovaj način nastaju na površini stjenke (Slika 3.6) mogu jako povećati otpor prijelazu topline između fluida. Taj se utjecaj može uzeti u obzir uvođenjem dodatnog otpora, nazvanog faktor zaprljanja R_f . Njegova vrijednost ovisi o radnoj temperaturi, brzini fluida te vremenu rada izmjenjivača. Često se radi povećanja efikasnosti izmjenjivači topline lameliraju, kako s vanjske tako i s unutarnje strane cijevi. Lameliranjem se



Slika 3.6: Stvaranje nečistoća na stjenkama cijevi.

povećava efektivna površina za prijenos topline i smanjuje se konvektivni otpor prijelaza topline. Uzimajući u obzir zaprljanje površine i povećanje ukupne površine (lameliranje) ukupni se koeficijent prijelaza topline može odrediti kao:

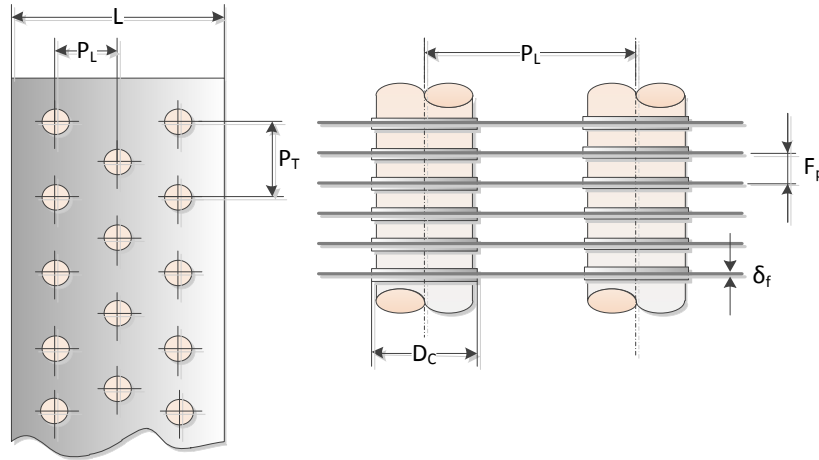
$$\frac{1}{UA} = \frac{1}{U_i A_i} = \frac{1}{U_o A_o} = \frac{1}{\eta_{0,i} h_i A_i} + \frac{R_{f,i}}{\eta_{0,i} A_i} + R_{wall} + \frac{R_{f,o}}{\eta_{0,o} A_o} + \frac{1}{\eta_{0,o} h_o A_o}, \quad (3.1)$$

pri čemu se indeksi i (in) i o (out) odnose na fluide izvan i unutar cijevi, A_i i A_o su ukupna unutarnja i vanjska efektivna površina, h označava koeficijent prijelaza topline a η_0 predstavlja ukupnu iskoristivost vanjske ili unutarnje površine. Faktor zaprljanja R_f za određene konkretne slučajeve može se pronaći u [6], obično poprima veoma male iznose od oko 0.0001-0.001 m²K/W.

Ako se radi o glatkim cijevima otpor provođenja topline R_{wall} određuje se prema poznatim jednadžbama za ravnu ili cilindričnu stjenku. Toplinski otpor cilindrične stjenke računa se prema sljedećoj formuli:

$$R_{wall} = \frac{\ln\left(\frac{D_o}{D_i}\right)}{2\pi k L}, \quad (3.2)$$

pri čemu je D_o vanjski, D_i unutarnji promjer cijevi, k je specifična provodljivost materijala od kojeg je cijev napravljena (obično bakar), a L dužina cijevi. Otpor provođenja topline često se može zanemariti ($R_{wall} \approx 0$) pošto se koriste tanke stjenke s visokom toplinskom vodljivošću (bakar $k=401$ W/(m·K)). Ukupni koeficijent prijelaza topline kod glatkih se površina računa uz $\eta_0 = 1$.



Slika 3.7: Geometrija lameliranog izmjenjivača topline sa šahovskim poretkom cijevi.

Kod lameliranih površina ukupni se kondukcijski otpor sastoji od toplinskog otpora stjenke cijevi R_{wall} i toplinskog otpora lamela R_{fin} (Slika 3.7). Prema Fourierovom zakonu vođenja topline, toplinski otpor jedne lamele $R_{fin,1}$ može se definirati kao:

$$R_{fin,1} = \frac{\sigma_f}{\eta_f k_f A_f}, \quad (3.3)$$

pri čemu je k_f toplinska provodljivost materijala od kojeg su lamele napravljene, η_f iskoristivost jedne lamele, A_f ukupna površina jedne lamele a σ_f je debljina lamele. Ukupni toplinski otpor svih N_f lamela može se zapisati kao:

$$R_{fin} = \frac{\sigma_f}{k_f A_f \eta_f N_f}, \quad (3.4)$$

Ukupna iskoristivost lamelirane površine definirana je kao:

$$\eta_0 = 1 - \frac{A_f}{A} (1 - \eta_f), \quad (3.5)$$

gdje je $A = A_b + A_f$ ukupna površina (površina cijevi plus površina lamela). Efikasnost lamele definirana je kao omjer stvarnog toplinskog toka kroz lamelu i maksimalnog toplinskog toka koji bi bio moguć kada bi temperatura cijele lamele bila jednaka temperaturi baze. Maksimalni mogući tok moguć je samo uz pretpostavku beskonačne toplinske vodljivosti lamela. Debljina lamela koje se koriste u izmjenjivačima topline veoma je mala, stoga se lamele za potrebe analize termodinamičkih procesa mogu smatrati jednodimenzionalnima. Efikasnost lamela može se odrediti kao funkcija

geometrije lamele, toplinske vodljivosti i koeficijenta prijelaza topline. Ako se koriste ravne lamele i šahovski raspored cijevi (Slika 3.7) efikasnost se može odrediti prema sljedećem izrazu [13], [17]:

$$\eta_f = \frac{\tanh(mr_i\theta)}{mr_i\theta}, \quad m = \sqrt{\frac{2h_o}{k_f\sigma_f}}. \quad (3.6)$$

$$\theta = \left(\frac{R_{eq}}{r_i} - 1\right) \left[1 + 0.35 \ln\left(\frac{R_{eq}}{r_i}\right)\right], \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{R_{eq}}{r_i}\right) = 1.27 \frac{X_M}{r_i} \left(\frac{X_L}{X_M} - 0.3\right)^{0.5}, \quad (3.8)$$

pri čemu je r_i unutrašnji polumjer cijevi, R_{eq} ekvivalentni radijus okruglih lamela, a X_M i X_L predstavljaju geometrijske parametre lamela (Slika 3.7):

$$X_L = \frac{\sqrt{(P_T/2)^2 + (P_L)^2}}{2}, \quad X_M = P_T/2. \quad (3.9)$$

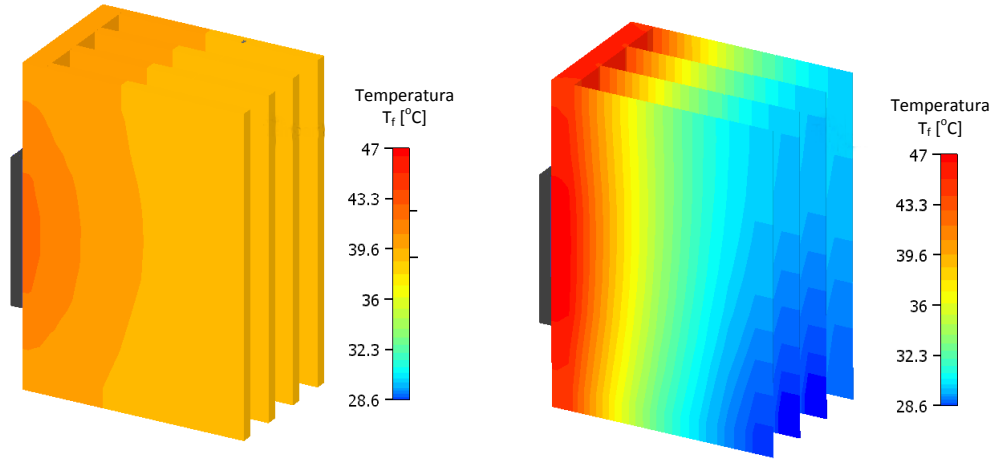
Tijekom procesa hlađenja može doći do kondenzacije vlage iz zraka na cijevima i lamelama. Kondenzacija se negativno odražava na efikasnost. Efikasnost lamela za vrijeme procesa hlađenja koji uključuje promjenu faze vlage iz zraka prema [19], [8] može se proračunati kao:

$$\eta_{f,wet} = \frac{2r_i}{m(r_o^2 - r_i^2)} \left[\frac{K_1(mr_i)I_1(mr_o) - K_1(mr_o)I_1(mr_i)}{K_1(mr_o)I_0(mr_i) + K_0(mr_i)I_1(mr_o)} \right], \quad (3.10)$$

$$r_o = \sqrt{\frac{P_T P_L}{\pi}}, \quad (3.11)$$

pri čemu su I_o i I_1 Besselove funkcije prve vrste, nultog i prvog reda, a K_o i K_1 Besselove funkcije druge vrste, nultog i prvog reda. Na Slici 3.8 prikazana je raspodjela temperature kroz lamele s visokom i niskom efikasnošću.

Postoji mnogo eksperimentalnih analiza kojima je cilj bio određivanje ovisnosti koeficijenta prijelaza topline o svojstvima fluida. U sustavima centralnog grijanja kao ogrjevnj/rashladni medij najčešće se koristi voda koja preko izmjenjivačke površine



Slika 3.8: Visokoeffikasne (lijevo) i niskoeffikasne (desno) lamele.

predaje ili oduzima toplinu zraku. Koeficijent prijelaza topline s vode na unutarnju stranu cijevi ($h_i = h_w$) prema [5] može se odrediti pomoću Gnielinski semiempirijske korelacije :

$$h_w = \left(\frac{k_w}{D_i} \right) \frac{(Re_w - 1000)Pr(f_w/2)}{1 + 12.7\sqrt{f_w/2}(Pr^{2/3} - 1)}, \quad (3.12)$$

pri čemu su faktor trenja f_w i Reynoldsov broj Re_w za vodu definirani kao:

$$f_w = (1.58\ln(Re_w) - 3.28)^{-2}, \quad Re_w = \frac{4Q_w}{D_i\pi\mu_i}. \quad (3.13)$$

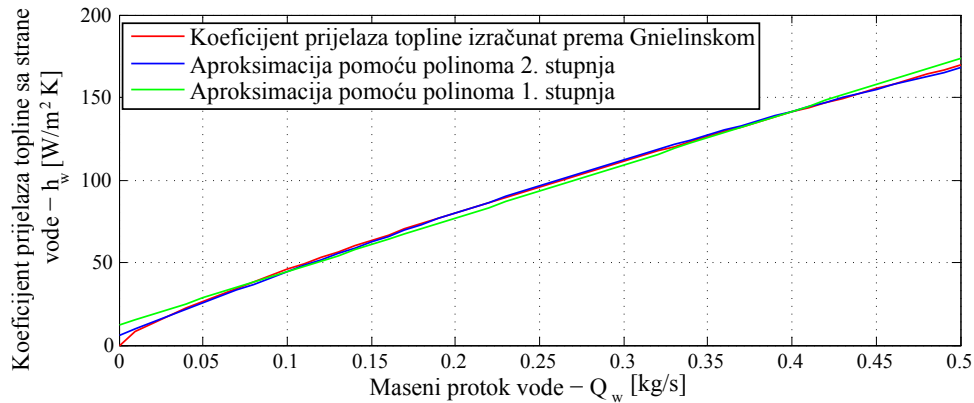
Reynoldsov broj je bezdimenzionalna veličina koja daje odnos inercijalnih i viskoznih sila. Može ga se definirati pomoću masenog protoka vode unutar cijevi Q_w , dinamičke viskoznosti vode μ_w i unutarnjeg promjera cijevi D_i . Prantlov broj Pr označava omjer momentne difuznosti (kinematičke viskoznosti) s obzirom na termalnu difuznost. Prantlov broj fluida definiran je kao:

$$Pr = \frac{c\mu}{k}, \quad (3.14)$$

pri čemu je c specifični toplinski kapacitet, k toplinska provodljivost, a μ dinamička viskoznost fluida. Dinamička viskoznost vode mijenja se u ovisnosti o temperaturi. Empirijska zakonitost koja opisuje ovisnost viskoznosti vode o njoj temperaturi glasi:

$$\mu_w = A \cdot 10^{B/(T_w - C)}, \quad A = 2.414 \cdot 10^{-5}, B = 247,8, C = 140, \quad (3.15)$$

temperatura vode T_w mora biti izražena kelvinima (K). Kako bi se kvantificirala ovisnost koeficijenta prijelaza topline h_w o iznosu masenog protoka vode kroz cijevi napravljena je analiza iznosa koeficijenta prijelaza topline pri različitim iznosima masenog protoka vode u intervalu od 0 do 0.5 kg/s (Slika 3.9). Specifični toplinski kapacitet vode pretpostavljen je konstantnim, temperatura vode je postavljena na konstantan iznos $T_w = 25$ °C. U svrhu pojednostavljenja modela, unutar poznatih



Slika 3.9: Ovisnost koeficijenta prijelaza topline h_w o masenom protoku vode.

raspona temperature i masenog protoka vode, ovisnost koeficijenta prijelaza topline h_w o temperaturi i brzini može se aproksimirati polinomima ili ako se radi o malim promjenama pretpostaviti se konstantnom. Sa Slike 3.9 se vidi da se dobra aproksimacija postiže već korištenjem polinoma prvog stupnja.

Analitičke relacije za strujanje kroz necilindrične presjeke su veoma rijetke ili za neke oblike presjeka ni ne postoje. Izrazi koji opisuju strujanje zraka kroz izmjenjivač topline, uglavnom su empirijski, tj. dobiveni kao rezultat ispitivanja različitih konfiguracija izmjenjivača topline. Efikasnost izmjenjivača sa strane zraka, tj. proračun ukupnog koeficijenta prijelaza topline sa strane zraka ($h_o = h_a$) može se provesti pomoću Colburnovog faktora j . Postoje mnoga istraživanja na bazi određivanja Colburnovog faktora za različite konfiguracije izmjenjivača topline [16], [18]. U radu [16] dobiven je eksperimentalni iznos Colburnova faktora za izmjenjivače topline sa ravnim lamelama i okruglim cijevima :

$$j = 0.394 Re_o^{-0.392} \left(\frac{\sigma_f}{D_c} \right)^{-0.0449} N^{-0.0847} \left(\frac{F_p}{D_c} \right)^{-0.212}, \quad (3.16)$$

pri čemu je D_c promjer obujmice lamele, a N predstavlja broj redaka cijevi unutar izmjenjivača topline. Uz poznat iznos Colburnovog faktora, ukupni koeficijent prijelaza

toplina može se definirati pomoću sljedećih izraza:

$$h_a = \frac{N_u k_a}{D_h}, \quad N_u = j Re_a Pr^{1/3}, \quad (3.17)$$

D_h je hidraulički promjer izmjenjivača topline. Hidraulički promjer predstavlja iznos ekvivalentnog promjera cijevi cilindričnog presjeka i omogućuje da se proračun relacija vezanih za strujanje može provesti kao da se radi o cilindričnim cijevima ili tunelima. Ekvivalentni hidraulički promjer izmjenjivača topline definiran je sljedećim izrazom [7]:

$$D_h = \frac{4(F_p - \sigma_f)(P_T - D_c)P_L}{2(P_T P_L - \pi D_c^2/4) + \pi D_c(F_p - \sigma_f)}. \quad (3.18)$$

Nusseltov broj N_u je bezdimenzionalna veličina koja predstavlja omjer konvekcijskog i kondukcijskog prijelaza topline preko neke granice. Reynoldsov broj definiran je kao i sa strane ogrjevnog/rashladnog medija:

$$Re_a = \frac{Q_a D_c}{A_{fr} \mu_a}, \quad (3.19)$$

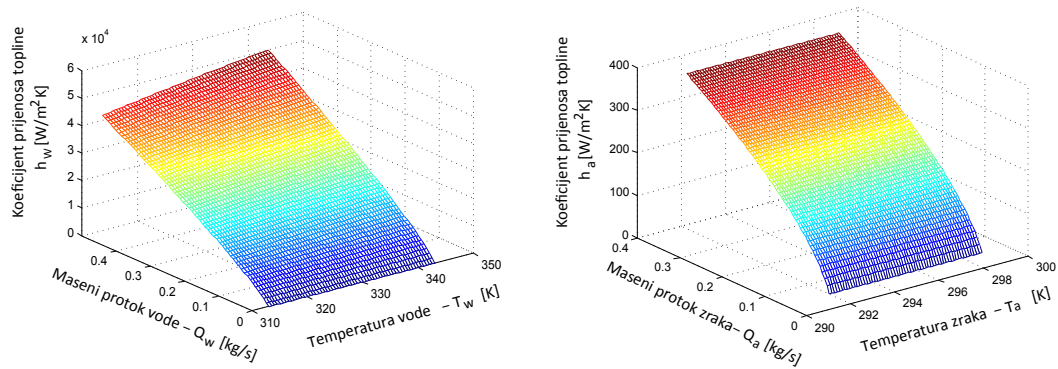
pri čemu je Q_a maseni protok zraka, A_{fr} površinski presjek kroz kojeg zrak struji, μ_a je dinamička viskoznost zraka. Dinamička viskoznost zraka mijenja se s temperaturom zraka T_a . Navedena ovisnost može se aproksimirati sljedećim izrazom:

$$\mu_a = 1.458 \cdot 10^{-6} \frac{T_a^{3/2}}{T_a + 110.4}. \quad (3.20)$$

Prandtllov broj definiran je kao i sa strane vode. Pomoću navedenih formula ukupni toplinski koeficijent prijelaza topline sa strane zraka može se definirati kao:

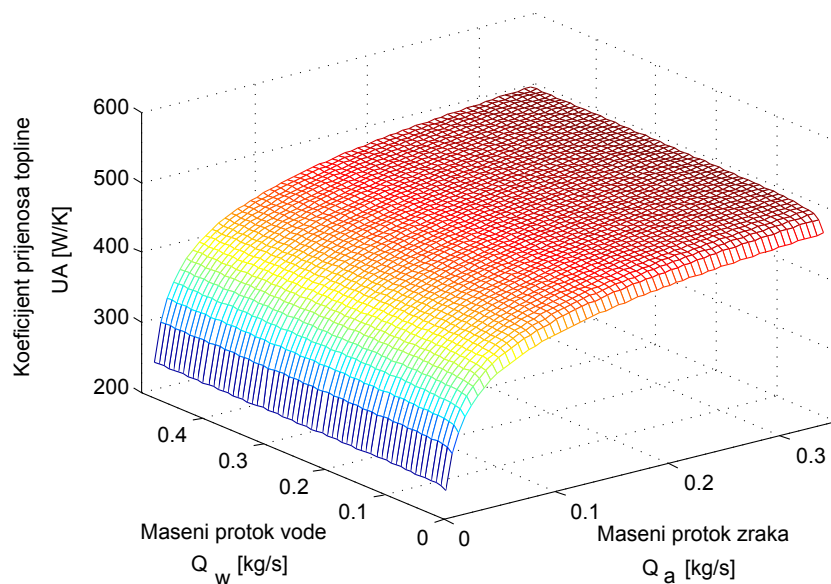
$$h_a = \frac{j Re_a Pr^{1/3} k_a}{D_h}. \quad (3.21)$$

S obzirom da su navedeni izrazi za određivanje koeficijenata prijelaza topline sa strane zraka i vode (h_a , h_w) veoma nelinearni, ispitani su njihovi iznosi u pretpostavljenom intervalu kretanja temperature zraka T_a i ogrjevnog medija T_w , te u pretpostavljenom intervalu kretanja protoka zraka Q_a i ogrjevnog medija Q_w . Geometrijska svojstva lamela i izmjenjivača topline utvrđena su mjerenjima na stvarnom ventilokonvektoru smještenom u knjižnici Zavoda za automatiku i računalno inženjerstvo. Radi se o ventilokonvektoru proizvođača Trane (FCC 060). Na Slici 3.10 prikazani su dobiveni iznosi koeficijenata prijelaza topline pri različitim iznosima protoka i temperatura. Sa Slike 3.10 može se primijetiti da koeficijent prijelaza topline h_w sa strane vode pri većim protocima ovisi linearno o temperaturi, dok koeficijent prijelaza topline sa strane zraka h_a uopće ne ovisi o temperaturi zraka. Kako bi se nadalje kvantificirala



