

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Igor Pehnek

***Doprinos optimiranju oblika i topologije primjenom level
set metode i parametrizacije***

DOKTORSKA DISERTACIJA

Split, 2013

IMPRESUM/BIBLIOGRAFSKI PODATCI

Doktorska disertacija je izrađena na Zavodu za strojarstvo i brodogradnju, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu

Mentor: dr. sc. Damir Vučina, red. prof

Rad br.

PODATCI O OCJENI I OBRANI DISERTACIJE

Povjerenstvo za ocjenu doktorske disertacije:

1. Dr. sc. Željko Lozina red. prof. – predsjednik, FESB Split
2. Dr. sc. Damir Vučina, red. prof. – mentor, FESB Split
3. Dr. sc. Vedrana Kozulić, red. prof. – član, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije Split – član
4. Dr. sc. Gojko Magazinović, red. prof. – član, FESB Split
5. Dr. sc. Damir Sedlar, doc. – član, FESB Split

Povjerenstvo za obranu doktorske disertacije:

1. Dr. sc., Željko Lozina red. prof. – predsjednik, FESB Split
2. Dr. sc. Damir Vučina, red. prof. – mentor, FESB Split
3. Dr. sc. Vedrana Kozulić, red. prof. – član, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije Split – član
4. Dr. sc. Gojko Magazinović, red. prof. – član, FESB Split
5. Dr. sc. Damir Sedlar, doc. – član, FESB Split

Disertacija obranjena dana: 29. travnja 2013.

DOPRINOS OPTIMIRANJU OBLIKA I TOPOLOGIJE PRIMJENOM LEVEL SET METODE I PARAMETRIZACIJE

Sažetak

Topološko optimiranje je proces sinteze oblika i topologije konstrukcija, te je kao takav vrlo složen i zahtjevan numerički zadatak optimiranja. Topološko optimiranje rješava dva spregnuta polja problema istovremeno, polje pomaka i geometriju. Level set metoda topološkog optimiranja temelji se na implicitnoj funkciji čija izo-linija definira geometriju. Ako se svim točkama level set funkcije zada brzina, dobivamo promjenu level set funkcije u kvazi vremenu, odnosno dobivamo Hamilton-Jacobievu diferencijalnu jednadžbu izvedenu pomoću gradijenta level set funkcije. Optimiranje level set metodom vrši se gradijentnim postupkom, koji je sklon zaustavljanju u lokalnim ekstremima funkcije cilja. U radu je predstavljeno topološko optimiranje parametriziranom level set plohom. Level set ploha parametrizirana je radijalnim baznim funkcijama (RBF) i B-plohom. Parametri koji opisuju level set funkciju (njene z koordinate) predstavljaju varijable optimiranja. Kao primjer topološki se optimira 2D konzolni nosač ukliješten na jednom kraju i opterećen silom na drugom kraju. Uslijed promjene geometrije dolazi do potrebe premrežavanja konačnih elemenata što se izbjegava zamjenskim materijalom kao „jeftinijim“ numeričkim postupkom. Optimiranje parametriziranom level set plohom značajno smanjuje broj varijabli optimiranja uz zadržavanje približno dobre reprezentacije oblika, što otvara prostor primjeni genetskih algoritama. Genetski algoritam je globalna metoda optimiranja i nije sklon zaustavljanju u lokalnim ekstremima, što predloženom postupku daje veliku prednost. U usporedbi sa topološkim optimiranjem metodom odgrizanja materijala (ESO) dobivaju se značajno bolji rezultati. Zaključeno je da topološko optimiranje parametriziranom level set plohom i metodom zamjenskog materijala daje dobra rješenja topološkog optimiranja kod velikog broja varijabli, ali se značajno produljuje vrijeme trajanja optimiranja. Glavna primjena ovog postupka je dobivanje dobrih inicijalnih rješenja za gradijentne postupke koji ubrzavaju proces optimiranja.

Ključne riječi: optimiranje, parametrizacija, RBF aproksimacijska metoda, topološko optimiranje, level set.

A CONTRIBUTION TO THE OPTIMIZATION OF SHAPE AND TOPOLOGY USING THE LEVEL SET METHOD AND PARAMETERIZATION

Abstract

Topology optimization is the process of topology and shape synthesis of structures, and it is a very complex and demanding numerical task. Topological optimization solves two coupled field problems simultaneously, displacement field and geometry. The Level set is a method of topological optimization based on the implicit function the iso-lines of which define the geometry. If we propose velocities for all points of the level set function, we get a changed level set function in the quasi-time domain. Using this approach, we get a Hamilton-Jacobi transport equation which involves the gradient of the level set function. Optimization using the level set method is a gradient procedure, which is prone to local extremes of the objective function.

This text presents topological optimization of parameterized level-set surfaces. The Level set surface is parameterized using radial base functions (RBF) and B-surfaces. The parameters that describe the Level set function (z coordinates) are optimization variables. As an example of topology optimization, a 2D cantilever is used. Due to geometry changes, there is a need for re-meshing of the finite element which can be bypassed using the replacement material as a numerically "cheaper" method. In this version of the optimization procedure, a significant reduction of the number of optimization variables is possible, while also retaining good representation of shapes, which makes the application of genetic algorithms feasible. Genetic algorithms are global optimization methods, insensitive to stopping in local extremes, which provides a great advantage for the proposed procedure. Compared with the evolutionary structural optimization topological optimization method (ESO), the method gives significantly better results. It is concluded that the proposed method provides good solutions for topological optimization with a large number of variables, but significantly extends the duration of the optimization, which can be reduced by parallelization. The main application of this procedure is obtaining good initial solutions for gradient processes that accelerate the process of optimizing.

Key words: optimization, parameterization, RBF approximation, topology optimization, level set.

*Ovaj rad posvećujem svom stricu Milanu
za veliki utjecaj na moj životni put*

ZAHVALA

Ova doktorska disertacija nastala je uz veliku podršku moje obitelji, prijatelja i suradnika na fakultetu.

Prije svega veliku zahvalnost dugujem svojem mentoru prof.dr.sc. Damiru Vučini na podršci, usmjeravanju i nesebičnom prenošenju svog znanja i iskustva kroz cijeli poslijediplomski studij. Zahvaljujem se i svojim kolegama sa zavoda prof.dr.sc. Vedrani Cvitanić, prof.dr.sc. Željenu Lozini, dr.sc. Damiru Sedlaru, dr.sc. Ivanu Tomcu i prof.dr.sc. Frani Vlaku, sa kojim sam proveo mnogo vremena analizirajući i komentirajući rezultate svojih istraživanja. Zahvale dugujem i članovima povjerenstva za ocjenu i obranu disertacije prof.dr.sc. Vedrani Kozulić i prof.dr.sc. Gojku Magazinoviću na dobronamjernim primjedbama i komentarima, te sugestijama za buduća istraživanja. Zahvalio bih se i svojoj obitelji na potpori i razumijevanju tijekom svih ovih godina. Veliko hvala roditeljima Ljiljani i Josipu, stricu Milanu, sestri Dijani, nećacima Marku i Mirni. Zahvaljujem se i rodbini koja mi je puno pomogla tijekom mog obrazovnog puta, veliko hvala Ljiljani, Igoru, Nedi i Zlatku Milišić. Na kraju veliko hvala mojoj supruzi Radmili na bezgraničnoj potpori, razumijevanju i ljubavi koju mi je pružala svih ovih godina.

Igor Pehnec

Sadržaj

IMPRESUM/BIBLIOGRAFSKI PODATCI	ii
PODATCI O OCJENI I OBRANI DISERTACIJE.....	iii
Sažetak	iv
Abstract	v
Sadržaj	ix
Popis tablica	xii
Popis ilustracija	xii
Upotrijebljene oznake.....	xvi
1. Uvod	1
1.1 Motivacija.....	1
1.2 Dosadašnja istraživanja	2
1.3 Hipoteza	9
1.4 Opis i metodologija istraživanja – sadržaj rada.....	10
1.4.1 Teorijska razrada	10
1.4.2 Modeliranje problema	10
1.4.3 Odabir metoda i parametara.....	11
1.5 Znanstveni doprinos rada.....	12
2. Osnovni postupci pri topološkom optimiranju.....	13
2.1 Optimiranje	13
2.1.1 Definiranje fizikalnog modela.....	15
2.1.2 Modeliranje	15
2.1.3 Kriterij izvrsnosti.....	15
2.1.4 Algoritam za rješavanje problema	15
2.2 Optimiranje sa ograničenjima	16
2.2.1 Lagrangeova formulacija	16
2.2.2 Kaznena formulacija	19

2.3	Parametrizacija geometrije	20
2.3.1	Opis geometrije Bezierovom krivuljom	21
2.3.2	Opis geometrije B-krivuljama	23
2.4	Problem mehanike čvrstih tijela i princip virtualnih radova	24
2.5	Princip minimuma ukupne potencijalne energije	30
2.6	Numeričke metode rješavanja	31
2.6.1	Metoda konačnih elemenata	31
2.6.2	Aproksimacija potencijala pomoću bezmrežne metode - Radijalne bazne funkcije	35
2.7	Analiza osjetljivosti pri optimiranju	42
3.	Topološko optimiranje u mehanici čvrstih tijela	46
3.1	Klasični postupak i SIMP postupak topološkog optimiranja – uvjeti optimuma	48
3.1.1	Osjetljivost procesa	50
3.1.2	Usklađivanje mreže i postojanje rješenja	50
4.	Level set metoda	53
4.1	Rješavanje Hamilton-Jacobieve jednadžbe metodom konačnih razlika (klasični Upwinding postupak)	56
4.1.1	Težinske funkcije i definiranje područja	58
4.2	Rješavanje Hamilton-Jacobieve jednadžbe primjenom parametrizacije level set funkcije Φ	61
4.3	Jednadžba gibanja level set funkcije i proces optimiranja	63
4.4	Izvršnost i funkcija cilja level set plohe	67
4.5	Načelni dijagram toka gradijentnog postupka optimiranja pomoću RBF i level set metode	72
4.6	Načelni dijagram toka ne-gradijentnog postupka optimiranja genetskim algoritmom pomoću RBF i level set metode	73
5.	Razrada numeričkog postupka topološkog optimiranja oblika	74
5.1	Definiranje problema	74
5.2	Parametrizacija level set funkcije	75

5.3	Formulacija problema	88
5.3.1	Formulacija – minimum volumena uz ograničenja naprezanja i deformacije	88
5.3.2	Formulacija – minimum podatljivosti uz ograničenje volumena	90
5.4	Algoritmi optimiranja	91
5.4.1	Optimiranje oblika i topologije opisanog parametarskom LS plohom Hamilton-Jacobičevom jednačbom.....	93
5.5	FEM model	97
5.6	Numerička implementacija optimiranja oblika i topologije razvojem ad-hoc heterogenog workflowa u računalnom clusteru sa paralelizacijom.....	98
5.7	Metoda odgrizanja materijala (elemenata sa najmanjim vrijednostima naprezanja) ...	102
6.	Rezultati istraživanja.....	105
6.1	Rezultati topološkog optimiranja level set funkcijom parametriziranom radijalnim baznim funkcijama	105
6.2	Rezultati topološkog optimiranja level set funkcijom parametriziranom B-plohom.....	109
6.2.1	Formulacija minimalnog volumena pri topološkom optimiranju level set funkcijom	110
7.	Zaključak i daljnja istraživanja	127
8.	Literatura	129
	Životopis	134
	Curriculum vitae	135

Popis tablica

Tablica 1 Tablica utjecaja parametra oblika i broja čvorova pri RBF aproksimaciji geometrije	85
Tablica 2 Tablica utjecaja broja kontrolnih točaka i stupnja B-plohe.....	86

Popis ilustracija

Slika 1 Tradicionalni inženjerski pristup.	13
Slika 2 Željeni inženjerski pristup.	14
Slika 3 Simulacija ciljanog inženjerskog pristupa.	14
Slika 4 Sedlasta funkcija sa optimumom u minimumu funkcije cilja, odnosno maksimumu Lagrangeovog množitelja	18
Slika 5 Prikaz interpolacije i aproksimacije pomoću niza parametara	20
Slika 6 Konstrukcija kvartne Bezierove krivulje ($n=4$) za trenutak $t=0$, i $t=0.25$	21
Slika 7 Prikaz dvije Bezierove krivulje između kojih nema kontinuiteta nagiba (a) i između kojih postoji kontinuitet nagiba (b).....	22
Slika 8 Stanje (a) vanjske sile F i unutarnja naprezanja σ u ravnoteži i stanje (b) deformacija ϵ^* i ostvaren pomak u^*	26
Slika 9 Naprezanje u diferencijalnom elementu	26
Slika 10 Prikaz sila u diferencijalnom segmentu za 1D.....	27
Slika 11 Prikaz diskretizacije prostora i čvorova.....	32
Slika 12 Dijagram toka metode konačnih elemenata.....	34
Slika 13 Pascalov trokut monomnih funkcija za dvo-dimenzijski prostor	36
Slika 14 Prikaz topološke promjene oblika.....	46
Slika 15 Prikaz strukture sa jednom rupom (a) i sa velikim brojem rupa (b) u domeni	51
Slika 16 Opća implicitna funkcija Φ	53
Slika 17 Prodor level set funkcijom Φ u pravokutnu domenu D	54
Slika 18 Prikaz numeričkog diferenciranja konačnim razlikama	56
Slika 19 Prikaz konveksnog ($\kappa > 0$) i konkavnog ($\kappa < 0$) područja te unutarnjeg i vanjskog područja	57
Slika 20 Prikaz razlivenosti funkcije	59

Slika 21 Proces optimiranja. Isprekidana linija - početno stanje, puna linija - stanje u procesu optimiranja.....	62
Slika 22 Prikaz level set funkcije nad Eulerovom mrežom	62
Slika 23 Promjena level set funkcije u vremenu Lagrangeovim pogledom na polje problema	63
Slika 24 Prikaz podjele područja na elemente (čvorovi unutar rupa su od mekšeg materijala).....	67
Slika 25 Prikaz polja proširenih brzina.....	71
Slika 26 Pseudo kod level set optimiranja pomoću RBF funkcija gradijentnim postupkom.....	72
Slika 27 Pseudo kod level set optimiranja pomoću RBF funkcija genetskim algoritmom	73
Slika 28 Definiranje geometrije, opterećenja i rubnih uvjeta konzolne ploče za topološko optimiranje.....	74
Slika 29 Neka od diskretnih rješenja konzole opterećene silom.....	75
Slika 30 Aproksimacijska funkcija.....	76
Slika 31 Različiti oblici RBF aproksimacijskih funkcija	77
Slika 32 Utjecaj parametra oblika RBF funkcije (α_c , d_c i q) na aproksimaciju funkcije	78
Slika 33 Greška pri aproksimaciji RBF metodom za različite parametre RBF funkcije	79
Slika 34 Aproksimacije i greška pri aproksimaciji RBF metodom sa 144 varijable optimiranja, za odabrane parametre RBF funkcije (α_c , d_c i q).....	80
Slika 35 Aproksimacije i greška pri aproksimaciji RBF metodom sa 576 varijabli optimiranja, za odabrane parametre RBF funkcije (α_c , d_c i q).....	80
Slika 36 Aproksimacijske funkcije aproksimirane B-plohom drugog i trećeg stupnja sa 36, 144 i 576 kontrolnih točaka	81
Slika 37 Aproksimacijska funkcija (step funkcija u 2D domeni)	82
Slika 38 Aproksimacija i greška aproksimacije step funkcije RBF metodom sa 36 čvorova i utjecaj različitih parametara oblika α_c , d_c i q	83
Slika 39 Aproksimacija i greška aproksimacije step funkcije RBF metodom sa 144 čvora i utjecaj različitih parametara oblika α_c , d_c i q	83
Slika 40 Aproksimacija i greška aproksimacije step funkcije RBF metodom sa 576 čvorova i utjecaj različitih parametara oblika α_c , d_c i q	84
Slika 41 Aproksimacija i greška aproksimacije step funkcije RBF metodom sa 2304 čvora.....	84
Slika 42 Aproksimacija step funkcije B plohom za različiti broj kontrolnih točaka i različit stupanj B-krivulja.....	87
Slika 43 Prikaz presjeka volumena domene izo linijom level set funkcije	88
Slika 44 Prikaz multi-modalne funkcije cilja u ovisnosti o varijabli x	93
Slika 45 Dijagram toka optimiranja level set plohe metodom najbržeg spusta.....	96

Slika 46 Jedan od rezultata topološkog optimiranja H-J transportnom jednadžbom	96
Slika 47 Prikaz stvaranja nove mreže konačnih elemenata parametrizacijom granica level set funkcije (a) i (b) i metodom zamjenskog materijala (c).....	97
Slika 48 Dijagram toka klijenta koji traži zahtjev od servisa za izvršenje niza naredbi preko WCF servisa.....	98
Slika 49 Dijagram toka servisa koji izvršavaju zadani set naredbi pomoću WCF servisa	99
Slika 50 Dijagram toka procesa optimiranja.....	101
Slika 51 Optimum pri rješavanju odgrizanja konačnih elemenata sa najmanjim vrijednostima naprezanja (a) naprezanja u elementima (b) naprezanja u Gaussovima točkama	104
Slika 52 Nosač optimiran metodom genetskog algoritma. Level set funkcija opisana sa 6x6 RBF čvorova, $\alpha c \cdot dc = 0.05, q = 0.3$ i 3200 konačnih elemenata iz pune ploče	107
Slika 53 Nosač optimiran metodom genetskog algoritma. Level set funkcija opisana sa 12x12 RBF čvorova, $\alpha c \cdot dc = 0.05, q = 0.05$ i 3200 konačnih elemenata iz pune ploče	108
Slika 54 Rješenje level set optimiranja genetskim algoritmom iz pune ploče sa (a) 36 varijabli, (b) 144 varijabli i (c) 576 varijabli.....	111
Slika 55 Rješenje level set optimiranja genetskim algoritmom iz (a) početnog rješenja, (b) sa 36 varijabli, (c) 144 varijable i (d) 576 varijabli optimiranja	112
Slika 56 Rješenje level set optimiranja genetskim algoritmom iz početnog rješenja (Slika 55 a) sa 576 varijabli, uz povećanu populaciju	113
Slika 57 Rješenje level set optimiranja genetskim algoritmom iz početnog rješenja (Slika 55 a) sa 576 varijabli, uz povećanu populaciju i prikaz naprezanja u čvorovima konačnih elemenata	114
Slika 58 Level set optimiranja sa 2304 varijabli optimiranja genetskim algoritmom iz pune ploče u 13 generacija – zagađeni prikaz raspodjele naprezanja (prikaz konvergencije)	115
Slika 59 Level set optimiranja sa 2304 varijabli optimiranja genetskim algoritmom iz pune ploče sa većim brojem generacija (200) – prikaz naprezanja u čvorovima konačnih elemenata.....	115
Slika 60 Prikaz opisa iste domene (debela linija) sa različitim level set funkcijama $\Phi(x)$ (isprekidane linije).....	116
Slika 61 Usporedba jedinki koje binarno kodiraju model.....	118
Slika 62 Primjer nastajanja jedinki sljedeće generacije.....	118
Slika 63 Pseudo kod level set topološkog optimiranja pomoću B-plohe genetskim algoritmom uz kaznu ekvivalentnih jedinki u populaciji.....	119
Slika 64 Utjecaj operatora genetskog algoritma na različitost populacije	120
Slika 65 Vrijednost funkcije cilja pojedinih jedinki u generaciji bez kaznenog operatora nad ekvivalentnim jedinkama	121

Slika 66 Vrijednost funkcije cilja pojedinih jedinki u generaciji bez kaznenog operatora nad ekvivalentnim jedinkama	122
Slika 67 Rješenje level set optimiranja genetskim algoritmom sa 144 varijable optimiranja uz kaznu funkcije cilja za ekvivalentne jedinke u generaciji	123
Slika 68 Rješenje level set optimiranja sa 144 varijable optimiranja genetskim algoritmom uz kaznu ekvivalentnih jedinki u populaciji iz pune ploče (zrcalno).....	123
Slika 69 Optimum iz pune ploče (0 level set ploha) sa 36 varijabli optimiranja	125
Slika 70 Rješenja dobivena gradijentnom metodom optimiranja (b) i (d) iz zadanih početnih rješenja (a) i (c) uz 144 varijable optimiranja.....	126

Upotrijebljene oznake

$\mathbf{a}_0(t)$	koeficijenti parametrizirane level set funkcije
$a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$	virtualni rad unutarnjih sila
a_i	koeficijenti RBF funkcija
\mathbf{B}	matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima
\mathbf{D}	matrica elastičnih svojstava materijala
d_c	parametar oblika RBF funkcije
E	Youngov modul elastičnosti
\mathbf{E}	matrica krutosti
\mathbf{F}	vektor koncentriranih čvornih sila
\mathbf{F}_s	sila u čvorovima od površinskog opterećenja
f_s	vektor distribuiranih sila koje djeluju na dijelu ruba Γ_s
\mathbf{F}_v	vektor sila u čvorovima od volumenskih sila \mathbf{f}_v
f_v	vektor volumenskih sila
G	modul smicanja
\mathbf{G}	kolokacijska matrica
$G(\Phi)$	ograničenje volumena (LS)
H	težinska funkcija
$J(\mathbf{u}, \Phi)$	potencijalna energija (LS)
\mathbf{k}	matrica krutosti konačnog elementa
\mathbf{K}	globalna matrica krutosti
K_e	element globalne matrice krutosti
\mathbf{L}	diferencijalni operator
$L(\mathbf{u}, \Phi, \lambda)$	složena Lagrangeova funkcija cilja
$l(\mathbf{v})$	virtualni rad vanjskog opterećenja
\mathbf{N}	matrica funkcije oblika
$\mathbf{p}(x)$	polinomna bazna funkcija
R_i	radijalna bazna funkcija (RBF)
r	udaljenost RBF čvorova
\mathbf{q}	vektor pomaka u čvorovima
Q	parametar oblika RBF funkcija - potencija
t	vremenski prirast

U	energija elastične deformacije u deformabilnom tijelu
u	vektor polja pomaka
u*	vektor pomaka sa superponiranim virtualnim pomakom
V	potencijalna energija vanjske sile
<i>V</i>	volumen
<i>v</i>	brzina
v	virtualno polje pomaka
<i>v_n</i>	normalna komponenta brzine
<i>W_u</i>	ukupni unutarnji virtualni rad
<i>W_v</i>	rad vanjskih sila
<i>W_{v1}</i>	ukupni virtualni rad volumenskih sila
<i>W_{v2}</i>	rad kog vrše vanjske površinske sile, po obodu Γ_s
X	varijable oblika (označava distribuciju materijala), topologije, stanja
x	varijable prostora
α_c	parametar oblika RBF funkcije
Γ	površina tijela
Γ_s	vanjska površina tijela na kojoj djeluju vanjske sile f_s – statički rubni uvjeti
Γ_u	vanjska površina tijela na kojoj su zadani pomaci u_i - geometrijski rubni uvjeti
γ_{ij}	smična deformacija
$\delta(\Phi)$	parcijalna derivacija težinske funkcije $H(\Phi)$
ϵ	vektor deformacija
λ	Lagrangeov množitelj za nejednakosna ograničenja
μ	Lagrangeov množitelj za jednakosna ograničenja
ν	Poissonov omjer
ζ	parametar postotka volumena
Π	ukupna potencijalna energija
ρ	gustoća
σ	vektor naprezanja
τ	veličina vremenskog koraka
τ_{ij}	smično naprezanje
Φ	level set funkcija poglavlje LS
Φ	funkcija oblika poglavlje RBF
Ω	promatrani volumen tijela

OZNAKE INDEKSA

<i>B</i>	bilinearna forma
<i>e</i>	prošireno polje (extension) ili element
<i>n</i>	normalna komponenta
<i>ad</i>	admissible (dopustivo)

KRATICE

BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
ESO	evolutionary structural optimization
FEA	analiza konačnim elementima (finite element analysis)
H-J	Hamilton-Jacobi
LS	level set
MKE	metoda konačnih elemenata
PDJ	parcijalna diferencijalna jednažba
PIM	point interpolation method
RBF	radial basis function
RPIM	radial point interpolation method
SIMP	solid isotropic material with penalization
SQP	Sequential Quadratic Programming
WCF	windows communication foundation

1. Uvod

1.1 Motivacija

Optimiranje je postupak kojim se pri projektiranju ili planiranju određuje najbolji mogući izbor slobodnih veličina na temelju prethodno određenih kriterija. U mehanici čvrstih tijela postoje tri razine optimiranja: optimiranje dimenzija, optimiranje oblika i topološko optimiranje.

Optimiranje dimenzija i oblika rješava se klasično parametrizacijom geometrije koja se optimira, te mijenjanjem parametara kako bi se dobio optimalan oblik. Parametrizacija smanjuje broj parametara optimiranja, a time i trajanje procesa optimiranja.

Pri optimiranju topologije u mehanici čvrstih tijela postoji problem određivanja dva nepoznata spregnuta polja: polje pomaka i oblik, odnosno raspodjela materijala. Oblik se uzima kao varijabla pri optimiranju. Pri optimiranju oblika i raspodjele naprezanja, postoji potreba za značajnijim promjenama geometrije od same promjene veličine pojedinih parametara. Topološkim optimiranjem mijenja se raspodjela materijala po domeni (geometrija tijela), odnosno mijenja se struktura domene obzirom na različite moguće kriterije (kao na primjer minimum mase, minimum naprezanja, minimum podatljivosti). Topološko optimiranje je postupak inverznog procesa sinteze oblika modela, te je kao takav vrlo složen i zahtjevan numerički zadatak optimiranja konstrukcija. Postoje četiri metode optimiranja oblika i topologije: Bubble metoda, ESO metoda (Evolutionary structural optimization), SIMP metoda (Solid Isotropic Material with Penalization) i level set metoda (LS).

Opis geometrije, metoda optimiranja i fizikalne pojave mogu se rješavati nizom različitih numeričkih postupaka, a samo nekoliko varijacija numeričkih postupaka opisano je u kombinaciji sa level set metodom u dosadašnjoj literaturi.

Level set metoda se tek odnedavno pojavila kao metoda koja rješava probleme topološkog optimiranja, a zbog svog implicitnog zapisa spregnuto opisuje topološke promjene modela i promjene oblika pri čemu nije potrebna ponovna parametrizacija geometrije kod promjene topologije.

Postupak topološkog optimiranja level set metodom je vrlo atraktivno područje istraživanja, jer integrira postupak optimiranja oblika i topologije. Brojne su mogućnosti parametrizacije level set funkcije, formulacije problema i paralelizacije samog procesa optimiranja. Složeni postupak optimiranja oblika i topologije level set metodom predstavljen je u brojnim radovima, međutim

nigdje nije sustavno predstavljena i ispitana mogućnost smanjenja broja parametara koji opisuju level set funkciju. To je i glavni razlog za izradu i unapređenje složenog postupka optimiranja oblika i topologije level set metodom.

1.2 Dosadašnja istraživanja

Optimiranje oblika u smislu inverznog procesa sinteze je vrlo kompleksan i kreativan proces, koji uključuje mnoge aspekte kao što su iskustvo, ideje, pravila, metode, analiza, interakcije i druge konceptualne elemente.

Pri klasičnom rješavanju problema mehanike čvrstih tijela numeričkim metodama oblik je zadan, te se određuju naprezanja. Međutim pri optimiranju topologije u mehanici čvrstih tijela postoji problem određivanja dva nepoznata polja: polje naprezanja i oblik (raspodjela materijala). Oblik se uzima kao varijabla pri optimiranju.

Postoje četiri temeljne metode optimiranja oblika i topologije:

- Bubble metoda u kojoj se pri optimiranju, na primjer ploče sa rupama, mijenja veličina praznina u promatranoj domeni kako bi dobili optimalni oblik [4],[5], [6], [7].
- ESO metoda (Evolutionary structural optimization) [46], [49], [50], [51] na mjestima gdje je metoda konačnih elemenata dala manja naprezanja, uklanja (gricka) materijal.
- SIMP metoda (Solid Isotropic Material with Penalization) [1], [5], [6] - metoda topološkog optimiranja koja se svodi na optimiranje raspodjele materijala. Varijabla koja govori o raspodjeli materijala je krutost materijala koja može poprimiti vrijednosti izotropnog materijala (ima materijala) i nulu (nema materijala).
- Level set metoda optimiranja temelji se na implicitnoj funkciji čije izo-linije opisuju geometriju koja se optimira [2], [44], [37],[40], [39], [48], [41], [46], [38], [42], [43]. Kao takva level set funkcija može opisati i topološke promjene geometrije pri optimiranju.

Problematika optimiranja topologije level set metodom koja je obrađena u literaturi može se razvrstati u nekoliko područja:

- parametrizacija geometrije domene (oblika) (SIMP, level set, itd.),
- interpolacijske metode (RBF, B-spline, itd.),
- rješavanje ravnoteže (mehanike čvrstih tijela) za trenutni oblik (metoda konačnih elemenata, bezmrežna metoda), primjena premrežavanja, zamjenskog materijala, itd.,
- formulacija pri optimiranju oblika i topologije (minimum volumena uz zadovoljenje ograničenja naprezanja i deformacija ili minimum podatljivosti uz ograničenje volumena),

- optimizacijski algoritam (nelinearno programiranje, gradijentne metode, ne-gradijentne metode, evolucijske metode, itd.),

Radnja zadire u niz disciplina, te je sukladno tome i pregled literature multidisciplinaran.

Optimiranje oblika obično se sastoji od tri faze ([1], [2] i [3]): topološko optimiranje, optimiranje oblika i optimiranje dimenzija. Topološko optimiranje najbliže je apstraktnoj konceptualnoj fazi. Mnogi radovi ([5], [6], [7]) opisuju različite pristupe, modele i procedure topološkog optimiranja. U fazi optimiranja oblika, učinkovita parametrizacija oblika postaje ključna za učinkovito optimiranje geometrije. Parametrizacija pohranjuje niz parametara (kontrolnih točaka, nagiba, itd.) koji definiraju geometrijski oblik.

Raniji pristupi opisa geometrije modela koriste koordinate čvorova konačnih elemenata kao varijable oblika, što ima za posljedicu veliki broj varijabli oblika, diskontinuitet nagiba između elemenata, visoku dimenziju prostora traženja optimalnog oblika, reinicijalizaciju mreže konačnih elemenata pri promjeni broja varijabli oblika i sl.

Drugi pristup je da se geometrija opisuje polinomima i parametarskim krivuljama ili plohamama. Interpolacijskim ili aproksimacijskim metodama parametriziraju se granice, a parametri koji opisuju granicu uvode se kao varijable optimiranja.

Brojni radovi opisuju osnovne pristupe parametrizacije i promjene geometrije ([8], [9], [10], [11]). Parametrizacija različitih oblika geometrije također je predstavljena i u radovima [3], [12].

Pristup „design element“ je metoda koja parametrizira strukturu dijeljenjem na pod područja („design element“), koja imaju neovisnu mrežu konačnih elemenata. Čvorovi koji definiraju granice i unutarnje područje pod-područja mogu se koristiti kao varijable pri optimiranju [13].

Autori u radu [14] su razvili metodu optimiranja oblika za ravninske strukture koja se temelji na promatranju kritičnih ograničenja naprezanja i deformacija koji se nalaze na granici modela.

Varijable optimiranja su čvorovi koji su nastali finom podjelom granice područja na konačne elemente. Metoda daje maksimalne težine odabranim graničnim čvorovima, čime se u kasnijim fazama proračuna analize osjetljivosti vrši perturbacija samo odabranih čvorova. Metoda omogućuje velike promjene oblika kako bi se postigao optimalan oblik. Korištena je i metoda minimalnih kvadrata, te B-krivulja koja definira točke na rubovima konačnih elemenata. Opisana je i greška te analiza osjetljivosti, a program je testiran na konzolnoj gredi, ploči sa rupom, te nosaču.

Autori [15] koriste pravila (gramatiku) koja definiraju oblik, kako bi se proveo proces sinteze oblika umjetnom inteligencijom i srodnim postupcima.

Parametrizaciju Bezierovim i B-krivuljama pri optimiranju oblika ploče sa rupom opterećene dvoosnim naprezanjem opisali su autori u svom radu [16]. U radu [16] autori su koristili p-verziju

2D elastičnog konačnog elementa koji je proširen i opisan Bezierovom ili B krivuljom, čime je dobiven novi konačni element koje je prošao „path test“.

Autori rada [2] primijenili su također B-krivulju pri parametrizaciji i opisu geometrije grede, lukova i rubova, te dali analizu osjetljivosti. U istom radu [2] se opisuje integrirani pristup parametrizacije oblika strukture. Pristup implementira analizu osjetljivosti (metodu konačnih elemenata) na promjenu oblika strukture (design).

Kombiniranje 3D skeniranja i optimiranja oblika evolucijskim metodama sa CAD parametrizacijom i izmjenom oblika dali su autori u radu [17]. Autori su skenirali model sa 3D optičkim skenerom i na taj način došli do geometrije modela. Model se postupkom reverznog inženjerstva na fiksnoj mreži konačnih elemenata evolucijskom metodom optimirao obzirom na minimum naprezanja i mase. Postupak je proveden na nekoliko strojnih dijelova (klipnjača, kuka i vilica), te su razmotreni prednosti i nedostaci predstavljenog postupka reverznog inženjerstva.

Analiza osjetljivosti i optimizacijski postupak na CAD modelu predstavljenom u komercijalnom programskom paketu (Pro/ENGINEER) dali su autori u svom radu [18]. Analiza osjetljivosti računala se s obzirom na naprezanja i pomake metodom konačnih elemenata, poštujući varijable optimiranja (parametre CAD modela). Primjer CAD optimiranja predstavljen je na lopatici turbine. Postupak temeljen na oblikovanju geometrije Bezierovim plohama u nizu koje opisuju model prikazan je u radu [13]. Model prikazan Bezierovim plohama u nizu primjenjiv je neovisno o analizi osjetljivosti i tipu konačnih elemenata. Praktična primjena parametrizacije i analize modela predstavljena je na primjeru ploče sa rupom i kuke.

Tehnička funkcionalnost i izvrsnost u praksi mogu imati više kriterija, strukturnih ciljeva, nesigurnost u parametrima, dinamičko okruženje, pouzdanost i robusnost optimuma itd. [19].

Potreba za integriranjem geometrijskih modela i analize dovela je do novih pristupa u izo-geometrijskoj analizi. Autori u radovima [20] i [21] su, primjenom NURBS krivulja i ploha pri opisu baznih funkcija za reprezentaciju modela, proveli diskretizaciju za analizu konačnim elementima. Optimiranje je numerička metoda za dobivanje „najboljeg“ rješenja. Brojne su metode optimiranja, međutim kako je u radu riječ o optimiranju n-dimenzijskih nelinearnih problema s ograničenjima, najčešće se koriste gradijentne metode optimiranja, SQP metoda i evolucijske metode optimiranja.

Evolucijske metode (npr. genetski algoritmi) primijenjeni su pri optimiranju oblika u brojnoj literaturi ([22], [23]) i mogu biti dobar odabir pri sintezi oblika. U navedenim radovima opisana je paralelizacija procesa višekriterijskog optimiranja (MOEA). Kao primjeri više-ciljnog optimiranja dani su naprezanje ploče i okvir za bicikl [23].

Evolucijske i heurističke metode u kontekstu strukturnih primjena, ne-konveksnih, više-ciljnih, sa više lokalnih optimuma prikazano je u radu [24], sa prikazanim proračunskim tijekom. U radu su opisani primjeri za koje su evolucijske metode bolji izbor pri optimiranju od gradijentnih metoda, ali kako je već poznato, nedostatak ove metode je veliki broj iteracija, te je i numerički proračun zahtjevniji. U radu je pokazano da heurističke metode daju zadovoljavajuće rezultate uz prihvatljiv broj iteracija izračuna funkcije cilja.

Efikasnost „soft computing“ metoda u pronalaženju optimalnog rješenja neuralnim mrežama razmatrana je u radu [25]. U „soft computing“ metode ubrajaju se sve heurističke metode koje nemaju analitičke izraze za optimiranje (genetski algoritmi, neuralne mreže, evolucijski algoritmi, metoda simultanog žarenja, metoda jata ptica, itd.), nego se temelje na oponašanju pojava u prirodi. Primjene ovakvih metoda u literaturi su prikazane na primjerima više-ciljnog optimiranja aeroprofila u više-režimskim uvjetima, optimiranju ploča, greda opterećenih na savijanje, okvirnih nosača, strojnih elemenata, komponenti vozila, alata, materijala obzirom na zamor, itd.

Integracija strukturnog optimiranja oblika i CAD programa predstavljena je u radu [26]. U radu su autori složenu parametriziranu geometriju (krevet horizontalne tokarilice i prirubnicu) izrađenu u programskom paketu Mechanical Desktop optimirali promjenom dimenzija CAD modela.

Integracija CAD modela i mreže konačnih elemenata izrađena je kao vlastita aplikacija u C++ programu, koja se izvršava u svakom koraku optimizacijskog ciklusa.

Autori u radu [27] su na primjeru spojke za prijenos zakretnog momenta opisali granice područja B krivuljama, izgledili mrežu konačnih elemenata i implementirali SLP i simpleks postupak optimiranja.

Autor u radu [28] ispitivao je utjecaj parametra RBF interpolacijske multikvadratne funkcije na točnost reprezentacije geometrije, gdje je autor pokazao da parametar RBF interpolacijske funkcije ovisi o rasporedu i broju RBF čvorova koji opisuju zadani model, te modelu koji se parametrizira. Autor je predstavio algoritam koji predlaže dobre vrijednosti parametra RBF multikvadratne interpolacije.

Usljed promjene oblika i pod-područja dolazi do pojave velikih deformacija mreže konačnih elemenata. Pojava velikih deformacija elemenata zahtijeva adaptivnu mrežu konačnih elemenata (reinicijalizaciju) za kreiranje novih granica područja i distribuciju materijala. Numerički zahtjevna reinicijalizacija mreže u kombinaciji sa evolucijskim postupkom optimiranja oblika predstavljena je u radu [29] u kojem je i predložen učinkovit postupak za generiranje adaptivne mreže koristeći analizu osjetljivosti svih veličina povezanih sa adaptivnom mrežom konačnih elemenata (položaj čvorova, procjena greške, itd.), poštujući varijable optimiranja. Ova analiza osjetljivosti računa se samo u prvom koraku, za referentnu geometriju, čiji se rezultati analize projiciraju na sve ostale

analize u procesu optimiranja. Projicirane informacije sudjeluju u kreiranju nove prilagođene mreže konačnih elemenata pri svakoj promjeni geometrije u koraku optimiranja, što znatno smanjuje vrijeme optimiranja u usporedbi sa standardnim strategijama.

Pri optimiranju oblika, rezultat optimiranja jako ovisi o pouzdanosti strukturne analize (kvaliteta i složenost modela, linearan ili nelinearan model materijala i geometrije, diskretizacijska greška modela FEA). U radu [30] predstavljen je drukčiji pristup, u kojem tijekom samog izvođenja optimizacijskog postupka mreža konačnih elemenata postaje profinjenija. Također, procjena ukupne greške strukturnog optimiranja na osnovu ukupne energije deformacije (globalna greška), u radu [30] zamijenjena je lokalnom procjenom greške, što omogućuje direktnu kontrolu greške diskretizacije lokalnog kriterija optimiranja.

Topološko optimiranje homogenizacijskom metodom raspodjelom mase po domeni predstavili su autori u radu [31]. Kako je problem diskretan (ima ili nema materijala u promatranim elementima), korištena je metoda genetskog algoritma, a varijable optimiranja su gustoće konačnih elemenata domene. Funkcija cilja u ovom radu bila je optimalna raspodjela elemenata u domeni tako da promatrana konstrukcija ima maksimalnu krutost sa nekim zadanim volumenom. Numeričke metode potrebne za topološko optimiranje i optimiranje oblika zahtijevaju veliku snagu računala za intenzivne numeričke operacije. Autori su u svom radu [32] paralelizirali proces strukturne analize konačnih elemenata linearnog sustava GRID tehnologijom.

Integracija topološkog optimiranja i optimiranja oblika CAD modela je predstavljena u radu [33]. CAD model rekonstruira se B krivuljama i plohami, čije kontrolne točke predstavljaju varijable optimiranja. Pomicanjem kontrolnih točaka B krivulja ili ploha, mijenja se i oblik. U svakom koraku optimiranja CAD modela računa se polje brzina čvorova i osjetljivost metodama nelinearnog programiranja. Program je prikazan na primjeru naprezanja ploče u 2D i 3D.

Autori u radu [34] koriste B-krivulje i NURBS plohe iz 2D krivulja za opis geometrije, te su preko IGES standardnog CAD formata za razmjenu podataka razvili poveznicu sa CAD formatom i FEA analizom. Nakon kreiranja nove topologije i oblika, analiza konačnim elementima (FEA) primijenjena je kako bi se ocijenio kriterij izvrsnosti uz zadana ograničenja. Ovaj pristup primijenjen je na primjeru dizajna peraje daske za surfanje i jedrenje.

Autori u radu [35] primijenili su SIMP metodu pri topološkom optimiranju 2D nosača, sa naglaskom na izbacivanje sivih zona materijala koji se javljaju uslijed pretvorbe diskretnih varijabli optimiranja (gustoće elemenata) u kontinuirane vrijednosti. Nastao je pristup SIMP-SRV (Sum of the Reciprocal Variables). SIMP metoda generira prijelazno rješenje za inicijalne varijable optimiranja, dok SRV metoda daje konačni oblik konstrukcije.

Proces optimiranja topologije je složen, zbog spregnutog rješavanja problema optimiranja polja pomaka (rješenje mehanike čvrstog tijela minimiziranjem energije) i geometrije (minimiziranje utroška materijala). Jedan od elegantnih i učinkovitih postupaka rješavanja optimiranja dva polja problema je level set metoda koja se u zadnjih nekoliko godina pojavila kao vrlo primjenjiva metoda za opis i promjenu geometrije modela u procesu optimiranja. Brojni radovi koriste level set metodu za opis kontura pri obradi fotografija i skulptura [36], [37], [38].

Algebarsku metodu kreiranja implicitne funkcije linearnom kombinacijom RBF interpolacija kako bi se opisao složeni model oblaka točaka dali su autori u svom radu [38], čime su predstavili implicitnu interpolacijsku metodu pogodnu za sustave modelirane oblakom točaka.

Predstavljenom metodom značajno se smanjila kompleksnost proračuna, a time i vrijeme optimiranja velikih složenih modela.

Level set metodu u kombinaciji sa aproksimacijom RBF funkcijom predstavili su autori u svojim radovima [2], [39], [40], [41] i [42]. U spomenutim radovima RBF funkcija služi za opis implicitne level set funkcije. Nul točke parametrizirane level set funkcije opisuju konturu geometrije modela. Promjena level set funkcije vrši se gradijentnom metodom optimiranja, te je dana i analiza osjetljivosti. Kao testni primjer analiziran ovom metodom predstavljena je 2D ukliještena greda opterećena na vrhu, te greda na dva oslonca. Varijable optimiranja su RBF koeficijenti koji mijenjaju level set plohu. Osim što je moguće da otvori u domeni nestaju ili se spajaju, omogućeno je i stvaranje novih rupa u domeni koja se optimira. Optimiranje se izvodi na osnovi Hamilton-Jacobieve transportne jednadžbe.

U radu [43], predstavljena je Piecewise Constant Level Set (PCLS) metoda u kombinaciji sa Merriman-Bence-Osher (MBO) shemom za rješavanje oblika strukture i problema topološkog optimiranja.

U radu [44] autori su razvili topološko optimiranje granice strukture level set implicitnom funkcijom na primjeru 2D nosača ukliještenog na jednom kraju.

Implicitna level set funkcija opisana B-krivuljom i parametrizirana R-funkcijom opisana je u radu [45]. Ovakav pristup daje fleksibilnost, jer daje izravnu kontrolu nad parametrima geometrije i topologije unutar velikog prostora slobodnih oblika. Efikasnost pristupa dana je na primjerima naprezanja 2D nosača.

U radu [46] ubrzan je postupak topološkog optimiranja level set metodom evolucijskim metodama optimiranja kombinacijom level set metode sa ESO metodom optimiranja. Rad predstavlja novu metodu kao kombinaciju LS i ESO metode topološkog optimiranja, pri čemu optimalno rješenje više ne ovisi o početnom rješenju kao što je to slučaj kod topološkog

optimiranja tradicionalnom level set metodom. Novi pristup omogućuje i otvaranje novih rupa u procesu topološkog optimiranja LS metodom.

Autori u radu [47] predstavili su metodu topološkog optimiranja RBF - level set u kojoj su pretvorili Hamilton-Jacobievu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u sustav običnih diferencijalnih jednadžbi kolokacijskom formulacijom preko cijele domene optimiranja. Varijable optimiranja ovim postupkom postali su koeficijenti RBF aproksimacije. Jednadžbe vrijede samo za izo liniju level set funkcije te su autori metodom proširenog polja brzina izračunali vrijednosti proširenog polja brzina na cijeloj domeni. Funkcija cilja u radu bila je minimum podatljivosti. Autori su pokazali uspješnost RBF-level set metode topološkog optimiranja 2D modela.

U kontekstu topološkog optimiranja oblika autori u radu [48] predstavili su numeričku metodu temeljenu na kombinaciji klasične derivacije oblika i level set metode za 2D i 3D modele prikazane u Eulerovoj fiksnoj mreži. Autori su zaključili da optimalno rješenje uvelike ovisi o početnom rješenju.

Topološko optimiranje 3D konstrukcije genetskim algoritmom i metodom konačnih elemenata predstavljeno je u radu [49] sa dva načina parametrizacije. Parametrizirao se oblik i topologija, i materijal modela sa dvije različite interpolacijske funkcije.

Brojne su mogućnosti primjene level set metode obzirom na način parametriziranja, numeričke analize fizikalnih pojava, metode optimiranja itd. Mali broj radova koristi level set funkcije pri opisu geometrije u svrhu sinteze oblika modela u mehanici čvrstih tijela. Iz svega navedenog proizlazi da je level set metoda u kombinaciji sa parametrizacijom geometrije i numeričkim metodama određivanja fizikalnih pojava primjenjiva, ali i vrlo atraktivna za daljnja istraživanja, obzirom da se pojavila tek unazad nekoliko godina.

Naša grupa autora sa FESB-a u Splitu do sada je izdala sljedeće radove u okviru opisanog područja: U radu [52] razvili smo program koji parametrizira 2D i 3D geometrije na temelju adaptivnih ulančanih Bezierovih krivulja i površina niskog stupnja. Ovakvim pristupom parametarski se opisuje složena geometrija sa naglaskom na oštre bridove, na način da se kontrolne točke Bezierove krivulje (odnosno plohe za 3D model) raspodjeljuju po domeni modela tako da što bolje opisuju model i bridove modela. Kontinuitet Bezierovih krivulja (ploha) postignut je dodatnim kontrolnim točkama Beziera koji nisu utjecali na povećanje broja varijabli optimiranja. Optimiranje se izvodilo genetskim algoritmom, a geometrija 3D modela koji se parametrizira dobivena je uz pomoć 3D skenera kao oblak točaka.

Rad [53] prezentira algoritamski okvir koji obavlja kompleksne zahtjeve optimiranja oblika i geometrije uz pomoć računala i numeričkih metoda (FEA). Algoritamski okvir sastoji se od postojećih standardnih programa kao pojedinih neovisnih dijelova. U radu je sinkronizirana

razmjena podataka („Data mining“) između komponenti koje su neujednačene u smislu vremena izračuna. Simulacija analizom konačnih elemenata je najzahtjevniji proces pri optimiranju, te kao takav zahtjeva i najviše vremena za izračun. U ovom radu izrađen je workflow sustav (tok podataka) u programskom jeziku C#, sa klijent i servis (WCF) aplikacijama, kao izvršnim datotekama čime su povezane. Ovakav način komunikacije između aplikacija ima prednost pred ostalim metodama paralelizacije jer se mogu izvoditi različiti procesi na paralelnim računalima, što kod klasičnih clustera nije slučaj. Za parametarski opis geometrije pri optimiranju modela koristile su se ulančane Bezierove krivulje i plohe.

U radu [54] predstavljena je automatska procedura za reverznu sintezu 3D geometrije dobivenu 3D skenerom kao oblak točaka. Predstavljen je primjer reverznog inženjerstva kućišta hidraulične pumpe odnosno njenog dijela (spirale) obzirom na teoriju toka fluida.

1.3 Hipoteza

Ako implicitnu level set funkciju opišemo parametarskom B-plohom s manjim brojem varijabli od broja konačnih elemenata koji predstavljaju domenu promatranog modela, topološko optimiranje konstrukcije genetskim algoritmom dati će dobra početna rješenja za primjenu gradijentnih metoda traženja minimuma funkcije.

Istovremeno redukcija broja parametara level set plohe smanjuje dimenzionalnost prostora pretraživanja te omogućuje korištenje genetskih i evolucijskih algoritama. Numerička učinkovitost povećat će se primjenom formulacije zamjenskog materijala (bez premrežavanja) i paralelizacijom.

1.4 Opis i metodologija istraživanja – sadržaj rada

1.4.1 Teorijska razrada

Iz literature su proučene dosadašnje primijenjene metode optimiranja i parametrizacije pri topološkom optimiranju (poglavljje 1.2). Istraživanje započinje s teorijskom razradom elemenata područja topološkog optimiranja konstrukcija i primjene level set funkcije pri topološkom optimiranju (poglavljja 2,3 i 4). Istražile su se potencijalne metode primjenjive za optimiranje topologije i oblika.

1.4.2 Modeliranje problema

Pri klasičnom rješavanju problema mehanike čvrstih tijela oblik je zadan, te se određuju naprezanja. Međutim uvođenjem topološkog optimiranja u mehanici čvrstih tijela pojavljuje se problem istovremenog određivanja dva nepoznata polja: polje pomaka i oblik, odnosno raspodjela materijala. Oblik se uzima kao varijablu pri optimiranju. Topološkim optimiranjem mijenja se struktura domene (raspodjela materijala odnosno geometrija modela), obzirom na različite moguće kriterije (minimum mase ili minimum podatljivosti). Postupak optimiranja postaje znatno složeniji jer se pri promjeni topologije mijenja domena koja se optimira, te se klasičnim metodama rješavanja problema mehanike čvrstih tijela za novi, topološki promijenjen oblik, mora uraditi niz numerički zahtjevnih postupaka koji značajno usporavaju i kompliciraju proces optimiranja. Level set metoda temelji se na implicitnoj funkciji čije nul točke definiraju rubove promatrane domene. Level set funkciju može se opisati parametarski, a promjena ove funkcije ima za posljedicu promjenu oblika i topologije zajedno. Parametrizacija level set funkcije može se izvesti nekim od aproksimacijskih jednadžbi (polinomi, B-plohe, Bezier-plohe, NURBS plohe, RBF funkcije, itd.) (poglavljje 2.3).

Na osnovu teorijskih postavki razvijen je dijagram toka procedure i metoda za topološku optimizaciju level set metodom (poglavljje 4). Odabire se adekvatan primjer konstrukcije sa poznatim rješenjem koji će poslužiti kao orijentacija kod evaluacije rješenja dobivenih topološkim optimiranjem (poglavljje 5.1). Iz literature su se implementirale i neke poznate metode topološkog optimiranja, radi usporedbe rezultata (poglavljje 5.7). Model koji se podvrgava topološkoj optimizaciji je 2D konzolni nosač uklješten na jednom kraju i opterećen silom na drugom kraju. Cilj je topološki optimirati model tako da se dobije minimalna masa konstrukcije uz zadanu nosivost. Fizikalna svojstva modela dobivaju se metodom konačnih elemenata u gotovom programskom paketu, a numerička učinkovitost povećava se primjenom formulacije zamjenskog

materijala (bez premrežavanja konačnih elemenata). Očekivano je da ovakav problem topološkog optimiranja ima puno lokalnih ekstrema zbog velikog broja varijabli optimiranja.

