

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 746

**Optimiranje dvoosnog  
fotonaponskog sustava za  
praćenje Sunca u vremenski  
kontinuiranoj domeni**

Zoran Rajner

Zagreb, srpanj 2013.

*Zahvaljujem mentoru, Doc. dr. sc. Mariju Vašku,  
na strpljenju i pomoći u izradi ovog rada i ostatku studija, kao i mag. ing. el. Marku  
Gulinu, na svim savjetima tijekom izrade rada.*

# SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Model fotonaponskog sustava</b>	<b>2</b>
2.1. Kut između Sunca i zakrenute površine . . . . .	2
2.1.1. Geometrija Zemlje i Sunca . . . . .	2
2.1.2. Geometrija Sunca i zakrenute površine . . . . .	4
2.2. Estimacija iradijacije na zakrenutu površinu . . . . .	5
2.3. Toplinski model PV panela . . . . .	6
2.3.1. Generirana električna snaga . . . . .	8
2.4. Proširenje matematičkog modela sustava . . . . .	9
<b>3. Optimizacijski algoritam</b>	<b>10</b>
3.1. Kriterijska funkcija . . . . .	10
3.2. Adamsova metoda . . . . .	12
3.3. BPTT algoritam optimalnog upravljanja . . . . .	14
3.4. Verifikacija algoritma . . . . .	17
<b>4. Implementacija</b>	<b>21</b>
4.1. Kriterijska funkcija . . . . .	21
4.2. Numerička integracija . . . . .	22
4.3. BPTT algoritam . . . . .	24
<b>5. Rezultati</b>	<b>25</b>
<b>6. Zaključak</b>	<b>28</b>
<b>Literatura</b>	<b>29</b>

# 1. Uvod

U današnje doba optimalno upravljanje ima primjenu u mnogim područjima. Zapravo svaki sustav koji sadrži kompleksnu dinamiku s ograničenjima je dobar kandidat za primjenu optimalnog upravljanja. Glavni cilj optimalnog upravljanja je pronaći trajektorije upravljačkih varijabli koje minimiziraju kriterijsku funkciju uz postojanje ograničenja na varijable stanja i upravljačke varijable. Optimizirajući off-line, rezultati optimizacije mogu se koristiti u svrhu procjene performansi sustava ili za postavljanje realnih ciljeva kod projektiranja on-line regulatora. Metode rješavanja problema optimalnog upravljanja mogu se podijeliti u dvije skupine: direktne i indirektne metode. U ovom radu razmatra se atipični pristup direktnoj metodi, koja se bazira na propagaciji unatrag kroz vrijeme. Kako bi se ponašanje sustava točnije proračunavalo, osnovna Eulerova metoda numeričke integracije zamijenjena je više-koračnom Adam-ovom metodom.

## 2. Model fotonaponskog sustava

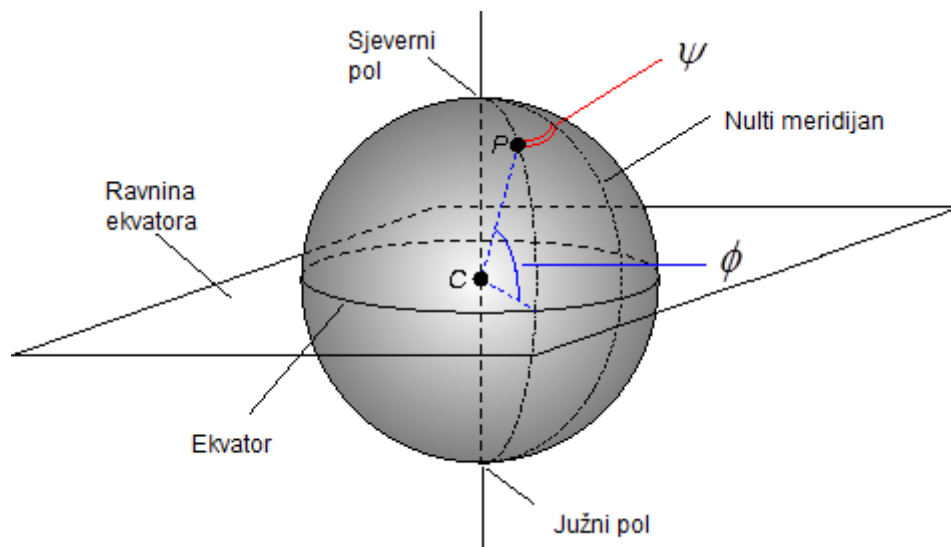
Modelsko prediktivno upravljanje koristi matematičke modele sustava kojima se upravlja u svrhu predikcije ponašanja razmatranog sustava, kako bi se mogli odrediti optimalni upravljački signali. Iz tog razloga je potrebno da se ponašanje modela podudara sa stvarnim sustavom. Model razmatranog sustava može se podijeliti na tri dijela: određivanje kuta između sunca i zakrenute površine, estimacija ukupne upadne solarne iradijacije na zakrenutu površinu i toplinski model PV panela. Kao poseban dio toplinskog modela PV panela može se izdvojiti generiranje električne snage. Iz implementacijskih razloga matematički model je proširen, o čemu se može pročitati u 2.4.

### 2.1. Kut između Sunca i zakrenute površine

Zemlja svojom rotacijom oko Sunca, te oko svoje vlastite osi opisuje relativno složeno gibanje. Uz to osi ove dvije rotacije nisu paralelne, što dodatno komplicira gibanje. Ovisno i danu u godini upadni kut sunčevih zraka varira pa je potrebno točno odrediti njegov iznos kako bi imali dobar model. To je moguće na temelju poznavanja podataka o zemljopisnoj širini i duljini, te o vremenskom trenutku. Prvo se naravno određuje odnos Zemlje i Sunca, a potom sam kut između Sunca i zakrenute površine.

#### 2.1.1. Geometrija Zemlje i Sunca

Na slici 2.1 se može vidjeti točka  $P$  koja je na Zemljinoj površini definirana svojom geografskom širinom  $\phi$  i geografskom dužinom  $\psi$ . Geografska širina definirana je pozitivno sjeverno od ekvatora a negativno južno od ekvatora. Prema dogovoru, geografska dužina definirana je pozitivno prema istoku od nultog meridijana koji prolazi kroz opservatorij u Greenwichu (Engleska). Zemlja je podijeljena u 24 vremenske zone, od kojih svaka pokriva  $15^\circ$  geografske dužine i unutar svake vremenske zone stanovnici dijele isto civilno vrijeme.



**Slika 2.1:** Prikaz zemljopisne duljine i širine

*Solarno podne* je doba dana kada se Sunce nalazi najviše na nebu, tj. kada prelazi lokalni meridijan. Zbog civilnog vremena koje pokriva  $15^\circ$  zemljopisne dužine i 'ljetnog vremena', solarno i civilno vrijeme se mogu razlikovati za više od jednog sata.

*Solarni kut*  $\omega$  je kut za koji se Zemlja zarotirala od solarnog podneva. Zemlja se rotira  $360^\circ$  u 24 sata pa slijedi [8]:

$$\omega = (15^\circ h^{-1})(t_{solar} - 12) = (15^\circ h^{-1})(t_{zone} - 12) + \omega_{eq} + (\psi - \psi_{zone}) \quad (2.1)$$

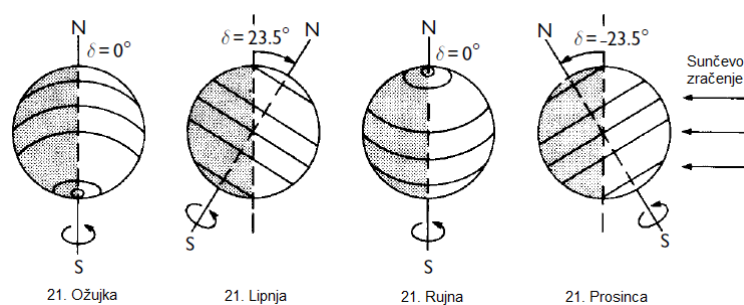
gdje su  $t_{solar}$  i  $t_{zone}$  lokalno solarno i lokalno civilno vrijeme,  $\psi_{zone}$  je geografska dužina na kojoj je Sunce u najvišem položaju za vrijeme podneva po civilnom vremenu.  $\omega_{eq}$  je korekcijski član koji se javlja zbog eliptične putanje Zemlje oko Sunca i u principu je zanemariv. Iz jednadžbe je lako vidljivo da je iznos  $\omega$  negativan prije podne, a pozitivan poslije podne.

Zemlja se oko Sunca giba po elipsi dok joj smjer osi rotacije ostaje isti, pod kutem  $\delta_0 = 23.45^\circ$  od normale ravnine u kojoj se giba. Kut između smjera u kojem je Sunce i ravnine u kojoj se nalazi ekvator se naziva *deklinacija* i utječe na promjenu godišnjih doba. Deklinacija se mijenja kroz godinu od  $+\delta_0 = +23.45^\circ$  u ljeti na sjevernoj hemisferi do  $-\delta_0 = -23.45^\circ$  u zimi, što se može vidjeti na slici 2.2.