Slika 3.10: Ovisnost koeficijenta prijelaza topline o protocima i temperaturama.

ovisnost ukupnog koeficijenta prijelaza topline po površini UA u ovisnosti o ulaznim protocima i temperaturama, ispitana je promjena ukupnog koeficijenta prijelaza topline UA uz promjenu ulaznih protoka unutar predviđenih intervala. Ranije je konstatirano da temperatura nema utjecaja na iznos koeficijenta prijelaza topline sa strane zraka. Utjecaj temperature na koeficijent prijelaza sa strane vode je zanemariv. Na Slici 3.11 prikazani su rezultati analize. Sa Slike 3.11 može se jasno uočiti da se radi o nelinearnoj



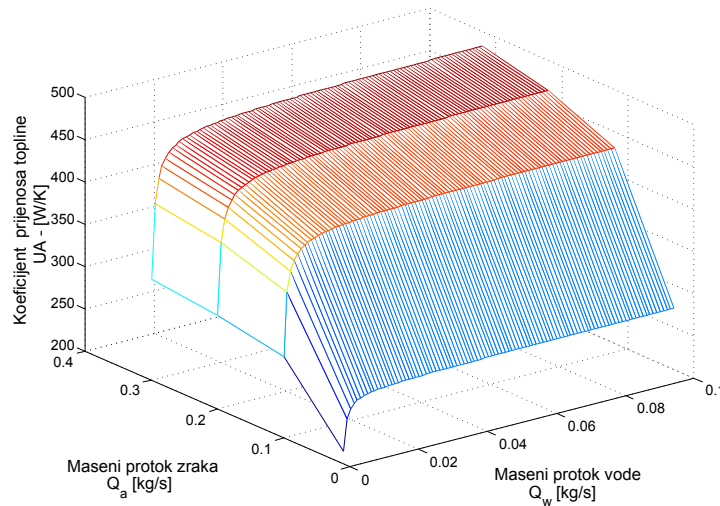
Slika 3.11: Ovisnost ukupnog koeficijenta prijelaza topline po površini o protoku zraka i medija u cijevima.

ovisnosti. Kako su izrazi za proračun ukupnog koeficijenta prijelaza topline po površini UA veoma zahtjevni za proračun u svakom koraku optimiranja, u svrhu analize i sinteze optimalnog sustava upravljanja, dobivena ovisnost bit će aproksimirana pomoću odgovarajuće funkcije. Na Slici 3.11 prikazan je kontinuirani prikaz u pretpostavljenim intervalima masenih protoka zraka i vode. Ventilokonvektori koji su dio instalacije sustava centralnog grijanja u odabranim prostorijama imaju četiri moguća stanja, te je stoga maseni protok zraka ograničen na četiri vrijednosti. Uz isključen ventilator postoji samo prirodna konvekcija zraka do koje dolazi zbog razlike u temperaturi. Maseni protok prirodne konvekcije zraka $Q_{a,p}$ ovisi o razlici temperatura između zraka i ugrijane površine te se može odrediti prema približnom izrazu:

$$Q_{a,p} = 0.019\rho_a l^{0.5} \left[\frac{g(T_{w,avg} - T_{a,avg})}{273.15 + T_{a,avg}} \right]^{0.4}, \quad (3.22)$$

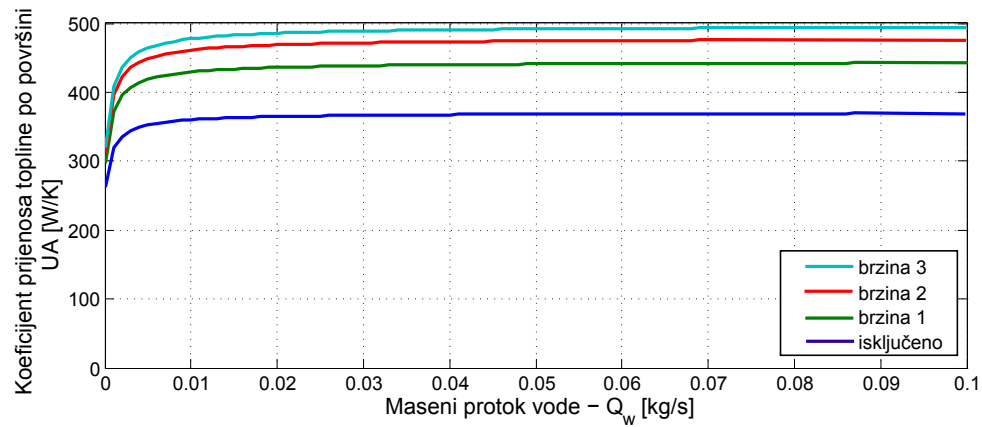
pri čemu su $T_{w,avg}$ i $T_{a,avg}$ srednja temperature vode i zraka, l je visina ventilokonvektora unutar kojeg dolazi do zagrijavanja/hlađenja zraka, a g je ubrzanje sile teže. Na Slici 3.12 prikazan je diskretni prikaz koeficijenta prijenosa topline po površini UA uz pretpostavku da maseni protok ventilokonvektora može poprimiti sljedeće vrijednosti:

$$\left[0.0095 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \right] \quad (3.23)$$



Slika 3.12: Ovisnost ukupnog koeficijenta prijelaza topline po površini o protoku zraka i medija u cijevima.

Pošto su moguća samo četiri stanja ventilatora, tj. četiri vrijednosti masenog protoka zraka kroz ventilator, ovisnost ukupnog koeficijenta prijenosa topline o masenim protocima može se prikazati u dvodimenzionalnom prostoru (Slika 3.13).



Slika 3.13: Ovisnost ukupnog koeficijenta prijelaza topline po površini o protoku zraka i medija u cijevima.

3.3 Ponašanje smjese zraka i vodene pare prilikom grijanja/hlađenja

Prilikom zagrijavanja ili hlađenja temperature prostorije, zapravo dolazi do zagrijavanja ili hlađenja zraka koji se nalazi u prostoriji. Često se pritom zaboravi da se u zraku nalazi i vodena para. Tijekom procesa hlađenja, ako je temperatura rashladnog medija ispod temperature rosišta može doći do kondenzacije vodene pare iz zraka. Ta pojava je u smislu energetske učinkovitosti loša, jer se prilikom toga oslobađa određena količina topline koja se predaje zraku. Kako bi se navedeni proces mogao što bolje modelirati, važno je proučiti osnovna svojstva smjese zraka i vodene pare.

3.3.1 Suhi i atmosferski zrak

Zrak je smjesa kisika, dušika i malih količina ostalih plinova. Zrak u atmosferi obično sadrži određenu količinu vodene pare (ili vlažnosti) - takav zrak naziva se atmosferskim zrakom. Suprotno tome, zrak koji ne sadrži nimalo vodene pare zove se suhi zrak. Često se zrak tretira kao mješavina suhog zraka i vodene pare, budući da je sastav suhog zraka relativno konstantan, a udio vodene pare se mijenja kao posljedica kondenzacije i isparavanja iz oceana, rijeka, jezera, tuševa, pa čak i ljudskog tijela. Iako je udio vodene pare u zraku veoma malen, igra veliku ulogu u osjećaju ugodnosti. S toga je veoma važno unutar sustava grijanja/hlađenja tretirati zrak kao smjesu koja sadrži vodenu paru.

Temperatura zraka u sustavima hlađenja/grijanja kreće se otprilike u granicama od -10 do 50 °C. U tom rasponu suhi zrak može se smatrati idealnim plinom s konstantnim iznosom specifičnog toplinskog koeficijenta c_{da} u iznosu od 1005 J/(kg·K) s neznatnom pogreškom (pogreška ispod 0.2 %) [2]. Promjena entalpije suhog zraka može se zapisati kao:

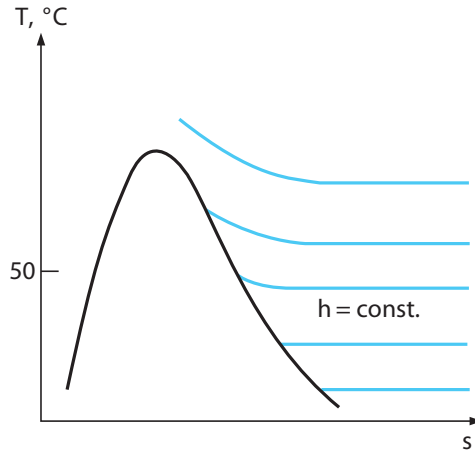
$$h_{da}(T) = c_{da}T = 1005 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}T, \quad (3.24)$$

pri čemu je T temperatura zraka u kelvinima. Kako bi se odredilo da li se i vodena para može smatrati idealnim plinom potrebno je proučiti T-s dijagram vodene pare. Na temperaturi do 50 °C tlak zasićenja vodene pare iznosi 12.3 kPa. Za iznose tlaka ispod te vrijednosti vodena para može se promatrati kao idealni plin (zanemariva pogreška od 0.2%) čak i kada se radi o zasićenoj vodenoj pari. Vodena para u zraku ponaša se kao idealni plin. Stoga se zrak može smatrati mješavinom idealnih plinova, a ukupan atmosferski tlak P može se zapisati kao zbroj parcijalnog tlaka vodene pare P_v i suhog

zraka P_{da} :

$$P = P_{da} + P_v. \quad (3.25)$$

Pošto se vodena para može tretirati kao idealni plin, entalpija vodene pare ovisi samo o temperaturi (Slika 3.14). Sa slike 3.14 može se vidjeti da se linije konstantne entalpije poklapaju s linijama konstantne temperature, na temperaturama ispod 50 °C.



Slika 3.14: Ts dijagram vodene pare.

Entalpija vodene pare može se izračunati iz empirijskog izraza [2]:

$$h_v(T) \cong 2500.9 + 1.82T. \quad (3.26)$$

Navedeni izraz vrijedi u temperaturnom rasponu -10 do 50 °C uz zanemarivu pogrešku.

3.3.2 Apsolutna i relativna vlažnost zraka

Količina vodene pare u zraku može se specificirati na različite načine. Najjednostavniji način je izraziti vlažnost kao omjer mase vodene pare u zraku m_v i mase suhog zraka m_{da} . Takav izraz naziva se apsolutna ili specifična vlažnost zraka i označava se ω :

$$\omega = \frac{m_v}{m_{da}}, \quad (3.27)$$

specifična se vlažnost može također izraziti (s obzirom da se radi o idealnim plinovima) kao:

$$\omega = \frac{m_v}{m_{da}} = \frac{P_v V / R_v T}{P_{da} V / R_{da} T} = \frac{P_v / R_v}{P_{da} / R_{da}} = 0.622 \frac{P_v}{P_{da}} \quad (3.28)$$

pri čemu je V volumen zraka, a R_v i R_{da} su specifične plinske konstante vodene pare i suhog zraka. Specifična vlažnost zraka može se povećavati samo do određene

granice, kada zrak ne može primiti više vlage. U tom trenutku, zrak postaje zasićen vodenom parom i naziva se zasićenim zrakom. Svaka dodatna količina vlage u zasićenom zraku rezultirat će kondenzacijom. Količina vlage koju zrak može držati na određenoj temperaturi i tlaku, dobiva se iz izraza (3.28) zamjenom parcijalnog tlaka vodene pare P_v sa tlakom zasićenja vode na zadanoj temperaturi P_{sat} . Na temperaturi od 25 °C tlak zasićenja vode iznosi $P_{sat} = 3169.8$ Pa. Tlak zasićenja vodene pare na nekoj temperaturi T može se odrediti preko sljedeće empirijske relacije:

$$P_{sat} = 610.78 \cdot 10^{\frac{7.5T - 2048.625}{T - 35.85}}. \quad (3.29)$$

Količina vlage u zraku ima veoma veliki utjecaj na osjećaj komfora u određenom prostoru. Kako bi se što lakše kvantificirao osjećaj ugodnosti definira se relativna vlažnost zraka ϕ . Relativna vlažnost zraka je omjer trenutne količine vlage u zraku i maksimalne moguće količine vlage u zraku:

$$\phi = \frac{m_v}{m_{sat}} = \frac{P_v V / R_v T}{P_{sat} V / R_v T} = \frac{P_v}{P_{sat}}. \quad (3.30)$$

Relativna vlažnost je bezdimenzionalna veličina koja poprima vrijednosti od 0 za suhi zrak do 1 za zasićen zrak. Važno je imati na umu da se količina vodene pare koju zrak može držati mijenja s temperaturom, te se stoga može dogoditi da dolazi do promjene relativne vlažnosti zraka iako specifična vlažnost zraka ostaje konstantna. Apsolutna i relativna vlažnost zraka povezane su sljedećim izrazima:

$$\phi = \frac{\omega P}{(0.622 + \omega)P_{sat}}, \quad \omega = \frac{0.622\phi P_{sat}}{P - \phi P_{sat}} \quad (3.31)$$

Atmosferski je zrak mješavina suhog zraka i vodene pare - entalpija atmosferskog zraka može se izraziti kao zbroj entalpije suhog zraka i entalpije vodene pare [2]:

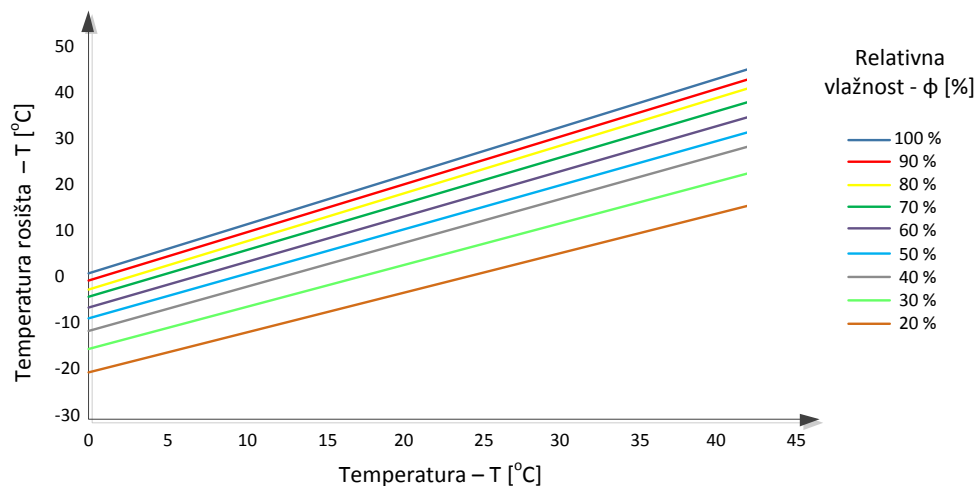
$$h_a = h_{da} + \omega h_v. \quad (3.32)$$

3.3.3 Temperatura rosišta

Procesi kondenzacije i isparivanja u prirodi se neprestano događaju. Kao primjer može se navesti rosa tijekom ljetnih mjeseci. Tijekom dana pod utjecajem visokih temperatura dolazi do znatnog isparivanja vodene pare iz rijeka, jezera, itd. Kako se temperatura tijekom noći počine spuštati tako se počne smanjivati i kapacitet vlažnosti zraka - maksimalni iznos vlage koju zrak može držati. Nakon nekog vremena kapacitet vlažnosti zraka izjednači se sa stvarnom vlažnošću zraka. Zrak postaje zasićen, a

relativna vlažnost zraka iznosi 100%. Svako daljnje smanjenje temperature rezultira kondenzacijom vlage iz zraka i stvaranjem rose.

Temperatura rosišta T_{dp} je temperatura na kojoj počinje kondenzacija kada se zrak hladi pri konstantnom tlaku. Ako je temperatura nekog predmeta u prostoriji, ispod temperature rosišta, počinje formacija rose na tom predmetu, tj. dolazi do kondenzacije. Ako je temperatura cijevi ili lamela izmjenjivača niža od temperature rosišta zraka u prostoriji, dolazi do kondenzacije vodene pare unutar izmjenjivača. Kondenzirana vodena para se unutar izmjenjivača skuplja u posebne posude i odvodi posebnim odvodom. Određivanje točne temperature rosišta zahtjeva provođenje raznih eksperimenata [2]. Također ti eksperimenti moraju se neprestano izvoditi zbog ovisnosti temperature rosišta o temperaturi i trenutnoj vlažnosti zraka što je za potrebe ovog rada previše komplicirano. Ovisnost temperature rosišta o temperaturi i vlažnosti zraka prikazana je na Slici 3.15. Veoma jednostavan izraz koji povezuje temperaturu rosišta



Slika 3.15: Ovisnost temperature rosišta o temperaturi i vlažnosti zraka.

i temperaturu i vlažnost zraka glasi:

$$T_{dp} = T - \frac{100 - \phi}{5}. \quad (3.33)$$

Navedeni izraz izračunava temperaturu rosišta s točnošću od ± 1 °C sve dok je relativna vlažnost zraka iznad 50%.

3.4 Matematički model ventilokonvektora

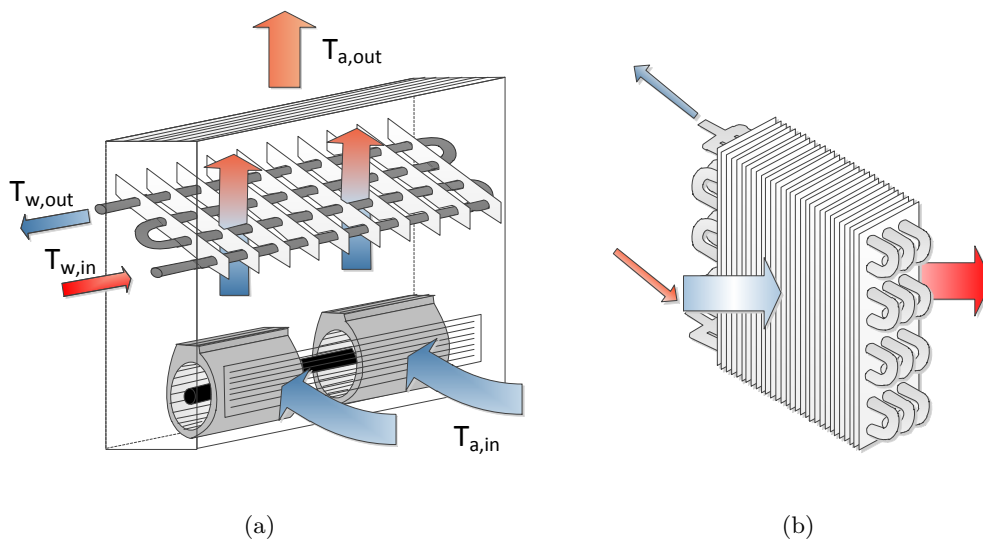
Ventilokonvektori (eng. fan coil) se sastoje od izmjenjivača topline, ventilatora i filtra ugrađenih u jedno kućište. Izmjenjivač je pri tome izveden kao cijevni s lamelama (Cu-Al izmjenjivači) i unutar njega struji prijenosnik energije - voda. Ventilatorom se ostvaruje prisilno strujanje zraka iz prostorije preko izmjenjivačkih ploha, čime se zrak hladi ili grije, ovisno o tome struji li kroz izmjenjivač hladna ili topla voda. Za razliku od radijatorskih sustava centralnog grijanja radi se o niskotemperaturnim sustavu s uobičajenom temperaturom vode od 50 – 60 °C.

Sustav može biti dvocijevni ili četverocijevni. Kod dvocijevnog se sustava postavljaju dvije cijevi - polazni i povratni vod, čime se ostvaruje cirkulacija tople ili hladne vode u zatvorenom krugu. Instalacija tada služi za sezonski rad: kada je potrebno hlađenje kroz cjevovod struji hladna voda, a kada je potrebno grijanje - topla voda. Ventili, razdjelnici i ostala oprema koja omogućava prebacivanje sustava sa zimskog na ljetni način rada uobičajeno se nalaze u strojarnici ili kotlovnici. Ventilokonvektori koji služe za rad u dvocijevnom sustavu imaju samo jedan izmjenjivač topline kroz koji struji hladna ili topla voda. Četverocijevni sustavi imaju četiri cijevi - dva polazna voda i dva povratna voda, tj. poseban par vodova za toplu i hladnu vodu. U takvom je sustavu po želji moguće hlađenje ili grijanje jer postoje dva izmjenjivača topline: jedan za toplu, a drugi za hladnu vodu. Takva instalacija i uređaji su, naravno skuplji, ali pružaju potpunu ugodnost.