1.4.3 Odabir metoda i parametara

U radu je predstavljena metoda topološkog optimiranja konstrukcije level set parametriziranom plohom, te utjecaj smanjenja broja parametara potrebnih za opis modela na točnost reprezentacije modela (poglavlje 6). Parametri koji opisuju level set plohu su ujedno i varijable optimiranja. Predloženim načinom optimiranja može se značajno smanjiti broj varijabli optimiranja, što otvara prostor primjeni genetskih algoritama. U početnoj fazi istraživanja odabiru se globalne metode traženja minimuma funkcije cilja (genetski algoritam). Broj parametara level set funkcije koja opisuje model povećava se te se razmatra utjecaj na točnost reprezentacije modela. Očekivano je da ovakav problem topološkog optimiranja ima puno lokalnih ekstrema zbog velikog broja varijabli optimiranja. U tijeku izvođenja topološkog optimiranja genetskim algoritmom uočena je lošija konvergencija procesa. Razlog tome leži u načinu opisa funkcije cilja (minimum volumena) level set funkcijom, kada dolazi do pojave da različite jedinke (level set funkcije) u populaciji daju istu ili sličnu domenu (izo liniju level set funkcije). Ova pojava smanjuje raznolikost populacije te utječe na ranu konvergenciju pri optimiranju. U radu je predložen i ispitan operator genetskog algoritma koji kažnjava ekvivalentne jedinke, u svrhu povećanja raznolikosti populacije. Na osnovu rješenja iz genetskog algoritma sprovodi se gradijentni postupak optimiranja, koji je brži od genetskog algoritma, ali uvelike ovisi o zadanom početnom rješenju, te je sklon zaustavljanju u lokalnom ekstremu.

Topološko optimiranje level set parametrizirane funkcije gradijentnim postupcima predstavljeno je također u poglavlju 6. Uočen je problem zaustavljanja algoritma optimiranja u lokalnom ekstremu. Razlog tome je formulacija funkcije cilja, odnosno volumena koji je predstavljen kao diskretna funkcija (broj konačnih elemenata nosivog dijela konstrukcije). Predložen je algoritam kao dodatak na funkciju cilja koji će imati karakteristike da diskretnu funkciju pretvori u kontinuiranu, te da ima svojstvo smanjenja funkcije cilja kada se volumen (nastao izo linijom level set funkcije) smanjuje, bez nužnosti numeričke integracije za trenutnu domenu.

Radnja pokazuje da topološko optimiranje konstrukcije level set funkcijom, parametriziranom sa B-plohom, te primjenom genetskog algoritma za traženje optimuma funkcije cilja može dati dobra početna rješenja za primjenu gradijentnih metoda traženja minimuma funkcije.

1.5 Znanstveni doprinos rada

Rezultati istraživanja obuhvaćeni ovom disertacijom doprinijet će u sljedećim područjima:

- određivanje minimalnog broja varijabli optimiranja koji daje optimalan kompromis između sposobnosti reprezentacije geometrije i numeričke efikasnosti pri topološkom optimiranju level set metodom.
- razvoj vlastitog genetskog algoritma koji kodira level set plohu, parametriziranu RBF interpolacijskim funkcijama i B-plohom, u procesu optimiranja topologije i oblika uz primjenu metode zamjenskog materijala.
- Razvoj operatora genetskog algoritma koji kažnjava ekvivalentne jedinice u populaciji dajući pri tom veću raznolikost populacije
- Rasprava o utjecajnim faktorima u procesu optimiranja topologije i oblika level set metodom:
 - usporedba primjenjivosti formulacija kod ne-gradijentnih postupaka (minimum podatljivosti uz zadanu redukciju volumena ili minimum volumena uz dopustivo polje naprezanja)
 - usporedba načina uvođenja ograničenja (Lagrangeova formulacija, kaznena formulacija)
 - usporedba metoda rješavanja (gradijentne - analitičko i numeričko određivanje osjetljivosti, ne-gradijentne, hibridne-memetičke metode)
 - usporedba algoritama optimiranja (Genetski algoritmi, Nelder-Mead, BFGS, itd.)
 - utjecaj parametrizacijskih modela (RBF aproksimacija, aproksimacija B-krivuljama i ploham, itd.)
 - utjecaj parametara parametrizacije (gustoća mreže kontrolnih točaka, distribucija kontrolnih točaka, stupanj i parametri plohe, varijanta plohe, granice varijabli, itd.)
 - utjecaj početnog rješenja (puna domena, slučajno početno rješenje, parametrizirano diskretno rješenje, itd.
 - utjecaj operatora genetskog algoritma na brzinu konvergencije i rezultat optimiranja,
- razvoj specijaliziranog numeričkog heterogenog ad-hoc clustera za distribuiranu (serijsko - paralelnu) analizu povezivanjem aplikacija u pred-definirane tokove procesa i podataka (jedan klijent – puno servisa) u svrhu izvođenja različitih procesa (workflow) na paralelnim računalima istovremeno, koji omogućuje uključivanje proizvoljnih vanjskih aplikacija (npr. MKE) u procesu optimiranja.

2. Osnovni postupci pri topološkom optimiranju

2.1 Optimiranje

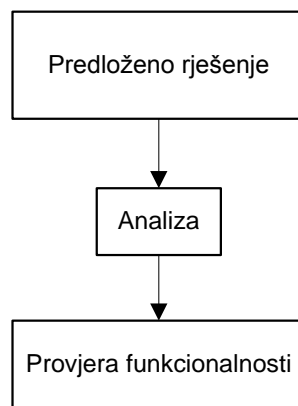
Optimiranje je postupak kojim se pri projektiranju ili planiranju određuje najbolji mogući izbor slobodnih veličina na temelju prethodno određenih kriterija.

U suvremenoj proizvodnji velika pažnja se posvećuje optimiranju zbog uštede resursa i vremena.

U inženjerskom smislu optimiranje je traženje ekstrema funkcije uz zadovoljavanje ograničenja.

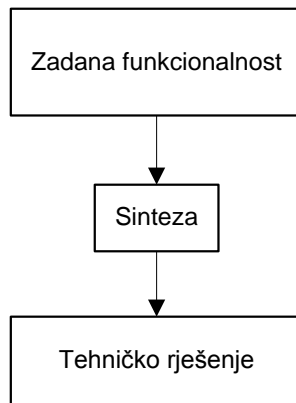
Osnovni cilj optimiranja je minimiziranje troškova odnosno traženje maksimalne dobiti, što se u tehničkom modelu svodi na minimum mase, minimum energije.

Standardni inženjerski pristup razvijanja nekog proizvoda izgledao je (Slika 1):



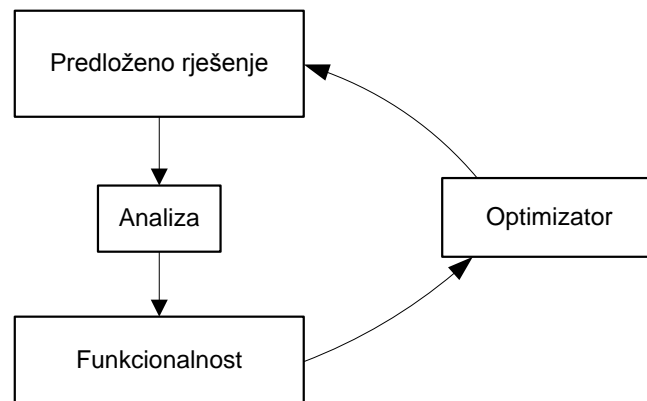
Slika 1 Tradicionalni inženjerski pristup.

Ovakav pristup vršio je analizu predloženog rješenja i na osnovu te analize provjeravala se funkcionalnost proizvoda. Međutim, težnja inženjera je povezati funkcionalnost i tehničko rješenje, što je shematski prikazano (Slika 2).



Slika 2 Željeni inženjerski pristup.

U procesu sinteze dozvoljeno je sve što nije zabranjeno. Željeni inženjerski pristup odnosno sinteza je neizvediva, ali pojavom jakih računala omogućena je simulacija sinteze (kvazisinteza) pomoću optimizatora (Slika 3).



Slika 3 Simulacija ciljanog inženjerskog pristupa.

Sada optimizator na osnovu zadanih parametara sam traži rješenje, odnosno donosi odluke u danim uvjetima na bazi zadanih kriterija izvrsnosti i ograničenja.

Postupak optimiranja obuhvaća [55]:

- fizikalni model problema,
- modeliranje za optimiranje,
 - o varijable optimiranja,
 - o kriterij izvrsnosti,
 - o definiranje ograničenja
- matematičke izraze i ovisnost varijabli
- postavljanje algoritma za rješavanje problema,
- izradu programa,
- testiranje programa.

Postoje tri razine optimiranja:

- Optimiranje dimenzija
- Optimiranje oblika
- Topološko optimiranje.

Optimiranje dimenzija i oblika rješava se klasično parametrizacijom geometrije koja se optimira, te mijenjanjem parametara kako bi se dobio optimalan oblik.

2.1.1 Definiranje fizikalnog modela

Svaki fizikalni model objekta može se predstaviti parametrima i funkcijskim ovisnostima parametara. Dva su fizikalna modela problema pri optimiranju:

- Ako se promatra model kao geometrijsko tijelo, za definiranje geometrije tijela potrebne su kontrolne točke odnosno značajke geometrijskog modela potrebnih za njegov opis. Kontrolne točke su u procesu optimiranja varijable optimiranja.
- Za danu geometriju – oblik, fizikalni model daje veze između fizikalnih veličina problema, npr. uvjete ravnoteže, minimum energije, odnosno minimum troškova, bilo da je riječ o mehanici čvrstih tijela, mehanici fluida, termodinamici, itd.

Varijable optimiranja x predstavljaju višak internih stupnjeva slobode fizikalnog modela, čime se osigurava postojanje beskonačnog skupa rješenja promatranog problema. Na taj način ispunjena je osnovna pretpostavka za određivanje optimalnog rješenja.

2.1.2 Modeliranje

Modeliranjem se u procesu optimiranja opisuju fizikalne pojave ili geometrija pomoću matematičkih funkcija uz odabir prikladnih varijabli. Modeliranjem se određuju ograničenja odnosno uvjeti koje rješenja moraju zadovoljavati i parametri modela.

2.1.3 Kriterij izvrsnosti

Predstavlja osnovu za matematičku izgradnju funkcije cilja. On prosuđuje koja su moguća rješenja promatranog problema najbolja - $\min f(x)$.

Funkcija cilja opisuje se pomoću varijabli optimiranja, na taj se način promjenom varijabli mijenja funkcija cilja prema optimalnom rješenju.

2.1.4 Algoritam za rješavanje problema

Algoritam sadrži popis niza postupaka koje treba izvršavati zadanim redoslijedom da bi se dobilo rješenje određenog problema. Algoritam se implementira u program računala, gdje se problem numerički rješava.

2.2 Optimiranje sa ograničenjima

U velikoj većini slučajeva, optimalno rješenje je definirano kriterijima izvrsnosti ali uz poštivanje danih ograničenja, npr. dopustivih naprezanja. Lagrangeova formulacija i model sa kaznenim funkcijama daje osnovu za određivanje dopustivog optimuma.

2.2.1 Lagrangeova formulacija

Ukoliko je potrebno pronaći minimum funkcije (2.1) sa jednakosnim ograničenjima (2.2):

$$\min f(x) \quad x \in R^n, \text{ uz} \quad (2.1)$$

$$h_j(x) = 0 \quad j = 0, r \quad (2.2)$$

Uvjet postojanja ekstrema funkcije $f(x)$ je:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0, \quad (2.3)$$

dok je uvjet zadovoljavanja ekstrema i u sljedećem koraku diferencijal funkcija ograničenja $h_j(x)$, koji za jedno ograničenje glasi:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (2.4)$$

Ako je pronađen ekstrem, iz prethodnih jednažbi (2.3) i (2.4), može se zaključiti da promjena funkcije cilja zbrojena sa promjenom funkcije ograničenja daje nulu.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, n \quad (2.5)$$

Jednažbe (2.2) i (2.5) daju $n+r$ jednažbi za određivanje varijabli (\mathbf{x}) i Lagrangeovog množitelja (μ) (u izrazu (2.5) postoji samo jedno ograničenje te je $r = 1$).

Lagrangeov pristup kaže da se funkcija, dobivena kombinacijom funkcije cilja $f(x)$ i ograničenja $h_j(x)$ (kojih ima r) pomnoženih sa Lagrangeovim množiteljem μ_j , može minimizirati. Takva složena funkcija daje minimum funkcije cilja, a poštujući ograničenja [55]:

$$L(x, \mu) = f(x) + \mu^T \cdot h(x) = f(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j \cdot h_j(x) \quad (2.6)$$

μ_j - konstanta kojom se množi j -to ograničenje jednakosti.

Broj varijabli je proširen za r Lagrangeovih množitelja μ , ali nužni uvjet za ekstrem Lagrangeove funkcije istovremeno osigurava i zadovoljavanje ograničenja. Nužni uvjet za ekstrem Lagrangeove funkcije:

$$\nabla L(x, \mu) = 0 \rightarrow \frac{\partial L(x, \mu)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^r \mu_j \cdot \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, n$$

$$\frac{\partial L(x, \mu)}{\partial \mu_i} = h_j(x) = 0, \quad j = 1, r$$

Iz ovih jednadžbi slijedi da je u točki minimuma gradijent funkcije cilja linearna kombinacija gradijenata ograničenja pomnožena sa Lagrangeovim množiteljima:

$$\nabla f = - \sum_{j=1}^r \mu_j \cdot \nabla h_j$$

Dakle traženje minimuma funkcije uz jednakosno ograničenje svodi se na određivanje minimuma Lagrangeove funkcije bez ograničenja, ali sa povećanim brojem varijabli ($r+n$).

Lagrangeovi množitelji fizikalno se mogu interpretirati kao 'sila' potrebna za nametanje ograničenja. Lagrangeovi uvjeti mogu se numerički rješavati kao sustav nelinearnih jednadžbi (Newton-Rapson iterativni postupak), ali to nije općenito najučinkovitiji postupak, te ovi izrazi predstavljaju podlogu za druge numeričke postupke.

Ograničenja nejednakosti:

$$g_i(x) \leq 0, \quad (2.7)$$

transformiraju se u ograničenja jednakosti uvođenjem p dodatnih varijabli ('slack variables') s :

$$g_i(x) + s_i^2 = 0 \quad i = 1, p \quad (2.8)$$

Ova transformacija vrijedi jer za proizvoljnu vrijednost s_i , vrijedi $s_i^2 \geq 0$ pa iz $g_i(x) = -s_i^2$, slijedi da je $g_i(x) \leq 0$.

Dodatni uvjet kod ograničenja nejednakosti je da odgovarajući Lagrangeovi množitelji moraju biti ne-negativni ($\lambda \geq 0$), čime je osigurano da su gradijenti funkcije i ograničenja suprotno usmjereni. Kod ograničenja koje je neaktivno (odnosno čije su ne-jednadžbe zadovoljene - istinite) u trenutnoj točki multiplikatori su jednaki nuli ($\lambda = 0$).

Promotrit će se opći problem sa ograničenjima:

$$\min f(x) \quad x \in R^n, \quad \text{uz } h_j(x) = 0 \quad j = 0, r \quad \text{i } g_j(x) \leq 0, \quad j = 0, p$$

Ukupna Lagrangeova funkcija je:

$$L(x, \mu, \lambda, s) = f(x) + \mu^T \cdot h(x) + \lambda^T \cdot (g(x) + s^2) \quad (2.9)$$

μ - Lagrangeovi množitelji uz zadana jednakosna ograničenja,

λ - Lagrangeovi množitelji uz zadana ne-jednakosna ograničenja,

s – dodane varijable koje ograničenja nejednakosti svode na jednakosna ograničenja

Nužni uvjeti za ekstrem Lagrangeove funkcije nazivaju se Kuhn-Tucker (KT) nužni uvjeti:

$$\frac{\partial L(x, \mu, \lambda, s)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^r \mu_j \cdot \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, n \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial L(x, \mu, \lambda, s)}{\partial \mu_j} = h_j(x) = 0 \quad j = 1, r$$

$$\frac{\partial L(x, \mu, \lambda, s)}{\partial \lambda} = g_j(x) + s_j^2 = 0 \quad j = 1, p \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial L(x, \mu, \lambda, s)}{\partial s_j} = \lambda \cdot s_j = 0 \quad j = 1, p$$

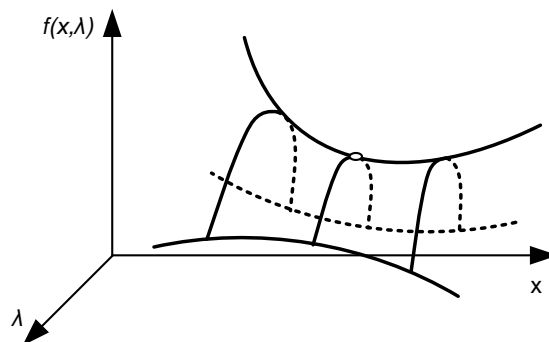
$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, p \quad - \text{osigurava ograničenje jednakosti}$$

Za aktivna ograničenja j koja su u optimumu zadovoljena sa $g_j(x) = 0$ vrijedi: $s_j = 0$ i $\lambda_j \geq 0$. Za neaktivna ograničenja koja su zadovoljena sa $g_j(x) < 0$, tj. $s_j^2 > 0$ vrijedi $\lambda = 0$. U optimumu za trenutno aktivna ograničenja multiplikator λ_j je ne-negativan, a za neaktivna $\lambda = 0$.

U točki optimuma s ograničenjima negativni gradijent funkcije cilja jednak je linearnoj kombinaciji gradijenta aktivnih ograničenja pomnožen sa pripadajućim Lagrangeovim multiplikatorima.

KT daju $(n+r+2p)$ jednadžbi za isto toliko nepoznanica (x, μ, λ, s) . KT uvjeti nisu praktični za rješavanje nelinearnih jednadžbi.

Postoji komplementarnost u matematičkoj prirodi optimiranja. Ako se napiše Lagrangeova formulacija za neki problem - jednadžba (2.6), postoji mogućnost da se perturbira problem pa Lagrangeovi multiplikatori postaju dualne varijable, a ne više varijable optimiranja (geometrijski parametri). Takva formulacija se zove dualna formulacija i može se uvesti u optimiranje zamjenom varijabli. U nekim situacijama ona je jednostavnija za rješavanje od izvorne formulacije (tipično kada ima puno ograničenja, a malo aktivnih). Dualna formulacija objašnjava se kao sedlasta funkcija gdje su u jednoj strani varijable optimiranja, a u drugoj Lagrangeov multiplikator (Slika 4). Optimum je min max problem, odnosno optimum je u minimumu funkcije po varijabli i maksimumu funkcije po Lagrangeovom multiplikatoru [55].



Slika 4 Sedlasta funkcija sa optimumom u minimumu funkcije cilja, odnosno maksimumu Lagrangeovog množitelja

2.2.2 Kaznena formulacija

Lagrangeova metoda nije jedina za uvođenje ograničenja. Naime kaznenom formulacijom također se može rješavati problem optimiranja sa ograničenjima.

Ideja vodilja postupka kaznenih funkcija je pretvorba zadatka određivanja minimuma funkcije $f(x)$ uz ograničenja $g_i(x) \leq 0$ i $h_j(x) = 0$ u zadatak određivanja minimuma funkcije bez ograničenja $F(x)$, pri čemu je:

$$F(x) = f(x) + P(x) \quad (2.12)$$

gdje je $P(x)$ kaznena funkcija. Ne postoji jedinstvena kaznena funkcija, već je to svaka funkcija koja ima svojstvo da u slučaju prekoračenja ograničenja dodaje veliki iznos funkciji $F(x)$ kako ona ne bi imala minimum izvan izvedivog područja.

Jedan od korisnih oblika kaznene funkcije $P(x)$ je

$$P(x) = -r \cdot \sum_{i=0}^m \frac{1}{g_i(x)} \quad - \quad (\text{'unutarnja kaznena funkcija'})$$

gdje je 'r' pozitivna konstanta. Tada složena funkcija $F(x)$ poprima oblik:

$$F(x, r) = f(x) - r \cdot \sum_{i=0}^m \frac{1}{g_i(x)} \quad (2.13)$$

U izvedivom području ($g_i(x) \leq 0$) F poprima vrijednosti koje su veće od $f(x)$ – stvarne funkcije cilja, iako se razlika može smanjiti dopuštajući 'r' da poprimi vrlo male vrijednosti. Međutim, ako se x približi granici izvedivog područja, tako da je barem jedno $g_i(x)$ blisko nuli, $P(x)$, a tada i $F(x)$, postaje vrlo veliko.

Ako se traženje započne unutar izvedivog područja, minimum funkcije bez ograničenja $F(x, r)$ će sigurno biti unutar izvedivog područja. Dodjeljujući r-u prikladno malu vrijednost (tako da je utjecaj $P(x)$ na minimumu malen), minimum zadatka bez ograničenja $F(x)$ odgovara minimumu funkcije $f(x)$ s ograničenjima. Često se koristi i kaznena funkcija $P(x)$ oblika:

$$P(x) = R \cdot \sum_{i=0}^m [\max(0, g_i(x))]^2 \quad - \quad (\text{'vanjska kaznena funkcija'}) \quad (2.14)$$

gdje je R pozitivna konstanta prikladno velikog iznosa. Vanjska kaznena funkcija se češće koristi, zbog neosjetljivosti na odabir početne točke, dok kod unutarnje kaznene funkcije početna točka mora biti unutar izvedivog područja. Za jednakosna ograničenja koristi se parabolična kaznena funkcija.

$$P(x) = R \cdot \sum_{i=0}^p [h_j(x)]^2 \quad (2.15)$$

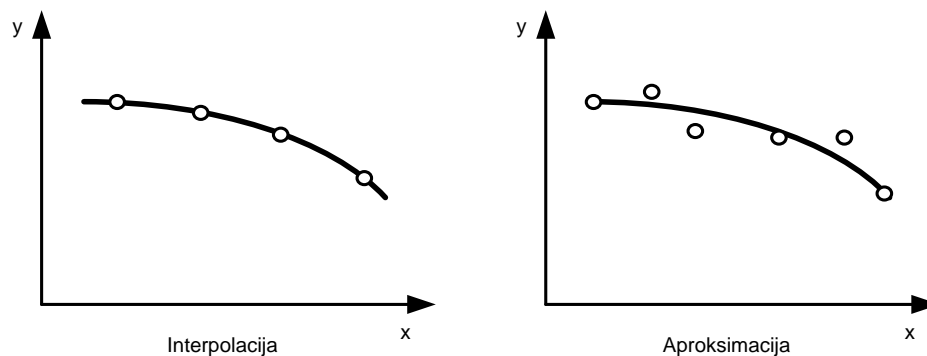
2.3 Parametrizacija geometrije

U inženjerskoj analizi često je potrebno neki fizički oblik predstaviti pomoću jednoznačnih izraza. Ova formula treba uz pomoć skalarnih parametara matematički opisati geometrijski oblik pripadnog kontinuiranog fizičkog oblika u 2D ili 3D. Skupom skalarnih parametara se poopćuje i jednostavnije pohranjuje geometrijski oblik, što omogućuje njegovu vizualizaciju, zatim simulaciju interakcije oblika sa okolinom te geometrijsku transformaciju [56].

Parametrizacija pohranjuje niz parametara (kontrolnih točaka, nagiba, itd.) koji definiraju geometrijski oblik.

Geometrijski model može se definirati pomoću parametarskih jednadžbi. Za opis geometrije može se koristiti bilo koja parametarska jednadžba, kao na primjer jednadžbe elipse, kruga, valjka, kugle u slučaju da geometrija modela ima sličnost sa navedenim primitivima. Složeniji oblici ne mogu se precizno opisati primitivima, pa se za opis složene geometrije koriste polinomne jednadžbe kao što su B-krivulje, NURBS krivulje, Bezierove krivulje [1], [56], [57], [58]. Za opis geometrije također se koriste i Radial Basis Funkcije (RBF), a u kasnijim poglavljima detaljnije će se izložiti opis geometrije Bezierovim krivuljama te Radial Point Interpolation Method (RPIM) RBF metodom.

Općenito, geometrijski model nekog objekta može se opisati pomoću niza parametara interpolacijskom ili aproksimacijskom jednadžbom. Interpolacijska jednadžba zadane uvjete mora egzaktno zadovoljiti, dok aproksimacijska jednadžba predstavlja jednadžbu koja prolazi približno pokraj zadanih uvjeta (zadanih točaka), sa što manjim ukupnim odstupanjem svake zadane točke od aproksimacijske funkcije (Slika 5).



Slika 5 Prikaz interpolacije i aproksimacije pomoću niza parametara

2.3.1 Opis geometrije Bezierovom krivuljom

Za opis geometrijskog oblika mogu se koristiti Bezierove krivulje. Ove krivulje imaju sljedeća svojstva:

- krivulja počinje od P_0 odnosno početne točke interpolacije i završava na P_n , koja se zove krajnja točka interpolacije,
- Bezierova krivulja je pravac, ako i samo ako su zadane točke kolinearne,
- početak (kraj) krivulje je tangenta na prvi (posljednji) dio Bezierovog poligona,
- krivulja može biti podijeljena u bilo kojoj točki na dvije pod krivulje ili u proizvoljno mnogo pod krivulja tako da je svaka od njih Bezierova krivulja,
- neke jednostavne krivulje ne mogu se opisati točno sa jednom Bezierovom krivuljom.

Bezierova krivulja u formi polinoma (Bernsteinov polinom) glasi :

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot P_i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \cdot P_i \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \cdot P_i
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

gdje je :

P_i – zadane točke

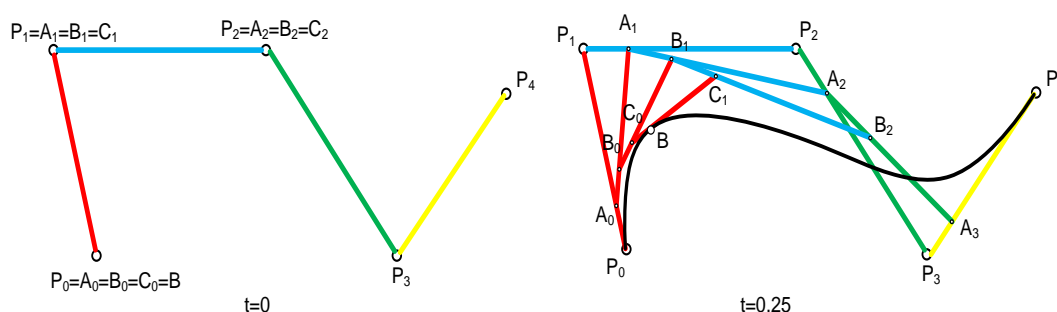
n – stupanj Bezierove krivulje,

i – se kreće od 0 do n ,

$P(t)$ – točke aproksimacije idu od P_1 do P_4 sa proizvoljnom zadanom podjelom (Slika 6).

t – trenutni položaj aproksimacijske točke na Bezierovoj krivulji. $0 \leq t \leq 1$

Slika 6 prikazuje jednu Bezierovu krivulju četvrtog reda ($n=4$).



Slika 6 Konstrukcija kvartne Bezierove krivulje ($n=4$) za trenutak $t=0$, i $t=0.25$.

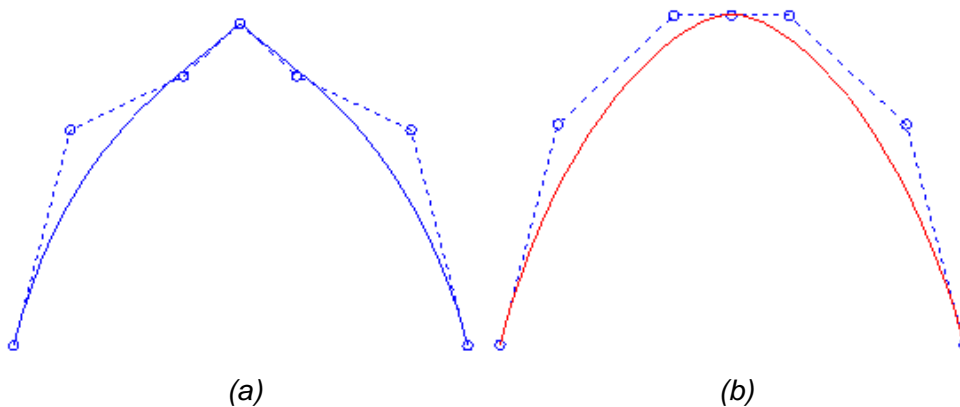
Kretanjem među-točke A_0, A_1, A_2 i A_3 po pravcima između zadanih točaka P opisuje se linearna Bezierova krivulja, među-točke B_0, B_1 i B_2 kretanjem po pravcima između točaka A_0, A_1, A_2 i A_3

opisuju kvadratnu Bezierovu krivulju, a točke C_0 i C_1 kretanje po pravcima između točaka B_0, B_1 i B_2 opisuju kubičnu Bezierovu krivulju. Kvartna Bezierova krivulja nastaje kretanjem točke B po pravcu $C_0 - C_1$.

U slučaju velikog broja kontrolnih točaka između koje se povlači jedna Bezierova krivulja visokog stupnja, mogu se javiti oscilacije krivulje.

Ova pojava izbjegava se uvođenjem više Bezierovih krivulja nižeg stupnja u nizu, uz nametanje odgovarajućeg stupnja kontinuiteta između njih putem kontrolnih točaka. Bezierovim krivuljama u nizu mogu se opisati i najsloženiji geometrijski oblici kao i fizikalne pojave, a stupanj kontinuiteta između njih omogućuje kontinuitet nagiba (prva derivacija), kontinuitet inercijskih sila (druga derivacija), kontinuitet impulsa (treća derivacija).

Kontinuitet se osigurava tako što iznos derivacije u točki na kraju prve krivulje treba biti jednaka iznosu derivacije u točki na početku druge krivulje. Ovakav kontinuitet postiže se dodavanjem po dvije zadane točke Beziera, između kojih se nalazi točka spoja dvaju krivulja Beziera. Dodane zadane točke i spojna točka Beziera trebaju biti kolinearne. Slika 7 prikazuje dvije Bezierove krivulje sa različitim kontinuitetima nagiba.



Slika 7 Prikaz dvije Bezierove krivulje između kojih nema kontinuiteta nagiba (a) i između kojih postoji kontinuitet nagiba (b).

Umnoškom Bezierovih krivulja u dva smjera dobiva se 3D ploha:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) \cdot B_j^m(v) \cdot p_{ij} \quad (2.17)$$

gdje su u i v parametarske koordinate, a kontrolnih točaka p_{ij} ima set od $(n+1)(m+1)$.

Bernsteinovi polinom $B_i^n(u)$ i $B_j^m(v)$ opisani su ranije, kao i binomni koeficijent:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

2.3.2 Opis geometrije B-krivuljama

B-krivulje (bazne krivulje) također mogu poslužiti pri parametrizaciji modela. B-krivulja ima lokalni utjecaj, poštujući zadani stupanj krivulje, glatkoću i točke koje opisuje (P_i). Temeljni teorem kaže da se svaka funkcija određenog stupnja i glatkoće koja prolazi kroz zadane točke, može jedinstveno prikazati kao linearna kombinacija B-krivulja istog stupnja i glatkoće, preko istih točaka. B-krivulja je generalizacija Bezierove krivulje. B-krivulja definirana je jednadžbom:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,n}(t) \cdot P_i, \quad (2.18)$$

gdje je bazna funkcija B-krivulje nultog stupnja:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

a za ostale stupnjeve B-krivulje ($0 \leq i \leq n + d$):

$$N_{i,j}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j} - t_i} N_{i,j-1}(t) + \frac{t_{i+j+1} - t}{t_{i+j+1} - t_{i+1}} N_{i+1,j-1}(t)$$

Stupanj krivulje je $1 \leq d \leq n$, a svaki pojedini čvor uniformno je predstavljen kao:

$$t_i = \begin{cases} 0, & 0 \leq i \leq d \\ \frac{i - d}{n + 1 - d}, & d + 1 \leq i \leq n \\ 1, & n + 1 \leq i \leq n + d + 1 \end{cases}$$

Umnoškom dvije B-krivulje u x i y smjeru dobiva se 3D ploha:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{j,d_n}(u) \cdot N_{j,d_m}(v) \cdot p_{ij} \quad (2.19)$$

Može se spomenuti još i opis geometrije kubičnim krivuljama u nizu, koji je interpolacijska metoda pomoću kubičnog polinoma u jednom segmentu između dvije točke. Kubični polinom ima četiri slobodna koeficijenta (prolaz kroz dvije točke i dva dodatna uvjeta: uvjet kontinuiteta za nagib tangente i radijus zakrivljenosti u jednoj od krajnjih točaka segmenta). Kubičnim krivuljama lakše se zadaju rubni uvjeti, jer se radi o interpolaciji. Pomakom točaka kubične krivulje dobivaju se vrlo glatke krivulje. Interpolacija kubičnim krivuljama ne može se riješiti lokalno, već je potrebno riješiti sustav jednadžbi. Promjena u lokalnom području zahtjeva proračun cijelog sustava, što može biti mana ovakvog načina parametriziranja.

2.4 Problem mehanike čvrstih tijela i princip virtualnih radova

U ovom radu promatrat će se mehanika čvrstog tijela kao statički problem. Teorija elastičnosti bavi se razmatranjem pomaka (u), naprezanja (σ) i deformacija (ε) tijela, koje nastaju uslijed djelovanja opterećenja (sila) na elastična tijela [59], [60], [61]. Pomak je vektor koji spaja početni položaj čestice sa položajem čestice nakon djelovanja sile. Deformacija tijela može se definirati kao relativno produljenje. Za male deformacije, veza pomaka i deformacije u x smjeru (2.20) može se zapisati kao:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.20)$$

Teorija elastičnosti uvodi uvjete kompatibilnosti deformacije (2.21), čime se uvode parcijalne diferencijalne jednačbe drugog reda, koji za x-y ravninu glasi:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (2.21)$$

Ako se promatra statički problem, polazi se od Newtonovog zakona za ravnotežno stanje tijela, odnosno ako je sustav čestica u ravnoteži, tada vrijedi jednačba (2.22) da je ukupna sila sustava jednaka nuli:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad (2.22)$$

Vanjske sile koje djeluju na neko tijelo izazivaju pojavu unutarnjih sila između čestica tijela, koje se svode na jedinicu površine A te daju naprezanja:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Jednačbu ravnoteže za x os razmatrajući diferencijalni volumen tijela (Slika 9), sada je moguće zapisati kao 2D problem (2.23):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (2.23)$$

Jednačbe koje povezuju naprezanja i deformacije prema Hookeovom zakonu za x smjer (2D model) su:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \text{ odnosno} \\ \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) & \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

gdje su:

τ_{ij} – smično naprezanje,

γ_{ij} - smična deformacija,

a karakteristike materijala:

E – Youngov modul elastičnosti,

ν - Poissonov omjer,

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – modul smicanja.

U svakoj točki površine mogu biti zadani rubni uvjeti.

Ako su u svakoj točki površine tijela Γ_s zadana opterećenja f_s^* tada je statički rubni uvjet:

$$\sigma_{ij}n_j = f_s^*, \quad (2.25)$$

n_j - normala u točki

Ako su na površini tijela Γ_u zadane komponente pomaka u_i^* radi se o geometrijskim rubnim uvjetima:

$$u_i = u_i^* \quad (2.26)$$

Za rješavanje problema statike čvrstih tijela na raspolaganju su:

- uvjeti ravnoteže,
- konstitutivni model materijala (veze naprezanja - deformacije),
- veze pomaci i deformacije,
- rubni uvjeti koji daju rješenje problema npr. polje pomaka.

Pomoću ova četiri sustava uz rubne uvjete može se dobiti kompletno rješenje modela (klasična mehanika).

Općenito, mnogi inženjerski problemi se umjesto rješavanja izvornog problema jednadžbi uvjeta mogu rješavati minimiziranjem odgovarajuće formulacije greške, npr.:

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \min_x [A(x)]^2$$

Često se u postupku rješavanja predlaže neko opće parametarsko rješenje, čijim uvrštenjem u funkciju greške i minimiziranjem slijede vrijednosti parametara.

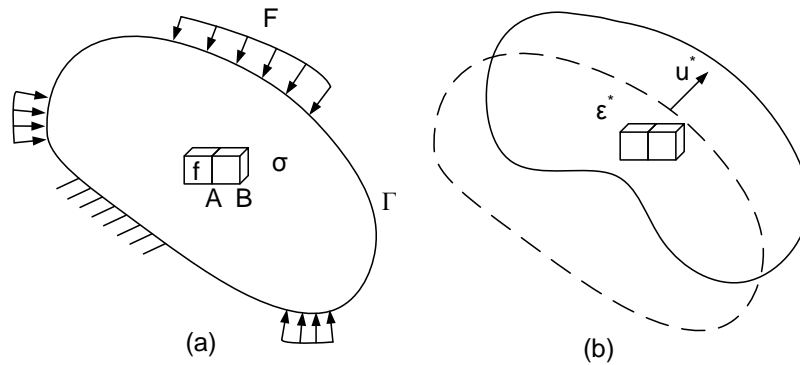
Alternativno, problem se može formirati preko radova odnosno energije (analitička mehanika – energetske metode).

Virtualni rad δW sile koja djeluje na česticu je rad koji sila izvrši na kinematički dopustivom virtualnom pomaku δu_i . Ako je suma svih sila u ravnotežnom sustavu jednaka nuli (2.22), tada je i virtualni rad jednak nuli:

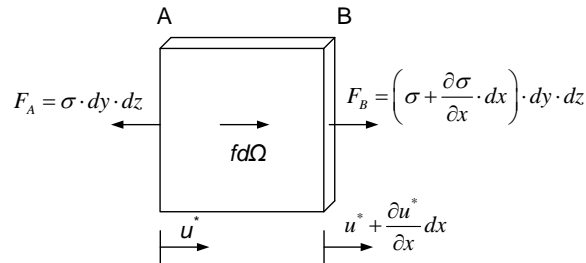
$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \delta u_i = 0 \quad (2.27)$$

Virtualni rad nekog tijela je rad svih sila na njima pripadnom virtualnom pomaku. Za ravnotežno stanje ukupni virtualni rad je jednak nuli. Virtualni pomak δu mora imati sljedeća svojstva:

- Virtualni pomak jednak je nuli u osloncima (kinematski dopustivo polje)
- Virtualni pomak je jako mala veličina (jer ne smije promijeniti naprezanja i deformacije u tijelu, nego izvršiti mali pomak tijela koje ostaje u ravnoteži)
- Virtualni pomak je proizvoljna veličina (upravo jer ne ovisi o naprezanjima i deformaciji)



Slika 8 Stanje (a) vanjske sile F i unutarnja naprezanja σ u ravnoteži i stanje (b) deformacija ϵ^* i ostvaren pomak u^*



Slika 9 Naprezanje u diferencijalnom elementu

Promatrajući jedan segment deformabilnog tijela $dx \cdot dy \cdot dz$ (Slika 9), može se izvesti sljedeća jednadžba virtualnog rada za 1D problem [60]:

$$\begin{aligned} \delta W &= \underbrace{F_B \left(u^* + \frac{\partial u^*}{\partial x} dx \right)}_{\delta W_B} - \underbrace{F_A \cdot u^*}_{\delta W_A} \\ &= \underbrace{\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz}_{F_B} \cdot \left(u^* + \frac{\partial u^*}{\partial x} dx \right) - \underbrace{\sigma \cdot dy \cdot dz}_{F_A} \cdot u^* \end{aligned}$$

nakon skraćivanja prvog člana δW_B rada sa radom δW_A dobiva se:

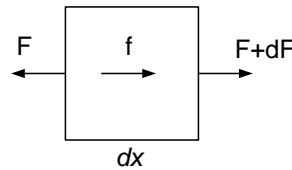
$$\delta W = \sigma \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot u^* + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} dx$$

Uvrsti li za $dx \cdot dy \cdot dz = d\Omega$ dobiva se:

$$\delta W = \frac{\partial u^*}{\partial x} \cdot \sigma \cdot d\Omega + u^* \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot d\Omega + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \cdot dx \cdot d\Omega$$

Zadnji član ovog izraza može se zanemariti jer se javlja $dx \cdot dx$ što daje zanemarivu veličinu, te je virtualni rad za diferencijalni element $d\Omega$:

$$\delta W = \frac{\partial u^*}{\partial x} \cdot \sigma \cdot d\Omega + u^* \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot d\Omega = \varepsilon^* \cdot \sigma \cdot d\Omega - u^* \cdot f_v \cdot d\Omega = \delta W_u - \delta W_{v1} \quad (2.28)$$



Slika 10 Prikaz sila u diferencijalnom segmentu za 1D

Vektor volumenskih sila f_v i vektor površinskog opterećenja f_s su:

$$f_v^T = [f_{vx} \quad f_{vy} \quad f_{vz}] \quad f_s^T = [f_{sx} \quad f_{sy} \quad f_{sz}]$$

Iz jednadžbe ravnoteže, za x-os slijedi:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + f = 0 \quad (2.29)$$

A veza pomaka i deformacije:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \varepsilon^*$$

Da bi mogli postaviti jednadžbu ukupnog virtualnog rada, koji mora biti jednak nuli, potreban je još rad koje vrše vanjske površinske sile, po obodu Γ_s volumena Ω :

$$\delta W_{v2} = \int_{\Gamma_s} u^{*T} f_s d\Gamma$$

Te se jednadžba ukupnog virtualnog rada (2.28) može napisati za 1D kao:

$$\underbrace{\int_{\Gamma_s} u^{*T} f_s d\Gamma}_{\delta W_{v2}} + \underbrace{\int_{\Omega} u^{*T} f_v d\Omega}_{\delta W_{v1}} = \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon^{*T} \sigma d\Omega}_{\delta W_u}, \quad (2.30)$$

gdje je Γ – površina tijela

Γ_s – vanjska površina tijela na kojoj djeluju vanjske sile f_s – statički rubni uvjeti

Γ_u – vanjska površina tijela na kojoj su zadani pomaci u_i - geometrijski rubni uvjeti

Ω - promatrani volumen tijela

$u^* = u + \delta u$ – vektor pomaka sa superponiranim virtualnim pomakom

f_s – vektor distribuiranih sila koje djeluju na dijelu površinu ruba Γ_s

f_v – vektor volumenskih sila

δW_u - ukupni unutarnji virtualni rad

$\delta W_v = \delta W_{v1} + \delta W_{v2}$ – rad vanjskih sila

δW_{v1} - ukupni virtualni rad volumenskih sila

δW_{v2} - rad koje vrše vanjske površinske sile, po obodu Γ_s

Rad svih vanjskih opterećenja koje djeluju na tijelo pohranjuje se u vidu unutarnje energije.

Jednadžba (2.30) je prepoznatljiva i zove se varijacijska slaba formulacija koju se rješava numeričkim metodama (konačni elementi, bez-mrežnim (meshfree) metodama, itd.) s tim da su težinske funkcije analogne virtualnim pomacima, što će se u narednim poglavljima detaljnije i obraditi. Sve veličine se sada zapisuju vektorski, odnosno jednadžba (2.30) za 3D glasi:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}) \cdot d\Omega - \int_{\Gamma_s} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_s \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_v \cdot d\Omega = 0 \quad (2.31)$$

- Diferencijalni operator L za 3D [61]:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

- Vektor naprezanja:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}$$

- Vektor deformacija:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}$$

- Odnos naprezanja i deformacije iz Hookeovog zakona:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.32)$$

- Matrica elastičnih svojstava materijala u svojstvu naprezanja ili u svojstvu deformacija:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

- Youngov modul elastičnosti E i Poissonov omjer ν
- Vektor pomaka: $\mathbf{u}^T = \{u \ v \ w\}$
- Vektor deformacije izazvan virtualnim pomakom $\delta\mathbf{u}$: $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{L} \cdot \delta\mathbf{u}$

Osim navedenih svojstava materijala mogu se definirati još i modul smicanja \mathbf{G} , te prostorni modul elastičnosti (modul stlačivosti) \mathbf{B} [61].

U jednadžbi (2.31) prvi integral s lijeve strane predstavlja ukupni unutarnji virtualni rad:

$$\delta W_u = \int_{\Omega} (\mathbf{L} \cdot \delta\mathbf{u})^T \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}) \cdot d\Omega \quad (2.34)$$

Drugi i treći integral jednadžbe (2.31) gledajući s lijeva predstavljaju rad vanjskog opterećenja:

$$\delta W_v = \int_{\Gamma_s} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_s \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_v \cdot d\Omega \quad (2.35)$$

Rad vanjskog opterećenja jednak je zbroju vanjskog opterećenja \mathbf{f}_v po jedinici volumena Ω i vanjskog opterećenja \mathbf{f}_s po jedinici konture Γ_s .

Jednadžba (2.34) naziva se bilinearom, jer ima linearnu ovisnost pomaka \mathbf{u} i virtualnog pomaka $\delta\mathbf{u}$.

Ove jednadžbe služit će kao temeljne jednadžbe za topološko optimiranje (poglavlje 3) i level set metodu (poglavlje 4).

Ekvivalent principu virtualnih radova je princip minimuma ukupne potencijalne energije.

2.5 Princip minimuma ukupne potencijalne energije

Minimum ukupne potencijalne energije je temeljni koncept pri optimiranju u fizici, kemiji, biologiji i inženjerstvu, te je jedan od temeljnih principa prirode. Tijelo ili struktura se pomiče i deformira u položaj koji odgovara minimumu njegove ukupne potencijalne energije.

Tipičan primjer je grana stabla na koju napada snijeg, te se uslijed težine snijega ona spušta na visinu minimuma potencijalne energije gdje je jednadžba ravnoteže zadovoljena. Ukupna potencijalna energija Π je zbroj energije elastične deformacije u deformabilnom tijelu \mathbf{U} i potencijalne energije vanjske sile \mathbf{V} (2.36) [61]:

$$\Pi = \mathbf{U} + \mathbf{V} \quad (2.36)$$

Energija je stacionarna kada neznatna promjena položaja tijela ne daje promjenu energije:

$$\delta\Pi = \delta(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 0 \quad (2.37)$$

Princip minimuma potencijalne energije je u stvari specijalni slučaj principa virtualnih radova elastičnog tijela izloženog konzervativnim silama (2.30), te se jednakost vanjskih i unutarnjih virtualnih radova može zapisati kao (2.38):

$$\int_{\Gamma_s} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_s \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f} \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot d\Omega \quad (2.38)$$

Desna strana jednadžbe (2.38) predstavlja infinitezimalnu promjenu energije elastične deformacije \mathbf{U} , $\delta\mathbf{U}$. Lijeva strana predstavlja promjenu potencijalne energije \mathbf{V} konzervativne vanjske sile.

$$\mathbf{V} = - \int_{\Gamma_s} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_s \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f} \cdot d\Omega, \quad (2.39)$$

gdje negativni predznak predstavlja gubitak potencijalne energije kako se sila pomiče u smjeru pomaka. Sada jednadžba (2.38) postaje:

$$-\delta\mathbf{V} = \delta\mathbf{U} \quad (2.40)$$

Ovo dovodi do jednadžbe (2.37) koja je i osnovna jednadžba pri razvoju numeričkih metoda u mehanici čvrstih tijela.

Jednadžba minimuma potencijalne energije (2.37) zapisuje se kao:

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f} \cdot d\Omega - \int_{\Gamma_s} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_s \cdot d\Gamma = 0 \quad (2.41)$$

2.6 Numeričke metode rješavanja

Iz uvjeta ravnoteže i rubnih uvjeta dobivene su parcijalne diferencijalne jednačbe (PDJ) (2.20), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), odnosno u prostoru (2.32) koje opisuju promjene stanja unutar tijela koje se događaju uslijed vanjskih utjecaja. Problem rješavanja PDJ podrazumijeva nalaženje rješenja fizikalnih procesa koje opisuju PDJ. U termodinamici PDJ daju temperaturno polje kod provođenja topline, u mehanici fluida PDJ opisuju protok fluida, u mehanici čvrstih tijela PDJ opisuju ponašanje tijela uslijed djelovanja vanjskih opterećenja.

U ovom radu promatrat će se rješavanje problema mehanike čvrstih tijela parcijalnim diferencijalnim jednačbama.

Kako su PDJ problema mehanike čvrstih tijela analitički teško rješive ili ih se u većini slučajeva ne može riješiti (zbog složenosti zadovoljavanja rubnih uvjeta), razvijene su brojne metode koje približno rješavaju ove jednačbe. Teorijom elastičnosti rješavaju se problemi mehanike čvrstih tijela aproksimativnim (približnim) poljima na bazi polinoma i Fourierovih redova. Rješavanje mehanike čvrstih tijela teorijom elastičnosti je ograničeno na jednostavnije geometrije, zbog problema zadovoljavanja složenih rubnih uvjeta.

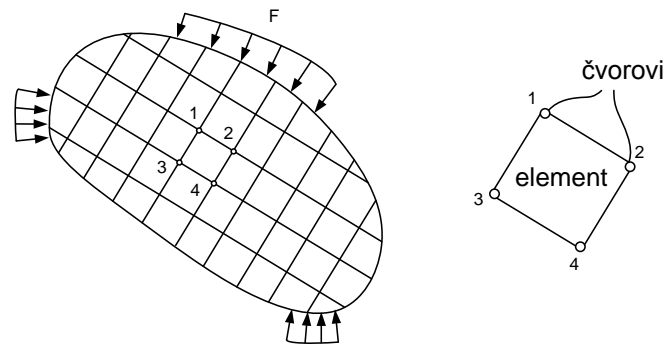
Kako bi mogli riješiti probleme sa složenom geometrijom, koristi se približno rješavanje PDJ problema mehanike čvrstih tijela nekim od numeričkih metoda kao što su metoda konačnih diferencija, metoda konačnih elemenata (MKE), konačni volumeni, itd.

U načelu sve numeričke metode temeljene su na diskretizaciji polja problema pomoću probnih interpolacijskih (aproksimacijskih) funkcija. Za interpolacijske (aproksimacijske) funkcije mogu koristiti Bezierove krivulje, B-krivulje, radijalne bazne funkcije (RBF), radial point interpolation method (RPIM), itd.

Pri numeričkom rješavanju PDJ modela mehanike čvrstih tijela postoje dva problema: prvi je naći probne funkcije koje će zadovoljiti PDJ, a drugi problem je zadovoljiti rubne uvjete. Ako su varijable pomaci i deformacije, uvjeti kompatibilnosti deformacija su zadovoljeni te se razmatraju uvjeti ravnoteže.

2.6.1 Metoda konačnih elemenata

Pojavom računala prevladala je metoda konačnih elemenata koja se već oko 50 godina uspješno koristi pri rješavanju brojnih tehničkih problema. Metoda konačnih elemenata rješava PDJ integralno, na razini cijele domene. Nastala je ranih 50-tih godina dvadesetog stoljeća. Zasnovana je na diskretizaciji prostora na elemente spojenih čvorovima. Čvorovi su karakteristične točke diskretiziranog prostora u kojima se prate veličine značajne za proces [62].



Slika 11 Prikaz diskretizacije prostora i čvorova

Za svaki čvor diskretiziranog prostora se primjenom interpolacije probnih funkcija unutar elemenata računa vrijednost varijabli stanja PDJ. U mehanici čvrstih tijela varijable stanja su pomaci u, v i w , dok u elementu vrijedi interpolacija funkcije na temelju vrijednosti u čvorovima. Rješavanje funkcije na cijeloj domeni svodi se na rješavanje funkcije u čvorovima, pri čemu je između čvorova interpolirana funkcija. Takvo približno rješenje probnim funkcijama uvrštava se u izraze za potencijalnu energiju (2.41), iz kojih slijede vrijednosti varijabli stanja u čvorovima. Probne (aproksimacijske) funkcije biraju se tako da što bolje opisuju problem. Razvijeni su različiti konačni elementi (npr. polinomni različitog stupnja ovisno o broju čvorova elementa) o kojima ovisi i točnost.