Za pojedini dan deklinacija se može izračunati preko:

$$\delta = \delta_0 \sin \left[ \frac{360^\circ(284 + n)}{365} \right] \quad (2.2)$$

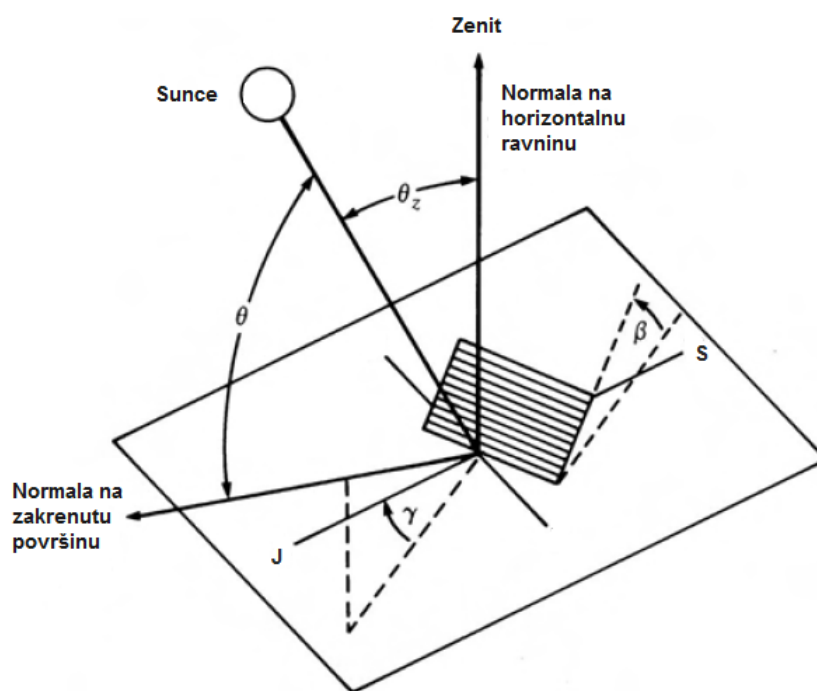
gdje je  $n$  dan u godini ( $n = 1$  za 1. siječnja).



Slika 2.2: Deklinacija kroz godinu

### 2.1.2. Geometrija Sunca i zakrenute površine

Za zakrenutu površinu i Sunce mogu se definirati kutevi prikazani na slici 2.3.



Slika 2.3: Zenitni kut  $\theta_z$ , azimutni kut  $\gamma$ , nagib  $\beta$  i upadni kut  $\theta$

*Nagib  $\beta$ .* Kut između promatrane površine i horizontalne ravnine.

*Azimutni kut površine  $\gamma$ .* Ako se normala površine projicira na horizontalnu ravninu, kut  $\gamma$  zatvaraju projicirana normala i lokalni meridijan. Za površinu okrenutu prema jugu iznosi  $0^\circ$ , za površinu okrenutu prema sjeveru  $180^\circ$ , a kutevi su pozitivni u smjeru zapada i negativni u smjeru istoka.

*Zenitni kut  $\theta_z$ .* Kut između Sunčevih zraka i vertikale

*Solarna visina  $\alpha_s$ .* Komplement zenitnog kuta ( $\alpha_s = 90 - \theta_z$ ). Kut između Sunčeve

zrake i horizontalne ravnine.

*Solarni azimutni kut*  $\gamma_s$ . Projiciran na horizontalnu ravninu,  $\gamma_s$  je kut između Sunčeve zrake i lokalnog meridijana. Proizlazi,projicirani kut između Sunčeve zrake i horizontalne površine je  $(\gamma - \gamma_s)$ .

Konačno može se izračunati kut između Sunčeve zrake i zakrenute površine.

$$\cos \theta = (A - B) \sin \delta + [C \sin \omega + (D + E) \cos \omega] \cos \delta \quad (2.3)$$

gdje su

$$\begin{aligned} A &= \sin \theta \cos \beta \\ B &= \cos \theta \sin \beta \cos \gamma \\ C &= \sin \beta \sin \gamma \\ D &= \cos \theta \cos \beta \\ E &= \sin \theta \sin \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

Ukoliko je trajektorija Sunca (kutevi  $\theta_z$  i  $\gamma_s$ ) poznata unaprijed, može se koristiti i jednostavniji izraz (2.4).

$$\cos \theta = \cos \theta_z \cos \beta + \sin \theta_z \sin \beta \cos(\gamma_s - \gamma) \quad (2.4)$$

## 2.2. Estimacija iradijacije na zakrenutu površinu

Kod upravljanja fotonaponskim sustavima vrlo je bitno točno izračunati upadno Sunčevo zračenje na zakrenutu površinu. Kroz vrijeme modeli su postali sve precizniji no naravno i složeniji.

Prvi modeli kao pretpostavku su uzimali izotropno nebo, što znači uniformno u svim smjerovima. Ova pretpostavka naravno nije točna, no modeli su se pokazali dovoljno preciznima u uvjetima jake naoblake. Jedan od prvih takvih razvili su Liu, Jordan i Klein [5].

$$I_{t,T} = I_b \cos \theta + I_d \cos^2 \frac{\beta}{2} \quad (2.5)$$

Iz jednadžbe se vidi da direktna insolacija  $I_b$  ovisi o upadnom kutu, dok difuzna  $I_d$  ovisi o faktoru vidljivosti neba (vrijedi  $\cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1+\cos(\beta)}{2}$ ).

Daljnijim razvojem postalo je očigledno da je potrebna pretpostavka anizotropnog neba. Temps–Coulson model u obzir uzima povećanje raspršenog zračenja na aerosolima i povećanje intenziteta na obzoru i približavanjem Sunčevom disku. Prema njihovom modelu ukupna insolacija može se dobiti prema izrazu:

$$I_{t,T} = I_b \cos \theta + I_d \cos^2 \frac{\beta}{2} \left[ 1 + \sin^3 \frac{\beta}{2} \right] \left[ 1 + \cos^2 \theta \sin^3 \theta_z \right] \quad (2.6)$$



Ovaj model je precizan u uvjetima vedrog neba do pokazao se neprecizan uz naoblaku.

Rješenje problema preciznosti našao je Klutcher koji je uveo modulacijsku funkciju u Temps–Coulson model. Sada ukupna insolacija može zapisati kao zbroj direktne, difuzne i reflektirane komponente:

$$I_{t,T} = I_{b,T} + I_{d,T} + I_{r,T} \quad (2.7)$$

pri čemu su pojedine komponente

$$I_{b,T} = I_b \cos \theta$$

$$I_{d,T} = I_d \cos^2 \frac{\beta}{2} \left[ 1 + F \sin^3 \frac{\beta}{2} \right] \left[ 1 + F \cos^2 \theta \sin^3 \theta_z \right] \quad (2.8)$$

$$I_{r,T} = \rho (I_b \cos \theta_z + I_d) \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

Zadnja komponenta je reflektirano zračenje.  $\rho$  se naziva albedo i predstavlja faktor refleksije. Zbroj u zagradi je ukupna upadna insolacija na horizontalnu površinu dok je kvadrat sinusa faktor vidljivosti zemlje. Modulacijski faktor  $F$  može se izračunati kao:

$$F = 1 - \frac{I_d}{I_t} \quad (2.9)$$

pri čemu je  $I_t$  ukupna upadna insolacija na horizontalnu površinu i može se izračunati kao:

$$I_t = I_b \cos \theta_z + I_d \quad (2.10)$$

### 2.3. Toplinski model PV panela

Zbog promjene insolacije, brzine vjetra, naoblake i temperature zraka statički model nije zadovoljavajuć za opisivanje ponašanja sustava, stoga je potrebno koristiti dinamički model. Temperatura modula se procjenjuje uzimajući u obzir izmjenu toplinske energije s okolinom na tri glavna načina: radijacija, kondukcija i konvekcija. Iz jednadžbe ravnoteže (2.11)[1] može se vidjeti da se energija također odvodi od modula u obliku generirane električne energije.

$$C_m \frac{dT_m}{dt} = q_{lw} + q_{sw} + q_{conv} - P_{out} \quad (2.11)$$

Kako bi se izraz mogao razriješiti, potrebno je svaki od dijelova definirati pomoću karakteristika modula i mjerljivih vanjskih utjecaja.

Za izračun toplinskog kapaciteta modula  $C_m$ , smatra se da se modul sastoji od tri sloja: sloja PV ćelija, prekrivenog Poliester/Tedlar trilaminatom i staklenog pokrova.

Okvir ima dovoljno malu površinu da se može zanemariti. Ukupni toplinski kapacitet modula je suma toplinskih kapaciteta pojedinih slojeva:

$$C_m = \sum_i = A \cdot d_i \cdot \rho_i \cdot C_i \quad (2.12)$$

pri čemu je  $C_m$  ukupni toplinski kapacitet,  $A$  je površina modula i pretpostavlja se ista za sve slojeve,  $d_i$  je debljina sloja  $i$ ,  $\rho_i$  je gustoća sloja  $i$ , a  $C_i$  je specifični toplinski kapacitet sloja  $i$ .

Jedan od načina na koji modul izmjenjuje toplinu s okolinom je dugovalno zračenje. U suštini tijelo isijava toplinu preko elektromagnetskog zračenja u infra crvenom dijelu spektra. Intenzitet dugovalnog elektromagnetskog zračenja tijela po jedinici površine i temperaturom površine  $T$  je dan sa Stefan-Boltzmannovim zakonom:

$$q_{lw} = \sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4 \quad (2.13)$$

$\sigma$  je Stefan-Boltzmannova konstanta,  $\varepsilon$  je emitivnost tijela, a  $T$  je temperatura tijela. Stražnji dio modula se pretpostavlja na istoj temperaturi kao i dio zgrade prema kojoj je okrenut pa je izmjena zračenja u tom slučaju zanemariva. Potrebno je samo modelirati zračenje s prednje strane modula. Površina nagnuta za kut  $\beta$  od horizontale ima faktor vidljivosti od  $(1 + \cos \beta)/2$  prema nebu i faktor vidljivosti  $(1 - \cos \beta)/2$  prema horizontalnoj zemlji. Na kraju dobivamo potpun izraz za izmjenu topline dugovalnim zračenjem.

$$q_{lw} = A \cdot \sigma \left[ \frac{1 + \cos(\beta)}{2} \varepsilon_{sky} \cdot T_{sky}^4 + \frac{1 - \cos(\beta)}{2} \varepsilon_{gnd} \cdot T_{gnd}^4 - \varepsilon_m \cdot T_m^4 \right] \quad (2.14)$$

Insolacija koja djeluje na ćeliju je funkcija direktnog i difuznog kratkovalnog zračenja i apsorpcije ćelije. Može se zapisati:

$$q_{sw} = \alpha \cdot \Phi \cdot A \quad (2.15)$$

gdje je  $q_{sw}$  kratkovalno zračenje,  $A$  je površina panela,  $\Phi$  upadna Sunčeva dozračenost i  $\alpha$  je apsorpcija. Apsorpcija je zapravo faktor koji se javlja zbog refleksije i apsorpcije na pokrovnom staklu i apsorpcije PV ćelije. Konstantna apsorpcija je pojednostavljenje s obzirom na stvarnost jer zapravo ovisi o intenzitetu i upadnom kutu Sunčeve dozračenosti.