Ventilokonvektori koji su dio sustava centralnog grijanja devetog i desetog kata zgrade Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu proizvedeni su od strane proizvođača Trane. Ventilokonvektori su opremljeni s dva sinkronizirana centrifugalna ventilatora s promjenjivom brzinom vrtnje. Omogućene su tri različite brzine vrtnje ventilatora. Ventilatori stvaranjem prisilne konvekcije pospješuju cirkulaciju zraka kroz izmjenjivač topline (sustav lameliranih cijevi). Izmjenjivač topline je sastavljen od 3 reda cijevi, od čega se svaki redak cijevi sastoji od 8 prolaza. S obzirom na položaj izmjenjivača radi se o ventilokonvektoru s unakrsnim protokom fluida. Rashladni, tj. ogrjevni medij distribuira se u sva tri reda cijevi istovremeno, kroz priključak smješten na dnu izmjenjivača - bliže ventilatorima i napušta izmjenjivač istovremeno kroz priključak smješten na vrhu izmjenjivača. Izmjenjivač je postavljen pod nagibom s obzirom na vertikalnu ravninu kroz koju ulazi zrak. Debljina lamela iznosi 0.1 mm, a gustoća lameliranja 5 lamela/cm.

Geometrija lamela kao i shematski prikaz samog ventilokonvektora prikazani su na Slici 3.16.a). Radi preglednosti nacrtan je samo jedan redak cijevi. Uvećani prikaz izmjenjivača topline prikazan je na Slici 3.16.b). Radi mogućnosti upravljanja protokom ogrjevnog/rashladnog medija kroz ventilokonvektor na priključnim vodovima ventilokonvektora instalirani su ventili.

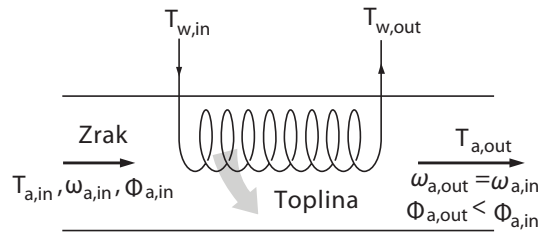
Dinamičko modeliranje razdvojit ćemo prema jednostavnosti samog postupka modeliranja na dva dijela - modeliranje ventilokonvektora tijekom ljetnog perioda rada kada ventilokonvektori služe za hlađenje i modeliranje ventilokonvektora u zimskom režimu rada kada ventilokonvektori služe za grijanje. S obzirom na to da se radi o dvocijevnom sustavu, za grijanje i hlađenje koristi se ista zavojnica.



Slika 3.16: Shematski prikaz (a) cijelog ventilokonvektora i (b) izmjenjivača topline.

Modeliranje ventilokonvektora tijekom zimskog režima rada

Tijekom zimskog režima rada ventilokonvektori služe za grijanje prostora. Kotlovnica opskrbljuje ventilokonvektore toplom vodom određene temperature - budući da se radi o niskotemperaturnim sustavima, temperatura vode se uglavnom kreće u intervalu od 50 do 70 °C te se stoga mogu koristiti svi zaključci doneseni za smjesu suhog zraka i pare u prethodnom odlomku. Prednost sustava grijanja u odnosu na sustav hlađenja je u tome što tijekom procesa zagrijavanja zraka ne dolazi do promjene faze vodene pare koja se nalazi u zraku. Na Slici 3.17 prikazana je pojednostavljena shema procesa grijanja.



Slika 3.17: Pojednostavljena shema procesa grijanja.

Prema (3.32) ukupna entalpija smjese suhog zraka i vodene pare h_a može se zapisati:

$$h_a = h_{da} + \omega h_v = c_{da}T + \omega(2500.9 + 1.82T) = (c_{da} + 1.82\omega)T + 2500.9\omega, \quad (3.34)$$

pri čemu je T temperatura zraka, a ω apsolutna vlažnost zraka. Jednadžba očuvanja topline sa strane zraka može se zapisati:

$$m_a h_{a,out} \frac{dT_{a,out}}{dt} = Q_a (h_{a,out} - h_{a,in}) + UA \Delta T_{ar}, \quad (3.35)$$

pri čemu Q_a označava protok zraka kroz izmjenjivač topline, m_a masu zraka unutar ventilokonvektora, a ΔT_{ar} označava srednju aritmetičku vrijednost razlike temperatura zraka i vode:

$$\Delta T_{ar} = \left(\frac{T_{w,in} + T_{w,out}}{2} - T_{a,in} \right). \quad (3.36)$$

Kao mjera temperaturne razlike može se koristiti i srednja logaritamska temperaturna razlika ΔT_{ln} koja će biti definirana kasnije. Pošto ne dolazi do promjene faze vodene pare u zraku, apsolutna vlažnost se tijekom procesa zagrijavanja ne mijenja te je označena s $\omega = \omega_{a,in} = \omega_{a,out}$. Raspisivanjem dane jednadžbe slijedi:

$$m_a (c_{da} + 1.82\omega) \frac{dT_{a,out}}{dt} = Q_a [(c_{da} + 1.82\omega)(T_{a,in} - T_{a,out})] + UA \Delta T_{ar}, \quad (3.37)$$

iznos 1.82ω veoma je malen u odnosu na specifični toplinski kapacitet suhog zraka c_{da} te se stoga može zanemariti. Konačne jednadžbe očuvanja topline za ventilokonvektor koji radi u režimu grijanja glase:

$$\begin{aligned} m_a c_{da} \frac{dT_{a,out}}{dt} &= Q_a c_{da} (T_{a,in} - T_{a,out}) + UA \Delta T_{ar}, \\ m_w c_w \frac{dT_{w,out}}{dt} &= Q_w c_w (T_{w,in} - T_{w,out}) - UA \Delta T_{ar}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

pri čemu je Q_w protok vode kroz ventilokonvektor generiran pumpom i upravljivan pomoću ventila, a c_w specifični toplinski kapacitet vode ili nekog drugog ogrjevnog medija koji se koristi u sustavu centralnog grijanja. Vremenska konstanta zagrijavanja zraka unutar ventilokonvektora glasi:

$$t_a = \frac{m_a}{Q_a + \frac{UA}{2c_{da}}}. \quad (3.39)$$

Iz podataka o ventilokonvektoru, dostupnima od proizvođača slijedi da su maksimalna masa zraka unutar ventilokonvektora $m_{a,max}$ i maksimalni protok zraka generiran ventilatorom $Q_{a,max}$:

$$m_{a,max} \approx 0.15 \text{ kg}, \quad Q_{a,max} \approx 0.35 \text{ kg/s}, \quad (3.40)$$

član $UA/(2 \cdot c_{da})$ (prema Slici 3.11) poprima minimalnu vrijednost od oko ≈ 0.1 . Iz navedenih karakterističnih vrijednosti slijedi maksimalan iznos vremenske konstante $t_a \approx 1.5$ s. Može se zaključiti da je vremenska konstanta zagrijavanja zraka unutar ventilokonvektora zbog prisilne konvekcije veoma malena, te se proces zagrijavanja zraka unutar ventilokonvektora može smatrati statičkim. Vremenska konstanta procesa zagrijavanja/hlađenja vode definirana je kao:

$$t_w = \frac{m_w}{Q_w + \frac{UA}{2c_w}}. \quad (3.41)$$

U najgorem slučaju iznosi $t_w \approx 60$ s. Iz provedenog razmatranja vremenskih konstanti termodinamičkih procesa slijedi da se termodinamički procesi unutar ventilokonvektora mogu promatrati kao stacionarni procesi:

$$\begin{aligned} Q_a c_{da} T_{a,out} &= Q_a c_{da} T_{a,in} + UA \Delta T_{a,ar}, \\ Q_w c_w T_{w,out} &= Q_w c_w T_{w,in} - UA \Delta T_{w,ar}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

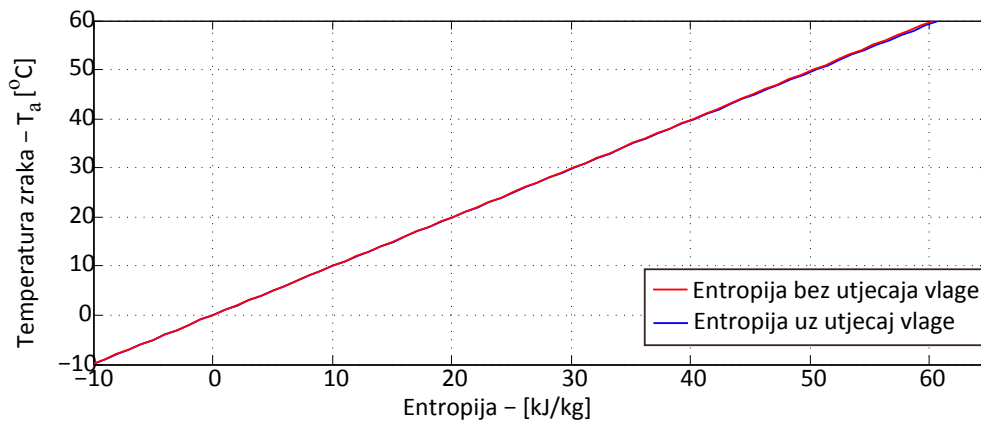
Modeliranje ventilokonvektora tijekom ljetnog režima rada

Modeliranje ventilokonvektora tijekom ljetnog režima rada veoma je kompleksan problem. Zbog niske temperature ogrjevnog medija potrebne za hlađenje zraka, tj. temperature cijevi i lamela preko kojih se prenosi toplina niže od temperature rosišta vlage iz zraka, dolazi do kondenzacije. Unutar ventilokonvektora nalazi se odvod, kojim se kondenzirana vodena para odvodi iz prostorija. Temperatura rosišta definirana je ranije pomoću jednostavne aproksimacije:

$$T_{dp} = T_a - \frac{100 - \phi}{5}. \quad (3.43)$$

U slučaju kada ne dolazi do kondenzacije, dinamičko ponašanje ventilokonvektora može se opisati jednadžbama ranije izvedenima za slučaj grijanja (jednadžba (3.42)). Prilikom analize dinamičkog vladanja izmjenjivača topline iskazalo se da vlažnost zraka nema utjecaja na dinamiku procesa zagrijavanja zraka. Da bi se utvrdio utjecaj vlažnosti zraka na njegovu entropiju, ispitan je utjecaj maksimalne vlažnosti zraka $\phi = 100\%$ na entropiju zraka uz temperaturu zraka u rasponu od -10 do 60 °C. Analizom utjecaja vlažnosti zraka na njegovu entropiju utvrđeno je da se utjecaj vlažnosti zraka na iznos ukupne entropije zraka može zanemariti. Rezultati analize prikazani su na Slici 3.18.

$$h_a \approx h_{da} \approx c_{da}T. \quad (3.44)$$



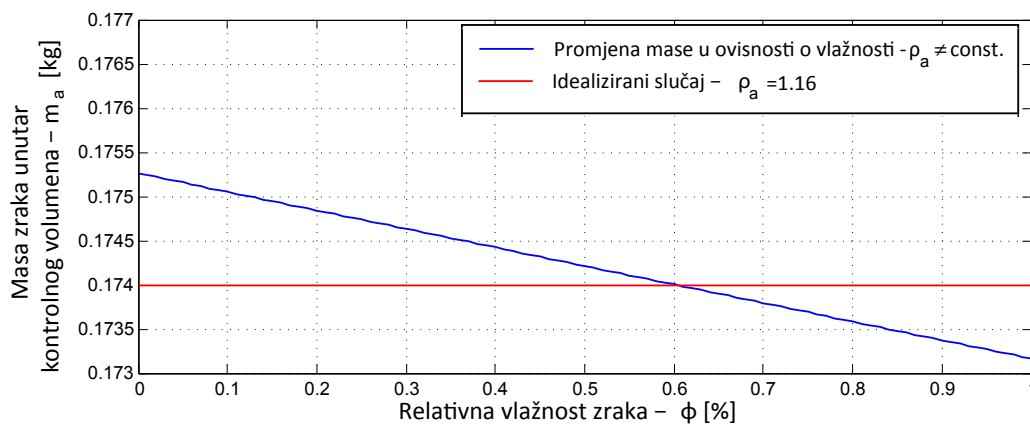
Slika 3.18: Analiza utjecaja vlažnosti zraka na porast entropije zraka.

Ako dolazi do kondenzacije mijenja se i ukupna gustoća smjese suhog zraka i vodene pare, tj. dolazi do promjene ukupne mase zraka unutar ventilokonvektora. Radi kvantificiranja utjecaja vlažnosti zraka na ukupnu masu smjese suhog zraka i vodene

pare provedena je analiza ukupne mase zraka unutar konstantnog volumena od 0.15 m^3 (otprilike zapremnina standardnih ventilokonvektora), pri temperaturi od $25 \text{ }^\circ\text{C}$, standardnom atmosferskom tlaku, uz promjenu vlažnosti zraka u intervalu od $0 - 100\%$. Ukupna masa zraka proračunata je na temelju jednostavne relacije koja povezuje gustoću zraka ρ_a i ukupan volumen zraka V_a :

$$m_a = \rho_a V_a. \quad (3.45)$$

Gustoća zraka ovisi o udjelu vodene pare u zraku te se može proračunati pomoću



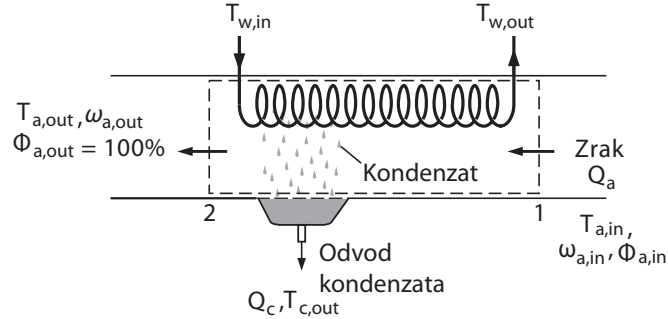
Slika 3.19: Analiza utjecaja vlažnosti zraka na ukupnu masu zraka u prostoriji.

sljedećeg izraza:

$$\rho_a = \frac{P_{da}}{R_{da}T} + \frac{P_v}{R_vT}; \quad p_v = \phi p_{sat}, \quad P_{da} = P - P_v. \quad (3.46)$$

Na Slici 3.19 nalazi se usporedba ukupne mase zraka unutar kontrolnog volumena u ovisnosti o relativnoj vlažnosti zraka ρ_a (gustoća zraka mijenja se ovisno o vlažnosti) s masom zraka proračunatom pod pretpostavkom konstantne gustoće zraka $\rho_a = 1.16 \text{ kg/m}^3$. Sa Slike 3.19 je vidljivo da uz promjenu vlažnosti zraka u intervalu $0 - 100\%$ dolazi do promjene mase od samo 0.023 kg što je u odnosu na ukupnu masu zraka koja se nalazi unutar kontrolnog volumena zanemarivo. Uzimajući u obzir da se interval ugodnosti krajnjih korisnika uglavnom nalazi u okolini $20 \text{ }^\circ\text{C}$, gustoća zraka u daljnjem proračunu uzimat će se kao konstantna usrednjena vrijednost, tj. $\rho_a = 1.16 \text{ kg/m}^3$.

Na Slici 3.20 prikazana je pojednostavljena shema procesa hlađenja zraka. Na temelju



Slika 3.20: Pojednostavljena shema procesa hlađenja.

provedenih razmatranja jednadžba očuvanja topline za zrak može se napisati kao:

$$Q_a c_{da} T_{a,out} = Q_a c_{da} T_{a,in} - Q_c c_w T_{c,out} + Q_c \lambda + U A \Delta T_{ar}, \quad (3.47)$$

pri čemu je Q_c maseni protok kondenzata, h_w entalpija ukapljene vodene pare a λ latentna topline kondenzacije vodene pare. Zakon očuvanja mase za vodenu paru glasi:

$$Q_a \omega_{a,in} = Q_a \omega_{a,out} + Q_c, \quad (3.48)$$

iz čega slijedi:

$$Q_c = Q_a (\omega_{a,in} - \omega_{a,out}). \quad (3.49)$$

Uvođenjem dobivenog izraza za protok kondenzata u jednadžbu (3.47) i sređivanjem navedene jednadžbe slijedi:

$$Q_a c_{da} T_{a,out} = Q_a c_{da} T_{a,in} - Q_a (\omega_{a,in} - \omega_{a,out}) (c_w T_{c,out} - \lambda) + U A \Delta T_{ar}, \quad (3.50)$$

$$Q_a c_{da} T_{a,out} = Q_a [c_{da} T_{a,in} - (\omega_{a,in} - \omega_{a,out}) (c_w T_{c,out} - \lambda)] + U A \Delta T_{ar}. \quad (3.51)$$

Da bi se što bolje mogao modelirati prijenos topline potrebno je poznavanje vlažnosti zraka na izlazu iz izmjenjivača, tj. ventilokonvektora i poznavanje temperature kondenzata. Navedene veličine veoma su kompleksne za odrediti ili modelirati, te se sa svrhom pojednostavljenja modela uvode sljedeće pretpostavke:

- ukoliko ne dolazi do kondenzacije vrijedi $Q_c = 0$. Model hlađenja postaje već ranije definirani model grijanja.

- postojanje kondenzacije provjerava se usporedbom temperature vode (cijevi) sa temperaturom rosišta T_{dp} zraka pri trenutnoj temperaturi prostorije $T_{a,in}$ i trenutnoj vlažnosti $\phi_{a,in}$.
- ukoliko je temperatura vode (cijevi) niža od temperature rosišta pretpostavlja se da dolazi do kondenzacije i da temperatura kondenzata jednaka temperaturi cijevi na kojima se vodena para kondenzira. Također pretpostavlja se da je ukoliko dolazi do kondenzacije, zrak koji napušta ventilokonvektor zasićen $\phi_{a,out} = 100\%$.
- pretpostavlja se da je poznata temperatura zraka na izlazu iz ventilokonvektora, temperatura zraka u prostoriji i tlak zraka u prostoriji - na temelju tih veličina relativne vlažnosti zraka na izlazu i ulazu mogu se preračunati u apsolutne vlažnosti zraka.