Kako bi riješili problem numeričkim metodama, kod problema mehanike čvrstih tijela potrebno je formirati jaku formulaciju u obliku minimuma potencijalne energije. Ova jednadžba može se svesti na jednadžbu slabe formulacije primjerice Galerkinovom metodom (ekvivalentna jednadžba nižeg stupnja derivacije) koja je analogna jednadžbi principa virtualnih radova (2.30), tako da se dobiva integralni ekvivalent PDJ.

Kad se govori o MKE, postoje različite probne funkcije i različiti konačni elementi.

Pomaci u elementu \mathbf{u} prikazuju se ovisno o pomacima u čvorovima \mathbf{q} pomoću interpolacijskih funkcija koje čine matricu funkcija oblika \mathbf{N} .

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} \quad (2.42)$$

Iz odnosa pomaka i deformacije (2.20), se dobiva raspodjela deformacija u elementu:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \quad (2.43)$$

\mathbf{B} – matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima,

\mathbf{D} – matrica elastičnih svojstava materijala, (2.33).

Varijacijom po nepoznatim veličinama u čvorovima elementa dobiva se:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{q}$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{q}$$

Sada je minimum ukupne potencijalne energije (2.41) diskretiziran na čvorove:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^T \left[\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot d\Omega}_k \right] \mathbf{q} \\ = \delta \mathbf{q}^T \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f}_v \cdot d\Omega}_{\mathbf{F}_v} + \delta \mathbf{q}^T \underbrace{\int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f}_s \cdot d\Gamma}_{\mathbf{F}_s} + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Iz jednadžbe (2.44) izvodi se uvjet ravnoteže konačnog elementa:

$$\mathbf{k}^e \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_s + \mathbf{F},$$

gdje su:

\mathbf{k}^e – matrica krutosti konačnog elementa

\mathbf{q}^e – pomaci u čvorovima elementa

\mathbf{F}_v – vektor sila u čvorovima od volumenskih sila \mathbf{f}_v

\mathbf{F}_s – vektor sila u čvorovima od površinskog opterećenja

\mathbf{F} – vektor koncentriranih čvornih sila.

Ako se uvede supstitucija: $\mathbf{b}^e = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}$, dobiva se osnovna jednadžba konačnog elementa [61], [62]:

$$\mathbf{k}^e \cdot \mathbf{q}^e = \mathbf{b}^e \quad (2.45)$$

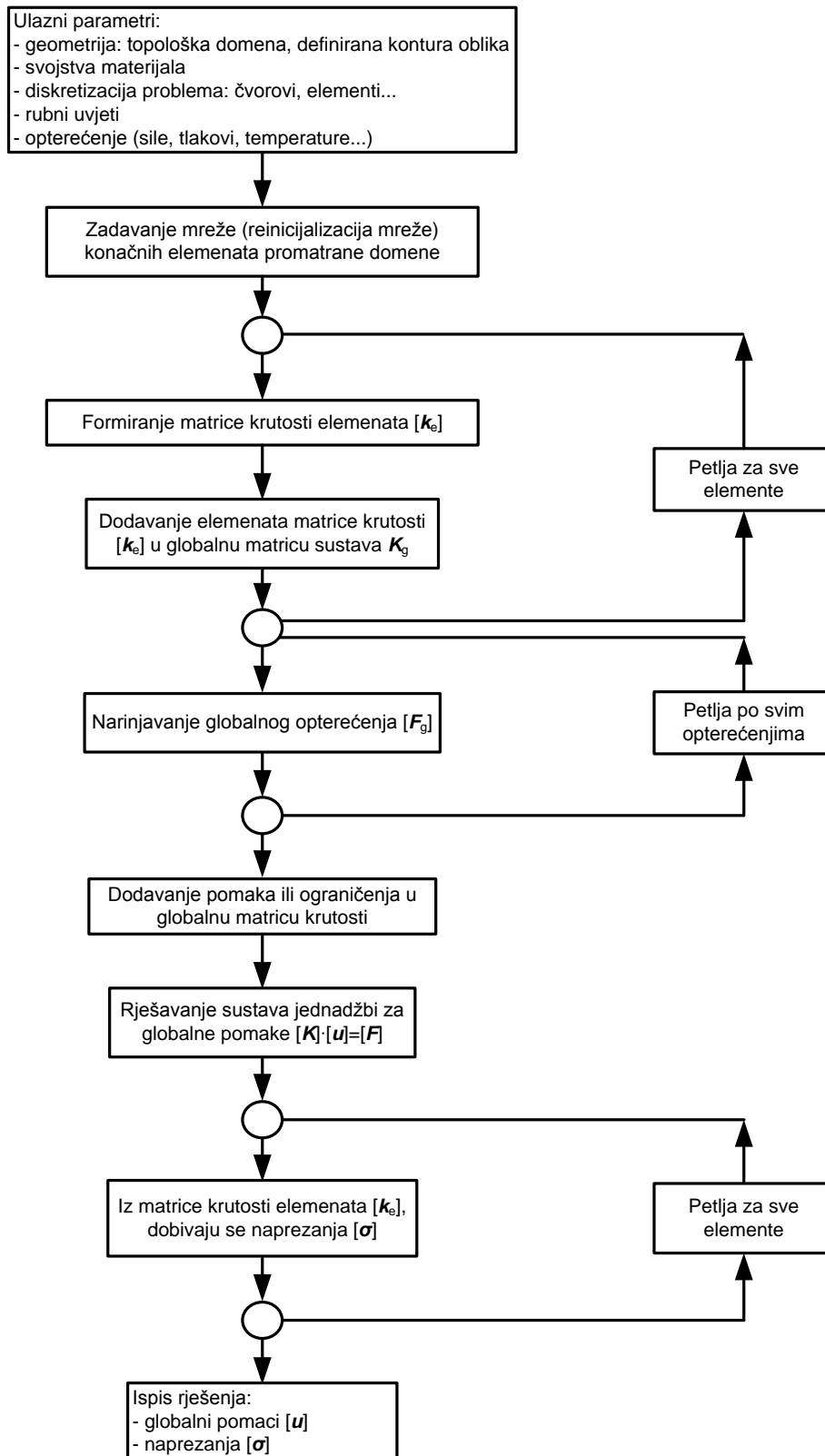
Promatra se cijeli diskretizirani prostor. Uvođenjem matrice transformacije koja se sastoji od kosinusa smjera pomaka u pravcu lokalnih osi u odnosu na pravce globalnih koordinatnih osi, te superpozicijom svih elemenata (dodjeljivanje čvorova i stupnjeva slobode pojedinom konačnom elementu) izvodi se globalna matrica krutosti \mathbf{K} . Jednadžba konačnih elemenata sada glasi:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (2.46)$$

Rješavanjem PDJ problema mehanike čvrstih tijela metodom konačnih elemenata potrebno je dokazati da stanje konvergira ka rješenju. Ne može se uvijek postići konvergencija. Konvergencija ovisi o odabiru konačnih elemenata.

'Patch test' je indikator kvalitete konačnog elementa [63]. Kvaliteta konačnog elementa provjerava se standardiziranim postupkom (patch testom), tako da se uzme PDJ koji ima poznata analitička rješenja te se na takvom problemu za područje od nekoliko elemenata ispituje kvaliteta konačnog elementa koja aproksimira ovu PDJ. U mehanici čvrstih tijela test je prošao u koliko su rješenja dobivena metodom konačnih elemenata i analitički dobivena rješenja (kao linearne funkcije u prostoru) jednaka. 'Patch test' osigurava konstantne vrijednosti deformacija (nema skoka deformacija). Još jedan preduvjet konvergencije je da se ona može dokazati povećanjem broja elemenata, odnosno sa većim brojem konačnih elemenata, proračun bi trebao konvergirati

ka rješenju. U nastavku je prikazan opći postupak rješavanja konačnim elementima (dijagram toka) Slika 12:



Slika 12 Dijagram toka metode konačnih elemenata

2.6.1.1 Metoda zamjenskog materijala - „Ersatz material“

Pri rješavanju metodom konačnih elemenata, kod promjene geometrije diskretiziranog prostora (npr. kod optimiranja oblika) potrebno je izvršiti ponovno generiranje mreže konačnih elemenata. Ovaj proces je vremenski skup zbog formiranja konture, generatora mreže, Delaunayeve triangulacije (triangulacije skupa točaka pomoću kružnice, takva da ni jedna točka iz skupa točaka ne leži u opisanoj kružnici drugog trokuta). Promjena oblika zahtjeva ponovno izvođenje cijelog dijagrama toka metode konačnih elemenata (Slika 12). Stoga se kao alternativa generiranju nove mreže konačnih elemenata razvio postupak zamjenskog materijala (Ersatz material – njemačka riječ – zamjenski materijal).

Ako se zamisli ploča, te da bilo koja formulacija stvori rupu u ploči, klasični inženjerski pristup metodom konačnih elemenata bi zahtijevao ponovno generiranje mreže materijala (remeshing), zbog promjene geometrije. Metoda zamjenskog materijala ostavlja istu mrežu konačnih elemenata, a na mjestima gdje nema materijala mijenjaju se svojstva materijala (zadaje se mekši materijal). Svojstva materijala u promatranoj domeni kontroliraju se pomoću krutosti. Krutost materijala koja predstavlja dio domene bez materijala ne smije biti velika jer bi značajno utjecala na točnost, ali ne smije biti ni jako mala jer bi se pojavio singularitet u konačnim elementima. Odabir optimalne krutosti materijala na mjestima gdje materijal ne postoji je iskustven, što predstavlja nedostatak u metodi zamjenskog materijala. Još jedan nedostatak metode „Ersatz material“ je zahtijevanje relativno fine mreže konačnih elemenata, jer za velike elemente granice tvrdog i mekog materijala mogu biti pregrube.

2.6.2 Aproksimacija potencijala pomoću bezmrežne metode - Radijalne bazne funkcije

Kako su se računala razvijala i postajala sve brža, tako su i neke metode rješavanja koje su postojale samo teorijski uspješno primijenjene, a njihov razvoj otvara mnoge mogućnosti kako u znanstvenom svijetu tako i u praktičnoj primjeni.

Bez-mrežne metode su klasa numeričkih algoritama za simulaciju fizikalnih pojava. One su približne metode rješavanja problema polja (npr. teorije elastičnosti) bez mreže za diskretizaciju, koje koriste globalne aproksimacijske funkcije (npr. radijalne bazne funkcije - RBF).

Metoda radijalne bazne funkcije (RBF) je metoda aproksimacije ili interpolacije za bilo kakvu funkciju. Tradicionalni algoritmi zasnivaju se na diskretizaciji prostora mrežom (MKE), za razliku od bez-mrežne metode koje se oslanjaju na probne interpolacijske ili aproksimacijske funkcije na bazi vrijednosti u odabranim čvorovima. Na taj način dobiva se globalna aproksimacija funkcija.

RBF funkcije daju probna rješenja, koja se mogu uvrstiti u funkciju i dati njenu aproksimaciju. Funkcija koja se aproksimira može biti geometrija, ali može biti i polje pomaka. Ako se probna rješenja uvrste u PDJ, dobiva se aproksimacija PDJ.

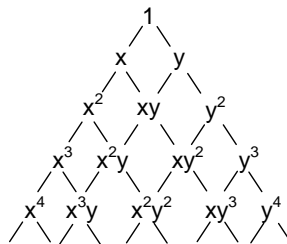
RBF metode temelje se na čvornim točkama (česticama), te su zbog svoje prirode izvorno našle svoju primjenu u mehanici fluida pri opisu strujanja. Međutim neke metode temeljene na interpolaciji u čvornim točkama našle su uspješnu primjenu u mehanici čvrstih tijela, kao na primjer Radial point interpolation method – RPIM [64].

RBF metodom se također može i aproksimirati geometrija, te se istom metodom može opisati oblik i riješiti pojave (deformacije čvrstog tijela) koje se dešavaju u zadanoj geometriji (tzv. izogeometrijska analiza).

Bez-mrežne metode bolje opisuju stanja velikih deformacija, nelinearna ponašanja materijala te diskontinuitet i singularnost od metode konačnih elemenata. Razlog tome je nepostojanje mreže koja ograničava rješavanje metodom konačnih elemenata zbog potrebe za kreiranjem nove mreže pri velikim deformacijama, te su kod takvih problema primjerenije bez-mrežne metode.

2.6.2.1 Radial Point Interpolation Method (RPIM)

PIM interpolacijska metoda (Point interpolation method) koristi polinome kao bazne funkcije i jedna je od najranijih načina interpoliranja funkcija. PIM metoda za interpolaciju koristi monome, koji ovisno o dimenziji problema poprima oblik iz Pascalovog trokuta [61]:



Slika 13 Pascalov trokut monomnih funkcija za dvo-dimenzijski prostor

Linearna bazna funkcija za 1D izgleda:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x\}$$

Kvadratna bazna funkcija za 1D glasi

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad x^2\},$$

dok za 2D kvadratna bazna funkcija izgleda:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2\}$$

RPIM metoda je interpolacijska tehnika bez-mrežne metode RBF. RPIM interpolacija proširena je sa polinomom, i može se zapisati kao [64]:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) \cdot a_i + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) \cdot b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}, \quad (2.47)$$

gdje je: n – broj radijalnih baznih funkcija (RBF), m – broj polinomnih baznih funkcija ($m=0$ – čisti RBF)

a_i i b_j – koeficijenti koje treba odrediti

U RBF-u R_i su funkcije koje ovise o udaljenosti između točaka interesa ($R = R(r)$), a za 3D problem udaljenost je jednaka:

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}, \quad (2.48)$$

x_i, y_i i z_i su koordinate trenutnog čvora i .

Postoje brojne vrste RBF funkcija:

$$\text{Multikvadratna RBF:} \quad R_i(x, y, z) = (r_i^2 + (\alpha_c \cdot d_c)^2)^q \quad (2.49)$$

$$\text{Gauss – ova eksponencijalna RBF:} \quad R_i(x, y, z) = \exp \left[\alpha_c \cdot \left(\frac{r_i}{d_c} \right)^2 \right] \quad (2.50)$$

$$\text{RBF tanka zakrivljena ploha (TPS):} \quad R_i(x, y, z) = r_i^\eta \quad (2.51)$$

$$\text{Logaritamska RBF funkcija:} \quad R_i(x, y, z) = r_i^\eta \cdot \log r_i \quad (2.52)$$

pri čemu su q , η i α_c parametri oblika RBF funkcije ($q = \pm 0,5$). Neka istraživanja pokazuju da vrijednost parametra $q=0.98$ ili $q=1.03$ daju dobre rezultate u analizi 2D problema u mehanici fluida i čvrstih tijela [64].

d_c – je karakteristična duljina koja se odnosi na udaljenost čvorova u prostoru u lokalnoj domeni točke interesa x i obično je jednaka prosječnoj udaljenosti čvorova u prostoru za sve čvorove u lokalnoj domeni.

U RPIM metodi nije uvijek potreban polinomni dio. Na primjer ako se RBF funkcijom aproksimira geometrija, dovoljne su samo radijalne funkcije. Ukoliko RBF aproksimira neko polje iz kojeg slijede pomaci koristi se cjeloviti izraz (2.47), odnosno tada se ne može samo RBF aproksimacijom opisati točno linearno polinomno polje (ne prolazi 'patch test') te se dodaje i polinomni dio. Dodavanje polinomnog dijela višeg stupnja od linearnog reda može osigurati kontinuitet C^1 koji je potreban za 'patch test'.

Dodavanje polinomnog dijela:

- može povećati točnost rezultata.
- reducira osjetljivost parametara oblika i daje se više slobode i širi raspon u izboru parametara oblika. Ovo vrijedi za bez-mrežnu slabu formulaciju.
- može doprinijeti interpolacijskoj stabilnosti za neke RBF.

Rješavanjem jednadžbi RPIM (2.47) za poznate vrijednosti aproksimacijske funkcije U_s dobivaju se nepoznati koeficijenti a_i i b_j . Potrebno je riješiti n linearnih interpolacijskih jednadžbi, po jednu za svaki čvor:

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{b} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{U}_s = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$$

\mathbf{U}_s je vektor poznatih funkcijskih vrijednosti aproksimacijske funkcije za kog se dobivaju vrijednosti koeficijenata a_i i b_i .

Matrica momenata RBF-a u (2.53) glasi:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (2.54)$$

Matrica momenata polinoma (monomi iz Pascalovog trokuta Slika 13):

$$\mathbf{P}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (2.55)$$

$\mathbf{a}^T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – vektor koeficijenata RBF

$\mathbf{b}^T = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ – vektor koeficijenata polinoma

Nepoznatih koeficijenata ima $n+m$, a jednačba (2.53) daje samo n uvjeta.

Moguće je dobiti m dodatnih jednačbi iz m ograničenja (rubnih uvjeta):

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i) \cdot a_i = \mathbf{P}_m^T \cdot \mathbf{a} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.56)$$

Zbog dodanih polinoma definiraju se dodatni uvjeti, kako bi osigurali jedinstveno rješenje [47],

[36]:

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot y_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot z_i = 0 \quad , \quad (2.57)$$

te su se dobile $n+4$ jednačbe (ukoliko se radi o 3D domeni) koje rješavaju $n+4$ nepoznata koeficijenta. Za 2D problem četvrti izraz u (2.57) nam je suvišan. Izrazi (2.57) proizašli su iz uvjeta ortogonalnosti n dimenzijskih vektora koeficijenata RBF-a (\mathbf{a}) i vektora položaja čvorova (x_i, y_i, z_i) . Ovako odabranim dodatnim uvjetima izbjegavaju se kolinearnost za linearne čvorove odnosno koplanarnost za kvadratne čvorove, itd. Sada sustav jednačbi (2.59) postaje rješiv jer se jednačbama (2.57) izbjegava singularnost matrice sustava.

Jednačbu interpolacije RPIM-om (2.47) moguće je zapisati kao:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{R}^T(x) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(x) \cdot \mathbf{b} = \{\mathbf{R}^T(x) \quad \mathbf{p}^T(x)\} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

Kombinacijom jednačbi (2.53) i (2.56) dobiva se interpolacijska jednačba kroz rješenja $\tilde{\mathbf{U}}_s$:

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_0} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_0,$$

gdje je \mathbf{G} kolokacijska matrica.

Sada su nepoznati koeficijenti:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_s \Rightarrow \mathbf{a}_0 = \mathbf{G}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_s \quad (2.59)$$

$$\mathbf{a}_0^T = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \{u_1, u_2, \dots, u_n, 0, \dots, 0\}^T$$

Kada su se izračunali nepoznati koeficijenti (pomoću aproksimacijskih točaka), može se aproksimirati jednadžba $\mathbf{u}(x)$ za proizvoljnu gustoću točaka.

Kombiniranjem jednadžbi (2.59) i (2.58), dobiva se [64]:

$$\mathbf{u}(x) = \{\mathbf{R}^T(x) \quad \mathbf{p}^T(x)\} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_s = \tilde{\Phi}^T(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}}_s, \quad (2.60)$$

gdje se RPIM funkcija oblika može zapisati:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^T(x) &= \{\mathbf{R}^T(x) \quad \mathbf{p}^T(x)\} \cdot \mathbf{G}^{-1} \\ &= \{\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \dots \quad \phi_n(x) \quad \phi_{n+1}(x) \quad \dots \quad \phi_{n+m}(x)\} \end{aligned}$$

Jednadžba (2.60) može se zapisati kao:

$$\mathbf{u}(x) = \Phi^T(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}}_s = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot u_i, \quad (2.61)$$

a derivacija jednadžbe (2.61) glasi:

$$\mathbf{u}_{,l}(x) = \Phi_{,l}^T(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}}_s, \quad (2.62)$$

gdje l predstavlja koordinate x i y , a zarez označava parcijalnu derivaciju po određenoj koordinati.

Valja imati na umu da matrica momenata RBF (\mathbf{R}_0) može biti loše uvjetovana kada je broj čvorova prevelik, što je uočeno u globalnoj bez-mrežnoj formulaciji.

Postoji nekoliko prednosti u korištenju RBF funkcija kao osnovnih funkcija pri gradnji PIM funkcije oblika.

- korištenje RBF-a može učinkovito riješiti problem singularnosti polinoma PIM, koja se javlja uslijed nemogućnosti izračuna inverzne matrice pri interpolaciji [64].
- RPIM funkcije oblika su stabilne i stoga fleksibilne za proizvoljnu i nepravilnu raspodjelu čvorova. Male promjene u lokaciji ili broju čvorova u podržanoj domeni neće dovesti do velike promjene u nastaloj RPIM funkciji oblika.

Međutim, RPIM također ima neke nedostatke, kao što su:

- RPIM funkcije oblika obično daju slabiju točnost kod mehanike čvrstih tijela u odnosu na PIM polinomnu funkciju oblika.

- Neki parametri oblika moraju se pažljivo odrediti, jer mogu utjecati na točnost i performanse RPIM funkcije oblika u bez-mrežnoj metodi.
- RPIM metoda je obično i numerički zahtjevnija od polinomne PIM metode, jer su potrebni dodatni čvorovi u lokalnom podržanom području.

Svojstva RPIM funkcija oblika:

- RPIM funkcija oblika ima svojstva Kronecker delta funkcije. Kronecker delta funkcija je funkcija dvije varijable. Ukoliko su varijable jednake Kronecker delta funkcija poprima vrijednost 1, a ukoliko su varijable različite funkcija poprima vrijednost 0:

$$\delta_{ij} = \phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{ili} \quad \delta_i = \phi_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$$

Za trenutni čvor i RBF funkcija poprima vrijednost 1, dok za susjedni čvor j RBF funkcija poprima vrijednost 0.

- RPIM funkcija oblika ima svojstvo jediničnog udjela („partition of unit“). Matematički, jedinični udio govori da je suma vrijednosti svih funkcija u bilo kojoj točki topološkog prostora jednaka jedinici: $\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$. Sve RBF bazne funkcije zajedno u nekom čvoru čine jedinični udio.
- RPIM funkcije oblika obično imaju veći kontinuitet zbog visokog kontinuiteta radijalnih baznih funkcija.
- RPIM funkcije s polinomnim izrazima niskog stupnja osiguravaju točnu aproksimaciju linearnih polinoma. RBF funkcije ne mogu aproksimirati linearnu funkciju ako nisu proširene sa linearnim polinomnim dijelom.
- RPIM interpolacija i RBF interpolacija mogu se koristiti i kod parametrizacije geometrije (poglavlje 2.3).

Uvrštavanjem RPIM aproksimacije u rješavanje problema mehanike čvrstih tijela aproksimiraju se pomaci u elementu \mathbf{u}^h ovisno o pomacima u čvorovima \mathbf{u} pomoću interpolacijskih RPIM funkcija Φ_i kao:

$$\mathbf{u}^h = \sum_i^n \Phi_i \cdot \delta \mathbf{u}_i \quad (2.63)$$

Sada iz jednadžbi (2.32) i (2.63) slijedi:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}^h = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.64)$$

odnosno:

$$\mathbf{L}\delta\mathbf{u}^h = \mathbf{L} \cdot \Phi \cdot \delta\mathbf{u} \quad (2.65)$$

Minimum ukupne potencijalne energije (2.41) uz (2.64) (analogno kao jednačba (2.44)) glasi:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}^T \cdot \left[\underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{L} \cdot \Phi)^T \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{L} \cdot \Phi) \cdot d\Omega}_K \right] \cdot \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^T \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{L} \cdot \Phi)^T \cdot \mathbf{f} \cdot d\Omega}_{\mathbf{F}_v} + \\ \delta\mathbf{u}^T \underbrace{\int_{\Gamma_s} (\mathbf{L} \cdot \Phi)^T \cdot \mathbf{f}_s \cdot d\Gamma}_{\mathbf{F}_s} + \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Supstitucijom, globalna sila koja se javlja u promatranoj domeni je $\mathbf{b} = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}$, te se dobiva osnovna jednačba RPIM aproksimacije pomaka (2.67):

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.67)$$

RPIM aproksimacija zove se još i bezmrežna metoda.

Rubni uvjeti

Promatrajući polje problema mogu se uočiti čvorovi unutar konture i čvorovi na granicama. Dio čvorova na granicama konture imaju propisan iznos funkcija, a dio ima propisan iznos derivacije funkcije. Ti propisani iznosi nazivaju se rubni uvjeti. Na dijelu konture gdje su propisani iznosi funkcije kroz koje mora prolaziti aproksimacijska funkcija nazivaju se Dirichletove granice, dok su Neumannove granice rubni uvjeti na kojima su zadane derivacije funkcija.

2.7 Analiza osjetljivosti pri optimiranju

Kako je ranije opisano, optimiranjem se minimizira funkcija cilja (masa ili podatljivost) uz ograničenja ravnoteže i ograničenja geometrije.

Većina metoda optimiranja koriste niz aproksimacija prvog reda – „First Order Approximation“ (FOA).

Vrijednosti neke opće funkcije $f(x)$ moguće je izračunati razvojem u Taylorov red (2.68), pri čemu se oko točke x_0 može odrediti ponašanje funkcije $f(x)$. Taylorov red koristi derivacije funkcije i glasi (1D):

$$f(x) = f_0 + f' \cdot \Delta x + f'' \cdot \Delta x^2 + \dots \quad (2.68)$$

Aproksimacija prvog reda bi znači da se vrijednost aproksimirane funkcije računa samo pomoću prva dva člana Taylorovog reda (linearizacija):

$$f(x) = f_0 + f' \cdot \Delta x$$

Potrebna je derivacija funkcije cilja ili funkcije ograničenja, ovisno o tome koja se funkcija $f(x)$ aproksimira.

Kako je ranije napomenuto, optimiranje oblika i topologije obuhvaća simultano rješavanje dva spregnuta polja: oblika domene i pomaka. Zato vrijedi $u = u(X)$, odnosno veza ova dva polja slijedi iz rješenja problema mehanike čvrstih tijela.

Analiza osjetljivosti se može rješavati na tri načina: numerički (konačne diferencije), analitički i semi-analitički. Promatranjem ograničenja ravnoteže, iz poglavlja o konačnim elementima, uočava se da je osnovna jednadžba konačnih elemenata (2.46) eksplicitno uvedena kao ograničenje.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} g_0(\mathbf{X}) &= g_0(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{K}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$g_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l$$

$$\mathbf{X} \in R^n : X_j^{min} \leq X_j \leq X_j^{max}, \quad j = 1, \dots, n$$

Sada $\mathbf{X} = [X_i]$ označava dizajn varijable – varijable optimiranja (u ovom tekstu dizajn varijable označavaju varijable oblika i varijable topologije, dok x, y, z označavaju koordinate točaka u prostoru). U općem slučaju varijable oblika \mathbf{X} mogu biti i dimenzije.

Ovakvom formulacijom dobiva se veliki broj ograničenja, što je nepovoljno, te se takva formulacija izbjegava ugniježđenom („Nested“) formulacijom [65]. Ugniježđenom optimizacijskom metodom zanemarit će se eksplicitno izraženi uvjeti ravnoteže, ali će se uvjeti implicitno uvesti u

formulaciju, na način da se u svakoj iteraciji optimiranja (za svaki \mathbf{X}) riješi ravnoteža (2.69) te dobiveno uvrsti u (2.70):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} g_0(\mathbf{X}) &= g_0(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X})) \\ g_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X})) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, l \\ \mathbf{X} \in R^n : X_j^{min} &\leq X_j \leq X_j^{max}, \quad j = 1, \dots, n \\ \mathbf{K}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \end{aligned} \tag{2.70}$$

Funkcija cilja u ugniježđenoj formulaciji ostaje ista (podatljivost, odnosno masa), kao i sva ograničenja osim ograničenja ravnoteže. Ograničenja ravnoteže se računaju iterativno za svaku vrijednost varijabli optimiranja metodom konačnih elemenata, te se uvrštava u funkciju minimuma. Iz ovakve formulacije proizlazi da ograničenja ravnoteže nisu egzaktno zadovoljena, nego približno, jer se u prethodnom koraku određuju pomaci $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ koji se fiksiraju i uvrštavaju u formulaciju funkcije cilja i ograničenja.

Sada ugniježđeni algoritam izgleda kao:

1. Postaviti početna rješenja $\mathbf{X}^{k=0}$
2. Za svaku vrijednost varijabli oblika \mathbf{X}^k izračunati su odgovarajući pomaci $\mathbf{u}(\mathbf{X}^k)$ metodom konačnih elemenata (2.46).
3. Za trenutni iznos vektora varijabli oblika \mathbf{X}^k izračunati funkciju cilja \hat{g}_0 i funkcije ograničenja \hat{g}_i , te njihove derivacije $\nabla \hat{g}_0, \nabla \hat{g}_i$.
4. Formulirati eksplicitnu konveksnu aproksimaciju ugniježđenom formulacijom za trenutnu varijablu oblika \mathbf{X}^k .
5. Izračunati nelinearnom metodom optimiranja varijablu oblika \mathbf{X}^{k+1} za sljedeći korak
6. Vratiti se na korak 2.

Numeričko određivanje osjetljivosti:

Osjetljivost se može odrediti metodom konačnih diferencija za bilo koju funkciju cilja. Za neke vrijednosti varijabli oblika (npr. distribuciju gustoća) može se izvesti konačna diferencija (2.71):

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{X}^k)}{\partial X_j} = \frac{g_i(\mathbf{X}^k + h \cdot \mathbf{e}_j) - g_i(\mathbf{X}^k)}{h} \tag{2.71}$$

$\mathbf{e}_j = [0 \ 0 \ \dots \ \underset{j}{1} \ \dots \ 0]$ - jedinični vektor varijable j koji daje prirast u zadanom smjeru.

Odredit će se osjetljivost podatljivosti izrazom (2.72):

$$\hat{g}_0(\mathbf{X}) = g_0(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X})) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}) \tag{2.72}$$

Ako se promotri površina presjeka varijable j : $X_j = A_j$. Izračunat će se trenutna podatljivost $\hat{g}_0(\mathbf{X}^k)$. Zatim je presjek A_j povećan za korak h , te su metodom konačnih elemenata dobiveni pomaci $\mathbf{u}(\mathbf{X}^k + h \cdot \mathbf{e}_j)$ i podatljivost $g_0(\mathbf{X}^k + h \cdot \mathbf{e}_j)$. Tada jednadžba (2.71) daje osjetljivost. Prevelika vrijednost koraka h daje veliku grešku aproksimacije, dok premala vrijednost akumulira grešku (greška zaokruživanja), analogno kao i kod numeričkog deriviranja, jer je postupak isti. Mana konačnih diferencija je potreba izračuna funkcije g u nizu dodatnih točaka.

Bolji pristup je direktni analitički postupak.

Lančano pravilo funkcija f_1 i f_2 za 1D problem glasi:

$$(f_1 \cdot f_2)'(t) = f_1'(f_2(t)) \cdot f_2'(t), \quad (2.73)$$

generalizirano za više varijabli:

$$\frac{\partial^2(f_1 \cdot f_2)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial f_2(x)_k} \frac{\partial^2 f_{2k}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k,l} \frac{\partial^2 f_1}{\partial f_2(x)_k \partial f_2(x)_l} \frac{\partial f_{2k}}{\partial x_i} \frac{\partial f_{2l}}{\partial x_j}$$

Ako se primijeni lančana derivacija na jednadžbe (2.70) dobiva se:

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{X})}{\partial X_j} = \frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial X_j} + \frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial X_j} \quad (2.74)$$

Nepoznati članovi u jednadžbi (2.74) $\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial X_j}$ određuju se pomoću jednadžbe konačnih elemenata,

koja povezuje pomake i krutost:

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (2.75)$$

Deriviranjem jednadžbe (2.75) dobiva se:

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{X})}{\partial X_j} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}) + \mathbf{K}(\mathbf{X}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial X_j} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial X_j},$$

odnosno:

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial X_j} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial X_j} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{X})}{\partial X_j} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X})}_{\text{pseudo opterećenje}} \quad (2.76)$$

Iz izraza (2.76) se može odrediti $\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial X_j}$ za sve varijable oblika (X_j) opet metodom konačnih elemenata, s tim da se javlja pseudo opterećenje (derivacija opterećenja), dok je matrica krutosti uvijek ista.

Semi-analitički postupak nastaje kombinacijom jednadžbi (2.74) i (2.76):

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{X})}{\partial X_j} = \frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial X_j} + \frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{X})^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial X_j} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{X})}{\partial X_j} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}) \right) \quad (2.77)$$

Prethodna jednadžba (2.77) razdvaja se u dva sustava jednadžbi:

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}) \cdot \frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{X})^{-1} = \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{X})}{\partial X_j} = \frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial X_j} + \frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{X})^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial X_j} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{X})}{\partial X_j} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}) \right) \quad (2.79)$$

Jednadžba (2.78) riješi se za sva ograničenja g_i te se rezultat uvrsti u jednadžbu (2.79) n puta (za svaku varijable oblika X_j). Ovakav postupak je efikasniji kada je manji broj ograničenja nego varijabli, u ostalim slučajevima efikasniji je direktni pristup.

Jednadžba (2.76) predstavlja osjetljivost pomaka na varijable oblika.

Osjetljivost koristi za linearizaciju bilo koje funkcije, za što je potrebna derivacija funkcije.

Derivacija funkcije može se odrediti ili numerički (konačnim diferencijama) ili analitički.

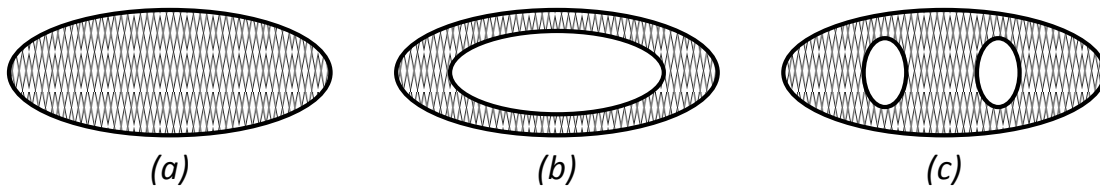
Ugniježđena formulacija uvodi se samo kako bi izbjegli veliki broj ograničenja.

Analiza osjetljivosti kod procesa topološkog optimiranja određuje kolika je promjena funkcije cilja u ovisnosti o promjeni pojedinih varijabli. Kad se funkcija cilja derivira po nekoj varijabli, tada se vidi koliko je osjetljiva ta funkcija cilja za tu varijablu, te se osjetljivost definira kao gradijent funkcije cilja.

Isti smjer koji pokazuje osjetljivost funkcije na varijablu oblika, pokazuje i kako najbrže ići prema maksimumu funkcije, što koristi kod gradijentnih postupaka optimiranja (Fletcher-Reeves ili najbrži spust).

3. Topološko optimiranje u mehanici čvrstih tijela

U prethodnim poglavljima o numeričkim metodama pri klasičnom rješavanju problema mehanike čvrstih tijela oblik je zadan, te se određuju naprezanja. Međutim pri optimiranju topologije u mehanici čvrstih tijela postoji problem određivanja dva nepoznata spregnuta polja: polje pomaka i oblik, odnosno raspodjela materijala. Oblik se uzima kao varijabla pri optimiranju, te on kao takav nije zadan. Pri optimiranju oblika i naprezanja, postoji potreba za značajnijim promjenama geometrije od same promjene veličine pojedinih parametara (topološke promjene). Topologija je povezanost elemenata nekog sustava. Topološkim optimiranjem mijenja se struktura domene (Slika 14).



Slika 14 Prikaz topološke promjene oblika

Topološkim optimiranjem mijenja se raspodjela materijala po domeni (geometrija tijela), odnosno mijenja se struktura domene obzirom na različite moguće kriterije (kao na primjer minimum mase, minimum naprezanja, minimum podatljivosti, itd.).

Topološko optimiranje u mehanici čvrstih tijela temelji se na principu minimuma potencijalne energije, virtualnih radova elastičnih tijela u ravnoteži (2.31), za proizvoljni virtualni pomak (δu) (unutarnje opterećenje) [5]. Ove jednadžbe dane su u poglavlju o virtualnim radovima 2.4, odnosno principu minimuma energije 0.

U literaturi vezanoj uz topološko optimiranje, uobičajena oznaka za virtualni pomak je v , za virtualni rad unutarnjih sila $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, a za virtualni rad vanjskog opterećenja oznaka $l(\mathbf{v})$, dok se matrica krutosti označava kao \mathbf{E} . Ove veličine u ranijim poglavljima označavale su se drugačije (tradicionalnim oznakama), te će se u kontekstu topološkog optimiranja i level set metode prihvatiti nove oznake.

Jednadžba (2.34) može se zapisati i kao:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{X}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot d\Omega \quad (3.1)$$

\mathbf{X} –varijable oblika (označava distribuciju materijala) i topologije,

\mathbf{u} – ravnotežno polje pomaka,

\mathbf{v} – virtualno polje pomaka (kinematički dopustivo).

Linearni oblik opterećenja (vanjska opterećenja) $l(\mathbf{v})$, koji je jednak zbroju vanjskog opterećenja f_v po jedinici volumena Ω i vanjskog opterećenja f_s po jedinici konture Γ_s (rad vanjskog opterećenja (2.35)), može se zapisati kao (3.2):

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_s \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_v \cdot d\Omega \quad (3.2)$$

Sada problem minimuma podatljivosti (odnosno maksimum krutosti) uz ograničenja dopustivih virtualnih pomaka i dopustive raspodjele materijala krutosti E glasi (3.3):

$$\min_{\substack{\mathbf{u} \in U \\ E \in E_{ad}}} l(\mathbf{v}) \quad (3.3)$$

$$a_B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \text{za sve } \mathbf{v} \in U, \quad E \in E_{ad},$$

što predstavlja slabu varijacijsku jednadžbu sa U pripadnih virtualnih (kinematskih dopustivih) pomaka.

f_v – vanjsko opterećenje koje djeluje na tijelo,

f_s – sile koje djeluju na rubu $\Gamma_s \subset \Gamma \equiv \partial\Omega$

E_{ad} –skup mogućih (dopustivih) svojstava materijala,

indeks B predstavlja bilinearnu formu (3.1) koja je opisana u poglavlju 2.4.

Iz principa virtualnih radova slijedi da se ravnotežno stanje pomaka dobiva minimiziranjem bilinearne forme (sa dva polja pomaka – ravnotežno stanje pomaka i virtualno stanje pomaka superponirano na ravnotežno stanje pomaka). Za ravnotežno stanje bilinearne forme traži se optimalna raspodjela materijala kako bi dobili maksimalnu krutost:

$$\max_{E \in E_{ad}} \left(\min_{\mathbf{u} \in U, D} \{a_B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v})\} \right) \quad (3.4)$$

Funkcija minimuma je podatljivost, gdje se traži optimalna distribucija materijala koja će zadovoljiti ravnotežu. Ovakva formulacija naziva se ugniježđena („Nested“) formulacija (3.4).

Ako se domena podijeli na konačne elemente, formulacija minimuma podatljivosti poprima oblik:

$$\min_{\mathbf{u}, E_e} f^T \mathbf{u}$$

$$K(E_e) \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad E_e \in E_{ad}$$

\mathbf{u} – pomak, \mathbf{f} – vektor opterećenja, K – matrica krutosti, ovisna o svojstvu materijala E_e u elementu e . Za N broj elemenata:

$$K = \sum_{e=1}^N K_e(E_e)$$

K_e – element globalne matrice krutosti.

Temeljne metode koje optimiraju oblik i topologiju su Bubble metoda, ESO (Evolutionary structural optimization), SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) i level set metoda topološkog optimiranja. U ovom radu detaljnije će se opisati SIMP postupak i level set postupak topološkog optimiranja.

3.1 Klasični postupak i SIMP postupak topološkog optimiranja – uvjeti optimuma

Topološko optimiranje svodi se na optimiranje raspodjele materijala. Varijabla koja govori o raspodjeli materijala je krutost materijala.

Elastična svojstva materijala E_{ad} mogu poprimiti vrijednosti svojstava izotropnog materijala u domeni Ω^{mat} (ima materijala) i nulu (nema materijala).

$$\int_{\Omega^{\text{mat}}} 1 \cdot d\Omega = V(\Omega^{\text{mat}}) \leq V_0 \quad (3.5)$$

Tamo gdje je vrijednost 1 znači da u tom dijelu ima materijala, a gdje je 0 – nema.

Svojstvo materijala pri topološkom optimiranju zadaje se preko varijable gustoća (ρ). Međutim varijabla optimiranja za gradijentne postupke mora biti kontinuirana (da bi bila derivabilna), te se uvodi kaznena funkcija koja gustoću stavlja na potenciju p , gdje je $p > 1$, čime funkcija 0-1 prelazi u kontinuiranu funkciju.

$$E_{ijkl}(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{X})^p E_{ijkl}^0 \quad (3.6)$$

Mehanizam ρ^p nepoželjne (kontinuirane) međuvrijednosti ρ između 0 i 1 „gura“ prema

diskretnim 0 i 1. $\rho \in [0,1] \rightarrow \rho^p \tilde{\epsilon} \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$.

Na taj način materijal tijekom optimiranja lokalno slabi (odnosno jača):

$$E_{ijkl}(\rho = 0) = 0, \quad E_{ijkl}(\rho = 1) = E_{ijkl}^0$$

Ovakav način optimiranja gustoće materijala naziva se SIMP-model (Solid Isotropic Material with Penalization).

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{X}) \cdot d\Omega \leq V_0, \quad 0 \leq \rho(\mathbf{X}) \leq 1, \quad \mathbf{X} \in \Omega \quad (3.7)$$

SIMP interpolacijska shema je iterativna metoda. Dizajniranjem oblika (strukturno optimiranje) ovisno o pomacima (dobiveni nekim od numeričkih metoda) poboljšavaju se varijable optimiranja koje opisuju domenu u ovisnosti o funkciji cilja i ograničenjima. Funkcija cilja je minimum virtualnog rada vanjskih sila (3.2):

$$\min_{\mathbf{u} \in U, \rho} l(\mathbf{v}), \quad (3.8)$$

uz ograničenje uvjeta ravnoteže (3.9) i distribuciju svojstava materijala (3.10):

$$a_B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \text{za sve } \mathbf{v} \in U \quad (3.9)$$

$$E_{ijkl}(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{X})^p E_{ijkl}^0, \quad (3.10)$$

te uz uvjet ograničenja volumena materijala:

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{X}) \cdot d\Omega \leq V_0, \quad 0 \leq \rho_{min} \leq \rho \leq 1 \quad (3.11)$$

Ako se primijeni Lagrangeova funkcija (poglavlje 2.2) na SIMP metodu optimiranja, iz prethodnih izraza (3.8), (3.9), (3.10) i (3.11) dobiva se:

$$L = l(\mathbf{v}) - \mu \{a_B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v})\} + \lambda_1 \left(\int_{\Omega} \rho(\mathbf{X}) d\Omega - V_0 \right) + \lambda_2(\mathbf{X}) \int_{\Omega} (\rho(\mathbf{X}) - 1) d\Omega + \lambda_3(\mathbf{X}) \int_{\Omega} (\rho_{min} - \rho(\mathbf{X})) d\Omega \quad (3.12)$$

μ - Lagrangeov multiplikator za jednakosna ograničenja ravnoteže,

\mathbf{u} - polje pomaka

\mathbf{v} – polje virtualnih pomaka

λ - Lagrangeov multiplikator za ne-jednakosna ograničenja uz ograničenje volumena (λ_1) i

Lagrangeovi multiplikatori uz ograničenja graničnih vrijednosti gustoće (λ_2 i λ_3).

Prvi član jednadžbe (3.12) predstavlja funkciju cilja odnosno minimum virtualnog rada vanjskih sila (3.8). Drugi član u jednadžbi (3.12) odnosi se na ograničenje ravnoteže (3.9), treći član (3.12) je ograničenje volumena (3.11), dok se zadnja dva člana jednadžbe (3.12) odnose na granične vrijednosti gustoće ρ .

Varijable pri topološkom optimiranju SIMP metodom su karakteristike materijala svakog konačnog elementa (gustoća materijala elemenata - $\rho(\mathbf{X})$, odnosno krutost materijala).

3.1.1 Osjetljivost procesa

Analiza osjetljivosti opisana je u poglavlju 2.7, gdje se definira osjetljivost kao promjena funkcije cilja (podatljivost) po promjeni neke pojedinačne varijable. U slučaju SIMP topološke metode optimiranja, varijable za koje se računa osjetljivost su gustoća pojedinih elemenata. Kako varijabli optimiranja (gustoće pojedinih elemenata) ima jako mnogo (Large scale problem), a potrebno je odrediti derivacije po svim varijablama optimiranja, osjetljivost se i teško računa.

3.1.2 Usklađivanje mreže i postojanje rješenja

Točnost optimiranja SIMP metodom ovisi o diskretizaciji konačnim elementima (zbog $\rho(\mathbf{X})$), a metoda konačnih elemenata ima veću točnost povećanjem broja konačnih elemenata (vidi poglavlje 2.6.1). Posljedica povećanja broja konačnih elemenata je povećanje broja varijabli optimiranja oblika. Povećanje broja konačnih elemenata pri SIMP topološkom optimiranju može dovesti do strukture sa mnoštvom tankih pojaseva materijala. To uzrokuje vrlo tanku mrežastu strukturu, što nije cilj optimiranja. Stoga je potrebno uvesti ograničenja koja će spriječiti pojavu beskonačno tankih pojasa strukture. Nepovoljna posljedica povećanja broja konačnih elemenata je povećanje broja varijabli optimiranja oblika.

3.1.2.1 Kontrola opsega

Jedno od ograničenja koje se može uvesti kako bi se izbjegla tanka mrežasta struktura je kontrola opsega.

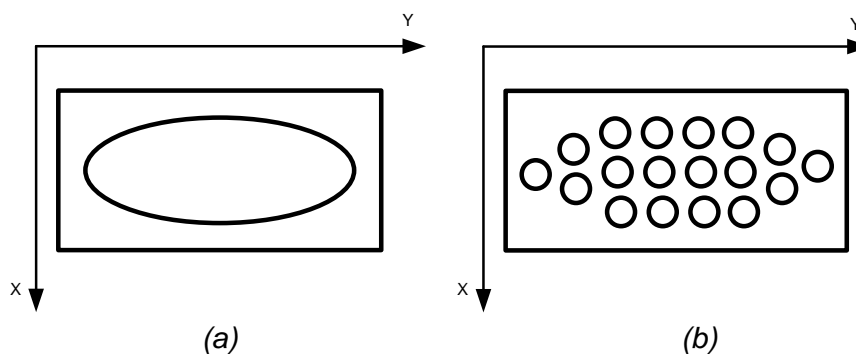
Kontrola opsega može se definirati kao suma duljina odnosno površina vanjskih i unutarnjih rubova i kontura. Kontrola opsega može se koristiti pri ograničenju broja rupa u promatranoj domeni. Ovu karakteristiku moguće je primijeniti i u 0-1 i u SIMP metodi topološkog optimiranja za 2D i 3D probleme. Ograničenje kontrole opsega u formi gornje granice totalne varijacije gustoće definiramo kao (3.13):

$$TV(\rho) = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla\rho\| dX \leq P, \quad (3.13)$$

$\nabla\rho$ - je vrijednost koja govori da li je funkcija za trenutnu varijablu X na rubu. Tamo gdje je $\nabla\rho$ velik pojavljuju se nagle promjene iz „ima materijala“ u „nema materijala“.

Modul $\|\nabla\rho\|$ uzima se jer je svejedno da li se radi o padu ili porastu funkcije (potrebno je samo ustanoviti da li je rub ili nije).

Jednadžba (3.13) integrira se da bi se zbrojile vrijednosti svih $\nabla\rho$, te na taj način dobio podatak o duljini granica između praznina i materijala.



Slika 15 Prikaz strukture sa jednom rupom (a) i sa velikim brojem rupa (b) u domeni

Slika 15 a prikazuje područje koje ima mali broj prijelaza (rubova), te u tom dijelu $\int \|\nabla \rho\|$ ima manju vrijednost, dok Slika 15 b ima puno prijelaza iz ima materijala u nema materijala te je vrijednost varijable $\int \|\nabla \rho\|$ veća.

Za dobru diskretizaciju gustoće konačnim elementima ograničenje u 2D se može zapisati:

$$P = \sum_{k=1}^K l_k \left(\sqrt{\rho_k^2 + \epsilon^2} - \epsilon \right) \quad (3.14)$$

l_k – duljina ruba elementa

ρ_k – promjena gustoće preko ruba l_k . ρ_k je razlika gustoća dva susjedna elementa.

K – broj elemenata

ϵ – parametar koji je mali i pozitivan, za $\epsilon = 0$, izraz postaje točno $TV(\rho)$ od elementa pozitivnih ograničenja.

Jednadžba (3.14) poprima veću vrijednost što se broj skokova ρ_k povećava. Ako između pojedinih elemenata nema promjene gustoće ρ_k , vrijednost P jednaka je nuli, a ako između pojedinih elemenata postoje promjene gustoće, odnosno ρ_k poprima neku vrijednost, P je pozitivan broj.

3.1.2.2 Metoda ograničavanja gradijenta

Tanku mrežastu strukturu kao ishod optimiranja topologije moguće je izbjeći i ograničenjem gradijenta gustoće. Ako domena ima jako gustu podjelu odnosno puno čvorova u kojima je zadana gustoća ρ , gradijent gustoće imat će velike vrijednosti na prijelazima između $\rho = 0$ i $\rho = 1$.

Moguće je uvesti ograničenje da velike promjene gradijenta u poljima domene ne smiju biti blizu jedna drugoj, čime se izbjegava pojava tanke mrežaste strukture.

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right| \leq G \quad i = 1, 2, (3) \quad (3.15)$$

Jednadžba (3.15) predstavlja ograničenje brzine promjene gustoće, čime se može odrediti prostor između domena sa materijalom i bez materijala. Problem kod ove formulacije je uvođenje puno ograničenja.

Može se uvesti i da razmak promjena gustoće bude dovoljno velik, čime se izbjegava beskonačno tanka nit.

Postoje strategije pretraživanja gdje se nalaze točke sa velikim promjenama u gustoći.

Druga metoda limitiranja vrlo tankih struktura je „globalno gradijentno ograničenje“, gdje se uvodi ograničenje:

$$\|\rho\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} (\rho^2 + \|\nabla\rho\|^2) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq M,$$

Druge metode limitiranja pojave tanke mrežaste strukture temelje se na filtriranju promjene gustoće u domeni primjenom različitih numeričkih filtara. Metode limitiranja moguće je promatrati kao sita koja propuštaju velike promjene gustoće, a zadržavaju blaže promjene. Numerički filtri nisu u fokusu ovog rada, te ih se neće detaljnije opisivati.

4. Level set metoda

Problem optimiranja topologije oblika je složen jer istovremeno rješava dva spregnuta polja problema:

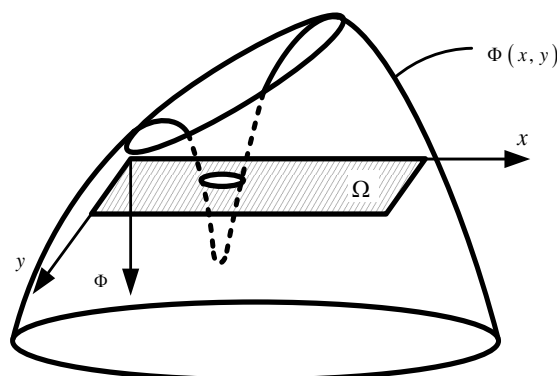
- polje pomaka
- geometriju (oblik) domene odnosno distribuciju materijala

Kako je ranije istaknuto, pri optimiranju je moguće definirati tri kategorije: definiranje dimenzija, definiranje oblika i definiranje topologije.