Prijenos topline konvekcijom opisan je Newtonovim zakonom hlađenja, koji govori o izmjeni energije između površine i okolnog fluida. U našem slučaju to je PV panel i okolni zrak.

$$q_{conv} = -h_c \cdot A (T_m - T_a) \quad (2.16)$$

$A$  je površina panela,  $T_m$  je temperatura modula,  $T_a$  je temperatura zraka, a  $h_c$  koeficijent prijenosa topline. Koeficijent prijenosa topline nema stalni iznos i ovisi o fizikalnim uvjetima. Hlađenje konvekcijom može se odvijati na dva načina, slobodnom i prisilnom konvekcijom. Slobodna se javlja zbog razlike u temperaturi, dok se prisilna javlja zbog prisustva gibanja fluida (u ovom slučaju vjetra).

Za slobodnu konvekciju, koeficijent prijenosa topline biti će proporcionalan nekoj potenciji razlike u temperaturi. Za PV panel približno se može izračunati kao [1]:

$$h_{c,free} = 1.31 \cdot (T_m - T_a)^{1/3} \quad (2.17)$$

Koeficijent prisilne konvekcije biti će proporcionalan vjetru. Empirijski je potvrđeno da se koeficijent može izračunati prema:

$$h_{c,forced} = a * w + b \quad (2.18)$$

gdje je  $w$  brzina vjetra, a  $a$  i  $b$  su konstante. Različita istraživanja su dala različite vrijednosti ovih konstanti, no prema preporuci iz [6] odabrani su  $a = 3.3$  i  $b = 6.5$

### 2.3.1. Generirana električna snaga

Generirana električna snaga može se izraziti na više načina. Jedan od načina je modelom (2.19)[1].

$$P_{out} = C_{FF} \cdot \frac{E \ln(k_1 E)}{T_m} \quad (2.19)$$

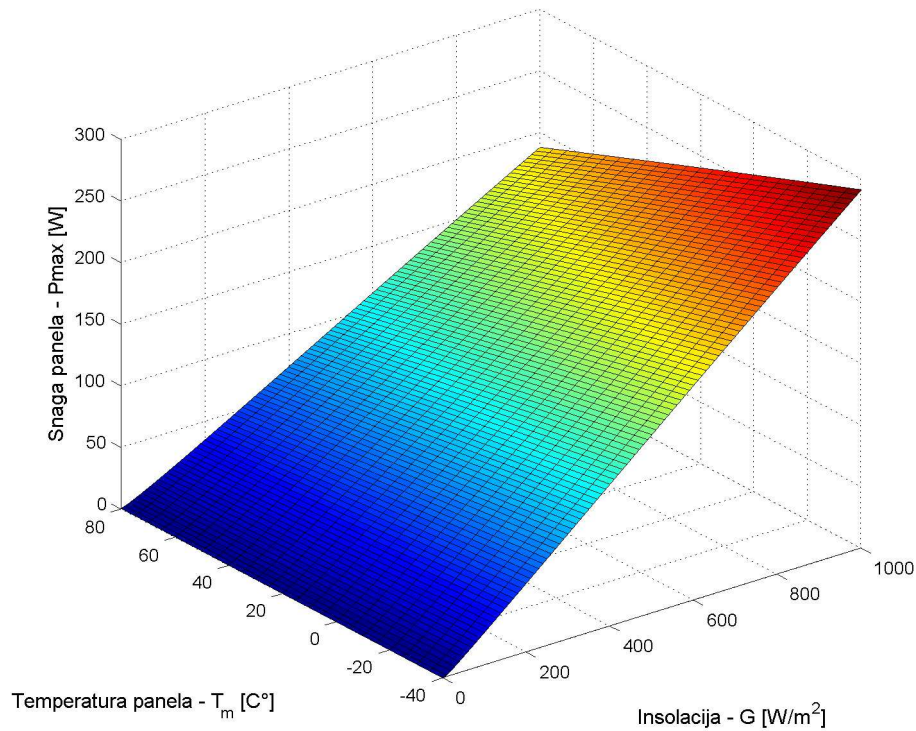
Bolje rezultate međutim daje korištenje 2-D mreže podataka [4], pri čemu je snaga određena upadnom insolacijom rezolucije  $10Wm^{-2}$  i temperaturom panela rezolucije  $1K$ , što se može vidjeti na slici (2.4). Zbog potrebe za derivabilnosti ovisnost je aproksimirana ravninom u obliku:

$$P_{out} = a \cdot G + b \cdot T_m + c \quad (2.20)$$

pri čemu su koeficijenti  $a = 0.2428$ ,  $b = -0.4345$  i  $c = 124.3077$ . Greška je računata prema:

$$RMSI = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^2} = 9.088 \quad (2.21)$$

pri čemu je  $N$  broj točaka u 2-D mreži.



**Slika 2.4:** Ovisnost snage o temperaturi panela ( $T_m$ ) i upadnoj insolaciji ( $G$ )

## 2.4. Proširenje matematičkog modela sustava

Kako bi se izmodelirao dio sustava za pozicioniranje panela, uvedene su dvije varijable stanja.

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{T_{poz}}(\beta - \beta_r) \quad (2.22)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{T_{poz}}(\gamma - \gamma_r) \quad (2.23)$$

Značenje kuteva  $\beta$  i  $\gamma$  objašnjeno je u poglavlju 2.1.2,  $\beta_r$  i  $\gamma_r$  su referentne vrijednosti kuteva, tj. ulazi u sustav, a  $T_{poz}$  je vremenska konstanta pozicioniranja. Zbog jednostavnosti vremenska konstanta pozicioniranja uzeta je kao konstanta iako zapravo ovisi o iznosu promjene kuta [7]. Iznosi derivacija također omogućavaju izračun energije potrebne za pomicanje panela.

## 3. Optimizacijski algoritam

Algoritmi optimalnog upravljanja i općenito problemi minimizacije zahtijevaju određeni pokazatelj kvalitete ponašanja sustava. U tu svrhu se koriste kriterijske funkcije. Usporedbom vrijednosti kriterijskih funkcija kroz iteracije može se zaključiti napreduje li algoritam u dobrom smjeru. Ovisno o korištenom algoritmu u kriterijskoj se funkciji mogu definirati razni uvjeti na rad sustava, potrošnju energije i ograničenja u iznosima varijabli stanja i upravljačkih signala.

Kod simulacije sustava, korištenje simulacijskih alata, iako jednostavno, uobičajeno je relativno sporo. Kako bi se ubrzala simulacija sustava, korištena je numerička integracija, konkretno Adamsova višekoračna metoda.

Opisan algoritam [3] omogućava definiranje složenih kriterijskih funkcija, prilagođen je korištenju Adamsovom metodom i omogućava korištenje numeričkog izračuna gradijenata.

### 3.1. Kriterijska funkcija

Razmatra se općeniti nelinearni sustav čije se ponašanje optimira. Cilj je pronaći upravljački vektor  $u(t)$ , pomoću minimizacije kriterijske funkcije Bolza tipa

$$J = \Phi(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) + \int_0^{t_f} F(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (3.1)$$

pri čemu je  $t_f$  vrijeme izvođenja, a  $\hat{\mathbf{x}}(t_f)$  vektor varijabli stanja sustava u konačnom trenutku. Funkcije  $\Phi$  i  $F(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))$  opisane su u izrazima (3.2) i (3.4).

$$\Phi(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) = \Phi_0(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) + \sum_{k=1}^r K_{b,k} b_k^2(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) \quad (3.2)$$

Funkcija unutar sume u izrazu (3.2) predstavlja kaznenu funkciju za krajnje uvjete definiranu kao

$$\mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) = 0 \quad (3.3)$$

Moguće je definirati više uvjeta na krajnje vrijednosti varijabli stanja, pri čemu se  $r$  uvjeta zbraja.