3.5 Fizikalna ograničenja sustava

Iznosi koeficijenta prijenosa topline po površini utvrđeni u ranijim poglavljima predstavljaju vrijednosti koje je moguće postići samo teoretski. Ograničenja koeficijenta prijenosa topline po površini slijede iz fizikalnih ograničenja sustava. Prvo ograničenje proizlazi iz činjenice da se u slučaju grijanja temperatura vode na izlazu iz izmjenjivača topline ne može spustiti ispod temperature prostorije, tj:

$$T_{w,out} \geq T_{a,in}. \quad (3.52)$$

Analogno tome u slučaju hlađenja vrijedi da se temperatura vode na izlazu iz izmjenjivača topline ne može zagrijati na temperaturu veću od temperature zraka u prostoriji:

$$T_{w,out} \leq T_{a,in}. \quad (3.53)$$

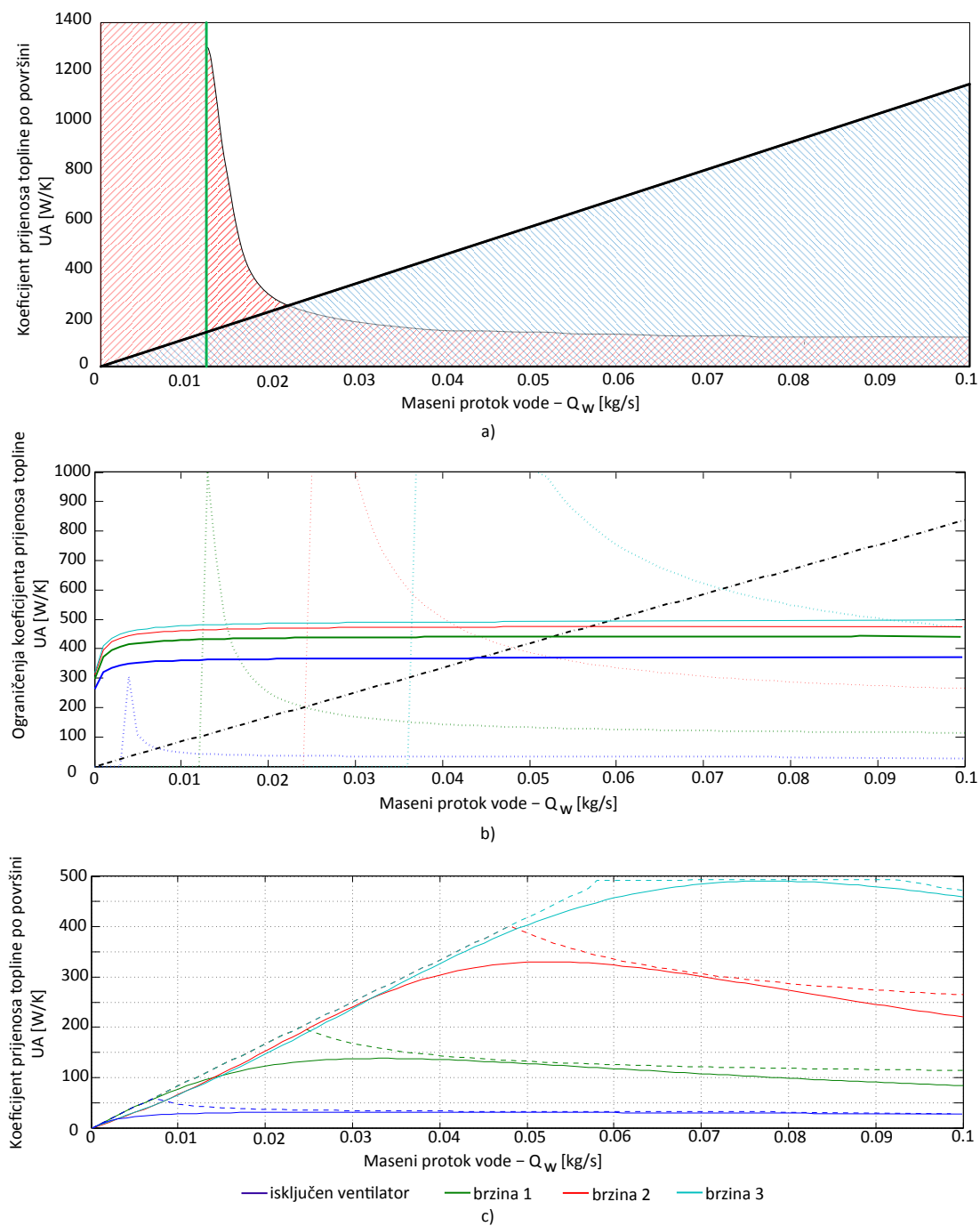
Iz tih ograničenja proizlazi prvo ograničenje ukupnog koeficijenta prijenosa topline po površini:

$$UA \leq 2c_w Q_w. \quad (3.54)$$

Navedeno ograničenje vrijedi i za grijanje i za hlađenje prostora. Drugo ograničenje proizlazi iz činjenice da se zrak na izlazu iz ventilokonvektora ne može zagrijati/ohladiti na temperaturu koja je veća/manja od temperature vode unutar izmjenjivača topline:

$$\begin{aligned} 4c_w Q_w - 2c_{da} Q_a < 0 &\longrightarrow UA \geq \frac{2c_{da} Q_a c_w Q_w}{2c_w Q_w - c_{da} Q_a}, \\ 4c_w Q_w - 2c_{da} Q_a > 0 &\longrightarrow UA \leq \frac{2c_{da} Q_a c_w Q_w}{2c_w Q_w - c_{da} Q_a}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Oba ograničenja prikazana su grafički na Slici 3.21.a). Plavom bojom označeno je prvo, a crvenom drugo ograničenje, pri čemu vertikalna crvena crta predstavlja pravac $4c_w Q_w - 2c_{da} Q_a$. Na Slici 3.21.b) prikazana su sva ograničenja nad odabranim ventilokonvektorom zajedno s teoretskim iznosima ukupnog koeficijenta prijenosa topline po površini. Na Slici 3.21.c) prikazani su fizikalno mogući iznosi ukupnog koeficijenta prijenosa topline po površini, dobiveni primjenom fizikalnih ograničenja na fizikalno ostvarive vrijednosti zajedno s aproksimacijom dobivenih karakteristika pomoću racionalne funkcije.



Slika 3.21: a) Tumačenje ograničenja ukupnog koeficijenta prijenosa topline po površini, b) Fizikalna ograničenja ukupnog koeficijenta prijenosa topline po površini, c) Fizikalno ostvarivi iznosi koeficijenta prijenosa topline.

Stvarni fizikalno ostvarivi iznosi koeficijenta prijenosa topline po površini prikazani su isprekidanim linijama, dok su pomoću pune linije prikazane aproksimacije navedenih karakteristika. Aproksimacija je provedena unutar programskog paketa MATLAB pomoću paketa *Curve Fitting toolbox*. Sve karakteristike aproksimirane su racionalnom funkcijom oblika:

$$\bar{U}A = \frac{p_1 Q_w}{Q_w^2 + q_1 Q_w + q_2}, \quad p_1, q_1, q_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.56)$$

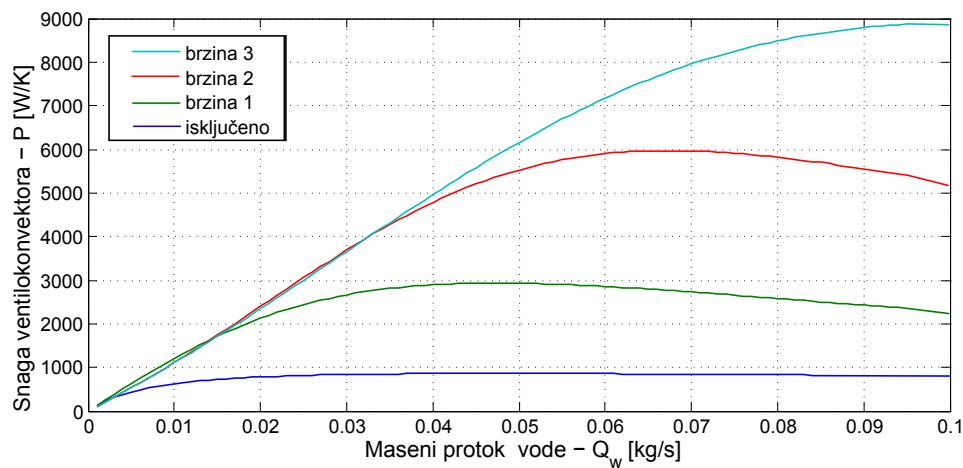
Koeficijenti p_1, q_1 i q_2 ovise o karakteristici koja se aproksimira. Ventilokonvektor je definiran pomoću četiri karakteristike koeficijenta prijenosa topline stoga postoje četiri seta spomenutih parametara. Navedeni proračuni i ograničenja vrijede u slučaju grijanja, te u slučaju hlađenja ukoliko ne dolazi do kondenzacije i stvaranja latentne topline. U slučaju kada dolazi do kondenzacije proračun se znatno komplicira, koeficijent prijenosa topline postaje ovisan o ulaznim temperaturama zraka i vode te razlici apsolutne vlažnosti na izlazu i ulazu u ventilokonvektor. Snaga emitirana u prostoriju definirana je kao:

$$P = c_w Q_w (T_{w,out} - T_{w,in}) = c_{da} Q_a (T_{a,out} - T_{a,in}) = UA \left(\frac{T_{w,out} + T_{w,in}}{2} - T_{a,in} \right). \quad (3.57)$$

Korištenjem izraza koji daju ovisnost izlaznih temperatura iz ventilokonvektora u odnosu na ulazne temperature i protoke, slijedi da je snaga emitirana u prostoriju:

$$P = \frac{2UAQ_w c_w}{2Q_w c_w + UA} (T_{w,in} - T_{a,in}). \quad (3.58)$$

$$P = \frac{2p_1 c_w Q_w}{2c_w Q_w^2 + 2c_w q_1 Q_w + 2c_w q_2 + p_1} (T_{w,in} - T_{a,in}). \quad (3.59)$$



Slika 3.22: Ovisnost snage P o ulaznim protocima.

Grafički prikaz snage emitirane u prostoriju, uz pretpostavku ulazne temperature vode u izmjenjivač topline $T_{w,in} = 50$ °C i ulazne temperature zraka $T_{a,in} = 20$ °C prikazan je na Slici 3.22.

3.6 Ostali načini analize izmjenjivača topline

Uz standardne načine određivanja topline emitirane u prostoriju pomoću izmjenjivača topline, koji pretpostavljaju linearnu promjenu temperatura medija i zraka unutar izmjenjivača topline, u praksi se često koristi analiza izmjenjivača topline pomoću srednje logaritamske razlike (LMTD) kod koje se pretpostavlja eksponencijalna promjena temperatura. Kad su poznate temperature fluida na ulazu u izmjenjivač i kada se izlazne temperature mogu jednostavno odrediti iz jednadžbi za energetske bilancu, tada je uz pretpostavku eksponencijalne promjene temperatura najjednostavnija metoda analize izmjenjivača topline pomoću srednje logaritamske temperaturne razlike (LMTD). Ako su samo poznate ulazne temperature, korištenje LMTD metode zahtjeva iterativni postupak. U takvim slučajevima se uz standardni ranije naveden postupak može koristiti alternativni pristup, koji se temelji na efikasnosti izmjenjivača topline.

3.6.1 Analiza izmjenjivača topline korištenjem srednje logaritamske temperaturne razlike

Kod određivanja karakteristika izmjenjivača topline bitno je odrediti ukupni toplinski tok koji se prenosi te veličine kao što su ulazne i izlazne temperature fluida, ukupni koeficijent prijelaza topline i ukupna površina preko koje se odvija izmjena topline. Promatraju se dva najjednostavnija tipa izmjenjivača topline, istosmjerni i protusmjerni paralelni izmjenjivač topline. Tijekom prolaska fluida kroz izmjenjivač topline, dolazi do promjene temperature fluida. Kod paralelnog istostrujnog izmjenjivača topline razlika temperature fluida najveća je na ulazu u izmjenjivač topline, te se prolaskom fluida kroz izmjenjivač topline polako smanjuje, približavajući se asimptotski k nuli. Izlazna temperatura hladnog fluida nikada ne može nadvisiti izlaznu temperaturu toplog fluida. Raspodjela temperatura toplog i hladnog fluida duž paralelnih izmjenjivača topline prikazana je na Slici 3.23. Kod protusmjernog izmjenjivača topline omogućen je prijelaz topline između toplijih dijelova fluida na jednom kraju kao i hladnijih dijelova fluida na drugom kraju. Temperaturna razlika ΔT duž x -osi, na bilo kojem mjestu, veća je nego što je to na ulazu istosmjernog izmjenjivača. Izlazna temperatura hladnog medija ne može ni na koji način biti veća od ulazne temperature toplog medija. Srednja logaritamska temperaturna razlika dobiva se uz sljedeće pretpostavke:

- izmjenjivač je izoliran od okoline, izmjena topline se obavlja samo između toplog i hladnog fluida,

- aksijalno provođenje duž cijevi je zanemarivo,
- promjene potencijalne i kinetičke energije su zanemarive,
- specifične topline fluida (c_h, c_c) su konstantne,
- ukupni koeficijent prijelaza topline (U) je konstantan.

Specifične topline mogu se mijenjati kao rezultat temperaturnih promjena, kao što se i ukupni koeficijent prijelaza topline može mijenjati zbog promjene svojstava fluida i uvjeta strujanja. Kod mnogih primjena takve promjene nisu značajne i sasvim je prihvatljivo raditi sa srednjim vrijednostima navedenih veličina. U stacionarnom stanju vrijedi:

$$c_h Q_h (T_{h,in} - T_{h,out}) + c_c Q_c (T_{c,in} - T_{c,out}) = 0. \quad (3.60)$$

Uz pretpostavku istosmjernog izmjenjivača topline toplinski tok H kroz infinitesimalno malu površinu dA glasi:

$$dH = U(T_h - T_c)dA = c_h Q_h dT_h = -c_c Q_c dT_c \quad (3.61)$$

pri čemu je su T_h i T_c trenutne temperature toplog i hladnog fluida. Iz jednadžbe (3.61) slijedi:

$$dT_h = \frac{dH}{c_h Q_h}, \quad dT_c = -\frac{dH}{c_c Q_c}, \quad (3.62)$$

$$dT_h - dT_c = d(T_h - T_c) = dH \left(\frac{1}{c_h Q_h} + \frac{1}{c_c Q_c} \right). \quad (3.63)$$

Izlučivanjem dq iz jednadžbe (3.63) i uvrštavanjem u jednadžbu (3.61) slijedi:

$$U(T_h - T_c)dA = \frac{1}{\left(\frac{1}{c_h Q_h} + \frac{1}{c_c Q_c} \right)} d(T_h - T_c). \quad (3.64)$$

Dobivena jednadžba može se lako riješiti postupkom separacije varijabli i integriranjem unutar zadanih granica:

$$\int_0^A U \left(\frac{1}{c_h Q_h} + \frac{1}{c_c Q_c} \right) dA = \int_{\Delta T_1}^{\Delta T_2} \frac{d(T_h - T_c)}{(T_h - T_c)}, \quad (3.65)$$

$$UA \left(\frac{1}{c_h Q_h} + \frac{1}{c_c Q_c} \right) = \ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right). \quad (3.66)$$

Integriranjem jednadžbi (3.62) slijedi:

$$c_h Q_h = \frac{H}{T_{h,out} - T_{h,in}}, \quad c_c Q_c = -\frac{H}{T_{c,out} - T_{c,in}}. \quad (3.67)$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u jednadžbu (3.66) dobiva se:

$$UA(T_{h,out} - T_{h,in} + T_{c,in} - T_{c,out}) = H \ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right), \quad (3.68)$$

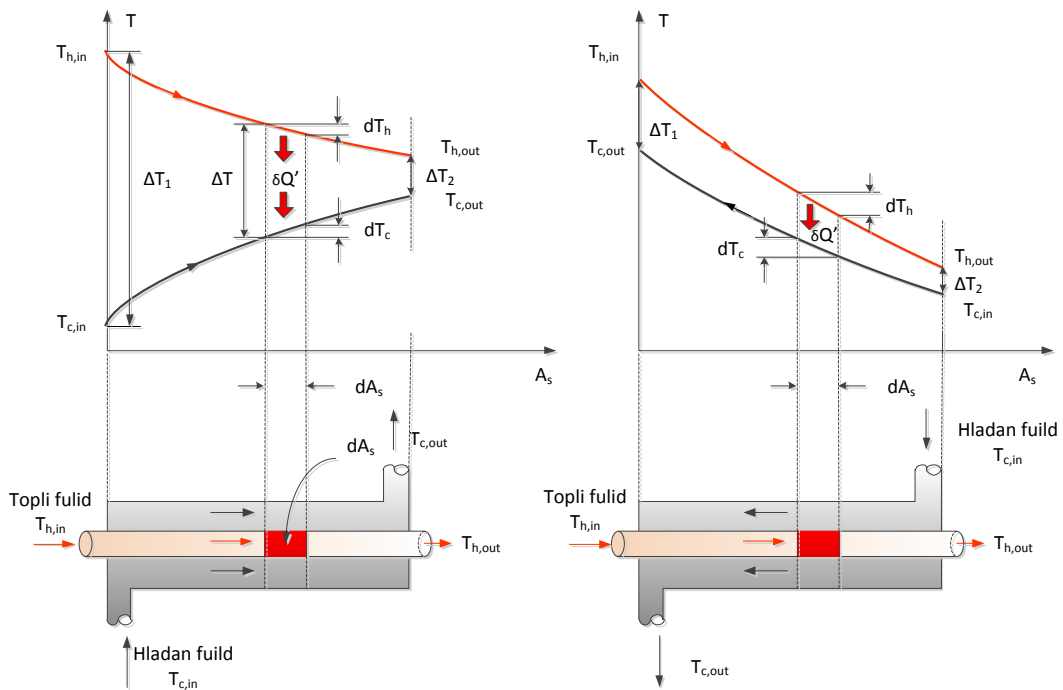
$$UA(\Delta T_2 - \Delta T_1) = H \ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right), \quad (3.69)$$

$$H = UA \frac{(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{\ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)}. \quad (3.70)$$

Dobiveni izraz za toplinski tok izmjenjivača topline u stacionarnom stanju često se zapisuje u formi:

$$H = UA\Delta T_{ln}, \quad (3.71)$$

pri čemu je ΔT_{ln} srednja logaritamska temperatura izmjenjivača topline. Dobiveni izrazi vrijede za oba izmjenjivača topline uz ΔT_1 i ΔT_2 definirane kao na Slici 3.23. Pošto se uvjeti strujanja kod izmjenjivača topline s poprečnim strujanjem i više prolaza



Slika 3.23: Raspodjela temperature za istosmjerni i protusmjerni paralelni izmjenjivač topline.

komPLICIRAJU, jednadžba (3.71) može se koristiti samo ako se učine određene modifikacije

srednje logaritamske temperaturne razlike. Potrebni se oblik ΔT_{ln} dobiva primjenom korekcijskog faktora F vrijednosti ΔT_{ln} dobivenih za slučaj paralelnih izmjenjivača topline. Algebarski izrazi za korekcijski faktor F razvijeni su za različite tipove izmjenjivača topline sa snopovima cijevi u plaštu (tzv. shell-and-tube) i s poprečnim konfiguracijama strujanja, te su obično predstavljeni grafički [6].

Temperaturna razlika između dvaju fluida smanjuje se od ΔT_1 do ΔT_2 , pa se stoga kao mjera razlike temperatura može koristiti aritmetička srednja temperatura:

$$\Delta T_{ar} = \frac{1}{2}(\Delta T_1 + \Delta T_2). \quad (3.72)$$

Srednja logaritamska razlika ΔT_{ln} uvijek je manja od aritmetičke razlike ΔT_{ar} pa stoga korištenjem srednje aritmetičke razlike uvijek predviđamo veći toplinski tok od pravog. Dodatno korištenjem srednje logaritamske pogreške, pretpostavlja se pad/rast temperature unutar izmjenjivača po eksponencijalnom zakonu, za razliku od srednje aritmetičke temperature kod koje se pretpostavlja linearna promjena temperature unutar izmjenjivača. Kada ΔT_1 odstupa od ΔT_2 za manje od 40% pogreška korištenja ΔT_{ar} je manja od 1%. Povećanjem razlike između ΔT_1 i ΔT_2 pogreška raste do kritičnih iznosa te je stoga u praksi uvijek bolje koristiti srednju logaritamsku razliku ΔT_{ln} .

3.6.2 Analiza izmjenjivača topline korištenjem NTU metode

Da bi se definirala efikasnost izmjenjivača topline, prvo se mora odrediti maksimalni mogući toplinski tok H_{max} koji može postići izmjenjivač topline. Takav se prijelaz topline može u principu postići u protusmjernom izmjenjivaču topline beskonačne duljine. U takovom izmjenjivaču jedan od fluida može postići maksimalnu temperaturnu razliku ($T_{h,in} - T_{c,in}$). Maksimalnu toplinsku razliku prema (3.62) postiže fluid s manjim toplinskim kapacitetom C_f . Toplinski kapacitet je fizikalna veličina koja pokazuje sposobnost tijela za spremanje topline, a definira se kao omjer količine topline i promjene temperature koja zbog toga nastaje:

$$C_f = \frac{dH}{dT} = c_f Q_f, \quad (3.73)$$

pri čemu je c_f specifični toplinski kapacitet fluida, a Q_f maseni protok fluida. Uz pretpostavku da je toplinski kapacitet hladnog fluida manji od toplinskog kapaciteta toplog fluida, tj. $C_{min} = C_c$ slijedi izraz za maksimalni mogući toplinski tok H_{max} :

$$H_{max} = C_c(T_{h,in} - T_{c,in}), \quad C_c < C_h. \quad (3.74)$$

Slično tome će, ako je $C_h < C_c$ topli fluid ostvariti veliku temperaturnu promjenu i može se ohladiti na ulaznu temperaturu hladnog fluida. Generalno se može zapisati:

$$H_{max} = C_{min}(T_{h,in} - T_{c,in}), \quad (3.75)$$

gdje je C_{min} jednako ili C_h ili C_c ovisno o tome koji ima nižu vrijednost. Jednostavnom se analizom može doći do zaključka da maksimalno mogući preneseni toplinski tok nije jednak $C_{max}(T_{h,in} - T_{c,in})$. Ako fluid ima veliki toplinski kapacitet ostvarit će maksimalno moguću temperaturnu promjenu, ali zakon očuvanja energije u obliku $C_{max}(T_{h,in} - T_{c,in}) = -C_{min}(T_{h,in} - T_{c,in})$ zahtijeva još veću temperaturnu promjenu fluida. Npr. ako je $C_{max} = C_c$ i pretpostavi se da je moguće postići $T_{c,out} = T_{h,in}$ slijedi da je:

$$T_{h,in} - T_{h,out} = \frac{C_c}{C_h}(T_{c,out} - T_{c,in}), \quad (3.76)$$

za što vrijedi da je $(T_{h,in} - T_{h,out}) > (T_{h,in} - T_{c,in})$ što nije moguće. Kao ilustraciju navedene problematike može se zamisliti da izmjenjivač topline kojim zagrijavamo zrak u prostoriju. Izmjenjivač se opskrbljuje vodom na nekoj temperaturi $T_{h,in}$, gornja nejednakost bi značila da se temperatura vode unutar izmjenjivača topline spušta ispod temperature zraka koja ulazi u izmjenjivač (temperatura sobe) $T_{c,in}$ što nije moguće.

