

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 63.

**IMPLEMENTACIJA ALGORITMA ZA
BRZU KONVOLUCIJU NA SE(3) GRUPI**

Gordan Kreković

Zagreb, lipanj 2010.

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Teorija grupa	3
2.1. Osnovni pojmovi	3
2.2. Homomorfizam grupa	9
2.3. Primjeri grupa	12
2.3.1. Cikličke grupe	12
2.3.2. Simetrične grupe	13
2.3.3. Grupa $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$	13
2.4. Liejeve grupe i Liejeva algebra	15
2.5. Reprezentacije konačnih grupa	15
2.5.1. Karakteri konačnih grupa	18
2.6. Reprezentacije Liejevih grupa	20
3. Gibanja u trodimenzionalnom prostoru	22
3.1. Gibanja i deformacije	22
3.2. Rotacije čvrstog tijela	23
3.2.1. Ortogonalna grupa $O(3)$	25
3.2.2. Posebna ortogonalna grupa $SO(3)$ i Eulerova dekompozicija	26
3.2.3. Grupa rotacija i sfera	27
3.3. Kompozicija gibanja	28
3.3.1. Homogene transformacijske matrice	29
3.4. Gibanje pužnog vijka	30
3.5. Grupa $SE(3)$	34
4. Harmonijska analiza na grupama gibanja	36
4.1. Konačne grupe	36
4.2. Kompaktne Liejeve grupe	38
4.3. Grupa rotacija $SO(3)$	40
4.3.1. Kontinuirana i diskretna $SO(3)$ Fourierova transformacija	40

4.3.2.	Brza Fourierova transformacija na $SO(3)$	42
4.4.	Grupa $SE(3)$	43
4.4.1.	Nereducibilne unitarne reprezentacije grupe $SE(3)$	44
5.	Algoritam za brzu konvoluciju na grupi gibanja	46
5.1.	Priprema algoritma	46
5.1.1.	Poopćene pridružene Legendreove funkcije	47
5.1.2.	Složenost izravne konvolucije	48
5.2.	Algoritam za brzu konvoluciju funkcija na $SE(3)$ grupi	49
5.2.1.	Izravna Fourierova transformacija	49
5.2.2.	Inverzna Fourierova transformacija	53
5.2.3.	Konvolucija	56
6.	Primjene	58
6.1.	Robotika	58
6.1.1.	Funkcija gustoće diskretno pogonjenih manipulatora	60
6.1.2.	Inverzni kinematički problem diskretnih manipulatora	64
6.2.	Statistička mehanika makromolekula	66
7.	Praktični rad i rezultati	72
7.1.	Općenite značajke implementacije	72
7.1.1.	Parametri uzorkovanja i transformacije	73
7.1.2.	Rukovanje memorijom	75
7.2.	Korištene biblioteke i alati	75
7.2.1.	Brza Fourierova transformacija na \mathbb{R}^n	76
7.2.2.	Interpolacija	76
7.2.3.	Biblioteka <i>SOFT</i>	76
7.3.	Rezultati	79
7.4.	Moguća poboljšanja	81
7.4.1.	Korištenje MEX funkcija	82
7.4.2.	Paralelizacija algoritma	83
7.4.3.	Ostala poboljšanja implementacije	83
8.	Zaključak	85
	Literatura	86
	Naslov, sažetak i ključne riječi	88
	Title, abstract and keywords	89

1. Uvod

Teorija grupa predstavlja važan matematički model kojim se mogu formulirati različiti problemi u fizici i inženjerstvu. Tako sva gibanja u trodimenzionalnom euklidskom prostoru čine grupu koja se naziva posebnom euklidskom grupom gibanja, a označava sa $SE(3)$. Ona se pojavljuje u mnogim primjenama vezanim uz robotiku, istraživanje polimera i druga područja u kojima gotovo uvijek dolazi do potrebe za izračunom konvolucije dviju funkcija definiranih na grupi. U klasičnoj teoriji harmonijske analize konvolucija se efikasnije računa u transformacijskoj domeni jer postoje brzi numerički algoritmi za Fourierovu transformaciju. Time je inspirirano poopćavanje pristupa na slučaj nekomutativne harmonijske analize na grupama.

Alexander B. Kyatkin i Gregory S. Chirikjian, autori brzog numeričkog algoritma za izračun konvolucijskih integrala na posebnoj euklidskoj grupi gibanja $SE(3)$, rješavali su konkretniji problem određivanja radnog prostora robotske ruke, a tek su kasnije shvatili da se zapravo numerički postupci, koje razvijaju, općenito odnose na konvoluciju. Grupa $SE(3)$ prva je nekompaktna nekomutativna Liejeva grupa koja je zanimljiva u primjenama i za čije su restrikcije na kompaktno ograničene domene osmišljeni brzi numerički algoritmi. Za razvoj takvih postupaka koristi se općenita teorija nekomutativne harmonijske analize.

Razmatranje i implementacija algoritma za brzu konvoluciju na posebnoj grupi euklidskih gibanja središnje su teme ovoga rada. Korištenjem teorije unitarnih nereducibilnih reprezentacija, formirana je Fourierova transformacija na $SE(3)$. Zapis u integralnom obliku omogućava rastav problema na potprobleme za koje već postoje efikasni numerički postupci i na taj se način postižu značajna ubrzanja. Za $N = \mathcal{O}(S^6)$ točaka uzorkovanja, pri čemu S predstavlja broj uzoraka na svakoj koordinati, složenost izračuna, koja u slučaju izravne implementacije konvolucijskog integrala iznosi $\mathcal{O}(N^2)$, smanjena je na $\mathcal{O}(N^{7/6}(\log N)^2) + \mathcal{O}(N^{(\gamma+1)/3})$ gdje parametar γ ovisi o učinkovitosti matričnog množenja, $2 \leq \gamma \leq 3$. Praktični rezultati obuhvaćaju niz programskih skripti za okruženje MATLAB.

Zbog cjelovitosti u smislu konzistentnosti korištenih principa i pojmova, rad

sadržava prilagođeni uvod u teoriju grupa i reprezentacije. Ipak, teorija potrebna za potpuno razumijevanje ovog matematičkog područja izlazi izvan okvira rada. Poznavanje gibanja čvrstih tijela u trodimenzionalnom prostoru, osnove općenite teorije harmonijske analize na grupama i transformacijskih izraza za grupe $SO(3)$ i $SE(3)$ preduvjet je za razmatranje algoritma za brzu konvoluciju na $SE(3)$ grupi. Važan dio rada svakako su primjene algoritma u robotici i statističkoj mehanici makromolekula. Konačno, prikazani su i diskutirani rezultati implementacije.

2. Teorija grupa

Koncept grupe matematičko je poopćenje razmatranja simetrija skupova. Teorija grupa centralna je teorija apstraktne algebre: ostale algebarske strukture poput prstena, polja i vektorskih prostora mogu se promatrati kao grupe s dodatnim operacijama i aksiomima. Primjene ovoga koncepta važne su u fizici i kemiji pa se tako teorija grupa koristi pri klasifikaciji elementarnih čestica, opisu strukture kristala i vodikovog atoma te nalaženju simetrija u kristalnim rešetkama kemijskih spojeva. Grupe imaju i značajnu ulogu u kombinatorici (permutacije, teorija grafova), kriptografiji, teoriji algebarskog kodiranja signala u telekomunikacijama, rješavanju algebarskih jednažbi jedne varijable n -tog stupnja i drugim primjenama.

2.1. Osnovni pojmovi

Grupa (G, \circ) skup je objekata G na kojem je definirana zatvorena binarna operacija \circ tako da za sve $g, g_1, g_2, g_3 \in G$ vrijedi:

1. $g_1 \circ g_2 \in G$ (grupoidnost),
2. $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$ (asocijativnost),
3. postojanje neutralnog (jediničnog) elementa $e \in G$ takvog da je $e \circ g = g \circ e = g$,
4. za svaki element $g \in G$ postoji inverzni element g^{-1} takav da vrijedi $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Kako bi se grupa razlikovala od skupa u situacijama kada nije jasno o čemu se radi, uobičajeno se uz oznaku grupe navodi i operator (G, \circ) .

Jedan je primjer grupe skup cijelih brojeva sa zbrajanjem $(\mathbb{Z}, +)$. Lako je pokazati da vrijede definicijska svojstva

1. $n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n + m \in \mathbb{Z}$,

2. $n + (m + k) = (n + m) + k, \quad \forall n, m, k \in \mathbb{Z},$
3. $0 + n = n, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$
4. $n + (-n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

U nastavku ovog poglavlja definirat ćemo najvažnija posebna i opća svojstva grupa te osnovne pojmove korištene u radu.

Komutativne grupe

Neke grupe imaju osobito lijepa i zanimljiva svojstva koja ih čine prikladnim za razmatranje i primjenu. Za grupu (G, \circ) kažemo da je komutativna ili Abelova grupa ako za sve elemente $g_1, g_2 \in G$ vrijedi $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

U ilustrativne i važne primjere komutativnih grupa zasigurno se ubrajaju

1. $(\mathbb{R}, +)$ realni brojevi sa zbrajanjem,
2. $(T, + (\text{mod} 2\pi))$ kružnica s cirkularnim zbrajanjem,
3. $(\mathbb{Z}, +)$ cijeli brojevi sa zbrajanjem,
4. $(\mathbb{Z}_N, + (\text{mod } N))$ cijeli brojevi iz intervala $[0, N - 1]$ sa zbrajanjem u modulo N aritmetici.

Grupe, koje nisu komutativne, nazivaju se nekomutativnim grupama, a takva je, primjerice, posebna grupa euklidskih gibanja u trodimenzionalnom prostoru o kojoj će biti riječi kasnije.

Jedinstvenost inverznog elementa

Inverzni je element g^{-1} od g jedinstven. Da bismo dokazali tvrdnju, pretpostavimo suprotno – neka su g' i g'' različiti inverzi elementa g . Prema definiciji inverza vrijedi

$$g \circ g' = g' \circ g = e \quad \text{i} \quad g \circ g'' = g'' \circ g = e. \quad (2.1)$$

Kombiniranjem definicijskih svojstava grupe, dobiva se

$$g' = g' \circ e = g' \circ (g \circ g'') = (g' \circ g) \circ g'' = e \circ g'' = g'' \quad (2.2)$$

pa suprotna pretpostavka nije istinita.

Svaka grupa (G, \circ) posjeduje sljedeća svojstva:

1. invertiranje produkta: $(g_1 \circ g_2)^{-1} = g_2^{-1} \circ g_1^{-1}$, $\forall g_1, g_2 \in G$,
2. pravilo skraćivanja: $(g_1 \circ g_3 = g_2 \circ g_3) \Rightarrow (g_1 = g_2)$, $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$.

Dokaz:

1. Tvrdnja slijedi iz definicije inverznog elementa i jedinstvenosti inverznog elementa. $(g_1 \circ g_2) \circ (g_2^{-1} \circ g_1^{-1}) = g_1 \circ g_2 \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1} = g_1 \circ e \circ g_1^{-1} = g_1 \circ g_1^{-1} = e$ i analogno $(g_2^{-1} \circ g_1^{-1}) \circ (g_1 \circ g_2) = e$.
2. Na obje strane izraza djeluje g_3^{-1} zdesna i tvrdnja se dokazuje.

$$\begin{aligned}
 g_1 \circ g_3 = g_2 \circ g_3 & \quad / \circ g_3^{-1} \\
 g_1 \circ g_3 \circ g_3^{-1} = g_2 \circ g_3 \circ g_3^{-1} & \quad (2.3) \\
 g_1 = g_2. &
 \end{aligned}$$

Potencija elementa

Za prirodni broj n , u grupi (G, \circ) definira se potencija elementa $g \in G$ na sljedeći način: $g^n = g \circ g \circ \dots \circ g$, $g^{-n} = (g^{-1})^n$, $g^0 = e$. Iz definicijskih pravila izvodi se još nekoliko jednostavnih, ali važnih i često korištenih pravila potenciranja.

1. $g^m \circ g^n = g^{m+n}$
Posebno, potencije zadanog g međusobno komutiraju: $g^m \circ g^n = g^n \circ g^m$.
2. $(g^m)^n = g^{mn}$.
3. Ako je grupa komutativna, onda za sve $g_1, g_2 \in G$ vrijedi $(g_1 \circ g_2)^n = g_1^n \circ g_2^n$.

Tvrdnja se jednostavno dokazuje indukcijom.

Korištene oznake vrijede za takozvane multiplikativne grupe u kojima se operacija pomalo neprecizno naziva množenjem, a rezultat operacije produktom. U konkretnoj situaciji operacija može, dakako, biti sasvim proizvoljna – zbrajanje, kompozicija funkcija ili neka druga. Ako je u komutativnoj grupi binarna operacija definirana kao zbrajanje, $(G, +)$, grupa je aditivna. Dogovorno je svaka aditivna grupa komutativna. Neutralni element aditivne je grupe nula (označava se s 0), a inverzni se element naziva suprotnim i označava s $-g$ umjesto g^{-1} . U nastavku će se prilikom općenitog razmatranja grupa konzistentno koristiti oznake za multiplikativne grupe osim u slučaju kada je notacija aditivne grupe sugestivnija.

Pojam konačne grupe

Grupa je konačna ako je skup njezinih elemenata konačan. Red grupe određen je kardinalitetom skupa i označava se $|G|$.

Neki jednostavni primjeri primjeri komutativnih konačnih grupa nalaze se u nastavku.

1. Trivijalna grupa $(\{e\}, \circ)$.

Konkretni su primjeri $(\{0\}, +)$ i $(\{1\}, \cdot)$, gdje se operatori $+$ i \cdot smatraju naslijeđenim iz polja realnih brojeva.

2. Grupa $(\{-1, 1\}, \cdot)$, čiji operator predstavlja \cdot realno množenje, primjer je grupe drugog reda.
3. Grupa $(\{-1, 1, -i, i\}, \cdot)$ s obzirom na operator kompleksnog množenja \cdot četvrtog je reda.

Podgrupa

Grupa (H, \circ) podgrupa je grupe (G, \circ) ako je $H \subseteq G$, a binarna operacija \circ naslijeđena od binarne operacije \circ definirane na G . Činjenica da je (H, \circ) i sama grupa podrazumijeva grupoidnost nad binarnom operacijom \circ , postojanje neutralnog elementa $e \in H$ i inverznog elementa $h^{-1} \in H$ za sve $h \in H$. Oznaka podgrupe je $(H, \circ) \leq (G, \circ)$ ili $H \leq G$ u slučaju da je jasno o kojoj se operaciji radi. Svaka grupa (G, \circ) ima dvije trivijalne podgrupe: jediničnu podgrupu $\{e\} \leq G$ i samu sebe $G \leq G$.

Ako je grupa (H, \circ) podgrupa grupe (G, \circ) , a g bilo koji zadani element iz G , tada se skup oblika $g \circ H = \{g \circ h \in G : h \in H\}$ zove lijevi susjedni razred od g , a $H \circ g = \{h \circ g \in G : h \in H\}$ desni susjedni razred od g . Kako se u grupi H nalazi neutralni element e , oba razreda sadrže element g . Ako je svaki desni susjedni razred jednak odgovarajućem lijevom $g \circ H = H \circ g$, $\forall g \in G$, grupa H zove se normalna podgrupa grupe G što se označavao kao $H \trianglelefteq G$.

Presjek dviju ili više normalnih podgrupa ponovno je normalna podgrupa. Za komutativne grupe vrijedi da je svaka podgrupa normalna podgrupa jer je $g \circ H = H \circ g$.

Umnožak grupa

Izravni umnožak dviju grupa (G, \circ) i $(H, \hat{\circ})$ činu grupu $(P, \odot) = (G, \circ) \times (H, \hat{\circ})$ takvu da je skup P Kartezijev umnožak skupova G i H , a za bilo koja se dva elementa $p, q \in P$, $p = (g_i, h_j)$, $q = (g_k, h_l)$, operacija grupe definira kao $p \odot q = (g_i \circ g_k, h_j \hat{\circ} h_l)$.

Neka je grupa (G, \circ) transformacijska grupa koja djeluje na skup H , pri čemu je $(H, +)$ komutativna grupa. Tada je poluizravni umnožak od (G, \circ) i $(H, +)$ grupa $(P, \hat{\circ}) = (H, +) \rtimes_{\varphi} (G, \circ)$ takva da je $P = H \times G$, a za bilo koja dva elementa $p, q \in P$ definiran je operator grupe kao $p \hat{\circ} q = (g_i \circ h_l + h_j, g_i \circ g_k)$. Uvijek je slučaj da je H normalna podgrupa od P , $H \triangleleft P$. Primjer je poluizravnog umnoška posebna grupa euklidskih gibanja $SE(N) = \mathbb{R}^N \rtimes_{\varphi} SO(N)$, no o tome će biti više riječi kasnije.

Orbite i podgrupe stabilnosti

Skup X , na kojem djeluje grupa G , naziva se G -skupom. Kada G djeluje tranzitivno na skup X , tada su svaka dva elementa skupa $x_1, x_2 \in X$ povezana odnosom $x_2 = g \cdot x_1$ za neki $g \in G$. U slučaju kada G djeluje na X , ali ne tranzitivno, skup X je podijeljen na razrede ekvivalencije. Razred ekvivalencija, koji sadrži element $x \in X$, naziva se orbitom od x i formalno definira kao

$$Orb(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}. \quad (2.4)$$

Skup svih orbita označava se s X/G pa vrijedi

$$X = \bigcup_{\sigma \in X/G} \sigma \quad \text{i} \quad |X| = \sum_{i=1}^{|X/G|} |Orb(x_i)|, \quad (2.5)$$

pri čemu je x_i reprezentant i -te orbite, $x_i \in Orb(x_1) \in X/G$. Kada G djeluje na X tranzitivno, postoji točno jedna orbita koja obuhvaća cijeli skup X pa u tom posebnom slučaju pišemo $X/G = X = Orb(x)$ za bilo koji izbor elementa x .

Skup svih elemenata iz G koji djelovanjem na određeni $x \in X$ ostavljaju ga nepromijenjenim naziva se podgrupom stabilnosti (eng. *stabilty subgroup*) od x . U literaturi se katkad mogu pronaći nazivi mala grupa (eng. *little group*), stabilizator (eng. *stabilazer*) i podgrupa izotropije (eng. *isotropy subgroup*). Ona se definira kao

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}. \quad (2.6)$$

Lako je provjeriti da G_x posjeduje definicijska svojstva grupe. Iz izraza $e \cdot x = x$ i $x = g \cdot x$ možemo pisati

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} \circ g) \cdot x = e \cdot x = x \quad (2.7)$$

pa zaključujemo da je g^{-1} neutralni element u G_x . Dalje, za bilo koje $g_1, g_2 \in G_x$ vrijedi

$$(g_1 \circ g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x \quad (2.8)$$

što pokazuje svojstvo grupoidnosti. Sada je jasno da G_x podgrupa grupe G , $G_x \leq G$.

Konjugacije

Konjugacije h_g i h^g elementa h elementom g definiraju se izrazima $h_g = g \circ h \circ g^{-1}$ i $h^g = g^{-1} \circ h \circ g$. Uvijek će biti nedvojbeno koji od ova dva izraza treba koristiti, a lako je uočiti i njihovu povezanost: $h^g = h_{g^{-1}}$.

Komponiranje konjugacija luči zanimljivim svojstvom pa vrijedi

$$(h^{g_1})^{g_2} = g_2^{-1} \circ (g_1^{-1} \circ h \circ g_1) \circ g_2 = (g_1 \circ g_2)^{-1} \circ h \circ (g_1 \circ g_2) = h^{g_1 \circ g_2} \quad (2.9)$$

i analogno

$$(h_{g_1})_{g_2} = h_{g_1 \circ g_2}. \quad (2.10)$$

Posebno, za komutativne grupe, konjugacija ostavlja element nepromijenjenim: $h_g = g \circ h \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \circ h = e \circ h = h$. Za nekomutativne grupe, koje se češće pojavljuju u teoriji grupa, konjugacija općenito ne rezultira ponovno istim elementom.

Za dva elementa $a, b \in G$ kažemo da su međusobno konjugirani ako je $a = g^{-1} \circ b \circ g$ za neki $g \in G$. Svojstvo konjugiranosti dva elementa relacija je ekvivalencije jer vrijede svojstva:

1. $a = e^{-1} \circ a \circ e$ (refleksivnost),
2. $a = g^{-1} \circ b \circ g \Rightarrow b = g \circ a \circ g^{-1}$ (simetrija),
3. $(a = g_1^{-1} \circ b \circ g_1 \wedge b = g_2^{-1} \circ c \circ g_2) \Rightarrow a = (g_2 \circ g_1)^{-1} \circ c \circ (g_2 \circ g_1)$ (tranzitivnost).

Ako se svi elementi podgrupe $H \leq G$ konjugiraju istim $g \in G$, rezultat toga je

podgrupa koja se naziva konjugacijskom podgrupom i označava s $g^{-1}Hg$. Dobiveni će skup uistinu imati svojstva grupe što se lako provjerava.

Sada možemo pokušati sljedeće: umjesto fiksiranja elementa g i konjugacije svih ostalih elemenata podgrupe njime, odabrat ćemo element b kojeg ćemo konjugirati svim ostalim elementima grupe, odnosno $g^{-1} \circ b \circ g$, $\forall g \in G$, a time dobivamo skup koji se sastoji od elemenata iz G i naziva se razred konjugacije. Svi su elementi razreda međusobno konjugirani jer za bilo koji izbor elementa g iz tog razreda vrijedi $a = g^{-1} \circ b \circ g$. Dakako, to vrijedi i za neki drugi, po volji izabrani element razreda C . Primijenimo li sad svojstva simetrije i tranzitivnosti, kako su oba konjugirana s b , konjugirani su i međusobno.

Razredi particioniraju grupu, odnosno svaki element grupe pripada točno jednom razredu. Svojstvo slijedi iz općenitije činjenice da je relacija ekvivalencije particija skupa na disjunktne podskupove. Prema tome, ako je kardinalitet i -tog razreda $|C_i|$, vrijedi jednakost

$$\sum_{i=1}^{\alpha} |C_i| = |G| \quad (2.11)$$

gdje je α broj klasa.

Razredne funkcije

Vrlo važnu ulogu u harmonijskoj analizi na grupama ima koncept razrednih funkcija. To su preslikavanja s grupe na skup kompleksnih brojeva $\mathcal{C} : G \rightarrow \mathbb{C}$ konstantna za razrede konjugacije. Dakle, njihova je vrijednost jednaka za sve elemente koji pripadaju istom razredu konjugacije

$$\mathcal{C}(g) = \mathcal{C}(h^{-1} \circ g \circ h) \text{ ili } \mathcal{C}(h \circ g) = \mathcal{C}(g \circ h) \quad (2.12)$$

za sve vrijednosti $g, h \in G$. Zgodno je uočiti da su gornji izrazi ekvivalentni.

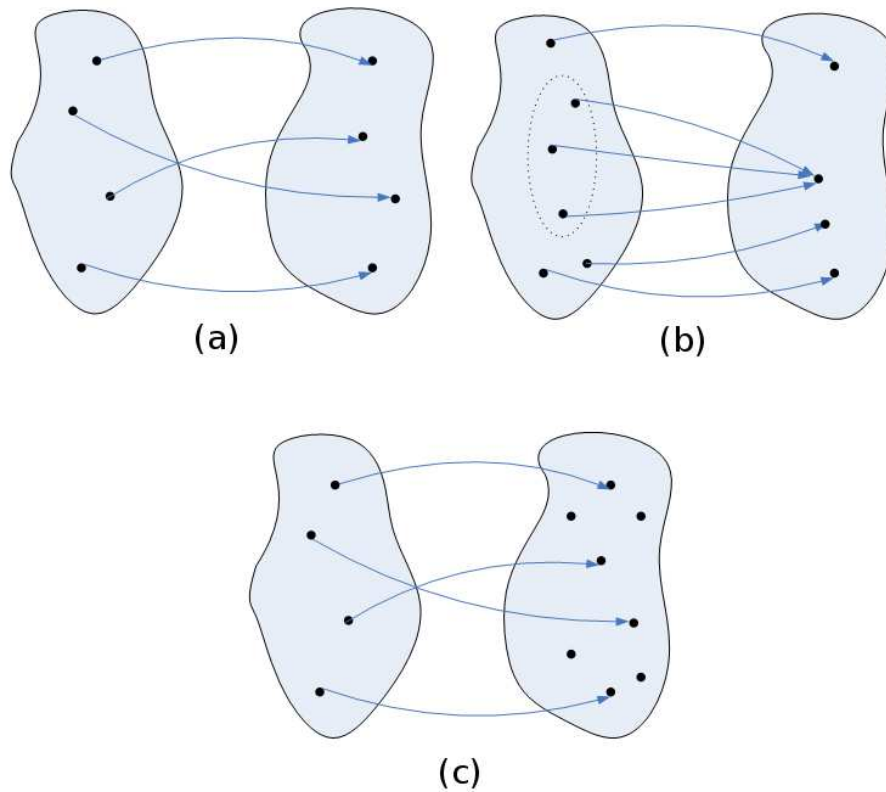
2.2. Homomorfizam grupa

Preslikavanje $\varphi : (G, \circ) \rightarrow (H, \hat{\circ})$ naziva se homomorfizmom ako za sve $g_1, g_2 \in G$ vrijedi

$$\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \hat{\circ} \varphi(g_2). \quad (2.13)$$

U skupu H moraju postajati vrijednosti $\varphi(g)$ za svaki $g \in G$. Dakako, moguće je da se u skupu H pojavljuju i drugi elementi koji nisu pogođeni preslikavanjem φ .

Homomorfizmi različiti po odnosu kodomene, slike preslikavanja i injektivnosti ilustrirani su slikom 2.1.



Slika 2.1.: (a) Izomorfizam, (b) epimorfizam i (c) monomorfizam.

Iz definicije slijede svojstva homomorfizma:

1. $\varphi(e) = e$,
2. $[\varphi(g)]^{-1} = \varphi(g^{-1})$.

Homomorfizam preslikava neutralni element iz G u neutralni element iz H , a inverzno preslikavanje elementa iz G identično je preslikavanju inverza toga elementa.