Funkcija  $F$  iz (3.1) integrira se u vremenu te se koristi kako bi se kontinuirano pratila kvaliteta odziva. Definirana je kao:

$$F(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) = F_0(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \sum_{k=1}^q K_{h,k} h_k^2(\hat{\mathbf{x}}(t_f), \mathbf{u}(t)) + \sum_{k=1}^p K_{g,k} g_k^2(\hat{\mathbf{x}}(t_f), \mathbf{u}(t)) \times H^-(g_k(\hat{\mathbf{x}}(t_f), \mathbf{u}(t))) \quad (3.4)$$

Drugi i treći izraz iz (3.4) su kaznene funkcije za jednakosti i nejednakosti definirane kao ograničenja na vektor stanja i upravljački vektor. Funkcija

$$\mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}(t_f), \mathbf{u}(t)) = 0 \quad (3.5)$$

sadrži  $q$  jednadžbi, dok funkcija

$$\mathbf{g}_k(\hat{\mathbf{x}}(t_f), \mathbf{u}(t)) \geq 0 \quad (3.6)$$

sadrži  $p$  nejednadžbi. Može se reći da funkcijom 3.5 neki kriterij želimo dovesti do čim niže vrijednosti, dok se funkcijom 3.6 obično osigurava da varijable stanja i upravljački signali ostaju unutar nekog područja (obično uvjetovani fizikalnim ograničenjima). Koeficijenti uz pojedine funkcije moraju biti dovoljno veliki da bi se zadovoljila ograničenja, te omogućavaju postavljanje prioriteta među uvjetima. Bitno je za napomenuti da funkcija  $H^-$  djeluje tako da se vrijednost funkcije  $g$  ne uzima u obzir ukoliko je veća od 0, tj. Ukoliko je uvjet postavljen funkcijom zadovoljen. Matematički možemo zapisati

$$H^-(z) = \begin{cases} 0, & \text{ako } z \geq 0 \\ 1 & \text{ako } z < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Kako bi se izbjegla potreba za pamćenjem svih vrijednosti varijabli stanja i upravljačkih veličina potrebnih za izračun integrala u (3.1), te izbjeglo kašnjenje zbog samog izračuna integrala, uvodimo novu varijablu stanja, koja se dodaje vektoru varijabli stanja sustava.

$$\dot{x}_n = F(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.8)$$

Kao što se može zaključiti ova varijabla stanja kontinuirano računa integral i tako uklanjanja potrebu za pamćenjem prošlih vrijednosti varijabli stanja. Na kraju kriterijsku funkciju možemo zapisati kao

$$J(t_f) = \Phi(\hat{\mathbf{x}}(t_f)) + x_n(t_f) \quad (3.9)$$

Sada sustav možemo zapisati kao

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.10)$$

uz prošireni vektor varijabli stanja

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \cdots & \hat{x}_{n0} & x_n \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

i funkcije sustava

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{no} & F \end{bmatrix}^T \quad (3.12)$$

## 3.2. Adamsova metoda

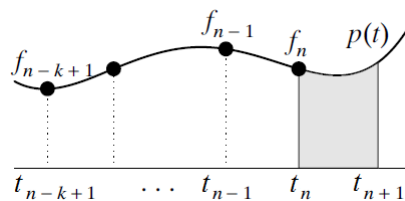
Sustav se optimira u diskretnim vremenskim koracima, pa je potrebno kontinuiran problem prenijeti u diskretnu domenu. Najjednostavnija metoda za numeričko rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi je Eulerova metoda. No postoje točnije metode pa kako bi se dobili što bolji rezultati, koristi se Adamsova metoda [2]. Adamsova metoda je višekoračna (multistep) metoda, što znači da se osim trenutne vrijednosti funkcija  $f$  u obzir uzimaju i starije vrijednosti, kako bi se vrijednost u idućem koraku točnije proračunala. Uvodi se notacija za vremenske trenutke  $t_i = t_0 + i\tau$  uz pretpostavku su poznate aproksimacije  $x_n, x_{n-1} \cdots x_{n-k+1}$  stvarnih vrijednosti  $x(t_i)$  diferencijalne jednadžbe

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.13)$$

Adamsova metoda razmatra funkciju (3.13) u integralnom obliku [3]

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt \quad (3.14)$$

Iako vrijednost  $x(t_n)$  nije poznata, poznata je njena aproksimacija kao i aproksimacija prošlih vrijednosti. Prirodno se nameće da se podintegralna funkcija iz (3.14) nadomjesti interpolacijskim polinomom koji prolazi kroz točke  $(t_i, f_i) | i = n - k + 1 \cdots, n$  kao što je prikazano na slici 3.1



Slika 3.1: Eksplicitna adamsova metoda

Polinom se može napisati u obliku unazadnih diferencija uz

$$\nabla^0 f_n = f_n, \quad \nabla^{j+1} f_n = \nabla^j f_n - \nabla^j f_{n-1}$$

kao

$$p(t) = p(t_n + s\tau) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n \quad (3.15)$$

Uvrštavanjem polinoma (3.15) na mjesto podintegralne funkcije dobivamo

$$x_{n+1} = x_n + \tau \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_n \quad (3.16)$$

Kako bi se metoda koristila potrebno je (3.16) zapisati u obliku koji je moguće implementirati. Dobiva se izraz [3]

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{x}(i) + \tau \sum_{j=1}^k a_j^{(k)} \mathbf{f}(i-j+1) \quad (3.17)$$

pri čemu je  $\tau$  vremenski korak, a  $a_j^{(k)}$  su koeficijenti Adamsove metode. Pošto je potrebno  $k$  prošlih vrijednosti, potrebno je i  $k$  početnih uvjeta. Prvih  $k$  koraka procjenjuje se Runge-Kutta metodom četvrtog reda. Kako bi se izbjegla potreba za konstantnim izračunom zbroja, pribjegava se sličnoj metodi kao i u (3.8). Vektor varijabli stanja  $x(t)$  se proširuje  $k$  puta pri čemu je  $k$  broj koraka u prošlost koji utječu na novu vrijednost. Ovime se dobiva novi opis sustava sa  $n \cdot k$  elemenata u vektoru varijabli stanja čije se vrijednosti računaju prema

$$\begin{aligned} x_j(i+1) &= x_j(i) + \tau a_1^{(k)} f_j(i) + \tau x_{n+j}(i) \\ x_{rn+j}(i+1) &= a_{r+1}^{(k)} f_j(i) + x_{(r+1)n+j}(i) \\ x_{(k-1)n+j}(i+1) &= a_k^{(k)} f_j(i) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Konačno, slično kao u (3.8) vektor varijabli stanja sustava možemo zapisati kao

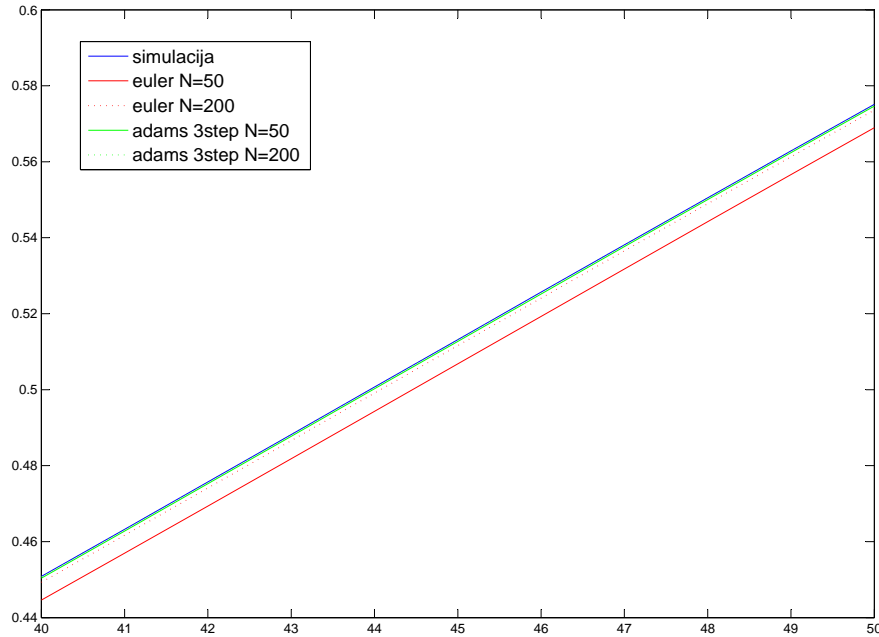
$$\tilde{\mathbf{x}}(i+1) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(i), \mathbf{u}(i)) \quad (3.19)$$

Dokaz kvalitete Adamsove metode naspram Eulerove može se vidjeti na slici 3.2. Simulacije su provedene na sustavu opisanom jednadžbom

$$\dot{x} = 0.5x \frac{1-x}{10} x(0) = 0.1$$

Izdvojen je dio pri kraju simulacije gdje su odstupanja od stvarne vrijednosti najveća.





**Slika 3.2:** Usporedba simulacije, Eulerove i Adamsove metode

### 3.3. BPTT algoritam optimalnog upravljanja

Optimizacijski problem je pronaći upravljački vektor koji će minimizirati kriterijsku funkciju

$$J(N) = \Phi(\hat{\mathbf{x}}(N)) + \dot{x}_n(N) \quad (3.20)$$

Upravljački signal se traži iterativno u smjeru suprotnom od rasta kriterijske funkcije, pri čemu se smjer rasta određuje parcijalnom derivacijom kriterijske funkcije upravljačkim signalom.

$$\mathbf{u}^{l+1}(i) = \mathbf{u}^l(i) - \eta \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}^l(i)} \quad (3.21)$$

gdje su  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  vremenski trenuci,  $l = 1, 2, \dots, M$  broj iteracija,  $\eta$  faktor učenja. Gradijent kriterijske funkcije u nekom koraku iteracije i vremenskom trenutku  $i$  dan je sa:

$$\frac{\partial J}{\partial u_j(i)} = \sum_{r=1}^{nk} \frac{\partial J}{\partial \tilde{x}_r(N)} \frac{\partial \tilde{x}_r(N)}{\partial u_j(i)} \quad (3.22)$$