Klasično rješavanje podrazumijevalo je posebno definiranje oblika i topologije, međutim pojavom level set metode ove tri kategorije integrirale su se u jednu metodu rješavanja.

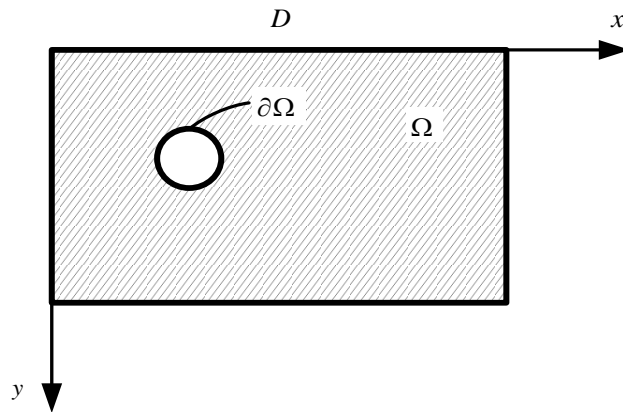
Ako se govori o topološkom optimiranju, zadatak je distribuirati određenu količinu materijala tako da se optimira odziv (statička nosivost ili dinamički odziv po nekom spektru).

Level set je implicitna funkcija koja opisuje geometriju. Level set funkcija nalazi se u $n+1$ dimenziji u odnosu na geometriju koju opisuje, te njene izo-linije definiraju geometriju. Ovim svojstvom omogućeno je da level set funkcija opisuje i topološke promjene geometrije pri optimiranju (može opisati promjenu kao što je stvaranje novih rupa u domeni), a pri tome nije potrebna nova parametrizacija geometrije. Ovo svojstvo je veoma bitno jer se u suprotnom mijenja broj varijabli optimiranja i njihova struktura sa promjenom topologije.



Slika 16 Opća implicitna funkcija Φ

Slika 16 prikazuje funkciju Φ (level set funkciju) za 2D problem koja sječe pravokutnu domenu D . Ako je pravokutna domena D na x - y ravnini, tada presjek funkcije Φ i pravokutne domene D čini novu domenu $\Omega \in D$ sa otvorima na zadanoj pravokutnoj domeni D (Slika 17). Nulta izo-linija level set funkcije $\Phi(x, y) = 0$ daje oblik konture $\partial\Omega$ u x - y ravnini.



Slika 17 Prodor level set funkcijom Φ u pravokutnu domenu D

Parametrizacija prostornog oblika funkcije $\Phi(x)$ daje parametarski oblik funkcije po varijablama oblika \mathbf{X} . Ovdje x predstavlja varijable prostora, a \mathbf{X} varijable oblika koje mogu biti oblik, topologija, varijable stanja...

Ovim postupkom uočava se da je funkcija Φ promijenila topologiju pravokutnika (dodala rupu). Promjenom oblika ove funkcije može se promijeniti oblik, veličina i broj rupa, kao i oblik i topologija cijelog modela. Promjena oblika numerički se razmatra kao dinamički proces, te ovisi i o pseudo-vremenu t .

U pravokutnoj domeni D postoje sljedeća stanja:

- stanje „ima materijala“ (unutar) koji se definira kao $\Phi(x, t) < 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \partial\Omega$
- stanje „nema materijala“ (izvan) koji se definira kao $\Phi(x, t) > 0 \quad \forall x \in D \setminus \Omega$ (4.1)
- granica $\Phi(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \cap D$,

gdje su:

Ω - područje sa materijalom

$\partial\Omega$ - granica područja Ω

D – nepromjenjiva domena unutar koje se definira oblik i topologija promatranog područja Ω .

Dakle definira se funkcija Φ u 3D, a oblik koji se želi dobiti je u 2D, odnosno u $n-1$ dimenziji. U trenutku t funkcija točaka izo linije Φ je:

$$\Phi(x, t) = 0 \quad (4.2)$$

Izraz (4.2) vrijedi za točke izo linije, ali se kasnije proširuje metodama „extension velocity“ (poglavlje 4.4) na sve točke domene. Sve jednadžbe izvedene iz izraza (4.2) (kao na primjer Hamilton-Jacobieva jednadžba (4.5)) vrijede samo za rub.

Ako se svim točkama level set funkcije zada brzina $v = \frac{dx}{dt}$, dobit će se promjena level set funkcije u vremenu (4.3). Ova formulacija zapisuje se Hamilton-Jacobievom parcijalnom diferencijalnom jednačinom [44] te diferenciranjem (4.2) ona glasi:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0 \quad (4.3)$$

Za potpunu definiciju jednačine (4.3) mora se definirati gradijent funkcije Φ , koji za prostor iznosi:

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right),$$

Smjer povećanja funkcije ϕ u zadanoj točki x_0 , odnosno normala je:

$$\vec{N} = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \quad (4.4)$$

Hamilton-Jacobieva funkcija upravlja promjenom plohe u $n+1$ dimenziji:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot v_n(\mathbf{x}, \Phi), \quad (4.5)$$

gdje je v_n zadana normalna komponenta brzine v promjene level set funkcije u promatranoj točki konture [37]:

$$v_n = v \cdot \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{\nabla \Phi}{\sqrt{\nabla \Phi \nabla \Phi}}, \quad (4.6)$$

v - će se odabrati razmatranjem minimuma potencijalne energije ϕ (nametanje „vanjskog“ polja brzina).

4.1 Rješavanje Hamilton-Jacobieve jednadžbe metodom konačnih razlika (klasični Upwinding postupak)

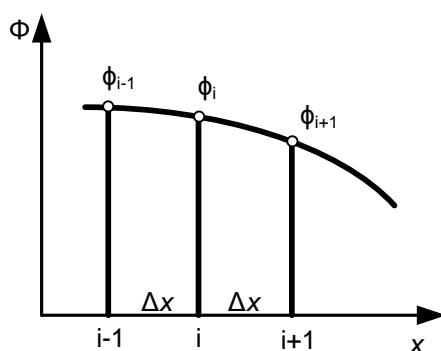
Ako se promatra 1D problem tada je derivacija funkcije ϕ metodom desne konačne razlike:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (4.7)$$

Odnosno lijeve konačne razlike:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}, \quad (4.8)$$

ovisno o tome da li se uzima lijevi ili desni segment funkcije. Kada se vrši numeričko deriviranje, prethodno je potrebno uočiti u kojem se smjeru kreće funkcija ϕ , da bi izračun derivacije bio točniji. Brzina v_n , koja se zadaje svim točkama presjeka funkcije ϕ sa x-y ravninom, pomiče funkciju ϕ u vremenskom intervalu Δt u novi položaj. Ako je pomak funkcije ϕ u desno, koristi se lijeva konačna razlika (4.8), a kad je pomak u lijevo, koristi se desna konačna razlika (4.7) [37]. Različiti izračuni za lijevi i desni pomak funkcije uzimaju se zbog numeričke stabilnosti Slika 18.



Slika 18 Prikaz numeričkog diferenciranja konačnim razlikama

Ako se funkcija ϕ u vremenu pomiče u lijevu stranu, prethodni podatak je sa desne strane (ϕ_{i+1}), te se taj podatak i koristi za proračun derivacije, jer će dati točniji rezultat (jednadžba (4.7)).

Analogno se za pomak funkcije ϕ u desno uzima vrijednost ϕ_{i-1} (jednadžba (4.8)) [37].

Centralna konačna razlika (4.9):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} \quad (4.9)$$

se ne koristi zbog također loše stabilnosti.

Uvođenjem veličine Δx izbjegava se dijeljenje sa nulom u jednadžbi normale (4.4).

Analogno ovim jednadžbama definiraju se jednadžbe za prostor, pa je zakrivljenost u prostoru:

$$\kappa = \nabla \cdot \vec{N} = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial n_3}{\partial z} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \quad (4.10)$$

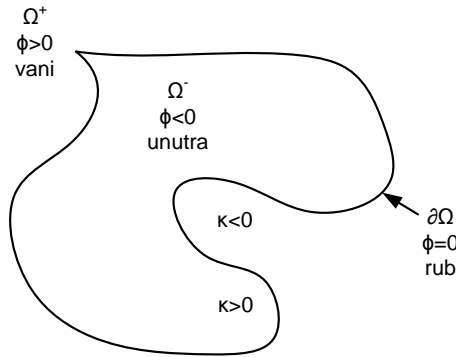
Ako je $\kappa < 0$, radi se o konkavnom području. Za $\kappa > 0$ područje je konveksno, a ako je $\kappa = 0$ radi se o ravnini. Zakrivljenost se može izračunati kao:

$$\kappa = \frac{(\phi_x^2 \phi_{yy} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_y^2 \phi_{xx} + \phi_x^2 \phi_{zz} - 2\phi_x \phi_z \phi_{xz} + \phi_z^2 \phi_{xx} + \phi_y^2 \phi_{zz} - 2\phi_y \phi_z \phi_{yz} + \phi_z^2 \phi_{yy})}{|\Delta\phi|^3} \quad (4.11)$$

Stoga je potrebno definirati i drugu derivaciju funkcije ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (4.12)$$

Zakrivljenost κ bi trebala biti u granicama $-\frac{1}{\Delta x} \leq \kappa \leq \frac{1}{\Delta x}$. Ako je κ izvan ovih granica uzima se vrijednost $-\frac{1}{\Delta x}$ ili $\frac{1}{\Delta x}$ ovisno koja je bliža izračunatoj. Zakrivljenost se treba uzimati sa oprezom kada je funkcija ϕ nepravilna.



Slika 19 Prikaz konveksnog ($\kappa > 0$) i konkavnog ($\kappa < 0$) područja te unutarnjeg i vanjskog područja

Konačnim razlikama (4.8) može se izračunati level set funkcija $\nabla\Phi$. Uvrštenjem tako izračunate funkcije $\nabla\Phi$ u Hamilton-Jacobievu jednadžbu (4.3) dobiva se izraz (4.13):

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^n}{\Delta t} + \nabla\phi_i^n \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^n = 0 \quad (4.13)$$

pri čemu je promjena funkcije ϕ : $\phi_i^{n+1} = \phi(t_i^{n+1})$, a $t_i^{n+1} = t^n + \Delta t$.

Ovakav način rješavanja Hamilton-Jacobieve jednadžbe zove se Upwinding postupak. Numerička stabilnost Upwinding postupka ovisi o koraku konačnih razlika (Courant-Friedreich-Lewy (CFL) uvjet stabilnosti). Potrebno je uzeti takav vremenski korak Δt koji će jamčiti konvergenciju diferencijalnih jednadžbi. CFL uvjet stabilnosti kaže da numerička promjena brzine $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ mora biti barem jednako brza kao fizička promjena brzine točkaka $|v|$ – brzina promjene level set plohe (4.14):

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max\{|v|\}} \rightarrow \Delta t \left(\frac{\max\{|v|\}}{\Delta x}\right) = \alpha \quad (4.14)$$

CFL parametar α je u granicama: $0 < \alpha < 1$.

4.1.1 Težinske funkcije i definiranje područja

Iz ne-jednadžbi (4.1) definira se karakteristika unutarnje funkcije χ^- u unutarnjem području Ω i χ^+ u vanjskom području $D \setminus \Omega$:

$$\chi^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \phi(\mathbf{x}) \leq 0, \\ 0 & \text{ako je } \phi(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}$$

$$\chi^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } \phi(\mathbf{x}) \leq 0, \\ 1 & \text{ako je } \phi(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}$$

Odnosno definira se težinska funkcija H koja govori o tome da li je promatrana točka unutar ili izvan područja:

$$H(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \phi(\mathbf{x}) \leq 0, \\ 0 & \text{ako je } \phi(\mathbf{x}) > 0, \end{cases}$$

gdje je $\chi^+(\mathbf{x}) = 1 - H(\phi(\mathbf{x}))$ a $\chi^-(\mathbf{x}) = H(\phi(\mathbf{x}))$. Izvan područja definiranosti težinska funkcija je jednaka nuli, a unutar područja jednaka je jedinici.

Volumni integral neke funkcije f preko cijelog unutarnjeg područja Ω definiran je kao:

$$\int_D f(\mathbf{x}) \chi^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.15)$$

Integral je nad cijelim područjem D , ali funkcija χ^- ne uzima u obzir područje $D \setminus \Omega$. U ovu definiciju može se dodati 1D težinska funkcija, te izraz (4.15) zapisati kao:

$$\int_D f(\mathbf{x}) H(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (4.16)$$

što predstavlja integral po unutarnjem području, a integral po vanjskom području je:

$$\int_D f(\mathbf{x}) (1 - H(\phi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} \quad (4.17)$$

Po definiciji usmjerena derivacija težinske funkcije H je Diracova delta funkcija [37] iz lančanog pravila (2.73) i normale (4.4):

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) = \nabla H(\phi(\mathbf{x})) \cdot \vec{N} = H'(\phi(\mathbf{x})) \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi(\mathbf{x})}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} = \frac{\delta(\phi(\mathbf{x}))}{H'(\phi)} \cdot |\nabla \phi(\mathbf{x})|, \quad (4.18)$$

gdje je Diracova funkcija u 1D: $\delta(\phi) = H'(\phi)$, a \mathbf{x} više-dimenzijska varijabla. Funkcija $\hat{\delta}(\mathbf{x})$ je skalarna veličina koja ima iznos samo na granici $\partial\Omega$. Vektor normale \vec{N} uzima se jer skalarni produkt vektora gradijenta težinske funkcije H i normale N iznosi nula u cijelom području osim na granici, i umnožak je skalarna veličina. Pomicanjem granice Diracova funkcija ima iznos samo u smjeru normale, dok u tangencijalnom smjeru njen iznos treba biti jednak nuli.

Površinski integral funkcije f je u cijelom području D . Funkcija $\hat{\delta}$ ima iznos samo na granici $\partial\Omega$, a u ostalim dijelovima domene iznosi 0 [37]:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x) \cdot \delta(x) \cdot dx = \int_{\mathcal{D}} f(x) \delta(\phi(x)) \cdot |\nabla \phi(x)| dx \quad (4.19)$$

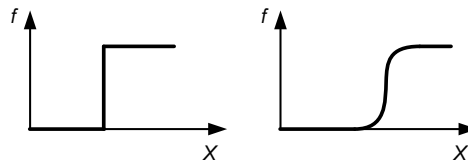
Obično se volumni integral rješava podjelom unutarnjeg područja Ω , a integral po granicama podjelom granice $\partial\Omega$ na manje dijelove.

Ako se promatra površinski integral (4.19), potrebno je izračunati $\delta(\phi)$. Budući da je $\delta(\phi) = 0$ gotovo svugdje, osim na granici $\partial\Omega$ (za $\phi = 0$), bilo koja standardna numerička aproksimacija temeljena na uzorkovanju neće dati dobru aproksimaciju integrala. Zato se koristi aproksimacija $\delta(\phi)$ sa razlivenosti funkcije prvog reda. Prvo se definira težinska funkcija razlivenosti funkcije [37]:

$$H(\phi) = \begin{cases} 1 & \phi < -\epsilon_\sigma, \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2\epsilon_\sigma} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\epsilon_\sigma}\right) & -\epsilon_\sigma \leq \phi \leq \epsilon_\sigma, \\ 0 & \epsilon_\sigma < \phi \end{cases} \quad (4.20)$$

gdje je ϵ_σ parametar koji određuje širinu područja numeričke razlivenosti. Obično je $\epsilon_\sigma = 1.5 \cdot \Delta x$, gdje Δx predstavlja promjenu varijable x .

Slika 20 prikazuje razlivenu funkciju:



Slika 20 Prikaz razlivenosti funkcije

Sada se definira i delta funkcija kao derivacija težinske funkcije:

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\epsilon_\sigma, \\ \frac{1}{2\epsilon_\sigma} + \frac{1}{2\epsilon_\sigma} \cos\left(\frac{\pi\phi}{\epsilon_\sigma}\right) & -\epsilon_\sigma \leq \phi \leq \epsilon_\sigma, \\ 0 & \epsilon_\sigma < \phi, \end{cases} \quad (4.21)$$

Konačne razlike koje su navedene (4.7), (4.8), (4.9) i vremenska shema koračanja (npr. Eulerova), koriste se za rješavanje Hamilton-Jacobieve diferencijalne jednadžbe (4.3). Ovakav postupak rješavanja naziva se klasični upwinding postupak (4.13). Postupak zahtjeva odgovarajući izbor upwinding sheme, brzine promjene i reinicijalizaciju algoritma, što može ograničiti korištenje level set metode pri minimiziranju potencijala (poglavlje 0).

Optimiranjem se minimizira podatljivost uz ograničenja volumena te se primjenjuje osjetljivost funkcije kako bi riješili optimizacijski problem. Model je Hamilton – Jacobieva jednadžba sa analizom osjetljivosti oblika. H-J jednadžba klasično se rješava metodom konačnih diferencija (Upwinding metodom).

Rješavanjem jednadžbe (4.5) u Eulerovoj podjeli prostora (Slika 22) koristeći konačne diferencije (konvencionalna level set metoda) dolazi do poteškoća:

- ograničenje vremenskog koraka pri vremenskoj integraciji eksplicitne jednadžbe (CFL uvjet),
- reinicijalizacija mreže konačnih elemenata za novu geometriju i distribuciju materijala,
- potreba za proširenjem brzine („velocity extension“) na cijelu domenu D ili u uskom rasponu,
- potreba guste mreže konačnih elemenata za postizanje bolje točnosti, što ima za posljedicu veliki broj točaka opisa u diskretnom problemu,
- nemogućnost otvaranja novih rupa pri optimiranju.

Implicitno rješavanje temelji se na algoritmu koji derivira funkcije osjetljivosti u parametarskom prostoru.

Kod upwinding sheme kod Eulerovog pristupa transportna jednadžba (4.5) rješava se metodom konačnih elemenata (poglavlje 2.6.1) na fiksnoj mreži. Mreža konačnih elemenata mora biti jako gusta kako bi se parcijalne derivacije dobile dovoljno točno, što ima za posljedicu povećavanja numeričke greške.

Alternativni pristup Upwinding postupka je parametrizacija funkcije ϕ , gdje se umjesto vremenske sheme koračanja na diskretnoj mreži točaka (upwinding sheme) uvodi normalna komponenta brzine promjene level set funkcije v_n , koja je navedena u poglavlju 4.4 jednadžbama (4.41) i (4.42) [47]. Metodom proširenog polja brzina (extension velocity) određuje se približno raspodjela brzina u cijeloj domeni iz poznate (dobivene) raspodjele brzina uz granice domene.

4.2 Rješavanje Hamilton-Jacobieve jednadžbe primjenom parametrizacije level set funkcije Φ

Ukoliko se provede parametrizacija implicitnog modela, Hamilton-Jacobieva parcijalna diferencijalna jednadžba će postati sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, koje olakšavaju matematički izračun.

Parametrizaciju funkcije Φ moguće je izvesti svim interpolacijskim ili aproksimacijskim metodama, kao što su Nurbs, Bezier, B-spline i druge plohe koje opisuju geometriju.

RBF aproksimacija daje invertibilnu matricu uslijed čega je osigurana konvergencija. Još jedna prednost korištenja RBF metode je mogućnost stvaranja novih rupa pri procesu optimiranja (eng. nucleation), što nije bilo moguće korištenjem upwinding postupka [40].

Pri topološkom optimiranju level set metodom, pomicanje granice konture u smjeru najbržeg spusta je ekvivalentno promjeni implicitne funkcije $\Phi(x, t)$ rješavanjem Hamilton-Jacobieve diferencijalne jednadžbe (4.5).

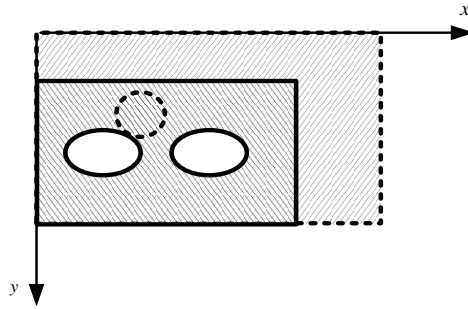
Inicijalnu parametrizaciju funkcije Φ moguće je provesti RBF metodom sa polinomnim dodatkom. Bit RBF interpolacije sa polinomnim dodatkom leži u određivanju koeficijenata RBF-a i koeficijenata polinoma. Ovi koeficijenti se sada nazivaju ekspanzijski koeficijenti, jer će upravo oni govoriti o promjeni oblika level set funkcije.

Dva su pristupa rješavanja level set funkcije:

- Konačne diferencije – u Eulerovoj mreži rade se konačne razlike prema (4.7), te se dobiju algebarske jednadžbe na bazi vrijednosti Φ čvorova (mreža čvorova – diskretni pristup). Problem ovakvog pristupa je da se moraju koristiti interpolacijske funkcije oblika niskog reda, kako bi se izbjegle oscilacije. Zahtjeva se jako gusta mreža, odnosno mali vremenski korak, te je i računalno zahtjevniji pristup. Zbog toga se ide na pristup bez konačnih diferencija.
- Parametarsko optimiranje funkcije, koja će se opisati detaljnije u poglavlju 4.3

Polje problema

Ako se promatra oblik koji je dobiven putem izo-linije level set plohe (Slika 17), pojavit će se pitanje podjele promatranog polja problema. Tijek optimiranja može dati bitno različite oblike (Slika 21).

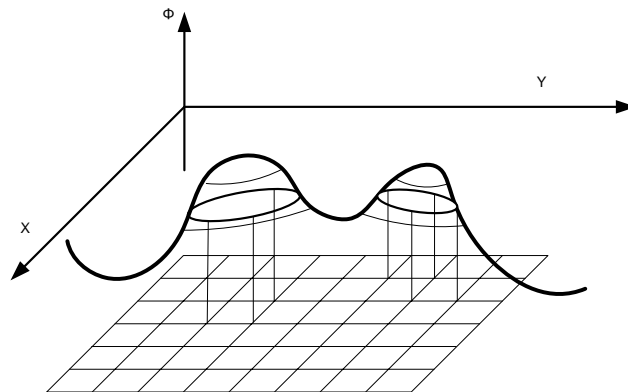


Slika 21 Proces optimiranja. Isprekidana linija - početno stanje, puna linija - stanje u procesu optimiranja

Kako se kontinuum sastoji od velikog broja čestica, za opis gibanja kontinuuma potreban je veliki broj jednačbi oblika $X_i = X_i(t)$. Stoga je potrebno označiti svaku česticu. Uvođenjem materijalnih koordinata pri čemu je svaka čestica označena trima koordinatama koje zauzima u prostoru (x_1, x_2, x_3) u nekom trenutku (t) dobivaju se prostorne koordinate: $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$. Koordinate čestica nazivaju se materijalne koordinate $(x_i = x_i(t_0))$.

Problem se može razmatrati Eulerovim ili Lagrangeovim opisom gibanja. Kod prostornog (Eulerovog) pristupa, formira se fiksna Eulerova mreža u promatranoj domeni. Prostorni pristup opisuje promjene fizikalnih veličina kako ih vidi nepomični promatrač vezan za neki globalni koordinatni sustav. Sada je izraz za brzinu $v = v(X_1, X_2, X_3, t)$.

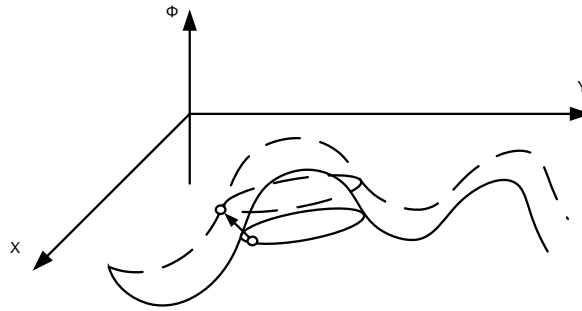
Za svaku točku Eulerove mreže može se dobiti vrijednost level set funkcije. Međutim, vrijednosti funkcije mogu se dobiti samo za točke iznad čvorova Eulerove mreže (Slika 22):



Slika 22 Prikaz level set funkcije nad Eulerovom mrežom

Ovakva raspodjela točaka pogodna je za rješavanje problema u mehanici fluida.

Ako se funkciju promatra preko materijalnog (Lagrangeovog) pristupa na polje problema, gleda se pomak čvora level set funkcije u početnom i sljedećem koraku $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3)$, (Slika 23):



Slika 23 Promjena level set funkcije u vremenu Lagrangeovim pogledom na polje problema

Lagrangeov pristup opisuje promjene kako ih vidi promatrač vezan za česticu. Ovakvim pristupom može se znatno smanjiti broj čvorova. Materijalni opis gibanja uglavnom se koristi u mehanici čvrstih deformabilnih tijela. Koje polje će se odabrati ovisi o odabiru metoda optimiranja područja.

Deriviranjem pomaka čestice dobiva se brzina čestice. Iz definicije pomaka (2.4) kao funkcije materijalnih koordinata dobiva se:

$$X_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad \Rightarrow \quad v_i = \frac{du_i}{dt}$$

Kod Eulerovog pristupa sve su čestice, pa tako i brzina, funkcije prostornih koordinata:

$$v_i = v_i(X_1, X_2, X_3, t)$$

Ako je fizikalna veličina zadana preko prostornih koordinata (Eulerov pristup), tada se koristi lančano pravilo koje daje brzinu kao derivaciju pomaka preko dva člana:

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X_i} \cdot \frac{dX_i}{dt}$$

$\partial u / \partial t$ – lokalni dio derivacije

$\partial u / \partial X_i \cdot dX_i / dt$ – konvektivni dio derivacije

Sada se uočava da je level set funkcija povezana sa Eulerovim zapisom, jer u svojoj jednadžbi ima konvektivni član.

Pri promjeni level set funkcije ne dobivaju se čvorovi točno na presjeku level set funkcije sa ravninom x-y, što dovodi do zahtjeva jako guste podjele te je numerički prezahtjevno.

4.3 Jednadžba gibanja level set funkcije i proces optimiranja

Parametarskim optimiranjem level set funkcije vrši se separacija prostora i vremena. Prostorni aspekt Φ se interpolira (RBF ili B-plohama), a nakon toga se promjene funkcije rješavaju vremenskim koračnim shemama u kvazi vremenskoj domeni. Ova metoda optimira parametre (vrijednosti u čvorovima) kojim se opisuje level set ploha.

Hamilton-Jacobijeva parcijalna diferencijalna jednačba (4.5) počinje od nekog poznatog oblika level set plohe $\Phi(\mathbf{x}, t)$ uz neku danu brzinu v_n (4.6):

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_n |\nabla \Phi| = 0, \quad \Phi(\mathbf{x}, 0) = \Phi_0(\mathbf{x}),$$

Kako je Hamilton – Jacobieva jednačba (4.3) vremenski ovisna u implicitnoj jednačbi RBF ili B-plohe level set funkcije $\Phi(\mathbf{x}, t)$ pretpostavit će se da je položaj čvorova u prostoru nepromjenjiv a prostor i vrijeme odvojeni parametri, odnosno izvršit će se separacija prostora i vremena.

Implicitna funkcija Φ je vremenski ovisna uslijed ekspanzijskog vektora koeficijenata RBF interpolacije (\mathbf{a}_0 to su vrijednosti u čvorovima RBF) ili čvorova B-ploha (P_0), koji ovise samo o vremenu. Inicijalno početno rješenje dobiva se RBF metodom, a kasnija rješenja se određuju rješavanjem parametriziranog oblika RBF Hamilton-Jacobieve jednačbe.

Sa ovom pretpostavkom RBF (2.61), odnosno B-spline (2.19) za n RBF funkcije ili kontrolnih čvorova B-plohe interpolacija implicitne funkcije postaje:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_i^n \phi_i \cdot \mathbf{a}_{0i} = \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_0(t), \text{ odnosno } \Phi = \sum_i^n \phi_i \cdot P_{0i} \\ &= \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}) \cdot P_0(t), \end{aligned} \quad (4.22)$$

U svakom koraku ciklusa optimiranja poštuje se H-J diferencijalna jednačba, a mijenja se vanjski zadani vektor brzine $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}$ kojeg se određuje iz uvjeta minimuma funkcije cilja, kako bi H-J jednačba vršila optimiranje oblika domene. Vektor brzine prikazuje promjenu granice u kvazi-vremenu na način da se mijenja oblik prema optimumu, što se može svesti na metodu najbržeg spusta, pri čemu je brzina \mathbf{v} vektor smjera promjene.

Ovako definiranim optimiranjem mijenja se osim dimenzije i topologija polja problema. Promjena oblika funkcije čiji presjek opisuje polje problema može dati i drugu topologiju polja problema. Sada se topologija javlja kao posljedica optimiranja funkcije cilja, a ne kao zadana funkcija.

Varijable optimiranja \mathbf{X} su vrijednosti u čvorovima RBF-a („iznad“ promatrane domene), odnosno ako se optimira 2D polje problema (x,y) tada su varijable optimiranja „iznad“ ove domene (z-vrijednosti u RBF ili B-spline čvorovima).

Za modeliranje level set ploha često se koriste i RBF funkcije, NURBS-funkcije, B-spline i druge aproksimacijske funkcije. Aproksimacija RBF-om izvodi se jednačbom (2.61), gdje je umjesto aproksimiranog pomaka $u(x)$ sada naša level set ploha $\Phi(\mathbf{x}, t)$, dok su fiksni čvorovi RBF-a \tilde{U}_s sada koeficijenti $\mathbf{a}_0(t)$ ovisni o vremenu.

Funkcija Φ ovisi samo o prostoru. Razdvajanjem vremenskih i prostorno ovisnih varijabli, iz Hamilton – Jacobieve parcijalne diferencijalne jednačbe (4.3) i jednačbe RBF interpolacije (4.22), dobiva se sustav raspregnutih običnih diferencijalnih jednačbi, jer su sada koeficijenti $\mathbf{a}_0(t)$

iznosi u pojedinim čvorovima i neovisni su jedni od drugih [47] i [40]. Dobivene jednadžbe vrijede samo za točke konture, uslijed jednadžbe (4.2):

$$\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{a}_0(t)}{dt} + v_n |(\nabla \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}))^T \mathbf{a}_0(t)| = 0 \quad (4.23)$$

gdje je:

$$\nabla \boldsymbol{\phi} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial z} \cdot \mathbf{k},$$

$$|(\nabla \boldsymbol{\phi})^T \mathbf{a}_0| = \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x} \mathbf{a}_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial y} \mathbf{a}_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial z} \mathbf{a}_0 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

Za gradijentni postupak potrebno je početno rješenje problema, a ukoliko se optimiranje vrši genetskim algoritmima, generirali bi plohu slučajno.

Funkcija $\nabla \boldsymbol{\phi}$ RBF interpolacijom uz polinomne članove pomoću RBF (jednadžbe (2.48), (2.49), (2.50), (2.51), (2.52)) i polinomnih funkcija (dobivenih iz Pascalovog trokuta – Slika 13) zapisat će se kao [47]:

$$\boldsymbol{\phi} = [R_1(x) \quad \cdots \quad R_n(x) \quad 1 \quad x \quad y \quad z]^T \in R^{(n+4) \times 1}, \quad (4.25)$$

odnosno derivirano:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x} = \left[\frac{\partial R_1}{\partial x} \quad \cdots \quad \frac{\partial R_n}{\partial x} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right]^T \in R^{(n+4) \times 1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial y} = \left[\frac{\partial R_1}{\partial y} \quad \cdots \quad \frac{\partial R_n}{\partial y} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right]^T \in R^{(n+4) \times 1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial z} = \left[\frac{\partial R_1}{\partial z} \quad \cdots \quad \frac{\partial R_n}{\partial z} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right]^T \in R^{(n+4) \times 1}$$

Parcijalna derivacija po x-u multikvadratnog RBF (2.49) iznosi:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x} = 2q \cdot r_i \cdot (r_i^2 + (\alpha_c \cdot d_c)^2)^{q-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.26)$$

Analogno se može izvesti za y i z - os.

Koeficijenti \mathbf{a}_0 daju shemu koračanja (kako se ploha mijenja u vremenu), i vezani su uz čvorove RBF-a.

Deriviraju li se dodatni uvjeti ortogonalnosti (2.57) dobivaju se izrazi (4.27):

$$\sum_{i=1}^n \dot{a}_{0i}(t) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \dot{a}_{0i}(t)x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \dot{a}_{0i}(t)y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \dot{a}_{0i}(t)z_i = 0 \quad (4.27)$$

Ako se formulira problem preko RBF funkcija, moguće je zabraniti nastajanje rupa, tako da se ne dopuštaju promjene koeficijenata RBF-a na onim čvorovima koji nisu na rubu. Drugim riječima samo rubni čvorovi su pušteni da se mijenjaju u vremenu, a ostali su zamrznuti. U tom se slučaju

samo vanjska kontura može mijenjati. Ako se oslobode svi koeficijenti a_0 da se mijenjaju tada algoritam sam mijenjajući funkciju Φ može dodavati, spajati ili popunjavati prazna mjesta u promatranoj domeni ovisno o procesu optimiranja. Također je moguće odabrati koeficijente a_0 nepromjenjivim na proizvoljnim zonama, te se na taj način može interpolirati oblik koji ima neku rupu kroz koju će proći na primjer vratilo ili slično.

Sada je parcijalna diferencijalna jednačba Hamilton – Jacobi (4.23) u prostornoj i vremenskoj domeni, uz rubne uvjete (4.27) i kolokacijsku metodu (aproksimacijska metoda uz zadovoljenje rubnih uvjeta i diferencijalne jednačbe u svim kolokacijskim čvorovima) svedena na sustav običnih diferencijalnih jednačbi i glasi [37]:

$$\mathbf{G} \frac{d\mathbf{a}_0}{dt} + \mathbf{B}(\mathbf{a}_0) = 0, \quad (4.28)$$

gdje je:

$$\mathbf{B}(\mathbf{a}_0) = \begin{bmatrix} v_n^e(\mathbf{x}_1) |(\nabla\phi^T(\mathbf{x}_1))\mathbf{a}_0| \\ \vdots \\ v_n^e(\mathbf{x}_n) |(\nabla\phi^T(\mathbf{x}_n))\mathbf{a}_0| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{(N+4) \times 1} \quad (4.29)$$

Kolokacijska matrica \mathbf{G} je invertibilna i izvedena je zbog ograničenja (4.27), a prikazana je u poglavlju 2.6.2.1. Diferencijalna jednačba (4.28) je rješiva i ne-singularna te ona daje koeficijente RBF-a ovisne o vremenu $a_0(t)$ (parametrizacija u prostoru).

v_n^e - označava normalnu komponentu brzine proširenu na čitavo područje D (extension velocity)

Rješavanjem ovog sustava raspregnutih običnih diferencijalnih jednačbi dobivaju se brzine i promjene vrijednosti svih čvorova pri optimiranju, što predstavlja micanje level set funkcije.

Koristeći Eulerovu metodu, aproksimativno rješenje Hamilton – Jacobie jednačbe (4.28) može se računati kao:

$$\mathbf{a}_0(t^{n+1}) = \mathbf{a}_0(t^n) - \tau \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{a}_0(t^n)), \quad (4.30)$$

gdje je τ veličina vremenskog koraka.

Ovim se definira promjena level set plohe, odnosno geometrija za neki dani v_n . Međutim, cilj je optimirati nekakvu konstrukciju obzirom na zadane kriterije (minimalna masa, uz zadržavanje nosivosti i čvrstoće), koje će se ugraditi u brzinu micanja level set plohe v_n .

4.4 Izvršnost i funkcija cilja level set plohe

Pri procesu optimiranja potrebno je definirati funkciju cilja, ograničenja i kriterije pri odlučivanju. Obično se za funkciju cilja uzima minimum potencijalne energije (minimum unutrašnje energije) (2.34). Fizikalni događaji koji se dešavaju u području nastalom od level set plohe rješavaju se numeričkim metodama opisanim u poglavlju 2.6.

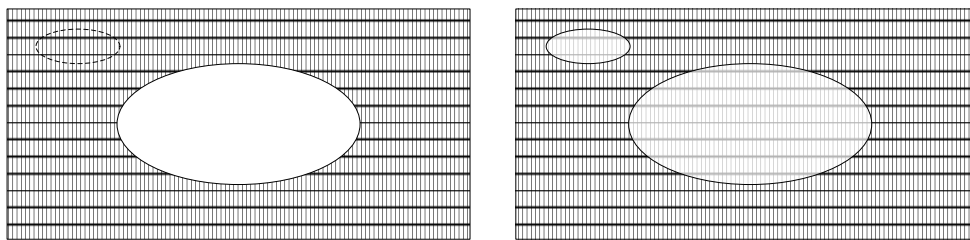
Promatrano područje (polje problema) potrebno je podijeliti na manja područja kako bi dobili što točniju aproksimaciju.

Kod rješavanja problema polja konačnim elementima pri promjeni oblika domene javlja se problem promjene mreže konačnih elemenata u sljedećoj iteraciji (Slika 21), uslijed čega se javlja potreba za ponovnim kreiranjem mreže konačnih elemenata (ponovna parametrizacija geometrije). Ponovno kreiranje mreže konačnih elemenata se može izbjeći korištenjem bezmrežnih metoda (RBF) ili postupkom zamjenskog materijala kako je opisano u poglavlju 2.6.1.1.

Prilikom definiranja problema optimiranja, problem je moguće formulirati kao:

- Minimum mase uz zadovoljenje ograničenja dopuštenog naprezanja (σ_{dop})
- Minimum podatljivosti (neotpornosti konstrukcije) uz zadovoljenje nekog zadanog volumena.

Jedna od metoda rješavanja polja problema je prethodno opisana SIMP metoda (poglavlje 3) koja mijenja gustoću materijala u ovisnosti o podacima koji se dobiju numeričkim metodama (pomaci i deformacije), te na taj način stvara optimalni oblik. Odnosno, na mjestima gdje su deformacije veće, gustoća materijala se povećava. Na mjestima gdje nema deformacije, materijal postupno nestaje (Slika 24).



Slika 24 Prikaz podjele područja na elemente (čvorovi unutar rupa su od mekšeg materijala)

Funkcija koja se minimizira je podatljivost, odnosno energija, i u jednadžbi (4.31) je označena sa $F(u)$:

$$J(\mathbf{u}, \Phi) = \int_{\mathcal{D}} F(\mathbf{u})H(\Phi)d\Omega \quad (4.31)$$

Ograničenja koja se zadaju (ograničenje volumena ili ograničenje naprezanja) potrebna su jer bi pri optimiranju domena sa materijalom rasla, iz razloga što je u tom slučaju podatljivost najmanja, odnosno krutost najveća. Odabrat će se ograničenje volumena $g(u)$ koje je integralna veličina, pa je zbog toga i pogodnija za proračun od ograničenja naprezanja čiji su izrazi složeniji.

Ograničenja pri optimiranju polja problema, opisanog level set funkcijom, zapisuju se kao:

$$G(\mathbf{u}, \Phi) = \int_{\mathcal{D}} g(\mathbf{u})H(\Phi)d\Omega = 0 \quad (4.32)$$

Principom minimuma potencijalne energije zadovoljava se uvjet ravnoteže (poglavlje 0). Funkcija Φ je trenutna level set funkcija, za čije se nul izo plohe dobiva kontura promatrane geometrije. Funkcija $H(\Phi)$ govori u kojem području se nalazi materijal za trenutnu promatranu geometriju, a koji dijelovi domene su prazni (bez materijala), što je i opisano u poglavlju 4.1.1.

Dakle funkcija cilja kod optimiranja level set plohe je minimum unutarnje potencijalne energije (2.34) uz zadovoljavanje uvjeta ravnoteže i volumena materijala koji je dodijeljen algoritmu na raspolaganje [47], [39]:

$$\text{Minimizirati } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \Phi) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})}_{F(\mathbf{u})=a(\mathbf{u}, \mathbf{v})=l(\mathbf{v})} H(\Phi)d\Omega \quad (4.33)$$

uz ograničenje volumena: $G(\Phi) = V(\Phi) - \zeta V_0$, odnosno

$$G(\Phi) = \int_{\mathcal{D}} H(\Phi)d\Omega - \zeta V_0, \quad (4.34)$$

ζ – je parametar koji osigurava dio volumena koji se želi ostaviti (koliko od početne domene ostaje materijala).

$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \Phi)$ - ukupni unutarnji virtualni rad (2.34).

$H(\Phi)$ – step funkcija koja govori o postojanju materijala u promatranom području (poglavlje 4.1.1).

Jednadžba stanja napisana je kao jednakost slabe dualne formulacije $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \Phi)$ i linearnog opterećenja $l(\mathbf{v}, \Phi)$ (4.33) i predstavlja ograničenje u level set metodi:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \Phi) = l(\mathbf{v}, \Phi)$$

Linearno opterećenje predstavlja rad vanjskog opterećenja (2.35) iz poglavlja 3 i sada se može zapisati kao:

$$l(\mathbf{v}, \Phi) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} \cdot H(\Phi)d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{v} \cdot \delta(\Phi)|\nabla\Phi|d\Omega \quad (4.35)$$

f_v – sile koje djeluju na tijelo (vidi poglavlje 3)

f_s – sile na granicama

\mathbf{u} – ravnotežno polje pomaka

\mathbf{v} – virtualno kinematsko dopustivo polje

$\delta(\Phi)$ – parcijalna derivacija težinske funkcije $H(\Phi)$, odnosno Diracova funkcije.

Ako se formira Lagrangeova funkcija, dobit će se jednačba (4.36):

$$L(\mathbf{u}, \Phi, \lambda) = J(\mathbf{u}, \Phi) + \lambda G(\Phi), \quad (4.36)$$

gdje je λ Lagrangeov množitelj, pomoću kojeg se osigurava dopustivi minimum.

Uvrštenjem jednačbi (4.33) i (4.34) u (4.36), dobiva se složena Lagrangeova funkcija kao i u poglavlju 3.1 – jednačba (3.12), ovisnu još i o level set funkciji Φ :

$$\min_{\Phi(x)}: \quad L(\mathbf{u}, \Phi, \lambda) = \frac{1}{2} \int_D (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))^T D\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) H(\Phi) d\Omega + \lambda [H(\Phi) d\Omega - \zeta V_0] \quad (4.37)$$

Ako se promotri jednačba (4.37), uočeno je da se radi o jednačbi potencijalne energije. Kako rubne sile djeluju samo na rubovima, deriviranjem step funkcije H dobiva se Diracova funkcija. Ovakva formulacija (4.37) ekvivalentna je jednačbi virtualnog rada (bilinearnoj jednačbi gdje postoje dva polja: ravnotežno polje \mathbf{u} i virtualno polje koje je superponirano na ravnotežno).

Za razliku od klasičnih problema minimiziranja, gdje je zadana geometrija te se minimizira energija, ovdje postoji dodatni problem jer oblik nije definiran. Da se volumen ne bi sveo na nulu u procesu optimiranja, sukcesivno se smanjuje količina materijala koji se daje algoritmu da ga redistribuira, te se preko Lagrangeovog multiplikatora zadaje volumno ograničenje (4.37). Minimizira se potencijalna energija (J) za trenutni oblik, tako da se očuva zadovoljenost uvjeta ravnoteže i volumena koji je dodijeljen algoritmu na raspolaganje.

U ovom radu promotrit će se dva pristupa optimiranja level set plohe:

- Optimiranje genetskim algoritmom varirat će se parametri RBF-a (\mathbf{a}_0) ili kontrolne točke B-plohe (\mathbf{P}_0) kako bi se našao minimum složene Lagrangeove funkcije (4.37).
- Optimiranje gradijentnim metodama koje zahtjeva izračun vektora najbržeg spusta, deriviranjem jednačbe (4.37).

Promjena funkcije po parametru kojeg se mijenja naziva se derivacija. Izvod klasične derivacije dobiva se permutacijom, odnosno variranjem varijable (x):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \quad (4.38)$$

Derivacija pokazuje promjenu (osjetljivost) funkcije u ovisnosti o određenom parametru.

Derivacija oblika se slično izvodi, samo se promatra promjena funkcije za promjenu konture domene (permutacija granica):

$$\lim_{d\Gamma \rightarrow 0} \left(\frac{f(\Gamma + d\Gamma) - f(\Gamma)}{d\Gamma} \right) \quad (4.39)$$

Derivacija oblika je osjetljivost funkcije (f) na oblik odnosno promjenu granice. Ona može pokazivati koliko je podatljivost osjetljiva na promjenu oblika.

Nas zanima smjer maksimalne promjene gradijenta (derivacija oblika), jer u smjeru suprotnom od gradijenta funkcija cilja najbrže ide prema minimumu brzinom v_n jednačba (4.42).

Allaire i suradnici [48] su izveli brzinu pomicanja level set funkcije ovisno o funkciji cilja i ograničenja, perturbacijama granice dopustive domene Ω . Dobija se derivacija oblika funkcije cilja $L(\mathbf{u}, \Phi, \lambda)$ (4.37):

$$\frac{dL}{dt} = \int_{\Omega} (\lambda - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}) \delta(\Phi) |\nabla\Phi| v_n d\Omega, \quad (4.40)$$

gdje je t – kvazi vrijeme, a v_n normalna komponenta kvazi brzine. Jednačba (4.40) može se pojednostavniti [39], [66] i prikazati kao krivuljni integral po granici $\partial\Omega$:

$$\frac{dL}{dt} = \int_{\partial\Omega} (\lambda - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}) v_n d\Gamma \quad (4.41)$$

Iz jednačbe(4.41), slijedi brzina (4.6) koja govori gdje je smjer najbrže promjene složene Lagrangeove funkcije (4.37):

$$v_n = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda \quad (4.42)$$

Jednačba normalne komponente brzine (4.42) vrijedi za točke konture $d\Omega$ gdje je $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$.

Normalna komponenta brzine rješava se konačnim elementima u ugniježđenoj formulaciji za prethodno stanje pomaka uz Lagrangeov množitelj λ . Lagrangeov multiplikator često se ne može odrediti u jednoj iteraciji, te je potrebno dodatno iteriranje postupka, što dodatno komplicira izračun.

Uvrštenjem jednačbe (4.42) u Hamilton-Jacobievu jednačbu (4.5) dobiva se promjena level set plohe u pseudo vremenu, za v_n koji sada predstavlja smjer najbržeg spusta za minimizaciju potencijalne energije:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \lambda), \quad (4.43)$$

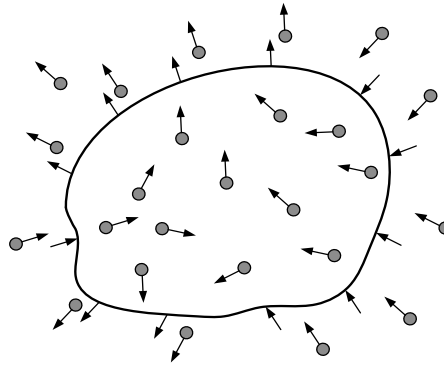
gdje je t kvazi-vrijeme, a v_n normalna komponenta kvazi-brzine.

Derivacija u trenutnoj točki konture $d\Omega$ određuje smjer najbržeg spusta pri traženju minimuma funkcije. Vektor koji najbrže smanjuje Lagrangeovu funkciju je upravo $-\nabla L$, što proizlazi iz Taylorovog reda i iz Kuhn-Tuckerovih (KT) uvjeta ekstrema [55].

U jednadžbi (4.42) uočavamo da brzina pomicanja level set funkcije odnosno smjer v_n ovisi o polju deformacija $\boldsymbol{\varepsilon}$. Stoga je u svakoj iteraciji optimiranja potrebno i izračunati polje deformacija za trenutnu konfiguraciju. Deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}$ računaju se metodom konačnih elemenata. Nakon svake iteracije potrebna je nova mreža konačnih elemenata, jer se geometrija polja problema promijenila uslijed procesa optimiranja.

Osim konačnim elementima polje deformacija $\boldsymbol{\varepsilon}$ može se izračunati i bez-mrežnom metodom. Level set funkcija opisuje topološki oblik jednadžbama (4.1), dok se oblik mijenja promjenom granica pomoću vektora normalne komponente brzine v_n (4.6) promjene level set funkcije (4.5). Problem minimuma podatljivosti zadan je izrazom (4.33) uz ograničenje (4.34), što formulirano pomoću Lagrangeovih množitelja poprima oblik kao jednadžba (4.37). Koračanje u smjeru pada funkcije cilja (4.37) omogućeno je normalnom brzinom v_n (4.42) u točkama konture.

Metodom proširenog polja brzina (extension velocity) određuje se približno raspodjela brzina u cijeloj domeni iz poznate (dobivene) raspodjele brzina uz granice domene (vidjeti izraz (4.29)).

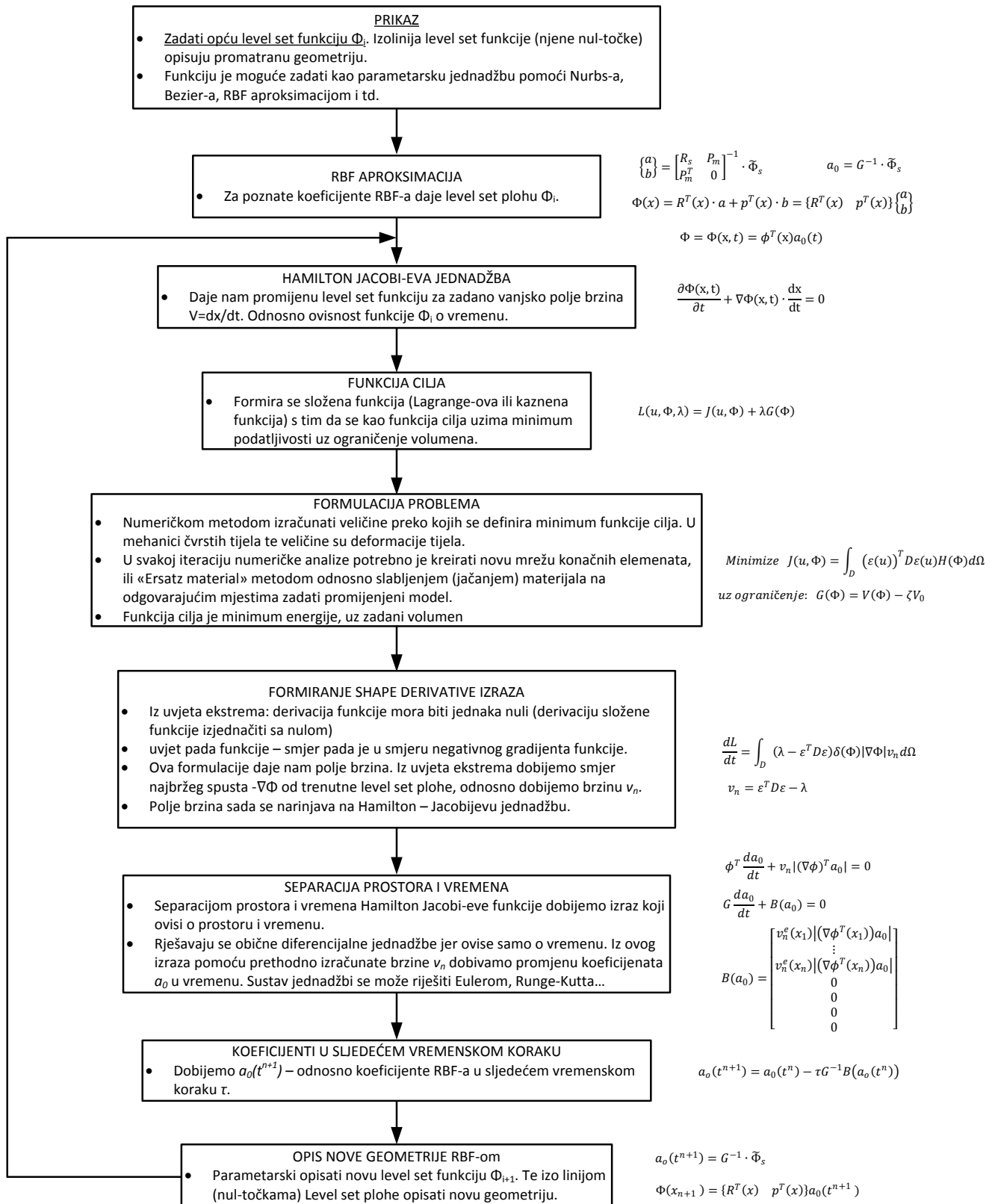


Slika 25 Prikaz polja proširenih brzina

Slika 25 prikazuje polje brzina na rubovima slobodnih granica, i proširenje ovih brzina (extension velocity) na sve čvorove mreže promatranog područja. Izbor metode proširivanja polja brzina (extension velocity) može utjecati na ukupnu učinkovitost procesa. Metode proširivanja polja brzina (extension velocity) nisu u fokusu ovog rada te ih se neće detaljnije obrađivati.