Dokaz:

1. $\varphi(g) = \varphi(g \circ e) = \varphi(g) \hat{\circ} \varphi(e)$ pa je $\varphi(e)$ neutralan element u H .
2. $\varphi(g) \hat{\circ} \varphi(g^{-1}) = \varphi(g \circ g^{-1}) = \varphi(e) = e = \varphi(g) \hat{\circ} [\varphi(g)]^{-1}$.

Općenito, može se dogoditi da se homomorfizmom preslikava više različitih elementa iz G u neutralni element iz H pa se skup svih takvih $g \in G$, za koje vrijedi $\varphi(g) = e$, naziva jezgrom homomorfizma i označava se $\ker \varphi$ prema početnim slovima engleske riječi *kernel*.

Jezgra $\ker \varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e\}$ normalna je podgrupa grupe G . Ako je $c \in \ker \varphi$, za svaki element $g \in G$ vrijedi

$$\varphi(g^{-1} \circ c \circ g) = [\varphi(g)]^{-1} \hat{\circ} \varphi(c) \hat{\circ} \varphi(g) = [\varphi(g)]^{-1} \hat{\circ} \varphi(g) = e, \quad (2.14)$$

odnosno, $g^{-1} \circ c \circ g \in \ker \varphi$. Drugim riječima, konjugacija $c \in \ker \varphi$ bilo kojim elementom $g \in G$ rezultira ponovno nekim elementom skupa $\ker \varphi$. Tvrdnja, da je jezgra normalna podgrupa grupe G , time je dokazana.

Homomorfizam je injektivan onda i samo onda ako je $\ker \varphi = \{e\}$. Potrebno je dokazati obje strane ekvivalencije. Neka je φ injektivni homomorfizam, a $g, g_1, g_2 \in G$. Pretpostavimo $\ker \varphi = \{e\}$. Ako je $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, onda je $\varphi(g_1 \circ g_2^{-1}) = \varphi(g_1) \hat{\circ} [\varphi(g_2)]^{-1} = e$ pa je $g_1 \circ g_2^{-1} = e$, odnosno $g_1 = g_2$. Obrnuto, ako je $\varphi(g) = e$, onda zbog $\varphi(e) = e$ vrijedi $\varphi(g) = \varphi(e)$ pa slijedi $g = e$ čime je tvrdnja dokazana.

Slika $S(\varphi) := \{\varphi(g) \in H : g \in G\}$ homomorfizma φ podgrupa je grupe H . Za bilo koja dva elementa slike $x, y \in S(\varphi)$ vrijedi da su pogođeni homomorfnim preslikavanjem $x = \varphi(a), y = \varphi(b)$. Prema tome je $x \hat{\circ} y = \varphi(a) \hat{\circ} \varphi(b) = \varphi(a \circ b) \in S(\varphi)$. Ovdje se može prepoznati svojstvo grupoidnosti na $\{S(\varphi), \hat{\circ}\}$. Kako je prethodno dokazano da se neutralni element iz G preslikava u neutralni element iz H , a inverzni element iz G u inverzni element iz H , jasno je da je $S(\varphi)$ i sama grupa, dakle, $S(\varphi) \subseteq H$.

Sljedećom važnom definicijom uvodi se apstraktna jednakost grupa. Jednakost se odnosi na ponašanje s obzirom na binarne operacije grupa. Homomorfizam $\varphi : (G, \circ) \rightarrow (H, \hat{\circ})$ je izomorfizam grupa ako je φ bijekcija. S aspekta teorije grupa izomorfne grupe G i H se ne razlikuju, a to se svojstvo označava $G \simeq H$. Također vrijedi:

1. $|G| = |H|$,
2. binarna operacija u obje grupe se vrši na isti način, odnosno $g_1 \circ g_2$ u grupi G odgovara produktu $\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$ u grupi H .

Da bi se izomorfizam dokazao, dovoljno je provjeriti da je φ homomorfizam, injektivnost od φ ($\ker \varphi = \{e\}$) i surjektivnost.

Jedan je primjer izomorfni grupa $Z_2 \simeq C_2$ gdje je $Z_2 = (\{0, 1\}, +(\text{mod } 2))$ aditivna grupa sa zbrajanjem po modulu 2, a $C_2 = (\{-1, 1\}, \cdot)$ multiplikativna grupa. Izomorfizam $\varphi : Z_2 \rightarrow C_2$ je definiran s $\varphi(0) = 1, \varphi(1) = -1$. Dakako, može se dogoditi da postoji i više različitih izomorfizama između dvije zadane grupe.

Ako je $\varphi : (G, \circ) \rightarrow (H, \hat{\circ})$ surjektivni izomorfizam grupa, onda kažemo da je φ epimorfizam. Injektivni homomorfizam zove se monomorfizam.

2.3. Primjeri grupa

2.3.1. Cikličke grupe

Pojam cikličke grupe kasnije će se spominjati pa ga je na ovom mjestu dobro definirati. U tu svrhu valja promotriti grupu (G, \circ) , prisjetiti se definicije potenciranja elementa i izdvojiti skup svih elemenata nastalih potenciranjem elementa $g \in G$, odnosno $\{g^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Taj je skup svakako podskup skupa G (zbog grupoidnosti), a sadrži neutralni element i inverzni element za svaki iz skupa pa je time i grupa. Kako je na neki način potekla od elementa g , grupa se naziva generiranom podgrupom, a element g je njezin generator. Oznaka za generiranu podgrupu je $\langle g \rangle$.

Neka je (G, \circ) grupa i $g \in G$ njezin element različit od neutralnog. Ako za neki prirodni broj n vrijedi $g^n = e$, onda se najmanji takav n zove redom elementa g i označava $n = |g|$. Ako je g reda n , onda je inverz elementa g^k jednak g^{n-k} jer je $g^k \circ g^{n-k} = e$.

Sada je sve spremno za definiciju cikličke grupe. Grupa (G, \circ) je ciklička kada postoji $g \in G$ takav da može generirati cijelu grupu G , odnosno svaki element grupe $x \in G$ se može zapisati u obliku potencije $x = g^k, k \in \mathbb{Z}$:

$$G = \{g^k : k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.15)$$

Ako je generator g konačnog reda n , tada je i ciklička grupa reda n :

$$G = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\} \quad (2.16)$$

Moguće je da niti jedna pozitivna potencija generativnog elementa ne bude jednaka neutralnom elementu $g^k \neq e, \forall k \in \mathbb{N}$ pa se u tom slučaju radi o beskonačnoj cikličkoj grupi

$$G = \{\dots, g^{-2}, g^{-1}, e, g, g^2, \dots\} \quad (2.17)$$

Budući da elementi oblika g^k i g^l , $k, l \in \mathbb{Z}$ međusobno komutiraju, svaka ciklička grupa je komutativna.

2.3.2. Simetrične grupe

Neka je zadan skup od n elemenata $\{1, 2, \dots, n\}$. Permutacijom tog skupa zovemo bilo koju bijekciju $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, a skup svih permutacija n -članog skupa se uobičajeno označava sa S_n . Razdioba permutacije se često sažeto zapisuje u obliku:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Uvedemo li binarni operator kompozicije permutacija, dobivamo grupu koja se naziva simetrična grupa ili grupa permutacija. Identitet je ono preslikavanje koje svaki element preslikava u samoga sebe, a inverz je inverz funkcije.

Permutacija skupa $S = \{1, 2, \dots, n\}$ u kojoj za elemente $\{b_1, \dots, b_k\} \in S$ vrijedi

$$b_1 \mapsto b_2, b_2 \mapsto b_3, \dots, b_{k-1} \mapsto b_k, b_k \mapsto b_1 \quad (2.19)$$

i $s \mapsto s$ za sve ostale $s \in S$ zove se ciklus ili kružna permutacija, a označava se s (b_1, b_2, \dots, b_k) . Tako je, na primjer, ciklus $(1, 2) \in S_3$ zapravo permutacija:

$$(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

2.3.3. Grupa $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

Aditivna grupa $(\mathbb{Z}_N, +(\text{mod } N))$ grupa je cijelih brojeva iz intervala $[0, N - 1]$ sa zbrajanjem u modulo N aritmetici. To je ciklička grupa reda N generirana elementom 1. U nastavku će se za ovu grupu ponekad koristiti jednakovrijedna oznaka $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Kada N teži beskonačnoj vrijednosti, grupa postaje aproksimacija kružnice. Strukturu možemo zamisliti kao točke uniformno raspoređene po kružnici i zato se ova grupa u primjenama prirodno pojavljuje kod funkcija koje uzimaju argument s kružnice.

Elementi tako lijepo poslagani po kružnici podsjećaju na skup N -tih korijena iz jedinice. I uistinu, grupa $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ može se realizirati u multiplikativnoj formi. Radi se o grupi C_N koju čini skup kompleksnih brojeva $z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \in \mathbb{C}$ s obzirom

na operaciju množenja kompleksnih brojeva. Elementi z_k su definirani na sljedeći način

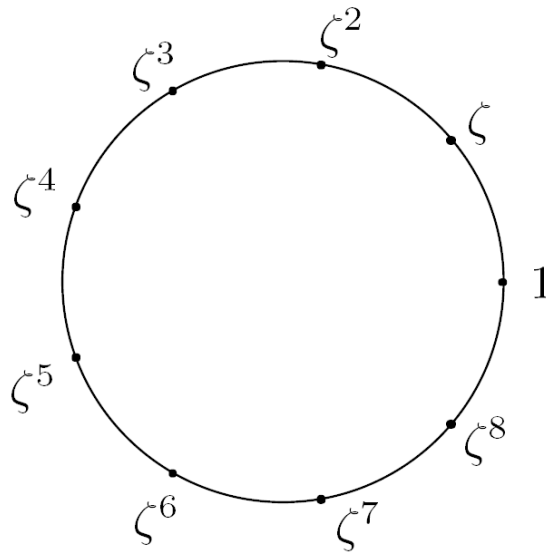
$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.21)$$

i čine vrhove pravilnog N -terokuta jedinične kružnice u kompleksnoj ravnini.

Uz oznaku $\zeta := \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ grupa se može zapisati i na praktičniji način. Naime, po de Moivreovoj formuli vrijedi $\zeta^k := \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ pa je

$$C_n = \{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{N-1}\}. \quad (2.22)$$

Inverz elementa ζ^k jednak je ζ^{N-k} jer je $\zeta^k \zeta^{N-k} = \zeta^N = 1$.



Slika 2.2.: Grupa N -tih korijena iz jedinice za $N = 9$. Preuzeto iz (Stein, 2003).

S obzirom na definiciju objekta ζ , jasno je da vrijedi $\zeta^n = \zeta^m$ ako i samo ako je razlika $n - m$ djeljiva s N . Prirodno je postaviti pitanje zašto birati n izvan intervala $[0, N-1]$ koji je inherentno sadržan u skupu C_N . Smisao iskaza dolazi do izražaja prilikom razmatranja što se događa pri množenju N -tih korijena iz jedinice. Naravno, tada se potencije generativnog elementa zbrajaju $\zeta^n \zeta^m = \zeta^{n+m}$ i ne postoji garancija da će zbroj $n + m$ biti sadržan u intervalu $[0, N-1]$. Zato je potrebno primijeniti modulo N aritmetiku.

2.4. Liejeve grupe i Liejeva algebra

Lijeve grupe vrlo su važna vrsta grupa. Naziv su dobile po norveškom matematičaru Mariusu Sophusu Lieju koji je u drugoj polovici devetnaestog stoljeća postavio temelje teoriji kontinuiranih transformacijskih grupa. Liejeve grupe predstavljaju razvijenu teoriju kontinuiranih simetrija što ih čini nezamjenjivim alatom u modernoj matematici i teoretskoj fizici.

Liejeva se grupa (G, \circ) definira kao grupa čiji je skup G diferencijalna višestrukost (eng. *differential manifold*) s analitičkim operacijama $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 \circ g_2$ i $g \rightarrow g^{-1}$. Dimenzija Liejeve grupe jednaka je dimenziji pridružene višestrukosti.

Svako Liejevoj grupi može se pridružiti Liejeva algebra čiji je vektorski prostor tangencijalan prostoru grupe G u neutralnom elementu u kojem je potpuno sadržana lokalna struktura grupe. Algebra se naziva Liejevom kada operacije $x \wedge y$, koje se u ovom kontekstu posebno označuju $[x, y]$, za svaki izbor vrijednosti $x, y, z \in (V, [,])$ zadovoljavaju dodatna svojstva

$$[x, y] = -[y, x] \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \quad (2.23)$$

Navedena se svojstva redom nazivaju svojstvo antisimetrije i Jakobijev identitet. Operacija $[x, y]$ naziva se Liejeva zagrada za vektore x i y . Treba primijetiti da Liejeve algebre općenito nisu asocijativne. Svojstvo $[x, x] = 0$ izravno slijedi iz definicije.

Matrična Liejeva grupa (eng. *matrix Lie group*) (G, \circ) Liejeva je grupa za koju je G skup kvadratnih matrica, a operacija je grupe matrično množenje. Odgovarajuća Liejeva algebra označava se malim slovima pa se tako, primjerice, Liejeve algebre za grupe $GL(N, \mathbb{R})$, $SO(N)$ i $SE(N)$ redom označavaju $gl(N, \mathbb{R})$, $so(N)$ i $se(N)$.

U ovom je kontekstu bilo važno spomenuti definiciju Liejeve grupe i algebre jer su posebna rotacijska grupa $SO(N)$ kao i posebna euklidska grupa gibanja $SE(N)$ upravo Liejeve grupe, no dublje u teoriju nećemo ulaziti.

2.5. Reprezentacije konačnih grupa

N -dimenzionalna matrična reprezentacija grupe G je homomorfizam s grupe na skup nesusingularnih matrica, $D : G \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$. Prema definiciji homomorfizma, za reprezentaciju grupe vrijede sljedeća svojstva (Chirikjian, 2001):

1. $D(e) = {}_{N \times N}$ homomorfizam identiteta je jedinična matrica dimenzije $N \times N$,

$$2. D(g_1 \circ g_2) = D(g_1)D(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

$$3. D(g^{-1}) = D^{-1}(g), \quad \forall g \in G.$$

U svojstvu (2) pojavljuje se množenje reprezentacija, no to je obično matrično množenje.

Većina grupa ima mnogo reprezentacija koje u različitim vektorskim prostorima. Na primjeru simetrične grupe

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\} \quad (2.24)$$

moгу se ispisati matrice koje određena reprezentacija pridružuje svakom elementu grupe. To su redom:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Moguće se uvjeriti da svojstva (1) do (3) vrijede za ovu reprezentaciju.

Ako je preslikavanje $D : G \rightarrow D(G)$ bijektivno, reprezentacija D se naziva vjerodostojnom (eng. *faithful*).

Dvije su reprezentacije ekvivalentne ako su njihove matrice D i D' slične. Oznaka za ekvivalenciju reprezentacija je $D \cong D'$. Primjer 2.25 tako je ekvivalentan s

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -19 & -360 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 & 323 \\ -1 & -18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 37 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 & 343 \\ -1 & -19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -19 & -343 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

jer se ova reprezentacija dobije prijelazom u novu bazu (definicija u dodatku) s matricom prijelaza

$$\begin{bmatrix} 1 & 19 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Da bi se opisalo važno svojstvo reducibilnosti reprezentacije, potrebno je uvesti pojam izravne sume. Blok-dijagonalna matrica se može zapisati na sljedeći način

$$B = A_1 \oplus A_2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

a kako i sam naziv sugerira, radi se o matrici koja ima blokove na glavnoj dijagonali. Ovdje je B izravna suma matrica A_1 i A_2 . Dakako, u izravnu sumu može ući proizvoljan broj matrica pa se tako blok-dijagonalna matrica B s M blokova

na dijagonali zapisuje

$$B = \sum_{m=1}^M \oplus A_m = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_M \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Reprezentacija je reducibilna (eng. *reducible*) ako je ekvivalentna direktnoj sumi drugih reprezentacija, odnosno ako se može prikazati u blok-dijagonalnoj formi. Slijedom prijelaza u novu bazu na svakoj reprezentacijskoj matrici konačne dimenzionalnosti može se postići da je reprezentacija zapisana kao direktna suma najmanjih mogućih blokova. Takvi najmanji blokovi se nazivaju nereducibilne reprezentacije. Proizvoljna reprezentacija svake konačne grupe može se podijeliti na nereducibilne reprezentacije, ali to za općenitu grupu ne mora biti istina.

Reprezentaciju možemo shvatiti kao linearni operator koji djeluje na funkcijama na grupi. U tom ćemo smislu izdvojiti dvije standardne reprezentacije – lijevu i desnu regularnu reprezentaciju koje su definirane redom

$$(L(g)f)(h) = f(g^{-1} \circ h) =: f_g^L(h), \quad (R(g)f)(h) = f(h \circ g) =: f_g^R(h) \quad (2.30)$$

pri čemu su g i h proizvoljni elementi grupe G , a f je funkcija na grupi.

Smisao definicije najlakše je dočarati ako za primjer uzmemo grupu $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Tada funkcija f argumente izabire iz konačnog skupa točaka na kružnici, a vraća, primjerice, kompleksni broj. Želimo li zarotirati funkciju ulijevo za kut α , koristimo se lijevom regularnom reprezentacijom:

$$(L(\alpha)f)(\phi) = f(-\alpha + \phi) = f_\alpha^L(\phi) \quad (2.31)$$

Jednako, za desnu regularnu reprezentaciju prema definiciji vrijedi:

$$(R(\alpha)f)(\phi) = f(\phi + \alpha) = f_\alpha^R(\phi) \quad (2.32)$$

Uistinu, to se poklapa s prethodnim saznanjima i intuitivnim zorom o rotaciji na diskretiziranoj kružnici.

Općenito, djelovanjem slijeda regularnih reprezentacija dobiva se

$$\begin{aligned} (L(g_1)(L(g_2)f))(h) &= (L(g_1)f_{g_2}^L)(h) = f_{g_2}^L(g_1^{-1} \circ h) = f(g_2^{-1} \circ (g_1^{-1} \circ h)) = \\ &= f((g_1 \circ g_2)^{-1} \circ h) = (L(g_1 \circ g_2)f)(h), \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$(R(g_1)(R(g_2)f))(h) = (R(g_1)f_{g_2}^R)(h) = f((h \circ g_1) \circ g_2) = (R(g_1 \circ g_2)f)(h). \quad (2.34)$$

Kao baza vektorskog prostora svih funkcija na konačnoj grupi G može se koristiti pomaknuta delta funkcija

$$\delta(h) = \begin{cases} 1, & h = e \\ 0, & h \neq e \end{cases} \quad (2.35)$$

Tada svaka funkcija na G može biti zapisana preko sumacije $f(g) = \sum_{h \in G} f(h)\delta_g(h)$ pri čemu je $\delta_g(h) = \delta(g^{-1} \circ h)$ zapravo funkcija $\delta(h)$ pomaknuta ulijevo djelovanjem g . Jedan po jedan element matrice reprezentacije grupe G dimenzije $N \times N$ možemo izračunati kao

$$T_{ij}(g) = (\delta_{g_i}, T(g)\delta_{g_j}) \quad (2.36)$$

pri čemu operator T može biti lijevi ili desni. Vrijede svojstva:

1. $T(e) = \mathbb{I}_{N \times N}$,
2. elementi na dijagonali matrice reprezentacije $T(g)$, $g \neq e$ jednaki su nuli.

Oba se svojstva mogu lako provjeriti.

Osnovne informacije o grupi mogu se prikazati i u sažetijem obliku od matrice reprezentacije. To je moguće zato što je kompleksna reprezentacija konačne grupe određena (do izomorfizma) svojim karakterom.

2.5.1. Karakteri konačnih grupa

Karakter je grupe funkcija koja svakom elementu grupe pridružuje trag korespondentne reprezentacijske matrice. Georg Frobenius, čuveni njemački matematičar, razvio je teoriju reprezentacije konačnih grupa isključivo na bazi karaktera bez eksplicitne matrice realizacije reprezentacija. To je mogao učiniti jer je karakter dovoljan za opis konačne grupe.

Neka je V vektorski prostor konačne dimenzionalnosti na polju F i neka je $\pi : G \rightarrow GL(V)$ nereducibilna reprezentacija grupe G na prostoru V . Karakter za

π je funkcija $\chi_\pi : G \rightarrow F$ definirana s $\chi_\pi = \text{Tr}(\pi(g))$ gdje je Tr trag matrice, odnosno suma elemenata na glavnoj dijagonali. Jezgru karaktera χ_π čini skup

$$\ker \chi_\pi := \{g \in G \mid \chi_\pi(g) = \chi_\pi(e)\} \quad (2.37)$$

pri čemu je

$$\chi_\pi(e) = \text{Tr}_{(N \times N)} = \sum_{i=1}^N 1 = N \quad (2.38)$$

Slijede izabrana važnija svojstva karaktera konačnih grupa bez opširnijeg objašnjenja i dokaza:

1. karakteri su razredne funkcije što znači da vraćaju konstantnu vrijednost za sve elemente istog konjugacijskog razreda,
2. karakteri tvore potpunu ortogonalnu bazu za prostor svih kvadratno integrabilnih razrednih funkcija,
3. izomorfne reprezentacije imaju iste karaktere; za polje poput polja kompleksnih brojeva tvrdnja vrijedi u oba smjera pa se može kazati da su reprezentacije izomorfne ako i samo ako imaju iste karaktere,
4. ako je reprezentacija direktna suma podreprezentacija, onda je korespondentan karakter jednak sumi karaktera tih podreprezentacija.

Kratki komentar vezan za svojstvo (1): iz tvrdnje proizlazi da su karakteri primjeri razrednih funkcija, odnosno da vrijedi $\chi_j(h^{-1} \circ g \circ h) = \chi_j(g)$, a sama je tvrdnja posljedica toga da trag matrice ostaje nepromijenjen prilikom promjene baze.

Također, valja uočiti da svojstvo (2) zapravo znači da se svaka razredna funkcija može napisati kao linearna kombinacija karaktera.

Neka je $\pi_j(g)$ nereducibilna matrična reprezentacija grupe G dimenzije $d_j \times d_j$. Zanimljiva je i neočita činjenica da se π_j pojavljuje u dekompoziciji (lijeve ili desne) regularne reprezentacije T točno d_j puta i da je broj različitih nereducibilnih reprezentacija grupe G jednak broju konjugacijskih razreda u G .

$$T(g) \cong \sum_{j=1}^{\alpha} \oplus d_j \pi_j(g) \quad (2.39)$$

gdje je α broj konjugacijskih razreda grupe G . Na ovoj razini razmatranja, činjenicu ćemo prihvatiti ispravnom bez dokaza.

Kako uslijed promjene baze trag matrice ostaje jednak, računanjem traga obje strane prethodnog izraza doći ćemo do formule

$$\text{Tr} \{T(g)\} = \sum_{j=1}^{\alpha} d_j \chi_j(g) \quad (2.40)$$

pri čemu je $\chi_j = \text{Tr}(\pi_j(g))$ karakter nereducibilne transformacije $\pi_j(g)$.

U posebnom slučaju, kada je $g = e$, ovaj izraz prelazi u Burnsideovu formulu

$$|G| = \sum_{j=1}^{\alpha} d_j^2. \quad (2.41)$$

Jasno je da je formula ispravna jer je $\text{Tr}(T(e)) = \text{Tr}(T_{(N \times N)}) = |G|$, a slično vrijedi i za sumande na desnoj strani izraza.

Zbog svojstva delta funkcije definirane u prethodnom potpoglavlju, za elemente grupe različite od neutralnog elementa reducibilna matricna reprezentacija T imat će nule na dijagonali i zato za sve $g \neq e$ vrijedi:

$$0 = \sum_{j=1}^{\alpha} d_j \chi_j(g), \quad \forall g \neq e \quad (2.42)$$

Ovaj rezultat će nam s Burnsideovom formulom koristiti prilikom dokaza inverzne Fourierove transformacije na konačnoj grupi.

2.6. Reprezentacije Liejevih grupa

Teorija reprezentacije Liejevih grupa ima mnoge fizikalne primjene, važna je u kvantnoj teoriji, teoriji posebnih funkcija i harmonijskoj analizi na grupama gibanja.

Neka K predstavlja bilo \mathbb{R}^N bilo \mathbb{C}^N , a transformacijska grupa (G, \circ) djeluje na vektorima $\mathbf{x} \in K$ tako da vrijedi $g \circ \mathbf{x} \in K$, $\forall g \in G$. Lijeva kvaziregularna reprezentacija od G grupa je $GL(\mathcal{L}^2(K))$ (skup svih linearnih transformacija na $\mathcal{L}^2(K)$ s operacijom kompozicije). Element $L(g)$ linearni je operatori koji na skalarne funkcije $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}^2(K)$ djeluje na sljedeći način

$$L(g)f(\mathbf{x}) = f(g^{-1} \circ \mathbf{x}) \quad (2.43)$$

Kako je $GL(\mathcal{L}^2(K))$ grupa linearnih transformacija, za dokaz da je L reprezentacija, dovoljno je pokazati da je $L : G \rightarrow GL(\mathcal{L}^2(K))$ homomorfizam

$$\begin{aligned} (L(g_1)L(g_2)f)(\mathbf{x}) &= (L(g_1)(L(g_2)f))(\mathbf{x}) = (L(g_1)f_{g_2})(\mathbf{x}) \\ &= f(g_2^{-1} \circ g_1^{-1} \circ \mathbf{x}) = f((g_1 \circ g_2)^{-1} \circ \mathbf{x}) = L(g_1 \circ g_2)f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

pri čemu je korištena notacija $f_{g_2}(\mathbf{x}) = f(g_2^{-1} \circ \mathbf{x})$.

Kada je G matična grupa, g je kvadratna matrica reda N pa vrijedi zapis $g \circ \mathbf{x} = g\mathbf{x}$.

Desna kvaziregularna reprezentacija matrice Liejeve grupe G definirana izrazom

$$R(g)f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^T g) \quad (2.45)$$

također je reprezentacija.

Matrice korespondentne tim operatorima generirane su odabirom odgovarajuće baze za invarijantne podprostore $\mathcal{L}^2(K)$ što dovodi do nereducibilne matične reprezentacije grupe. U slučaju nekompaktne nekomutativne grupe, kakva je i grupa euklidskih gibanja, podprostori imaju beskonačno mnogo elemenata baze što znači da je reprezentacijska matrica beskonačne dimenzije.