Ovdje se javlja problem parcijalne derivacije varijable stanja po ulazu u nekom proizvoljnom vremenskom trenutku. Pribjegava se postupku sličnom *backpropagation*

algoritmu za učenje neuronskih mreža. Parcijalne derivacije  $\frac{\partial \tilde{x}_r(N)}{\partial u_j(i)}$  mogu se računati unazad u vremenu, krenuvši od  $i = N - 1$ . Za prvi korak unatrag dobivamo

$$\frac{\partial \tilde{x}_r(N)}{\partial u_j(N-1)} = \frac{\partial \tilde{f}_r(N-1)}{\partial u_j(N-1)}$$

gdje je  $\tilde{f}_r(i) = \tilde{f}_r(\tilde{\mathbf{x}}(i), \mathbf{u}(i))$ , za  $r = 1, 2, \dots, nk$ , a  $nk$  je broj varijabli stanja u proširenom sustavu dobivenom nakon implementacije Adamsove  $k$ -koračne metode. Zapravo se vrijednost varijable stanja u trenutku  $N$  zapisuje kao vrijednost funkcije  $f$  u trenutku  $N - 1$  što i vrijedi prema 3.18. Za sljedeći korak vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}_r(N)}{\partial u_j(N-2)} &= \sum_{q=1}^{nk} \frac{\partial \tilde{f}_r(N-1)}{\partial \tilde{x}_q(N-1)} \frac{\partial \tilde{x}_q(N-1)}{\partial u_j(N-2)} \\ &= \sum_{q=1}^{nk} \frac{\partial \tilde{f}_r(N-1)}{\partial \tilde{x}_q(N-1)} \frac{\partial \tilde{f}_q(N-2)}{\partial u_j(N-2)} \end{aligned}$$

Zbroj se javlja zbog moguće međuovisnosti pojedinih varijabli stanja. Ukoliko varijabla stanja  $q$  ne utječe na funkciju  $q$  derivacija će biti nula, a isto vrijedi i za odnos ulaza i funkcije. Analogno tome za treći korak dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}_r(N)}{\partial u_j(N-3)} &= \sum_{q=1}^{nk} \frac{\partial \tilde{f}_r(N-1)}{\partial \tilde{x}_q(N-1)} \\ &\quad \sum_{p=1}^{nk} \frac{\partial \tilde{f}_q(N-2)}{\partial \tilde{x}_p(N-2)} \frac{\partial \tilde{f}_p(N-3)}{\partial u_j(N-3)} \end{aligned}$$

Uvedemo li matrice  $\tilde{\mathbf{U}}(i)$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}(i)$  i  $\mathbf{Y}(i)$  definirane kao

$$\tilde{\mathbf{U}}(i) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(i)}{\partial \mathbf{u}(i)} \quad \tilde{\mathbf{X}}(i) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(i)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}(i)} \quad \mathbf{Y}(i) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}(i)}{\partial \mathbf{u}(i)} \quad (3.23)$$

prethodni izrazi za računanje derivacija unatrag u vremenu mogu se zapisati kao [3]

$$\mathbf{Y}(N-1) = \tilde{\mathbf{U}}(N-1) \quad (3.24)$$

$$\mathbf{Y}(N-2) = \tilde{\mathbf{X}}(N-1) \tilde{\mathbf{U}}(N-2) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{Y}(N-3) = \tilde{\mathbf{X}}(N-1) \tilde{\mathbf{X}}(N-2) \tilde{\mathbf{U}}(N-3) \quad (3.26)$$

U općenitom slučaju izraz glasi

$$\mathbf{Y}(i) = \tilde{\mathbf{X}}(N-1) \tilde{\mathbf{X}}(N-2) \cdots \tilde{\mathbf{X}}(i+1) \tilde{\mathbf{U}}(i) \quad (3.27)$$

Matrice  $\tilde{\mathbf{U}}(i)$  i  $\tilde{\mathbf{X}}(i)$  su zapravo Jakobijani i nazivaju se prošireni Jakobijani, zbog proširenja sustava Adamsomovom metodom. Oni se mogu relativno laganom dobiti pomoću osnovnih Jakobijana. Jakobijan varijabli stanja definira se kao

$$\mathbf{X}(i) = \frac{\partial \mathbf{f}(i)}{\partial \mathbf{x}(i)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{x}_{n0}} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial \hat{x}_{n0}} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \hat{x}_{n0}} & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Na sličan način možemo zapisati i Jakobijan ulaznih varijabli

$$\mathbf{U}(i) = \frac{\partial \mathbf{f}(i)}{\partial \mathbf{u}(i)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial u_1} & \frac{\partial F}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Sada uz pomoć osnovnih Jakobijana možemo zapisati složene.

$$\tilde{\mathbf{X}}(i) = \begin{bmatrix} a_1^{(k)} \mathbf{I} + \tau a_1^{(k)} \mathbf{X}(i) & \tau \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^{(k)} \mathbf{X}(i) & 0 & \mathbf{I} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1}^{(k)} \mathbf{X}(i) & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} \\ a_k^{(k)} \mathbf{X}(i) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}(i) = \begin{bmatrix} \tau a_1^{(k)} \mathbf{U}(i) \\ a_2^{(k)} \mathbf{U}(i) \\ \vdots \\ a_{k-1}^{(k)} \mathbf{U}(i) \\ a_k^{(k)} \mathbf{U}(i) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Potrebno je još definirati matrice  $\mathbf{J}_u(i)$  i  $\mathbf{J}_x(N)$  kako bi bilo moguće napisati rekurzivni algoritam

$$\mathbf{J}_u(i) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}(i)} \quad \mathbf{J}_x(N) = \frac{\partial J}{\partial \tilde{\mathbf{x}}(N)} \quad (3.32)$$

$\mathbf{J}_u(i)$  se koristi u izrazu (3.21) za računanje upravljačkog vektora u sljedećoj iteraciji i zapravo sadrži derivacije kriterijske funkcije po ulazima u određenom vremenskom trenutku.  $\mathbf{J}_x(N)$  je vektor koji sadrži gradijent kriterijske funkcije po varijablama stanja u posljednjem trenutku, a može se zapisati kao

$$\mathbf{J}_x(N) = \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\mathbf{x}}(N)} \right)^T \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right]^T \quad (3.33)$$

Sada kada su svi Jakobijani definirani možemo zapisati rekurzivni algoritam

$$\mathbf{D}(i) = \mathbf{D}(i+1)\tilde{\mathbf{X}}(i+1) \quad (3.34)$$

$$\mathbf{Y}(i) = \mathbf{D}(i+1)\tilde{\mathbf{U}}(i) \quad (3.35)$$

$$\mathbf{J}_u(i) = \mathbf{Y}(i)^T \mathbf{J}_x(N) \quad (3.36)$$

Izvođenjem ovog algoritma u petlji, dok se ne izvrši zadan broj iteracija ili razlika između vrijednosti kriterijske funkcije između iteracija ne postane dovoljno mala dobiva se energetski efikasniji upravljački vektor koji zadovoljava sve postavljene kriterije.

### 3.4. Verifikacija algoritma

U svrhu provjere implementiranog algoritma i njegovih karakteristika, korišten je eksperimentalni sustav jednostavniji od opisanog u 2. Razlog korištenja jednostavnijeg sustava je relativna kompleksnost razmatranog pa je teže promatrati utjecaje promjene različitih parametara algoritma. Kao eksperimentalni sustav korišten je

$$\dot{x}(t) = x(t) \frac{1-x(t)}{20} + u(t) \quad (3.37)$$

Vrijednost varijable stanja sustava raste ili pada za početne uvjete različite od nule, ukoliko na sustav ne djeluje upravljački signal. Za početak želimo varijablu stanja  $x(t)$  zadržati u području  $0 - 0.12$  uz što manji trošak energije. Prema (3.5) i (3.6) ovi uvjeti se mogu zapisati kao:

$$\begin{aligned} h &= u \\ g_1 &= 0.12 - x \\ g_2 &= x \end{aligned} \quad (3.38)$$

Podintegralna funkcija  $F$  kriterijske funkcije  $J$  može se zapisati kao:

$$F = K_{h,1}u^2 + K_{g,1}(0.12 - x)^2 H^-(0.12 - x) + K_{g,2}(x)^2 H^-(x) \quad (3.39)$$

što je ujedno iznos derivacije nove varijable stanja  $x_n$ . Sustav je simuliran Adamsovom metodom, pri čemu su implementirane obje varijable stanja prema 3.18 čime se dobiva

$$\begin{aligned} x_1(i+1) &= x_1(i) + \tau \frac{23}{12} \dot{x}(i) + \tau x_2(i) \\ x_2(i+1) &= -\frac{4}{3} \dot{x} + x_3(i) \\ x_3(i+1) &= \frac{5}{12} \dot{x} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} x_{n1}(i+1) &= x_{n1}(i) + \tau \frac{23}{12} F(i) + \tau x_{n2}(i) \\ x_{n2}(i+1) &= -\frac{4}{3} F(i) + x_{n3}(i) \\ x_{n3}(i+1) &= \frac{5}{12} F(i) \end{aligned}$$

Za jednadžbe (3.37) i (3.39) mogu se izračunati osnovni jakobijani sustava prema (3.28) i (3.29) iz koji se tada mogu izračunati složeni Jakobijani prema (3.30) i (3.31). Još je potrebno odrediti vektor  $JX$ . Pošto kriterijska funkcija nema željene konačne vrijednosti vektor iznosi