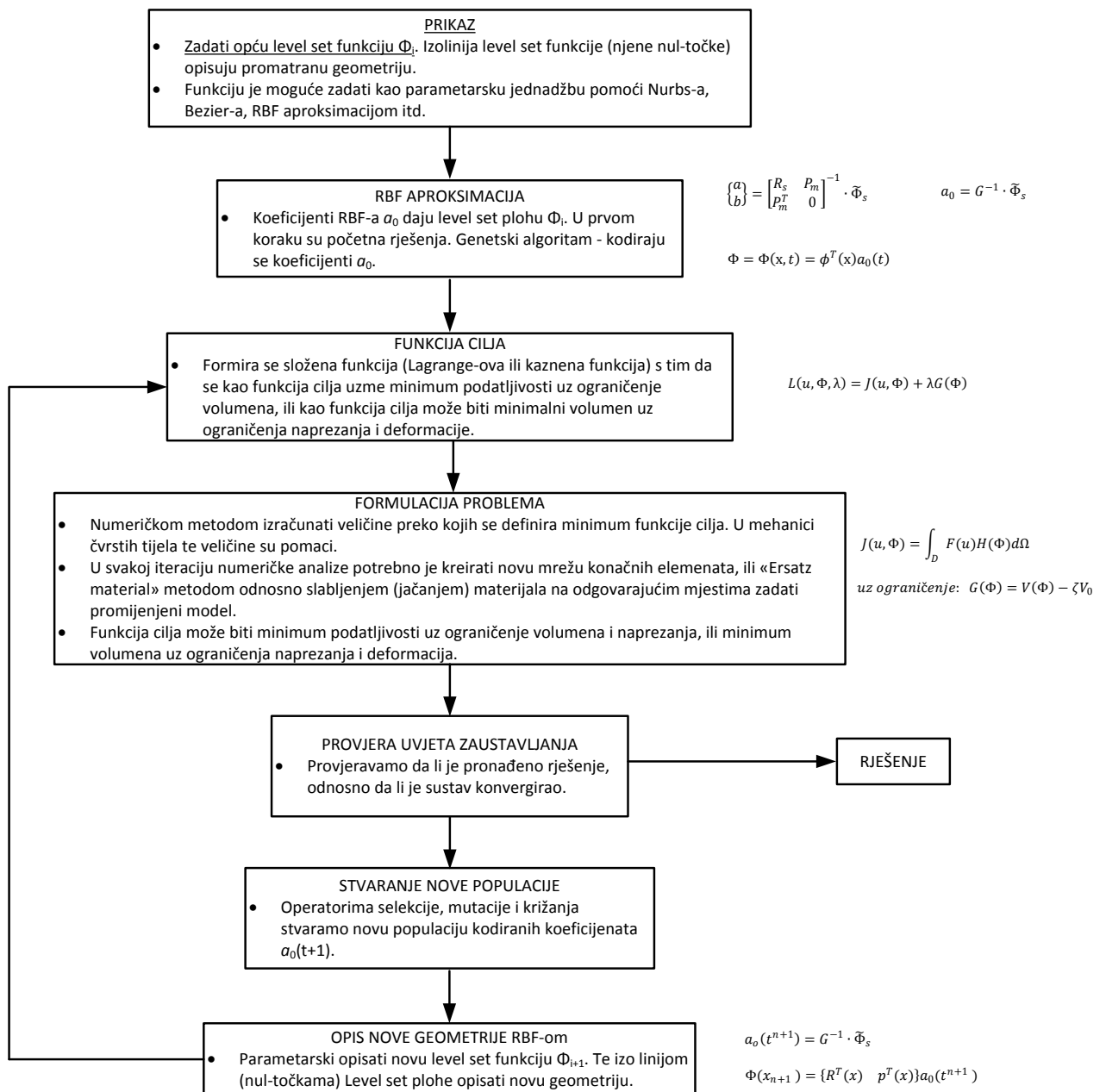
Na osnovu navedenog formirat će se jedan globalni dijagram toka optimiranja (Slika 26 i Slika 27).

4.5 Načelni dijagram toka gradijentnog postupka optimiranja pomoću RBF i level set metode



Slika 26 Pseudo kod level set optimiranja pomoću RBF funkcija gradijentnim postupkom

4.6 Načelni dijagram toka ne-gradijentnog postupka optimiranja genetskim algoritmom pomoću RBF i level set metode

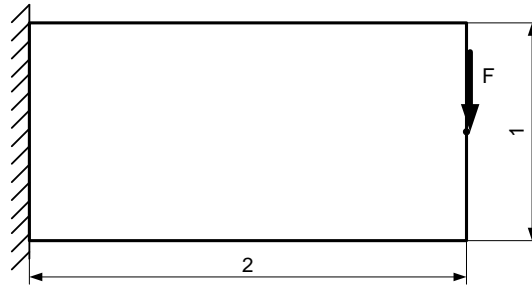


Slika 27 Pseudo kod level set optimiranja pomoću RBF funkcija genetskim algoritmom

5. Razrada numeričkog postupka topološkog optimiranja oblika

5.1 Definiranje problema

Kao test primjer topološkog optimiranja level set metodom u brojnoj literaturi [47], [44], [40], [39], [48] koristi se konzolna greda opterećena silom na kraju (Slika 28).

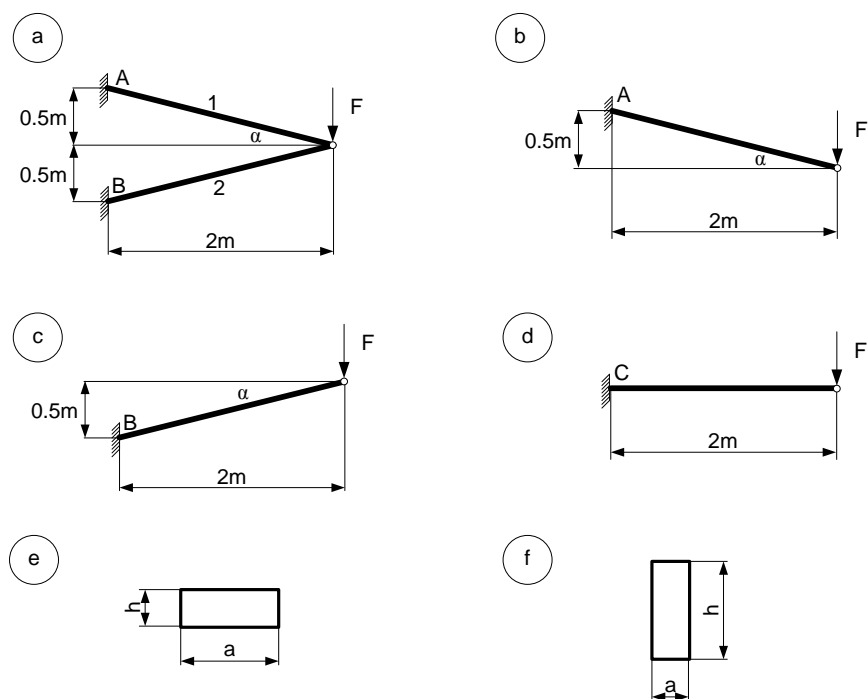


Slika 28 Definiranje geometrije, opterećenja i rubnih uvjeta konzolne ploče za topološko optimiranje

Stoga će se i u ovom radu promatrati isti problem kako bi se mogla vršiti usporedba rezultata istraživanja.

Cilj rada je razviti i implementirati metodu topološkog optimiranja primjenom level set metode i parametrizacije funkcije koja opisuje oblik. Funkcionalnost metode testirat će se na primjeru konzolne grede. Analiza fizikalnih pojava (pomaci, naprezanja i deformacije), koje se dešavaju pri djelovanju sile na zadanu 2D konzolu, izračunavati će se metodom konačnih elemenata u gotovom programskom paketu ADINA. Korišten je 2D konačni element ravninskog stanja naprezanja, za koji je usvojeni omjer visine u odnosu na širinu ploče relativno velik (10:1). Međutim omjeri dimenzija nisu presudni jer je svrha ovog istraživanja analiza topoloških pojava u promatranoj ploči, a manje puna dosljednost u analizi naprezanja.

Neka moguća diskretna rješenja na temelju jednodimenzionalnih konstrukcijskih elemenata (štapni i gredni), su orijentacije kod evaluacije rješenja dobivenog topološkim optimiranjem (Slika 29).



Slika 29 Neka od diskretnih rješenja konzole opterećene silom

Štapni ekvivalenti (Slika 29) odabrani su kao neki od početnih rješenja za proces optimiranja konzolne grede. Primjer gredne konstrukcije (Slika 28) pogodan je za testiranje ovisnosti postupka o početnom rješenju jer ima „lokalne ekstreme oblika“.

Na rješenja topološkog optimiranja 2D konzole veliki utjecaj ima debljina grede (a). Kada poprečni presjek ima omjer debljine i visine veći od 1 ($a/h > 1$) konstrukcija se ponaša više kao štapna (Slika 29-e), dok za omjer $a/h < 1$ (Slika 29-f) konstrukcija se ponaša više kao konzolni nosač, koji ima znatno veću krutost na savijanje u promatranoj ravnini (Slika 29-a,b,c i d) za isti utrošak materijala.

5.2 Parametrizacija level set funkcije

Optimiranje topologije level set metodom podrazumijeva niz različitih numeričkih postupaka, te je kao takav vrlo složen proces koji zahtijeva mnogo procesorskog vremena. Prva u nizu numeričkih metoda pri level set optimiranju je način opisa geometrije oblika koji se optimira. Geometrija modela se može optimirati na fiksnoj mreži (Upwinding shema – poglavlje 4.1) ili parametarskom funkcijom (poglavlje 2.3).

Parametarski se level set funkcija može opisati interpolacijskim i aproksimacijskim jednadžbama: Bezierovim krivuljama i ploham (poglavlje 0), B-krivuljama i ploham (poglavlje 2.3.2), RBF aproksimacijskim funkcijama (poglavlje 2.6.2) i kubičnim krivuljama (poglavlje 2.3.2).

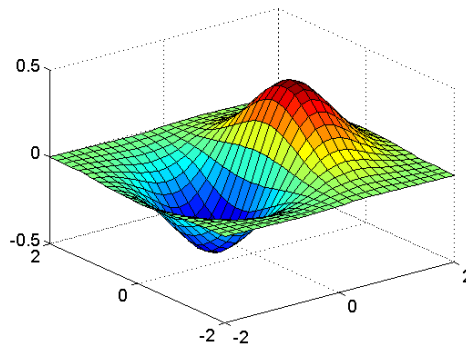
Interpolacijske i aproksimacijske funkcije na osnovu konstantnog broja parametara u prostoru opisuju oblik u cijeloj domeni.

Ovo poglavlje služi za odabir prikladne parametrizacije, parametara oblika i broja čvorova obzirom na preciznost reprezentacije geometrije koja utječe na tačnost optimiranja. Broj parametara optimiranja u nekim radovima [39] jednak je broju konačnih elemenata, što ne mora biti. Veći broj parametara daje tačnija rješenja ali i zahtijeva više procesorskog vremena. Ako je mali broj parametara, ne mogu se dobiti tanke zone materijala, niti lokalni detalji.

Na tačnost opisa geometrije i osjetljivost procesa optimiranja mogu utjecati i parametri koji su vezani uz pojedinu funkciju koja opisuje geometriju. Kod RBF aproksimacije parametri koji utječu na oblik i funkcionalnost reprezentacije geometrije RBF funkcijama su parametri oblika RBF funkcije. Parametri oblika RBF funkcije govore o obliku i širini aproksimacijske funkcije (jednadžbe (2.49), (2.50), (2.51), (2.52)).

Aproksimirana je kosinusna funkcija (Slika 30) RBF aproksimacijskom metodom i B-plohom, te se ispitivao utjecaj promjene parametara oblika RBF funkcije i broj RBF čvorova pri aproksimaciji RBF-om (Slika 32, Slika 33, Slika 34, Slika 35), odnosno stupanj i broj kontrolnih točaka B-plohe pri aproksimaciji B-plohom (Slika 36).

$$F = \cos(x) \cdot \cos(y) \quad (5.1)$$



Slika 30 Aproksimacijska funkcija

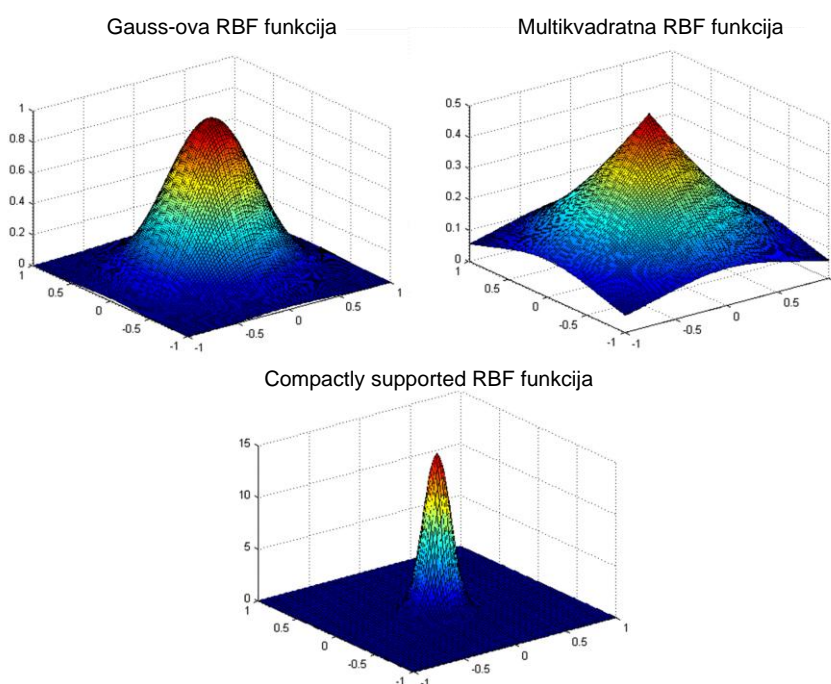
Aproksimacijska funkcija optimirana je gradijentnom metodom (konjugiranim gradijentima). Funkcija cilja je minimalna greška aproksimacije (Err). Greška aproksimacije definirana je kao suma razlika između kontrolnih vrijednosti kosinusne funkcije koja se aproksimira (F) i aproksimirane vrijednosti funkcije RBF funkcijama (F_{RBF}) ili B-plohom (F_{BS}) u nizu odabranih točaka (i) jednadžbom (5.2):

$$Err_{RBF} = \sum_i \frac{(F_i - F_{RBFi})^2}{2} \quad \text{odnosno} \quad Err_{Bs} = \sum_i \frac{(F_i - F_{Bsi})^2}{2} \quad (5.2)$$

Greška aproksimacije izračunava se u 1681 kontrolnoj točki (na mreži 41x41).

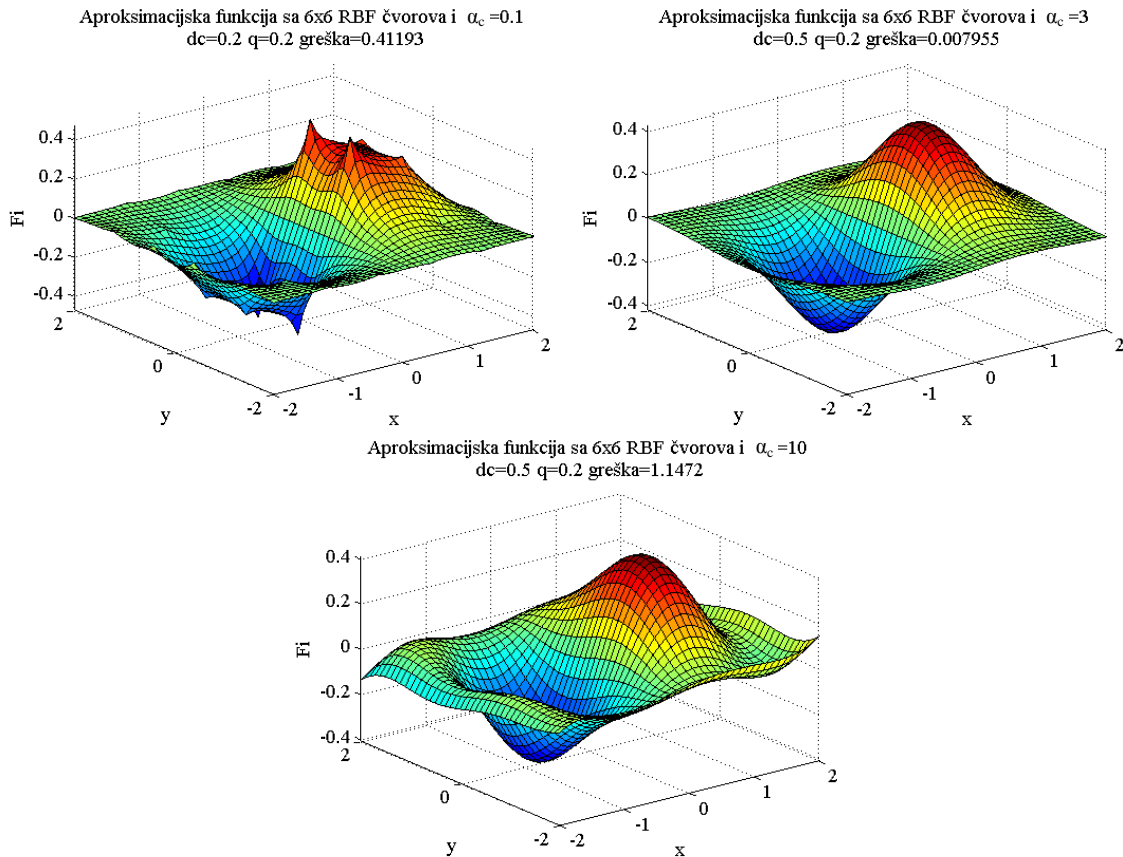
Varijable optimiranja u primjeru su z koordinate čvorova funkcije koja se aproksimira.

Parametri oblika RBF funkcije α_c , d_c i q u jednadžbi (2.49) imaju značajan utjecaj na aproksimacijsku funkciju. Slika 31 prikazuje različite oblike RBF aproksimacijskih funkcija. Promjenom parametara oblika mijenja se oblik aproksimacijske RBF funkcije i time smanjuje odnosno povećava utjecaj pojedinih aproksimacijskih točaka na aproksimacijsku funkciju.



Slika 31 Različiti oblici RBF aproksimacijskih funkcija

Slika 32 prikazuje utjecaj koeficijenta oblika multikvadratne RBF aproksimacijske funkcije (α_c , d_c i q u jednadžbi (2.49)) na aproksimaciju poznate funkcije (5.1). Broj RBF čvorova u prvom primjeru je 36 (6x6 - Slika 32 i Slika 33).

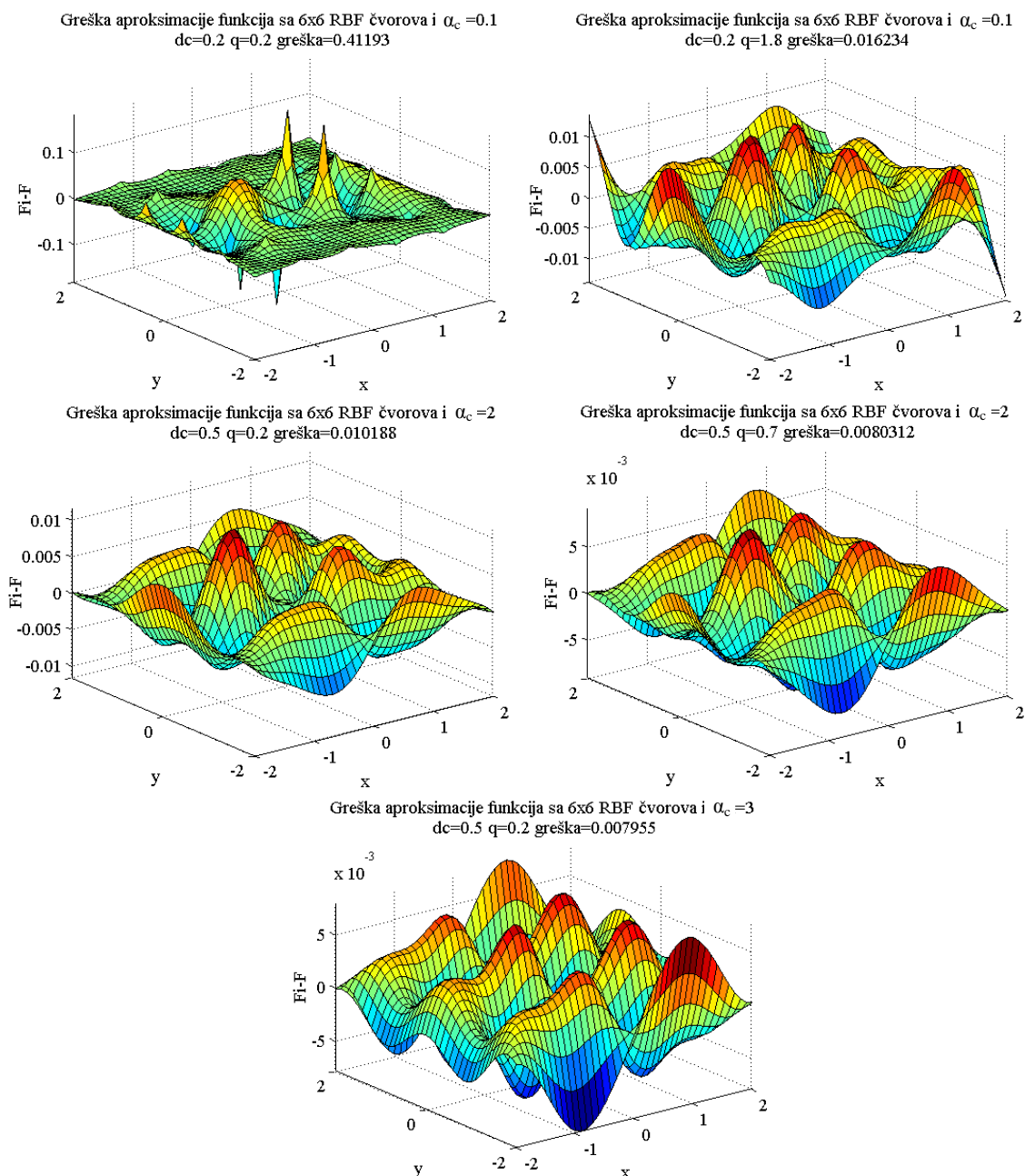


Slika 32 Utjecaj parametra oblika RBF funkcije (α_c , d_c i q) na aproksimaciju funkcije

Odabir parametara α_c , d_c i q (2.49) ovisi o obliku funkcije koja se aproksimira i veličini omjera broja varijabli i promatrane domene. Slika 32 i Slika 33 prikazuju utjecaj parametara (α_c , d_c i q (2.49)) na multikvadratnu RBF funkciju, iz koje se daje zaključiti da male vrijednosti parametara RBF ($\alpha_c \cdot d_c = 0.02$ i $q = 0.2$) imaju za posljedicu lokalizaciju aproksimacijske funkcije.

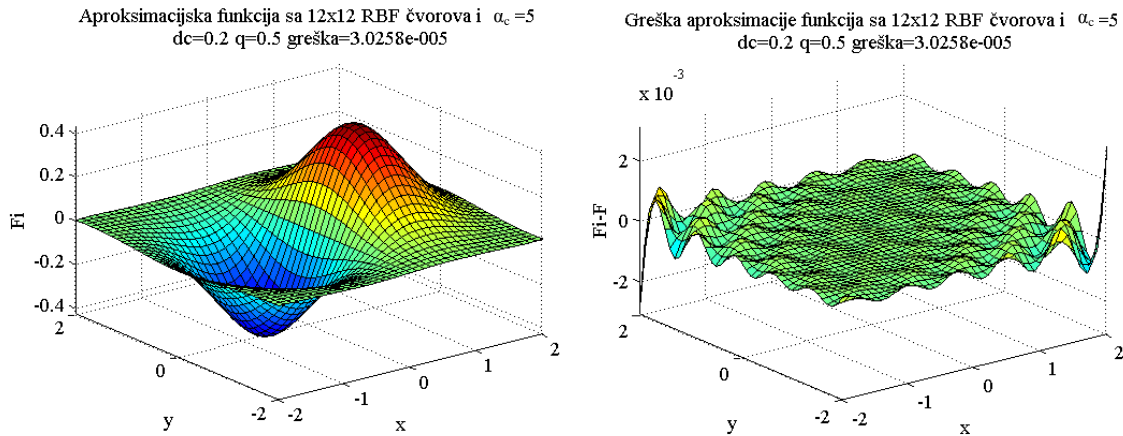
Povećanjem samo koeficijenta q ($q = 1.8$) postiže se još bolja aproksimacija funkcije. Daljnjim povećanjem parametra q greška aproksimacije je rasla.

Povećanjem koeficijenata α_c i d_c ($\alpha_c \cdot d_c = 2.5$), dok je parametar $q = 0.2$ smanjuje se greška aproksimacije. Daljnjim povećanjem vrijednosti parametara α_c , d_c ili q greška aproksimacije raste, a razlog tome je preveliki utjecaj RBF čvorova jedan na drugi (zbog prirode koeficijenata α_c i d_c – poglavlje 2.6.2.1).



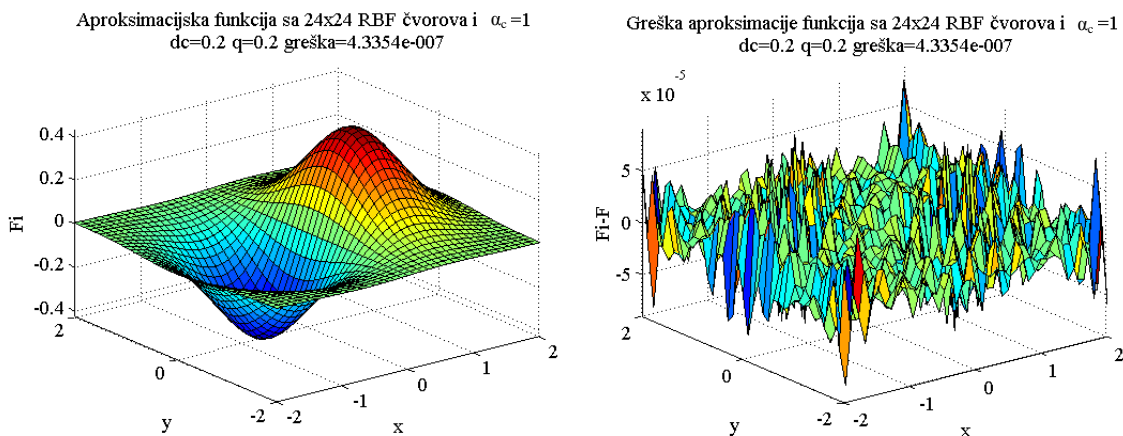
Slika 33 Greška pri aproksimaciji RBF metodom za različite parametre RBF funkcije

Na točnost aproksimacije značajno utječe broj RBF čvorova koji aproksimiraju funkciju (broj varijabli optimiranja). Povećanjem broja čvorova (npr. 144 (12x12) RBF čvorova - Slika 34), povećava se točnost aproksimacije. Parametri multikvadratne RBF funkcije α_c , d_c i q (2.49) za veći broj RBF čvorova (12x12) sada imaju druge vrijednosti u odnosu na 36 RBF varijabli kako bi dali bolju aproksimaciju ($\alpha_c \cdot d_c = 0.1$ i $q = 0.5$) - Slika 34. Povećanjem ili smanjenjem ovih vrijednosti parametara RBF funkcije točnost aproksimacije je lošija.



Slika 34 Aproksimacije i greška pri aproksimaciji RBF metodom sa 144 varijable optimiranja, za odabrane parametre RBF funkcije (α_c , d_c i q)

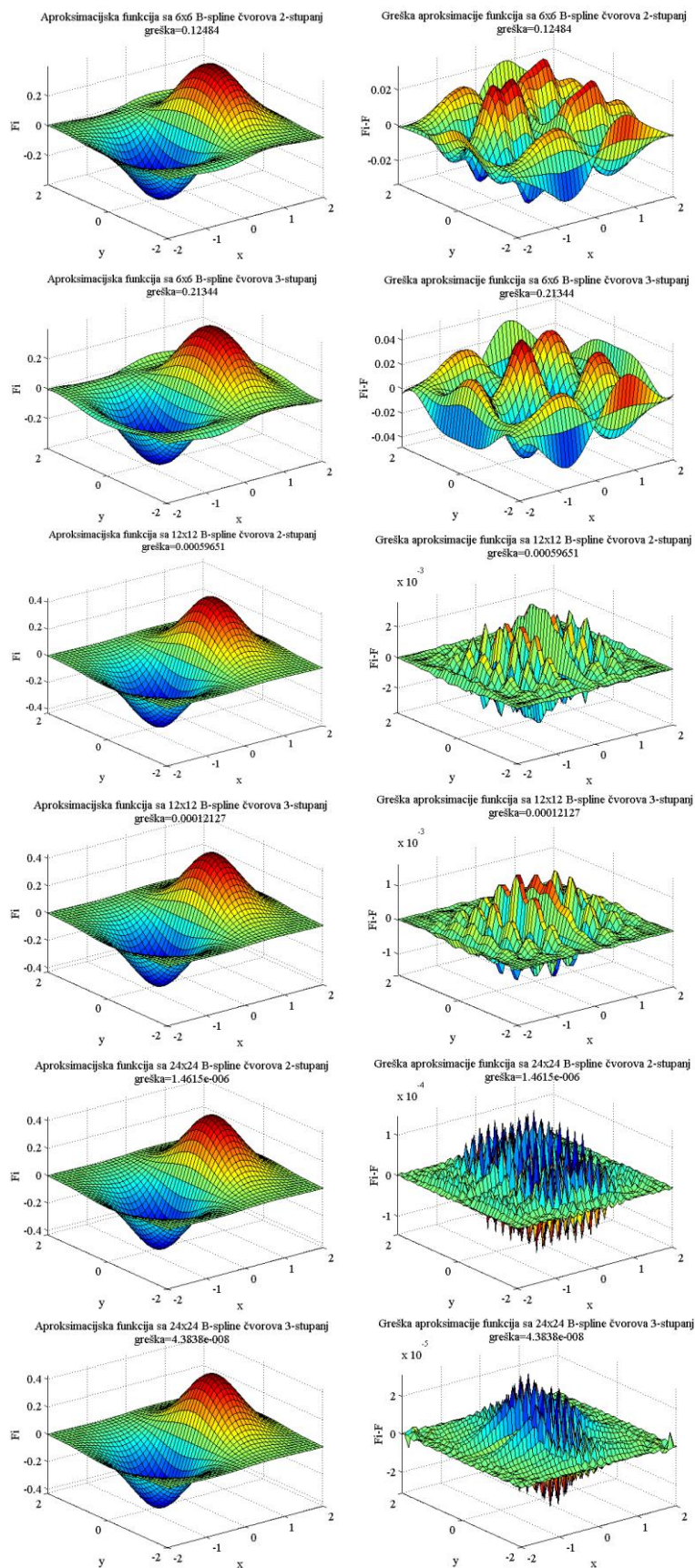
Ako se još poveća broj varijabli, dobit će se bolja točnost aproksimacije, a točnost je još i veća ako se smanje parametri α_c , d_c i q (2.49) u odnosu na vrijednosti sa manjim brojem varijabli (Slika 35):



Slika 35 Aproksimacije i greška pri aproksimaciji RBF metodom sa 576 varijabli optimiranja, za odabrane parametre RBF funkcije (α_c , d_c i q)

Pokazalo se da parametre oblika RBF funkcije (α_c , d_c i q) treba postaviti na manje vrijednosti ukoliko je udaljenost između aproksimacijskih čvorova (r) manja, odnosno ukoliko je gušća mreža aproksimacijskih čvorova u domeni. Utjecaj parametara RBF funkcije (α_c , d_c i q) na aproksimaciju funkcije sa naglim prijelazima detaljnije će se ispitati u kasnijem djelu rada (Slika 37).

Parametar B-krivulja i ploha koji utječu na kvalitetu opisa geometrije je uz gustoću kontrolnih točaka još i stupanj B-krivulja. Točnost aproksimacije funkcije (5.1) B-plohom računa se prema (5.2), na mreži 41x41, odnosno odstupanjem između 1681 kontrolne točke (Slika 36). Funkcija se optimira gradijentnom metodom (konjugiranim gradijentima). I u ovom primjeru varijable optimiranja su z koordinate aproksimacijskih točaka B-plohe.

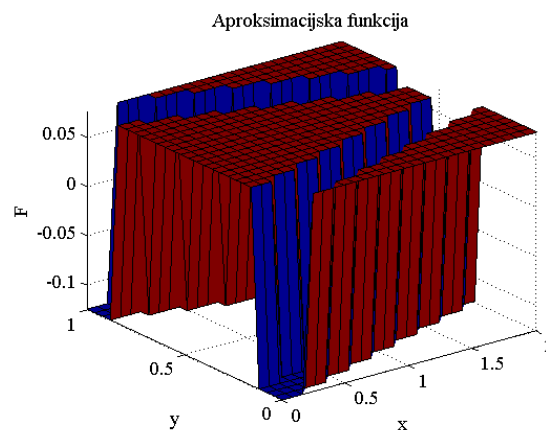


Slika 36 Aproksimacijske funkcije aproksimirane B-plohom drugog i trećeg stupnja sa 36, 144 i 576 kontrolnih točaka

Iz dobivenih rezultata aproksimacije kosinusne funkcije RBF i B-plohama može se zaključiti da B-plohe bolje opisuju zadanu geometriju sa jednakim brojem parametara opisa. Razlog tome je osjetljivost RBF metode na parametre oblika RBF funkcija.

U ovom radu ispitat će se utjecaj parametra RBF-a (kod RBF aproksimacije geometrije) i stupnja B-plohe (kod aproksimacije B-plohom) na točnost i osjetljivost procesa optimiranja.

Kako bi ispitali sposobnost opisa geometrije parametriziranom level set funkcijom, kao testnu funkciju koju treba opisati RBF aproksimacijom i B-plohom uzima se step funkciju (Slika 37):

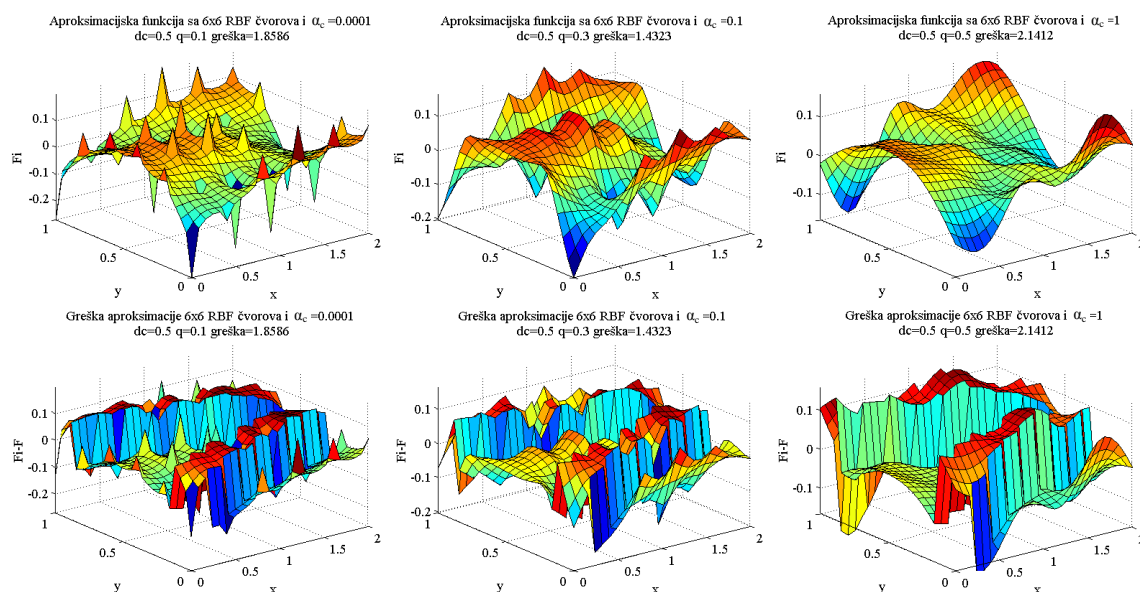


Slika 37 Aproksimacijska funkcija (step funkcija u 2D domeni)

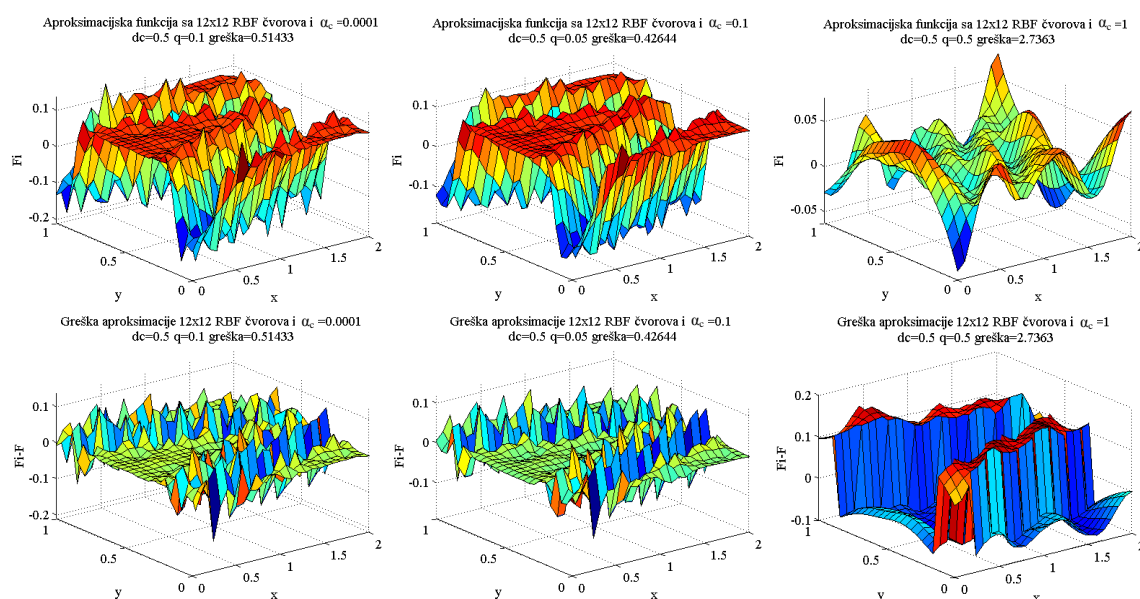
Kao i u prethodnom primjeru, aproksimacijska funkcija optimirana je gradijentnom metodom (konjugiranim gradijentima). Funkcija cilja je minimalna greška aproksimacije (Err). Greška aproksimacije definirana je kao razlika između kontrolnih vrijednosti step funkcije koja se aproksimira (F) i aproksimiranih vrijednosti parametrizirane funkcije (RBF funkcijama (F_{RBF}) ili B-plohom (F_{BS})) (5.2).

Greška aproksimacije izračunava se pomoću 676 kontrolnih točaka (na mreži 26x26).

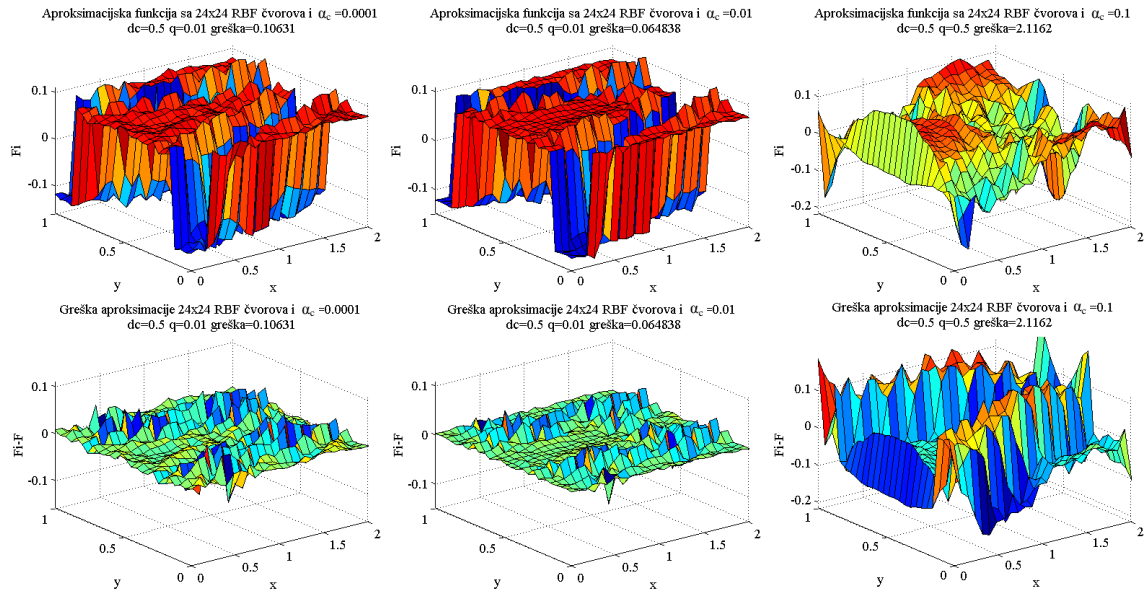
Ovisno o parametrima oblika, RBF aproksimacijom dobivaju se sljedeći rezultati (Slika 38, Slika 39 i Slika 40):



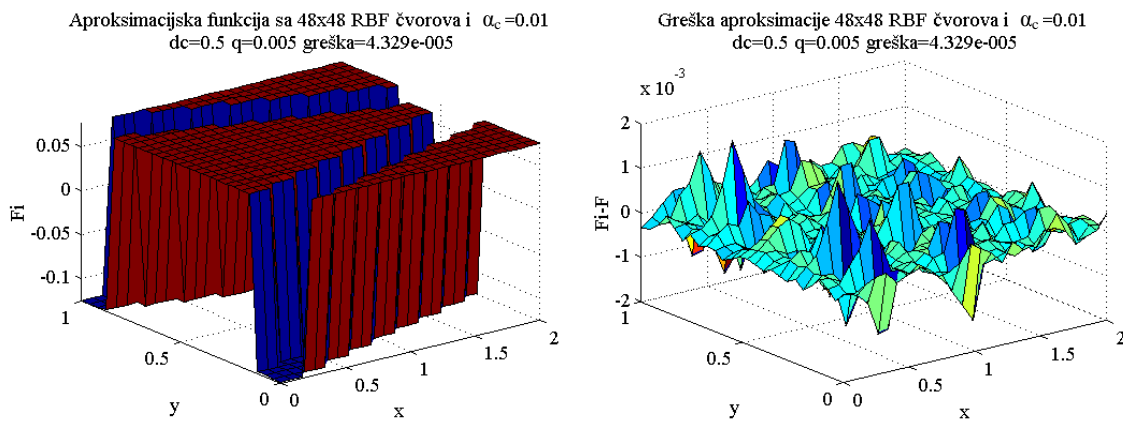
Slika 38 Aproksimacija i greška aproksimacije step funkcije RBF metodom sa 36 čvorova i utjecaj različitih parametara oblika α_c , d_c i q



Slika 39 Aproksimacija i greška aproksimacije step funkcije RBF metodom sa 144 čvora i utjecaj različitih parametara oblika α_c , d_c i q



Slika 40 Aproksimacija i greška aproksimacije step funkcije RBF metodom sa 576 čvorova i utjecaj različitih parametara oblika α_c , d_c i q



Slika 41 Aproksimacija i greška aproksimacije step funkcije RBF metodom sa 2304 čvora

Dobiveni rezultati mogu se prikazati i tabelarno (Tablica 1):

Tablica 1 Tablica utjecaja parametra oblika i broja čvorova pri RBF aproksimaciji geometrije

Broj čvorova RBF-a 6x6 (36)															
$\alpha_c \cdot d_c$	0.00005					0.05					0.5				
q	0.1	0.2	0.3	0.5	0.6	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.001	0.005	0.05	0.2	0.3
greška	1.86	1.65	1.54	1.49	1.54	1.46	1.44	1.43	1.45	1.49	1.996	1.995	2	2.01	2.04
Broj čvorova RBF-a 12x12 (144)															
$\alpha_c \cdot d_c$	0.00005					0.05					0.5				
q	0.1	0.2	0.3	0.5	0.6	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.005	0.05	0.2	0.5	0.6
greška	0.514	0.489	0.492	0.89	0.43	0.42	0.43	0.45	0.55	2.79	2.78	2.75	2.74	2.91	
Broj čvorova RBF-a 24x24 (576)															
$\alpha_c \cdot d_c$	0.00005					0.005					0.05				
q	0.01	0.05	0.1	0.5	0.6	0.001	0.005	0.05	0.5	0.6	$1e^{-4}$	$5e^{-4}$	$5e^{-3}$	0.1	0.5
greška	0.106	0.104	0.11	0.977	0.064	0.064	0.071	1.028	0.213	0.21	0.22	0.43	2.12		
Broj čvorova RBF-a 48x48 (2304)															
$\alpha_c \cdot d_c$	0.005														
q	0.005														
greška	4.33e-5														

Usporedba apsolutne greške odgovara usporedbi relativne greške jer se greška računa uvijek na istom broju kontrolnih točaka (676).

U zadnjem slučaju aproksimacije sa 2304 varijable optimiranja, broj kontrolnih točaka (676) je znatno manji od broja aproksimacijskih točaka (2304). Međutim greška se računala na mreži sa 676 kontrolnih točaka kako bi dobili relativnu grešku aproksimacije funkcije usporedivu sa ostalim rezultatima za manji broj aproksimacijskih točaka.

Distribucija čvorova u domeni je ravnomjerna, što nije nužno. Čvorovi mogu biti i neravnomjerno raspoređeni po domeni, što implicira promjenu x , y i z koordinata čvorova. Ovakav slučaj optimiranja znatno povećava broj varijabli optimiranja, ali i omogućuje aproksimaciju složenijih oblika. Ispitivanje opisa geometrije sa čvorovima neravnomjerno distribuiranim u domeni nije predmet ovog rada, ali otvara prostor za daljnja istraživanja.

Uočeno je da koeficijent oblika znatno utječe na rezultat aproksimacije. Kako funkcija koja se aproksimira ima naglu promjenu, potrebno je više lokalizirati parametrizaciju. Dobiveni rezultati

poslužiti će pri odabiru vrijednosti parametara oblika RBF multikvadratne funkcije (α_c , d_c i q) pri optimiranju 2D konzolne grede opterećene silom na kraju.

Vrijeme potrebno za aproksimaciju RBF metodom povećava se kako broj varijabli optimiranja raste. Za 144 varijable optimiranja, vrijeme aproksimacije po varijabli poraslo je na 437% u odnosu na 36 varijabli optimiranja (100%), dok za 576 varijabli optimiranja vrijeme aproksimacije po varijabli raste na 8157%.

Step funkcija (Slika 37) parametrizira se i B-plohom. Parametrizacija step funkcije B-plohom različitog stupnja i broja parametara opisa daje sljedeće rezultate (Tablica 2, Slika 42).

Tablica 2 Tablica utjecaja broja kontrolnih točaka i stupnja B-plohe.

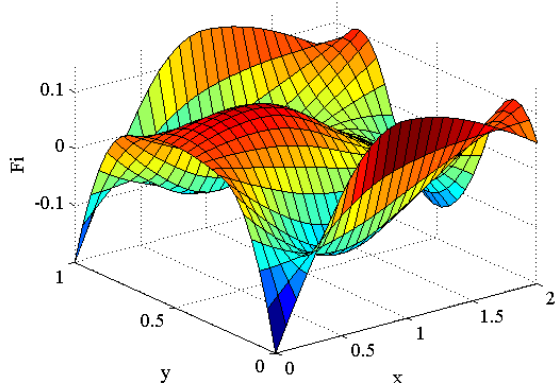
Broj čvorova B-plohe	Drugi stupanj	Treći stupanj	Četvrti stupanj
	greška		
6x6 (36)	1.457	1.504	1.517
12x12 (144)	0.415	0.417	0.429
24x24 (576)	0.0436	0.0405	0.079
48x48 (2304)	$7.39e^{-10}$	$2.1e^{-11}$	$6.03e^{-10}$

Iz dobivenih rezultata nadalje se može zaključiti da nagle promjene aproksimirane funkcije bolje opisuje B-ploha nižeg stupnja (Tablica 2), dok je kod aproksimacije glatkih funkcija veći stupanj B-krivulja značio i veću točnost aproksimacije.

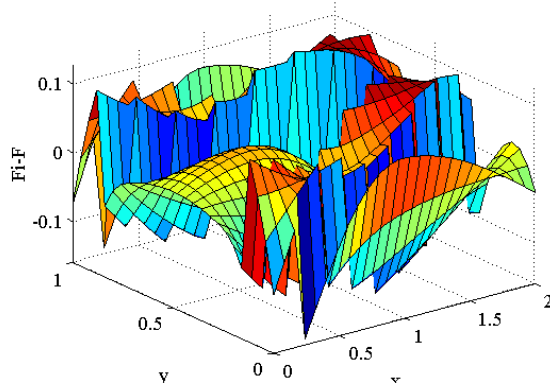
B-plohe mogu bolje opisati nagle promjene sa istim brojem parametara nego RBF funkcije. Razlog tome je postojanje parametara oblika RBF funkcije (α_c , d_c i q), koje utječu na oblik aproksimacijske funkcije. Mali parametri oblika dovode do pojave naglih promjena aproksimirane funkcije, što negativno utječe na grešku aproksimacije. Velike vrijednosti parametara oblika negativno utječu na sposobnost reprezentacije geometrije koja ima nagle promjene (promjena jednog čvora ima veliki utjecaj na okolne čvorove).

Parametri oblika RBF funkcija (α_c , d_c i q) kao varijable optimiranja nije se pokazalo kao dobar način optimiranja. Osim što znatno produžuje vrijeme optimiranja zbog potrebe računanja RBF funkcije u svakom optimizacijskom ciklusu, rezultati takvog načina optimiranja nisu dali dobra rješenja. Mogući razlog lošeg rješenja optimiranja može biti zaustavljanje procesa u lokalnom ekstremu.