3. Gibanja u trodimenzionalnom prostoru

U ovom poglavlju opisana su gibanja tijela u kontekstu teorije grupa. Uvedeni su koncepti i pojmovi važni za razumijevanje pojava na grupi $SE(3)$. Uz općenitu teoriju o gibanjima obrađeni su i neki slučajevi koji se često pojavljuju u primjeni i koji su povezni sa središnjom temom rada – algoritmom za brzu konvoluciju na $SE(3)$.

3.1. Gibanja i deformacije

Općenito gibanje ili deformacija kontinuiranog medija transformacija je oblika

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (3.1)$$

gdje je \mathbf{X} vektor koji parametrizira poziciju neke materijalne točke unutar medija u nekom referentnom trenutku t_0 , a \mathbf{x} vektor koji predstavlja poziciju iste točke u trenutku t . Prema toj definiciji, vrijedi $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{x}$. Kao referentni sustav koristi se ortonormalna baza $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, a vektori \mathbf{x} i \mathbf{X} određeni su svojim komponentama $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$, odnosno $X_i = \mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_i$ za $i = 1, 2, 3$.

Kada kontinuirani medij nije čvrsto tijelo, postoji mnogo različitih transformacija koje uključuju i deformaciju. Tako je, primjerice, medij moguće posmaknuti u nekom smjeru

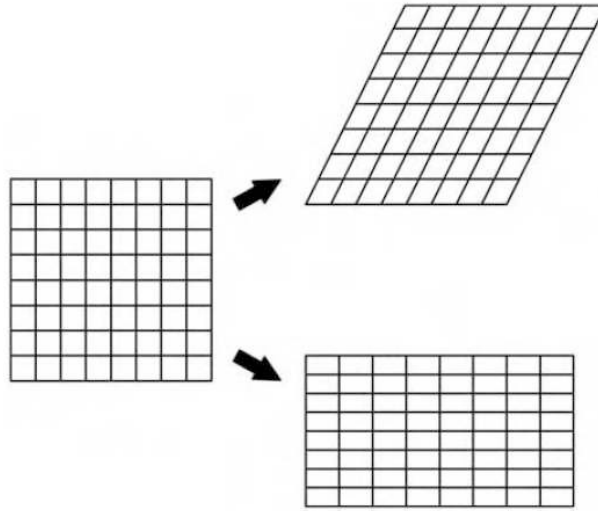
$$x_1 = X_1 + k(t - t_0), \quad k \in \mathbb{R}, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3. \quad (3.2)$$

Rastezanje duž jedne osi bilo bi opisano izrazima

$$x_1 = e^{ct} X_1, \quad x_2 = e^{-ct} X_2, \quad x_3 = X_3 \quad (3.3)$$

za $c \in \mathbb{R}$. Ove su deformacije prikazane slikom 3.1..

Kod čvrstih tijela nema deformacije pa iz skupa transformacija, koje predstavljaju



Slika 3.1.: Geometrijska interpretacija posmaka i rastezanja. Slika je preuzeta iz (Chirikjian, 2001).

gibanje, zadržavamo samo one koje čuvaju udaljenost među točkama unutar tijela. To su rotacija $\mathbf{x} = R\mathbf{X}$ i translacija $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{b}$. Rotacijom će biti očuvane samo euklidske udaljenosti, dok očuvanje kod translacije vrijedi za više općenitijih mjera udaljenosti.

Prema glasovitom Chaslesovom teoremu, svaki pomak čvrstog tijela sastavljen je od jedne translacije i jedne rotacije oko točke. To znači da se gibanje svake točke čvrstog tijela \mathbf{X} može zapisati kao

$$\mathbf{x} = R\mathbf{X} + \mathbf{b} \quad (3.4)$$

gdje je $R \in SO(3)$ rotacijska matrica, a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ translacijski vektor. Uređeni par $g = (R, \mathbf{b}) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ opisuje gibanje čvrstog tijela, ali također i odnos okvira u prostoru.

3.2. Rotacije čvrstog tijela

U geometriji i mehanici, rotacija čvrstog tijela u trodimenzionalnom euklidskom prostoru E^3 gibanje je koje čuva udaljenosti među točkama tijela i, za razliku od translacije, ostavlja jednu točku fiksiranom tijekom gibanja. Kako po definiciji gibanje mora biti fizički ostvarivo, refleksije se ne uzimaju u obzir. Neka su \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 dvije točke unutar tijela prije rotacije, a \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 korespondentne točke nakon

rotacije. Tada vrijedi

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = d(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \quad (3.5)$$

pri čemu je

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \quad (3.6)$$

euklidska udaljenost. Rotacija općenito ne mora čuvati neku drugu vrstu udaljenosti među točkama.

Točka, koja se ne giba tijekom rotacije, naziva se središnjom točkom (eng. *pivot point*). Prikladnim odabirom referentnog okvira moguće je središnju točku postaviti u ishodište koordinatnog sustava da bude $\mathbf{x}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$. Uz takav je izbor izraz

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = A(t)\mathbf{X} \quad (3.7)$$

nužan uvjet da gibanje bude rotacijsko. To, dakako, nije i dovoljan uvjet jer vremenski ovisna matrica $A(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ može predstavljati deformaciju tijela poput rastezanja duž osi. Organičenja na oblik matrice $A(t)$ proizlaze iz definicijskog svojstva rotacije da udaljenosti moraju biti očuvane gibanjem.

Ako su \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 vektori definirani u sustavu s ishodištem u središnjoj točki, zbog očuvanja udaljenosti trokut, čije su duljine stranica $\|\mathbf{X}_1\|$, $\|\mathbf{X}_2\|$ i $\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\|$, sukladan je trokutu sa stranicama duljine $\|\mathbf{x}_1\|$, $\|\mathbf{x}_2\|$ i $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$. Prema tome, kut između vektora \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 mora biti jednak kutu između \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 . Rotacija čuva kutove između vektora. Kako je općeniti izraz za skalarni umnožak vektora $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$ pri čemu je θ kut između vektora \mathbf{x} i \mathbf{y} , a rotacijom su očuvane udaljenosti $\|\mathbf{x}_i\| = \|\mathbf{X}_i\|$ i kutevi, vrijedi

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2. \quad (3.8)$$

Korištenjem jednakosti $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ i $\mathbf{x}_i = A\mathbf{X}_i$ gornji izraz postaje

$$(A\mathbf{X}_1)^T (A\mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2. \quad (3.9)$$

Prebacivanjem na lijevu stranu te korištenjem pravila transpozicije i matičnog množenja dalje se dobiva

$$\mathbf{X}_1^T (A^T A - \mathbb{I}) \mathbf{X}_2 = 0. \quad (3.10)$$

Kako su vektori \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 odabrani proizvoljno, jednakost vrijedi za sve moguće

izbore. To je moguće jedino za

$$A^T A = \mathbb{I} \quad (3.11)$$

gdje je $\mathbb{I} \equiv \mathbb{I}_3$ jedinična matrica trećeg reda. Element umnoška $A^T A$ na mjestu (i, j) jednak je umnošku i -tog retka matrice A^T i j -tog stupca matrice A , odnosno skalarnom umnošku i -tog i j -tog stupca matrice A . Po pretpostavci, taj je umnožak jednak δ_{ij} što znači da je matrica A ortogonalna. Općenito, za matricu kažemo da je ortogonalna kada su njezini stupci ortonormirani vektori. Kako je $A^T A = \mathbb{I}$, po Binet-Cauchyjevom teoremu dobivamo $\det(A^T)\det(A) = 1$. Determinanta se ne mijenja transponiranjem i zato vrijedi $[\det(A)]^2 = 1$, odnosno determinanta matrice A može biti $+1$ ili -1 . Skup matrica s determinantnom $+1$ čini čiste rotacije (eng. *pure rotation*) koje osim čuvanja duljine vektora čuvaju i orijentaciju. Kada je determinanta -1 , djelovanjem takve transformacije događa se i refleksija s obzirom na ravninu koja sadrži ishodište.

Uzastopna primjena rotacija na vektoru svakako je ponovno rotacija s obzirom da je duljina vektora ostala nepromijenjena. Pokazat ćemo da skup svih rotacija čini ortogonalnu grupu za koju se često koristi oznaka $O(3)$. Podskup rotacija s determinantom jednakom $+1$ također čini grupu jer produkt dviju matrica s determinantom $+1$ ponovno ima istu determinantu. To je podgrupa ortogonalne grupe, naziva se posebna grupa rotacija (eng. *special rotation group*) i označava se $SO(3)$, a sadrži nama zanimljive čiste rotacije (Wigner, 1959).

3.2.1. Ortogonalna grupa $O(3)$

Skup svih rotacija s operacijom kompozicije čini ortogonalnu grupu $O(3)$. Elementi grupe kvadratne su matrice trećeg reda. Već smo pokazali da svaka matrica M ortogonalne grupe mora zadovoljavati svojstvo

$$M^T M = \mathbb{I}. \quad (3.12)$$

Jedinična matrica \mathbb{I} predstavlja neutralni element, inverzna matrica inverzni element, a matrično množenje binarnu operaciju. Umnožak dviju ortogonalnih matrica M_1 i M_2 ponovno je ortogonalna matrica jer vrijedi

$$(M_1 M_2)^T M_1 M_2 = M_2^T M_1^T M_1 M_2 = M_2^T \mathbb{I} M_2 = \mathbb{I}. \quad (3.13)$$

Ovime je dokazano da matrice s determinantnom $\det(M)^2 = 1$ čine grupu.

3.2.2. Posebna ortogonalna grupa $SO(3)$ i Eulerova dekompozicija

Posebnu ortogonalnu grupu $SO(3)$ čine sve ortogonalne matrice jedinične determinante. To je grupa svih čistih rotacija oko ishodišta u trodimenzionalnom prostoru.

Neka je $R(\hat{n}; \theta)$ oznaka za rotaciju oko osi \hat{n} za kut θ . Tada za Kartezijev koordinatni sustav s bazom $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} R(\hat{z}; \alpha) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R(\hat{y}; \phi) &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \\ R(\hat{x}; \zeta) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \zeta & -\sin \zeta \\ 0 & \sin \zeta & \cos \zeta \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Postoji više načina kako identificirati elemente $g \in SO(3)$. Jedan od njih, osobito bitan za nastavak razmatranja, Eulerovi su kutevi. Uz spomenuti prikaz, često se koristi četvorka parametara (eng. *quaternion*), osno-kutna reprezentacija, kutna brzina i rotacijska matrica. Ne postoji reprezentacija koja može na jedinstven način odrediti element grupe s manje od tri vrijednosti. Eulerovi kutevi zajednički je naziv za sve reprezentacije rotacija u tri dimenzije u kojima rotaciju dekomponiramo u trojku kuteva od kojih svaki predstavlja iznos rotacije oko neke od osi trodimenzionalnog Kartezijevog koordinatnog sustava. Takav način djeluje intuitivno i blisko geometrijskom poimanju. Rezultat rotacije ovisi o redoslijedu pojedinih rotacija oko osi Kartezijevog koordinatnog sustava pa tako dekompozicija, koje uključuju po jednu rotaciju oko svake osi, postoji ukupno 6 (koliko je i permutacija uređene trojke).

Nadalje, kutevi rotacije oko osi nisu nezavisni. Primjerice, rotacija oko \hat{z} za $\pi/2$, zatim oko \hat{y} osi za $\pi/2$ i natrag oko \hat{z} osi za $3\pi/2$ isto je ako rotacija za $\pi/2$ oko \hat{x} osi. Može se pokazati da se sve rotacije u trodimenzionalnom euklidskom prostoru mogu dobiti kombiniranjem rotacija iz samo dvije ravnine, ali imamo dvije odvojene rotacije u istoj ravnini.

Jedan mogući odabir je prikazati svaki element $g \in SO(3)$ pomoću rotacija oko

\hat{z} i \hat{y} osi. Uvedimo oznake:

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= R(\hat{z}; \alpha) \\ a(\beta) &= R(\hat{y}; \beta). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sada se korištenjem rotacijskih matrica, Eulerova dekompozicija kuteva može se zapisati kao

$$g = g(\alpha, \beta, \gamma) = u(\alpha)a(\beta)u(\gamma). \quad (3.16)$$

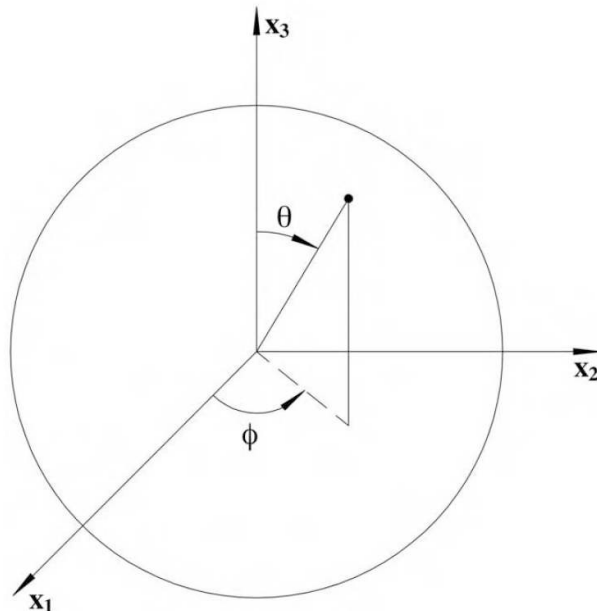
Ovime je određen prirodan koordinatni sustav za rad s funkcijama na grupi $SO(3)$ pa funkciju $f(g)$, $g \in SO(3)$ možemo zapisati kao $f(\alpha, \beta, \gamma)$ pri čemu je $0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi$ i $0 \leq \beta \leq \pi$.

3.2.3. Grupa rotacija i sfera

Tranzitivnost radnji s $SO(3)$ na S^2 znači da se iz bilo koje točke na sferi može doći u bilo koju drugu rotacijama. Tako se rotiranjem sjevernog pola može opisati cijela sfera. Rotacija $u(\phi)a(\theta)u(\psi)$ točku sjevernog pola preslikava u točku

$$\omega(\theta, \phi) = (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta)) \quad (3.17)$$

pri čemu su ϕ i θ sferne koordinate.



Slika 3.2.: Sferni koordinatni sustav. Slika je preuzeta iz (Chirikjian, 2001).

Općenito, u sfernom koordinatnom sustavu pozicija je određena pomoću tri parametra: radijalnom udaljenošću od ishodišta r , polarnim kutem θ i azimutalnim kutem ϕ . Parametri su označeni na slici 3.2. Vrijede veze s koordinatama Kartezijevog koordinatnog sustava:

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \phi \sin \theta \\x_2 &= r \sin \phi \sin \theta \\x_3 &= r \cos \theta.\end{aligned}\tag{3.18}$$

pri čemu su kutevi iz intervala $0 \leq \theta \leq \pi$ i $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

3.3. Kompozicija gibanja

Kompozicija gibanja čvrstog tijela može se ilustrirati tako da prvo pomaknemo okvir izvorno incidentan s ishodišnim okvirom $(\mathbb{I}, \mathbf{0})$ u (R_1, \mathbf{b}_1) , a zatim načinimo gibanje (R_2, \mathbf{b}_2) relativno u odnosu na (R_1, \mathbf{b}_1) . Rezultantno gibanje u odnosu na $(\mathbb{I}, \mathbf{0})$ označimo s (R_3, \mathbf{b}_3) . Iz okvira (R_3, \mathbf{b}_3) izaberemo proizvoljni vektor \mathbf{x} . Valja primijetiti da on iz okvira (R_1, \mathbf{b}_1) izgleda kao $\mathbf{x}' = R_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$, a iz $(\mathbb{I}, \mathbf{0})$ kao:

$$\mathbf{x}'' = R_1(R_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1 = R_1R_2\mathbf{x} + R_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1.\tag{3.19}$$

Promjena referentnog okvira kao posljedica kompozicije gibanja ekvivalentna je definiciji

$$(R_3, \mathbf{b}_3) = (R_1, \mathbf{b}_1) \circ (R_2, \mathbf{b}_2) := (R_1R_2, R_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1).\tag{3.20}$$

Pomoću ovog izraza sada je moguće odrediti gibanje (R_2, \mathbf{b}_2) koje za neki (R_1, \mathbf{b}_1) vraća resultantni okvir u ishodišnu poziciju $(\mathbb{I}, \mathbf{0})$. To se postiže rješavanjem sustava jednadžbi $R_1R_2 = \mathbb{I}$, $R_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ po varijablama R_2 i \mathbf{b}_2 iz zadanih R_1 i \mathbf{b}_1 . Kako je rješenje $R_2 = R_1^T$ i $\mathbf{b}_2 = -R_1^T\mathbf{b}_1$, inverzno gibanje se označava

$$(R, \mathbf{b})^{-1} = (R^T, -R^T\mathbf{b})\tag{3.21}$$

Kada se ovaj inverz bilo s lijeve bilo s desne strane komponira s gibanjem (R, \mathbf{b}) , dobiva se $(\mathbb{I}, \mathbf{0})$.

Skup svih uređenih parova (R, \mathbf{b}) zajedno s operacijom kompozicije \circ čini grupu $SE(3)$ koja će biti pojašnjena u sljedećem potpoglavlju. Svaki element grupe $SE(3)$ može se dekomponirati u jednostavnu translaciju i jednostavnu rotaciju

$$(R, \mathbf{b}) = (\mathbb{I}, \mathbf{b}) \circ (R, \mathbf{0}),\tag{3.22}$$

a svaka translacija konjugirana rotacijom rezultira translacijom

$$(R, \mathbf{0}) \circ (\mathbb{I}, \mathbf{b}) \circ (R^T, \mathbf{0}) = (\mathbb{I}, R\mathbf{b}). \quad (3.23)$$

3.3.1. Homogene transformacijske matrice

U mnogim je situacijama umjesto uređenog para (R, \mathbf{b}) prikladnije za reprezentaciju gibanja koristiti transformacijsku matricu. Operaciju kompozicije tada zamjenjuje matrično množenje.

Svatom gibanju (R, \mathbf{b}) pridružuje jedinstvena kvadratna matrica četvrtog reda

$$H(R, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} R & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

koju nazivamo matricom homogene transformacije ili, katkad zbog jednostavnosti, samo homogenom transformacijom. Koristeći pravila kompozicije i pravila matričnog umnoška lako je pokazati da vrijedi

$$H((R_1, \mathbf{b}_1) \circ (R_2, \mathbf{b}_2)) = H(R_1, \mathbf{b}_1)H(R_2, \mathbf{b}_2). \quad (3.25)$$

Na sličan se način pokazuje i da je inverzno gibanje predstavljeno inverzom matrice homogene transformacije

$$H((R, \mathbf{b})^{-1}) = [H(R, \mathbf{b})]^{-1}. \quad (3.26)$$

Svi se vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ proširuju još jednim članom jedinične vrijednosti kako bi se mogli koristiti u sklopu uvedene notacije

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

pa vrijedi ekvivalencija izraza

$$\mathbf{Y} = H(R, \mathbf{b})\mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{y} = R\mathbf{x} + \mathbf{b}. \quad (3.28)$$

Planarna gibanja podskup su prostornih gibanja i ona su određena matricama

homogenih transformacija sljedećeg oblika

$$H(R(\mathbf{e}_3, \theta), \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & b_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Kako je u sklopu rada naglasak na prostornim gibanjima, specifičnosti gibanja u ravnini neće biti detaljnije razrađene.

3.4. Gibanje pužnog vijka

Teorija gibanja pužnog vijka (eng. *screw motion*) važan je alat u robotici, oblikovanju mehaničkih sustava, numeričkoj geometriji te općenito u kinematici i mehaničkoj statistici. Svaki se prostorni pomak može svesti na neko gibanje pužnog vijka. Zbog zastupljenosti i važnosti u teoriji i praksi kao i zbog činjenice, da se takva gibanja također mogu opisati grupom $SE(3)$, ovdje ćemo uvesti osnovne pojmove i principe gibanja pužnog vijka. Teoriju je razvio irski astronom i matematičar Sir Robert Stawell Ball 1876. godine.

U kontekstu gibanja čvrstog tijela, gibanje pužnog vijka može se promatrati kao rotacija oko osi i translacija duž iste osi. Os je zapravo pravac u prostoru koji se, poput svakog drugog pravca, može u potpunosti odrediti smjerom $\mathbf{n} \in S^2$ i jednom točkom \mathbf{p} koja pripada tom pravcu. Dakle, koristi se parametrizacija oblika

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{n}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.30)$$

Kako postoji beskonačno mnogo vektora \mathbf{p} odabire se onaj s hvatišem u ishodištu koordinatnog sustava i vrhom na pravcu. Vektori \mathbf{p} i \mathbf{n} ortogonalni su pa vrijedi $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0$. S obzirom da je \mathbf{n} jedinični vektor, a za \mathbf{p} postoji ograničenje koje proizlazi iz ortogonalnosti, pravac se može opisati sa samo četiri parametra. Umjesto para (\mathbf{n}, \mathbf{p}) koristi par $(\mathbf{n}, \mathbf{p} \times \mathbf{n})$ koji implicitno uključuje ortogonalnost. Naime, za $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0$, vektor \mathbf{p} se može rekonstruirati $\mathbf{p} = \mathbf{n} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{n})$, a kada je \mathbf{n} jedinični vektor, $(\mathbf{n}, \mathbf{p} \times \mathbf{n})$ sadrži četiri stupnja slobode. Ovakav se način predstavljanja pravca naziva Plückerovim koordinatama.

Neka je \mathbf{x} proizvoljna točka čvrstog tijela. Njezina će pozicija nakon translacije za d jedinica uzduž osi pužnog vijka određene smjerom \mathbf{n} biti

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{n}. \quad (3.31)$$

Rotaciju oko iste osi opisuje izraz

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{p} + e^{\theta N}(\mathbf{x}' - \mathbf{p}) \quad (3.32)$$

gdje je $N = -N^T$ matrica čiji je dual jedinični vektor u smjeru osi rotacije. Kako vrijedi $e^{\theta N}\mathbf{n} = \mathbf{n}$ svejedno je izvršava li se prvo translacija ili rotacija. U oba je slučaja konačna pozicija

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{p} + e^{\theta N}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + d\mathbf{n}. \quad (3.33)$$

Situacija je ilustrirana slikom 3.3.

Homegene transformacije koje predstavljaju translaciju

$$\text{trans}(\mathbf{n}, d) = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & d\mathbf{n} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

i rotaciju

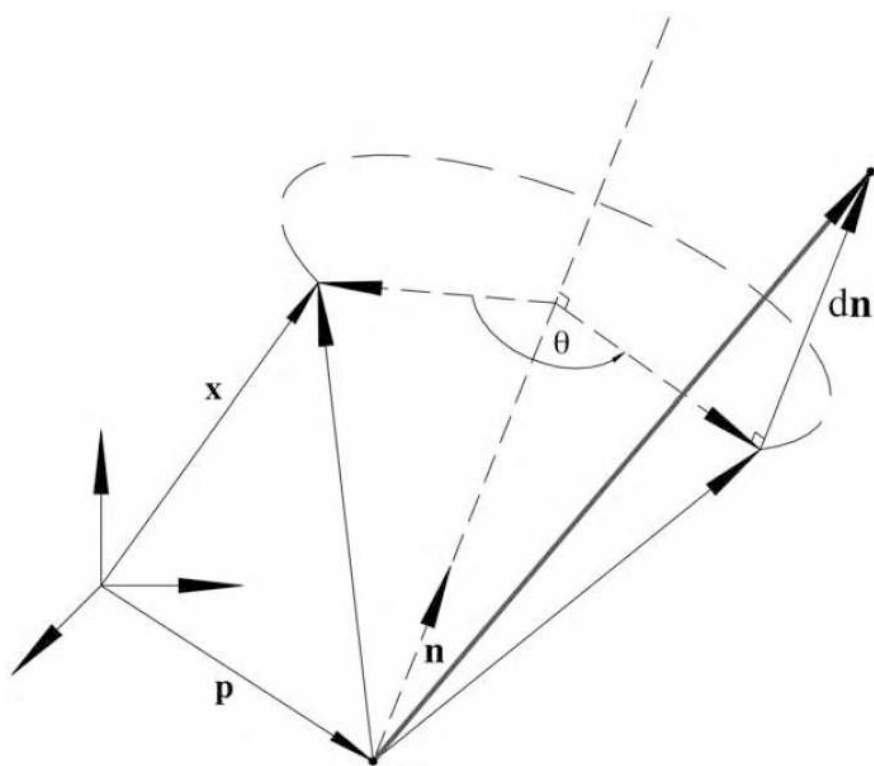
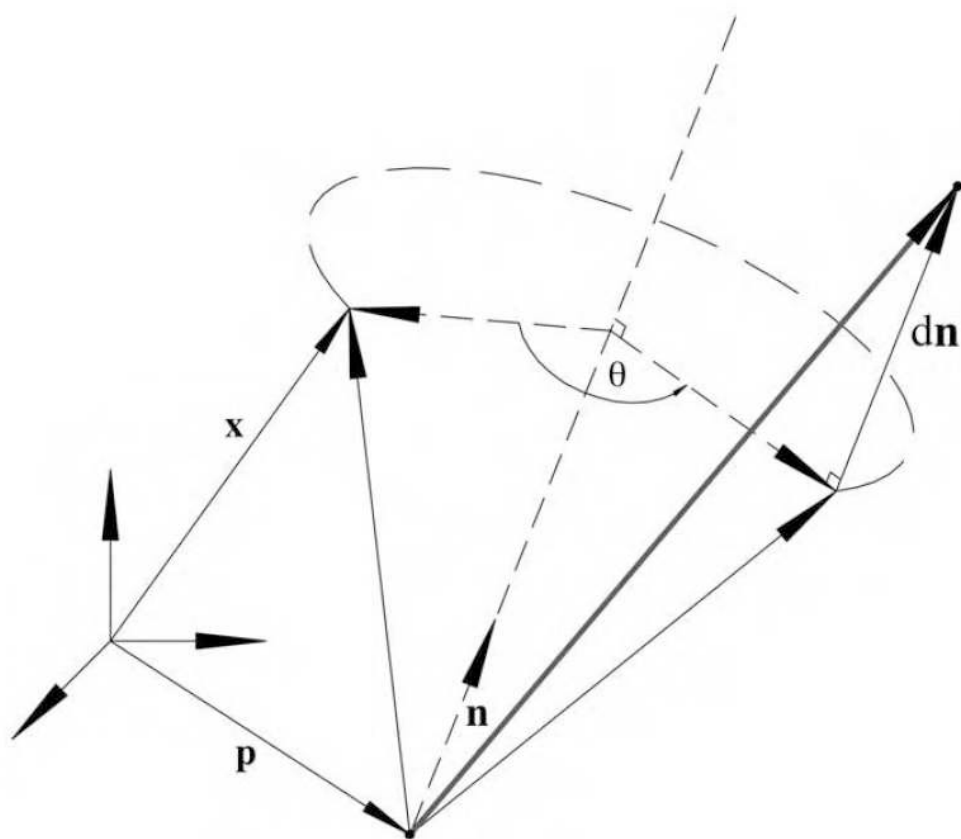
$$\text{rot}(\mathbf{n}, \mathbf{p}, \theta) = \begin{bmatrix} e^{\theta N} & (\mathbb{I} - e^{\theta N})\mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

komutiraju pa je općenito gibanje pužnog vijka kojemu je os (\mathbf{n}, \mathbf{p}) opisano izrazom

$$\begin{aligned} \text{trans}(\mathbf{n}, d)\text{rot}(\mathbf{n}, \mathbf{p}, \theta) &= \text{rot}(\mathbf{n}, \mathbf{p}, \theta)\text{trans}(\mathbf{n}, d) \\ &= \begin{bmatrix} e^{\theta N} & (\mathbb{I} - e^{\theta N})\mathbf{p} + d\mathbf{n} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Postavlja se pitanje kako iz proizvoljnog gibanja (R, \mathbf{b}) odrediti parametre osi pužnog vijka (\mathbf{n}, \mathbf{p}) i parametre gibanja (θ, d) . Vrijednosti varijabli \mathbf{n} i θ dobivaju se iz rotacije $R = e^{\theta N}$. Kako izvodi potrebnih izraza ne uvode principe bitne za nastavak razmatranja, oni su ovdje preskočeni. Krajnji je izraz za izračun kuta rotacije