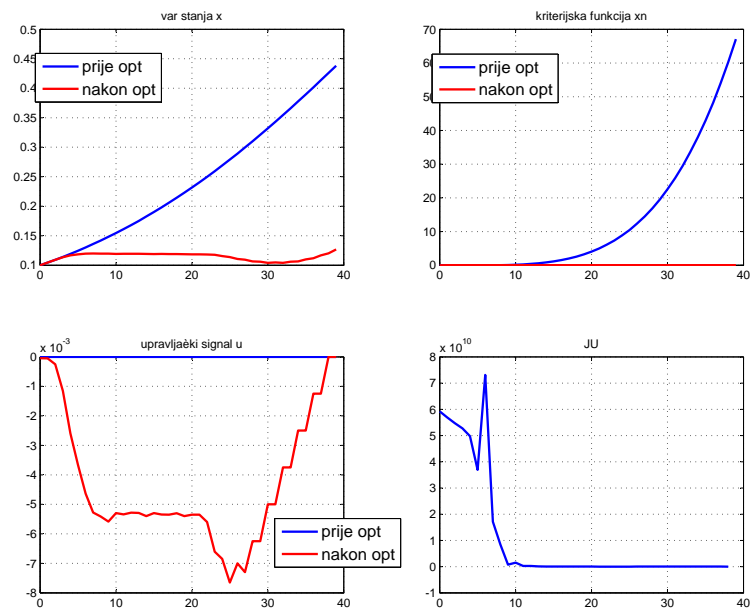
$$\mathbf{J}_x(N) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Izvršavanjem skripti koje simuliraju sustav Adamsovom metodom i optimiziraju upravljačke signale, može se primijetiti nekoliko problema ukoliko se sustav implementira s fiksnim korakom učenja. Ukoliko se sustav želi optimirati na dužem vremenskom periodu javlja se problem odstupanja od ograničenja. Ako se ograničenjima zapravo zadaje referentno područje unutar kojeg želimo da se nalaze varijable stanja sustava, lako se može dogoditi da, barem u prvoj iteraciji, sustav izađe iz tog područja. U slučaju da se sustav previše udalji od granične vrijednosti dobiju se veliki iznosi derivacija kontinuiranog dijela kriterijske funkcije po varijablama stanja. Stvarni problem se javlja zbog propagacije ove vrijednosti unatrag kroz vrijeme prema 3.34 zbog čega vrijednost  $JU$  brzo poprima velike iznose, što pak uzrokuje numeričku nestabilnost zbog nemogućnosti prikazivanja tako velikih brojeva. Rješenje ovog problema je postupno povećanje broja uzoraka koji se optimiraju, čime se sprječavaju velika odstupanja. Gore navedena modifikacija dobro radi želimo li držati varijablu stanja između nekih vrijednosti, no pokušajem minimizacije upravljačkog signala,  $JU$  opet poprima velike iznose pa se opet javlja numerička nestabilnost. Kao dobra protumjera pokazalo se korištenje "sliding-mode" modifikacije algoritma.

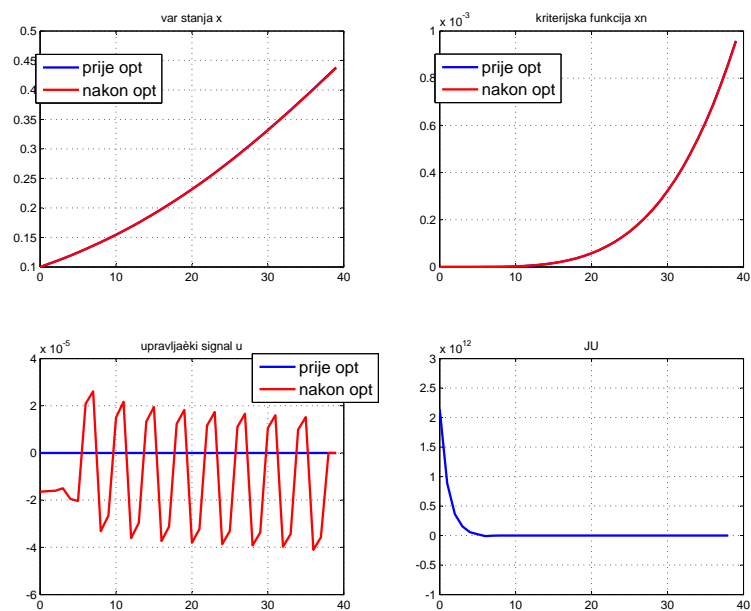
$$\mathbf{u}^{l+1}(i) = \mathbf{u}^l(i) - \eta \frac{\mathbf{J}_u(i)}{\varepsilon + \|\mathbf{J}_u\|(i)} \quad (3.42)$$

Sustav je optimiran u različitim kombinacijama početnih uvjeta i težinskih koeficijenata kako bi se lakše istaknule neke od karakteristika. Broj koraka simulacije je 39 za sve slučajeve, kao i broj iteracija 30 uz korak numeričke integracije  $T = 1$  s. Vrijednosti u upravljačkim vektorima su u početku postavljene u nulu, a korak učenja je  $\eta = 0.00005$ .

Za slučaj na slici 3.3 koeficijenti težinske funkcije su  $K_{h,1} = 0.001, K_{g,1} = 70, K_{g,2} = 40$ , a početna vrijednost  $x_0 = 0.1$ . Iz odziva varijable stanja se vidi da ukoliko nema upravljačkog signala sustav s vremenom teži u beskonačnost. Optimizacijom dobivamo upravljački signal koji varijablu stanja drži na samoj granici uvjeta postavljenog u (3.38) što uzrokuje drastično smanjenje kriterijske funkcije. Zbog malog težinskog koeficijenta minimizacija upravljačkog signala ima manji prioritet od održavanja varijable stanja unutar zadanog područja.



Slika 3.3: Eksplicitna adamsova metoda

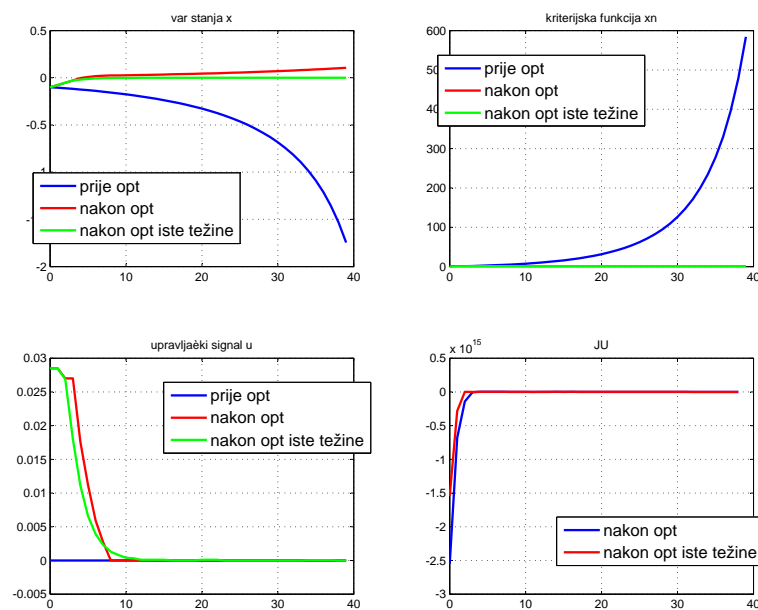


Slika 3.4: Eksplicitna adamsova metoda

Za slučaj na slici 3.4 koeficijenti težinske funkcije su  $K_{h,1} = 70, K_{g,1} = 0.001$

$K_{g,2} = 40$ , a početna vrijednost  $x_0 = 0.1$ . Iznosi koeficijenata za minimizaciju upravljačke veličine i održavanja varijable unutar zadanog područja su zamijenjeni, što proizvodi neispunjenost uvjeta nejednakosti. S druge strane iznos upravljačkog signala je drastično smanjen. Kriterijske funkcije se preklapaju jer je doprinos promjene upravljačkog signala zanemariv u ukupnom iznosu kriterijske funkcije.

Na slici 3.5 mogu se vidjeti dva odziva. U oba slučaja početni uvjet je  $x_0 = -0.1$ . Za odziv plave boje težinski koeficijenti su  $K_{h,1} = 0.001, K_{g,1} = 70, K_{g,2} = 40$ , dok su za odziv zelene boje  $K_{h,1} = 70, K_{g,1} = 70, K_{g,2} = 40$ . Može se vidjeti da u drugom slučaju, algoritam pokušava dovesti varijablu u dozvoljeno područje uz čim manji utrošak tako da počne sa većom vrijednošću, što bi na kraju trebalo rezultirati manjom ukupnom utrošenom energijom. Također, varijabla stanja se dovodi na sam rub dozvoljenog područja kako u budućnosti ne bi bilo potrebno dodatno kompenzirati.



**Slika 3.5:** Eksplicitna adamsova metoda

## 4. Implementacija

Implementaciju se može započeti definiranjem ponašanja koje se želi od sustava, što se realizira definiranjem kriterijske funkcije. S definiranom kriterijskom funkcijom može se realizirati sustav s proširenim vektorom funkcija i varijabli stanja. Nakon što imamo način za simuliranje sustava, možemo realizirati algoritam koji će, počevši od posljednjeg koraka u simulaciji, unatrag kroz vrijeme, rekurzivno, računati gradijente kriterijske funkcije po ulaznim varijablama.

### 4.1. Kriterijska funkcija

Definira se kriterijska funkcija prema (3.1). Ne postoje uvjeti na krajnje vrijednosti pa ne postoji dio kriterijske funkcije (3.2). Cilj je maksimizirati proizvodnju energije uz čim manji utrošak energije za pomicanje panela sustavom za pozicioniranje, tj maksimizirati  $E_{netto}$ . Zbog toga će u kriterijsku funkciju ući generirana snaga panela opisana u 2.3.1, te potrošnja motora sustava za pozicioniranje, koja iznosi:

$$\begin{aligned} P_\beta &= K_\beta |d\beta| \\ P_\gamma &= K_\gamma |d\gamma| \end{aligned} \quad (4.1)$$

Navedene snage se koriste u podintegralnom dijelu kriterijske funkcije pa zbog integracije imaju direktnu spregu s energijom.