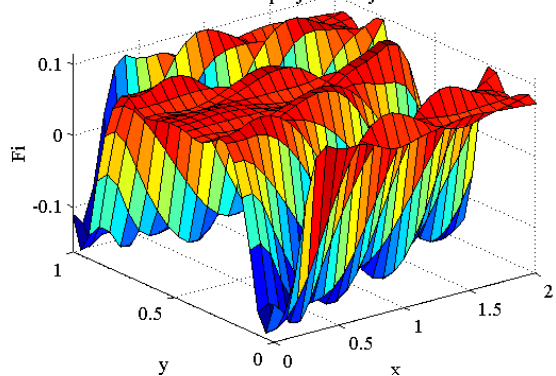
Aproksimacijska funkcija za 6x6 kontrolnih čvorova i 2. stupanj B-krivulja



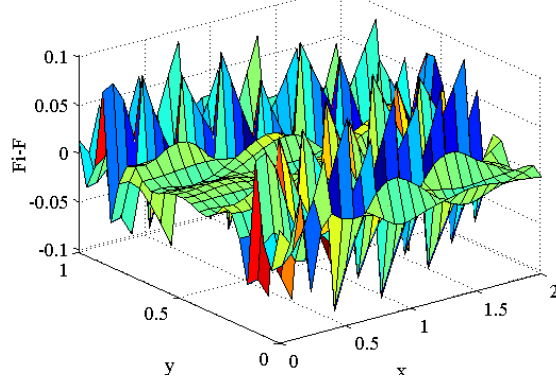
Greška = 1.4565 za 6x6 kontrolnih čvorova i 2. stupanj B-krivulja



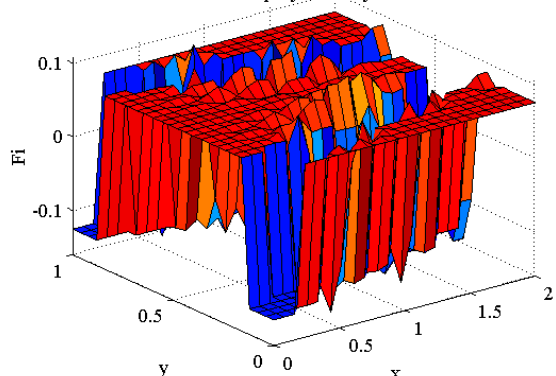
Aproksimacijska funkcija za 12x12 kontrolnih čvorova i 2. stupanj B-krivulja



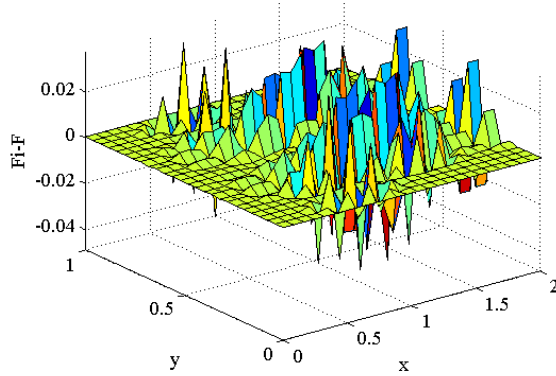
Greška = 0.41447 za 12x12 kontrolnih čvorova i 2. stupanj B-krivulja



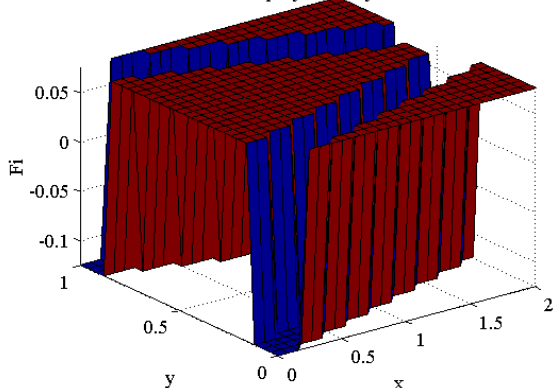
Aproksimacijska funkcija za 24x24 kontrolnih čvorova i 2. stupanj B-krivulja



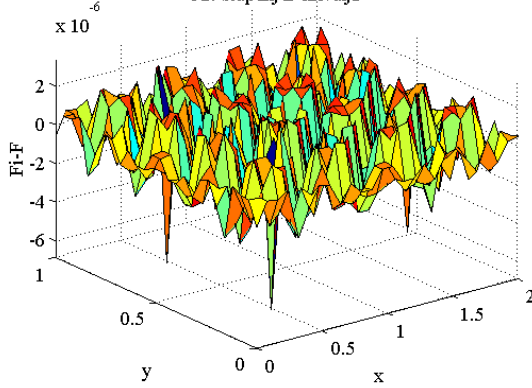
Greška = 0.043576 za 24x24 kontrolnih čvorova i 2. stupanj B-krivulja



Aproksimacijska funkcija za 48x48 kontrolnih čvorova i 2. stupanj B-krivulja



Greška = 7.3893e-010 za 48x48 kontrolnih čvorova i 2. stupanj B-krivulja



Slika 42 Aproksimacija step funkcije B plohom za različiti broj kontrolnih točaka i različiti stupanj B-krivulja

5.3 Formulacija problema

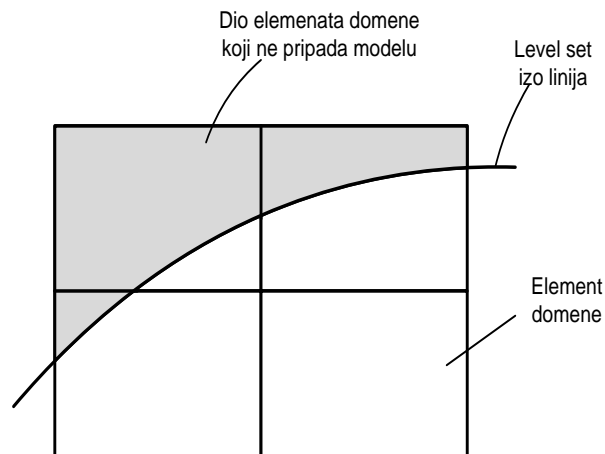
Formulacija problema pri topološkom optimiranju level set metodom je također bitna, jer o njoj može ovisiti osjetljivost procesa. Formulacija problema je odabir funkcije cilja i funkcija ograničenja (poglavlje 2.1). U općem slučaju pri projektiranju bilo koje konstrukcije cilj je ušteda materijala uz zadržanu funkcionalnost.

5.3.1 Formulacija – minimum volumena uz ograničenja naprezanja i deformacije

Funkcija cilja može biti minimum volumena materijala nosača. U tom slučaju potrebno je zadati ograničenja koja će osigurati funkcionalnost (nosivost). Dakle potrebno je nekim od numeričkih metoda rješavanja (poglavlje 2.6) provjeriti ravnotežu konstrukcije, te ispitati da li su naprezanja i deformacije u konstrukciji manji od dopuštenih.

Kako je ranije rečeno (poglavlje 2.2) postoji više načina formuliranja problema prilikom optimiranja funkcije cilja uz ograničenja. U ovom radu odabire se vanjska kaznena formulacija prilikom rješavanja problema optimiranja uz ograničenja (poglavlje 2.2.2, jednadžbe (2.12) i (2.14)).

Kao kriterij izvrsnosti optimiranja odabire se minimum volumena. Volumen konstrukcije potrebno je računati kao površinu opisanu trenutnom izo-linijom level set funkcije, numeričkom integracijom (Slika 43). Ovakav način izračuna volumena je numerički zahtjevan.



Slika 43 Prikaz presjeka volumena domene izo linijom level set funkcije

Kako bi pojednostavnili problem, promatrat će se vrijednosti level set funkcije u težištima elemenata, te ako je level set funkcija negativna na mjestu težišta elementa domene, taj element poprima mehanička svojstva materijala koja imaju nosivost. Ukoliko level set funkcija ima pozitivnu vrijednost iznad težišta promatranog elementa domene, tom elementu se dodjeljuju

znatno lošija mehanička svojstva materijala, uslijed čega promatrani element ne može nositi opterećenje.

Ovakav način formulacije funkcije cilja (volumena) znatno je jednostavniji, ali funkcija cilja je diskretna, jer je volumen jednak broju elemenata koji imaju mehanička svojstva materijala nosive konstrukcije.

Diskretna funkcija cilja problematična je pri optimiranju gradijentnim postupcima optimiranja zbog nemogućnosti preciznog izračuna derivacije funkcije cilja, koja je nužna pri optimiranju gradijentnim postupkom.

Kako bi funkciju cilja napravili kontinuiranom, te omogućili optimizatoru bolju osjetljivost pri promjeni varijabli, na funkciju cilja dodaje se zbroj vrijednosti level set funkcije iznad čvorova rubnih konačnih elemenata. Odnosno vrijednosti level set funkcije na težištima rubnih konačnih elemenata (z_{rub}) potrebno je zbrojiti, te ovaj zbroj dodati na diskretni dio funkcije cilja (broj nosivih konačnih elemenata) prema jednadžbi (5.3):

$$F_c = Br_{elem} + \left(\sum |z_{rub}^-| - \sum z_{rub}^+ \right) \quad (5.3)$$

F_c – funkcija cilja,

Br_{elem} – broj konačnih elemenata koji nose opterećenje,

z_{rub}^- – vrijednost level set funkcije u rubnom čvoru konačnog elementa – negativni dio ruba

z_{rub}^+ – vrijednost level set funkcije u rubnom čvoru konačnog elementa – pozitivni dio ruba

Dodatak na funkciju cilja treba ispuniti dva zahtjeva:

- diskretni problem pretvoriti u kontinuirani
- pokazati smanjenje funkcije kada se smanjuje volumen

Izračun broja konačnih elemenata nosivog dijela konstrukcije i dodatka funkciji cilja nije numerički zahtjevan, kao izračun volumena opisanog izo linijom level set funkcije. Predložena formulacija znatno je jednostavnija te je njena sposobnost pronalaska optimuma ispitana u poglavlju 6.2.1.3.

Uz funkciju cilja minimalnog volumena, ograničenja koja su potrebna prilikom optimiranja konzolnog nosača su ograničenja naprezanja i deformacija koja moraju biti unutar zadanih granica.

Za dobru osjetljivost procesa optimiranja, funkcija cilja i ograničenja treba biti istog reda veličine.

Kako se radi o različitim fizikalnim veličinama moguće je upotrijebiti neke od numeričkih postupaka kako bi funkciju cilja i ograničenja sveli u odgovarajući raspon. Na raspolaganju su brojne metode (normiranje, logaritmiranje, itd.) koje umjeravaju različite fizikalne veličine.

Ograničenja naprezanja i deformacija imaju znatno veće iznose (red veličine 10^7 MPa za zadani problem konzolne grede) nego funkcija cilja (broj konačnih elemenata). Stoga će se ograničenja naprezanja logaritmirati (5.4). Sada svaki čvor konačnog elementa (i) koji ima naprezanja veća od dopuštenih ima vrijednost između 8 i 22.

$$Ogr_{\sigma} = \sum_i^n \log(\sigma_i) \quad (5.4)$$

Čvorovi koji imaju prekomjerni iznos deformacije (ε) imaju vrijednosti veće od nekih zadanih ali deformacije mogu poprimiti velike iznose. Ova vrijednost može se podvrgnuti funkciji arkus tangens (5.5). Sada svaki čvor konačnog elementa (i) koji ima prekomjerne vrijednosti deformacija može imati najveću vrijednost 90 za beskonačno velike deformacije.

$$Ogr_{\varepsilon} = \sum_i^n \arctan(\varepsilon_i) \quad (5.5)$$

5.3.2 Formulacija – minimum podatljivosti uz ograničenje volumena

Funkcija cilja može biti i minimum rada vanjskih sila (podatljivosti) (poglavlje 2.4 izrazi (2.35) virtualni rad vanjskih sila). Kako će se pomaci u konstrukciji rješavati u gotovom programskom paketu (ADINA), tada se funkcija cilja definira kao umnožak vanjskih sila i pripadnih pomaka u hvatištima vanjskih sila.

Programski paket ADINA vrši numeričku analizu metodom konačnih elemenata geometrije stvorene pri optimiranju, te kao izlazne podatke zapisuje pomake, deformacije i sile u tekstualnu datoteku. Postupkom rudarenja podataka (eng. Data mining) izdvajaju se i obrađuju podaci iz izlazne datoteke, te se dobivaju sve potrebne vrijednosti za izračun funkcije cilja i ograničenja.

U formulaciji minimuma podatljivosti potrebno je zadati početno rješenje koje je ravnotežno. Iz tako definiranog početnog rješenja može se minimizirati podatljivost. U svakom koraku ciklusa optimiranja uvjet ravnoteže zadovoljen je implicitno (rješavaju se jednadžbe prethodnog i trenutnog stanja), jer je polje pomaka dobiveno analizom konačnih elemenata kao ravnotežno – bilinearna formulacija funkcije cilja (3.3). Formulacija u kojoj se level set funkcija mijenja tako da ravnoteža bude zadovoljena naziva se ugniježđena (Nested) formulacija, koja je opisana u poglavlju 2.7 izrazima (2.70). Ograničenje koje je potrebno kod formulacije minimuma podatljivosti je ograničenje volumena, odnosno ograničava se koliki postotak od početnog volumena će ostati (parametar ζ – jednadžba (4.34)). Parametar ζ potrebno je odabrati vrlo oprezno, jer postoji mogućnost da se volumen previše smanji te da se pojave prevelike vrijednosti

naprezanja i deformacija, što se ne bi primijetilo u formulaciji jer je ravnoteža zadovoljena. Da bi izbjegli prevelika naprezanja, moguće ih je provjeravati na kraju procesa optimiranja (ili u svakom koraku optimiranja), pa nakon toga ponovno smanjiti volumen materijala.

Minimiziranjem podatljivosti optimizator redistribuira raspoloživi materijal kako bi dobili maksimalnu krutost konstrukcije.

Na primjeru optimiranja poprečnog presjeka ukliještene grede opterećene silom na kraju (Slika 29 - d), kao rješenja moguće je dobiti štap (Slika 29-e) ili konzolu (Slika 29-f), uz jednak utrošak materijala. Međutim konzola ima značajno veću krutost u odnosu na štapnu konstrukciju.

Ugniježdenu formulaciju dali su u svom radu Wang i suradnici [39]. Ovakva formulacija opisana u poglavlju 2.7 pogodna je za gradijentne metode optimiranja (SQP, BFGS, itd.) jer koristi gradijent funkcije cilja i ograničenja. Topološko optimiranje grede (Slika 28) složen je proces i ima lokalne ekstreme, stoga je i mana topološkog optimiranja uz funkciju cilja minimum podatljivosti i ugniježdenu formulaciju ovisnost procese o inicijalnom rješenju.

Ekvivalentno minimumu podatljivosti funkcija cilja može biti minimum potencijalne energije unutarnjih sila (unutarnja energija svih elemenata – Strain Energy) izraz (2.34) - ukupni virtualni rad unutarnjih sila.

Također je moguće i kombinirati formulacije minimum volumena i minimum podatljivosti, na način da se zada određeni postotak pojedinoj formulaciji.

Odabir formulacije ovisi o nizu elemenata kao što su odabir algoritma optimiranja, odabir alata za analizu konačnim elementima (FEA), itd.

5.4 Algoritmi optimiranja

Strukturno optimiranje postavljenog modela može se izvesti bilo kojom od brojnih algoritama koji različito minimiziraju funkciju cilja: gradijentnim metodama (Najbrži spust, konjugirani gradijenti, Newtonov postupak, kvazi Newtonovi postupci, dopustivi smjerovi, itd.), ne-gradijentnim metodama (Nelder-Mead, Hooke-Jeeves) ili evolucijskim postupcima (genetski algoritmi, simulirano žarenje, itd.) [55].

Evolucijski postupci temelje se na oponašanju modela nekih fizikalnih i bioloških procesa, pojednostavljenih i prilagođenih potrebama optimiranja i aproksimacije funkcija.

Ovi postupci su vrlo robusni i fleksibilni, ali zahtjevni u smislu procesorske snage računala. Tijek traženja je globalne stohastičke prirode te nije sklon zaustavljanju u lokalnim ekstremima.

U ove postupke spadaju postupci slučajnog pretraživanja, postupci simuliranog žarenja, postupci genetskih algoritama i drugi postupci.

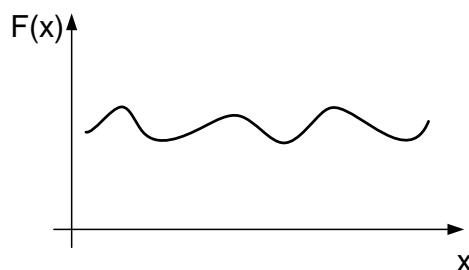
Postupci genetskih algoritama oponašaju biološki model prema hipotezi prirodne evolucije bioloških vrsta. Metoda je stohastična (slučajna), ali nije naivna, već koristi informacije iz prethodnih koraka. Probna rješenja se zapisuju u kodirane binarne nizove, koji su analogni kromosomima u prirodnim procesima. Binarni nizovi se mijenjaju tijekom ciklusa optimiranja (reprodukcije) operacijama križanjem i mutacijom, a selekcijom se izdvajaju bolje jedinice. Na ovaj način se u sljedećoj generaciji dobiva bolja populacija nego u prethodnoj. Početna populacija (niz probnih rješenja) stvara se slučajnim generiranjem točaka unutar dopustivog područja.

Gradijentni postupci traženja minimuma funkcije cilja koriste prve parcijalne derivacije funkcije cilja. Derivacija funkcije po varijablama optimiranja govori o smjeru najvećeg rasta funkcije u ovisnosti o promjeni varijabli. Ako se kretanja varijabli optimiranja usmjeri u suprotnom smjeru od gradijenta, smanjivat će se vrijednost funkcije cilja. Gradijentni postupci (ukoliko konvergiraju) trebaju znatno manji broj iteracija od ostalih metoda kako bi doveli do optimuma. Gradijentni postupci drugog reda osim prve, koriste i drugu parcijalnu derivaciju. Neki postupci (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) i Davidon–Fletcher–Powell (DFP)) druge derivacije funkcije cilja ne računaju analitički, nego ih aproksimiraju na temelju prvih derivacija korištenjem informacija iz prethodnih iteracija [55].

U ovom radu optimiranje će se izvoditi metodom genetskog algoritma i BFGS (gradijentnom) metodom optimiranja u gotovom programskom paketu MATLAB, gdje se mogu podešavati neke od značajki metoda optimiranja.

Gradijentne metode optimiranja su osjetljive na lokalne ekstreme, pogotovo pri optimiranju nelinearnih funkcija i problema sa velikim brojem varijabli optimiranja. Očekivano je da će se optimiranjem gradijentnom metodom dobiti bolja rješenja ukoliko se zadaju dobra početna rješenja. Optimiranje genetskim algoritmom je globalna stohastička metoda, i otpornija je na lokalne ekstreme. Stoga će se u ovom radu usporediti BFGS gradijentnu metodu optimiranja i metodu genetskog algoritma na problemu topološkog optimiranja oblika konzolnog nosača opterećenog silom na kraju.

Sustav koji se optimira je vrlo osjetljiv, te se za različite vrijednosti parametara optimiranja dobivaju slična rješenja (Slika 44), što dovodi do lokalnih optimuma.

Slika 44 Prikaz multi-modalne funkcije cilja u ovisnosti o varijabli x

5.4.1 Optimiranje oblika i topologije opisanog parametarskom LS plohom Hamilton-Jacobievom jednadžbom

Hamilton-Jacobieva parcijalna diferencijalna jednadžba (H-J) opisana u poglavlju 4, rješava se nekim od gradijentnih metoda optimiranja.

Hamilton-Jacobieva diferencijalna jednadžba slijedi iz presjeka level set funkcije sa ravninom x - y , odnosno iz jednadžbe $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$ ili bilo kojoj konstantnoj vrijednosti. Tada je totalni diferencijal level set funkcije $d\Phi$ jednak nuli:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + |\nabla \Phi| \cdot \mathbf{v}_n = 0, \quad (5.6)$$

iz čega slijedi da H-J jednadžba vrijedi samo za rub – izo liniju. Ako se točkama ruba nanese bilo koja brzina v onda se level set funkcija $\Phi(\mathbf{x})$ mora mijenjati prema H-J jednadžbi da bi jednadžba ostala jednaka nuli ili konstantnoj vrijednosti. Zbog toga se H-J jednadžba naziva i transportnom jednadžbom koja pomiče rub (izo liniju). Tangencijalna komponenta brzine ne mijenja rub (izo liniju), te se pomicanje ruba vrši preko normalne komponente brzine.

Polje brzina za sve čvorove vremenske diskretizacije (RBF čvorovi ili čvorovi B-ploha), koje mijenja level set plohu (4.42) dobiva se iz funkcije cilja i ograničenja (minimiziranjem) (4.36). Iz uvjeta funkcije cilja - minimum podatljivosti, slijedi normalna komponenta brzine v_n koja vodi prema optimalnom rješenju (gradijentne metode optimiranja).

Kako H-J jednadžba vrijedi samo za rub – izo liniju, potrebno je proširiti polje brzina nekim od numeričkih metoda („extension velocity“ - poglavlje 4.4), kako bi dobili brzine i ostalih točaka domene – jednadžbe (4.28) i (4.29). Parametri optimiranja (aproksimacijske točke kod B ploha \mathbf{P} ili RBF čvorovi kod RBF aproksimacije oblika) opisuju cijelu domenu promatranog modela, dok je normalna komponenta brzine (jednadžba (4.42)) poznata samo na rubu. Zbog toga se polje brzina na granici mora na određeni način proširiti na cijelu domenu. Postoje vrlo različiti pristupi rješavanja problema proširenog polja normalne komponente brzine (extension velocity). Brzine ne postoje izvan presječne linije level set funkcije, ali ih je potrebno odrediti jer su potrebne za

proračun (heuristička metoda). U nekim radovima [39] za prošireno polje brzina (extension velocity) uzimaju se one brzine za koje su deformacije izvan ove granice jednake nuli:

$$v_n^e = v_n^e(\mathbf{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \lambda & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d | \Phi(\mathbf{x}) < -\Delta, \\ \widehat{v}_n^e(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Xi, \\ -\lambda & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d | \Phi(\mathbf{x}) > \Delta. \end{cases}, \quad (5.7)$$

gdje se uzimaju različite vrijednosti v_n za rub, unutar zone i izvan zone Ξ (oko slobodne granice), sa nekim pojasom širine Δ da se izbjegne diskontinuitet funkcije. Drugi radovi za proširivanje normalne komponente brzine uzimaju strujnice, tok fluida, ili normale te je po zonama brzina jednaka. Također se može uzeti i kombinacija susjednih brzina.

Ukoliko se parametrizira level set funkcija RBF ili B plohom, izvršit će se separacija prostorne i vremenske domene (poglavlje 4.3) odnosno dobit će se H-J diferencijalna jednadžba (5.6) opisana preko parametara B-splinea (2.18) ili RBF-a (2.59):

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^n P_i(t) \cdot N_{i,n}(\mathbf{x}), \quad \text{odnosno} \quad \Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \cdot \phi_i(\mathbf{x}) \quad (5.8)$$

gdje su parametri koji mijenjaju oblik level set plohe (\mathbf{P}) aproksimacijske točke B plohe (2.18), ili koeficijenti RBF-a ($\boldsymbol{\alpha}$) (2.59).

Sada se H-J jednadžba (4.3) može zapisati kao veza parametara level set plohe i brzine v_n za pojedinu točku granice (5.9):

$$\sum_{i=1}^n \dot{P}_i(t) \cdot N_i(\mathbf{x}) + v_n |\nabla \Phi| = 0 \quad (5.9)$$

Dobiva se sustav običnih diferencijalnih jednadžbi koji vrijedi samo za izo liniju (parametrizirana H-J jednadžba), pri čemu je izvršena separacija prostorne i vremenske domene. Obične diferencijalne jednadžbe rješavaju se nekim od numeričkih metoda, na primjer kolokacijskom metodom.

Normalna brzina v_n (4.42) dobivena je iz derivacije oblika Lagrangeove funkcije cilja (4.37). Normalna brzina govori koji je smjer najbrže promjene Lagrangeove funkcije. Promjenom normalne komponente brzine mijenjaju se i kontrolne točke level set funkcije \mathbf{P} .

Alternativno kolokacijskom pristupu je gradijentni pristup preko analize osjetljivosti.

Jednadžba (5.9) zapisat će se kao:

$$v_n = \frac{1}{|\nabla\Phi|} \sum_{i=1}^n \dot{P}_i(t) \cdot N_i(\mathbf{x}) \quad (5.10)$$

Uvrštenjem jednadžbe (5.10) u jednadžbu najbržeg spusta (4.41) (derivacije oblika), dobiva se parametrizirani izraz najbržeg spusta za dopustivi minimum Lagrangeove funkcije (5.11):

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{P}_i \int_{\partial\Omega} (\lambda - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \frac{1}{|\nabla\Phi|} \cdot N_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (5.11)$$

Iz izraza (5.11) dolazi se do izraza za osjetljivosti Lagrangeove funkcije L .

Složena Lagrangeova funkcija L ovisi o polju pomaka i parametrima level set funkcije (P_i i N_i , odnosno α_i i ϕ_i). Bazne funkcije N_i tj. funkcije oblika ϕ_i ovise samo o prostornim komponentama, dok parametri P_i i α_i ovise o kvazivremenu.

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial P} \dot{P}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial P} \dot{P}_i + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial P} \dot{P}_i \quad (5.12)$$

Ako se usporede jednadžbe (5.11) i (5.12), dobivaju se izrazi za izračun osjetljivosti potrebni za postupak optimiranja najbržim spustom u parametarskom obliku:

$$\frac{dJ}{dP_i} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{1}{|\nabla\Phi|} \cdot N_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (5.13)$$

$$\frac{dV}{dP_i} = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\Phi|} \cdot N_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (5.14)$$

Smjer traženja (smjer brzine level set funkcije) određuje se iz formulacije najbržeg spusta, koji za opću funkciju $f(\mathbf{y})$ iznosi $-\nabla f(\mathbf{y})$:

$$\min f(\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{y} = -\nabla f(\mathbf{y}), \quad (5.15)$$

gdje je:

$$\Delta f = f(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}) - f(\mathbf{y}) = \nabla f \cdot \Delta \mathbf{y} \quad (5.16)$$

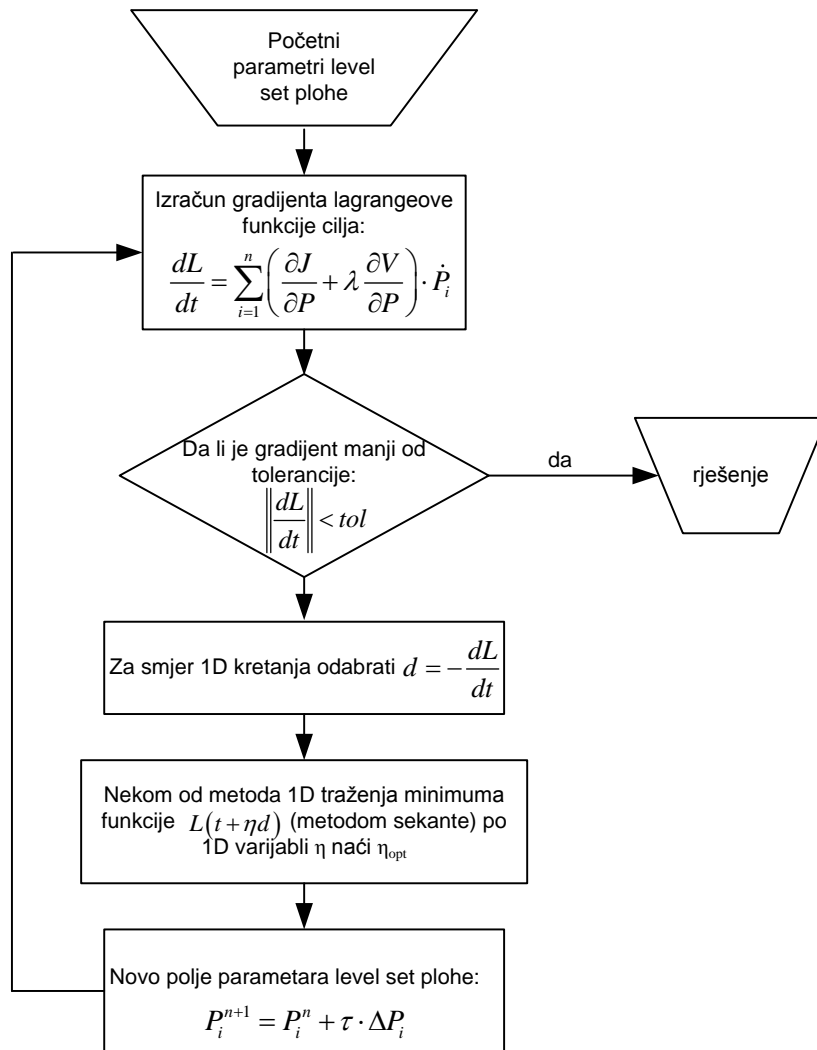
Sada su novi parametri level set plohe:

$$P_i^{n+1} = P_i^n + \tau \dot{P}_i \quad (5.17)$$

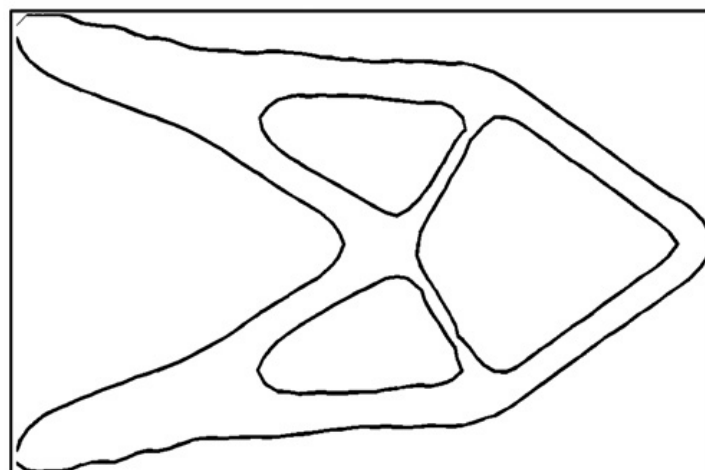
\dot{P}_i – predstavlja vektor smjera traženja (steepest descent direction).

Vektor smjera traženja uvrštava se u gradijentnu metodu najbržeg spusta kao gradijent funkcije pomoću kojeg će se vršiti traženje minimuma Lagrangeove funkcije (4.37). Slika 45 prikazuje načelni dijagram toka postupka najbržeg spusta level set parametriziranom plohom.

Rezultati dobiveni topološkim optimiranjem opisanim postupkom predstavljeni su u brojnim radovima [41], [45], [46], [47], i poslužit će nam za usporedbu rezultata istraživanja (Slika 46).



Slika 45 Dijagram toka optimiranja level set plohe metodom najbržeg spusta



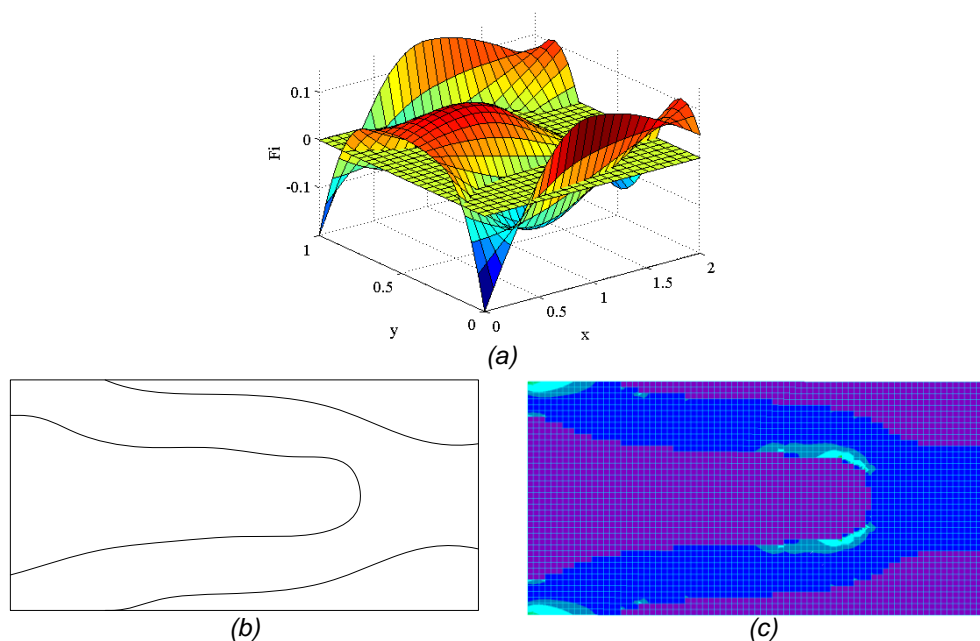
Slika 46 Jedan od rezultata topološkog optimiranja H-J transportnom jednadžbom

5.5 FEM model

Optimiranje level set metodom promatrat će se kroz primjer 2D nosača opterećenog na savijanje. Naprezanja, deformacije i pomaci u konstrukciji računat će se metodom konačnih elemenata u gotovom programskom paketu ADINA, a detaljnija razrada analize konačnim elementima dana je u poglavlju 2.6.1, gdje je prikazan i dijagram toka metode konačnih elemenata (Slika 12).

Postoje dva načina rješavanja metodom konačnih elemenata pri promjeni oblika :

- Zamjenski materijala „Ersatz material“ (poglavlje 2.6.1.1) Slika 47-a i c i
- Premrežavanje (Remeshing) odnosno ponovno formiranje mreže konačnih elemenata. Pri promjeni geometrije potrebno je ponovno kreirati mrežu konačnih elemenata. Ovaj postupak je numerički zahtjevan jer je potrebno parametrizirati granice domene unutar koje će se formirati nova mreža konačnih elemenata koja je i sama numerički zahtjevana. Parametrizacija ruba svodi se na ispitivanje kroz koje elemente prolazi rub, te se kroz težište tih elemenata provlači parametarska jednadžba (B-ploha, RBF funkcija, itd.) - Slika 47-a i b.



Slika 47 Prikaz stvaranja nove mreže konačnih elemenata parametrizacijom granica level set funkcije (a) i (b) i metodom zamjenskog materijala (c)

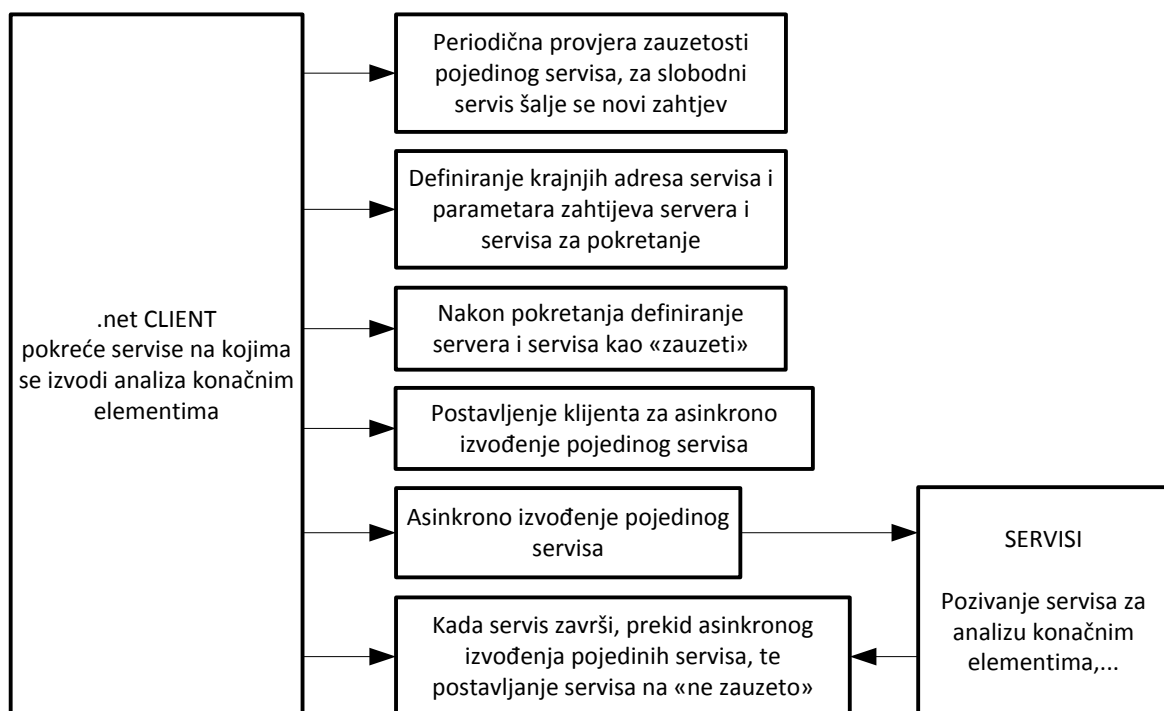
Kako je ponovno kreiranje mreže konačnih elemenata numerički zahtjevniji postupak u smislu proračunskog vremena, u ovom radu vršit će se analiza konačnim elementima metodom zamjenskog materijala.

5.6 Numerička implementacija optimiranja oblika i topologije razvojem ad-hoc heterogenog workflowa u računalnom clusteru sa paralelizacijom

Topološko optimiranje oblika level set metodom može se izvoditi promjenom vrijednosti parametara (varijabli optimiranja) koje parametriziraju level set plohu. Na ovaj način promjenom varijabli optimiranja (kontrolne točke B-plohe ili RBF funkcije) mijenja se geometrija i topologija modela. U ovom slučaju Hamilton-Jacobieva jednadžba nije potrebna.

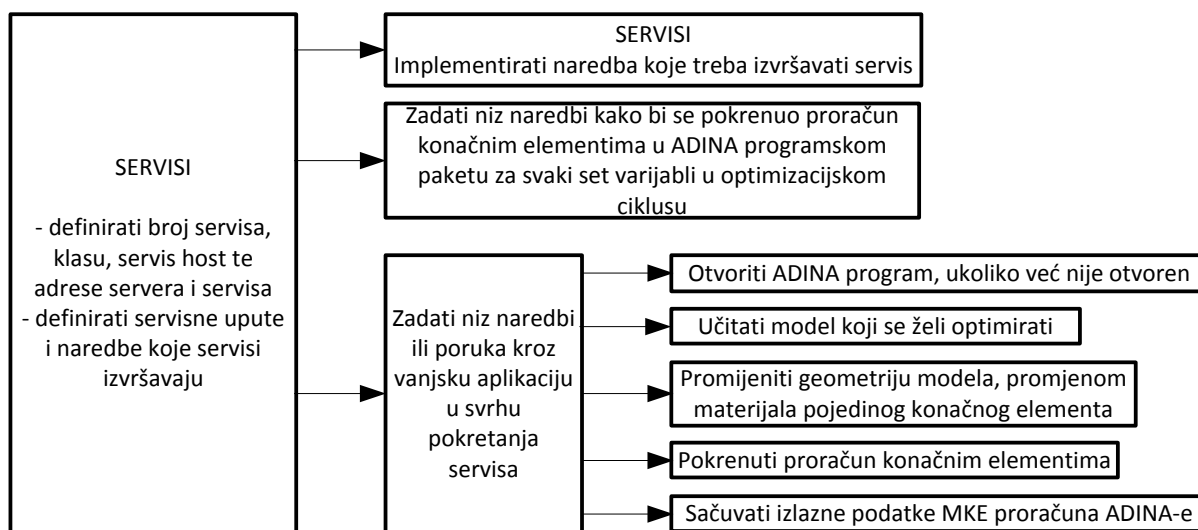
Primjer ovakvog postupka optimiranja dao je Habert u svojem radu [67] uz primjenu SQP (Sequential Quadratic Programming) postupka optimiranja.

Iz sveg navedenog uočava se da topološko optimiranje oblika podrazumijeva niz različitih složenih numeričkih postupaka (parametrizacija geometrije, metode optimiranja funkcije cilja, izračun fizikalnih pojava u modelu te pohrana i obrada podataka). Numerički postupak određivanja fizikalnih pojava u modelu rješavaju se u raznim programskim alatima metodom konačnih elemenata (ADINA, CATIA, NASTRAN, FLUENT, itd.). Jedan od ciljeva ovog rada je spojiti gotove programske pakete koji rješavaju naprezanja i deformacije u modelu sa topološkim optimiranjem geometrije modela. Komunikacija između različitih aplikacija odrađena je .net WCF (Windows Communication Foundation) klijent aplikacijom (Slika 48).



Slika 48 Dijagram toka klijenta koji traži zahtjev od servisa za izvršenje niza naredbi preko WCF servisa

Uz klijent aplikaciju postavlja se servis aplikacija (Slika 49), koja pomoću klase „message passing“ naredbom „SendKey“ može upravljati sa računalom (pozvati odgovarajući program, upravljati sa radom programa i izvršavati program), te rezultate koji se dobiju proračunom moguće je postupkom rudarenja podataka (Data mining) spremirati na disk računala i obrađivati u svrhu dobivanja funkcije cilja i ograničenja danog problema.



Slika 49 Dijagram toka servisa koji izvršavaju zadani set naredbi pomoću WCF servisa

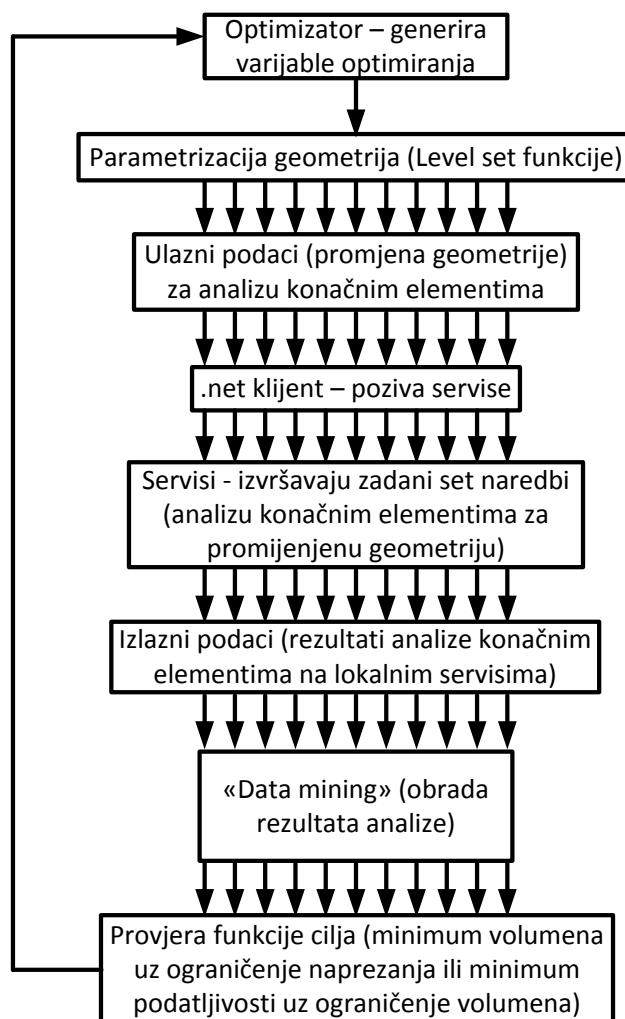
Rudarenje podataka je postupak koji uzima podatke iz izlaznih tekstualnih datoteka kreiranih nakon numeričkog postupka (konačnim elementima) u nekom od programskih alata za numeričku analizu (ADINA). Izlazna tekstualna datoteka sadrži rezultate (naprezanja i deformacije) modela konzolne grede opterećene silom (Slika 28). Postupkom rudarenja podataka izdvajaju se podaci koji su potrebni za daljnji proračun i analizu u procesu optimiranja.

Klijent aplikacija poziva odgovarajući servis koji izvršava set zadanih naredbi (proračun konačnim elementima). Servis može biti na istom računalu gdje se nalazi i klijent (Local Host), ili se preko IP adresa mogu pozivati udaljeni servisi (cluster računala) čime se omogućuje paralelizacija procesa optimiranja. U tom slučaju, sve podatke proračuna pojedinih servisa potrebno je spremirati na klijent računalo koje obrađuje podatke i na osnovu rezultata proračuna može obavljati proces optimiranja. Za svaki servis potrebno je posebno prevesti program sa vlastitom IP adresom i zadanim setom naredbi kojeg servis treba izvršiti. Aplikaciju je potrebno aktivirati na servisu kako bi servis čekao upute klijenta koji daje naredbu za pokretanje servisa. Na klijent računalo potrebno je registrirati svaki od uslužnih servisa (servis reference), sa pripadajućim IP adresama i portom kojeg je potrebno propustiti kroz vatrozid (ukoliko je uključen). Klijent provjerava asinkrono zauzetost pojedinog servisa, te ukoliko je servis slobodan, moguće mu je zadati novo izvršenje za drugi set varijabli optimiranja.

U ovom radu izrađen je tok podataka (workflow) sustav u programskom jeziku C#, sa klijent aplikacijom (Slika 48) i servis (WCF) aplikacijom (Slika 49), kao izvršnom datotekom (exe) [53]. Paralelno računanje je testirano, te smanjuje vrijeme izvršenja procesa optimiranja genetskim algoritmom proporcionalno sa povećanjem broja računala. Broj paralelnih računala pri predloženom načinu paralelizacije jednak je broju populacije, ili njenom višekratniku. Primjeri topološkog optimiranja u ovom radu koriste servis koji se poziva na istom računalu gdje i klijenti, odnosno korišteno je jedno računalo pri topološkom optimiranju konstrukcije.

Prilikom procesa optimiranja, optimizator generira set varijabli koje mijenjaju geometriju zadanog modela. Optimizator nakon toga poziva klijent aplikaciju koja pokreće servis (ili više njih) da izvrši zadani set naredbi (analizu konačnim elementima). Izlazni podaci dobiveni numeričkom analizom obrađuju se prethodno opisanim postupkom (rudarenjem podataka). Postupkom rudarenja podataka dobivaju se podaci pomoću kojih se određuju vrijednosti funkcije cilja (npr. volumen) i ograničenja (npr. naprezanja i deformacije) za postupak optimiranja.

Slika 50 prikazuje dijagram toka optimiranja nosača (Slika 28):



Slika 50 Dijagram toka procesa optimiranja

WCF i rudarenje podataka su općenite metode komuniciranja između različitih aplikacija, te je stoga ova metoda primjenjiva na različite tipove problema. WCF komunikacija ima prednost pred ostalim metodama paralelizacije jer se mogu izvoditi različiti procesi na paralelnim računalima, što kod klasičnih clustera nije slučaj.

5.7 Metoda odgrizanja materijala (elementa sa najmanjim vrijednostima naprezanja)

Metoda odgrizanja materijala smanjuje volumen konstrukcije na način da se u svakom prolazu proračuna metodom konačnih elemenata pronađu elementi sa najmanjim vrijednostima naprezanja, te se tim elementima u sljedećem koraku mijenjaju svojstva materijala u izrazito meki materijal. Metoda ovisi o broju konačnih elemenata i najprimitivniji je način topološkog optimiranja.

Optimiranje metodom odgrizanja materijala je nepovratan proces optimiranja, odnosno elementi koji u toku procesa optimiranja dobiju svojstva ne-nosivog dijela konstrukcije, ne mogu se više pojaviti kao nosivi elementi. Iz tog razloga metoda odgrizanja materijala je primjenjiva samo za jednostavnije primjere optimiranja konstrukcija.

Za problem kao u poglavlju 5.1 metodom odgrizanja materijala optimiran je konzolni nosač definiran u programskom paketu ADINA kao 2D nosač uklješten na lijevom kraju i opterećen silom na desnom kraju. Omjer raspona ploče iznosi 2:1 (Slika 28).

Usvojena je širina ploče 10 puta manja od visine. Broj konačnih elemenata na koji se podijelio konzolni nosač je 3200 elemenata.

Korišten je 2D konačni element ravninskog stanja naprezanja, za koji je usvojeni omjer visine u odnosu na širinu ploče relativno velik, međutim omjeri dimenzija nisu presudni jer je svrha ovog istraživanja analiza topoloških pojava u promatranoj ploči.

Za materijal konstrukcije odabran je aluminij sa svojstvima:

$$E_1 = 70 \text{ GPa} - \text{Youngov modul elastičnosti}$$

$$\nu = 0.25 - \text{Poissonov omjer}$$

Konstrukcija kojoj se dodijelio ne-nosivi materijal ima sljedeća svojstva materijala:

$$E_2 = 700 \text{ Pa} - \text{Youngov modul elastičnosti}$$

$$\nu = 0.25 - \text{Poissonov omjer}$$

Kriterij za dodjelu mekšeg materijala nosivom dijelu konstrukcije je naprezanje u pojedinom nosivom elementu. Metodom konačnih elemenata u programskom paketu ADINA proračunala su se naprezanja u svakom elementu i ispisala u jednu izlaznu datoteku. Postupkom rudarenja podataka izrađenim u vlastitom C-programu izdvojili su se elementi sa najmanjim naprezanjima, naprezanja koja su veća od dopuštenih naprezanja (ukoliko postoje) ($\sigma_{dop} = 60 \text{ MPa}$) i deformacije veće od neke zadane vrijednosti.

Elementi koji imaju najmanja naprezanja proglašavaju se kao ne-nosivi dijelovi konstrukcije u ulaznoj datoteci za proračun konačnim elementima u ADINA programskom paketu.

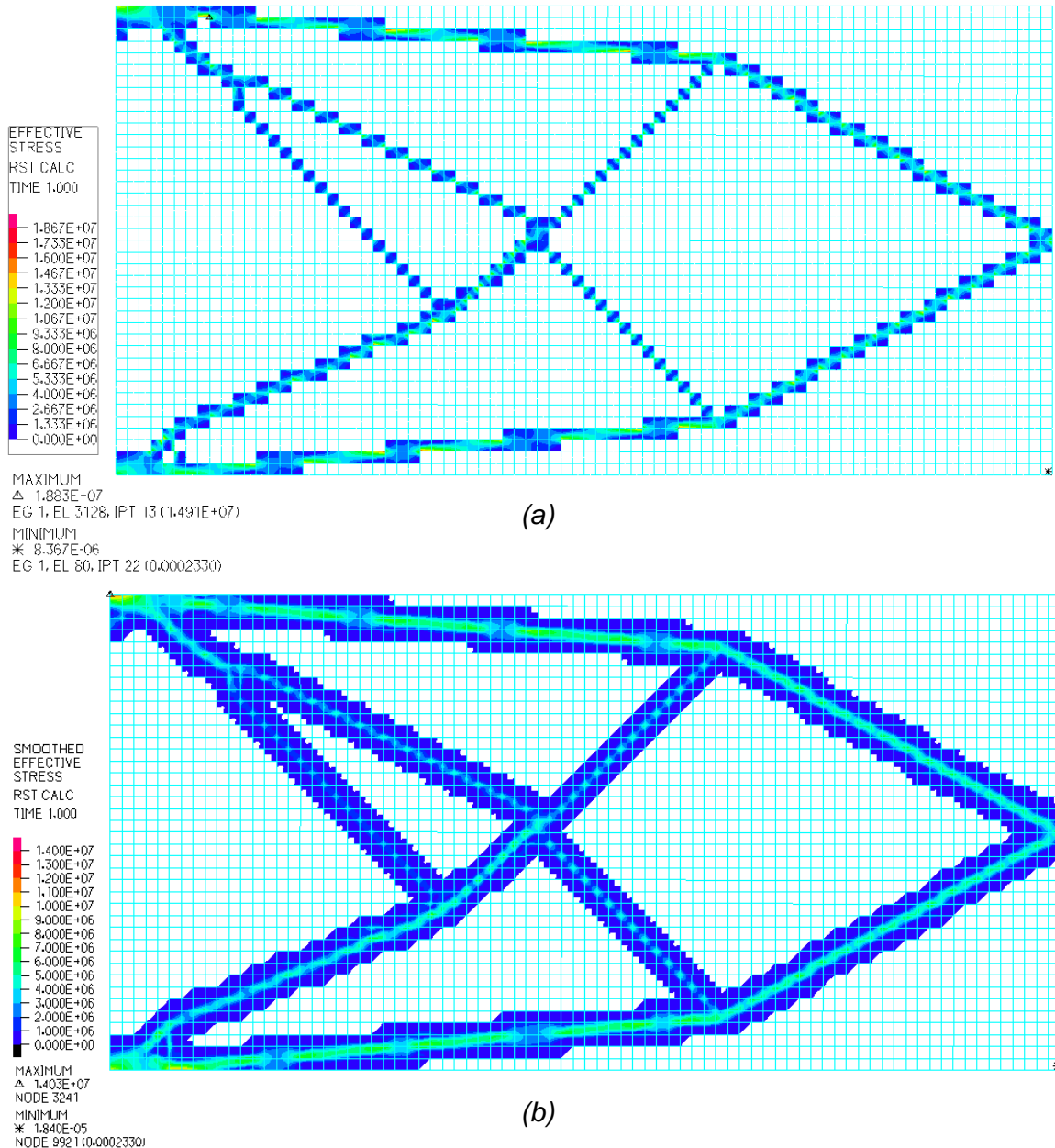
Analogno postupku rudarenja podataka, postoji i postupak pohrane podataka („Data burying“) koji mijenja tekstualnu datoteku ulaznih podataka. Ulazni podaci („input file“) se u svakoj iteraciji mijenjaju na način da se učita tekstualna ulazna datoteka modela konzolnog nosača te se u njemu izmjeni modul elastičnosti svih elemenata koji su u tijeku optimiranja poprimili ne-nosiva svojstva. Nakon toga pokreće se proračun konačnim elementima za sljedeću iteraciju.