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\text{Tr}(R) - 1}{2} \right) \quad (3.37)$$



Slika 3.3.: Općenita gibanja pužnog vijka. Slika je preuzeta iz (Chirikjian, 2001).

gdje $\text{Tr}(R)$ predstavlja trag transformacijske matrice R . Vektor \mathbf{n} računa se rješavanjem jednadžbe

$$N^2 = \mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbb{I}. \quad (3.38)$$

Sad još preostaje iz poznatih vrijednosti R , \mathbf{n} i \mathbf{b} odrediti \mathbf{p} i d koji zadovoljavaju uvjete

$$(\mathbb{I} - R)\mathbf{p} + d\mathbf{n} = \mathbf{b} \quad (3.39)$$

i

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.40)$$

Množenjem jednadžbe 3.39 s \mathbf{n} i primjenom jednakosti $\mathbf{n} \cdot e^{\theta N}\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = 0$ dobivamo

$$d = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.41)$$

Dalje se može supstituirati d pa dolazimo do izraza

$$(\mathbb{I} - e^{\theta N})\mathbf{p} = \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (3.42)$$

iz kojeg potom želimo izračunati \mathbf{p} . Kako bismo došli do rješenja, uvodimo jedinični vektor

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \begin{bmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

u kojem n_1 i n_2 predstavljaju komponente vektora \mathbf{n} . Na ovaj su način postignuta svojstva $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ i $\|\mathbf{u}\| = 1$. Jasno je da $\{\mathbf{n}, \mathbf{u}, \mathbf{n} \times \mathbf{u}\}$ definira desni pravokutni koordinatni sustav. Vektor \mathbf{p} može se zapisati u obliku

$$\mathbf{p} = c_1\mathbf{u} + c_2(\mathbf{n} \times \mathbf{u}). \quad (3.44)$$

Uvrštavanjem u izraz 3.42 i projekcijom na \mathbf{u} i $(\mathbf{n} \times \mathbf{u})$, dobiva se sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & 1 - \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

koji se rješava po varijablama c_1 i c_2 kada je $\theta \neq 0$. U posebnom slučaju $\theta = 0$, može se odabrati bilo koji vektor \mathbf{p} iz ravnine normalne vektoru \mathbf{n} .

Pokazano je da svaki pomak čvrstog tijela može biti promatran kao gibanje pužnog vijka.

3.5. Grupa $SE(3)$

Već je rečeno da se sva gibanja čvrstog tijela u trodimenzionalnom prostoru mogu prikazati kombinacijom translacije i rotacije. Također smo dali naslutiti da takva gibanja čine grupe i pritom nekoliko puta spomenuli posebnu grupu euklidskih gibanja. No, tek nakon što smo definirali grupu rotacija i koncepte kompozicije gibanja, može dati formalnu definiciju grupe $SE(3)$.

Posebna grupa euklidskih gibanja u trodimenzionalnom prostoru poluizravni je umnožak \mathbb{R}^3 i posebne ortogonalne grupe $SO(3)$ kojeg bilježimo kao $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times_{\varphi} SO(3)$. Element grupe $g \in SE(3)$ definiran je rotacijom $A \in SO(3)$ i translacijom $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ što se piše u obliku uređenog para $g = (\mathbf{a}, A)$. Za sve elemente $g = (\mathbf{a}, A)$ i $h = (\mathbf{r}, R)$, operator na grupi djeluje na sljedeći način

$$g \circ h = (\mathbf{a} + A\mathbf{r}, AR), \quad (3.46)$$

a inverzni se element definira kao

$$g^{-1} = (-A^T\mathbf{a}, A^T). \quad (3.47)$$

Osim uređenog para, katkad se za identifikaciju elementa grupe $SE(3)$ koristi homogena transformacija matrica oblika

$$H(g) = \begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Jasno je da vrijedi $H(g)H(h) = H(g \circ h)$ i $H(g^{-1}) = H^{-1}(g)$ pa je preslikavanje $g \rightarrow H(g)$ izomorfizam između grupe $SE(3)$ i skupa homogenih transformacijskih matrica.

Produkt dvaju proizvoljnih elemenata grupe $SE(3)$ kontinuirana je funkcija pa je i binarna operacija grupe kontinuirana. Jednako je s inverznim elementom. Iz toga proizlazi da je $SE(3)$ kontinuirana grupa. Kako se svaki otvoreni skup elemenata $SE(3)$ može bijektivno preslikati na otvoreni skup u \mathbb{R}^6 , grupa $SE(3)$ čini diferencijalnu višestrukost što znači da je Liejeva grupa.

Osim posebne euklidske grupe gibanja u trodimenzionalnom prostoru, postoje mnoge druge grupe od velikog značaja za kinematiku čvrstih tijela. Sve su te grupe podgrupe od $SE(3)$. Neke od važnijih su:

- grupa rotacija u trodimenzionalnom prostoru $SO(3)$,

- posebna euklidska grupa u dvodimenzionalnom prostoru $SE(2)$ – pomaci u ravnini (posebno značajni u digitalnoj obradi i analizi slike),
- grupa rotacija u dvodimenzionalnom prostoru $SO(2)$ – rotacije u ravnini,
- grupa translacija u n dimenzija $T(n)$ – za $n = 2$ sve planarne, a za $n = 3$ prostorne translacije,
- grupa jednodimenzionalnih translacija $T(1)$ – svi pomaci paralelni s osi,
- grupa cilindričnih pomaka $SO(2) \times T(1)$ – sve rotacije u ravnini i translacije duži osi okomite na ravninu rotacije,
- grupa pužnih pomaka $H(1)$.

4. Harmonijska analiza na grupama gibanja

U ovom se poglavlju razmatraju Fourierove transformacije funkcija na grupama gibanja pomoću kojih se konvolucijski integrali mogu napisati u obliku matričnih umnožaka u Fourierovom prostoru. Od velikog je značaja općenita teorija harmonijske analize na konačnim i kompaktnim Liejevim grupama jer pruža podlogu za bolje razumijevanje posebnih slučajeva vezanih uz nama zanimljive grupe gibanja. Teorija konačnih grupa primjenjuje se u slučajevima diskretizirane topologije, a i donosi rezultate koji se lako mogu poopćiti za razne druge tipove grupa.

Kako algoritam za brzu konvolucija na posebnoj euklidskoj grupi gibanja sadrži brzu Fourierovu transformaciju na grupi rotacija, ovdje je ukratko opisana harmonijska analiza na $SO(3)$ i osnovne ideje njezine brze izvedbe.

Na kraju poglavlja obrađena je grupa $SE(3)$, opisane su nereducibilne reprezentacije, definirana Fourierova transformacija i njezina svojstva.

4.1. Konačne grupe

Neka je $\pi_j(g)$ nereducibilna matrična reprezentacija grupe G dimenzije $d_j \times d_j$, a funkcija $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ kompleksna funkcija definirana na grupi G . Fourierova je transformacija funkcije f preslikavanje reprezentacije u matricu prema izrazu:

$$\mathcal{F}\{f\} = \hat{f}(\pi_j) = \sum_{g \in G} f(g)\pi_j(g^{-1}). \quad (4.1)$$

Funkcija $\hat{f}(\pi_j)$ predstavlja Fourierovu transformaciju karaktera grupe, familija funkcija $\{\hat{f}(\pi_j)\}$, $j = 1, \dots, \alpha$ čini spektar funkcije f .

Inverz transformacijske formule je dan izrazom

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{\alpha} d_j \text{Tr} \left[\hat{f}(\pi_j)\pi_j(g) \right] \quad (4.2)$$

pri čemu se sumira preko svih različitih nereducibilnih reprezentacija.

Slijedi dokaz inverzne transformacije. Vrijedi

$$\hat{f}(\pi_j)\pi_j(g) = \sum_{h \in G} f(h)\pi_j(h^{-1})\pi_j(g) \quad (4.3)$$

prema definiciji jer se u ovom koraku samo $\hat{f}(\pi_j)$ zapisala preko sumacije. Primjenom svojstva reprezentacije nadalje slijedi

$$\hat{f}(\pi_j)\pi_j(g) = \sum_{h \in G} f(h)\pi_j(h^{-1} \circ g) = f(g)\mathbb{I}_{d_j \times d_j} + \sum_{h \neq g} f(h)\pi_j(h^{-1} \circ g). \quad (4.4)$$

Računanjem traga obje strane dobiva se

$$\text{Tr} \left\{ \hat{f}(\pi_j)\pi_j(g) \right\} = d_j f(g) + \sum_{h \neq g} f(h)\chi_j(h^{-1} \circ g) \quad (4.5)$$

Obje strane se pomnože d_j i prosumiraju preko j

$$\sum_{j=1}^{\alpha} d_j \text{Tr} \left\{ \hat{f}(\pi_j)\pi_j(g) \right\} = \left(\sum_{j=1}^{\alpha} d_j^2 \right) f(g) + \sum_{h \neq g} f(h) \sum_{j=1}^{\alpha} d_j \chi_j(h^{-1} \circ g) \quad (4.6)$$

a zatim se iskoriste relacije dobivene na kraju prethodnog poglavlja kako bi se konačno dobilo

$$\sum_{j=1}^{\alpha} d_j \text{Tr} \left[\hat{f}(\pi_j)\pi_j(g) \right] = |G| f(g) \quad (4.7)$$

što dokazuje tvrdnju.

Ovime je uveden par formula za Fourierovu transformaciju na konačnim grupama. Preostaje pokazati svojstva.

Konvolucijski teorem

Fourierov transformat konvolucije dviju funkcija na G je matrični umnožak njihovih Fourierovih transformata:

$$\mathcal{F} \{ (f_1 * f_2)(g) \} (\pi_j) = \hat{f}_2(\pi_j)\hat{f}_1(\pi_j). \quad (4.8)$$

Dokaz. Jednakost se prema definiciji transformacije može raspisati

$$\mathcal{F} \{ (f_1 * f_2)(g) \} (\pi_j) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} f_1(h)f_2(h^{-1} \circ g) \right) \pi_j(g^{-1}) \quad (4.9)$$

a uvođenjem varijable $k = h^{-1} \circ g$ i zamjenom $g = h \circ k$ izraz postaje:

$$\mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(g)\}(\pi_j) = \sum_{k \in G} \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(k) \pi_j(k^{-1} \circ h^{-1}). \quad (4.10)$$

Korištenjem svojstva homomorfizma reprezentacije i komutativnosti množenja skalara i matrice dobiva se:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in G} \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(k) \pi_j(k^{-1} \circ h^{-1}) &= \sum_{k \in G} \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(k) \pi_j(k^{-1}) \pi_j(h^{-1}) = \\ \sum_{k \in G} \sum_{h \in G} f_2(k) \pi_j(k^{-1}) f_1(h) \pi_j(h^{-1}) &= \left(\sum_{k \in G} f_2(k) \pi_j(k^{-1}) \right) \left(\sum_{h \in G} f_1(h) \pi_j(h^{-1}) \right) = \\ &= \hat{f}_2(\pi_j) \hat{f}_1(\pi_j) \end{aligned} \quad (4.11)$$

pa je tvrdnja dokazana.

Plancherelov teorem

Generalizacija Parsevalove jednakosti, koja se u kontekstu teorije grupa naziva Plancherelov teorem, zapisana je:

$$\sum_{g \in G} f_1(g^{-1}) f_2(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{\alpha} d_j \text{Tr} \left[\hat{f}_1(\pi_j) \hat{f}_2(\pi_j) \right]. \quad (4.12)$$

Dokaz se provodi tako da se primijeni formula inverzne transformacije na konvolucijsku sumaciju i potom izraz evaluira za $g = e$.

4.2. Kompaktne Liejeve grupe

Rezultati dobiveni u sklopu razmatranja slučaja konačnih grupa mogu se na prirodan način prenijeti na mnoge druge vrste grupa za koje postoji invarijantna mjera integracije. Tako se razvijena formulacija može primijeniti za kompaktne Liejeve grupe uz zamjenu svih sumacija preko elemenata grupe invarijantnom integracijom. No, ovdje odabiremo nešto drugačiji pristup.

Kompaktna Liejeva grupa ima prirodnu mjeru integracije invarijantnu na lijeve i desne pomake. Neka $U(g, \lambda)$ označava λ -tu nereducibilnu unitarnu transformacijsku matricu kompaktne Liejeve grupe G , a $U_{i,j}(g, \lambda)$ njezin element s indeksima (i, j) .

Analogno Fourierovoj transformaciji na brojevnoj kružnici ili liniji, definiramo

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(g)U(g^{-1}, \lambda) d(g) \quad (4.13)$$

ili u zapisu po komponentama

$$\hat{f}_{i,j}(\lambda) = \int_G f(g)U_{i,j}(g^{-1}, \lambda) d(g). \quad (4.14)$$

Skup svih vrijednosti λ označava se \hat{G} i naziva dual grupi G . Za razliku od konačnih grupa gdje je $\hat{G} = \{1, \dots, \alpha\}$, u slučaju kompaktnih Liejevih grupa \hat{G} je prebrojiv i beskonačan. Skup Fourierovih transformacija $\{\hat{f}(\lambda)\}$ za sve $\lambda \in \hat{G}$ zajedno se naziva spektar funkcije f .

Konvolucija dviju kvadratno integrabilnih funkcija na kompaktnoj Liejevoj grupi definirana je izrazom

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(h)f_2(h^{-1} \circ g) d(h). \quad (4.15)$$

Dokažimo konvolucijski teorem koji govori da se gornji konvolucijski integral može zapisati u obliku matričnog umnoška u Fourierovom prostoru. S obzirom da je $U(g, \lambda)$ reprezentacijska matrica, možemo zapisati

$$U(g_1 \circ g_2, \lambda) = U(g_1, \lambda)U(g_2, \lambda) \quad (4.16)$$

Za invarijantnu mjeru integracije na kompaktnoj Liejevoj grupi vrijedi $d(g_1 \circ g) = d(g \circ g_1) = d(g)$ za sve čvrste $g_1 \in G$. Kombinirajući ove dvije činjenice s definicijama Fourierove transformacije i konvolucijskog integrala dobivamo

$$\mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(g)\} = \int_G \left(\int_G f_1(h)f_2(h^{-1} \circ g) d(h) \right) U(g^{-1}, \lambda) d(g). \quad (4.17)$$

Supstitucijom varijabli $k = h^{-1} \circ g$, time i zamjenom svih integracija preko g onima koje idu preko k , slijedi

$$\begin{aligned} \int_G \int_G f_1(h)f_2(k)U((h \circ k)^{-1}, \lambda) d(k)d(h) = \\ \left(\int_G f_2(k)U(k^{-1}, \lambda) d(k) \right) \left(\int_G f_1(h)U(h^{-1}, \lambda) d(h) \right) = \hat{f}_2(\lambda)\hat{f}_1(\lambda). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Rekonstrukcija funkcije iz njezinog spektra moguća je jer svaka nereducibilna

reprezentacija kompaktne grupe odgovara matrici $U(g, \lambda)$ za neki λ , a kada su λ_1 i λ_2 različiti, tada su i matrice $U(g, \lambda_1)$ i $U(g, \lambda_2)$ također različite. Može se pokazati da je inverzna formula

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} d(\lambda) \text{Tr} \left(\hat{f}(\lambda) U(g, \lambda) \right). \quad (4.19)$$

4.3. Grupa rotacija $SO(3)$

Kako će se kasnije pokazati, Fourierova transformacija na grupi $SO(3)$ bitan je dio postupka izračuna Fourierove transformacije na posebnoj euklidskoj grupi gibanja $SE(3)$. Iako se radi o kompaktnoj Liejevoj grupi, transformacijska formula ovdje će biti objašnjena na nešto drugačiji način.

4.3.1. Kontinuirana i diskretna $SO(3)$ Fourierova transformacija

Neka $\mathcal{L}^2(SO(3))$ predstavlja prostor kvadratno integrabilnih funkcija na grupi $SO(3)$. Za unutarnji umnožak dviju funkcija f i h na $SO(3)$ vrijedi

$$\langle f, h \rangle = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma f(\alpha, \beta, \gamma) \overline{h(\alpha, \beta, \gamma)} \quad (4.20)$$

gdje $\overline{h(\alpha, \beta, \gamma)}$ označava kompleksnu konjugiranu vrijednost od $h(\alpha, \beta, \gamma)$.

Svakom elementu $g \in SO(3)$ možemo pridružiti linearni operator $\Lambda(g)$ koji djeluje na funkciju f iz $\mathcal{L}^2(S^2)$ na sljedeći način:

$$\Lambda(g)f(\omega) = f(g^{-1}\omega). \quad (4.21)$$

Operator $\Lambda(g)$ predstavlja lijevu regularnu reprezentaciju grupe $SO(3)$ na $\mathcal{L}^2(S^2)$.

Svaka se funkcija $f \in \mathcal{L}^2(SO(3))$ može zapisati kao suma Wignerovih D -matrica

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{J \geq 0} \sum_{M=-J}^J \sum_{M'=-J}^J \hat{f}_{MM'}^J D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.22)$$

pri čemu Wignerova D -matrica $D_{km}^l(g)$ predstavlja nereducibilnu reprezentaciju $SO(3)$ grupe. Ona se pomoću Eulerove dekompozicije može zapisati kao

$$D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-iM\alpha} d_{MM'}^J(\beta) e^{-iM'\gamma}. \quad (4.23)$$

Postoji više načina na koji se Wignerova d -matrica $d_{MM'}^J(\beta)$ može eksplicitno izraziti. Jedan od njih je

$$d_{MM'}^J(\beta) = \sqrt{\frac{(J+M')!(J-M')!}{(J+M)!(J-M)!}} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{M'-M} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{M'+M} \\ \times P_{J-M'}^{(M'-M, M'+M)}(\cos \beta) \quad (4.24)$$

gdje $P_l^{(m,n)}(x)$ predstavlja Jakobijev polinom. Wignerove d -matrice zadovoljavaju sljedeći uvjet ortogonalnosti

$$\int_0^\pi d_{MM'}^J(\beta) d_{MM'}^{J'}(\beta) \sin \beta d\beta = \frac{2}{2J+1} \delta_{JJ'}. \quad (4.25)$$

U svrhu uštede vremena izračuna funkcija potrebnih za ostvarivanje transformacije, koriste se sljedeće simetrije

$$d_{MM'}^J(\beta) = (-1)^{M-M'} d_{-M, -M'}^J(\beta) = (-1)^{M-M'} d_{M'M}^J(\beta) = d_{-M', -M}^J(\beta) \\ = (-1)^{J-M'} d_{-M, M'}^J(\pi - \beta) = (-1)^{J+M'} d_{M, -M'}^J(\pi - \beta) \quad (4.26) \\ = (-1)^{J-M'} d_{-M', M}^J(\pi - \beta) = (-1)^{J+M'} d_{M', -M}^J(\pi - \beta).$$

Skup vrijednosti $\{\hat{f}_{MM'}^J\}$ nazivamo Fourierovim koeficijentima funkcije f , a preslikavanje s $f(\alpha, \beta, \gamma)$ na skup koeficijenata $\{\hat{f}_{MM'}^J\}$ zapravo je $SO(3)$ Fourierova transformacija funkcije f . Ona se dogovorno označava kao $SOFT(f)$.

Za izračun uz pomoć računala, potrebno je integrale korištene u računanju unutarnjeg produkta diskretizirati, odnosno pretvoriti u konačne sume, a funkciju f uzorkovati konačnom rešetkom. Općeniti oblik sumacije koju treba izvršiti je

$$\sum_{x \in X} w(x) f(x) \overline{D_{MM'}^l(x)} \quad (4.27)$$

gdje je X konačna rešetka za uzorkovanje, a $w(x)$ težinska funkcija. Da bi se na taj način ispravno izračunala Fourierova transformacija funkcije f , funkcija treba zadovoljavati uvjet pojasne ograničenosti. Funkcija f na $SO(3)$ je pojasno ograničena pojasnom širinom B ako $\hat{f}_{MM'}^l = 0, \forall l \geq B$.

Korištenjem Eulerovih kuteva, lako je uspostaviti takvo uzorkovanje koje će poslužiti za izračun diskretne Fourierove transformacije i omogućiti rekonstrukciju pojasno ograničene funkcije iz njezinog spektra. Dakle, mora vrijediti kvadraturno pravilo. Rešetka za uzorkovanje, koja zadovoljava navedenim zahtjevima, određena

je skupom točaka X_B

$$X_B = \{u(\alpha_{j_1})a(\beta_k)u(\alpha_{j_2}) \mid 0 \leq j_1, j_2, k < 2B\} \quad (4.28)$$

gdje su kutevi

$$\alpha_j = \gamma_j = \frac{2\pi j}{2B}\beta_k = \frac{\pi(2k+1)}{4B}. \quad (4.29)$$

Neka je $w_B(k), 0 \leq k < 2B$ jedinstveno rješenje sustava linernih jednadžbi

$$\sum_{k=0}^{2B-1} w_B(k)P_m(\cos\beta_k) = \delta_{0,m} \text{ za } 0 \leq m < B \quad (4.30)$$

pri čemu P_m predstavlja Legendrov polinom m -tog stupnja. Tada za pojasno ograničenu funkciju $f \in \mathcal{L}^2(SO(3))$ s pojasnom širine B za sve $L < B$ vrijedi

$$\hat{f}_{MM'}^l = \frac{1}{(2B)^2} \sum_{j_1=0}^{2B-1} \sum_{j_2=0}^{2B-1} \sum_{k=0}^{2B-1} w_B(k)f(\alpha_{j_1}, \beta_k, \gamma_{j_2})D_{MM'}^{l*}(\alpha_{j_1}, \beta_k, \gamma_{j_2}). \quad (4.31)$$

Metoda računanja Fourierove transformacije pojasno ograničene funkcije sumiranjem naziva se disrektnom $SO(3)$ Fourierovom transformacijom funkcije f , $DSOFT(f)$.

4.3.2. Brza Fourierova transformacija na $SO(3)$

Izravno računanje svakog Fourierovog koeficijenta pravilno uzorkovane pojasno ograničene funkcije f širine pojasa B zahtijevalo bi $\mathcal{O}(B^3)$ operacija što znači da je složenost izračuna cijele Fourierove transformacije $\mathcal{O}(B^6)$. Primjenom tehnike separacije varijabli moguće je izračun reorganizirati tako da se ukupna složenost smanji.

Ideja je razdvojiti višestruke sume i posebno ih izračunati. S obzirom da je korištena Eulerova dekompozicija, izraz za $DSOFT(f)$ već je u prikladnom obliku višestrukih suma, samo je potrebno članove faktorizirati po zasebnim sumama i izračunati ih razdvojeno. Koristeći izraz $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-iM\alpha}d_{MM'}^J(\beta)e^{-iM'\gamma}$, formulu za $DSOFT(f)$ možemo napisati u obliku

$$\hat{f}_{MM'}^l = \frac{1}{(2B)^2} \sum_{k=0}^{2B-1} w_B(k)d_{MM'}^l(\beta_k) \sum_{j_2=0}^{2B-1} e^{iM'\gamma_{j_2}} \sum_{j_1=0}^{2B-1} e^{iM\alpha_{j_1}} f(\alpha_{j_1}, \beta_k, \gamma_{j_2}) \quad (4.32)$$

iz kojeg lako slijedi efikasan izračun koeficijenata $\hat{f}_{MM'}^l$. Naime, prvo se računa

sumacija po j_1 , zatim po j_2 i na kraju po indeksu k . Dakle, za $0 \leq j_2, k < 2B$ i $|M|, |M'| \leq l < B$ eksplicitno vrijedi

$$\begin{aligned} S_1(k, M, j_2) &= \frac{1}{2B} \sum_{j_1=0}^{2B-1} e^{iM\alpha_{j_1}} f(\alpha_{j_1}, \beta_k, \gamma_{j_2}) \\ S_2(k, M, M') &= \frac{1}{2B} \sum_{j_2=0}^{2B-1} e^{iM'\gamma_{j_2}} S_1(k, M, j_2) \\ \hat{f}_{MM'}^l &= \sum_{k=0}^{2B-1} w_B(k) d_{MM'}^l(\beta_k) S_2(k, M, M'). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Za fiksirane vrijednosti k i j_2 suma $S_1(k, M, j_2)$ preko svih M može se izračunati u složenosti $\mathcal{O}(B \log B)$ koristeći Cooley-Tukey algoritam za brzu Fourierovu transformaciju. Tako je za izračun suma $S_1(k, M, j_2)$ preko za sve k, M i j_2 potrebno $\mathcal{O}(B^3 \log B)$ operacija. Na isti način se određuje asimptotska složenost izračuna $S_2(k, M, M')$. Preostaje još razmotriti situaciju s posljednjom sumom. Za neke fiksne M i M' potrebno je $\mathcal{O}(B)$ operacija za izračun koeficijenata $\hat{f}_{MM'}^l$ za sve l . Dakle, složenost je cijelog postupka $\mathcal{O}(B^4)$ što je značajno manje od složenosti izravnog izračuna Fourierove transformacije funkcije f na grupi $SO(3)$ koja je $\mathcal{O}(B^6)$. Ovaj se efikasni algoritam naziva $SO(3)$ brza Fourierova transformacija funkcije f i označava $SOFFT(f)$.