Zbog fizikalnih ograničenja sustava uvode se uvjeti nejednakosti, koji definiraju granice unutar kojih smiju biti reference kuteva.

$$\begin{aligned} g_1 &= \beta_r & g_2 &= \gamma_r - 75^\circ \\ g_3 &= 85^\circ - \beta_r & g_4 &= 285^\circ - \gamma_r \end{aligned} \quad (4.2)$$

Podintegralni dio kriterijske funkcije možemo u cijelosti zapisati kao:

$$\begin{aligned} F &= -k_1 \cdot (0.2428 \cdot T_{T,t} - 0.4345 \cdot T_m + 124.3077)^2 \\ &+ k_2 \cdot (K_\beta |d\beta|)^2 + k_2 \cdot (K_\gamma |d\gamma|)^2 + k_3 \cdot \beta^2 H^-(\beta) \\ &k_3 \cdot (\gamma_r - 75^\circ)^2 H^-(\gamma_r - 75^\circ) + k_3 \cdot (85^\circ - \beta_r)^2 H^-(85^\circ - \beta_r) \\ &+ k_3 \cdot (285^\circ - \gamma_r)^2 H^-(285^\circ - \gamma_r) \end{aligned} \quad (4.3)$$



## 4.2. Numerička integracija

Nakon definicije kriterijske funkcije potrebno je implementirati sustav opisan u 2, dodatno proširen kriterijskom funkcijom. Funkcije sustava su još jednom ovdje zapisane:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= -\frac{1}{T_{poz}}(\beta - \beta_r) \\ \dot{\gamma} &= -\frac{1}{T_{poz}}(\gamma - \gamma_r) \\ C_m \frac{dT_m}{dt} &= q_{lw} + q_{sw} + q_{conv} - P_{out}\end{aligned}$$

pa sada imamo vektor varijabli stanja sustava

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \beta & \gamma & T_m & x_N \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

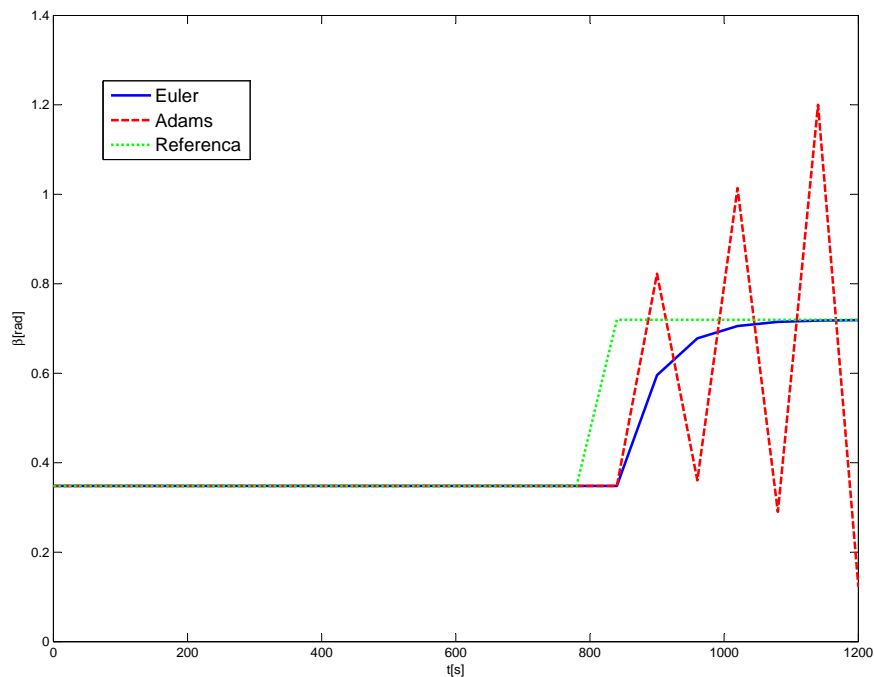
te vektor funkcija sustava

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} d\beta & d\gamma & dT_m & F \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Zbog preciznosti preporuča se korištenje višekoračnih metoda numeričke integracije kao što je Adamsova metoda opisana u 3.2. Implementirana je Adamsova trokoračna metoda, koja koristi podatke iz trenutnog i dva prošla vremenska trenutka. Uz proširenje vektora varijabli stanja kako bi se eliminirala potreba za ponovnim izračunom funkcija sustava, prema (3.18), za jednu od varijabli stanja može se zapisati:

$$\begin{aligned}\beta(i+1) &= \beta(i) + \tau \frac{23}{12} \cdot \beta(i) + \tau \beta_1(i) \\ \beta_1(i+1) &= -\frac{4}{3} \cdot d\beta(i) + \beta_2(i) \\ \beta_2(i+1) &= \frac{5}{12} \cdot d\beta(i)\end{aligned} \quad (4.6)$$

U ovom konkretnom slučaju, implementacija Adamsovom metodom pokazala se problematičnom. Zbog odabranih vremenskih konstanti motora za pozicioniranje  $T_{poz} = 90$  s i koraka numeričke integracije  $T = 60$  s dolazi do numeričkih nestabilnosti prikazanih na slici 4.1.



**Slika 4.1:** Numerička nestabilnost kod Adamsove metode

Nestabilnost je javlja zbog koeficijenta  $\frac{23}{12}$  Adamsove metode čiji je iznos veći od jedan, a množi derivaciju. Zbog tog koeficijenta vrijednost varijable stanja premaši referentnu te počne oko nje oscilirati. Ovisno o odnosu vremenske konstante motora i koraka numeričke integracije, osciliranje se može primiriti ili rastirati. Zaključak je da je Adamsova metoda točna, no potreban uvjet je vrijeme integracije manje od najmanje vremenske konstante sustava. Moguće rješenje je povećati vremensku konstantu motora, no to ne bi realno opisivalo sustav ili smanjiti korak numeričke integracije, no rezolucija podataka je 60 s. Korištenje Adamsove metode drugog broja koraka također nije moguće jer uvijek javlja problematičan koeficijent veći od jedan. Iz tog razloga korištena je Eulerova metoda numeričke integracije.

### 4.3. BPTT algoritam

Za realizaciju algoritma, prema 3.3, potrebno je proračunati Jakobijane sustava po varijablama stanja (4.7) i Jakobijane sustava po ulaznim signalima (4.8).

$$\mathbf{X}(i) = \frac{\partial \mathbf{f}(i)}{\partial \mathbf{x}(i)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d\beta}{\partial \beta} & \frac{\partial d\beta}{\partial \gamma} & \frac{\partial d\beta}{\partial T_m} & \frac{\partial d\beta}{\partial x_n} \\ \frac{\partial d\gamma}{\partial \beta} & \frac{\partial d\gamma}{\partial \gamma} & \frac{\partial d\gamma}{\partial T_m} & \frac{\partial d\gamma}{\partial x_n} \\ \frac{\partial dT_m}{\partial \beta} & \frac{\partial dT_m}{\partial \gamma} & \frac{\partial dT_m}{\partial T_m} & \frac{\partial dT_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} & \frac{\partial F}{\partial \gamma} & \frac{\partial F}{\partial T_m} & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{U}(i) = \frac{\partial \mathbf{f}(i)}{\partial \mathbf{u}(i)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d\beta}{\partial \beta_r} & \frac{\partial d\beta}{\partial \gamma_r} \\ \frac{\partial d\gamma}{\partial \beta_r} & \frac{\partial d\gamma}{\partial \gamma_r} \\ \frac{\partial dT_m}{\partial \beta_r} & \frac{\partial dT_m}{\partial \gamma_r} \\ \frac{\partial F}{\partial \beta_r} & \frac{\partial F}{\partial \gamma_r} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Uz pomoć osnovnih Jakobijana mogu se tvoriti složeni prema (3.30) i (3.31). Zbog primjene Eulerove numeričke integracije umjesto Adamsove metode, tvorba je nešto trivijalnija:

$$\tilde{\mathbf{X}}(i) = \left[ \mathbf{I} + \tau \mathbf{X}(i) \right] \quad (4.9)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}(i) = \left[ \tau \mathbf{U}(i) \right] \quad (4.10)$$

Još preostaje definirati vektor  $\mathbf{J}_x(N)$  prema (3.33) koji je u ovom slučaju:

$$\mathbf{J}_x(N) = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \right]^T \quad (4.11)$$

Implementacijom algoritma (3.34) - (3.36) i njegovim iterativnim izvođenjem mogu se dobiti optimizirani upravljački signali.

## 5. Rezultati

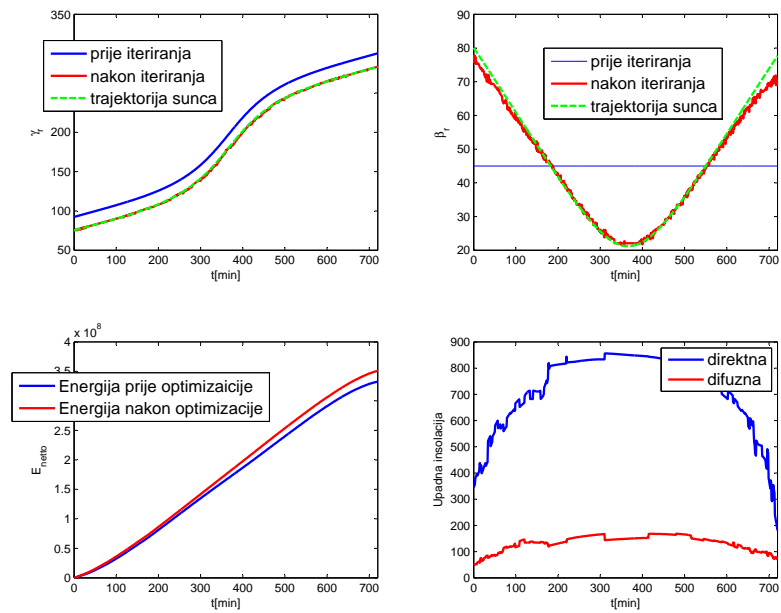
Sustav se simulira i optimira koristeći podatke iz *National Solar Radiation Data Base* (NSEDDB) za Međunarodnu zračnu luku Dulles Washington DC.