Proračun konačnim elementima pokreće se u „batch modu“ programa ADINA iz nekog od programskih alata (C, MATLAB, itd.) start-run naredbom.

Postupak se ponavlja sve dok se ne pojave naprezanja ili deformacije veća od dopuštenih.

Smanjenje volumena 2D grede koje se dobiva opisanom metodom odgrizanja materijala sa početne pune ploče (3200 elemenata) je 85.16% i iznosi 14.84% od početnog volumena (475 elementa) (Slika 51). Koncentracija naprezanja na mjestima gdje je uski pojas prijelaza iz punog materijala u meki javlja se samo uslijed prikaza vrijednost naprezanja u integracijskim točkama (Slika 51 -a). Ako se odabere „Smooth plot“ (zaglađeni prikaz) naprezanja u ADINA-i dobiva se bolji uvid u raspodjelu naprezanja kroz promatranu gredu. „Smooth plot“ funkcija u programskom paketu ADINA prikazuje vrijednosti naprezanja u svim čvorovima konačnih elemenata (Gaussovima točkama) (Slika 51 - b).

Metoda je vrlo primitivna. Ako se u tijeku proračuna pojave naprezanja i deformacije veće od dopuštenih, proces optimiranja se zaustavlja. Vrijeme proračuna je direktno proporcionalno broju konačnih elemenata.



Slika 51 Optimum pri rješavanju odgrizanja konačnih elemenata sa najmanjim vrijednostima naprezanja (a) naprezanja u elementima (b) naprezanja u Gaussovima točkama

Ovaj jednostavni primjer sa 3200 elemenata izvodio se oko 100 minuta.

U rješenju dobivenom metodom odgrizanja materijala (Slika 51) može se uočiti asimetrija konzolne konstrukcije. Bolji rezultat optimiranja dobili bi ukoliko se poveća broj konačnih elemenata.

Rezultat dobiven topološkim optimiranjem odgrizanjem materijala služiti će za usporedbu sa rezultatima dobivenih topološkim optimiranjem parametriziranom level set plohom (poglavlje 6).

6. Rezultati istraživanja

U dosadašnjim istraživanjima, predstavljena je level set metoda topološkog optimiranja transportnom Hamilton-Jacobievom jednadžbom. Ovakav proces optimiranja temelji se na gradijentnom postupku i izračunu smjera pomicanja izo-linije level set funkcije (poglavlje 4). Gradijentni algoritmi iz proizvoljnog rješenja (npr. iz pune ploče) daju loša rješenja pri topološkom optimiranju. Razlog lošeg rješenja je sklonost zaustavljanja gradijentnih algoritama u lokalnim ekstremima funkcije cilja (poglavlje 5.4).

Pri topološkom optimiranju modela iz proizvoljnog početnog rješenja, moguće je globalnim metodama traženja minimuma funkcije cilja (genetskim algoritmom) pronaći dobra inicijalna rješenja za topološko optimiranje gradijentnim postupcima.

Genetski algoritam je globalna metoda traženja minimuma funkcije cilja, međutim metoda je spora, pogotovo kod modela sa velikim brojem varijabli optimiranja.

U ovom poglavlju ispitat će se koliko je metoda topološkog optimiranja level set parametriziranom plohom (RBF funkcijom ili B-plohom) opisanom u poglavlju 4 (Slika 27), sposobna generirati dobra inicijalna rješenja za gradijentne postupke topološkog optimiranja.

Također se želi ispitati koliki broj parametara level set funkcije koja opisuje model utječe na mogućnost reprezentacije modela 2D konzole opterećene silom na kraju (Slika 28).

6.1 Rezultati topološkog optimiranja level set funkcijom parametriziranom radijalnim baznim funkcijama

U ovom radu kao prvi primjer optimiranja level set metodom, parametrizirana je level set funkcija RBF aproksimacijskom metodom (2.48), (2.49), (2.59) sa 36 parametara opisa. RBF parametri α_c , d_c i q odabrani su kako je predloženo u poglavlju 5.2 za 6x6 varijabli optimiranja. $\alpha_c = 0.1$, $d_c = 0.5$ i $q = 0.3$

U većini radova broj konačnih elemenata i broj varijabli optimiranja je isti (7200-120x60 [40]), (1200-60x20 [7], [46]), (5000-100x50 [45]), a kako u ovom radu broj varijabli optimiranja opisuje parametarsku level set funkciju koja opisuje geometriju modela moguće je odabrati proizvoljan broj konačnih elemenata, bez povećanja varijabli optimiranja.

Broj konačnih elemenata koji je usvojen za naredne primjere je 3200 (80x40) (kao u radu Xing i suradnika[41]). Sa većim brojem konačnih elemenata povećava se točnost, a i prikaz rezultata je bolji.

Apksimirana level set ploha mijenja se u procesu optimiranja pomoću varijabli optimiranja.

Varijable optimiranja su z koordinate čvorova RBF funkcije.

Funkcija cilja je minimalni volumen uz ograničenja naprezanja. Volumen je definiran kao zbroj konačnih elemenata nosivog dijela konstrukcije (diskretna funkcija).

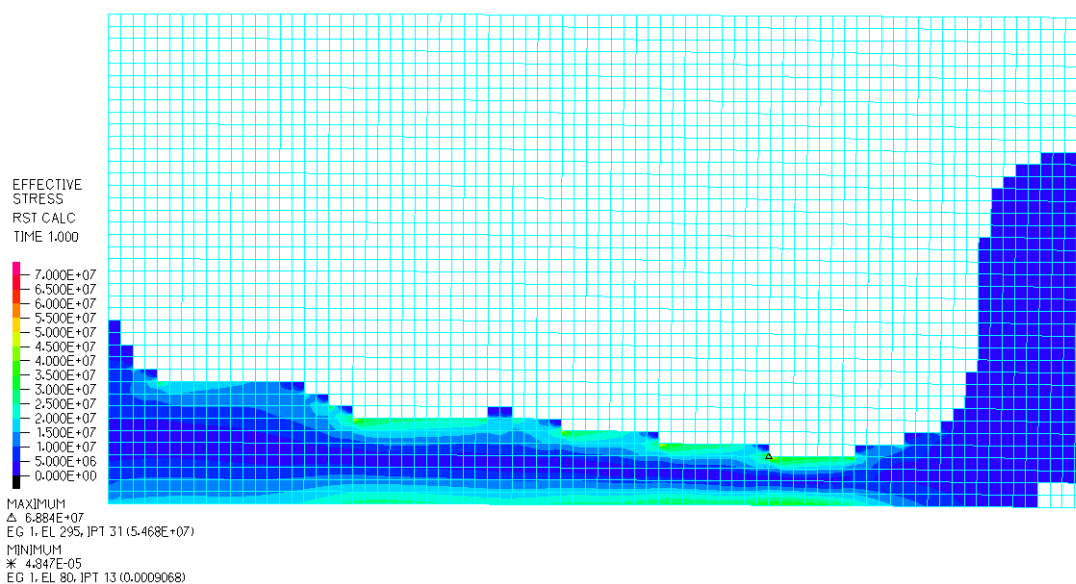
Podaci o ekvivalentnim naprezanjima koji se javljaju u modelu dobivaju se postupkom rudarenja podataka, opisanim u poglavlju 5.6, za sve Gaussove točke u svim konačnim elementima.

Naprezanja koja su veća od dopuštenih zbrajaju se i ulaze kao ograničenja u formulaciju sa vanjskom kaznenom funkcijom (2.14). Dozvoljena naprezanja za odabrani materijal modela (aluminij) iznose $\sigma_{dop} = 60$ MPa. Naprezanja u elementima koja su veća od dopuštenih normirana su prema jednadžbi (5.4).

Primjenom C# vlastitog programa WCF, opisanog u poglavlju 5.6, pokreće se proces numeričkog rješavanja konačnim elementima.

Model koji se podvrgava topološkoj optimizaciji je 2D greda ukliještena na svom lijevom kraju, i opterećena silom na desnom kraju kako je opisano u poglavlju 5.1 (Slika 28).

Na tijek optimiranja veliki značaj imali su parametri oblika α_c , d_c i q koji govore o širini zvona RBF funkcije i utjecaju okolnih čvorova (poglavlje 5.2). Ukoliko je umnožak parametara $\alpha_c \cdot d_c$ velik (50% širine nosača – odnosno 0.5), RBF aproksimacija nije bila u stanju formirati rupe u promatranoj domeni. Razlog tome je međusobni utjecaj svih točaka RBF-a (vidi poglavlje 5.2). Međutim, ukoliko su parametri oblika premali, dolazi do lokalizacije u pojedinim čvorovima, što također može imati loš utjecaj pri topološkom optimiranju (slaba povezanost varijabli). Stoga će se ovaj umnožak parametara ($\alpha_c \cdot d_c$) značajno smanjiti (5% širine nosača 0.05). Odabir „dobre“ vrijednosti parametara oblika α_c , d_c i q razmotrio se u poglavlju 5.2.



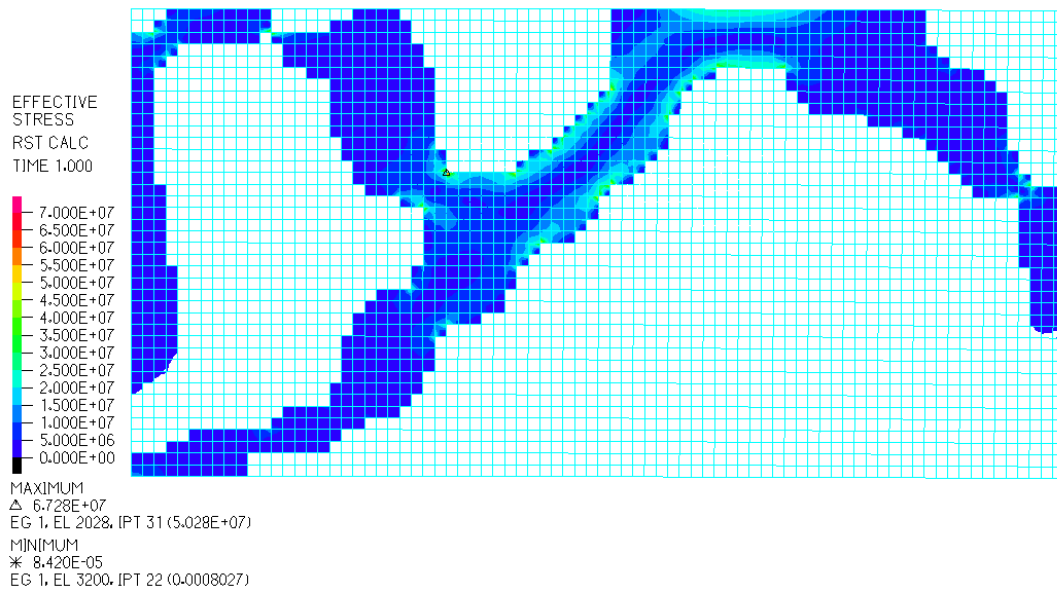
Slika 52 Nosač optimiran metodom genetskog algoritma. Level set funkcija opisana sa 6x6 RBF čvorova, $\alpha_c \cdot d_c = 0.05$, $q = 0.3$ i 3200 konačnih elemenata iz pune ploče

Slika 52 prikazuje optimum dobiven sa malim brojem parametara koji opisuju level set funkciju, svega 36 varijabli. Početno rješenje je puna ploča sa 3200 konačnih elemenata, a volumen je smanjen za 76% odnosno na 24% od početnog broja elemenata (768 elemenata). Postupak optimiranja izvršavao se genetskim algoritmom uz populaciju od 108 jedinki i 200 generacija. Broj elitnih jedinki koji se prenosio u sljedeću generaciju iznosio je 2. Parametar križanja jedinki postavljen je tako da se 80% jedinki iz prethodne generacije (ne uključujući elitne jedinke) međusobno križa slučajnim algoritmom, a križane jedinke prenose se u sljedeću generaciju. Mutacija djeluje nad ostalim jedinkama koje nisu sudjelovale u križanju, gdje se svakoj jedinci mijenja dogovarajući postotak (usvojeno 5%) kromosoma slučajnim algoritmom ravnomjerno po jedinci (uniformna mutacija).

Raspon unutar kojeg se kreću kontrolne točke (varijable optimiranja) može utjecati na brzinu konvergencije genetskog algoritma. U ovom primjeru odabran je raspon varijabli optimiranja između -1 i 1. Korišteno je realno kodiranje varijabli i funkcije cilja pri optimiranju genetskim algoritmom.

Povećanjem generacija pri optimiranju genetskim algoritmom nije se uspjelo dobiti bolje rješenje. Uočeno je da mali broj parametara RBF aproksimacije ne opisuje dobro level set funkciju za zadani problem optimiranja.

Povećanjem broja varijabli optimiranja na 144, dobiva se (Slika 53):



Slika 53 Nosač optimiran metodom genetskog algoritma. Level set funkcija opisana sa 12x12 RBF čvorova, $\alpha_c \cdot d_c = 0.05$, $q = 0.05$ i 3200 konačnih elemenata iz pune ploče

Parametri RBF interpolacijskih funkcija promijenjeni su prema predloženim vrijednostima iz poglavlja 5.2 (Tablica 1). Postupak optimiranja izvodio se genetskim algoritmom uz populaciju od 864 jedinke kroz 100 generacija. Također, povećanjem broja generacija genetski algoritam nije uspio naći bolje rješenje.

Iz priloženih rezultata u poglavlju 5.2 može se zaključiti da broj od 144 varijable optimiranja može opisati nosač manjeg volumena nego dobiveni rezultati u ovom poglavlju (6.1).

Pokazalo se da predložena formulacija nije dala dobra rješenja topološki optimiranog modela.

Razlozi za loše rezultate topološkog optimiranja level set metodom parametriziranim RBF funkcijama mogući su uslijed loše kontrole RBF aproksimacije level set funkcije. Daljnji postupak topološkog optimiranja obavljat će se B-plohom kao funkcijom opisa level set plohe, dok se parametrizacija level set funkcije RBF aproksimacijskim funkcijama ostavlja za buduća istraživanja. Aproksimacija B-plohom daje bolju kontrolu parametrizirane funkcije.

6.2 Rezultati topološkog optimiranja level set funkcijom parametriziranom B-plohom

U poglavlju 5.2 zaključilo se da je RBF aproksimacija level set funkcije vrlo ovisna o parametrima oblika RBF-a (α_c , d_c i q), kao i o broju čvorova interpolacije (varijable optimiranja), što je čini manje pogodnom od aproksimacije B-plohom.

U nastavku će se koristiti uniformna B-ploha drugog stupnja, za opis level set funkcije, pri topološkom optimiranju konzolnog nosača opterećenog silom na kraju, kako je opisano u poglavlju 5.1. Varijable koje utječu na preciznost reprezentacije level set funkcije B-plohom su broj kontrolnih točaka (varijable optimiranja) i stupanj B-plohe.

Broj konačnih elemenata koji je usvojen za naredne primjere je 3200 (80x40). Sa većim brojem konačnih elemenata povećava se točnost, a i prikaz rezultata je bolji.

Aproksimirana level set ploha mijenja se u procesu optimiranja pomoću varijabli optimiranja. Varijable optimiranja su z koordinate čvorova B-plohe. Budući rad bi mogao za varijable optimiranja mijenjati kontrolne točke u svim smjerovima (x, y i z).

Težišta konačnih elemenata zadanog modela ispituju se u odnosu na vrijednost aproksimirane level set funkcije. Ukoliko koordinati težišta promatranog konačnog elementa pripada negativna vrijednost aproksimirane level set funkcije, konačni element poprima svojstva materijala nosivog dijela konstrukcije (Youngov modul elastičnosti aluminijskog $E_{Al} = 70$ [GPa]). Ako koordinati težišta promatranog konačnog elementa pripada pozitivna vrijednost level set funkcije, konačnom elementu smanjuje se Youngov modul elastičnosti ($E_m = 700$ [Pa]) uslijed čega takav konačni element nije u mogućnosti prenositi opterećenje. Unos promijenjenih podataka u tijeku optimiranja vrši se postupkom pohrane podataka opisanim u poglavlju 5.7.

Analizu konstrukcije konačnim elementima moguće je izvesti WCF komunikacijom na način koji je opisan u poglavlju 5.6, što omogućuje izvršenje različitih procesa paralelno. Vrijeme jednog proračuna ovakvom metodom traje oko 13 sekundi. Alternativno WCF postupku izvršenja proračuna može se koristiti „Batch mode“ programa ADINA. Numerička analiza poziva se direktno iz programskog jezika preko run aplikacije, ali se više ne mogu izvoditi različiti procesi paralelno u toku optimiranja, što u ovom trenutku nije potrebno.

Ako koristimo „Batch“ mod programa ADINA vrijeme jednog proračuna skratilo se za 77% i iznosi 3 sekunde. Pokretanjem proračuna u „Batch“ modu direktno se u ulaznu datoteku, koju pokreće ADINA, postupkom pohrane podataka unose promjene nastale u svakom koraku optimiranja. Postupkom rudarenja podataka, opisanim u poglavlju 5.6, izdvajaju se svi potrebni podaci za proces optimiranja iz izlazne datoteke dobivene numeričkom analizom (konačnim elementima).

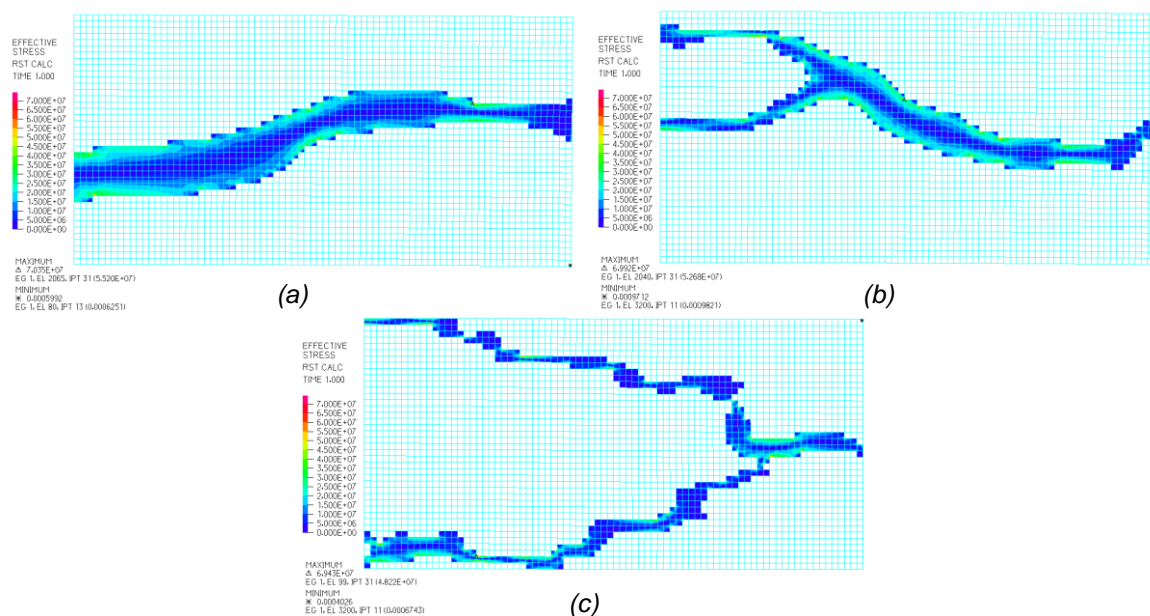
6.2.1 Formulacija minimalnog volumena pri topološkom optimiranju level set funkcijom

Za formulaciju problema kao funkcija cilja uzima se minimum volumena, dok su ograničena prekomjerna odstupanja naprezanja i deformacija.

Podaci o ekvivalentnim naprezanjima u modelu dobivaju se postupkom rudarenja podataka, opisanim u poglavlju 5.6, za sve Gaussove točke u svim konačnim elementima. Naprezanja koja su veća od dopuštenih zbrajaju se i ulaze kao ograničenja u formulaciju sa vanjskom kaznenom funkcijom (2.14). Dozvoljena naprezanja za odabrani materijal modela (aluminij) iznose $\sigma_{dop} = 60$ [MPa]. Ograničenja naprezanja i pomaka normirana su prema jednadžbama (5.4) i (5.5) iz poglavlja 5.3.1.

6.2.1.1 Optimiranje metodom genetskog algoritma

Za broj aproksimacijskih čvorova B-plohe odabralo se 36 (6x6) čvorova (Slika 54 -a), 144 (12x12) čvora (Slika 54 - b) i 576 (24x24) čvorova (Slika 54 - c). Broj čvorova aproksimacijske level set funkcije je i broj varijabli optimiranja. Optimiranje se izvodilo metodom genetskog algoritma uz početno rješenje pune ploče (3200 konačnih elemenata), te uz prethodno opisane uvjete (6.2). Broj elitnih jedinki koji se prenosio u sljedeću generaciju iznosio je 2. Parametar križanja jedinki postavljen je tako da se 80% jedinki iz prethodne generacije (ne uključujući elitne jedinke) međusobno križa slučajnim algoritmom. Križane jedinke prenosi u sljedeću generaciju. Mutacija je parametar genetskog algoritma koji mijenja određene jedinke iz trenutne generacije i tako izmijenjene jedinke prenosi u sljedeću generaciju. Parametar križanja kombiniranjem kromosoma jedinki iz prethodne generacije, stvara novu jedinku. Kada je populacija približno konvergentna, križanje ne pridodaje promjeni populacije, jer se križaju iste jedinke. Tada se koristi mutacija. Mutacija djeluje nad jedinkama koje nisu sudjelovale u križanju, gdje se svakoj jedinci mijenja dogovarajući postotak (npr. 5%) kromosoma slučajnim algoritmom ravnomjerno po jedinci (uniformna mutacija). Parametar mutacije povećava raznolikost populacije, međutim prevelike vrijednosti mutacije nad većim dijelom populacije može uzrokovati degeneraciju populacije. Raspon unutar kojeg se kreću kontrolne točke (varijable optimiranja) može utjecati na brzinu konvergencije genetskog algoritma. U ovom primjeru odabran je raspon varijabli optimiranja između -1 i 1. Korišteno je realno kodiranje varijabli i funkcije cilja pri optimiranju genetskim algoritmom.



Slika 54 Rješenje level set optimiranja genetskim algoritmom iz pune ploče sa (a) 36 varijabli, (b) 144 varijabli i (c) 576 varijabli

Za slučaj 36 varijabli koji opisuju level set funkciju (Slika 54 - a), veličina populacije genetskog algoritma bila je 108, a broj generacija 500 dok je vrijeme trajanja proračuna (sa WCF-om) bilo oko 475 sati. Optimum koji je dobiven u ovako definiranom modelu optimiranja smanjio je volumen na 16.6% (531 element) od početnog volumena (3200 elemenata). Zbog dugog trajanja proračuna sa relativno malim brojem varijabli numerička analiza konačnim elementima izvodit će se u ADINA „Batch modu“, čime se izbjegava WCF i ubrzava proces optimiranja.

Slika 54 - b prikazuje rješenje topološkog optimiranja grede sa 144 varijable optimiranja uz populaciju 864 jedinke i kroz 100 generacija. Vrijeme koje je bilo potrebno za optimiranje je 268 sati pri proračunu u Batch modu ADINA-e, dok je optimalna konstrukcija smanjila svoj volumen na 13.4% (428 elemenata) od početnog volumena pune ploče (3200 elemenata).

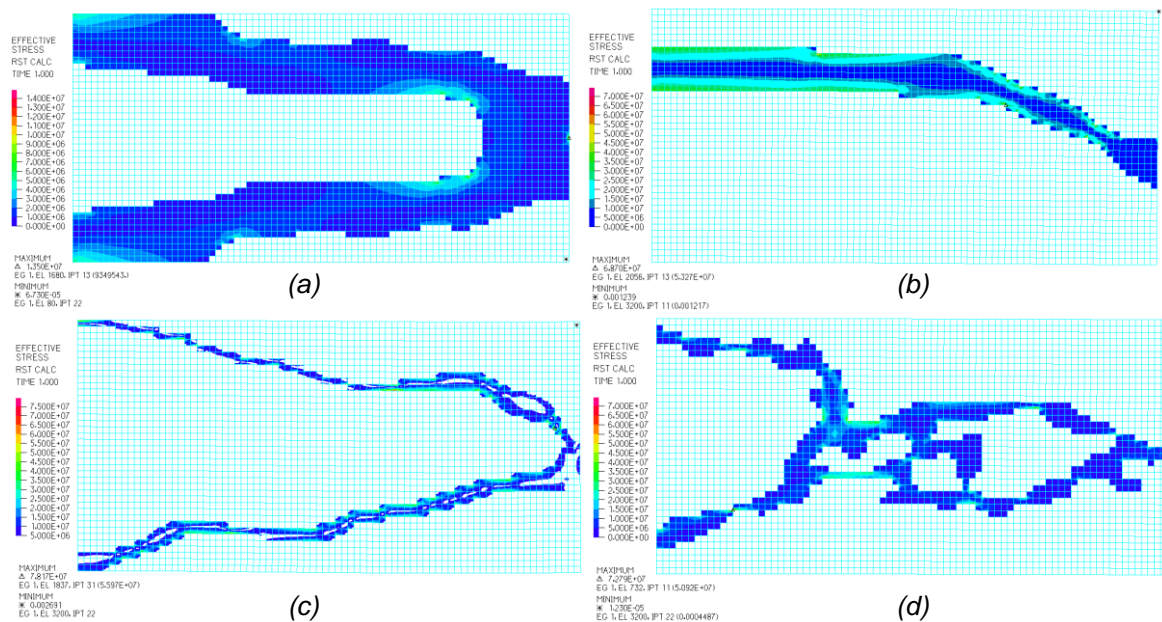
Za broj varijabli optimiranja 576 proračun je trajao 470 sati uz populaciju 1728 jedinki i kroz 88 generacija pri proračunu u Batch modu ADINA-e. Optimalna konstrukcija smanjena je na 12.3% (394 elemenata) od početnog volumena (3200 elemenata).

Parametri genetskog algoritma uzimaju se vrlo oprezno. Veličina populacije jedinki ima utjecaj kod raznolikosti jedinki, koja je nužna za dobivanje globalnog optimuma funkcije cilja. Iz iskustva je poznato da veličina populacije treba biti barem tri puta veća od broja varijabli optimiranja, kako bi se osigurala dobra raznolikost jedinki u jednoj generaciji. Veliki broj generacija doprinosi konvergenciji populacije prema rješenju. Postupak optimiranja zaustavlja se kada je postignut maksimalni broj generacija ili ako postupak konvergira ranije prema rješenju. Vrijeme optimiranja direktno je proporcionalno veličini populacije i broju generacija, te se stoga iskustveno uzima broj

generacija između 100 i 200. Kao kriterij zaustavljanja procesa topološkog optimiranja moguće je uzeti promjenu funkcije cilja. Odnosno, ukoliko nema smanjenja funkcije cilja kroz određeni broj generacija, genetski algoritam se može zaustaviti.

Uspoređujući dobivene rezultate (Slika 54), može se zaključiti da manji broj varijabli ima za posljedicu deblje pojaseve konture (Slika 54-a). Veći broj varijabli koje opisuju level set plohu omogućuje dobivanje tanjih pojaseva konture modela (Slika 54-c), ali se broj varijabli optimiranja značajno povećava, što ima za posljedicu produljenje vremena proračuna. Međutim, postoji mogućnost da se promjenom parametara genetskog algoritma dobije bolje rješenje i sa smanjenim brojem varijabli (npr. 144 varijable, Slika 54-b). Ispitivanje utjecaja operatora genetskog algoritma na rješenje topološkog optimiranja grede dano je u poglavlju 6.2.1.2.

Ukoliko se algoritmu optimiranja (genetski algoritam) zada početno rješenje (Slika 55 - a) uz iste uvjete optimiranja kao u prethodnom primjeru, dobivaju se sljedeći rezultati (Slika 55 b,c i d):



Slika 55 Rješenje level set optimiranja genetskim algoritmom iz (a) početnog rješenja, (b) sa 36 varijabli, (c) 144 varijable i (d) 576 varijabli optimiranja

Za 36 varijabli optimiranja, veličina populacije genetskog algoritma bila je 108, a broj generacija 500, te je vrijeme trajanja proračuna (sa WCF-om) bilo oko 319 sati. Volumen dobiven uz ovakve uvjete smanjen je na 30.3% (435 elemenata) od početnog volumena (1463 elementa), odnosno na 13.6% volumena pune ploče (3200 elemenata) (Slika 55 – b).

Level set funkcija opisana sa 144 varijable optimiranja optimirala se genetskim algoritmom sa veličinom populacije od 864 jedinke i kroz 100 generacija. Vrijeme koje je bilo potrebno za optimiranje modela je 177 sati pri proračunu u Batch modu ADINA-e. Optimalna konstrukcija

dobivena je kao 25.9% (379 elemenata) od početnog rješenja (1463 elementa), odnosno 11.8% volumena od pune ploče (3200 elemenata) (Slika 55 - c).

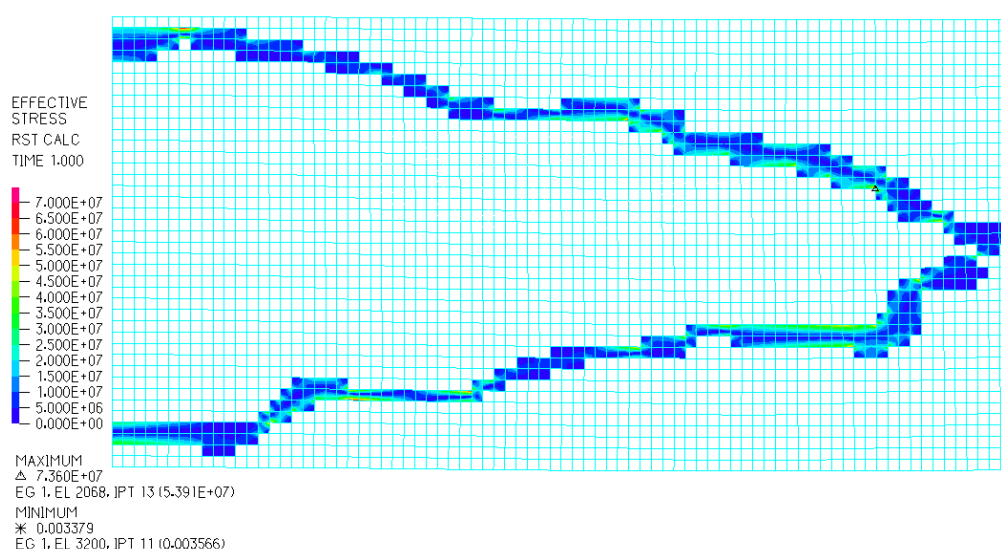
Poveća li se broj varijabli koji opisuju level set funkciju na 576, uz optimiranje genetskim algoritmom i veličinu populacije 1152 jedinke kroz 300 generacija, vrijeme optimiranja trajalo je 1205 sati pri proračunu u Batch modu ADINA-e. Volumen dobivene konstrukcije je 46% (674 elemenata) od početnog volumena (1463 elementa), ili 21% volumena od pune ploče (3200 elemenata) (Slika 55 - d).

Iz rješenja je vidljivo da je 36 varijabli optimiranja premali broj. Level set funkcija opisana sa malim brojem parametara nije u mogućnosti prikazati optimalni oblik kako je opisano u poglavlju 5.1. Povećanjem broja varijabli dobivaju se bolja rješenja, ali se produžava vrijeme proračuna jer povećanjem broja varijabli potrebno je povećati populaciju koja mora biti barem tri puta veća od broja varijabli.

Prilikom topološkog optimiranja level set funkcijom opisanom sa 576 varijabli (Slika 55 - c), iz početnog rješenja (Slika 55 - a) veličina populacije je 1152, što je dva puta više od broja varijabli. Uočeno je da veća populacija daje bolji rezultat.

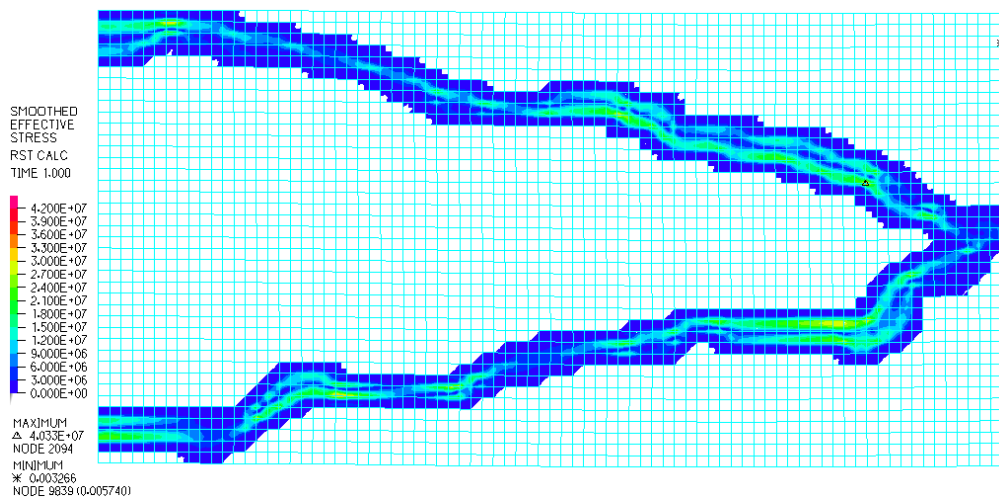
U primjeru topološkog optimiranja grede iz pune ploče rezultat optimiranja je bolji, iako je broj generacija trostruko manji (100 generacija) (Slika 54 - c). Veličina populacije je vrlo bitan parametar pri optimiranju genetskim algoritmom, kako bi dobili što veću raznolikost jedinki.

Povećanjem populacije genetskog algoritma iz prethodnog primjera (sa 576 varijabli optimiranja i 1152 jedinke) na 1728 jedinke uz manji broj generacija (100 generacija), dobiva se smanjenje volumena na 22,5% (330 elementa) od početnog rješenja (1463 elementa), odnosno 10,3% od pune ploče (3200 elemenata) (Slika 56):



Slika 56 Rješenje level set optimiranja genetskim algoritmom iz početnog rješenja (Slika 55 a) sa 576 varijabli, uz povećanu populaciju

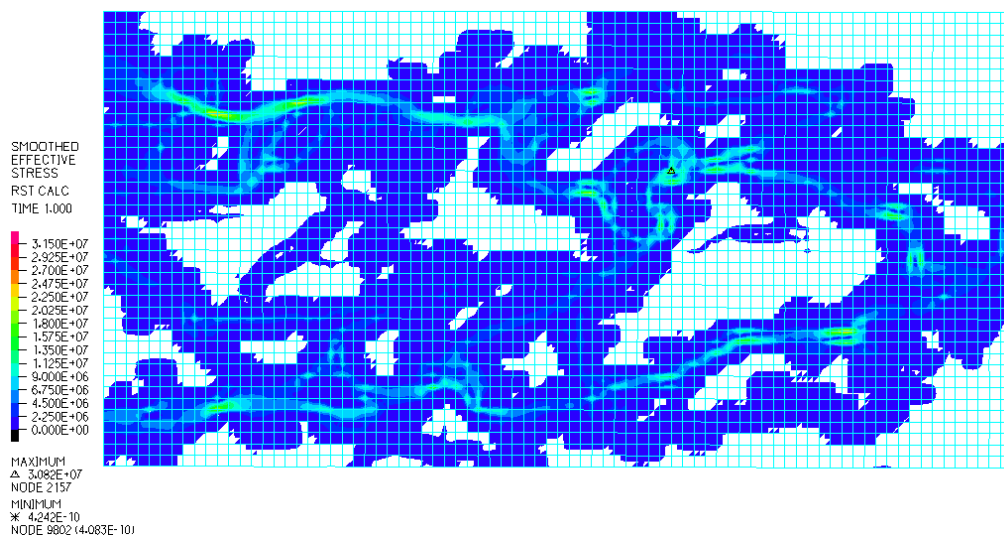
Koncentracija naprezanja na mjestima gdje je uski pojas prijelaza iz punog materijala u meki javlja se samo uslijed prikaza vrijednost naprezanja u integracijskim točkama. Ako se odabere zaglađeni prikaz naprezanja u ADINA-i dobiva se bolji uvid u raspodjelu naprezanja kroz promatranu gredu. Rješenja prikazana na prethodnim slikama (Slika 54, Slika 55, Slika 56) daju naprezanja u elementima, dok u ADINA programskom paketu postoji „smooth plot“ funkcija, koja zaglađuje prikaz naprezanja prikazujući vrijednosti naprezanja u svim čvorovima konačnih elemenata (Slika 57):



Slika 57 Rješenje level set optimiranja genetskim algoritmom iz početnog rješenja (Slika 55 a) sa 576 varijabli, uz povećanu populaciju i prikaz naprezanja u čvorovima konačnih elemenata

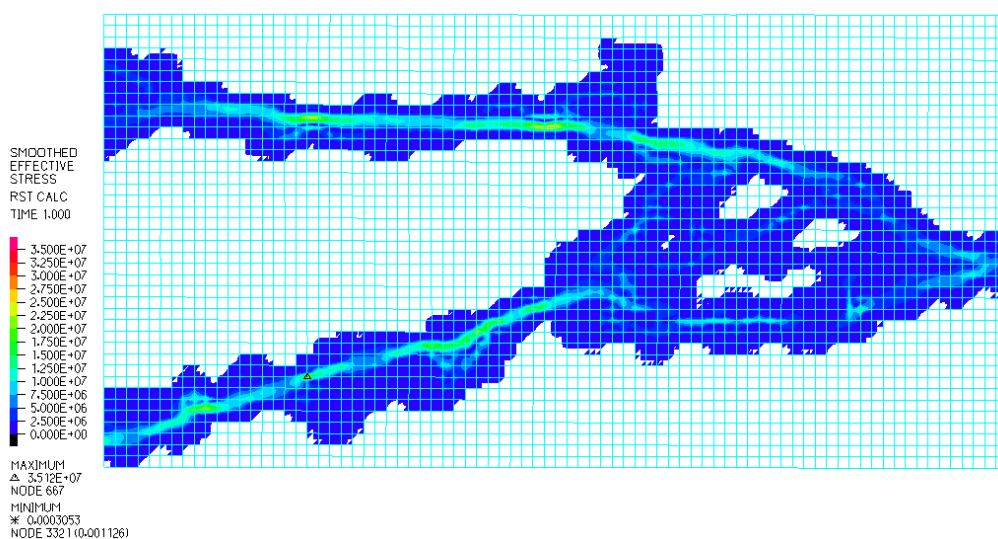
Za 2304 (48x48) varijabli optimiranja genetskim algoritmom sa populacijom 6627 i 13 generacija iz pune ploče dobiva se kao rješenje 1519 elemenata. (Slika 58).

Ako se promotri rezultat dobiven topološkim optimiranjem level set funkcijom sa 2304 varijable optimiranja iz pune ploče kao početnog rješenja, uočava se približavanje oblika konstrukcije štapnoj konstrukciji, kakva je dobivena kao diskretno rješenje u poglavlju 5.1 (Slika 58):



Slika 58 Level set optimiranja sa 2304 varijabli optimiranja genetskim algoritmom iz pune ploče u 13 generacija – zaglađeni prikaz raspodjele naprezanja (prikaz konvergencije)

Povećanjem broja generacija, konstrukcija (Slika 58) će se približavati optimalnom rješenju (Slika 59), ali vrijeme trajanja procesa topološkog optimiranja raste na 1320 sati:



Slika 59 Level set optimiranja sa 2304 varijabli optimiranja genetskim algoritmom iz pune ploče sa većim brojem generacija (200) – prikaz naprezanja u čvorovima konačnih elemenata

Softverski cluster i paralelizacija koji su razvijeni i testirani (poglavlje 5.6), značajno bi skratili vrijeme trajanja procesa optimiranja, jer se najveći dio vremena troši na izračune jedinki (funkcije cilja i ograničenja). Primjer koji se izvodi 600 sati, paralelizacijom uz 600 računala svodi na se jedan sat izračuna.

6.2.1.2 Razvoj kaznenog GA operatora za ekvivalentne jedinke

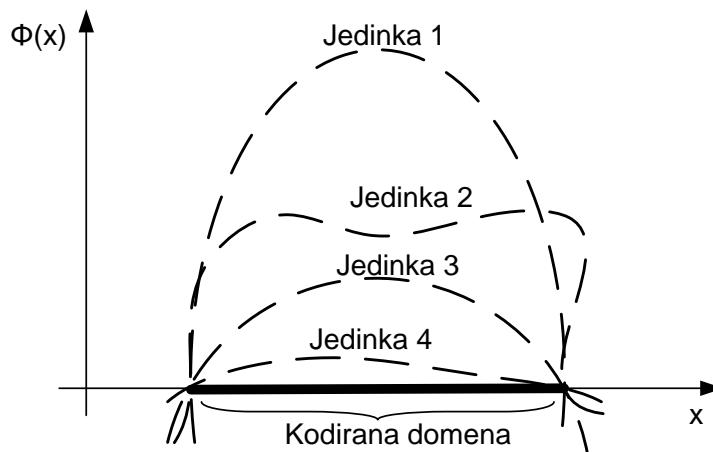
Promatrajući jedinke zadnje generacije genetskog algoritma koji kodiraju interpolacijske čvorove uočava se prerana konvergencija (jedinke su ekvivalentne ili iste). Prerana konvergencija može se pojaviti zbog:

- loše osjetljivosti funkcije cilja
- pojave da više jedinki daju istu funkciju cilja (efekt smanjenja populacije)

Osjetljivost funkcije cilja moguće je povećati na način da se funkciju cilja (minimalni broj nosivih elemenata konstrukcije) iz diskretne pretvori u kontinuiranu funkciju, dodatkom na funkciju cilja. Dodatak mora osigurati da funkcija cilja bude kontinuirana, te da smanjuje funkciju cilja kad se smanjuje i volumen konstrukcije. Detaljniji opis dodatka funkciji cilja predstavljen je u poglavlju 5.3.1.

Pojava kada različite jedinke (level set funkcije) u populaciji daju istu ili sličnu domenu (izo liniju level set funkcije) dolazi uslijed opisa domene (u n dimenziji) level set plohom (jedinkama u $n+1$ dimenzijskom prostoru), što je nepovoljno za konvergenciju genetskog algoritma. Mnoge različite jedinke kodiraju jedno te isto rješenje (oblik domena) (Slika 60).

Puno različitih genotipa kodira isti fenotip što dovodi do pristranog genetskog algoritma. Slika 60 prikazuje situaciju kada su jedinke ekvivalentne, gdje se uočava da različite jedinke koje imaju različite kromosome kodiraju istu domenu. Ova pojava smanjuje raznolikost populacije te utječe na ranu konvergenciju pri optimiranju.

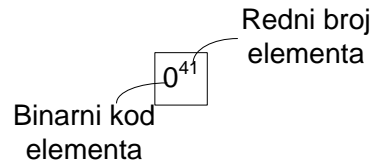


Slika 60 Prikaz opisa iste domene (debela linija) sa različitim level set funkcijama $\Phi(x)$ (isprekidane linije)

Pojava ekvivalentnih jedinki ima za posljedicu osim loše konvergencije genetskog algoritma još i smanjenje raznolikosti u populaciji, smanjenje efektivne populacije, povećanje trajanja proračuna i lažnu konvergenciju genetskog algoritma prema rješenju.

Optimiranjem gradijentnim metodama (u dosadašnjoj literaturi) ova pojava nije predstavljala problem, jer je smjer traženja gradijentnom metodom derivacija funkcije, a postupak pronalazi lokalni ekstrem.

Pojava ekvivalentnih jedinki može se spriječiti kažnjavanjem funkcije cilja za ekvivalentne jedinke u generaciji, u svrhu kojeg je razvijen operator na način da se u svakoj generaciji pronalaze ekvivalentne jedinke. U procesu optimiranja ekvivalentne jedinke kažnjavaju se određenim dodatkom na funkciju cilja. Time se postiže veća raznolikost populacije. Slika 63 predstavlja dijagram toka topološkog optimiranja parametriziranom level set plohom genetskim algoritmom koji u svakoj generaciji pronalazi ekvivalentne jedinke koje kažnjava. Ekvivalentne jedinke pronalaze se na način da se svaka jedinka kodira u binarni niz. Binarni niz predstavlja pojedine elemente u domeni koji imaju nosiva svojstva konstrukcije (0) ili ne nosiva svojstva (1), za trenutnu jedinku, određenih na osnovu level set plohe. Sada se trenutna jedinka uspoređuje sa svim prethodnim jedinkama u generaciji, oduzimanjem binarnih članova elemenata jedinki koje se uspoređuju (Slika 61). Razlika binarnih članova pojedinih jedinki sprema se u niz „usporedba“, koji na mjestima gdje su elementi niza jednaki ima vrijednost 0, dok su na ostalim mjestima različiti od nule. Prebrojavanjem nul vrijednosti u nizu „usporedba“ dolazi se do podatka koliko sličnosti imaju dvije uspoređene jedinke. Ukoliko je sličnost veća od neke zadane vrijednosti (90%), vrijednost funkcije cilja jedinke koja se uspoređuje kažnjava se sa određenim kaznenim dodatkom, čime se ekvivalentnu jedinku u jednoj generaciji čini manje pogodnom za križanje, odnosno sprečava se nastanak sličnih jedinki u sljedećoj generaciji.



Jedinka 1

0 ⁴¹	0 ⁴²	0 ⁴³	0 ⁴⁴	0 ⁴⁵	0 ⁴⁶	0 ⁴⁷	0 ⁴⁸	0 ⁴⁹	0 ⁵⁰
0 ³¹	0 ³²	0 ³³	0 ³⁴	0 ³⁵	0 ³⁶	0 ³⁷	0 ³⁸	0 ³⁹	0 ⁴⁰
0 ²¹	0 ²²	0 ²³	0 ²⁴	0 ²⁵	0 ²⁶	0 ²⁷	0 ²⁸	0 ²⁹	0 ³⁰
1 ¹¹	1 ¹²	1 ¹³	1 ¹⁴	1 ¹⁵	1 ¹⁶	1 ¹⁷	1 ¹⁸	1 ¹⁹	1 ²⁰
0 ¹	0 ²	0 ³	0 ⁴	0 ⁵	0 ⁶	0 ⁷	0 ⁸	0 ⁹	0 ¹⁰

Jedinka 2

1 ⁴¹	1 ⁴²	1 ⁴³	0 ⁴⁴	0 ⁴⁵	0 ⁴⁶	0 ⁴⁷	0 ⁴⁸	0 ⁴⁹	0 ⁵⁰
0 ³¹	0 ³²	1 ³³	1 ³⁴	1 ³⁵	1 ³⁶	1 ³⁷	0 ³⁸	0 ³⁹	0 ⁴⁰
0 ²¹	0 ²²	0 ²³	0 ²⁴	0 ²⁵	0 ²⁶	1 ²⁷	1 ²⁸	1 ²⁹	1 ³⁰
0 ¹¹	0 ¹²	1 ¹³	1 ¹⁴	1 ¹⁵	1 ¹⁶	1 ¹⁷	0 ¹⁸	0 ¹⁹	0 ²⁰
1 ¹	1 ²	1 ³	0 ⁴	0 ⁵	0 ⁶	0 ⁷	0 ⁸	0 ⁹	0 ¹⁰

Usporedba = |Jedinka 1 - Jedinka 2|

1 ⁴¹	1 ⁴²	1 ⁴³	0 ⁴⁴	0 ⁴⁵	0 ⁴⁶	0 ⁴⁷	0 ⁴⁸	0 ⁴⁹	0 ⁵⁰
0 ³¹	0 ³²	1 ³³	1 ³⁴	1 ³⁵	1 ³⁶	1 ³⁷	0 ³⁸	0 ³⁹	0 ⁴⁰
0 ²¹	0 ²²	0 ²³	0 ²⁴	0 ²⁵	0 ²⁶	1 ²⁷	1 ²⁸	1 ²⁹	1 ³⁰
1 ¹¹	1 ¹²	0 ¹³	0 ¹⁴	0 ¹⁵	0 ¹⁶	0 ¹⁷	1 ¹⁸	1 ¹⁹	1 ²⁰
1 ¹	1 ²	1 ³	0 ⁴	0 ⁵	0 ⁶	0 ⁷	0 ⁸	0 ⁹	0 ¹⁰

Slika 61 Usporedba jedinki koje binarno kodiraju model

Nad lošijim jedinkama u generaciji provodi se povećani postotak mutacije, kako bi se osigurala dodatna raznolikost sljedeće populacije. Veća mutacija provodi se ukoliko se broj ekvivalentnih jedinki povećava. Velika mutacija može utjecati i na dobre jedinke u generaciji, te ih je u procesu optimiranja potrebno sačuvati od promjena povećanjem broja elitnih jedinki koje se prenose direktno u sljedeću generaciju.