Dodatno se postupak može ubrzati koristeći efikasniji izračun posljednje sume (Driscoll, 1997). Taj se korak umjesto s $\mathcal{O}(B^2)$ može obaviti s $\mathcal{O}(B \log^2 B)$ operacija čime složenost cijelog $SOFFT$ algoritma postaje $\mathcal{O}(B^3 \log^2 B)$. S obzirom da to ubrzanje nije ugrađeno u biblioteku korištenu pri izradi ovog rada, a razmatranje podrazumijeva detaljnije poznavanje teorije vezane uz Wignerove d -funkcije, na ovom ćemo se mjestu zaustaviti.

4.4. Grupa $SE(3)$

Fourierova transformacija apsolutno i kvadratno integrabilne kompleksne funkcije $f(\mathbf{a}, A)$ na grupi $SE(3)$ definirana je izrazom

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(p) = \int_{SE(3)} f(g) U(g^{-1}, p) d(g) \quad (4.34)$$

pri čemu je $g = (\mathbf{a}, A) \in SE(3)$ i $d(g) = dA d\mathbf{a}$. Unitarna je matrica U reprezentacija grupe $SE(3)$ pa mora zadovoljavati svojstvo homomorfizma

$$U(g_1 \circ g_2, p) = U(g_1, p)U(g_2, p) \quad (4.35)$$

te svojstva nereducibilnosti i unitarnosti. U svrhu realizacije Fourierove transformacije, potrebno je pronaći takve matrice, odnosno, njihove elemente.

4.4.1. Nereducibilne unitarne reprezentacije grupe $SE(3)$

Razvoj reprezentacija euklidske grupe gibanja započinjemo u prostoru funkcija $\varphi(\mathbf{p}) \in \mathcal{L}^2(\hat{T})$ gdje \hat{T} predstavlja dualni (frekvencijski) prostor podgrupe \mathbb{R}^3 . Funkcije $\varphi(\mathbf{p})$ odgovaraju Fourierovim transformacijama funkcija $\varphi(\mathbf{r}) \in \mathcal{L}^2(T)$ gdje je $T = \mathbb{R}^3$. Dakle, vrijedi

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_T e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.36)$$

Ovdje je korištena ista oznaka $\varphi(\mathbf{p})$ za Fourierov transformat kao i $\varphi(\mathbf{r})$ za samu funkciju u originalnoj domeni jer je argument \mathbf{p} ili \mathbf{r} dovoljan za prepoznavanje o čemu se radi.

Podgrupa $SO(3)$ grupe $SE(3)$ djeluje na \hat{T} rotacijom vektora iz \hat{T} pa se zato taj prostor particionira na orbite S_p koje su sfere S^2 radijusa $p = |\mathbf{p}|$. Translacijski operator djeluje na \mathbf{p} na sljedeći način

$$(U(\mathbf{a}, \mathbb{I})\varphi)(\mathbf{p}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}\varphi(\mathbf{p}) \quad (4.37)$$

Zato se nereducibilne reprezentacije posebne euklidske grupe gibanja mogu izgraditi na prostoru kvadratno integrabilnih funkcija na sferi, $\varphi(\mathbf{p}) \in \mathcal{L}^2(S_p)$. Unutarnji produkt je definiran

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\Theta=0}^{\pi} \int_{\Phi=0}^{2\pi} \overline{\varphi_1(\mathbf{p})} \varphi_2(\mathbf{p}) \sin \Theta d\Theta d\Phi \quad (4.38)$$

gdje se vektor \mathbf{p} u sfernim koordinatama izražava kao

$$\mathbf{p} = (p \sin \Theta \cos \Phi, p \sin \Theta \sin \Phi, p \cos \Theta), \quad p > 0, \quad 0 \leq \Theta \leq \pi, \quad 0 \leq \Phi \leq 2\pi. \quad (4.39)$$

U svrhu eksplicitne konstrukcije reprezentacija grupe $SE(3)$ odabiremo vektor $\hat{\mathbf{p}} = (0, 0, p)$ na svakoj orbiti S_p . Vektor $\hat{\mathbf{p}}$ invarijantan je na rotacije iz podgrupe

$SO(2)$ grupe $SO(3)$

$$\Lambda \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}; \quad \Lambda_{\hat{\mathbf{p}}} \in H_{\hat{\mathbf{p}}} = SO(2) \quad (4.40)$$

pri čemu je $\Lambda_{\hat{\mathbf{p}}}$ podgrupa stabilnosti od $\hat{\mathbf{p}}$. Za svaki $\mathbf{p} \in S_p$ moguće je pronaći $R_{\mathbf{p}} \in SO(3)/SO(2)$ takav da vrijedi

$$R_{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}. \quad (4.41)$$

Može se pokazati da je tada za bilo koju rotaciju $A \in SO(3)$ istinit izraz

$$(R_{\mathbf{p}}^{-1} A R_{A^{-1}\mathbf{p}}) \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}, \quad (4.42)$$

stoga slijedi $(R_{\mathbf{p}}^{-1} A R_{A^{-1}\mathbf{p}}) \in H_{\hat{\mathbf{p}}}$. Reprezentacije grupe $H_{\hat{\mathbf{p}}}$ mogu se eksplicitno napisati u obliku

$$\Delta_s : \phi \rightarrow e^{is\phi}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (4.43)$$

za $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Reprezentacije grupe $SE(3)$ gradimo induktivno na temelju poznate reprezentacije njezine podgrupe $\hat{T} \rtimes_{\varphi} H_{\hat{\mathbf{p}}}$. Tehnika indukcije pri konstrukciji reprezentacija Liejevih grupa nije sadržana u ovom radu, ali može se pronaći u literaturi (Coleman, 1966) i (Chirikjian, 2001). Unitarne reprezentacije $U^s(\mathbf{a}, A)$ koje djeluju na prostoru funkcija $\varphi(\mathbf{p})$ definirane su izrazom

$$(U^s(\mathbf{a}, A)\varphi)(\mathbf{p}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}} \Delta_s (R_{\mathbf{p}}^{-1} A R_{A^{-1}\mathbf{p}}) \varphi(A^{-1}\mathbf{p}) \quad (4.44)$$

pri čemu je $A \in SO(3)$, Δ_s su reprezentacije od $H_{\hat{\mathbf{p}}}$ i $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Svaka je reprezentacija karakterizirana s $p = |\mathbf{p}|$ i s nereducibilna, no restrikcijom $SE(3)$ na $SO(3)$, dakle, za $a = |\mathbf{a}|$, postaje reducibilne. Reprezentacije su unitarne jer vrijedi $(U^s(\mathbf{a}, A)\varphi_1, \mathbf{a}, A)\varphi_2) = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Sada je za ovako definirane unitarne nereducibilne reprezentacije moguće izraziti matrične elemente u integralnom obliku te definirati Fourierovu transformaciju za funkcije na grupi $SE(3)$.

5. Algoritam za brzu konvoluciju na grupi gibanja

U ovom se poglavlju konačno primjenjuju dosad opisane tehnike nekomutativne harmonijske analize u svrhu razvoja algoritma za brzu numeričku konvoluciju funkcija na posebnoj euklidskoj grupi gibanja čvrstih tijela u trodimenzionalnom prostoru. Korištenjem nereducibilnih unitarnih reprezentacija u obliku operatora, formira se Fourierova transformacija na grupi gibanja kao integral na grupi produkta prostora $SE(3) \times S^2$. Zapis elemenata Fourierove transformacijske matrice u integralnom obliku, kao i primjena interpolacije Kartezijevog na sferni koordinatni sustav, omogućava primjenu otprije razvijenih brzih algoritama za Fourierovu transformaciju na \mathbb{R}^3 , S^2 i $SO(3)$. Na ovaj se način postižu značajna ubrzanja izračuna konvolucije funkcija na grupi $SE(3)$ što je izrazito bitno u rješavanju konkretnih inženjerskih problema. Naime, konvolucije na grupi gibanja javljaju se u raznim disciplinama, od kojih će neke biti prikazane u sljedećem poglavlju.

Opisan je numerički algoritam za brzi izračun Fourierove transformacije na $SE(3)$ i provedena je diskusija njegove složenosti.

5.1. Priprema algoritma

Iako je većina potrebnih pojmova sistematično obrađena u prethodnim poglavljima, preostaje uvesti još nekoliko matematičkih koncepata koji će biti korišteni pri konstrukciji algoritma. Konkretno, radi se o poopćenim pridruženim Legendreovim funkcijama.

Na kraju ovog potpoglavlja nalazi se razmatranje složenosti izravne konvolucije u svrhu usporedbe sa efikasnijim algoritmom.

5.1.1. Poopćene pridružene Legendreove funkcije

Poopćene pridružene Legendreove funkcije $P_{mn}^l(x)$ i $Q_{mn}^l(x)$ dva su linearno nezavisna rješenja poopćene Legendreove diferencijalne jednačbe (Kuipers, 1957)

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{2(1-x)} - \frac{n^2}{2(1+x)} \right] u = 0. \quad (5.1)$$

Funkcije $P_{mn}^l(x)$ i $Q_{mn}^l(x)$ definirane su za točke kompleksne z -ravnine duž realne osi od $-\infty$ do 1. Kada je $m = n = \mu$, diferencijalna se jednačba pojednostavljuje, a rješenja takvog posebnog slučaja nazivaju se pridruženim Legendreovim funkcijama (Virchenko, 2001).

Oznaka $P_{mn}^l(x)$ koristi se za poopćene pridružene Legendreove funkcije prve vrste, dok su $Q_{mn}^l(x)$ poopćene pridružene Legendreove funkcije druge vrste. Veza između tih funkcija može se zapisati kao (Kyatkin, 2000)

$$Q_{-m,n}^l(x) = (-1)^{l-s} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_{mn}^l(x). \quad (5.2)$$

Funkcije $P_{mn}^l(\cos \beta)$ mogu se definirati Rodriguesovom formulom (Vilenkin, 1991)

$$P_{mn}^l(x) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^l} \left[\frac{(l+m)!}{(l-n)!(l+n)!(l-m)!} \right]^{1/2} \times (1+x)^{-(m+n)/2} (1-x)^{(n-m)/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} [(1-x)^{l-n} (1+x)^{l+n}]. \quad (5.3)$$

Također je moguće koristiti integralni oblik

$$P_{mn}^l(\cos \beta) = \frac{i^{n-m}}{2\pi} \left[\frac{(l-m)!(l+m)!}{(l-n)!(l+n)!} \right]^{1/2} \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{\beta}{2} e^{i\phi/2} + i \sin \frac{\beta}{2} e^{-i\phi/2} \right)^{l-n} \times \left(\cos \frac{\beta}{2} e^{-i\phi/2} + i \sin \frac{\beta}{2} e^{i\phi/2} \right)^{l+n} e^{im\phi} d\phi. \quad (5.4)$$

Poopćene pridružene Legendreove funkcije sadrže sljedeće simetrije (Chirikjian, 2001)

$$\begin{aligned} P_{mn}^l(x) &= (-1)^{m+n} P_{nm}^l(x) \\ P_{mn}^l(x) &= P_{-n,-m}^l(x) \\ P_{mn}^l(x) &= (-1)^{m-n} P_{-m,-n}^l(x) \\ P_{mn}^l(x) &= (-1)^{l+n} P_{-m,n}^l(-x). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Za numerički izračun, kojeg treba provesti u svrhu izračuna reprezentacijskih matrica grupe $SE(3)$, vrlo su važne rekurzivne relacije prikazane sljedećim izrazima

$$\begin{aligned} \cos \beta P_{mn}^l &= \frac{[(l^2 - m^2)(l^2 - n^2)]^{1/2}}{l(2l + 1)} P^{l-1} m n + \frac{mn}{l(l + 1)} P_{mn}^l \\ &+ \frac{[(l + 1)^2 - m^2]^{1/2} [(l + 1)^2 - n^2]^{1/2}}{(l + 1)(2l + 1)} P_m^{l+1} n \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{2} c_n^l P_{m,n+1}^l + \frac{1}{2} c_{-n}^l P_{m,n-1}^l = \frac{m - n \cos \beta}{\sin \beta} P_{mn}^l \quad (5.7)$$

$$-\frac{1}{2} c_n^l P_{m+1,n}^l - \frac{1}{2} c_{-m}^l P_{m-1,n}^l = \frac{n - m \cos \beta}{\sin \beta} P_{mn}^l \quad (5.8)$$

pri čemu vrijedi $c_n^l = \sqrt{(l - n)(l + n + 1)}$.

Može se uspostaviti sljedeća veza između poopćenih pridruženih Legendreovih funkcija i određenih funkcija koje se često koriste u klasičnoj fizici kao što je Legendreov polinom

$$P_l(x) = P_{00}^l(x) \quad (5.9)$$

i pridruženi Legendreov polinom

$$P_l^n(x) = C_n \left[\frac{(l + n)!}{(l - n)!} \right]^{1/2} P_{-n,0}^l(x) \quad (5.10)$$

gdje je $C_n = 1$ za $n > 0$ i $C_n = (-1)^n$ za $n < 0$.

Za konkretnu realizaciju korišten je odnos funkcije $P_{mn}^l(\cos \beta)$ i Wignerovih d -funkcija

$$d_{mn}^l(\cos \beta) = (-1)^{m-n} P_{mn}^l(\cos \beta) \quad (5.11)$$

koje su realizirane rekurzivnim relacijama kako je ranije opisano.

5.1.2. Složenost izravne konvolucije

Neka su $g = (\mathbf{r}, R)$ i $h = (\mathbf{a}, A)$ elementi grupe $SE(3)$. Tada se konvolucijski integral

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_{SE(3)} f_1(h) f_2(h^{-1} \circ g) d(h) \quad (5.12)$$

zapisuje u obliku

$$(f_1 * f_2)(\mathbf{r}, R) = \int_{SO(3)} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(\mathbf{a}, A) f_2(A^T(\mathbf{r} - \mathbf{a}), A^T R) d\mathbf{a} dA. \quad (5.13)$$

Direktni izračun ovog konvolucijskog integrala podrazumijeva računanje N vrijednosti g i sumiranje preko N vrijednosti h što znači da je ukupno potrebno $\mathcal{O}(N^2)$ operacija. Euklidski prostor \mathbb{R}^3 određen je, dakako, s tri dimenzije, dok je grupa $SO(3)$ također trodimenzionalna. Zbog toga, ako na svakoj koordinatnoj osi imamo $\mathcal{O}(S)$ točaka za uzorkovanje, u slučaju grupe $SE(3)$ vrijedit će $N = \mathcal{O}(S^6)$, odnosno, složenost izravne konvolucije bit će $N^2 = \mathcal{O}(S^{12})$. Već i za $S \approx 10$ izravni pristup postaje nepogodan za izračun na osobnom računalu.

5.2. Algoritam za brzu konvoluciju funkcija na $SE(3)$ grupi

Algoritam za računanje konvolucije na kontinuiranoj grupi gibanja koristi brzu Fourierovu transformaciju. Za izračun elemenata Fourierove matrice u integralnom obliku koriste se nereducibilne reprezentacije grupe $SE(3)$ opisane u prethodnom poglavlju. Matrični su elementi

$$U_{l',m';l,m}^l(\mathbf{r}, R; p) = \int_{S^2} \overline{h_{lm}^s}(U(\mathbf{r}, R; p)h_{lm}^s)(\mathbf{u})d\mathbf{u} \quad (5.14)$$

pri čemu su $d\mathbf{u} = \sin\Theta d\Theta \sin\Phi$ i $h_{l',m'}^s(\mathbf{u}) = h_{l',m'}^s(\mathbf{u}(\Theta, \Phi))$ generalizirani sferni harmonici.

5.2.1. Izravna Fourierova transformacija

Da bismo napisali elemente Fourierove matrice u integralnom obliku koristimo bazne svojstvene funkcije (eng. *basis eigenfunctions*) $h_{lm}^s(\mathbf{u})$ na sljedeći način

$$\begin{aligned} \hat{f}_{l',m';l,m}^s(p) &= \int_{\mathbf{u} \in S^2} \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \int_{R \in SO(3)} f(\mathbf{r}, R) h_{lm}^s(\mathbf{u}) \\ &\quad \times e^{ip\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \overline{\Delta_s(Q(\mathbf{u}, R)) h_{l',m'}^s(R^{-1}\mathbf{u})} d\mathbf{u} d^3r dR \end{aligned} \quad (5.15)$$

gdje je dR normalizirana invarijantna mjera integracije na $SO(3)$, a $d^3r = dr_1 dr_2 dr_3$.

Bazne se funkcije mogu napisati u obliku

$$h_{lm}^s(\Theta, \Phi) = Q_{s,m}^l(\cos\Theta) e^{i(m+s)\Phi} \quad (5.16)$$

pri čemu vrijedi

$$Q_{-s,m}^l(\cos\Theta) = (-1)^{l-s} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_{sm}^l(\cos\Theta). \quad (5.17)$$

a oznaka $P_{sm}^l(\cos \Theta)$ predstavlja generalizirane Legendreove funkcije.

Ove se funkcije pod operacijom rotacije R transformiraju na sljedeći način

$$(U^s(\mathbf{0}, R; p)h_{lm}^s)(\mathbf{u}) = \Delta_s(Q(\mathbf{u}, R))h_{lm}^s(R^{-1}\mathbf{u}) = \sum_{n=-l}^l U_{mn}^l(R)h_{ln}^s(\mathbf{u}) \quad (5.18)$$

pri čemu su U_{mn}^l elementi reprezentacijske matrice $SO(3)$ grupe

$$U_{mn}^l(A) = e^{-im\alpha}(-1)^{n-m}P_{mn}^l(\cos \beta)e^{-in\gamma}. \quad (5.19)$$

Ovdje su α , β i γ Eulerovi kutevi $z-x-z$ rotacije, a $P_{mn}^l(\cos \beta)$ generalizirana Legendreova funkcija.

Sada možemo zapisati elemente Fourierove transformacijske matrice u obliku

$$\begin{aligned} \hat{f}_{l',m';l,m}^s(p) &= \int_{\mathbf{u} \in S^2} \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \int_{R \in SO(3)} f(\mathbf{r}, R)h_{lm}^s(\mathbf{u}) \\ &\quad \times e^{ip\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \sum_{n=-l'}^{l'} \overline{U_{nm'}^{l'}(R)h_{l',n}^s(\mathbf{u})} d\mathbf{u} d^3r dR. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Brzi algoritam moguće je realizirati korištenjem postojećih brzih algoritama za Fourierovu transformaciju na \mathbb{R}^3 , S^2 i $SO(3)$. No, prije nego što pokažemo kako do toga doći, uvest ćemo veličine koje će se koristiti prilikom diskusije složenosti pojedinih dijelova numeričkog algoritma (Kyatkin, 2000). Oznake su sljedeće:

- N_r - broj uzoraka u trodimenzionalnom euklidskom prostoru \mathbb{R}^3 ,
- N_R - broj uzoraka na grupi $SO(3)$,
- N_p - broj uzoraka na intervalu p ,
- N_u - broj uzoraka na jediničnoj sferi S^2 ,
- N_F - ukupan broj harmonika.

U ovom kontekstu na funkciju $f(g)$ ima smisla postaviti pretpostavku da je konačan broj harmonika dovoljan za njezinu zadovoljavajuću aproksimaciju. Zbog toga će se računati samo matrice elementi za koje vrijedi $|s| < S$ i $l, l' < L$. Veličine s , l i l' predstavljaju indekse matrice elemenata Fourierovog transformata koji će biti uvedeni i objašnjeni u sklopu opisa algoritma. Neka je $N = \mathcal{O}(S)$.

Na broj uzoraka na pojedinim domenama postavljaju se pretpostavke na odnos s veličinom S :

$$N_r = \mathcal{O}(S^3), N_R = \mathcal{O}(S^3), N_p = \mathcal{O}(S), N_u = \mathcal{O}(S^2), N_F = \mathcal{O}(S^5). \quad (5.21)$$

Iz definicija slijedi $N = N_r \cdot N_R$ i $N_p \cdot N_F = \mathcal{O}(N)$.

U nastavku se nalazi opis algoritma za brzu izravnu Fourierovu transformaciju funkcija na $SE(3)$ kojeg su razvili američki znanstvenici Alexander B. Kyatkin i Gregory S. Chirikjian (Kyatkin, 2000). Algoritam je podijeljen na tri dijela od kojih će svaki biti posebno komentiran.

Brza Fourierova transformacija za Kartezijevu rešetku u trodimenzionalnom euklidskom prostoru

Uz pretpostavku da imamo funkciju $f(\mathbf{r}, R)$ zadanu na konačnoj domeni, prvo računamo

$$f_1(R, \mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}, R) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d^3r \quad (5.22)$$

korištenjem brze Fourierove transformacije za Kartezijevu rešetku u trodimenzionalnom euklidskom prostoru što zahtijeva $\mathcal{O}(N_r \log(N_r) N_R)$ operacija.

Koeficijenti Fourierove transformacije izračunati su na trodimenzionalnoj ekvidistantnoj Kartezijevoj rešetki pa je potrebno izvršiti interpolaciju kako bi se dobile vrijednosti $f_1(R; p, \mathbf{u})$. Sferne koordinate određuje radijalna udaljenost p i vektor kuteva u . Općenito je za interpolaciju potrebno obaviti $\mathcal{O}(N_r \epsilon(N_r))$ operacija za svaku rotaciju R . Veličina ϵ ovisi o odabranoj metodi interpolacije. Za izračune visoke preciznosti može se koristiti trodimenzionalna *spline* interpolacija čija složenost, kada se računa u N_S točaka i za sve rotacije R , iznosi $\mathcal{O}(N_S N_r N_R)$. To znači da je $\epsilon(N_r) = N_S$. Kako *spline* interpolacija koristi mali podskup svih uzoraka, pretpostavljamo da je $N_S = \mathcal{O}(1)$. Za egzaktno reverzibilnu interpolaciju koristi se Fourierova transformacija čija je složenost $\epsilon N_r = \mathcal{O}((\log N_r)^2)$ (Kyatkin, 2000).

Brza Fourierova transformacija na rotacijskog grupi

Potom se izvršavaju integracije na $SO(3)$

$$(f_2)_{mn'}^l(p, \mathbf{u}) = \int_{SO(3)} f_1(R, p, \mathbf{u}) \overline{U_{nm'}^l(R)} dR. \quad (5.23)$$

Izraz predstavlja Fourierovu transformaciju na rotacijskoj grupi izračunatu za neke vrijednosti p i \mathbf{u} . Indeksi l' , m' i n identificiraju koeficijent u transformacijskoj domeni. Razumijevanje raspona tih indeksa potrebno je prilikom implementacije ovog koraka algoritma.

Kako je opisano u prethodnom poglavlju, složenost brzog algoritma za izravnu i inverznu Fourierovu transformaciju na $SO(3)$ za N_R uzoraka iznosi $\mathcal{O}(N_R(\log N_R)^2)$. Taj se algoritam može iskoristiti za izračun funkcije f_2 po svim vrijednostima varijabli p i \mathbf{u} te svim indeksima pa je ukupno potrebno obaviti $\mathcal{O}(N_p N_u N_R (\log N_R)^2)$ operacija. Uz pretpostavku da je $N_p N_u \approx N_r$, složenost postaje $\mathcal{O}(N_r N_R (\log N_R)^2)$.

Integracije na jediničnim sferama

Treći i posljednji korak algoritma čine integracije na jediničnim sferama

$$\hat{f}_{l',m';l,m}^s(p) = \sum_{n=-l'}^{l'} \int_{S^2} (f_2)_{nm'}^{l'}(p, \mathbf{u}) h_{lm}^s(\mathbf{u}) \overline{h_{l'n}^s(\mathbf{u})} d\mathbf{u}. \quad (5.24)$$

Raspišemo li baznu funkciju, gornja formula dobiva oblik

$$\begin{aligned} \hat{f}_{l',m';l,m}^s(p) &= \sum_{n=-l'}^{l'} \int_{S^2} (f_2)_{nm'}^{l'}(p, \mathbf{u}) Q_{s,m}^l(\cos \Theta) \overline{Q_{s,n}^{l'}(\cos \Theta)} \\ &\quad \times \exp(i(m-n)\Phi) d\Phi \sin \Phi d\Phi. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Integracija na sferi može se rastaviti po kutovima Φ i Θ . Pritom valja pokušati svesti izraz u pogodan oblik kako bi se iskoristili postojeći brzi numerički algoritmi. Tako se integracija po kutu Φ može izračunati pomoću inverzne brze Fourierove transformacije na jediničnoj kružnici, S^1

$$(f_3)_{l',m';l,m} = \int_0^{2\pi} [(f_2)_{nm'}^{l'}(p, \Phi, \Theta) \exp(-in\Phi)] \exp(im\Phi) d\Phi \quad (5.26)$$

Za ovu je integraciju potrebno $\mathcal{O}(N_p N_\Theta S^3 N_\Phi \log N_\Phi)$ operacija gdje je $N_\Phi = \mathcal{O}(S)$ broj točaka uzorkovanja na Φ . Koristeći pretpostavke o odnosu broja točaka za uzorkovanje na pojedinim koordinatama o veličini S postavljene na početku ovog potpoglavlja, lako je zaključiti da složenost izračuna iznosi $\mathcal{O}(N_r N_R \log N_R)$.

Nakon toga je potrebno integrirati po kutu Θ

$$(f_4)_{l',m';l,m,n}^s(p) = \int_0^\Phi [(f_3)_{l',m',n;m}^{l'}(p, \Theta) Q_{s,n}^{l'}(\cos \Phi)] Q_{s,m}^l(\cos \Theta) \sin \Theta d\Theta. \quad (5.27)$$

Ova se integracija obavlja u $S^5 N_p N_\Theta$ operacija, pri čemu je $N_\Theta = \mathcal{O}(S)$ broj točaka uzorkovanja na Θ . Prema tome, složenost integracije po Θ iznosi $\mathcal{O}(N_R^2 N_r^{2/3})$. Valja uočiti da se u ovom izrazu prvi put pojavljuje indeks s te figurira u poopćenim Legendreovim funkcijama druge vrste. Njega smo, prisjetimo se, ograničili tako da vrijedi $|s| \leq S$.