Kod implementacije pokazalo se problematičnim optimirati cijeli dan. Problem je u tome što se kod računanja gradijenta odvija velik broj množenja. Ova množenja na kraju rezultiraju velikim iznosom gradijenta koji za stvarno duge periode može narasti do veličina koje se ne mogu prikazati u računalu. Iz tog razloga bilo je potrebno rascjepkati dan na manje dijelove. Utvrđeno je da algoritam može u danim uvjetima podnijeti optimizaciju oko 160 koraka s vremenskim razmakom od minute. Iz tog razloga je dan podijeljen na blokove od 2 sata te je svaki blok zasebno optimiran. Ovakav pristup naravno ne pruža idealnu optimizaciju, ali predstavlja najbolje rješenje pošto cijeli dan nije moguće optimirati odjednom.

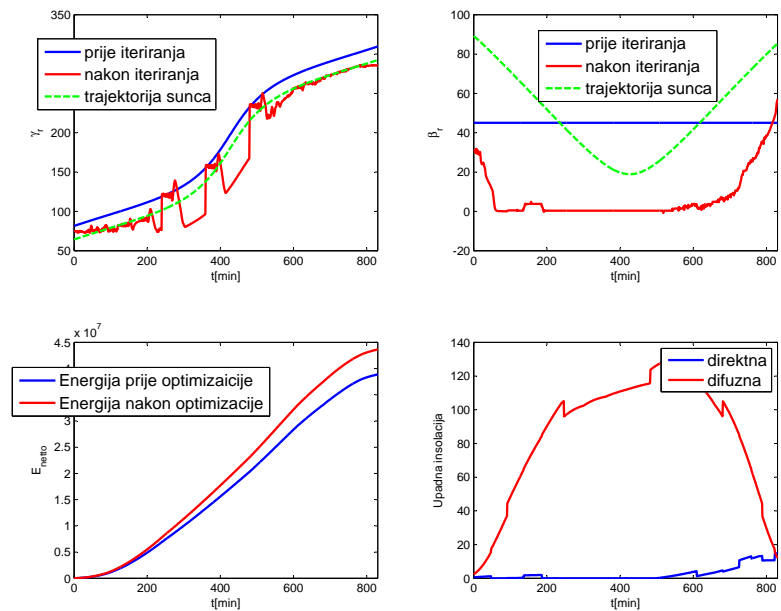
Optimiranje je provedeno na tri karakteristična dana, jedan kada dominira direktna, drugi kada dominira difuzna komponenta solarne iradijacije i treći djelomično oblačan dan kada se dominacija direktne i difuzne izmjenjuju. Pojedini dijelovi dana su nakon pojedinačne optimizacije spojeni te je simulirano ponašanje sustava tijekom cijelog dana. Koristi se fiksni broj iteracija.

Za dan s dominantnom direktnom komponentom (slika 5.1) može se vidjeti da optimirani referentni kutevi slijede položaj sunca na nebu. Takva trajektorija smanjuje kut između sunca i panela što maksimizira prikupljanje direktne komponente i samim time maksimizira generiranu energiju.

U slučaju dominacije difuzne komponente (slika 5.2), intuitivno je najbolje rješenje postaviti panel u horizontalan položaj, kako bi panel prikupljao difuznu insolaciju iz svih smjerova. Sa slike se može vidjeti da kut  $\beta$  uistinu poprima vrijednost oko  $0^\circ$ , osim pri početku i kraju dana. Skokovi u referenci kuta  $\gamma$  javljaju se u trenucima koji dijele dan.



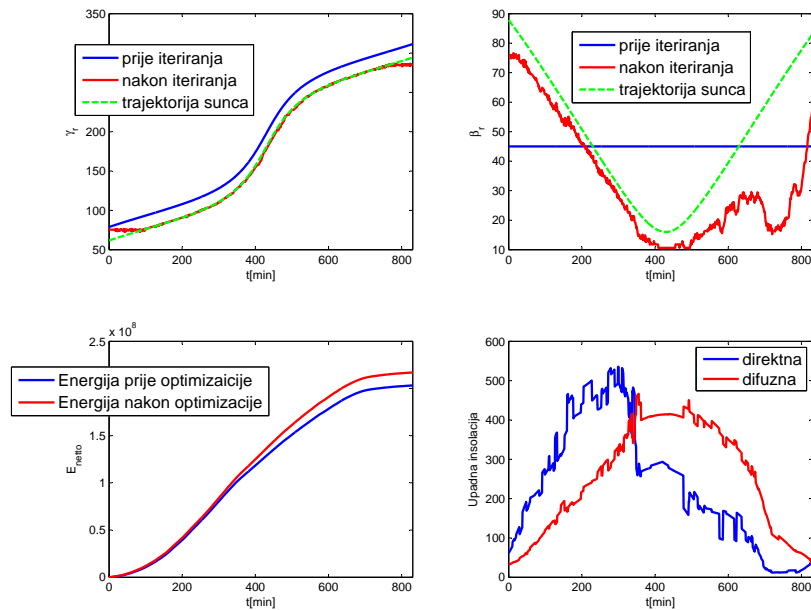
Slika 5.1: Sustav nakon optimizacije za sunčan dan



Slika 5.2: Sustav nakon optimizacije za oblačan dan

U danu sa promjenjivom naoblakom (slika 5.3), zbog prisustva značajne direktne

komponente, azimutni kut panela prati azimutni kut Sunca, pri čemu se kod kuta  $\gamma$  može uočiti djelovanje ograničenja iznosa referenci. U prvoj polovici dana, kut  $\beta$  prati zenitni kut uz malo odstupanje zbog dosta velike difuzne komponente. U drugoj polovici dana pak, zbog dominacije difuzne komponente, ostaje na manjem iznosu kuta naspram zenitnom kutu.



**Slika 5.3:** Sustav nakon optimizacije za djelomično oblačan dan

## 6. Zaključak

Porastom potrebe za obnovljivim izvorima energije rasti će količina energije generirane fotonaponskim panelima. Kako bi se iz dostupnih PV panela dobila maksimalna moguća energija, potrebno ih je pozicionirati tijekom dana. Ovisno o kvaliteti algoritma za određivanje trajektorije rezultati pozicioniranja mogu biti bolji ili lošiji.

Algoritam razmatran u radu dobro određuje ove trajektorije, iako je zbog mogućnosti opisanih u 3.4 pogodniji za optimiranje složenijih sustava. Problem algoritma je što nije pogodan za optimiranje duljih vremenskih perioda, pa je potrebno modificirati izvršavanje. Sama optimizacija traje dosta dugo, no zapravo ovisi o puno čimbenika od kojih su neki: broj uvjeta u kriterijskoj funkciji, broj diskretnih vremenskih trenutaka u kojima se sustav promatra, odabran korak učenja, dimenzije početnog sustava, broj koraka Adamsove metode numeričke integracije itd.

# LITERATURA

- [1] C. P. Underwood A. D. Jones. A thermal model for photovoltaic systems. 2001.
- [2] G.Wanner E. Hairer, S. P. Nørsett. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer, 1992.
- [3] Branko Novaković Ilya V. Kolmanovsky Francis Assadian Josip Kasač, Joško Deur. A conjugate gradient-based bptt-like optimal control algorithm with vehicle dynamics control application. 2010.
- [4] Nedjeljko Perić Marko Gulin, Mario Vašak. Dynamical optimal positioning of a photovoltaic panel in all weather conditions. 2013.
- [5] T. Muneer. *Solar radiation and daylight models*. Elsevier, 2004.
- [6] WG Hurley S. Armstrong. A thermal model for photovoltaic panels under varying atmospheric conditions. 2010.
- [7] Jože Voršič Sebastijan Seme, Gorazd Štumberger. Maximum efficiency trajectories of a two-axis sun tracking system determined considering tracking system consumption. 2011.
- [8] J. Twidell i T. Weir. *Renewable Energy Resources*. Taylor and Francis, 2006.



# **Optimiranje dvoosnog fotonaponskog sustava za praćenje Sunca u vremenski kontinuiranoj domeni**

## **Sažetak**

U ovom radu opisan je algoritam optimizacije primijenjen na dvoosni fotonaponski sustav za praćenje sunca. U početku rada detaljno se opisuje model razmatranog sustava. Nakon toga opisuje se definiranje kriterijske funkcije, Adamsova metoda numeričke integracije korištena za simulaciju sustava i sam algoritam optimalnog upravljanja. Provedena je validacija algoritma s istaknutim mogućnostima algoritma. Na kraju opisana je implementacija algoritma za razmatrani sustav, te su izneseni rezultati optimizacija.

**Ključne riječi:** Optimalno upravljanje, fotonaponski sustav, numerička integracija, dvoosno pozicioniranje, model iradijacije

## **Title**

## **Abstract**

This thesis describes a optimization algorithm applied to a two-axis photovoltaic Sun tracking system. In the beginning of the thesis the system model is described in detail. Afterwards the definition of the cost function is described, as well as the Adams method for numerical integration and the optimization algorithm itself. The validation of the model is conducted with algorithm properties being pointed out. In the end the implementation of the algorithm for the described system is described and the results of the optimization are presented.

**Keywords:** Optimal control, photovoltaic system, Adams numerical integration, two-axis positioning, irradiation model