Efikasnost ε definira se kao omjer stvarno prenesenog toplinskog toka u izmjenjivaču topline i maksimalnog mogućeg toka:

$$\varepsilon = \frac{H}{H_{max}}, \quad H = C_h(T_{h,in} - T_{h,out}) = C_c(T_{c,out} - T_{c,in}) \quad (3.77)$$

Prema definiciji, efikasnost je bezdimenzionalna veličina koja može poprimiti vrijednost u području $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Uz poznatu efikasnost izmjenjivača topline ε , poznavanje ulaznih temperatura fluida i protoka fluida s minimalnim toplinskim kapacitetom, toplinski tok koji se prenosi glasi:

$$H = \varepsilon H_{min} = \varepsilon C_{min}(T_{h,in} - T_{c,in}). \quad (3.78)$$

Analiza efikasnosti za istosmjerni izmjenjivač topline

Ovisno o tome koji fluid ima manji toplinski kapacitet, efikasnost se može izraziti kao:

$$\varepsilon = \frac{C_h(T_{h,in} - T_{h,out})}{C_{min}(T_{h,in} - T_{c,in})} \quad \text{ili} \quad \varepsilon = \frac{C_c(T_{c,out} - T_{c,in})}{C_{min}(T_{h,in} - T_{c,in})}. \quad (3.79)$$

Ukoliko promatramo istosmjerni izmjenjivač topline, te pretpostavimo da je $C_{min} = C_c$ slijedi:

$$\varepsilon = \frac{T_{c,out} - T_{c,in}}{T_{h,in} - T_{c,in}}, \quad (3.80)$$

$$c_o = \frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{(T_{h,in} - T_{h,out})}{(T_{c,out} - T_{c,in})}. \quad (3.81)$$

Iz jednadžbe (3.66) koja može biti zapisana kao:

$$-\frac{UA}{C_{min}} \left(1 + \frac{C_{min}}{C_{max}}\right) = \ln \left(\frac{T_{h,out} - T_{c,out}}{T_{h,in} - T_{c,in}} \right). \quad (3.82)$$

Broj prijenosnih jedinica NTU (eng. Number of Transfer Units) predstavlja mjeru kapaciteta (veličinu) izmjenjivača topline i definiran je kao:

$$NTU = \frac{UA}{C_{min}}. \quad (3.83)$$

Antilogaritmiranjem izraza (3.82) slijedi:

$$\frac{T_{h,out} - T_{c,out}}{T_{h,in} - T_{c,in}} = \exp(-NTU(1 + c_o)). \quad (3.84)$$

Iz jednadžbe (3.81) slijedi:

$$T_{h,out} = -c_o(T_{c,out} - T_{c,in}) + T_{h,in}. \quad (3.85)$$

Pomoću dobivenoga izraza lijeva strana jednadžbe (3.84) može se zapisati kao:

$$\begin{aligned} \frac{T_{h,out} - T_{c,out}}{T_{h,in} - T_{c,in}} &= \frac{T_{h,out} - T_{c,out} + T_{c,in} - T_{c,in}}{T_{h,in} - T_{c,in}} \\ &= \frac{(T_{h,in} - T_{c,in}) - (T_{c,out} - T_{c,in})(1 + c_o)}{T_{h,in} - T_{c,in}} \\ &= 1 - \varepsilon(1 + c_o). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Konačno uvrštavanjem dobivenog izraza za lijevu stranu jednadžbe u jednadžbu (3.84) i izlučivanjem efikasnosti ε slijedi:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp(-NTU(1 + c_o))}{1 + c_o}. \quad (3.87)$$

Do istog se rezultata dolazi i ako se pretpostavi $C_{min} = C_h$, stoga je navedena jednadžba primjenjiva za bilo koji istosmjerni izmjenjivač topline, bez obzira da li minimalni toplinski kapacitet ima topli ili hladni fluid.

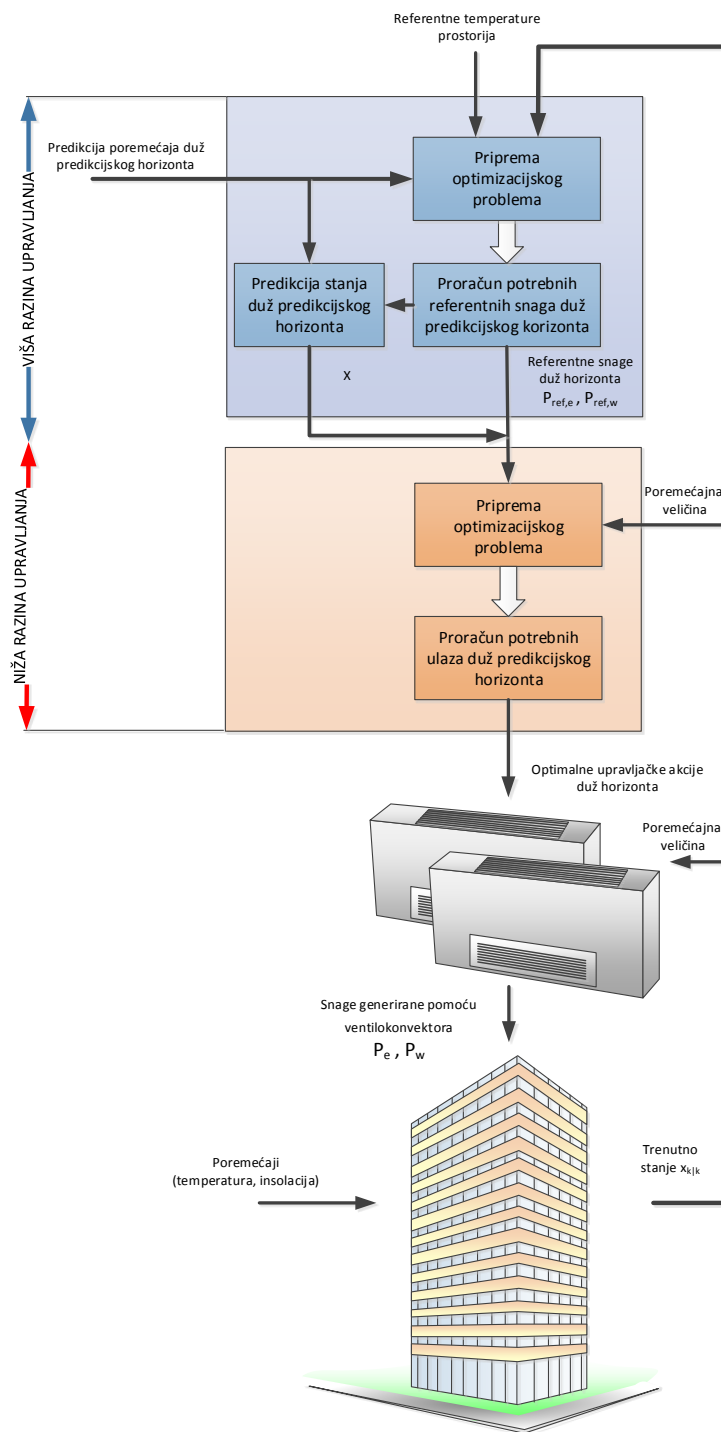
Slični se rezultati mogu dobiti za različite konfiguracije izmjenjivača topline [6]. Pripadajući izrazi za neke od njih sumirani su u Tablici 3.1.

Paralelni izmjenjivač topline	
Istosmjerni	$\varepsilon = \frac{1 - \exp(-NTU(1 + c_o))}{1 + c_o}$
Protusmjerni	$\varepsilon = \frac{1 - \exp(-NTU(1 - c_o))}{1 - c_o \exp(-NTU(1 - c_o))}$
Unakrsni izmjenjivač topline	
Oba fluida bez vrtloženja	$\varepsilon = 1 - \exp\left[\frac{1}{c_o} NTU^{0.22} (\exp(-c_o NTU^{0.78}) - 1)\right]$

Tablica 3.1: Izrazi za efikasnost ε različitih izmjenjivača topline.

Hijerarhijsko optimalno upravljanje

Algoritam hijerarhijskog optimalnog upravljanja grijanjem i hlađenjem organiziran je u dvije razine: na višoj razini odlučuje se o optimalnim toplinskim tokovima za prostorije kako bi se održao željeni profil temperature u prostoriji, dok se na nižoj razini navedeni toplinski tokovi ostvaruju optimalnim upravljačkim akcijama na ventilokonvektor. Načelna shema izvedbe hijerarhijskog optimalnog upravljanja prikazana je na Slici 4.1. S ciljem povećanja energetske efikasnosti procesa grijanja i hlađenja na obje razine korišten je princip modelskog prediktivnog upravljanja. Budući da se vanjski vremenski uvjeti (poremećaji koji djeluju na vanjsku ovojnicu zgrade) mogu u budućnosti odrediti samo s određenim granicama nesigurnosti, tj. stohastički, na višoj razini upravljanja korišteno je stohastičko modelsko prediktivno upravljanje. Stohastičko modelsko prediktivno upravljanje uzima u obzir nesigurnost (stohastičku prirodu) poremećaja koji djeluju na proces. Uvođenjem slučajnih poremećajnih varijabli s Gaussovom funkcijom gustoće razdiobe u sintezu regulatora, za razliku od determinističkog pristupa, ograničenja mogu biti ispunjena samo s određenom vjerojatnošću. Problem stohastičkog optimalnog upravljanja u ovom radu predstavlja konusni problem drugog reda. Na donjoj razini zbog diskretnih stanja koja poprima ventilator, tj. zbog diskretnog intervala mogućih vrijednosti masenog protoka kojeg generira ventilator javlja se problem cjelobrojnog programiranja. Cilj optimizacije na donjoj razini je minimizacija kvadrata integrala razlike između referentnih snaga generiranih od strane gornje upravljačke razine i stvarnih snaga generiranih u prostorije uz istovremenu minimizaciju utroška energije od strane aktuatora (ventilator, ventil). Na donjoj razini problem optimalnog upravljanja toplinskim procesom u zgradi se



Slika 4.1: Načelna shema hijerarhijskog optimalnog upravljanja.

decentralizira po prostorijama. Decentralizacija je omogućena zbog dobre toplinske izolacije cijevi kojima se ogrjevni/rashladni medij dovodi do ventilokonvektora. Dobra toplinska izolacija omogućuje zanemarivanje gubitaka topline ogrjevnog medija unutar dovodnih cijevi i decentralizaciju sustava. Prednost ovakvog načina upravljanja leži u skalabilnosti samog problema upravljanja. Skalabilnost predstavlja svojstvo sustava da se može prilagođavati smanjenju i povećanju dimenzije sustava.

4.1 Stohastičko modelsko prediktivno upravljanje

Budući da se na proces djeluje po dijelovima konstantnim upravljačkim signalima iz digitalnog računala, a realizirani toplinski model zgrade je kontinuiran, prije svega treba obaviti diskretizaciju tog modela. Da bi ponašanje modela što vjernije opisivalo realno ponašanje toplinskih procesa, potrebno je osigurati linearnu promjenu smetnji između vremena uzorkovanja. Da bi se to postiglo diskretizacija ulaza i stanja obavlja se pomoću ekstrapolatora nultog reda (ZOH), dok se za diskretizaciju poremećaja koristi ekstrapolator prvog reda (FOH). Oba ekstrapolatora koriste isto vrijeme uzorkovanja od jedan sat. Pošto programski alat MATLAB ne podržava linearnu interpolaciju, tj. ekstrapolaciju prvog reda, diskretizacija se provodi iterativno. Riješenje sustava:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2d(t), \quad (4.1)$$

pri čemu se $u(t)$ sastoji od upravljačkih ulaza kojima se djeluje na proces (toplinski tokovi generirani pomoću ventilokonvektora), a $d(t)$ se sastoji od vanjskih poremećaja koji djeluju na proces (temperatura, insolacija). Riješenje jednadžbe (4.1) u vremenskoj domeni glasi:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B_1u(\tau)d\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B_2d(\tau)d\tau. \quad (4.2)$$

Diskretizacijom rješenja jednadžbe u vremenskom području uz:

$$u(t) = u(kT) + \frac{(t - kT)}{T}(u((k + 1)T) - u(kT)), \quad (4.3)$$

dobiva se sljedeće diskretno rješenje sustava :

$$\begin{aligned} x((k + 1)T) &= e^{AT}x(kT) + \left(\int_0^T e^{A\tau}B_1d\tau\right)u(kT) \\ &+ \left(\int_0^T e^{A\tau}B_2d\tau - \frac{1}{T}\int_0^T e^{A\tau}B_2\tau d\tau\right)d(kT) \\ &+ \left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{A\tau}B_2\tau d\tau\right)d((k + 1)T), \end{aligned} \quad (4.4)$$

tj. zapisano u matičnoj formi :

$$x((k + 1)T) = \phi(T)x(kT) + \Theta u(kT) + \Gamma_1d(kT) + \Gamma_2d((k + 1)T), \quad (4.5)$$

pri čemu su matrice ϕ , Θ , Γ_1 i Γ_2 proračunate iz izraza (4.4). Provodeći opisani postupak nad ranije definiranim vremenski kontinuiranim modelom zgrade dobiva se diskretni sustav opisan sljedećom jednadžbom:

$$x_{k+1} = A_dx_k + B_du_k + B_{dd1}d_k + B_{dd2}d_{k+1}. \quad (4.6)$$

Korištenjem linearne promjene poremećaja dobiva se bolja dinamika sustava jer sustav ranije reagira na poremećaj koji slijedi. Na taj način ponašanje smetnje približava se ponašanju realnih smetnji. Najveći izazov prilikom upotrebe predikcije vanjske temperature i sunčevih dozračenosti vanjskih zidova leži u njihovoj svojstvenoj nesigurnosti zbog stohastičke prirode atmosferskih procesa. Ponašanje poremećaja može se rastaviti kao:

$$d_k = \bar{d}_k + w_k. \quad (4.7)$$

Pri čemu je \bar{d}_k predikcija vanjskog poremećaja, w_k stohastička pogreška prognoze u koraku k , a d_k ukupni iznos poremećaja koji djeluje na sustav u trenutku k . U nastojanju procjene budućeg ponašanja poremećaja d_k pretpostavlja se da smetnja ima Gaussovu razdiobu:

$$w_k \sim \mathcal{N}(\bar{w}_k, \sigma^2), \quad (4.8)$$

pri čemu je očekivanje $\bar{w}_k = 0$, dok je varijanca σ korisnički određena i govori da će slučajna varijabla $w_k \sim \mathcal{N}(\bar{w}_k, \sigma^2)$ s vjerojatnošću od 99,73% poprimiti vrijednost iz intervala $(\bar{w}_k - 3\sigma, \bar{w}_k + 3\sigma)$, tj. uz $\bar{w}_k = 0$, w_k će poprimiti vrijednost iz intervala $(-3\sigma, +3\sigma)$. Uzimajući u obzir predikcijski horizont N , stanja, ulazi, smetnje i pogreška predikcije duž predikcijskog horizonta definirani su kao :

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} x_{t+1|t}^T & x_{t+2|t}^T & \cdots & x_{t+N|t}^T \end{bmatrix}^T, \\ U &= \begin{bmatrix} u_{t|t}^T & u_{t+1|t}^T & \cdots & u_{t+N-1|t}^T \end{bmatrix}^T, \\ D &= \begin{bmatrix} d_{t|t}^T & d_{t+1|t}^T & \cdots & d_{t+N|t}^T \end{bmatrix}^T, \\ W &= \begin{bmatrix} w_{t|t}^T & w_{t+1|t}^T & \cdots & w_{t+N|t}^T \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Na ovaj način model stanja dobiven uvođenjem nesigurnosti koja se ravna prema Gaussovoj razdiobi može se zapisati kao:

$$X = \alpha x_{t|t} + \beta U + \gamma D + \gamma W. \quad (4.10)$$

Cilj upotrebe MPC-a su čim manji kumulativni upravljački napori duž predikcijskog horizonta. Da bi se proračunao optimalan U , tj. U s najmanjim očekivanjem upravljačkih napora potrebno je postaviti optimizacijski MPC problem. Kako bi na predikcijskom horizontu omogućili funkcioniranje principa povratne veze za slučaj kada postoje nesigurni poremećaji, pretpostavlja se da trenutni upravljački ulaz preko afinog

zakona ovisi o prošlim realizacijama poremećaja. Po analogiji s [11] uvodi se afino povratno djelovanje:

$$u_{t|t+k} = h_{t|t+k} + \sum_{j=0}^{k-1} M_{k,j} w_j, \quad (4.11)$$

pri čemu je $h_{t|t+k} \in \mathbb{R}^2$ i $M_{k,j} \in \mathbb{R}^{2 \times 12}$. Uvođenjem tako definiranih ulaza, optimizacijski problem može se riješiti korištenjem konveksnih optimizacijskih metoda. U matricnoj formi jednadžba (4.11) prelazi u:

$$U = MW + H, \quad (4.12)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ M_{1,0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ M_{N-1,0} & \cdots & M_{N-1,N-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

pri čemu je:

$$H = (h_{t|t}^T, h_{t+1|t}^T, \dots, h_{t+N-1|t}^T)^T. \quad (4.14)$$

Formulacijom (4.12) ulazi se definiraaju kao afine funkcije normalno distribuiranih slučajnih varijabli. Kako bi se SMPC problem mogao promatrati kao konveksan i lako obradiv optimizacijski problem koji može biti riješen u svakom koraku, potrebno je po analogiji s [11], konveksnim ograničenjima izraziti stupanj nesigurnosti za zadovoljenje ograničenja. Za razliku od determinističkog MPC-a, SMPC formulacijom nije moguće osigurati zadovoljenje ograničenja za sve moguće kombinacije smetnji w_k , već ih je moguće ispuniti samo s određenom vjerojatnošću $(1 - \alpha_k)$, zbog čega se uvodi sljedeća formulacija:

$$\begin{aligned} P[S_j U \leq s_j] &\geq (1 - \alpha_j), \quad \forall j = 1, \dots, q \\ S &\in \mathbb{R}^{q \times 2N}, \quad s \in \mathbb{R}^q, \\ P[G_i X \leq g_i] &\geq (1 - \alpha_i), \quad \forall i = 1, \dots, r \\ G &\in \mathbb{R}^{r \times 33N}, \quad g \in \mathbb{R}^r. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dimenzije navedenih vektora ovise o broju postavljenih ograničenja nad ulazima, tj. stanjima. Izraz S_k označava k-ti redak matrice S , a izraz $(1 - \alpha_k)$ uz $\alpha_k \in [0, 1]$ označava razinu vjerojatnosti da se pripadno ograničenje ispuni. Za svako stanje i ulaz duž predikcijskog horizonta moguće je definirati zasebna ograničenja, koja će biti ispunjena

sa zasebnom vjerojatnošću $(1 - \alpha_k)$. Deterministička reformulacija ograničenja stanja uvođenjem afinog povratnog djelovanja glasi :

$$\begin{aligned} P[G_i(\alpha x_{t|t} + \beta MW + \beta H + \gamma D + \gamma W) \leq g_i] &\geq (1 - \alpha_i), \\ P[G_i(\alpha x_{t|t} + (\beta M + \gamma)W + \beta H + \gamma D) \leq g_i] &\geq (1 - \alpha_i). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Zbroj dviju varijabli koje se ravnaaju po normalnoj razdiobi, daje ponovno novu varijablu koja se također ravna po normalnoj razdiobi, te posjeduje varijancu i očekivanje koji su funkcija varijanci i očekivanja varijabli koje se zbrajaju. Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s normalnim razdiobama

$$X_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2), \quad X_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2) \quad (4.17)$$

i s_1, s_2 bilo koji realni brojevi. Tada vrijedi :

$$s_1 X_1 + s_2 X_2 \sim \mathcal{N}(s_1 a_1 + s_2 a_2, s_1^2 \sigma_1^2 + s_2^2 \sigma_2^2). \quad (4.18)$$