Koristeći činjenicu da su veličine $Q_{s,m}^l(\cos \Theta)$ i $P_{-s,l}^l(\cos \Phi)$ povezane jednostavnim izrazom, moguće je u svrhu integracije na jediničnoj sferi koristiti tehniku brze poopćene Legendreove transformacije koju su razvili Driscoll i Healy. Za fiksni l potrebno je obaviti $\mathcal{O}(S^5 N_p N_\Theta (\log N_\Theta)^2) = \mathcal{O}(N_R^{5/3} N_r^{2/3} (\log N_R)^2)$ operacija. Kako implementacija tog algoritma nije bila dostupna u trenutku pisanja ovog rada, brza poopćena Legendreova transformacija nije uključena u programsko rješenje.

Bez obzira na koji su način izvedene integracije na sferama, na kraju rezultate treba zbrojiti po svim indeksima n te tako dobiti elemente matrice Fourierove transformacije

$$\hat{f}_{l',m';l,m,n}^s(p) = \sum_{n=-l'}^{l'} (f_4)_{l',m';l,m,n}^s(p). \quad (5.28)$$

Složenost sumacije iznosi $\mathcal{O}(S^6 N_p) = \mathcal{O}(N_R^2 N_p)$.

Pomoću ova tri koraka dobivaju se matični elementi izravne Fourierove transformacije funkcije na grupi $SE(3)$. Ukupna je složenost algoritma $\mathcal{O}(N_r N_R (\log N_r) + (\log N_R)^2 + \epsilon(N_r) + N_R^{5/3} N_r^{2/3} (\log N_R)^2)$. Uz pretpostavku da je $N_r = \mathcal{O}(N_R)$ i korištenjem notacije $N_r N_R = N$, pri čemu je N ukupan broj uzoraka na $SE(3)$, složenost možemo zapisati kao $\mathcal{O}(N^{7/6} (\log N)^2 + N \epsilon(N^{1/2}))$. Ako se u posljednjem koraku pri integraciji preko Θ ne koristi Driscoll-Healyjeva tehnika, složenost iznosi $\mathcal{O}(N^{4/3} + N \epsilon(N^{1/2}))$.

5.2.2. Inverzna Fourierova transformacija

Fourierov integral za inverznu transformaciju može se napisati u obliku

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, R) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{p=0}^{\infty} \int_{\mathbf{u} \in S^2} \sum_{s,l,m,l',m'} \hat{f}_{l',m';l,m}^s(p) \overline{h_{lm}^s(\mathbf{u})} \exp(-ip\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad \times \sum_{n=-l'}^{l'} U_{nm'}^{l'}(R) h_{l'n}^s(\mathbf{u}) p^2 dp d\mathbf{u} \end{aligned} \quad (5.29)$$

pri čemu su uzastupne sumacije kratko predstavljene jednim simbolom

$$\sum_{s,l,m,l',m'} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{l'=|s|}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'}. \quad (5.30)$$

Kada se na sumacije po s , l i l' uvedu redom ograničenja $|s| \leq S$ i $l, l' \leq L = \mathcal{O}(S)$, radi se o pojasno ograničenoj aproksimaciji funkcije.

Jednako, kako smo to učinili za izravnu transformaciju, i ovdje ćemo algoritam podijeliti u tri koraka.

Sumacija koeficijenata

Prvi korak se odnosi na računanje sumacije uz fiksne indekse l' , m' , n i s

$$(g_1)_{l',m';n}^s(p, \mathbf{u}) = \sum_{l=|s|}^L \left[\sum_{m=-l}^l \hat{f}_{l',m';l,m}^s(p) \overline{h_{lm}^s(\mathbf{u})} \right] h_{l'n}^s(\mathbf{u}). \quad (5.31)$$

Sumacija se može realizirati tako da se prvo izračuna izraz u uglatim zagradama koji se može raspisati u sljedećem obliku

$$(g_1 1)_{l',m';l}^s(p, \Theta, \Phi) = \exp(-is\Phi) \sum_{m=-l}^l \hat{f}_{l',m';l,m}^s(p) Q_{s,m}^l(\cos \Theta) \exp(-im\Phi). \quad (5.32)$$

Zamjenom granice sumacije $|m| \leq l$ s $|m| \leq L = \mathcal{O}(S)$ (i uz pretpostavku da su koeficijenti $\hat{f}_{l',m';l,m}^s(p)$ jednaki nuli za $|m| > l$ uz zadani l), sumu možemo izračunati korištenjem jednodimenzionalne Fourierove transformacije za fiksirane ostale indekse. Složenost je izračuna tada $\mathcal{O}(S^4 N_p N_\Theta S \log S) = \mathcal{O}(N_R^{5/3} N_r^{2/3} \log N_R)$.

Potom se računa sumacija

$$(g_{12})_{l',m'}^s(p, \Theta, \Phi) = \sum_{l=|s|}^L (g_{11})_{l',m';l}^s(p, \Theta, \Phi) \quad (5.33)$$

koja se može obaviti u $\mathcal{O}(N_p N_\Theta N_\Phi S^4) = \mathcal{O}(N_r N_R^{4/3})$ računskih operacija. Isti je broj operacija potreban za umnožak

$$(g_1)_{l',m';n}^s(p, \mathbf{u}) = (g_{12})_{l',m'}^s(p, \Theta, \Phi) Q_{s,n}^{l'}(\cos \Theta) \exp(in\Phi). \quad (5.34)$$

U izrazu se pojavljuje indeks n za koji, dakako, vrijedi $-l' \leq n \leq l'$.

Ukupna složenost za dosad opisano sumiranje koeficijenata stoga iznosi $\mathcal{O}(N^{7/6} \log N)$.

Primjenom Driscoll-Healyjeve integracijske tehnike cijeli se izračun može dodatno ubrzati. U svrhu prilagodbe izraza 5.31, vrijednosti matrice elemente $\hat{f}_{l',m';l,m}^s(p)$ formalno postavljamo na nule za $|m|, |s| > l$, a granice proširujemo od $l = 0$ i od $m = -L$ do $m = L$. Tada se sumacija po l može obaviti tako da se prvo izračuna

$$(g_{11})_{l',m';m}^s(p, \Theta) = \sum_{l=0}^L \hat{f}_{l',m';l,m}^s(p) Q_{s,m}^l(\cos \Theta) \quad (5.35)$$

korištenjem tehnike brze transformacije složenosti

$$\mathcal{O}(S^4 N_p S (\log S)^2) = \mathcal{O}(N_R^{3/4} N_r^{2/3} (\log N_R)^2). \quad (5.36)$$

Nakon toga se sumira po indeksu m

$$(g_{12})_{l',m'}^s(p, \Theta, \Phi) = \sum_{m=-L}^L (g_{11})_{l',m';m}^s(p, \Theta) \exp(-im\Phi) \quad (5.37)$$

što se može ostvariti jednodimenzionalnom brzom Fourierovom transformacijom s $\mathcal{O}(S^3 N_p N_\Theta S \log S) = \mathcal{O}(N_R^{3/4} N_r^{2/3} \log N_R)$.

Bez obzira na koji način dobijemo $(g_1)_{l',m';n}^s(p, \mathbf{u})$, dalje je potrebno obaviti interpolaciju iz sfernog koordinatne rešetke na Kartezijevu trodeimenzionalnu rešetku. Interpolacija zahtjeva $\mathcal{O}(N_r N_R^{4/3} \epsilon(N_r)) = \mathcal{O}(N^{7/6} \epsilon(N^{1/2}))$ operacija.

Brza Fourierova transformacija za Kartezijevu rešetku u trodimenzionalnom euklidskom prostoru

U ovom se koraku računa integral

$$(g_2)_{l',m';n}^s(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} (g_1)_{l',m';n}^s(\mathbf{p}) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d^3p \quad (5.38)$$

koji se ostvaruje brzom Fourierovom transformacijom za Kartezijevu rešetku u trodimenzionalnom euklidskom prostoru za što je potrebno $\mathcal{O}(S^4 N_r \log(N_r)) = \mathcal{O}(N^{7/6} \log N)$ operacija.

Inverzne Fourierove transformacije na rotacijskoj grupi

Za rekonstrukciju funkcije na $SE(3)$ iz njezinog spektra potrebno je još izvršiti sumacije

$$f(\mathbf{r}, R) = \sum_{s=-S}^s \left[\sum_{l'=|s|}^L \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{n=-l'}^{l'} U_{nm'}^{l'}(R) (g_2)_{l',m';n}^s(\mathbf{r}) \right]. \quad (5.39)$$

Izraz u uglatoj zagradi predstavlja inverznu Fourierovu transformaciju funkcije na $SO(3)$ grupi za fiksne vrijednosti \mathbf{r} i s . Kako bi se transformacija mogla izračunati postojećim brzim tehnikama implementiranim u dostupnoj programskoj biblioteci, iznose matrice elemenata $(g_2)_{l',m';n}^s(\mathbf{r})$ postavljamo na nulu za $l' < |s|$ te proširujemo granicu sumacije tako da l' kreće od nule. Za izračun brze $SO(3)$ Fourierove transformacije potrebno je $\mathcal{O}(N_r S N_R (\log N_R)^2)$ operacija.

Zaključno, ukupna složenost inverzne Fourierove transformacije iznosi

$$\mathcal{O}(N^{7/6}((\log N)^2 + N\epsilon(N^{1/2}))). \quad (5.40)$$

5.2.3. Konvolucija

Konvolucijski se integral

$$(f_1 * f_2) = \int_{SE(3)} f_1(h) f_2(h^{-1} \circ g) dh \quad (5.41)$$

može zapisati u obliku matrice umnoška u transformacijskom prostoru kao

$$(\mathcal{F}(f_1 * f_2))_{l',m';l,m}^s(p) = \sum_{j=|s|}^{\infty} \sum_{k=-j}^j (\hat{f}_2)_{l',m';j,k}^s(p) (\hat{f}_1)_{j,k;l,m}^s(p). \quad (5.42)$$

Kada su funkcije $f_1(g)$ i $f_2(g)$ pojasno ograničene na onaj način, kako smo to ranije podrazumijevali, matricni umnožak može se izračunati izravno. Taj će postupak utrošiti $\mathcal{O}(N_p S^7) = \mathcal{O}(N_r^{1/3} N_r^{7/3}) = \mathcal{O}(N^{4/3})$ operacija što ga čini vremenski najzahtjevnijim dijelom algoritma. Za matrice dimenzija $n \times n = 2^m \times 2^m$, može se primijeniti brzo matricno množenje čija je složenost $\mathcal{O}(N^{(\log_2 7+1)/3})$. Brzi algoritmi matricnog množenja područja su aktivnog istraživanja pa ćemo vremensku složenost ovog postupka općenitije označiti kao $\mathcal{O}(N^{(\gamma+1)/3})$ pri čemu je vrijednost parametra γ određena konkretnom realizacijom, $2 \leq \gamma \leq 3$.

Promotrimo li sve korake potrebne za izračun konvolucije funkcija na grupi $SE(3)$,

dobivamo ukupnu složenost ne veću od

$$\mathcal{O}(N^{(\gamma+1)/3}) + \mathcal{O}(N^{7/3}(\log N)^2) + \mathcal{O}(N^{7/6}\epsilon(N^{1/2})). \quad (5.43)$$

Za $\epsilon(N_r) \leq \mathcal{O}((\log N_r)^2)$, postiže se značajna ušteda vremena potrebnog za izvršavanje konvolucije u odnosu na izravnu implementaciju integriranjem čija je složenost $\mathcal{O}(N_r^2 N_R^2) = \mathcal{O}(N^2)$.

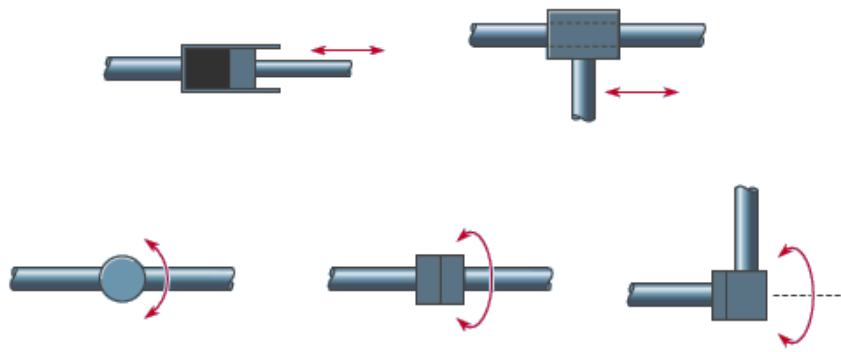
6. Primjene

6.1. Robotika

U ovom se kontekstu pojam robota odnosi na sustav sposoban ostvariti predviđena ponašanja u stvarnom svijetu za što je potrebna određena razina samodovoljnosti i fleksibilnosti. Robot sensorima prikuplja signale iz okoline te na istu djeluje pomoću pogona ili aktuatora. Veza između opažanja (eng. *sensing*) i djelovanja (eng. *actuation*) može biti ostvarena jednostavnom obradbom signala ili pak može uključivati složene postupke odlučivanja, interpretaciju cilja i druge aspekte rasuđivanja. Uz prikladni osjetilni podsustav i ugrađene postupke odlučivanja, robot mora imati fizičku realizaciju koja će očekivano djelovanje omogućiti. Specifično za pojedinu primjenu, razvijeni su različiti koncepti građe robota, a dvije najvažnije skupine robotskih sustava su manipulatori i pokretljivi roboti (eng. *mobile robots*).

Ako robot djeluje tako da je jednim krajem pričvršćen za podlogu, radi se o manipulatoru ili robotskoj ruci. Upravo takvo konstrukcijsko rješenje često se koristi u industrijskim primjenama. Mehanička struktura manipulatora sastoji se od niza čvrstih segmenata povezanih pomoću zglobova (eng. *joint*). Zglobovima se ostvaruju relativna kretanja među različitim komponentama sustava i ona mogu biti rotacijska, translacijska ili kombinirana. Rotacijski zglob (eng. *revolute joint*) vrši rotaciju oko osi, a translacijski (eng. *prismatic joint*) linijsko kretanje po osi. Neki od tipova zglobova prikazani su slikom 6.1.

Ovisno o tome, na koji način su povezani segmenti mehaničke strukture manipulatora, razlikujemo tri osnovne arhitekture: serijsku, paralelnu i stablastu. Kada su segmenti povezani slijedno i ne čine niti jednu petlju, topologija je serijska. Paralelnu ili platformsku arhitekturu karakterizira postojanje jedne ili više petlji, a stablasta struktura pogodna je, primjerice, za realizaciju zajedničkog djelovanja više robotskih ruku. Pojam hibridne arhitekture označava strukturalno rješenje koje kombinira više osnovnih topologija. Tako su neki manipulatori sastavljeni od većeg broja serijski povezanih modula pri čemu pojedini modul može biti bilo paralelne bilo serijske arhitekture. Zbog visokog stupnja flek-



Slika 6.1.: Raliti tipovi zglobova. (a) Translacijski (linearni) zglobovi. (b) Rotacijski zglobovi.

sibilnost, kojeg dopušta modularna struktura, takvi se manipulatori nazivaju hiper-redundantnim.

Za interakciju s okolinom u svrhu obavljanja radnog zadatka služi funkcionalni završetak robotske ruke, takozvani vrh manipulatora (eng. *end effector*). To može biti hvataljka (eng. *gripper*) ili neki drugi alat poput glave za zavarivanje, bušilice, lasera ili raspršivača boje. Vrh manipulatora potrebno je moći postaviti u željenu poziciju i orijentaciju u odnosu na bazu robotskog sustava. Skup svih mogućih pozicija i orijentacija, koje neka robotska ruka može dosegnuti, naziva se radni prostor manipulatora (eng. *workspace*). Da bismo postigli željeno stanje vrha manipulatora unutar radnog prostora, moramo odrediti stanja svih zglobova (eng. *joint angles*) koja rezultiraju ciljnom pozicijom i orijentacijom vrha. Zhtjevom za računanjem nepoznatih stanja svih zglobova uz poznato ciljno stanje vrha formuliran je takozvani inverzni kinematički problem (eng. *inverse kinematics problem*) čije efikasno rješavanje predstavlja ključni zadatak u proizvodnim i servisnim primjenama. Drugi slučaj, kada iz poznatih stanja svih zglobova treba odrediti stanje vrha manipulatora, naziva se direktni kinematički problem (eng. *forward kinematics problem*). U pravilu, direktni kinematički problem lako je riješiti za manipulatore serijske topologije, no on postaje mnogo složeniji kada je topologija mehaničke strukture paralelna. Situacija je s inverznim kinematičkim problemom obrnuta – on je složen u slučaju serijskih manipulatora, a jednostavan u slučaju paralelnih. Iz toga slijedi da hibridni manipulatori nasljeđuju visoku složenost izračuna u oba smjera. Osim direktnog i inverznog kinematičkog problema, u industrijskoj robotici važan je i problem generiranja radnog prostora (eng. *workspace generation problem*) koji se odnosi na određivanje svih mogućih

orijentacija i pozicija dohvatljivih robotskom rukom.

Pokretljivi roboti mogu se pomicati s jedne na drugu lokaciju pomoću kotača, gusjenica, nogu, peraja, propelera ili drugih pogona. Većina takvih sustava ima samo neke od oblika mobilnosti: na zemlji, pod vodom, u zraku ili u svemiru. Najosnovniji problem uspješno je navođenje robota poznatog oblika realnom okolinom koju osim fizičkih zapreka obilježavaju pojave poput proklizavanja kotača, pogrešaka u mjerenju i dinamike vozila. Zato se pokretljivim robotom u kontekstu planiranja gibanja, smatra jedinstveno čvrsto tijelo. Dakako, postoje i kombinacije manipulatora i pokretljivih robota koje se javljaju u različitim oblicima.

6.1.1. Funkcija gustoće diskretno pogonjenih manipulatora

Konvolucijski umnožak dviju realnih funkcija na Euklidskoj grupi gibanja ovdje ćemo iskoristiti kao alat za efikasno rješavanje numeričkih problema. Najvažnije primjene bit će generiranje radnog prostora diskretno pogonjenog manipulatora (eng. *discretely actuated manipulator*) i određivanje gustoće dostupnih stanja.

Manipulator se smatra diskretno pogonjenim ako svaki njegov aktuator ima konačan broj stanja. Takvi se pogoni ostvaruju koračnim motorima i pneumatskim cijevima. Posebno, kada svi diskretni aktuatori imaju točno dva stanja, cjelokupna se struktura naziva binarnim manipulatorom. Primjer binarnog manipulatora je šestbitna binarna platforme, takozvana Stewart-Goughova struktura, prikazana slikom 6.2.. Svaka od šest neovisno pogonjenih nogu realizirana je pneumatskom cijevi s dva stabilna stanja. Cijevi su s jedne strane zglobovima pričvršćene za bazu mehanizma, a s druge za platformu. Promjenom njihove duljine, mijenja se i relativna pozicija platforme u odnosu na bazu. Takav mehanički sustav ima šest stupnjeva slobode.

Stewart-Goughove platforme važne su za tehnologiju strojnih alata, simulatore leta, podvodna istraživanja, pozicioniranje satelitskih antena, ortopedske operacije, svemirske programe i druge primjene. Nama će posebno biti zanimljive strukture dobivene postavljanjem više takvih platformi jedne na drugu koje čine hiper-redundantne manipulatore. Ulančavanjem jednostavnih paralelnih topologija dobivamo složen i fleksibilan manipulatorski sustav koji je vrlo atraktivan jer ne zahtjeva kontrolu povratne veze, a i cijena izrade je razmjerno niska. U takvom slučaju broj dohvatljivih stanja, odnosno veličina radnog prostora eksponencijalno raste s brojem platformi pa rješavanje inverznog kinematičkog problema i problema generiranja radnog prostora postaje teško. Zamislimo primjer strukture

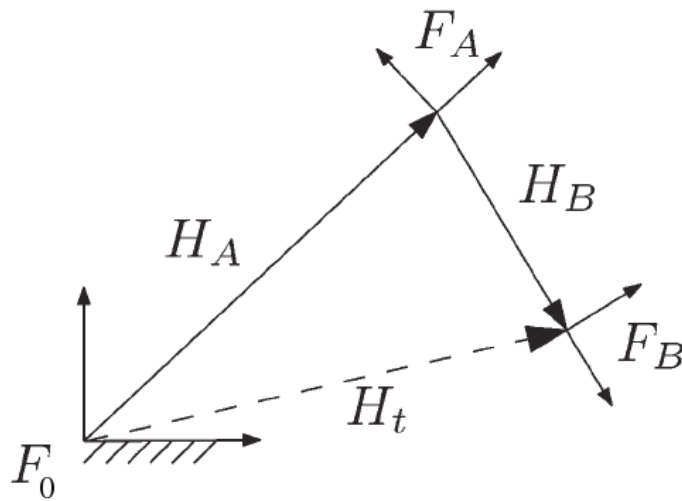


Slika 6.2.: Stewart-Goughova platforma.

koja se sastoji od pet Stewart-Goughovih platformi postavljenih jedne na drugu. Kako je svaki aktuator realiziran pneumatskom cijevi s dva stabilna stanja, svaka platforma ima 2^6 stanja, a cijela struktura $(2^6)^5 = 2^{30}$ stanja. U općenitom slučaju, bilo koji diskretno pogonjeni manipulator sastavljen od serije P jedinica pri čemu svaka jedinica ima K stanja, ima ukupno K^P stanja. Naravno, teži se izbjeći računanje svih K^P konfiguracija prilikom izvođenja operacija poput rješavanja inverznog kinematičkog problema. Kroz povijest robotike razvijene su različite metode koje nadmudruju inherentnu eksponencijalnu složenost.

U kontekstu diskretno pogonjenih manipulatora često se koristi funkcija gustoće radnog prostora koja predstavlja mjeru sposobnosti manipulatora da dohvati zadanu točku unutar radnog prostora. Funkcija gustoće aproksimira broj rješenja direktnog kinematičkog problema hiper-redundantnih manipulatora, odnosno naznačuje koliko različitih konfiguracija dovodi do pojedinog ciljnog stanja. Gustoća u okolini neke točke radnog prostora indicira preciznost kojom manipulator može dosegnuti tu točku. U kombinaciji s algoritmom pretraživanja u širinu (eng. *breadth-first search*), funkcije gustoće koriste se kao metoda za efikasnije rješavanje inverznog kinematičkog problema. Također, one predstavljaju mjeru okretnosti koju je pogodno poznavati prilikom dizajna manipulatora. Kao što je bio slučaj s prethodno opisanim problemom generiranja radnog prostora, određivanje funkcije gustoće također je eksponencijalne složenosti. Naime, za svaki volumen u $SE(3)$ treba izbrojati koliko konfiguracija manipulatora dovodi do nekog stanja unutar tog volumena. Očito se ovdje radi o $O(K^P)$ računanja direktnog kinematičkog problema gdje je P broj modula od kojih svaki postiže K stanja. Dodatno, prebrajanja moramo i pamtiti što znači da svakim nailaskom na neki element radnog

prostora treba povećati vrijednost gustoće za taj element pa algoritam izravnog prebrajanja zahtjeva još $O(K^P)$ operacija inkrementiranja. Primjerice, imamo li manipulator sastavljen od deset istovrsnih šestbitnih modula, ukupno se radi o $2^{60} \approx 10^{18}$ stanja. Jasno je da se takav problem ne može riješiti izravnim pristupom jer bi koristeći postojeću računalnu tehnologiju izračun mogao potrajati godinama. Uvođenjem koncepta konvolucije na Euklidskoj grupi, aproksimacija funkcije gustoće radnog prostora za hiper-redundantne manipulatore može se ostvariti s $O(\log P)$ konvolucija pri čemu se, uz pretpostavku korištenja brzih algoritama za konvoluciju, vrijeme izračuna reducira na minute.



Slika 6.3.: Ulančavanje dviju homogenih transformacija.

Želimo li izraziti funkciju gustoće diskretno pogonjenog manipulatora, prirodno ćemo naići na konvolucijski integral. Razmotrimo manipulator koji se sastoji od dva mehanizma postavljena jedan na drugoga kako je prikazano slikom 6.3.. Okvir F_0 pričvršćen je na dno prvog modula, a okvir F_A na njegov vrh koji je ujedno i dno drugog modula. Homogena transformacija H_A opisuje poziciju i orijentaciju okvira F_A u odnosu na okvir F_0 . Treći okvir, F_B , postavljen je na vrh drugog modula, a njegovu poziciju i orijentaciju u odnosu na F_A daje transformacija H_B . Relativna gibanja F_A u odnosu na F_0 i F_B u odnosu na F_A elementi su grupe $SE(3)$ i mogu se poistovjetiti korespondentnim matričnim reprezentacijama H_A i H_B . Kako se koordinate okvira F_B u odnosu na referencu sustava F_0 mogu opisati s $H_t = H_A H_B$, za matricu H_B vrijedi $H_B = H_A^{-1} H_t$. Tu ćemo činjenicu iskoristiti nešto kasnije.