J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9
----	----	----	----	----	----	----	----	----	------

Jedinke J2, J5 i J7 su ekvivalentne, a J1 i J3 daju najmanju funkciju cilja
Sljedeća generacija:

Je1	Je3	Jk4-8	Jk6-9	Jm2	Jm5	Jm7
-----	-----	-------	-------	------	-----	-----	-----	------

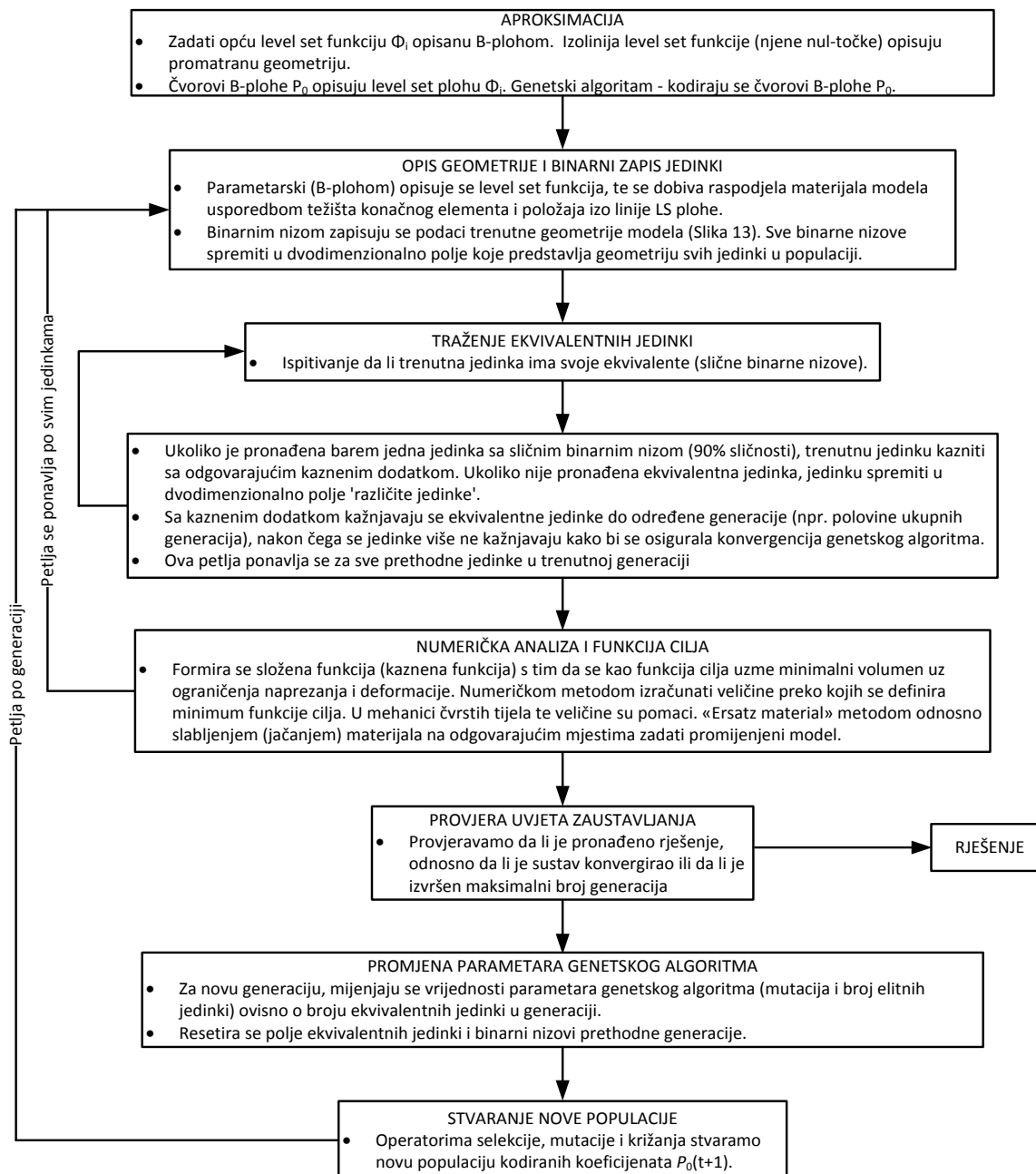
Je – elitne jedinke

Jk – jedinke nastale križanjem

Jm – jedinke nastale mutacijom

Slika 62 Primjer nastajanja jedinki sljedeće generacije

U procesu topološkog optimiranja za svaku generaciju određuje se broj ekvivalentnih jedinki (Slika 62) koje se kažnjavaju. Ukoliko je broj ekvivalentnih jedinki jako mali (npr. manji od 10% populacije), tada se genetski algoritam odvija uz uobičajene vrijednosti mutacije (oko 5%) i elitnih jedinki (koje ovise o veličini populacije). Povećanjem broja ekvivalentnih jedinki u generaciji, potrebno je povećati mutaciju (npr. na 20%, 30% ili 40%, ovisno o udjelu ekvivalentnih jedinki u populaciji) uz istovremeno povećanje broja elitnih jedinki.

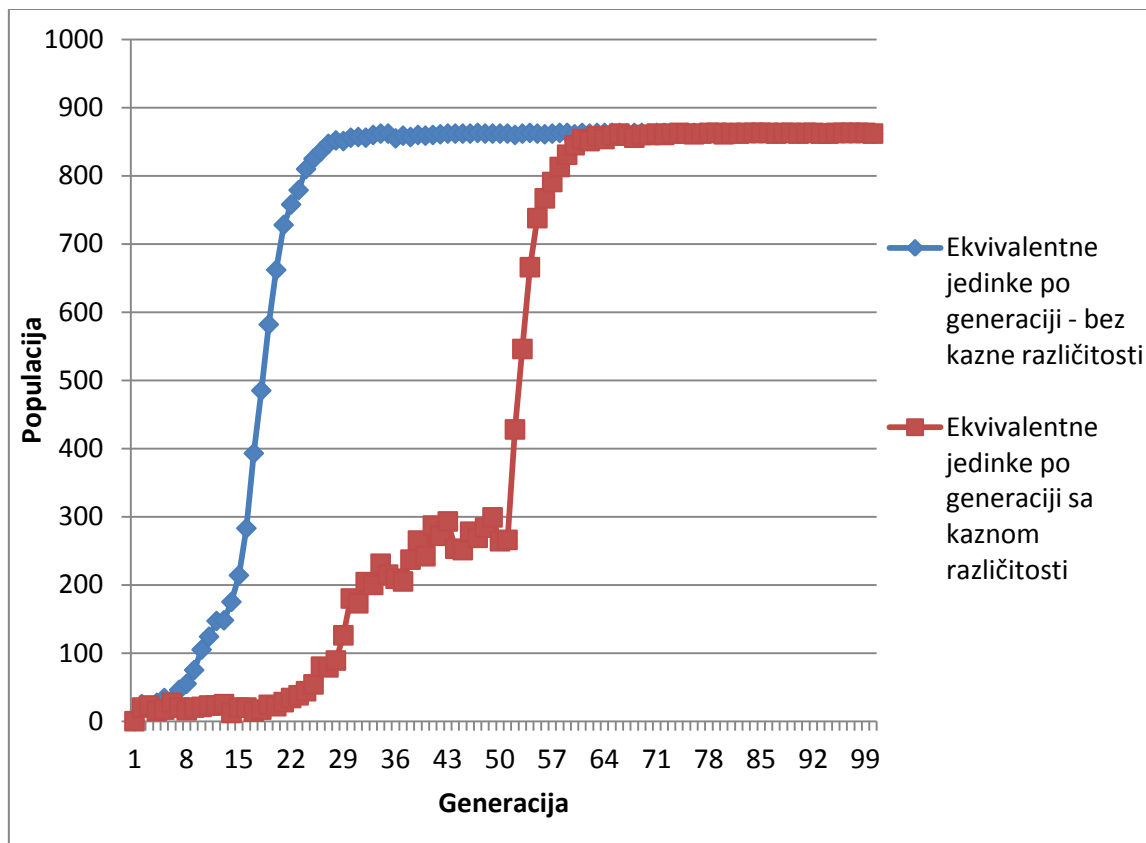


Slika 63 Pseudo kod level set topološkog optimiranja pomoću B-plohe genetskim algoritmom uz kaznu ekvivalentnih jedinki u populaciji

Operatorom genetskog algoritma koji kažnjava ekvivalentne jedinke poboljšava se pretraživanje područja zbog velike mutacije jedinki, a istovremeno čuva odgovarajući broj različitih jedinki (elitne jedinke).

Za vrlo velike iznose mutacije moguće je i polovinu populacije proglasiti elitnim jedinkama.

Utjecaj operatora genetskog algoritma kroz generacije prikazan je na sljedećem dijagramu (Slika 64). Na dijagramu je vidljivo da se kroz generacije povećava broj ekvivalentnih jedinki, što može utjecati na preranu konvergenciju algoritma. Kaznom ekvivalentnih jedinki ova pojava se može regulirati.



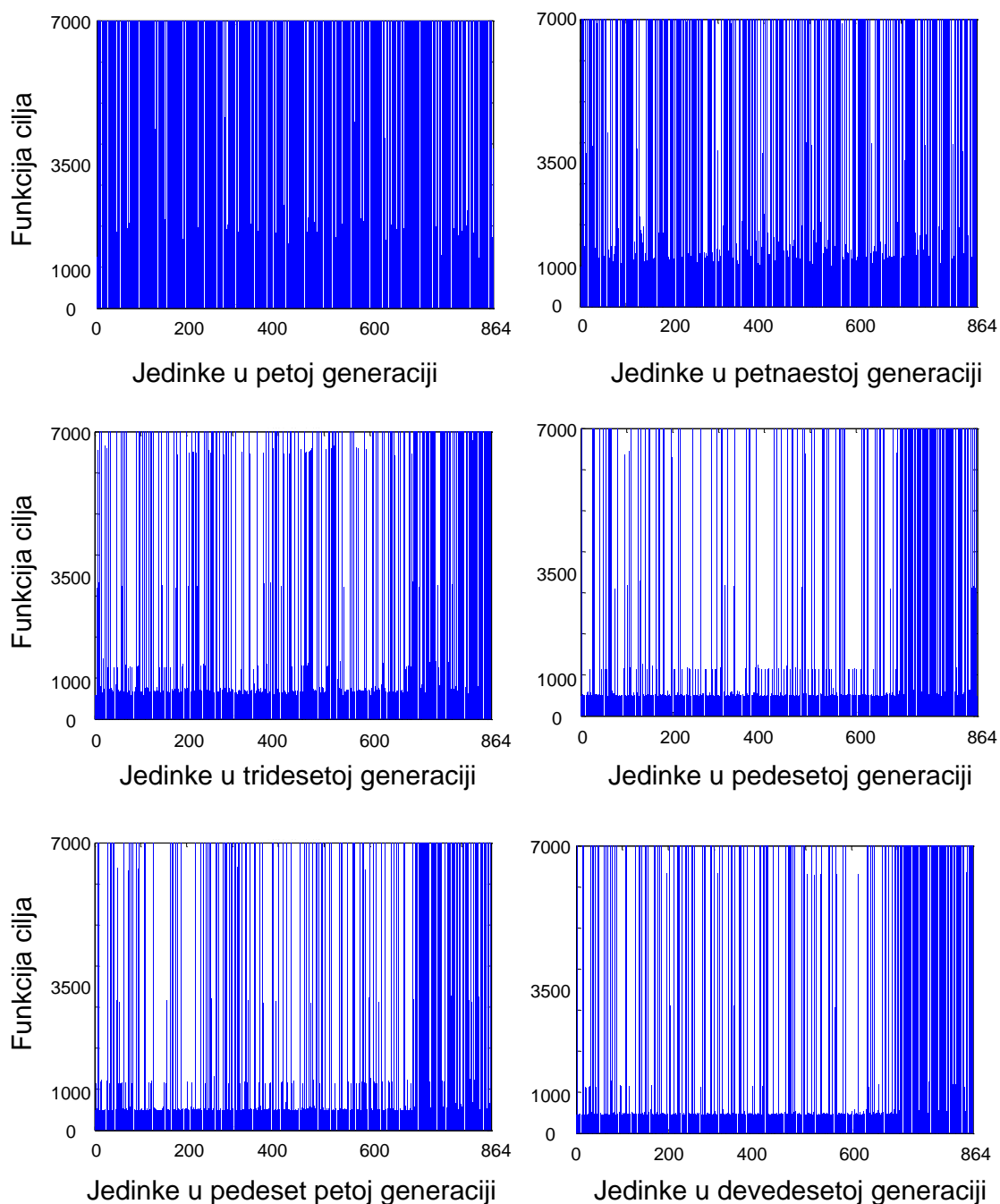
Slika 64 Utjecaj operatora genetskog algoritma na različitost populacije

Operator kazne ekvivalentnih jedinki nije aktivan kroz cijeli optimizacijski ciklus genetskim algoritmom. U prvom dijelu optimiranja genetskim algoritmom, operator osigurava dovoljan broj dobrih i u istom trenutku i različitih jedinki, što ubrzava pronalazak globalnog optimuma genetskim algoritmom. U drugom dijelu optimizacijskog ciklusa operator ne djeluje na jedinke, što omogućuje konvergenciju procesa topološkog optimiranja genetskim algoritmom.

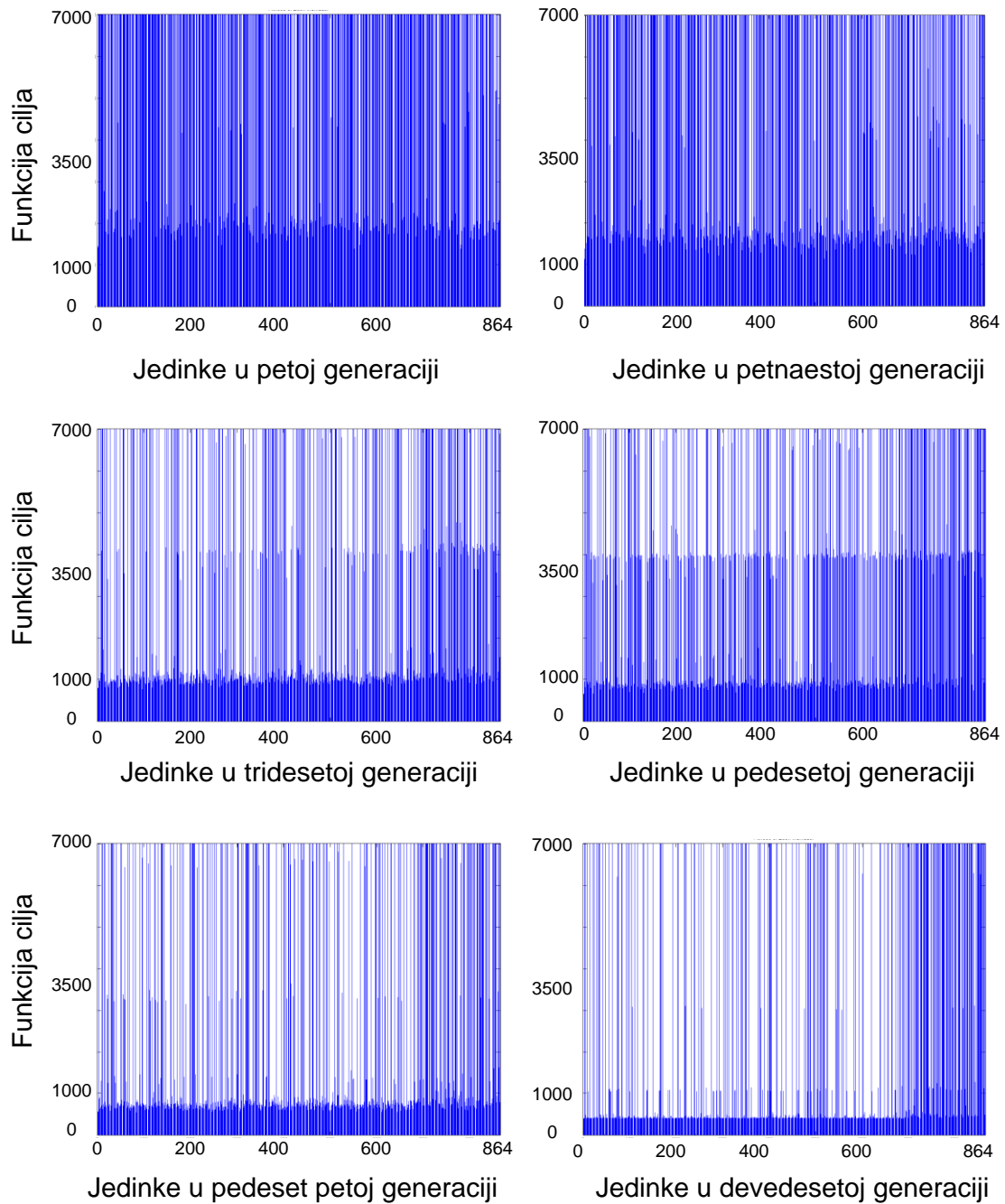
Na sljedećim slikama prikazan je utjecaj kaznenog operatora genetskog algoritma na funkciju cilja u pojedinačnim generacijama. Slika 65 prikazuje vrijednost funkcije cilja populacije u generacijama 5, 15, 30, 50, 55 i 90, bez primjene operatora za kažnjavanje ekvivalentnih jedinki, te se može

primijetiti kako već u tridesetoj generaciji genetskog algoritma većina populacije ima slične vrijednosti funkcije cilja (konvergencija prema rješenju).

Slika 66 prikazuje vrijednost funkcije cilja populacije u generacijama 5, 15, 30, 50, 55 i 90 uz primjenu operatora za kažnjavanje ekvivalentnih jedinki do pedesete generacije. Može se primijetiti kako do pedesete generacije djeluje operator genetskog algoritma, čuvajući pri tome raznolikost populacije. Odmah po prestanku djelovanja ovog operatora, već u pedesetpetoj generaciji primjećuje se konvergencija.

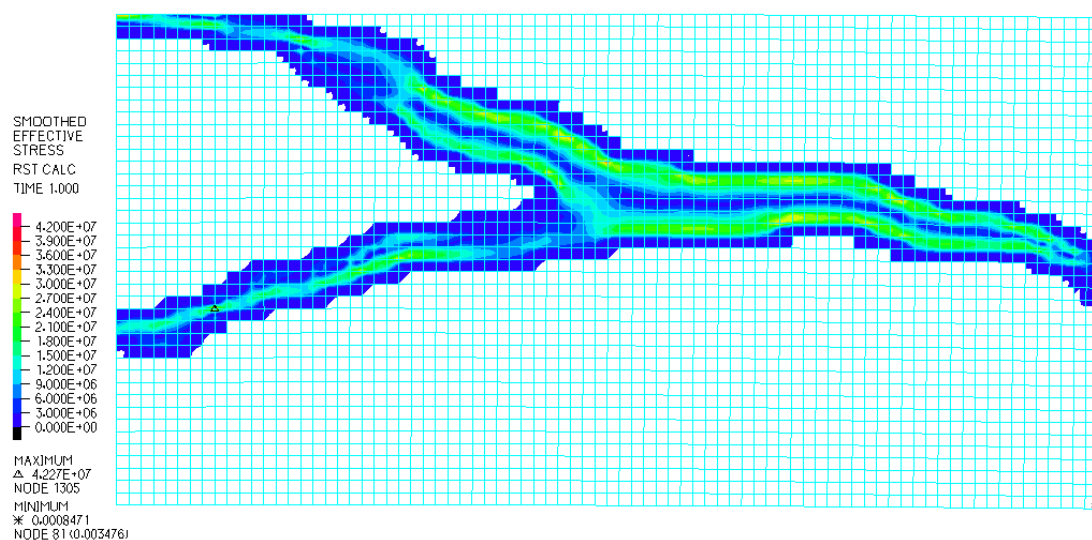


Slika 65 Vrijednost funkcije cilja pojedinih jedinki u generaciji bez kaznenog operatora nad ekvivalentnim jedinkama



Slika 66 Vrijednost funkcije cilja pojedinih jedinki u generaciji bez kaznenog operatora nad ekvivalentnim jedinkama

Rezultat topološkog optimiranja konzole sa 144 varijable optimiranja iz početnog rješenja pune ploče (3200 elemenata), uz iste uvijete kao u primjeru na početku ovog poglavlja (Slika 54) dobiva se smanjenje volumena na 12.56% (402 elementa) (Slika 67):

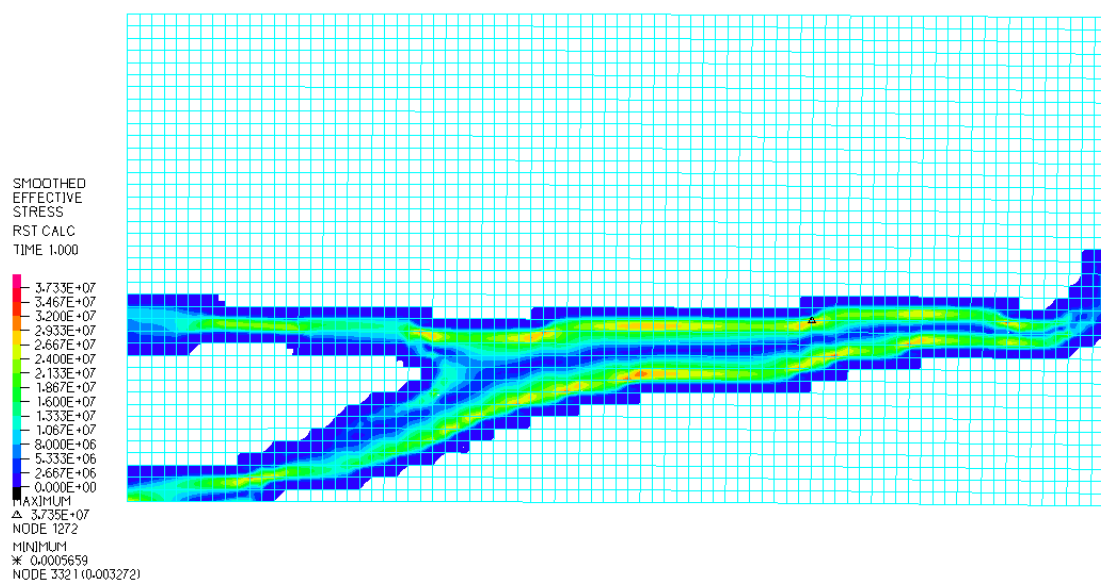


Slika 67 Rješenje level set optimiranja genetskim algoritmom sa 144 varijable optimiranja uz kaznu funkcije cilja za ekvivalentne jedinke u generaciji

Usporedbom dobivenog rezultata (Slika 67) sa rezultatom dobivenim bez primjene kaznenog GA operatora (Slika 54-b) uz isti broj generacija uočava se poboljšanje funkcije cilja za 6%.

Dobiva se učinkovitije pretraživanje topološkog prostora što rezultira bržom konvergencijom.

Ukoliko se postupak optimiranja genetskim algoritmom ponovi, moguće je dobiti ekvivalentne lokalne ekstreme zrcalno simetrične (Slika 68).



Slika 68 Rješenje level set optimiranja sa 144 varijable optimiranja genetskim algoritmom uz kaznu ekvivalentnih jedinki u populaciji iz pune ploče (zrcalno)

Dobiveno je smanjenje volumena 12.13% (388 elemenata) od početnog volumena pune ploče (3200 elemenata), odnosno volumen je smanjen za dodatnih 10% u odnosu na optimiranje bez primjene ovog operatora (428 elemenata Slika 54-b).

Operator kažnjavanja ekvivalentnih jedinki je novo razvijeni algoritam, što ostavlja mogućnosti za poboljšanjem i unapređenjem algoritma u budućim istraživanjima. Stvaranjem pod-populacija jedinki u jednoj generaciji omogućilo bi bolju kontrolu parametara genetskog algoritma (mutaciju, križanje, broj elitnih jedinki, itd.) za svaku pod-populaciju posebno. U budućim istraživanjima mogao bi se ispitati utjecaji promjene parametara genetskog algoritma na rješenje. Formirale bi se pod-populacije podijeljene na jedinke koje imaju najmanje iznose funkcije cilja, a nemaju svojih ekvivalentnih jedinki. Druga pod-populacija sadržavala bi ekvivalentne jedinke, a ostale jedinke bi pripadale trećoj pod-populaciji. Zadavali bi se parametri genetskog algoritma (mutacija, križanje, elitne jedinke, itd.) svakoj od pod-populacija posebno, čime bi se postizala bolja kontrola konvergencije.

Postupkom genetskog algoritma kao globalne metode pronalaze se dobra početna rješenja kako bi se mogao nastaviti postupak topološkog optimiranja gradijentnim postupcima razvijenim i obrađenim u dosadašnjoj literaturi.

6.2.1.3 Optimiranje gradijentnom BFGS metodom

Genetski algoritam vrlo sporo konvergira prema rješenju kada je populacija blizu optimuma, te je potreban veći broj generacija kako bi se dobila rješenja što bliža optimalnom. Za optimiranje na jednom računalu za slučaj 2304 varijable proces bi trebao trajati oko 140 dana (300 generacija) uz dovoljnu radnu memoriju.

Genetski algoritam može dovesti do globalnog optimuma, ali je spora metoda. S druge strane gradijentne metode optimiranja sklone su zaustavljanju u lokalnim ekstremima funkcije. Stoga će se proces optimiranja genetskim algoritmom, nakon određenog broja generacija nastaviti izvoditi gradijentnom metodom. Ovakav način optimiranja naziva se memetički algoritam.

Model koji se optimira opisan je u poglavlju 6.2 i 6.2.1. Broj čvorova aproksimacijske level set funkcije je i broj varijabli optimiranja, a model je opisan sa 3200 konačnih elemenata.

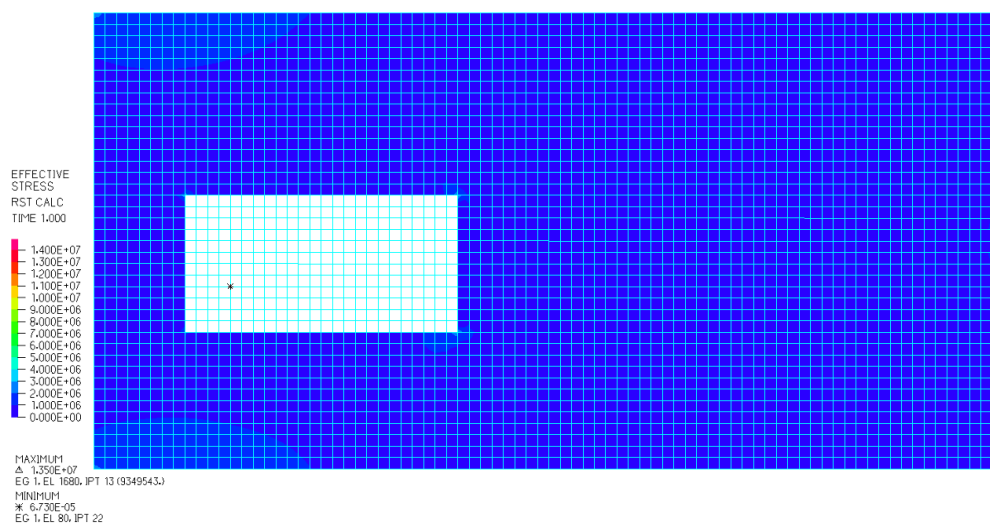
Očekivano je da gradijentna metoda u formulaciji minimuma volumena uz početna rješenja dobivena genetskim algoritmom iz poglavlja 6.2.1.1 neće dati nikakve promjene funkcije cilja ukoliko se kriterij izvrsnosti (funkcija cilja) definira kao diskretni problem. Uz diskretnu funkciju

cilja gradijentni postupak često nije u mogućnosti izračunati smjer najbržeg spusta (derivaciju funkcije).

U poglavlju 5.3.1 predložen je dodatak na funkciju cilja koji će imati karakteristike da diskretnu formulaciju minimuma volumena, pretvori u kontinuiranu funkciju na numerički „jeftiniji“ način, te da ima svojstvo smanjenja funkcije cilja kada se volumen (nastao izo linijom level set funkcije) smanjuje (5.3).

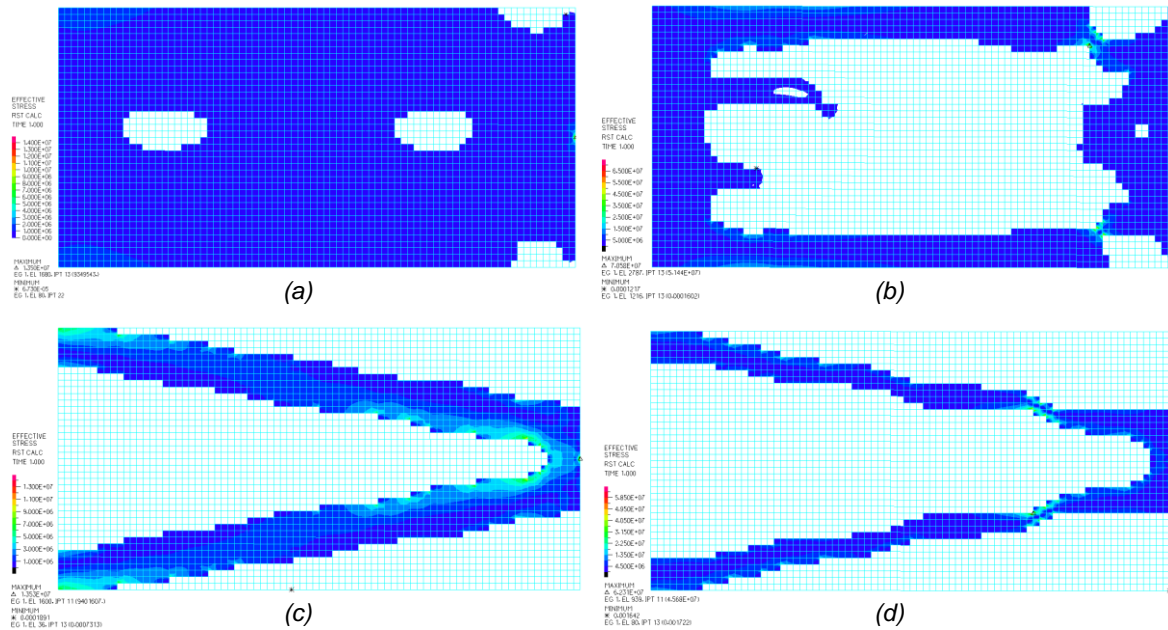
Konačni elementi na rubovima između nosivog i ne-nosivog dijela konstrukcije detektirali su se na način da se za svaki element pronađu njegovi susjedni elementi, te da se ispita da li je umnožak level set funkcije u promatranom elementu i susjednim elementima negativan. Ako je umnožak negativan tada su ta dva promatrana elementa rubna.

Optimiranje iz početnog rješenja pune ploče gradijentnom metodom uz mali broj varijabli optimiranja (36) daje jako loše rješenje (Slika 69). Upravo se iz tog razloga zadaju početna rješenja za gradijentnu metodu optimiranja. Formulacija minimum podatljivosti često se koristi pri optimiranju gradijentnim postupcima, jer je tada funkcija cilja kontinuirana te nisu potrebni dodaci na funkciju cilja.



Slika 69 Optimum iz pune ploče (0 level set ploha) sa 36 varijabli optimiranja

Poveća li se broj varijabli optimiranja na 144, zaustavljanje gradijentnih postupaka optimiranja u lokalnom ekstremu iz nekih zadanih početnih rješenja prikazuje Slika 70:



Slika 70 Rješenja dobivena gradijentnom metodom optimiranja (b) i (d) iz zadanih početnih rješenja (a) i (c) uz 144 varijable optimiranja

Proces optimiranja je vrlo osjetljiv na odabir početnog rješenja, te su dobivena rješenja u lokalnom minimumu.

Topološkim optimiranjem konzole u formulaciji minimuma volumena, parametriziranom LS plohom gradijentnim postupkom, uz dodatak kontinuiteta funkciji cilja za 2304 varijable optimiranja iz početnog rješenja dobivenog genetskim algoritmom (Slika 59) dobivena je konstrukcija sa smanjenjem volumena za 5%.

7. Zaključak i daljnja istraživanja

Topološko optimiranje je proces sinteze oblika i topologije konstrukcija, te je kao takav vrlo složen i zahtijevan numerički zadatak. Pri optimiranju topologije u mehanici čvrstih tijela postoji problem određivanja dva nepoznata spregnuta polja: polje pomaka i oblik, odnosno raspodjela materijala. Oblik se uzima kao varijabla pri optimiranju. Pri optimiranju oblika i raspodjele napreznja, postoji potreba za značajnijim promjenama geometrije od same promjene veličine pojedinih parametara. Jedan od postupaka topološkog optimiranja konstrukcija je level set metoda temeljena na implicitnoj funkciji čije izo linije opisuju promatranu geometriju. Metoda određuje derivaciju level set funkcije u svrhu određivanja smjera kretanja izo linije kako bi se funkcija cilja smanjila (transportna Hamilton-Jacobieva diferencijalna jednačba). Radi se o gradijentnom postupku topološkog optimiranja koji je sklon zaustavljanju u lokalnim ekstremima funkcije. Mana topološkog optimiranja level set metodom i transportnom jednačbom je potreba za dobrim inicijalnim rješenjem.

U radu je predložena metoda topološkog optimiranja konstrukcije (2D konzolnog nosača) parametriziranom level set plohom. Promjenom parametara level set plohe mijenja se i geometrija opisana njenom izo linijom. Postupak izbjegava Hamilton-Jacobievu transportnu jednačbu, te omogućuje primjenu ne-gradijentnih i evolucijskih postupaka optimiranja. Parametrizacijom level set plohe (B-plohom ili radijalnim baznim funkcijama -RBF) znatno se smanjuje broj varijabli optimiranja, uz dobru reprezentaciju modela, što smanjuje vrijeme procesa optimiranja. Varijable optimiranja u predloženoj metodi su z koordinate čvorova B-plohe ili RBF funkcija, koje opisuju level set plohu. Genetski algoritam je globalna metoda traženja optimuma, što predloženom postupku topološkog optimiranja daje veliku prednost u odnosu na klasične metode temeljene na gradijentnim postupcima topološkog optimiranja.

Rezultati topološkog optimiranja parametriziranom level set funkcijom i genetskim algoritmom uspoređeni su sa rezultatima dobivenim iz prethodnih istraživanja i pokazana je primjenjivost predložene metode. Topološko optimiranje je vrlo složen i multidisciplinarni proces, stoga je i pri modeliranju i izvođenju procesa optimiranja potreban niz numeričkih zahvata koji omogućuju i poboljšavaju postupak topološkog optimiranja.

Glavni izvorni znanstveni doprinos ovog rada je razvoj metode topološkog optimiranja parametriziranom level set funkcijom primjenom genetskog algoritma, te ispitivanje utjecaja smanjenja broja parametara koji opisuju level set plohu na učinkovitost topološkog optimiranja. Razvijen je jedan novi operator kažnjavanja za genetski algoritam. Razvijeni operator kažnjavanja

je nastao zbog pojave da različiti kromosomi genetskog algoritma kodiraju istu domenu (različiti genotip kodira isti fenotip). Sve jedinke koje daju slična rješenja kao prethodne jedinke u generaciji kažnjavaju sa nekim kaznenim dodatkom, čime se postiže raznolikost populacije u početnim generacijama procesa optimiranja genetskim algoritmom. Ovakav način topološkog optimiranja je znatno sporiji od dosadašnjih metoda, ali pronalazi globalni ekstrem što je velika prednost kod složenog strukturnog optimiranja. Optimiranje predloženom metodom može se ubrzati kombiniranjem sa gradijentnim metodama.

Nakon početne faze optimiranja globalnom metodom (genetskim algoritmom), daljnji tijek optimiranja izvodi se gradijentnom metodom koja je znatno brža. Zadanim dobrim inicijalnim rješenjem dobivenim optimiranjem genetskim algoritmom, gradijentna metoda može naći globalni ekstrem. Topološko optimiranje level set parametriziranom plohom i gradijentnim postupkom uz funkciju cilja minimum volumena i pored inicijalnog rješenja može dati loše rezultate optimiranja. Razlog tome je diskretna funkcija cilja koja je korištena pri optimiranju. Diskretna funkcija cilja koristila se jer njen izračun nije numerički zahtjevan. U radu je predložen dodatak na funkciju cilja koji ima karakteristike da diskretnu funkciju cilja pretvori u kontinuiranu, te da funkcija cilja smanjuje svoju vrijednost kada se volumen (nastao izo linijom level set plohe) smanjuje.

U ovom radu izrađen je i sustav toka podataka (workflow) u programskom jeziku C#, sa klijent i servis (WCF) aplikacijama, kao izvršnim datotekama. Ovakav način komunikacije između aplikacija ima prednost pred ostalim metodama paralelizacije jer se mogu izvoditi različiti procesi na paralelnim računalima, što kod klasičnih clustera nije slučaj.

U daljnjem radu planira se ubrzati proces topološkog optimiranja paralelnim računanjem (cluster računala), što je omogućeno primjenom evolucijskih metoda koje su vrlo pogodne za paralelizaciju. Sustav toka podataka za paralelizaciju procese već je izrađen, ali je u radu primijenjen samo za komunikaciju između aplikacija na jednom računalu.

Kako se radi o drukčijem pristupu topološkog optimiranja u odnosu na dosadašnja istraživanja, brojne su mogućnosti unapređenja i razvoja:

- ispitati izvodivost procesa topološkog optimiranja na složenijim primjerima
- ispitati primjenjivost memetičkih metoda optimiranja
- ispitati utjecaj različitih parametrizacija level set plohe na proces topološkog optimiranja
- ispitati utjecaj parametara genetskog algoritma na rješenja topološkog optimiranja
- za varijable optimiranja uzeti sve tri koordinate čvorova parametrizirane funkcije (x , y i z) koja opisuje level set plohu.

8. Literatura

- [1] P.W. Christensen; A. Klarbring, „An Introduction to Structural Optimization“, Springer, 2009.
- [2] M. Pourazady; Z. Fu; „An Integrated Approach To Structural Shape Optimization“, Computers & Structures 60(2), pp: 279-289, srpanj 1996.
- [3] K. Saitou; K. Izui; S. Nishiwaki; P. Papalambros, „A Survey of Structural Optimization in Mechanical Product Development“, Journal of Computing and Information Science in Engineering 5(3), pp: 214-226, studeni 2005.
- [4] H.A. Eschenauer; V.V. Kobelev; A. Schumacher “Bubble method for topology and shape optimization of structures”, Structural and Multidisciplinary Optimization, 8(1), pp. 42-51, kolovoz 1994.
- [5] M.P. Bendsoe; O. Sigmund, „Topology Optimization Theory, Methods and Applications“, Springer, Berlin, Njemačka, 2004.
- [6] G.I.N. Rozvany, „Topology optimization in structural mechanics“, Springer, CISM, Udine Italija 1997.
- [7] H.A. Eschenauer; N. Olhoff, „Topology optimization of continuum structures: a review“, Applied Mechanics Reviews 54(4), pp: 331–390, srpanj 2001.
- [8] G.N. Vanderplaats , „Approximation Concepts for Numerical Airfoil Optimization“, NASA Technical Paper 1370, 1979.
- [9] V. Braibant; C. Fleury, „Shape optimal design using B-splines“, Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering 44(3), pp: 247–267, kolovoz 1984.
- [10] V. Braibant; C. Fleury, „An approximation-concepts approach to shape optimal design“, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 53(2), pp: 119-148, studeni 1985.
- [11] M.H. Imam, „Three dimensional shape optimization“, International Journal for Numerical Methods in Engineering 18(5), 661-673, svibanj 1982.
- [12] J.A. Samareh, „A Survey Of Shape Parameterization Techniques“, CEAS/AIAA/ ICASE/NASA Langley International Forum on Aero-elasticity and Structural Dynamics, NASA/CP-1999-209136, pp: 333-343, lipanj 1999.
- [13] M. Kegl, „Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept“, International Journal for Numerical Methods in Engineering 49(12), pp: 1571-1588, prosinac 2000.

-
- [14] X. Song; J.D. Baldwin, „A novel node-based structural shape optimization algorithm”, *Computers & Structures* 70(5), pp: 569-581, ožujak 1999.
- [15] E.K. Antonsson; J. Cagan, „Formal engineering design synthesis”, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [16] Y.K. Shyy; C. Fleury; K. Izadpanah, „Shape optimal design using high-order elements”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71(1), pp: 99-116, studeni 1988.
- [17] M.J. Garcia; P. Boulanger; M. Heno, „Structural optimization of as-built parts using reverse engineering and evolution strategies”, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 35(6), pp: 541-550, lipanj 2007.
- [18] E. Hardee; K. Chang; J. Tu; K.K. Choi; I. Grindeanu; X. Yu, „A CAD-based design parameterization for shape optimization of elastic solids”, *Advances in Engineering Software* 30(3), pp: 185–199, ožujak 1999.
- [19] R.L. Keeney; H. Raiffa, „Decisions with multiple objectives, preferences and trade-offs”, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [20] T.J.R. Hughes; J.A. Cottrell; Y. Bazilevs, „Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194(39-41), pp: 4135–4195, listopad 2005.
- [21] W.A. Wall; M.A. Frenzel; C. Cyron, „Isogeometric structural shape optimization”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197(33-40), pp: 2976–2988, lipanj 2008.
- [22] D.E. Goldberg, „Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning”, Addison Wesley, 1989.
- [23] K. Deb; T. Goel, „Multi-Objective Evolutionary Algorithms for Engineering Shape Design”, KanGAL report 200003, Indian Institute of Technology, 2000.
- [24] F. Schmid; K. Hirschen; S. Meynen; M. Schäfer, „An enhanced approach for shape optimization using an adaptive algorithm”, *Finite Elements in Analysis Design* 41(5), pp: 521–543, veljača 2005.
- [25] M. Papadrakakis; N.D. Lagaros, „Soft computing methodologies for structural optimization”, *J. Applied Soft Computing* 3(3), pp: 283-300, studeni 2003.
- [26] L. Dai; Y. Gu; G. Zhao; Y. Guo, „Structural Shape Optimization based on Parametric Dimension- Driving and CAD Software Integration”, *World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, pp: 1-8, lipanj 2005.

-
- [27] S. Hyun; C. Kim; J.H. Son; S.H. Shin; Y.S. Kim, „An efficient shape parameterization method based on FEM and B-spline curves and shaping of a torque converter clutch disk”, *Finite Elements in Analysis and Design* 40, pp: 1803-1815, 2004.
- [28] S. Rippa, „An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation“, *Advance in Computational Mathematics* 11, pp: 193-210, 1999.
- [29] G. Bugeda; J.J. Rodenas; E. Onate, „An integration of a low cost adaptive remeshing strategy in the solution of structural shape optimization problems using evolutionary methods”, *Computers & Structures* 86(13-14), pp: 1563–1578, srpanj 2008.
- [30] A. Schleupen; K. Maute; E. Ramm, „Adaptive FE-procedures in shape optimization”, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 19(4), pp: 282–302, srpanj 2000.
- [31] F. Cappello; A. Mancuso, „A genetic algorithm for combined topology and shape optimizations”, *Computer-Aided Design* 35(8), pp: 761–769, srpanj 2003.
- [32] J.M. Alonso; C. Alfonso; G. Garcia; V. Hernandez, „GRID technology for structural analysis”, *Advances in Engineering Software* 38(11-12), pp: 738–749, studeni 2007.
- [33] P. S. Tang; K. H. Chang, „Integration of topology and shape optimization for design of structural components”, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 22(1), pp: 65–82, kolovoz 2001.
- [34] D. Carswell; N. Lavery, „3D solid fin model construction from 2D shapes using non-uniform rational B-spline surfaces”, *Advances in Engineering Software* 37(8), pp: 491–501, kolovoz 2006.
- [35] X. Zhou; L. Chen; Z. Huang, „The SIMP-SRV Method for Stiffness Topology Optimization of Continuum Structures“, *International Journal of CAD/CAM*, Vol 7, No 1, 2007.
- [36] J. C. Carr; R.K. Beatson; T.J. Mitchell; W.R. Fright; B.C. McCallum; T.R. Evans, „Reconstruction and Representation of 3D Objects with Radial Basis Functions“, *SIGGRAPH*, 2001, Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, pp: 67-76, kolovoz 2001.
- [37] S. Osher; R. Fedkiw, „Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces“, Springer, *Applied Mathematical Sciences* 153, USA, 2003.
- [38] B. S. Morse; T. S. Yoo; P. Rheingans; D. T. Chen; K. R. Subramanian, “Interpolating Implicit Surfaces From Scattered Surface Data Using Compactly Supported Radial Basis Functions”, *SIGGRAPH '05 ACM SIGGRAPH, GRAPH International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 2005.
- [39] S.Y. Wang; K.M. Lim; B.C. Khoo; M.Y. Wang, „An extended level set method for shape and topology optimization”, *Journal of Computational Physics* 221, pp: 395-421, siječanj 2007.

-
- [40] Z. Luo; L. Tong; Z. Kang, „A level set method for structural shape and topology optimization using radial basis functions“, *Jurnal of Computers and Structures* 87 , pp: 425-434, travanj 2009.
- [41] X. Xing; M.Y. Wang; B. F. Y. Lui, „Parametric Shape and Topology Optimization with Moving Knots Radial Basis Function and Level Set Method“, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, COEX Seoul, Korea, 2007.
- [42] Q. Xia; M. Y. Wang, „Level Set Based Method for Simultaneous Optimization of Material Property and Topology of Functionally Graded Structures“, *SPM ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*, pp: 171-182, srpanj 2007.
- [43] S. Shojaee; M. Mohammadian, „Piecewise constant level set method for structural topology optimization with MBO type of projection“, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 44(4), pp: 455-469, travanj 2011.
- [44] M. Y. Wang; X. Wang; D. Guo, „A level set method for structural topology optimization“, *Computer methods in applied mechanics and engineering* 192, pp: 227–246, 2003.
- [45] J. Chen; V. Shapiro; K. Suresh; I. Tsukanov, „Parametric and Topological Control in Shape Optimization“, *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Philadelphia, Pennsylvania, USA, pp: 1-12, rujan 2006.
- [46] H. Jia; H. G. Beom; Y. Wang; S. Lin; B. Lui, „Evolutionary level set method for structural topology optimization“, *Computer & structures* 89(5-6), pp: 445-454, ožujak 2011.
- [47] S. Wang; M.Y. Wang, „Radial Basis Functions and Level Set Method for Structural Topology Optimization“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65, pp 2060-2090, ožujak 2006.
- [48] G. Allaire; F. Jouve; A-M. Toader, „Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method“, *Jurnal of Computational Physics* 194, pp: 363-393, veljača 2004.
- [49] T. Burczyński; A. Poteralski; P. Orantek, „Generalized shape optimization of three-dimensional structures using evolutionary computation“, *6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Rio de Janeiro, pp: 1-11, lipanj 2005.
- [50] Y.M. Xie; G.P. Steven, „A simple evolutionary procedure for structural optimization“, *Computers & Structures* 49(5), pp: 885–896, prosinac 1993.
- [51] S. Patil; S. Zhou; Q. Li, „Design of Periodic Microstructural Materials by Using Evolutionary Structural Optimization Method“, *Advanced Materials Research* 32, pp: 279-283, veljača 2008

-
- [52] D. Vučina; Ž. Lozina; I. Peh nec, „Computational procedure for optimum shape design based on chained Bezier surfaces parameterization“, International Scientific Journal Engineering Applications of Artificial Intelligence 25, pp 648-667, 2012.
- [53] D. Vučina; Ž. Lozina; I. Peh nec, „Ad-hoc cluster and workflow for parallel implementation of initial-stage evolutionary optimum design“, Structural and Multidisciplinary Optimization, DOI: 10.1007/s00158-011-0687-y, srpanj 2011.
- [54] D. Vučina; Z. Milas; I. Peh nec, „Reverse Shape Synthesis of the Hydropump Volute Using Stereo-Photogrammetry, Parameterization, and Geometric Modeling“, Journal of Computing and Information Science in Engineering Vol. 12, lipanj 2012.
- [55] D. Vučina, „Metode inženjerske numeričke optimizacije“, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje FESB, Sveučilište u Splitu, Split, 2005.
- [56] P.J. Schneider; D.H. Eberly, „Geometric Tools for Computer Graphics“, Morgan Kaufmann, San Francisco, USA, 2002.
- [57] D.F. Rogers, „An Introduction to NURBS With Historical Perspective“, Morgan Kaufmann, 2001.
- [58] G. Farin, „Curves and Surfaces for CAGD“, Morgan Kaufmann, USA, 2002.
- [59] I. Alfirević, „Teorija elastičnosti“, Tehnička knjiga d.d., Zagreb, 1995.
- [60] B. Torby, „Energy Methods“, CBS College Publishing, USA, 1984.
- [61] J.Brnić; M. Čanađija, „Analiza deformabilnih tijela metodom konačnih elemenata“, Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 2009.
- [62] Ž. Lozina, „Uvod u metodu konačnih elemenata“, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje FESB, Sveučilište u Splitu, Split, 2002.
- [63] O. C. Zienkiewicz; R. L. Taylor; J. Z. Zhu, „The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals“, Butterworth–Heinemann, USA, 2005.
- [64] G.R. Lui; Y.T. Gu, „An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming“, Springer, Nizozemska, 2005.
- [65] K.K. Choi; N.H. Kim, „Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1“, Springer, New York USA, 2005.
- [66] M. Burger, „Lecture notes on infinite-dimensional optimization and optimal design“, Report 285J, University of California, Los Angeles, CA, USA, 2004.
- [67] E. Haber; „A multilevel, level-set method for optimizing eigenvalues in shape design problems“, Journal of Computational Physics 198, pp: 518-534, veljača 2004.

Životopis

Igor Pehnc rođen je 06.10.1981. godine u Bosanskoj Gradišci, gdje pohađa Osnovnu školu „Danilo Borković“.

Nakon osnovnog obrazovanja, upisuje Srednju „Mašinsku i drvoprerađivačku školu“ u Bosanskoj Gradišci, koju završava sa odličnim uspjehom kao strojarški tehničar.

Godine 2000. upisuje studij strojarstva na „Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje“ u Splitu. Tijekom studiranja korisnik je državne stipendije namijenjene nadarenim studentima. Kao student četvrte godine obavlja demonstraturu iz predmeta: Hidromehanika, Mehanika fluida 1, Mehanika fluida 2 i Hidraulički strojevi na Katedri za mehaniku fluida, kod dr.sc. Zorana Milasa. Nagrađen je kao najbolji student četvrte godine strojarstva za 2004. godinu u Splitu od firme Konstruktor-inženjering. Godine 2004. odslužio je vojni rok.

U veljači 2007. brani diplomski rad na temu „CFD/FSI analiza aeroprofila NACA 4415“, čime stječe stručni naziv diplomirani inženjer strojarstva.

Odmah nakon diplomiranja zapošljava se na istom fakultetu kao znanstveni novak-asistent, na projektu „Inteligentni i evolucijski algoritmi kod optimizacije novih materijala i oblika“, glavnog istraživača Prof.dr.sc. Damira Vučine.

Iste godine upisuje poslijediplomski studij strojarstva.

Kao asistent sudjeluje u izvođenju i kreiranju nastave na sljedećim kolegijima:

- Mehanika I, studij, Strojarstvo i Industrijsko inženjerstvo,
- Analiza primjenom računala, studij: Strojarstvo i Industrijsko inženjerstvo,
- Metode optimiranja, studij: Strojarstvo i Industrijsko inženjerstvo,
- Programiranje, studij: Računarstvo.

Do sada je kao koautor objavio četiri znanstvena rada u CC časopisima i sedam radova u zbornicima i skupovima sa međunarodnom recenzijom.

Član je Društva inženjera strojarstva – Split.

Pasivno se služi engleskim jezikom.

Oženjen je i ima dvoje djece.

Curriculum vitae

Igor Peh nec was born 06.10.1981. in Bosanska Gradiska, where he attended an elementary school „Danilo Borkovic“.

After a primary education he enrolled a secondary school „Mechanical Engineering and Wood Processing School“ in Bosanska Gradiska, that he finished with excellent success as a mechanical technician.

In 2000. he started study on Faculty of Electrical Engineering, Mechanical Engineering and Naval Architecture in Split (FESB). During the study he was granted a scholarship.

He received an award from the “KONSTRUKTOR-INŽENJERING” company as the best student of the year 2004. In 2004. he completed military service.

Title of his graduation final work was “CFD/ FSI analysis airfoil NACA 4415” in the field of fluid mechanic, and he graduated in 2007.

The same year he is employed on the FESB as a research assistant on the project „Intelligent and evolutionary algorithms for optimization of new materials and shapes“, leaded by Professor Damir Vucina. The same year he enrolled the postgraduate study of mechanical engineering at FESB.

As an assistant he is involved in creating and teaching classes on the following courses:

- Mechanics I, studies: Mechanical Engineering and Industrial Engineering,
- Analysis using the computer program, studies: Mechanical Engineering and Industrial Engineering,
- Optimization methods, studies: Mechanical Engineering, Industrial Engineering,
- Programming, study: Computer science.

Until now he published as the co-author four papers in CC journals and seven papers in conference and meetings with international review.

He is a member of the Society of Mechanical Engineers – Split.

He is married and has two children.