Primjenjujući to svojstvo na (4.16) i uz pretpostavku konstantne varijance σ slučajnih varijabli W duž predikcijskog horizonta dobiva se:

$$\sigma \phi^{-1}(1 - \alpha_i) \|G_i(\beta M + \gamma)\|_2 \leq g_i - G_i(\alpha x_{t|t} + \beta H + \gamma D). \quad (4.19)$$

pri čemu je ϕ Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti za Gaussovu slučajnu varijablu s varijancom $\sigma = 1$, a $\|\cdot\|_2$ označava normu-2 (Euklidsku normu) nekog vektora. Norma-2 je matematička funkcija koja za zadani vektor daje njegovu duljinu. Ukoliko je x vektor za koji vrijedi $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ norma-2 vektora x glasi :

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad (4.20)$$

S obzirom da vektor smetnji D sadrži veličine koje se izražavaju u različitim jedinicama, da bi sustav bio što realniji uvode se različite varijance. Za očekivati je da će pogreška predikcije rasti s predikcijskih horizontom. Sukladno tome pretpostavlja se porast varijance duž predikcijskog horizonta. Kod noćnih sati nema nesigurnosti sunčeve dozračenosti, pošto je ona tijekom noćnih sati jednaka nuli. Varijanca smetnje definirana duž cijelog predikcijskog horizonta može se zapisati kao:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{t|t}^T & \sigma_{t+1|t}^T & \dots & \sigma_{t+N|t}^T \end{bmatrix}^T. \quad (4.21)$$

Uvođenjem promjenjive varijance poremećaja, izraz (4.19) prelazi u:

$$\phi^{-1}(1 - \alpha_i) \|G_i(\beta M + \gamma) \cdot \Sigma\|_2 \leq g_i - G_i(\alpha x_{t|t} + \beta H + \gamma D), \quad (4.22)$$

pri čemu operator $*$ označava množenje po elementima. Deterministička reformulacija ograničenja ulaza uvođenjem afinog povratnog djelovanja glasi :

$$\begin{aligned} P[S_j(MW + H) \leq s_j] &\geq (1 - \alpha_j), \\ \phi^{-1}(1 - \alpha_j)\|S_j M \cdot * \Sigma\|_2 &\leq s_j - S_j H, \end{aligned} \quad (4.23)$$

Efikasno upravljanje ostvaruje se minimizacijom uloženog upravljačkog napora koji osigurava zadovoljenje ograničenja postavljenih nad stanjima i ulazima duž cijelog predikcijskog horizonta sa zadanom vjerojatnošću. Minimalna uložena energiju postiže se optimizacijom, tj. pronalaskom vektora $U = MW + H$ s minimalnim očekivanjem. Optimizacijski problem glasi:

$$\min E(\|MW + H\|_1). \quad (4.24)$$

Uzimajući u obzir definiciju same poremećajne varijable w čije je očekivanje jednako nula ($E(w) = 0$), izraz (4.24) može se zapisati kao:

$$\min \|H\|_1. \quad (4.25)$$

Minimalna apsolutna vrijednost ulaznog napora postiže se uvođenjem novih varijabli, tzv. vektora odluke Z_u za koje vrijedi:

$$\begin{aligned} Z_u &\geq H, \\ Z_u &\geq -H. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Krajnji optimizacijski problem glasi:

$$\begin{aligned} \min_{M, H} 1^T Z_u, \\ \phi^{-1}(1 - \alpha_i)\|G_i(\beta M + \gamma) \cdot * \Sigma\|_2 &\leq g_i - G_i(\alpha x_{t|t} + \beta H + \gamma D), \quad \forall i = 1, \dots, r, \\ \phi^{-1}(1 - \alpha_j)\|S_j M \cdot * \Sigma\|_2 &\leq s_j - S_j H, \quad \forall j = 1, \dots, q, \\ -Z_u &\leq H \leq Z_u. \end{aligned} \quad (4.27)$$

pri čemu je 1^T jedinični vektor s duljinom jednakom duljini vektora Z_u . Optimizacijski problem definiran kao (4.27) predstavlja konusni program drugog reda (eng. **Second-order cone programming**) i rješava se pomoću solvera koji podržava tu vrstu problema. Za potrebe ovog rada korišten je SOCP solver SeDuMi [12]. Detaljna analiza rada i prednost upotrebe stohastičkog pristupa nad determinističkim može se pronaći u [10] i [9].

4.2 Mješovito cjelobrojno nelinearno programiranje

Mješovito cjelobrojno programiranje je optimizacijska metoda koja kombinira kontinuirane i diskretne varijable. Problem mješovitog cjelobrojnog nelinearnog optimiranja javlja se na donjoj razini upravljanja zbog diskretnog intervala vrijednosti koje može poprimiti maseni protok zraka generiran od strane ventilatora i izrazite nelinearnosti koja opisuje ovisnost snage generirane u prostorije o ulaznim protocima zraka i ogrjevnog/rashladnog medija. Matematički se problem mješovitog cjelobrojnog nelinearnog programiranja može zapisati u sljedećoj formi:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \mathbb{J}(\mathbf{X}), \\ \mathbf{A}\mathbf{X} < \mathbf{B}, \\ x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \\ x_j \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Vektor \mathbf{X} sadrži optimalne iznose upravljačkih signala duž predikcijskog horizonta. Dimenzija vektora \mathbf{X} odgovara ukupnom zbroju kontinuiranih varijabli n i diskretnih varijabli m . Funkcija $\mathbb{J}(\mathbf{X})$ je skalarna funkcija koja definira nelinearni optimizacijski problem duž predikcijskog horizonta. Ovisno o solveru koji se koristi uz ograničenja tipa nejednakosti (matrice \mathbf{A}, \mathbf{B}) mogu se uvesti i ograničenja tipa jednakosti, nelinearna ograničenja ili ograničenja tipa donje i gornje granice problema. Maseni protok zraka može poprimiti četiri različite cjelobrojne vrijednosti. Povećanjem optimizacijskog horizonta N broj mogućih rješenja raste po eksponencijalnom zakonu (5^N). Upravo zbog veličine samog problema rješavanje problema cjelobrojnog programiranja mnogo je zahtjevnije od rješavanja optimalnih problema s kontinuiranim optimizacijskim varijablama. Budući da problemi cjelobrojnog programiranja imaju samo konačan broj mogućih rješenja, prva ideja za rješavanje takvih problema bila je ispitivanje svih mogućih rješenja. Zbog veoma velikog broja mogućih kombinacija i za veoma mali broj cjelobrojnih varijabli to nije moguće. Rješenje je uvođenje usmjerenog pretraživanja. Velik broj dostupnih solvera koji rješavaju problem cjelovitog i mješovitog cjelobrojnog programiranja zasnivaju se na metodi grananja i ograđivanja (eng. *Branch & Bound*). Metoda grananja i ograđivanja zasniva se na principu podijeli pa vladaj. Početni problem obično je presložen da bi se riješio izravno. Zbog toga se dijeli na manje i manje dijelove koji se mogu riješiti. Dijeljenje prostora obavlja se ograničavanjem vrijednosti pojedinih varijabli dok se procjenom maksimalne vrijednosti rješenja u pojedinom dijelu mogu odbaciti dijelovi prostora koji daju nezadovoljavajuće vrijednosti funkcije cilja. U nastavku se nalazi kratak opis algoritma grananja i ograđivanja s ciljem prikazivanja

sustavnog načina rješavanja problema mješovitog cjelobrojnog programiranja. U ovom radu za rješavanje problema mješovitog cjelobrojnog programiranja i nelinearnog programiranja korištena su gotova nekomercijalna rješenja poput Nomad-a [4] i OPTI Toolbox-a [3].

4.2.1 Metoda grananja i ograđivanja

Prvi korak kod rješavanja problema mješovitog cjelobrojnog programiranja algoritmom grananja i ograđivanja je relaksacija cjelobrojnih varijabli. Relaksacijom se omogućava da optimizacijske varijable poprime kontinuirane vrijednosti unutar ranije definiranog diskretnog skupa. Kontinuirane vrijednosti su pritom ograničene maksimalnom i minimalnom vrijednošću diskretnog skupa vrijednosti [1]. Ukoliko se radi o varijablama koje mogu poprimiti vrijednosti iz diskretnog skupa:

$$x_j \in \{ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \}, \quad (4.29)$$

relaksirane varijable \bar{x}_j moći će poprimiti kontinuirane vrijednosti unutar skupa:

$$0 \geq \bar{x}_j \leq 3. \quad (4.30)$$

Sljedeći korak je rješavanje relaksiranog optimizacijskog problema. Rješavanjem relaksiranog optimizacijskog problema dobiva se rješenje koje je najoptimalnije moguće rješenje budući da je dobiveno optimizacijom nad područjem koje je nadskup cjelobrojnog skupa varijabli. Dobivena vrijednost funkcije cilja predstavlja donju granicu vrijednosti funkcije cilja ukoliko se radi o minimizaciji i gornju granicu funkcije cilja ukoliko se radi o maksimizaciji funkcije cilja. U nastavku se promatra samo problem minimizacije funkcije cilja. Gornja granica se utvrđuje kroz grananja te se u početnom trenutku postavlja na beskonačno. Nakon rješavanja relaksiranog problema odabire se jedna od cjelobrojnih varijabli koja u rješenju relaksiranog problema nije poprimila cjelobrojnu vrijednosti. Taj postupak naziva se grananje. Grananjem neke varijable početni problem se dijeli na dva nova podproblema ili čvora. Novi čvorovi predstavljaju problem nadčvora, tj. u prvom grananju početni problem, uz uvođenje ograničenja na varijablu po kojoj se grana. Neka je S skup mogućih rješenja početnog relaskiranog problema:

$$S = \{x : \mathbb{J}(\mathbf{X}), \mathbf{A}\mathbf{X} < \mathbf{b}\}, \quad (4.31)$$

svakim grananjem se problem nadčvora razdvaja na dva podproblema:

$$\begin{aligned} S1 &= S \cap \{x : x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor\}, \\ S2 &= S \cap \{x : x_j \geq \lceil \bar{x}_j \rceil\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

pri čemu operatori $\lfloor \cdot \rfloor$ i $\lceil \cdot \rceil$ označavaju zaokruživanje na manju, tj. veću cjelobrojnu vrijednost. Nakon grananja svaka od novododanih grana se rješava te se provjerava optimalnost i rješivost optimizacijskog problema. Ovisno o ishodu optimizacije svaki od novih čvorova može se granati dalje ili se grananje može na njemu zaustaviti. Grananje na čvoru se zaustavlja ako uz novopostavljene uvijete optimizacijski problem nije rješiv. Ukoliko se u nekom od grananja postigne iznos funkcije cilja koji je manji od gornje granice, taj iznos funkcije cilja postavlja se kao gornja granica. Ukoliko se rješavanjem problema nakon grananja dobiva iznos funkcije cilja koji je veći od postavljene gornje granice grananje na tom čvoru prestaje. Grananje se nastavlja sve dok zbog gore navedenih razloga grananje nije zaustavljeno na svim čvorovima. Nakon zaustavljanja grananja, optimalnu vrijednost daje čvor s najmanjim iznosom funkcije cilja. Algoritam koji opisuje metodu grananja i ograđivanja može se opisati pomoću sljedećih koraka:

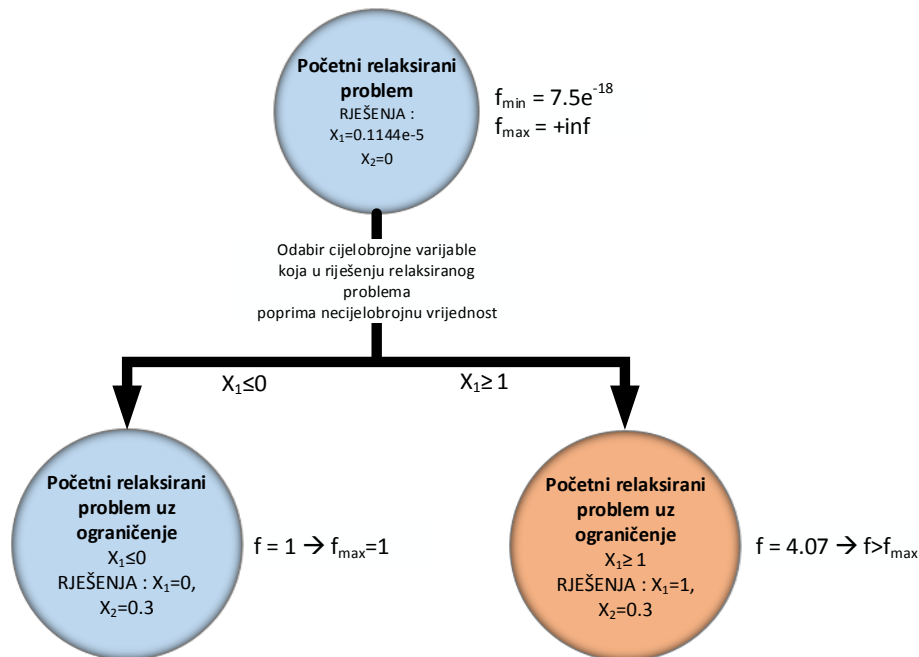
1. relaksacija cjelobrojnih varijabli $x_j \in \mathbb{Z} \longrightarrow \bar{x}_j \in \mathbb{R}$,
2. rješavanje relaksiranog problema (ograđivanje),
3. odabiranje jednog čvora j ,
 - a) idi na 2. uz $x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor$,
 - b) idi na 2. uz $x_j \geq \lceil \bar{x}_j \rceil$.

Kao primjer za prikaz algoritma izabrana je nelinearna funkcija cilja dviju varijabli, od kojih je jedna cjelobrojna a druga kontinuirana:

$$\mathbb{J}(x_1, x_2) = \frac{5x_1^4 + x_2}{x_1 + x_2}, \quad (4.33)$$

$$x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Grafički prikaz tijeka optimizacije prikazan je na Slici 4.2. Nakon rješavanja početnog relaksiranog problema, problem se grana po cjelobrojnoj varijabli koja u rješenju relaksiranog problema nije poprimila cjelobrojnu vrijednost. Dodaju se dvije nove grane u kojima se rješava početni relaksirani optimizacijski problem uz ograničenja koja proizlaze iz odabrane varijable po kojoj se grana. Rješavanjem novonastalih problema dobivaju se rješenja, koja daju određene iznose kriterijskih funkcija. Problem u lijevoj grani daje manju vrijednost funkcije cilja od početnog problema. Stoga maksimalna vrijednost funkcije cilja postaje vrijednost funkcije cilja određena rješenjem problema u lijevoj grani. Rješenjem problema u desnoj grani dobiva se vrijednost funkcije cilja koja je veća od maksimalne vrijednosti ranije definirane u lijevoj grani te se taj čvor



Slika 4.2: Grafički prikaz algoritma grananja i ograđivanja na primjeru minimizacije zadane nelinearne funkcije cilja.

odbacuje. U lijevom čvoru ne postoje cjelobrojne varijable koje poprimaju necjelobrojne vrijednosti te se grananje zaustavlja. Optimalan rezultat definiran je najvećim iznosom funkcije cilja, tj. rješenjem lijeve grane. Optimalno rješenje problema stoga glasi: $x_1=0$, $x_2=0.3$.

4.3 Optimalno upravljanje ventilokonvektorima

Problem optimalnog upravljanja toplinskim procesom na donjoj razini decentraliziran je po prostorijama. Iz Slike 3.1 vidljivo je da se u manjim prostorijama nalazi po jedan ventilokonvektor, dok se u većoj prostoriji nalaze dva ventilokonvektora. Ventilokonvektori u većoj prostoriji rade sinkronizirano, tj. svaki ostvaruje pola potrebne referentne snage po prostoriji koju generira viša razina upravljanja. Snaga koju pojedini ventilokonvektor emitira u prostoriju, uz brzinu ventilatora iz koje proizlaze koeficijenti p_1, q_1 i q_2 definirana je kao:

$$P = \frac{2p_1c_wQ_w}{2c_wQ_w^2 + 2c_wq_1Q_w + 2c_wq_2 + p_1}(T_{w,in} - T_{a,in}). \tag{4.34}$$

Gornja razina uz referentne snage duž predikcijskog horizonta daje i predikciju temperature duž predikcijskog horizonta. Predikcija temperature dobiva se primjenom vektora optimalnih referentnih snaga duž predikcijskog horizonta na toplinski model definiran duž predikcijskog horizonta (jednadžba 4.10) uz zanemareno djelovanje smetnji. Poznavanje vladanja temperature u budućnosti omogućuje interpolaciju vladanja temperature prostorije unutar vremena uzorkovanja. Pretpostavlja se da se temperatura unutar intervala od 1 sat mijenja po PT_1 zakonu s vremenskom konstantnom T_l . Cilj optimalnog upravljanja ventilokonvektorima na nižoj razini upravljanja je minimizacija kvadrata integrala odstupanja između referentne snage generirane za pojedinu prostoriju na višoj razini P_{ref} i stvarne snage ostvarene pomoću ventilokonvektora koji se nalazi u prostoriji P duž predikcijskog horizonta:

$$\min_{\mathbf{X}} \sum_{n=0}^{N_l-1} \left(\int_{nT}^{(n+1)T} (P_{ref} - P(\mathbf{X}_{k+n+1|k})) \right)^2, \quad (4.35)$$

pri čemu je N_l predikcijski horizont donje razine upravljanja, T vrijeme uzorkovanja donje razine upravljanja, a vektor \mathbf{X} sadrži optimalne upravljačke ulaze duž predikcijskog horizonta:

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{X}_{k+1|k} \quad \mathbf{X}_{k+2|k} \quad \mathbf{X}_{k+3|k} \quad \cdots \quad \mathbf{X}_{k+N_l|k} \right]^T. \quad (4.36)$$

Vektor $\mathbf{X}_{k+1|k}$ sadrži optimalne upravljačke ulaze trenutku $k+1$ dobivene na temelju podataka dostupnih u trenutku k :

$$\mathbf{X}_{k+1|k} = \left[x_{1,k+1|k} \quad x_{2,k+1|k} \quad x_{3,k+1|k} \quad x_{4,k+1|k} \quad x_{5,k+1|k} \right]^T. \quad (4.37)$$

Mogu se postići četiri različite karakteristike snage sustava u ovisnosti o odabranom stanju ventilatora. Karakteristika ventila opisana je pomoću sljedeće relacije:

$$Q_w(x_{5,k+n+1|k}) = k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k}, \quad \forall n \in [0, N_l - 1], \quad (4.38)$$

pri čemu je k_v konstanta ventila, ΔP razlika tlakova na krajevima ventila, a $x_{5,k+n|k}$ kontinuirana upravljačka varijabla koja predstavlja otvorenost ventila i može poprimiti vrijednosti iz intervala $[0, 100]\%$. Mješovito cjelobrojno programiranje omogućuje zapisivanje problema postojanja četiriju karakteristika snage ventilokonvektora na

sljedeći način:

$$\begin{aligned}
UA(\mathbf{X}_{k+n|k}) &= \sum_{i=1}^4 x_{i,k+n+1|k} \frac{p_{1,i} Q_w}{Q_w^2 + q_{1,i} Q_w + q_{2,i}}, \\
\sum_{i=1}^4 x_{i,k+n+1|k} &= 1, \quad x_{i,k+n+1|k} \in \{0, 1\}, \\
P(\mathbf{X}_{k+n+1|k}) &= \frac{2c_w Q_w UA}{2c_w Q_w + UA} (T_{w,in} - T_{a,in}), \\
\forall n &\in [0, N_t - 1],
\end{aligned} \tag{4.39}$$

tj. ako se gornje jednadžbe raspišu:

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{X}_{k+n+1|k}) &= \sum_{i=1}^4 \frac{x_{i,k+n+1|k} 2p_{1,i} c_w k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n|k}}{2c_w ((k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k})^2 + q_{1,i} k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k} + q_{2,i}) + p_{1,i}} (T_{w,in} - T_{a,in}), \\
\sum_{i=1}^4 x_{i,k+n+1|k} &= 1, \quad x_{i,k+n+1|k} \in \{0, 1\}, \\
x_{5,k+n+1|k} &\in \mathbb{R} \quad 0 \leq x_{5,k+n|k} \leq 100, \\
\forall n &\in [0, N_t - 1].
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Koeficijenti $p_{1,i}$, $q_{1,i}$ i $q_{2,i}$ predstavljaju koeficijente dobivene u poglavlju o modeliranju ventilokonvektora dobivene aproksimacijom proračunate karakteristike ukupnog koeficijenta prijenosa topline po površini pomoću kontinuirane funkcije. Član $\sum_{i=1}^4 x_{i,k+n+1|k} = 1$ uz ograničenje $x_{i,k+n+1|k} \in \{0, 1\}$ govori da u jednom trenutku uzorkovanja može biti aktivna samo jedna karakteristika sustava, tj. samo jedna brzina ventilatora. Kako bi se u obzir uzela dinamika prostorije, tj. promjene temperature u prostoriji, minimizira se razlika integrala, a ne razlika trenutnih snaga koje se predaju prostoriji. Integral snage predane prostoriji unutar vremena uzorkovanja definiran je kao:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \sum_{i=1}^4 x_{i,k+n+1|k} \frac{2p_{1,i} c_w k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k}}{2c_w ((k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k})^2 + q_{1,i} k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k} + q_{2,i}) + p_{1,i}} (T_{w,in} - T_{a,in}) dt. \tag{4.41}$$

Integral zbroja jednak je zbroju integrala pa slijedi:

$$\sum_{i=1}^4 \int_{nT}^{(n+1)T} x_{i,k+n+1|k} \frac{2p_{1,i}c_w k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k}}{2c_w((k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k})^2 + q_{1,i}k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k} + q_{2,i}) + p_{1,i}} (T_{w,in} - T_{a,in}) dt. \quad (4.42)$$

Uz pretpostavku da se unutar vremena jednog uzorkovanja gornje upravljačke razine događa promjena temperature u iznosu $\Delta T_{a,in,k+n+1|k}$, gornji integral može se razriješiti kao:

$$\sum_{i=1}^4 x_{i,k+n+1|k} \frac{2p_{1,i}c_w k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k}}{2c_w((k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k})^2 + q_{1,i}k_v \sqrt{\Delta P} x_{5,k+n+1|k} + q_{2,i}) + p_{1,i}} (T_{w,in}T - I), \quad (4.43)$$

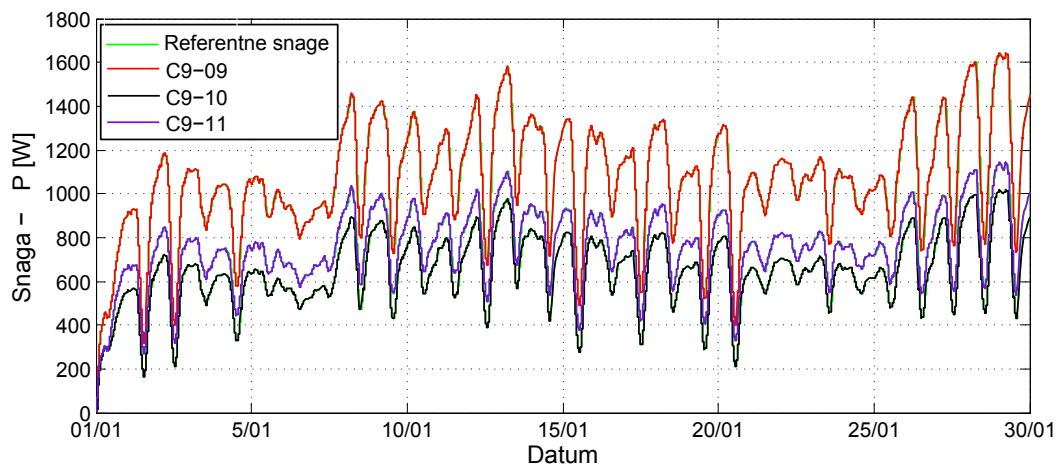
pri čemu I označava integral temperature prostorije unutar vremena uzorkovanja T :

$$I = \int_{nT}^{(n+1)T} T_{a,in} dt = T_{a,in,k+n+1|k}T + (T + T_b e^{-amT}(e^{-aT} - 1))\Delta T_{a,in,k+n+1|k}, \quad (4.44)$$

pri čemu je $T_{a,in,k+n+1|k}$ predviđena temperatura prostorije u trenutku $k + n + 1$, $a = 1/T_t$, koeficijent m ovisi o odnosu vremena uzorkovanja više i niže razine upravljanja, ako je vrijeme uzorkovanja više razine 1 sat, a vrijeme uzorkovanja niže razine 15 min, koeficijent m može unutar jednog vremena uzorkovanja više razine poprimiti vrijednosti $m \in \{0, 1, 2, 3\}$.

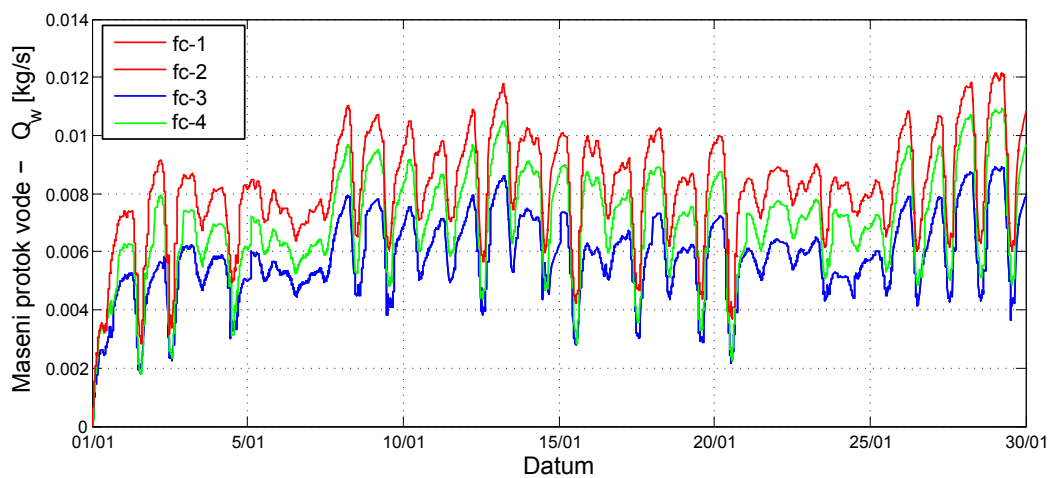
4.4 Implementacija hijerarhijskog optimalnog upravljanja

Hijerarhijsko optimalno upravljanje procesom grijanja i hlađenja implementirano je unutar programskog paketa MATLAB/Simulink prema načelnoj shemi prikazanoj na Slici 4.1. Na višoj razini upravljanja korišten je toplinski model triju prostorija unutar zgrade Fakulteta elektrotehnike i računarstva opisan u drugom poglavlju. Kao model ventilokonvektora na donjoj upravljačkoj razini korišten je model razvijen u trećem poglavlju uz zanemaren utjecaj latentne topline. Gornja upravljačka razina svakih sat vremena generira upravljačke signale s predikcijskim horizontom od 6 sati unaprijed. Donja upravljačka razina svakih 15 minuta proračunava optimalne iznose upravljačkih akcija kojima se djeluje na ventilokonvektore s ciljem ostvarivanja čim manje kvadratne integralne razlike generiranih snaga od zadanih referentnih snaga. Slijedenje referentne snage za vrijeme mjeseca siječnja prikazano je na Slici 4.3. Zadane referentne snage

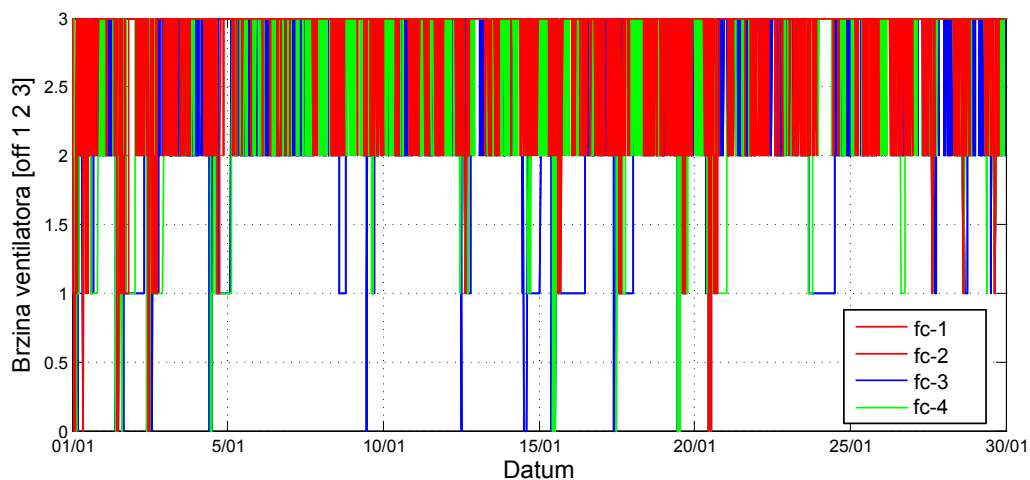


Slika 4.3: Slijedenje referentne snage tijekom siječnja.

su radi preglednosti sve označene zelenom bojom. Sa Slike 4.3 vidljivo je da se postiže zadovoljavajuće slijedenje reference. Najveća snaga potrebna je za grijanje najveće prostorije C9 – 09. Kod simulacija je pretpostavljeno da se okolne prostorije griju/hlade te da se u njima održava konstantna temperatura unutar intervala 20 – 25 °C. Zahtijevana temperatura po prostorijama u prikazanim simulacijama iznosi 25 – 27 °C te je stoga logično da je najmanja snaga za održavanje te temperature potrebna prostoriji koja se nalazi u sredini C9 – 10. Optimalni upravljački ulazi kojima se djeluje na sustav prikazani su na Slici 4.4. Ventilatori (eng. *fan coil*) 1 i 2 smješteni su u prvoj prostoriji C9 – 09 i rade u paralelizmu, znači primaju iste upravljačke signale i



(a)



(b)

Slika 4.4: Optimalni upravljački ulazi u ventilokonvektore a) maseni protoci b) brzina ventilatora.

svaki generira pola referentne snage koju je potrebno predati toj prostoriji. Ventilator 3 nalazi se u prostoriji $C9 - 10$, a ventilator 4 u prostoriji $C9 - 11$. Sa Slike 3.22 može se vidjeti da se zahtijevane referentne snage mogu ostvariti uz optimalniji izbor ulaznih signala od prikazanih, tj. uz isključen ventilator ili eventualno uz prvu brzinu ventilatora. Aktuatori poput ventilatora i ventila stvaraju dodatnu potrošnju energije te ih je s ciljem optimizacije ukupne potrošnje energije ventilokonvektora potrebno dodati u kriterijsku funkciju donje razine upravljanja.

Kriterijska funkcija tada glasi:

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{n=0}^{N_l-1} \left[\left(\int_{nT}^{(n+1)T} (P_{ref} - P(\mathbf{X}_{k+n+1|k}))^2 + \mathbf{X}_{k+n+1|k} \mathbf{K}_{k+n+1|k} \right) \right], \quad (4.45)$$

pri čemu vektor $\mathbf{K}_{k+n+1|k}$ sadrži težine pojedinih ulaza u trenutku $k+n+1$:

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} K_{1,k+1|k} & K_{2,k+2|k} & K_{3,k+3|k} & K_{4,k+n+1|k} & K_{5,k+N_l|k} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Koeficijenti $K_1 - K_4$ predstavljaju težine pojedinih stanja ventilatora. Te težine mogu biti predstavljene pomoću potrošnje električne energije pri pojedinim stanjima ventilatora, razini buke koja se generira pri pojedinim stanjima ili mnogim drugim elementima. Krajnji izbor vrijednosti tih koeficijenata ovisi o željenom učinku optimizacije. Cilj optimizacije u ovom radu je minimizacija utroška energije duž horizonta pa se sukladno tome koeficijenti određuju ovisno o potrošnji električne energije pri pojedinim stanjima. Sustav se ogrjevnim/rashladnim medijem opskrbljuje pomoću sustava koji održava stalan tlak u cijevima. Tlak se pomoću pumpi održava na 6 bar-a. Sav pad tlaka do kojeg dolazi prolaskom medija kroz sustave cijevi i ventilokonvektore mora se nadoknaditi radom pumpi, što dodatno povećava potrošnju energije. Ovisno o iznosu pada tlaka troši se više ili manje energije sa strane pumpi. Pad tlaka kroz ventilokonvektor ovisi o masenom protoku medija kroz ventilokonvektor - povećanjem masenog protoka povećava se pad tlaka i analogno tome smanjenjem protoka smanjuje se pad tlaka u cijevima. Težinski koeficijent K_5 povezan je s padom tlaka kroz cijevi, tj. električnom energijom potrebnom za održavanje konstantnog tlaka unutar sustava. Ovako definiran kriterij optimalnog upravljanja na nižoj razini uz kriterij optimalnosti više upravljačke razine sveobuhvatno osigurava minimizaciju ukupne potrošnje električne energije u cijelokupnom sustavu grijanja i hlađenja. Kako bi se potvrdila ispravnost rada algoritma optimalnog upravljanja procesom grijanja i hlađenja, provedene su simulacije za oba slučaja. Rubni uvjeti su ostali isti kroz sve simulacije, tj. u svim simulacijama se pretpostavlja da je temperatura okolnih prostorija regulirana u intervalu 20 – 25 °C. Stohastičko modelsko prediktivno upravljanje uzima u obzir nemogućnost određivanja poremećaja bez određene neizvjesnosti. Neizvjesnost se uzima u obzir definiranjem vjerojatnosti pogreške u pojedinim koracima optimizacije α_k . Pretpostavljeno je da je vjerojatnost pogreške jednaka za sva stanja i ulaze te da je konstantna duž cijelog predikcijskog horizonta i iznosi:

$$\alpha_k = \alpha_i = \alpha_j = 0.05 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad \forall j \in \{1, \dots, q\}. \quad (4.47)$$

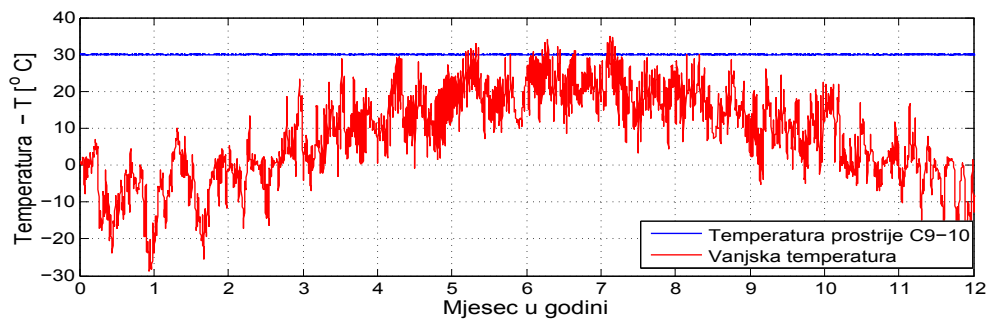
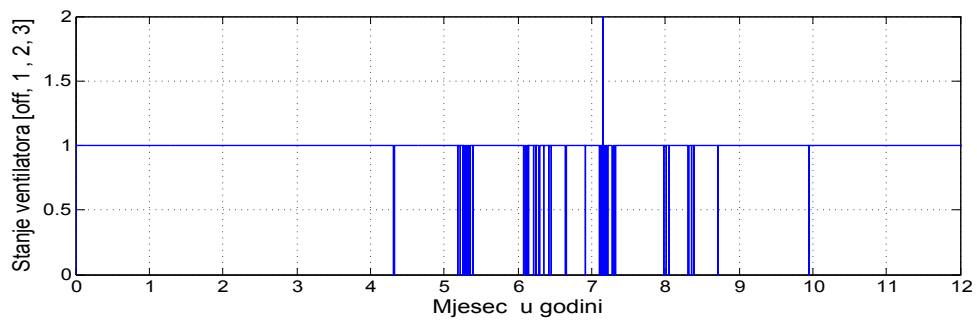
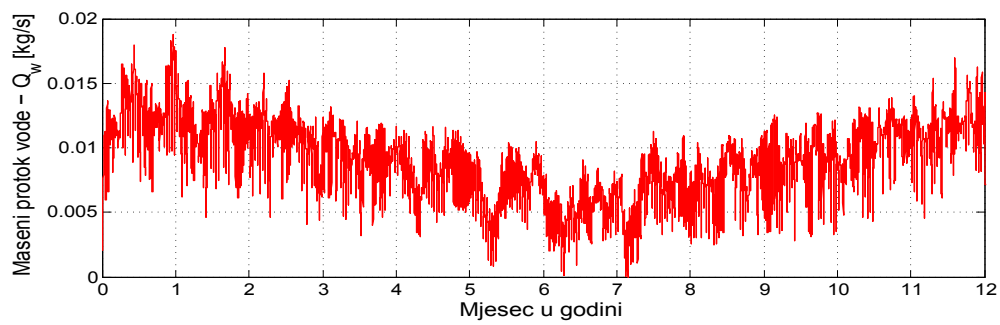
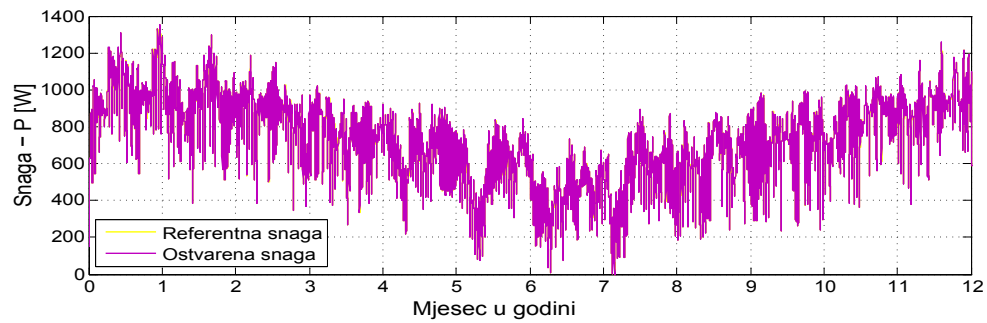
Kako bi se potvrdila optimalnost rada algoritma kroz različiti spektar potrebnih snaga, pretpostavljene su reference koje se u stvarnim sustavima neće pojaviti, ali daju dobru sliku o vladanju sustava kroz simulacije.

Na Slici 4.5 prikazani su rezultati hijerarhijskog optimalnog upravljanja procesom grijanja prostorije C9-10 tokom jedne godine. Temperatura ogrjevnog medija kojim se opskrbljuje sustav iznosi 50 °C. U svrhu što boljeg prikaza sljedenja referentne snage u što širem intervalu snaga zahtjeva se temperatura unutar intervala od 30 – 35 °C s 95% sigurnosti. Optimalni upravljački ulazi prikazani su na slikama 4.5.b) i 4.5.c). Usporedbom sa odzivom bez težinskih faktora koji minimiziraju snagu aktuatora, iz navedenih odziva jasno se može primijetiti optimalnost rada nakon uvođenja težinskih faktora. Sa Slike 4.5.d) je vidljivo da su zadovoljena sva ograničenja postavljena na temperaturu prostorije.