Funkcija gustoće opisuje distribuciju stanja unutar radnog prostora. Za svaki

volumni element u ograničenom prostoru od interesa u $SE(3)$ treba prebrojati koliko dohvatljivih stanja sadrži i taj broj podijeliti volumenom pojedinog elementa. Zato odabrani prostor u $SE(3)$ dijelimo na konačne, ali dovoljno malene volumne elemente, takozvane voksele (eng. *voxels*). Oznakom $\Delta(H)$ predstaviti ćemo volumen vokselu centriranog elementom $H \in SE(3)$, a za diferencijalni volumen koristit ćemo oznaku $d(H)$. Da bismo mogli prebrajati, skup gibanja treba biti konačan što će u slučaju diskretno pogonjenih manipulatora uvijek i biti isitna. Kada u sustavu postoje kontinuirani aktuatori, njihovo se gibanje mora diskretizirati na prikladan način. Tada se H_A i H_B odabiru iz konačnog skupa različitih pozicija i orijentacija pa je moguće odrediti koliko se često H_A i H_B stanja pojavljuju po vokselu. Neka funkcija ρ_1 predstavlja broj pojavljivanja stanja H_A po vokselu podijeljen volumenom $\Delta(H_A)$, a funkcija ρ_2 broj pojavljivanja stanja H_B po vokselu također normaliziran volumenom vokselu. Zanima nas koliko se često H_t pojavljuje po vokselu u $SE(3)$ za sve kombinacije H_A i H_B . To možemo odrediti primjenom sljedećih koraka:

1. odrediti $\rho_1(H_A)$, frekvenciju pojavljivanja H_A ,
2. odrediti $\rho_2(H_B) = \rho_2(H_A^{-1}H_t)$, frekvenciju pojavljivanja H_B ,
3. za svaki H_A , lijevo-posmaknuti histogram $\rho_2(H_A^{-1}H_t)$ otežati iznosom posmaka, $\rho_1(H_A)\Delta(H_A)$,
4. sumirati (integrirati) sve doprinose:

$$(\rho_1 * \rho_2)(H_t) = \int_{SE(3)} \rho_1(H_A)\rho_2(H_A^{-1}H_t)d(H_A). \quad (6.1)$$

U trećem koraku kombiniramo gibanja H_A iz nekog vokselu sa svim mogućim H_B . Treba uočiti da je umnožak $\rho_2(H_A^{-1}H_t)\rho_1(H_A)\Delta(H_A)$ aproksimacija sume histograma svih $\rho_2(H)$ za homogene transformacije H_A iz vokselu volumena $\Delta(H_A)$. Što je taj volumen manji, aproksimacija je bolja. Rezultantno gibanje H_t kompozicija je $H_A H_B$ i da bi se dobila njegova frekvencija pojavljivanja, treba zbrojiti doprinose svakog H_A . U graničnom slučaju, sumacija prelazi u integral. Dodatno, valja primijetiti da iz tako dobivene gustoće okvira H_t broj pojavljivanja u nekom elementu iz $SE(3)$ dobiva se jednostavno množenjem volumenom, $(\rho_1 * \rho_2)(H_t)\Delta(H_t)$.

Kada imamo funkciju gustoće stanja, njome možemo uspješno reducirati količinu podataka potrebnih za pohranjivanje svih resultantnih stanja vrha manipulatora. Za primjer ponovno uzimamo diskretno pogonjen manipulator sastavljen od dva

povezana modula. Mehanizmi imaju konačne skupove stanja S_1 i S_2 koji imaju m_1 , odnosno m_2 elemenata. Uz pretpostavku nepomične baze sustava, skup svih homogenih transformacija vrha manipulatora dobiva se svim kombinacijama stanja pojedinih mehanizama

$$S_t = \{H_t = H_A H_B : H_A \in S_1, H_B \in S_2\} \quad (6.2)$$

pa je njegov kardinalitet $m_1 \cdot m_2$. Kada je taj broj jako velik, prikladno je skup stanja aproksimirati funkcijom gustoće, odnosno za svaki voksel pohraniti broj stanja koji mu pripadaju. Ako su skupovi S_1 i S_2 redom aproksimirani funkcijama $\rho_1(\cdot)$ i $\rho_2(\cdot)$, za funkcija gustoće cijelog manipulatora vrijedi kako smo pokazali:

$$\rho(H_t) = (\rho_1 * \rho_2)(H_t). \quad (6.3)$$

Razmatranje se može lako poopćiti za manipulatore koji imaju više od dva modula postavljena jedan na drugi. Imamo li četiri modula, funkcija gustoće donja dva je $\rho_1 * \rho_2$, dok je funkcija gustoće gornja dva $\rho_3 * \rho_4$. Promatramo li donji par kao jedan modul te isto učinimo i s gornjim parom, gustoća za cijelu strukturu je $(\rho_1 * \rho_2) * (\rho_3 * \rho_4) = \rho_1 * \rho_2 * \rho_3 * \rho_4$. Općenito, za manipulator s P neovisnih modula redom opisanih skupovima S_1, \dots, S_P gustoću dobivamo višestrukom konvolucijom

$$\rho(H_t) = (\rho_1 * \rho_2 * \dots * \rho_P)(H_t). \quad (6.4)$$

6.1.2. Inverzni kinematički problem diskretnih manipulatora

Funkcija gustoće radnog prostora može biti korisna za efikasno rješavanje inverznog kinematičkog problema za diskretne hiper-redundantne manipulatore s velikim brojem stanja. Algoritam je zapravo odgovor na težnju da zaobiđemo rješenje koje bi uključivalo izračunavanje izravnog kinematičkog problema za svako od K^P stanja. Osnovna ideja je redom za svaki modul, počevši od onog pričvršćenog za podlogu, odabrati i fiksirati stanje koje maksimizira gustoću preostalih modula u željenom stanju radnog prostora.

Neka je $g_k \in SE(3)$ transformacija koja predstavlja odnos dna i vrha k -tog segmenta pri čemu je $k \in \{1, \dots, P\}$. Stanje vrha k -tog segmenta u odnosu na bazu manipulatora tada je

$$g^{(k)} := g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_k \quad (6.5)$$

pa za poziciju i orijentaciju vrha manipulatora u odnosu na vrh k -tog vrijedi

$$(g^{(k)})^{-1} \circ g^{(P)} = g_{k+1} \circ g_{k+2} \circ \cdots \circ g_P. \quad (6.6)$$

Kako svaki modul ima K stanja, na toliko načina možemo odabrati svaki g_k . Prema osnovnoj ideji algoritma, naš izbor će maksimizirati vjerojatnost da i za preostale module postoje stanja koja će rezultirati željenom pozicijom i orijentacijom vrha manipulatora, g_{cilj} . Da bismo takav izbor znali ostvariti, trebat će nam informacije o gustoći, ali izračunate od vrha prema bazi manipulatora. Neka su ρ_1, \dots, ρ_P funkcije gustoće za svaki od P modula. Iz njih dobivamo nove funkcije

$$\begin{aligned} \rho^P &:= \rho_P \\ \rho^{P-1} &:= \rho_{P-1} * \rho_P \\ \rho^{P-k} &:= \rho_{P-k} * \cdots * \rho_P \\ \rho^1 &:= \rho_1 * \cdots * \rho_P. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Algoritam započinjemo modulom pričvršćenim za podlogu i tražimo stanje koje maksimizira $\rho^{(P-1)}((g^{(1)})^{-1} \circ g_{cilj})$. Prolazimo kroz svih mogućih K vrijednosti stanja g_1 i izabiremo ono optimalno $g^{(1)} = g_1$. Postupak na isti način nastavljamo sljedećim modulom. Sada želimo odabrati takvo stanje vrha drugog modula u odnosu na bazu $g^{(2)}$ za koje je najizglednije da postoji konfiguracija preostalih modula koja dovodi do željenog stanja vrha manipulatora. Dakle, želimo maksimizirati $\rho^{(P-2)}((g^{(2)})^{-1} \circ g_{cilj})$. No, za prvi modul smo već donijeli odluku i imamo fiksirani g_1 pa je za odabir optimalnog $g^{(2)} = g_1 \circ g_2$ potrebno proći kroz K mogućih vrijednosti g_2 i od njih izabrati maksimizirajuće. Postupak se nastavlja redom maksimizirajući $\rho^{(P-k)}((g^{(k)})^{-1} \circ g_{cilj})$ za sva $k \in \{1, \dots, P-1\}$. Za stanje posljednjeg modula g_P biramo ono koje je prema nekom kriteriju udaljenosti najbliže željenoj poziciji i orijentaciji vrha

$$C = d(g_{cilj}, g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_P) \quad (6.8)$$

Opisanim postupkom određena je konfiguracija cijelog manipulatora koja aproksimativno dovodi vrh manipulatora u željeno stanje. Složenost algoritma je $\mathcal{O}(P)$.

6.2. Statistička mehanika makromolekula

Statistička je mehanika grana fizike utemeljena u drugoj polovici 19. stoljeća kao odgovor na pitanje kako se Newtonovi zakoni gibanja mogu primijeniti na sustave s toliko velikim brojem elemenata da ne postoji računski postupak kojim se može egzaktno opisati svaki pojedini dio promatranoga sustava.

Tri su statistička svojstva važna za ovu fomulaciju:

1. složajna gustoća mase cijelog lanca $\rho(\mathbf{x})$ koja se generira tako da se jedan kraj lanca učvrsti i stvori oblak svih mogućih konfiguracija superponiranih jedne drugu,
2. složajna gustoća vršnog okvira $f(g)$ pri čemu je g referentni okvir kraja lanca u odnosu na prethodni (predzadnji) element lanca,
3. funkcija $\mu(g, \mathbf{x})$ koja predstavlja složajnu gustoću mase svih konfiguracija koje dovode do pojedinog vršnog stanja g .

Ove su veličine prikazane slikom 6.4.

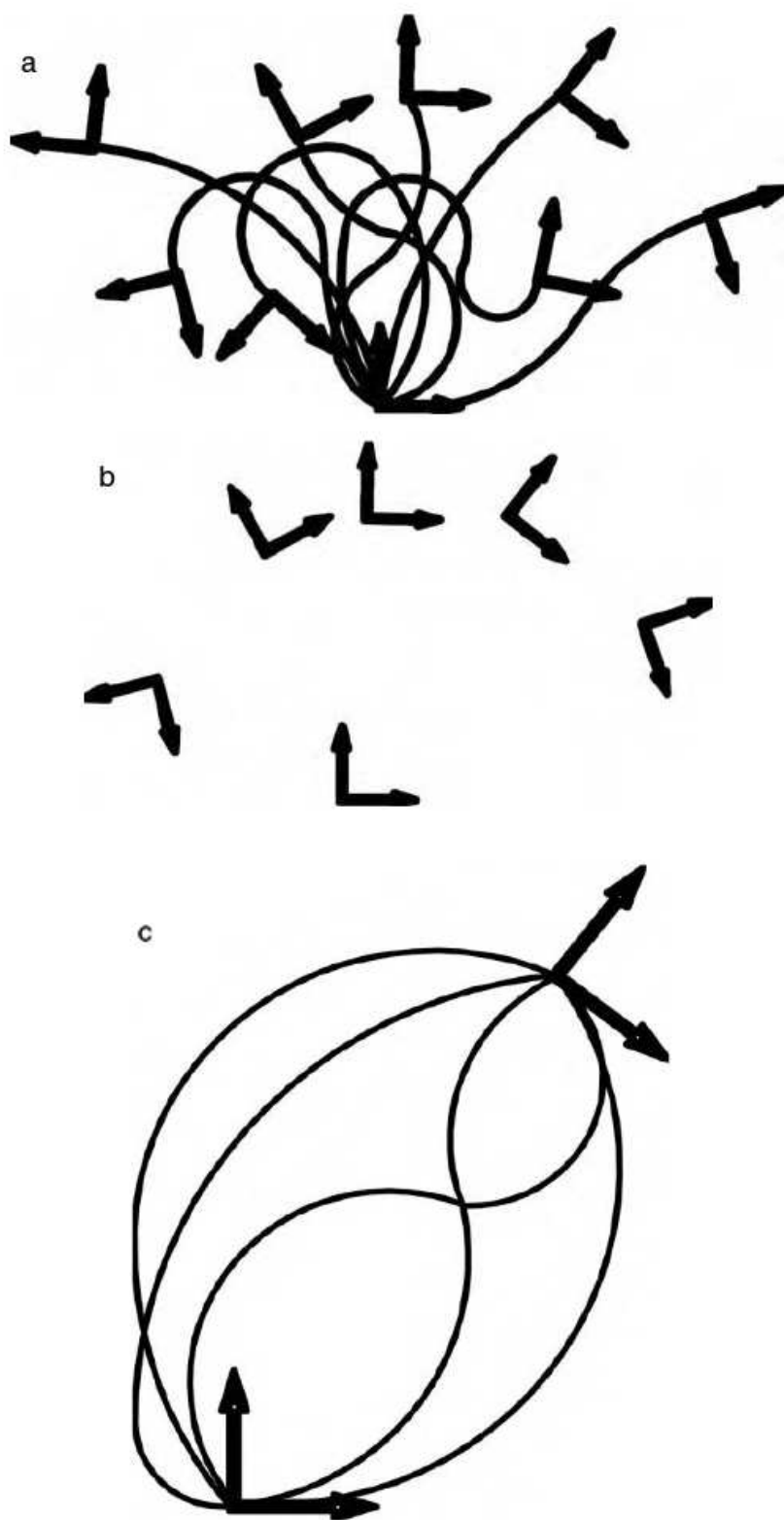
Među funkcijama ρ , f i μ mogu se uspostaviti relacije. Tako se iz poznatih vrijednosti $\mu(g, \mathbf{x})$ može izračunati složajna gustoća mase pribrajanjem doprinosa preko svih krajnjih pozicija i orijentacija

$$\rho(\mathbf{x}) = \int_G \mu(g, \mathbf{x}) dg \quad (6.9)$$

gdje je G grupa $SE(3)$, a dg odgovarajuća invarijanta mjera integracije.

Na isti način lako je uočiti da se integriranjem funkcije μ preko svih vektora \mathbf{x} dobiva ukupna masa konfiguracija koje dovode krajnji okvir lanca u stanje g . Ako je masa lanca M , prethodni zaključak se može napisati u obliku relacije gustoće okvira $f(g)$ i funkcije $\mu(g, \mathbf{x})$ kao

$$f(g) = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \mu(g, \mathbf{x}), d\mathbf{x} \quad (6.10)$$



Slika 6.4.: Funkcije (a) $\rho(\mathbf{x})$; (b) $f(g)$; (c) $\mu(g, \mathbf{x})$. Slika je preuzeta iz (Chirikjian, 2001).

Ukupan broj okvira jedne strane lance u odnosu na drugu tada je

$$F = \int_G f(g)dg \quad (6.11)$$

pa slijedi

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} = F \cdot M. \quad (6.12)$$

Ako su vrijednosti funkcija $\rho(\mathbf{x})$ i $f(g)$ poznate za cijeli lanac, mogu se odrediti mnoga bitna termodinamička i mehanička svojstva polimera. Primjerice, momenti cjelobrojne potencije udaljenosti krajeva lanca $\langle |\mathbf{r}|^m \rangle$ mogu se izračunati iz $f(g) = f(R, \mathbf{r})$. Prvo se obavlja integracija preko svih mogućih orijentacija

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = \int_{SO(3)} f(R, \mathbf{r})dR \quad (6.13)$$

gdje je dR normalizirana invarijantna mjera integracije za $SO(3)$. Tada vrijedi

$$\langle |\mathbf{r}|^m \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{r}|^m \tilde{\rho}'(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (6.14)$$

pri čemu je $d\mathbf{r} = dr_1 dr_2 dr_3$ uobičajena mjera integracije na \mathbb{R}^3 , a $\tilde{\rho}' = \tilde{\rho}/K^n$ je normalizirana verzija funkcije $\tilde{\rho}$ gdje je K broj mogućih stanja pojedinog elementa lanca. Funkcija gustoće razdiobe udaljenosti krajeva lanca dana je izrazom

$$d(r) = r^2 \int_{S^2} \tilde{\rho}'(\mathbf{r})d\mathbf{u} \quad (6.15)$$

pri čemu u sfernim kordinatama vrijedi $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$. $\mathbf{u} \in S^2$ predstavlja točku na jediničnoj sferi, a $d\mathbf{u}$ element je površine na sferi.

S analitičkog aspekta, sve se prethodne veličine mogu izračunati poznavajući vrijednosti $\mu(g, \mathbf{x})$ za cijeli lanac. No, problem ovakvog izračuna racionalno je upravljanje memorijom. S obzirom da je $SE(3)$ šesterodimenzionalna Liejeva grupa, a \mathbb{R}^3 ima tri dimenzije, broj memorijskih lokacija potreban za dovoljno preciznu aproksimaciju funkcije $\mu(g, \mathbf{x})$ na prostoru $SE(3) \times \mathbb{R}^3$ s devet dimenzija nemoguće je osigurati. Ako, primjerice, imamo 100 točaka za uzorkovanje na svakoj koordinati, trebali bismo ukupno 10^{18} memorijskih lokacija. U tom je smislu puno jednostavnije posebno koristiti $\rho(\mathbf{x})$ i $f(g)$ s istim uzorkovanjem.

Veliki problem kod računanja funkcija $\rho(\mathbf{x})$ i $f(g)$ je eksponencijalni porast broja mogućih stanja lanca s brojem njegovih elemenata. Ako je K broj mogućih stanja jednog elementa tada ukupnih kombinacija ima K^N . Pritom valja očekivati lance

koji se sastoje od nekoliko stotina pa do nekoliko stotina tisuća elemenata pa zbog toga funkcije $\rho(\mathbf{x})$ i $f(g)$ nije moguće dobiti eksplicitnim prebrajanjem svih mogućih konfiguracija. Ovaj je problem otprije poznat u istraživanju polimera i postoji nekoliko standardnih pristupa kojima se rješava. No, ovdje uvodimo sasvim novi koncept koji se temelji na razmatranju složenih svojstava dijelova lanca. Sama je ideja nastala prije više od pola stoljeća, ali način izračuna složenih svojstava cijelog lanca na temelju složenih svojstava njegovih dijelova različit je od uobičajenog.

Osnovna je ideja podijeliti polimer u P statistički značajnih segmenata pri čemu se nastoji odabrati P dovoljno velikim tako da složajne aproksimacije $\rho(\mathbf{x})$ i $f(g)$ postižu zadovoljavajuću razinu preciznosti. Primjerice, imamo li $N \approx 1000$ i $K = 3$ tada možemo odabrati $P \approx 40$. Kako je složenost takvog postupka $K^{N/P}$, brojevi iz primjera sasvim su pogodni i za izvršavanje na prosječnom osobnom računalu.

Za svaki od P statističkih segmenata lanca računamo $\rho_i(\mathbf{x})$ i $f_i(g)$ pri čemu je g relativni okvir vrha i -tog segmenta u odnosu na prethodni element u lancu. Za homogene lance, kakav je i polietilen, funkcije imaju jednake vrijednosti za sve $i = 1, \dots, P$.

U općenitom slučaju, za heterogene lance, moguće je izračunati funkcije $\rho_{i,i+1}(\mathbf{x})$ i $f_{i,i+1}(g)$ za spoj segmenata i i $i+1$ iz funkcija za pojedinačne segmente. Funkcija $\rho_{i,i+1}(\mathbf{x})$ može se izraziti na sljedeći način

$$\rho_{i,i+1}(\mathbf{x}) = F_{i+1}\rho_i(\mathbf{x}) + \int_G f_i(h)\rho_{i+1}(h^{-1} \circ \mathbf{x}) dh. \quad (6.16)$$

Gustoća mase složaja svih konfiguracija dviju povezanih segmenata lanca dobiva se sumiranjem dva doprinosa. Prvi je doprinos gustoća mase svih stanja donjeg segmenta otežana brojem različitih stanja gornjeg segmenta $F_{i+1} = \int_G f_{i+1}dg$. Drugi sumacijski član proizlazi iz rotacija i translacija složajne gustoće mase gornjeg segmenta i pribrajanja doprinosa svakog od tih stanja. On se otežava brojem okvira koje može postići vrh donjeg segmenta u odnosu na svoju bazu. Matematički, $L(h)\rho_{i+1}(\mathbf{x}) = \rho_{i+1}(h^{-1} \circ \mathbf{x})$ operacija je lijevog posmaka koja geometrijski predstavlja translaciju i rotacije funkcije $\rho_{i+1}(\mathbf{x})$ transformacijom h .

S druge strane, za funkciju $f_{i,i+1}(g)$ vrijedi

$$f_{i,i+1}(g) = (f_i * f_{i+1}) = \int_G f_i(h)f_{i+1}(h^{-1} \circ g) dh. \quad (6.17)$$

Distribucija okvira vrha spoja segmenata i i $i+1$ konvolucija je gustoća okvira

vrha pojedinih segmenata u odnosu na njihove baze.

Napisane izraze za izračun funkcija $\rho_{i,i+1}(\mathbf{x})$ i $f_{i,i+1}(g)$ iz poznatih $\rho_i(\mathbf{x})$, $f_i(g)$, $\rho_{i+1}(\mathbf{x})$ i $f_{i+1}(g)$ moguće je iskoristiti za formulaciju algoritama za generiranje njihovih vrijednosti za cijeli lanac: $\rho_{i,P}(\mathbf{x})$ i $f_{i,P}(g)$.

Imamo li serijski procesor, najprirodnije je izračun započeti na jednom kraju lanca i sekvencijalno ga obavljati za sve segmente. Valja uočiti da odabir početka lanca ne utječe na konačni rezultat. Ako započnemo u bazi polimera, izračunavamo funkcije

$$(\rho_{1,2}(\mathbf{x}, f_{1,2}(g)), \dots, (\rho_{1,i}(\mathbf{x}, f_{1,i}(g)), \dots, (\rho_{1,P}(\mathbf{x}, f_{1,P}(g))). \quad (6.18)$$

Ako se kao početni element odabere vršni element, dobivamo sljedeći redoslijed

$$(\rho_{P-1,P}(\mathbf{x}, f_{P-1,P}(g)), \dots, (\rho_{P-i,P}(\mathbf{x}, f_{P-i,P}(g)), \dots, (\rho_{1,P}(\mathbf{x}, f_{1,P}(g))). \quad (6.19)$$

Uzmemo li potrebno vrijeme za izračun konvolucije konstantnim, složenost rekursivnog algoritma će u oba slučaju biti $\mathcal{O}(P)$. Dakako, algoritam se provodi nakon što su izračunate sve funkcije $\rho_i(\mathbf{x} | f_i(g))$. Taj se izračun postiže u $\mathcal{O}(P \cdot K^{(N/P)})$ operacija jer je eksplicitno prebrajanje svih konfiguracija u pojedinom segmentu lanca potrebno $\mathcal{O}(K^{N/P})$.

Na paralelnim arhitekturama izračun se može obaviti mnogo brže nego s jednog procesorskim računalnim sustavom. Ako se prebrajanje konfiguracija za pojedine segmente lanca istovremeno odvija za sve segmente, složenost izračuna funkcija $\rho_i(\mathbf{x})$ i $f_i(g)$ reducira se na $\mathcal{O}(K^{(N/P)})$. Također, može se nešto učiniti i u glavnom koraku algoritma u kojem se do sada obavljalo P konvolucija što je zahtjevalo $\text{cal}O(P)$ konvolucija. Uparivanjem susjednih funkcija i njihovim izračunom na različitim procesorima, potreban broj operacija se smanjuje na $\text{cal}O(\log_2 P)$. Primjerice, imamo li osam segmenata, konvolucije se mogu organizirati tako da se $f_{1,2} = f_1 * f_2$, $f_{3,4} = f_3 * f_4$, $f_{5,6} = f_5 * f_6$ i $f_{7,8} = f_7 * f_8$ izračunaju istovremeno na $P/2 = 4$ procesora. Na sljedećoj se razini računaju $f_{1,4} = f_{1,2} * f_{3,4}$ i $f_{5,8} = f_{5,6} * f_{7,8}$ za što su potrebna dva procesora. Konačno, obavlja se izračun konvolucije $f_{1,8} = f_{1,4} * f_{5,8}$. Ovaj je primjer pokazao kako se vrijeme potrebno za niz od osam konvolucija zahvaljujući organizaciji izračuna na paralelnoj arhitekturi smanjilo na vrijeme potrebno za izračun $\log_2(8) = 3$ konvolucije na serijskom procesoru.

Opisano ubrzanje za paralelne platforme u slučaju heterogenih lanaca može se primijeniti za učinkovitiji izračun na jednog procesorskim sustavima u slučaju ho-

mogenih lanaca. Naime, kako za homogene lance vrijedi da funkcije imaju iste vrijednosti za sve segmente, dovoljno je prebrajanje obaviti za jedan segment duljine N/P što zahtjeva $\mathcal{O}(K^{(N/P)})$ operacija. Nadalje, niz od P konvolucija istom funkcijom može se zaobići organizacijom izračuna tako da se složenost ovog dijela algoritma smanji s $\mathcal{O}(P)$ na $\text{cal}O(\log_2 P)$. Na primjer, tri konvolucije $f_1 = f * f$, $f_2 = f_1 * f_1$ i $f_3 = f_2 * f_2$ daju isti rezultat kao niz od osam "akumulacijskih" konvolucija istom funkcijom f .

7. Praktični rad i rezultati

U ovom poglavlju opisana je problematika praktične implementacije algoritma za brzu konvoluciju na grupi $SE(3)$. Obuhvaćene su općenite značajke implementacije, opisi korištenih biblioteka, načini njihovog pozivanja i prijenosa podataka. Također su komentirane prednosti i nedostaci pojedinih pristupa te osobitosti izvornih rješenja.

7.1. Općenite značajke implementacije

Izvedba algoritma ostvarena je u MATLAB okruženju. U pojedinim se koracima koriste pozivi izvršnih programa na način kako će to biti kasnije objašnjeno.

Funkcije $f(\mathbf{r}, R)$ definirane su na konačnoj domeni iz $SE(3)$ i uzorkovane. Zadaju se kao višedimenzionalna polja (eng. *multidimensional array*) sa šest dimenzija gdje tri indeksa označavaju translaciju u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, dok preostala tri identificiraju rotaciju.

U sklopu ovoga rada implementirane su sljedeće MATLAB skripte:

- funkcija za stvaranje strukture parametara koji opisuju na koji je način funkcija zadana na $SE(3)$ i kako treba obaviti Fourierovu transformaciju,
- funkcije za brzu izravnu i inverznu Fourierovu transformaciju na grupi $SE(3)$,
- funkcija za izračun konvolucije dviju funkcija na grupi $SE(3)$,
- funkcije za brzu izravnu i inverznu Fourierovu transformaciju na grupi $SO(3)$ koje za svoj rad koriste biblioteku *SOFT*,
- funkcija za izračun poopćenih Legendreovih funkcija druge vrste koja za svoj rad koristi biblioteku *SOFT*,
- niz funkcija za generiranje testnih podataka i

- skripta koja služi kao okruženje za ispitivanje funkcionalnosti, točnosti i efikasnosti implementiranog algoritma.