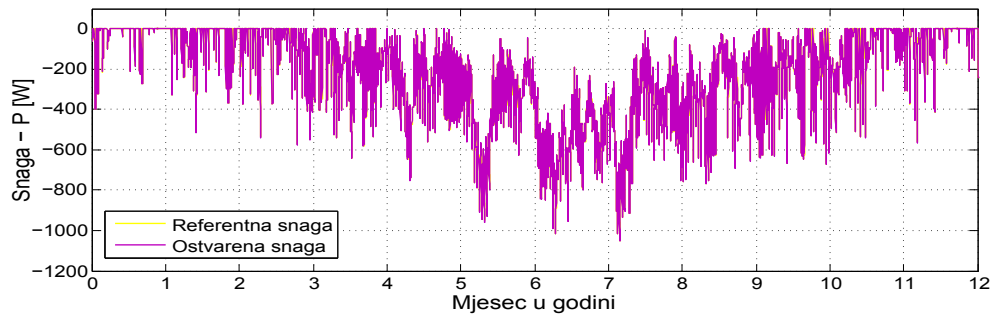
Na Slici 4.6 prikazani su rezultati hijerarhijskog optimalnog upravljanja procesom hlađenja prostorije C9-11 tokom jedne godine. U svrhu što boljeg prikaza sljedenja referentne snage u što širem intervalu snaga zahtjeva se temperatura unutar intervala od 15 – 17 °C s 95% sigurnosti. Zbog veoma tankih zidova između pojedinih prostorija koje se modeliraju, te rubnih uvjeta unutar intervala od 20 – 25 °C i referentne temperature prostorija postavljene na 15 – 17 °C, hlađenje je potrebno gotovo tokom cijele godine. Optimalni upravljački ulazi prikazani su na slikama 4.6.b) i 4.6.c). Pošto snaga direktno ovisi o razlici temperatura zraka u prostoriji i temperature rashladnog medija, uz puno manju temperaturnu razliku nego u slučaju grijanja, za ostvarivanje istih snaga potrebno je koristiti i više ventilatorskog rada. Sa Slike 4.6.d) je vidljivo da su zadovoljena sva ograničenja postavljena na temperaturu prostorije. Kao što je vidljivo sa slika 4.5.d) i 4.6.d) cilj SMPC regulatora je da s čim manjim upravljačkim naporom dovede temperature prostorija unutar zadanog intervala, ostavljajući pritom dovoljno prostora djelovanju smetnji, kako smetnja u narednom koraku ne bi izbacila sustav izvan ograničenja. Statističkom obradom dobivenih rezultata simulacije utvrđeno je kršenje ograničenja nad temperaturom u slučaju grijanja u 2,84¹% slučajeva i kršenje ograničenja u slučaju hlađenja od 1,53%. Proračun uz rezultate simulacija dokazuje ispravnost rada implementiranog algoritma.

Na Slici 4.7 prikazani su rezultati optimalnog upravljanja temperaturom prostorije C9-10 tokom mjeseca siječnja, uz zahtjev da se temperatura prostorije s 95-postotnom vjerojatnošću nalazi unutar granica 20 – 25 °C što odgovara najčešćim granicama udobnosti krajnjih korisnika.

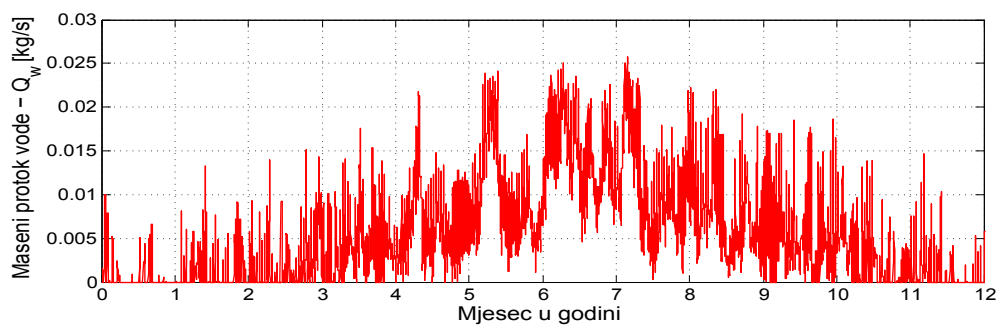
¹Zbog numeričke zahtjevnosti samog algoritma, točnost proračuna je na dvije decimale



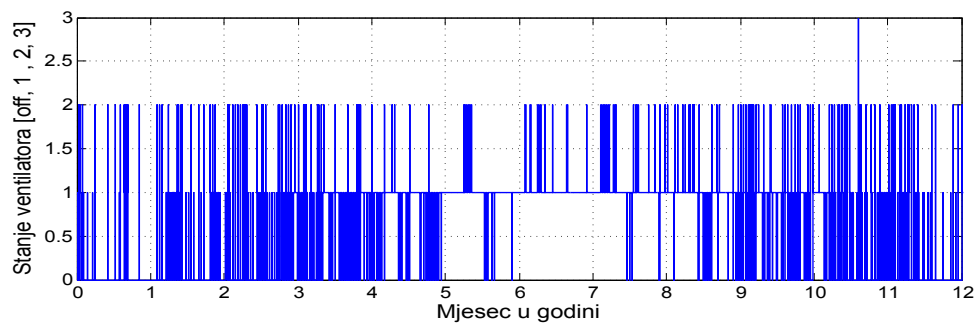
Slika 4.5: Rezultati optimalnog upravljanja procesom grijanja u prostoriji C9-10 uz zahtjev da se temperatura s 95-postotnom vjerojatnošću nalazi unutar intervala 30 – 35 °C.



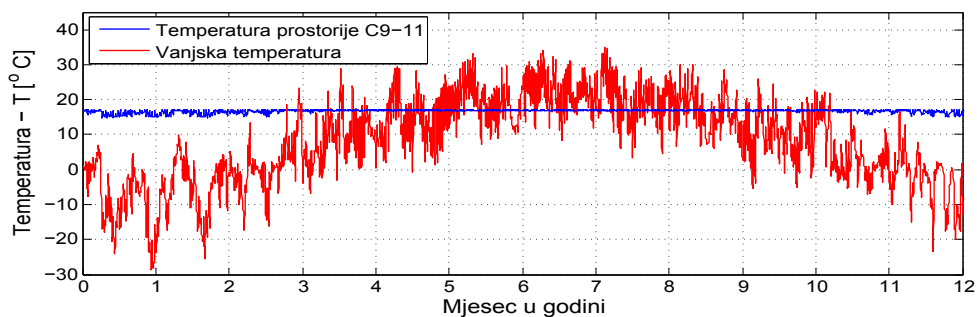
(a)



(b)

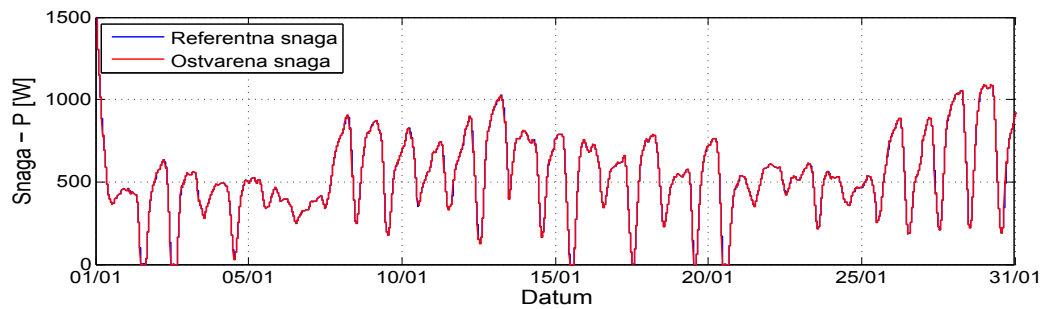


(c)

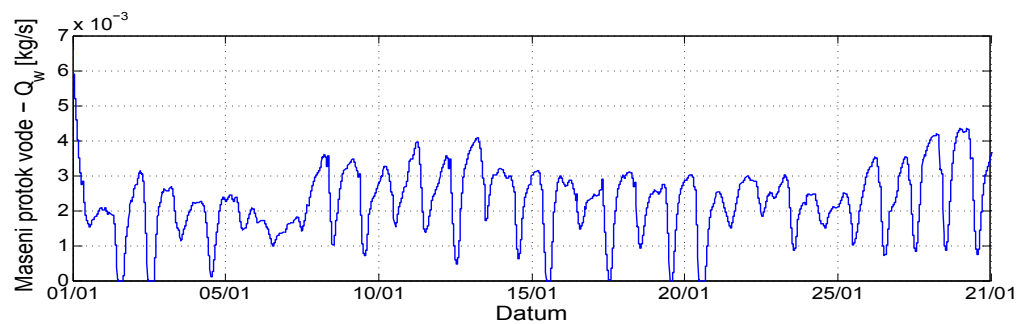


(d)

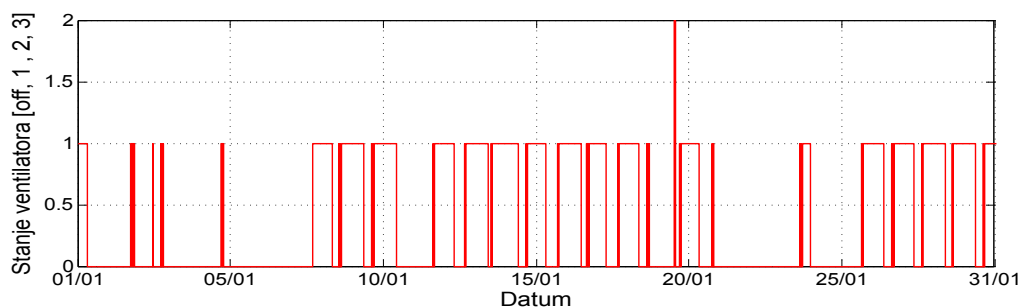
Slika 4.6: Rezultati optimalnog upravljanja procesom hlađenja prostorije C9-11 uz zahtjev da se temperatura s 95-postotnom vjerojatnošću nalazi unutar intervala 15–17 °C.



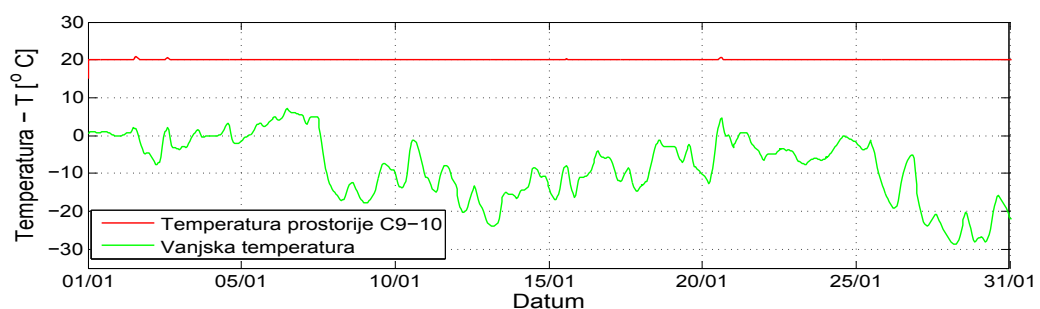
(a)



(b)



(c)



(d)

Slika 4.7: Rezultati optimalnog upravljanja procesom grijanja prostorije C9-10 uz zahtjev da se temperatura s 95-postotnom vjerojatnošću nalazi unutar intervala 20–25 °C.

Zaključak

Smanjenje utroška energije postalo je vodeći cilj u svijetu, što zbog ekonomskih, što zbog ekoloških razloga. Zgradarstvo se ubraja među vodeće potrošače energije u svijetu. Utrošak električne energije se uz pametan izbor građevinskog materijala i dobru toplinsku izolaciju može postići optimalnim upravljanjem toplinskim procesima. Optimalno upravljanje toplinskim procesom ostvareno je kroz implementaciju modelskog prediktivnog upravljanja na dvije razine - hijerarhijskim optimalnim upravljanjem. Upravljanje je ostvareno nad modelom triju prostorija Fakulteta elektrotehnike i računarstva. Toplinski model prostorija dobiven je pomoću analogije toplinskih i električnih procesa. Dobiveni model verificiran je kroz usporedbu odziva dobivenog modela i odziva generiranog komercijalnim alatom za modeliranje toplinskih procesa u zgradama. Aktuatori su modelirani tako da odgovaraju postojećim aktuatorima u navedenim prostorijama. Stohastičko modelsko prediktivno upravljanje na višoj upravljačkoj razini uzimajući u obzir fizikalna ograničenja, ograničenja proistekla iz zahtjeva krajnjih korisnika i nesigurnost određivanja poremećaja duž predikcijskog horizonta daje optimalan iznos snaga unutar jednog sata potrebnih da se zadovolje postavljena ograničenja. Modelskim prediktivnim upravljanjem na donjoj upravljačkoj razini se na temelju predikcije temperature u prostoriji (poremećajne veličine za donju upravljačku razinu) i referenih snaga generiranih od strane gornje upravljačke razine optimiranjem dobivaju optimalne upravljačke akcije kojima se djeluje na aktuatore. Na aktuatore se može djelovati djelovanjem na ventil, tj. djelovanjem na protok medija, te djelovanjem na brzinu ventilatora. Iz provedenih simulacija jasno je vidljivo da je usprkos nesigurnosti poremećaja koji djeluju na proces i nelinearnosti sustava grijanja/hlađenja postignuto željeno vladanje sustava, temperature unutar definiranih granica s određenom vjerojatnošću, optimalan izbor upravljačkih akcija i

maksimalna eksploatacija vanjskih resursa a samim time i minimalna potrošnja energije aktuatora. Ovakav način upravljanja osigurava minimalnu potrošnju energenata a time i novca ostavljajući pritom dovoljno prostora krajnjem korisniku da odabirom težinskih koeficijenata koji konfiguriraju u kriteriju optimalnosti na nižoj razini sam odredi da li mu je optimalnije ostvarivati tražene snage pomoću povećanja otvorenosti ventila ili povećanja masenog protoka zraka, tj. djelovanjem ventilatora. Također na ovaj način u kriterij se mogu uključiti i mnogi drugi faktori poput razine buke koju generira rad ventilatora, ograničenog hoda ventila, minimizacije hoda ventila i mnogi drugi. Trenutna implementacija pretpostavlja da su dostupna mjerenja svih veličina stanja. Za implementaciju prikazanog koncepta upravljanja neophodna je implementacija estimatora teško mjerljivih veličina poput temperatura zidova. Uz tako definiran sustav moguća je implementacija sustava optimalnog upravljanja temperaturom u stvarnom vremenu.

-
- [1] S. Albert. Solving mixed integer linear programs using branch and cut algorithm. Master's thesis, Faculty of North Carolina State University.
- [2] Y. Cengel and M. Boles. *Thermodynamics: An Engineering Approach*. McGraw Hill, 1998.
- [3] J. Currie and D. I. Wilson. OPTI: Lowering the Barrier Between Open Source Optimizers and the Industrial MATLAB User. In N. Sahinidis and J. Pinto, editors, *Foundations of Computer-Aided Process Operations*, Savannah, Georgia, USA, 8–11 January 2012.
- [4] S. L. Digabel. *Algorithm 909: NOMAD: Nonlinear Optimization with the MADS Algorithm*, 2011. <http://www.gerad.ca/NOMAD/Project/Home.html>.
- [5] V. Gnielinski. New equations for heat and mass transfer in turbulent pipe and channel flow. *Int. Chem. Eng*, 16(2):359–368, 1976.
- [6] Z. Guzović. *Izmjenjivači topline u termoenergetskim postrojenjima*. Fakultet strojarstva i brodogradnje sveučilišta u Zagrebu, Zavod za energetska postrojenja, 1996.
- [7] A. Hansen. Cfd simulation of a fin-and-tube heat exchanger: Heat transfer, fluid flow, and turbulence model analysis using 3d open-source cfd code. Master's thesis, Aalborg University Esbjerg, Denmark, 2008.
- [8] T. Kuvannarat, C. . Wang, and S. Wongwises. Effect of fin thickness on the air-side performance of wavy fin-and-tube heat exchangers under dehumidifying conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(15-16):2587–2596, 2006.

-
- [9] A. Martinčević. Modelsko prediktivno upravljanje toplinskim procesom u zgradi uz uzimanje u obzir nesigurnosti podataka iz vremenske prognoze. završni rad - prediplomski studij, Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2011.
- [10] A. Martinčević. Modelsko prediktivno upravljanje toplinskim procesom u zgradi uz uzimanje u obzir nesigurnosti podataka iz vremenske prognoze. seminar - diplomski studij, Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2012.
- [11] F. Oldewurtel, A. Parisio, C. Jones, M. Morari, D. Gyalistras, M. Gwerder, V. Stauch, B. Lehmann, and K. Wirth. Energy Efficient Building Climate Control using Stochastic Model Predictive Control and Weather Predictions. In *American Control Conference*, Baltimore, USA, 2010.
- [12] Open source program. *SeDuMi - Matlab toolbox for optimization over symmetric cones*. url: <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- [13] T. Schmidt. Heat transfer calculation for extend surface. *Refrigerating Engineering*, pages 351–357, 1949.
- [14] U. o. W.-M. Solar Energy Laboratory. url: <http://sel.me.wisc.edu/trnsys/>.
- [15] A. Starčić. Modeliranje i upravljanje toplinskim procesom u zgradi. Master's thesis, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2010.
- [16] C. Wang, Y. Chang, Y. Hsieh, and Y. Lin. Sensible heat and friction characteristics of plate fin-and-tube heat exchangers having plane fins. *International Journal of Refrigeration*, 19(4):223–230, 1996.
- [17] C. Wang and K. Chi. Heat transfer and friction characteristics of plain fin-and-tube heat exchangers, part i: New experimental data. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(15):2681–2691, 2000.
- [18] C. Wang, J. Jang, and N. Chiou. A heat transfer and friction correlation for wavy fin-and-tube heat exchangers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(10):1919–1924, 1999.
- [19] C. C. Wang, Y. Hsieh, and Y. Lin. Performance of plate finned tube heat exchangers under dehumidifying conditions. *ASME J. Heat Transfer*, (119):109–117, 1997.

Naslov: Hijerarhijsko optimalno upravljanje sustavom grijanja i hlađenja u prostorijama nebodera Fakulteta elektrotehnike i računarstva

Autor: Anita Martinčević

Energetska bilanca utroška energije dovodi nas do zaključka da se najveći dio ukupne potrošnje energije u svijetu troši na zagrijavanje i hlađenje čovjekovog ambijenta. Pravilnim dizajnom i upotrebom sustava automatskog upravljanja potrošnja energenta može se smanjiti značajno, a u nekim slučajevima i drastično. U ovom radu prikazana je sinteza hijerarhijskog optimalnog upravljanja toplinskim procesom u zgradi na dvije razine. Na višoj razini odlučuje se o optimalnim toplinskim tokovima za prostorije kako bi se održao željeni profil temperature u prostorijama, dok se na nižoj razini navedeni toplinski tokovi ostvaruju optimalnim upravljačkim akcijama na ventilokonvektore. U prvom dijelu rada prikazani su postupci modeliranja i model zgrade i ventilokonvektora pomoću kojih je implementiran i kroz simulacije potvrđen sustav hijerarhijskog optimalnog upravljanja grijanjem i hlađenjem.

Ključne riječi: Modelsko prediktivno upravljanje, Stohastičko modelsko prediktivno upravljanje, RC analogija toplinskih procesa, Nelinearno programiranje, Mješovito cjelobrojno programiranje, Matematičko modeliranje toplinskih procesa, Toplinski model zgrade, Toplinski model ventilokonvektora, Hijerarhijsko upravljanje, Nesigurnost vremenske prognoze, Energetski efikasno upravljanje, Energetski efikasne zgrade

Title: Hierarchical Optimal Control of the Heating and Cooling System in the Premises of Faculty of Electrical Engineering and Computing

Author: Anita Martinčević

The majority of total energy usage today is spent on the heating and cooling of the human environment. Energy consumption can be significantly reduced by proper design and use of the automatic control systems. This paper describes a hierarchical optimal control of a building heating system on two levels. On a higher control level the controller commands the heating power inputs for the rooms in the building so that the outdoor conditions are fully exploited in keeping the room temperatures within the comfort limits. Controller on lower level realizes required heating inputs per room through calculation of optimal control actions which affects the fan coil units. In this paper models of a building and fan coils are presented first, and from them hierarchical model predictive control is derived and verified through simulations.

Keywords: Model Predictive Control, Stochastic Model Predictive Control, RC-network Representation of Building Thermal Model, Nonlinear Programming, Mixed-integer programming, Mathematical Heat Transfer Models, Fan Coil Model, Heat Transfer, the Uncertainty of Weather Predictions, Energy-Efficient Control, Energy-efficient Buildings