Indekse uzoraka funkcije označit ćemo kao uređenu šestorku (j_1, k, j_2, l, m, n) , dok za stvarne koordinate vrijede oznake $\mathbf{r} = (x, y, z)$ i $R = (\alpha, \beta, \gamma)$. Da bi se indeksi uzorka povezali sa stvarnim koordinatama, potrebno je imati skup parametara koji tu vezu opisuju.

7.1.1. Parametri uzorkovanja i transformacije

Prilikom implementacije algoritma bilo je vrlo važno ispravno koncipirati parametre uzorkovanja i transformacije. Mogućnost parametrizacije donosi fleksibilnost u korištenju implementacije, no s druge strane, prevelik broj parametara povećava vjerojatnost pogrešne definicije i komplicira pripremu podataka potrebnih za rad transformacijskih i konvolucijskih funkcija. Zato je trebalo identificirati koji su parametri uistinu potrebni, na koji ih način zadati i postoje li kakve veze među njima.

Parametri uzorkovanja definiraju rešetku na kojoj se nalaze uzorci funkcije. Kutevi rotacije imaju vrijednosti $\{(\alpha_{j_1}, \beta_k, \gamma_{j_2}) \mid 0 \leq k, j_1, j_2 \leq 2B - 1\}$ pri čemu je

$$\alpha_{j_1} = \frac{2\pi j_1}{2B}, \beta_k = \frac{\pi(2k + 1)}{4B}, \gamma_{j_2} = \frac{2\pi j_2}{2B}. \quad (7.1)$$

U svakoj dimenziji rotacije ukupno je $2B$ točaka za uzorkovanje što znači da broj uzoraka na $SO(3)$ iznosi $N_R = 8B^3$. Veličina B predstavlja širinu pojasa pojasno ograničene funkcije na $SO(3)$. Veza između broja uzoraka i širine pojasa inherentno proizlazi iz definicije brze $SO(3)$ Fourierove transformacije. Korištena biblioteka *SOFT* također očekuje funkciju na $SO(3)$ uzorkovanu na ovaj način. Granice indeksa ne odgovaraju sasvim konkretnoj realizaciji jer zbog specifičnosti MATLAB-a, indeksi u izvornom kodu kreću od 1.

Translacije se ograničavaju na skup $\{(x, y, z) \mid |x|, |y|, |z| \leq a/2\}$ koji čini kocku sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Time nismo unijeli ograničenja na položaj funkcije u koordinatnom sustavu jer se ispunjavanjem domene nulama funkcija može dovesti na željeno mjesto. Kako je uzorkovanje uniformno, a korak uzorkovanja jednak za svaku koordinatnu os, bilo dovoljno je definirati jedan parametar uzorkovanja, u_r , koji određuje iznos koraka uzorkovanja u jednoj dimenziji. Tako u trodimenzionalnoj Kartezijevoj rešetki ima ukupno $N_r = (a/u_r + 1)^3$ točaka za uzorkovanje.

Svi dijelovi algoritma sadrže validaciju koja prekida izvršavanje u slučaju nepoklapanja vrijednosti parametara i dimenzija polja.

Kako se u transformacijskom postupku prelazi na sferni koordinatni sustav, sferne koordinate također je potrebno ograničiti i diskretizirati. Za radijalne udaljenosti p odabiru se granice

$$0 \leq p \leq \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (7.2)$$

kako bi se osiguralo da cijela Kartezijeva rešetka, na kojoj su definirane translacije, stane u rešetku koncentričnih sfera. Ono što se može parametrizirati, korak je uniformnog uzorkovanja na p -osi. Tako razlika radiju dviju susjednih sfera iznosi u_p . Za ukupan broj uzoraka na p intervalu vrijedi

$$N_p = \left\lfloor \frac{a\sqrt{3}}{2u_p} + 2 \right\rfloor. \quad (7.3)$$

Broj uzoraka na jediničnoj sferi S^2 povezali smo s veličinom S . Možda takav izbor za neke primjene nije optimalan pa se u tim slučajevima uz manje modifikacije izvornog koda veličine mogu učiniti nezavisnima. Razlog, iz kojeg je odlučeno postaviti ovakvo ograničenje, lakoća je korištenja brze Fourierove transformacije na S^1 u prvoj sumaciji prilikom integracije na jediničnoj sferi kod računanja izravne $SE(3)$ Fourierove transformacije. Taj je korak opisan u poglavlju 5.2.1. Također, definicija parametara je jednostavnija i jasnija. Broj uzoraka po svakom kutu iznosi $2B - 1$ što znači da je ukupan broj uzoraka na svakoj jediničnoj sferi $N_u = (2B - 1)^2$. U cijelom sfernom koordinatnom sustavu imamo $N_p N_u$ točaka za uzorkovanje.

Zaključno, struktura parametara, koju treba definirati uz uzorke funkcije na $SE(3)$ sastoji se od sljedećih veličina:

- B - širina pojasa pojasno ograničene funkcije na $SO(3)$,
- a - dimenzija konačne domene koja je podskup od \mathbb{R}^3 ,
- u_r - korak uzorkovanja na \mathbb{R}^3 ,
- u_p - korak uzorkovanja na intervalu p .

Nazivi parametara razlikuju se od naziva u izvornom kodu.

7.1.2. Rukovanje memorijom

U svrhu postizanja zadovoljavajuće aproksimacije diskretizacijom funkcije, potreban je dovoljan broj točaka uzorkovanja na svakoj koordinati domene. Kako grupa $SE(3)$ ima šest dimenzija, lako je predvidjeti da će zahtjevi za memorijskim resursima predstavljati jedan od značajnih problema implementacije algoritma. U nastavku će biti provedena pojednostavljena analiza memorijske složenosti konkretne implementacije.

Ukupan broj uzoraka funkcije na $SE(3)$ iznosi $N_r N_R$ pri čemu oznake odgovaraju onima uvedenim u petom poglavlju. Koristeći pretpostavke uvedene pri parametrizaciji uzorkovanja i transformacije, broj uzoraka postaje $8N_r B^3$. Odaberemo li broj uzoraka u svakoj dimenziji Kartezijeve rešetke jednak veličini B , imat ćemo ukupno $8B^6$ uzoraka što za $B = 256$ iznosi oko $2.25 \cdot 10^{15}$ uzoraka. Kako je za pohranu numeričkih vrijednosti korišten tip `double` koji zauzima 8 okteta, cijela će funkcija zauzeti više od osamnaest petabajta, odnosno preko osamnaest tisuća terabajta. No, to nije sve. Za konvoluciju su potrebne dvije takve funkcije, a algoritam dodatno koristi niz pomoćnih polja sličnih dimenzija koja služe za pohranu međurezultata. Također, prilikom interpolacije, potrebno je napraviti pretvorbu iz Kartezijevog u sferni koordinatni sustav pa je točke za uzorkovanje potrebno pohraniti u novim koordinatama. Trenutna implementacija algoritma učitava sve iznose poopćenih Legendreovih funkcija druge vrste u memoriju. Iz svega toga proizlazi da za veće brojeve točaka uzorkovanja algoritam nije primjenjiv na osobnom računalu, a pogotovo ne iz MATLAB okruženja.

No, ne treba biti nimalo pesimistačan u vezi toga. Naime, memorijski zahtjevi manje su vezani uz specifični algoritam, a više uz samu prirodu grupe $SE(3)$. Kad bi se konvolucija implementirala izravno, ponovno bi trebalo vrijednosti uzorkovane funkcije pohraniti u memoriju. No, izvršavanje takvog izračuna ne bi završilo u nekom prihvatljivom vremenu. Izračun bi nadživio čovjeka koji ga je pokrenuo što baš nije zgodno u konkretnim primjenama. Suvremene tehnologije omogućuju uspješno upravljanje velikim količinama podataka pa uz efikasan numerički algoritam niti vrijeme komunikacije s raspodijeljenim spremištima podataka ne postaje tako neprihvatljivo.

7.2. Korištene biblioteke i alati

U nastavku se opis ugrađenih funkcija i alata iz MATLAB okruženja koji su korišteni prilikom implementacije. Također, ukratko je komentiran način korištenja

biblioteke *SOFT*, prijenos parametara i pozivi izvršnih programa.

7.2.1. Brza Fourierova transformacija na \mathbb{R}^n

Za brzu diskretnu Fourierovu transformaciju funkcija na \mathbb{R}^n koriste se FFT funkcije ugrađene u MATLAB okruženje koje se temelje na *FFTW* biblioteci (Frigo, 1998). Radi se o stabilnoj i optimiranoj implementaciji čija je primjena zasigurno mnogo bolji izbor od pisanja vlastitih funkcija s istom svrhom. Kada se diskretna Fourierova transformacija računa u N točaka, pri čemu se $N = N_1 N_2$ može napisati kao umnožak dva prirodna broja veća od jedan, *FFTW* biblioteka problem dekomponira korištenjem Cooley-Tukeyjevog algoritma (Cooley, 1965) prema kojem se prvo računa N_1 transformacija duljine N_2 , a zatim N_2 transformacija u N_1 točaka. Dok god je moguće, takva se dekompozicija primjenjuje rekurzivno na potprobleme. Kada je N prost broj, *FFTW* biblioteka dekomponira transformaciju duljine N u tri transformacije duljine $(N - 1)$ korištenjem Raderovog algoritma (Rader, 1968), a potom koristi Cooley-Tukey dekompoziciju na svakom potproblemu. Brzina izvedbe algoritma ovisi o broju točaka u kojim se ona računa. Složenost je najmanja kad je taj broj potencija broja dva.

7.2.2. Interpolacija

Za prijelaz na sferni koordinatni sustav, potrebno je interpolirati vrijednosti s trodimenzionalne Kartezijeve rešetke na sfernu. U tu se svrhu koristi ugrađena funkcija `interp3` kojoj se kao argumenti šalju uzorci funkcije, rešetka na kojoj je zadana funkcija i koordinate za kojima je potrebno izračunati interpolirane vrijednosti.

Kao metoda interpolacije odabire se *spline*.

7.2.3. Biblioteka *SOFT*

Za izračun brze Fourierove transformacije funkcije na grupi $SO(3)$ koristi se *SOFT* biblioteka koju su razvili Peter J. Kostelec i Daniel N. Rockmore. Ona je distribuirana pod uvjetima GNU licence, a prilikom izrade ovoga rada korištena je inačica 2.0 objavljena u srpnju 2007. godine. Iz iste se biblioteke koriste i funkcije za izračun Wignerovih d -matrica potrebnih u drugim koracima algoritma.

Biblioteku čini skupina funkcija za izračun Fourierove transformacije funkcija na grupi $SO(3)$. Također su u biblioteku uključene dodatne funkcije za ispitavanje is-

pravnosti i učinkovitosti algoritma te izračun koralacije. Brze izvedbe numeričkih algoritama temelje se na ranije opisanom konceptu separacije varijabli.

Datoteke su organizirane u prikladnu strukturu direktorija posebno o tome radi li se o funkcijama koje koriste *FFTW* biblioteku za brzu klasičnu Fourierovu transformaciju ili rade bez te biblioteke. Tako se u direktorijima `/examples0` i `/examples1`, između ostalog, nalaze cjeloviti programi koji čitaju ulaznu datoteku s funkcijom definiranom na $SO(3)$ te računaju izravnu, odnosno inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju. Odgovarajuće datoteke s izvornim kodom nose nazive `test_soft_for.c` i `test_soft_inv.c`. Cijela je biblioteka prevedena, a iz Matlaba se pozivaju potrebne izvršne datoteke. Razmjena podataka vrši se pisanjem i čitanjem iz datoteka. Takav pristup značajno usporava izvršavanje algoritma pa se za budući razvoj preporuča korištenje MEX funkcija umjesto testnih programa.

Izravnu *DSOFT* transformaciju za pojasno ograničenu funkciju širine pojasa B definiranu u ulaznoj datoteci obavlja program čiji se izvorni kod nalazi u `test_soft_for.c`. Kako je opisano ranije, funkcija f mora biti uzorkovana na $2B \times 2B \times 2B$ rešetki $\{(\alpha_{j_1}, \beta_k, \gamma_{j_2}) | 0 \leq k, j_1, j_2 \leq 2B - 1\}$ pri čemu je

$$\alpha_{j_1} = \frac{2\pi j_1}{2B}, \quad \beta_k = \frac{\pi(2k + 1)}{4B}, \quad \gamma_{j_2} = \frac{2\pi j_2}{2B}. \quad (7.4)$$

Redoslijed uzoraka u ulaznoj datoteci takav je da se najbrže mijenja indeks j_2 , a k najsporije. Zamišljamo uzorkovanje takvim da se za svaku geografsku širinu funkcija uzorkuje po svim geografskim dužinama. Dakle, uzorci se očekuju u

sljedećem obliku

$$\begin{aligned}
& f(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \\
& f(\alpha_0, \beta_0, \gamma_1) \\
& \quad \vdots \\
& f(\alpha_0, \beta_0, \gamma_{2B-1}) \\
& f(\alpha_1, \beta_0, \gamma_0) \\
& f(\alpha_1, \beta_0, \gamma_1) \\
& \quad \vdots \\
& f(\alpha_{2B-1}, \beta_0, \gamma_{2B-1}) \\
& f(\alpha_0, \beta_1, \gamma_0) \\
& f(\alpha_0, \beta_1, \gamma_1) \\
& \quad \vdots \\
& f(\alpha_{2B-1}, \beta_{2B-1}, \gamma_{2B-1}).
\end{aligned}$$

S obzirom da funkcija može biti kompleksna, za svaki uzorak potrebno je znati vrijednosti njegovog realnog i imaginarnog dijela. Očekuje se da su one u ulaznoj datoteci zadane u intervalnom redosljedu. Primjerice, ako četiri uzoraka imaju vrijednosti: $1 + 2i$, $3 + 4i$, $5 + 6i$ i $7 + 8i$, ulazna će datoteka sadržavati niz brojeva $1, 2, 3, 4$, svaki u svome retku.

Postoje dva moguća redosljeda Fourierovih koeficijenata. Prvi se naziva algoritamskim i opisan je u nastavku. Zamislimo matricu A čiji su reci indeksirani indeksom M na sljedeći način:

$$M = 0, 1, 2, \dots, B - 1, -(B - 1), -(B - 2), \dots, -1. \quad (7.5)$$

Primjerice, ako je $B = 4$, tada indeksu $M = -3$ odgovara peti redak matrice. Na isti se način stupci indeksiraju indeksom M'

$$M' = 0, 1, 2, \dots, B - 1, -(B - 1), -(B - 2), \dots, -1. \quad (7.6)$$

Sada zamislimo da matrični element $A(i, j)$ nije jedinstvena vrijednost nego niz Fourierovih koeficijenata

$$\left\{ \hat{f}_{ij}^l = \langle f, \tilde{D}_{ij}^l \rangle \mid \max(|i|, |j|) \leq l \leq B - 1 \right\}. \quad (7.7)$$

Strukturu raspíšemo tako da za svaki redak matrice A prolazimo sve stupce. Dakle, radi se o redosljedu

$$\begin{aligned} &M = 0, M' = 0; M = 0, M' = 1; \dots; M = 0, M' = -(B - 1); \dots; \\ &M = 0, M' = -1; M = 1, M' = 0; M = 1, M' = 1; \dots; \\ &M = 1, M' = -(B - 1); \dots; M = 1, M' = -1; \dots \end{aligned}$$

Jasno je da svaki par indeksa označava skup koeficijenata Fourierove transformacije. Za pretvorbu indeksa M , M' i l u indeks pozicije odgovarajućeg koeficijenta u danom redosljedu postoje izgrađene formule (Kostelec, 2007).

Drugi se redosljed, definiran sljedećim pseudokodm, naziva prirodnim redosljedom.

```
for l = 0 : bw - 1
    for m1 = -1 : 1
        for m2 = -1 : 1
            koeficijenti stupnja l, redova m1, m2
```

Inverzna *DSOFT* transformacija, čiji se izvorni kod nalazi u datoteci `test_soft_inv.c` ulazne koeficijente uvijek očekuje u algoritamskom redosljedu.

Za izračun Wignerovih d -funkcija, iz kojih se dobivaju poopćene pridružene Legendreove funkcije, koristi se program čiji je izvorni kod `test.Wigner_angle.c` u direktoriju `/examples`. S obzirom da C kod koristi L^2 -normalizirane verzije d -funkcija, izračun je realiziran normaliziranim rekurzivnim izrazima

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{MM'}^{J+1}(\beta) &= \sqrt{\frac{2J+3}{2J+1}} \frac{(J+1)(2J+1)}{\sqrt{[(J+1)^2 - M^2][(J+1)^2 - M'^2]}} \left(\cos \beta - \frac{MM'}{J(J+1)} \right) \tilde{d}_{MM'}^J(\beta) \\ &\quad - \sqrt{\frac{2J+3}{2J-1}} \frac{\sqrt{[J^2 - M^2][J^2 - M'^2]}}{\sqrt{[(J+1)^2 - M^2][(J+1)^2 - M'^2]}} \frac{J+1}{J} \tilde{d}_{MM'}^{J-1}(\beta). \end{aligned}$$

U (Kostelec, 2007) mogu se pronaći izrazi za granične vrijednosti rekurzivnih relacija te drugi detalji vezani uz biblioteku *SOFT*.

7.3. Rezultati

Ispitivanje trajanja pojedinih koraka algoritma obavljeno je za različite parametre uzorkovanja i transformacije. Svrha testa identificirati je vremenski najzahtjevnije dijelove i ispitati kako parametri utječu na vrijeme izvršavanja.

Izračun konvolucije sastoji se od izravnih $SE(3)$ Fourierovih transformacija obje funkcije, matričnog množenja transformata i inverzne $SE(3)$ Fourierove transformacije umnoška. Pritom se posebno mjeri vrijeme za sve korake izravne i inverzne transformacije. Koraci izravne transformacije su sljedeći:

1. brze Fourierove transformacije na trodimenzionalnoj Kartezijevoj rešetki,
2. interpolacija,
3. brze Fourierove transformacije na $SO(3)$,
4. izračun poopćenih pridruženih Legendreovih funkcija druge vrste,
5. integracije na S^2 .

Kod inverzne transformacije vrijeme se posebno mjeri za:

1. izračun poopćenih pridruženih Legendreovih funkcija druge vrste,
2. sumacije uz fiksne vrijednosti l' , m' , n i s ,
3. interpolacija,
4. brze Fourierove transformacije na trodimenzionalnoj Kartezijevoj rešetki,
5. brze inverzne Fourierove transformacije na $SO(3)$.

U ispitivanju su korištene funkcije koje za svaki element domene vraćaju slučajni realni broj. Rezultati ispitivanja prikazani su tablicama. Retci predstavljaju osnovne dijelove algoritma za brzu numeričku konvoluciju funkcija na $SE(3)$, a stupci odgovarajuće korake. Nazivi redaka su opisni i nemaju matematičku egzaktnost. U naslovu svake tablice nalaze se vrijednosti parametara uz koje je ispitivanje provedeno.

Tablica 7.1.: Trajanje izvođenja za parametre: $u_r = u_p = 1$, $a = 4$, $B = 2$

	1. korak	2. korak	3. korak	4. korak	5. korak
$\hat{f}_1 = SEFT(f_1)$	0.0075s	0.6924s	0.3645s	0.1056s	0.1493s
$\hat{f}_2 = SEFT(f_2)$	0.0075s	0.7004s	0.3647s	0.1087s	0.1448s
$\hat{u} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$	0.0156s				
$u = ISEFT(\hat{u})$	0.1045s	0.0904s	0.2599s	0.0040s	4.4096s

Tablica 7.2.: Trajanje izvođenja za parametre: $u_r = u_p = 1$, $a = 8$, $B = 2$

	1. korak	2. korak	3. korak	4. korak	5. korak
$\hat{f}_1 = SEFT(f_1)$	0.0218s	1.4317s	0.6283s	0.1047s	0.2506s
$\hat{f}_2 = SEFT(f_2)$	0.0220s	1.4277s	0.6287s	0.1110s	0.2496s
$\hat{u} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$	0.0252s				
$u = ISEFT(\hat{u})$	0.1053s	0.1523s	0.7482s	0.0110s	25.1429s

Tablica 7.3.: Trajanje izvođenja za parametre: $u_r = u_p = 1$, $a = 16$, $B = 2$

	1. korak	2. korak	3. korak	4. korak	5. korak
$\hat{f}_1 = SEFT(f_1)$	0.1234s	8.1102s	1.2384s	0.1030s	0.5004s
$\hat{f}_2 = SEFT(f_2)$	0.1237s	8.1061s	1.2385s	0.1130s	0.5020s
$\hat{u} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$	0.0478s				
$u = ISEFT(\hat{u})$	0.1010s	0.3022s	5.2272s	0.0610s	167.2568s

Tablica 7.4.: Trajanje izvođenja za parametre: $u_r = u_p = 1$, $a = 4$, $B = 4$

	1. korak	2. korak	3. korak	4. korak	5. korak
$\hat{f}_1 = SEFT(f_1)$	0.0703s	7.6775s	2.7279s	0.7083s	14.6598s
$\hat{f}_2 = SEFT(f_2)$	0.0695s	7.3768s	2.8464s	0.7227s	14.7667s
$\hat{u} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$	1.6794s				
$u = ISEFT(\hat{u})$	0.7060s	5.5790s	16.6389s	0.1179s	21.2032s

Vremenski najzahtjevniji dio ove implementacije korak je računanja inverznih $SO(3)$ Fourierovih transformacija u sklopu izračuna inverzne $SE(3)$ transformacije. Razlog tome su mnogobrojni pozivi izvršnih programa i prijenos podataka zapisivanjem u datoteke te nužnost preslagivanja koeficijenata prije pokretanja programa biblioteke *SOFT*. Naime, kako je opisano u prethodnom potpoglavlju, koeficijenti moraju biti u algoritamskom redoslijedu. S obzirom da takav redoslijed nije pogodan za sve ostale korake algoritma, na ovom se mjestu podaci u memoriji moraju posložiti. Kako se radi o velikim količinama podataka, to je vremenski vrlo zahtjevno.

7.4. Moguća poboljšanja

U ovom su potpoglavlju predložene promjene koje bi mogle poboljšati svojstva osnovne implementacije algoritma. Niti jedan od prijedloga ne ulazi u koncept algoritma, nego specifičnosti implementacije. Tako je, primjerice, u svrhu

učinkovitijeg poziva izvršnih programa moguće razviti i koristiti MEX datoteke. Također, imamo li na raspolaganju računalo s višeprocorskom arhitekturom ili višejezgrenim procesorom, izvorni se kod jednostavno može prilagoditi paralelnoj arhitekturi.

7.4.1. Korištenje MEX funkcija

U svrhu provedbe izravnih i inverznih Fourierovih transformacija na grupi $SO(3)$ te za računanje Wignerovih d -funkcija koristi se biblioteka *SOFT* napisana u programskom jeziku C. Kako je implementacija algoritma za brzu konvoluciju na $SE(3)$ grupi razvijana u MATLAB okruženju, bilo je potrebno učinkovito ostvariti pozive funkcija iz biblioteke *SOFT*. Problem je riješen tako da se pomoću sistemske naredbe pozivaju izvršni programi, odnosno prevedeni dijelovi biblioteke. Za prijenos podataka koriste se datoteke i argumenti u pozivu programa iz naredbenog retka. Dakako, rješenje nije učinkovito jer pisanje i čitanje iz datoteka zahtjeva mnogo vremena. Također, za oblikovanje odgovarajuće strukture podataka i rukovanje datotekama potrebna je dodatna logika koja troši memorijske i vremenske resurse. Zbog toga bi mnogo bolji pristup bio koristiti MEX datoteke. MEX je skraćeni naziv za MATLAB izvršne datoteke (eng. *MATLAB executive*) koje omogućuju dinamično povezivanje funkcija pisanih u programskim jezicima C, C++ i Fortran. Kada se izvorni kod prevede, može biti pozivan iz MATLAB okruženja jednako kao što se pozivaju ugrađene funkcije. Mogućnost takvog poziva i prijenos podataka osiguravaju funkcije vanjskog sučelja (eng. *external interface functions*). Priprema MEX datoteka obuhvaća modifikaciju izvornog koda na način da se dohvat i povrat parametara te upravljanje memorijom posebno prilagodi. Postupak uređivanja i prevođenja izvornog koda za veće datoteke može biti složen.

Umjesto pripreme MEX datoteka, moguće je cijelu biblioteku prepisati u MATLAB. Zato treba pažljivo razmisliti što je bolje učiniti u svrhu poboljšanja trenutne implementacije. Općenito, većina programiranja trebala bi biti izvedena u MATLAB-u. Korištenje MEX datoteka preporuča se u samo nekim situacijama. MATLAB je pri izvršavanju programa znatno sporiji od pažljivo napisanih programa u nižim programskim jezicima i zato je pogodno vremenski kritične dijelove implementirati, primjerice, u C-u. Druga situacija, kada je korištenje MEX datoteka preporučljivo, upravo odgovara našoj situaciji: postoji gotova razmjerno velika biblioteka čije prepisivanje u MATLAB može biti naporno, zahtjeva osobitu pažnju, pripremu i testiranje, a konačni je rezultat manje efikasan. Prema tome, od-

abir prilagodbe ključnih C programa pisanjem odgovarajućih MEX datoteka prihvatljivo je rješenje.

7.4.2. Paralelizacija algoritma

Paralelizacija algoritma općenito započinje uklanjanjem podatkovnih zavisnosti u sekvencijalnoj implementaciji. To se može učiniti za mnoge numerički intenzivne dijelove pojedinih koraka algoritma poput sumacija, jednodimenzionalnih i višedimenzionalnih brzih Fourierovih transformacija, matričnog množenja te množenja matrice vektorom. Glavni se koraci ne mogu izvršavati istovremeno jer su međusobno zavisni.

Detaljan opis postupaka paralelizacije pojedinih tipičnih situacija izlazi izvan okvira ovoga rada, ali se može pronaći u različitoj literaturi (Grama, 2003). Štoviše, u svrhu poboljšanja trenutnog sustava nije ih niti potrebno vlastoručno implementirati jer su dostupni u obliku biblioteka, alata ili dodataka za MATLAB kao što su *Parallel Computing Toolbox* i *Free parallel computing interactive kit*. Korištenjem gotovih rješenja, uz eventualne manje prilagodbe izvornog koda, može se postići uspješna paralelizacija. Razlog tome je što se obične sekvencijalne sumacije, pristup podijeli pa vladaj (čija je ideja razložiti veliki problem na potprobleme kao kod jednodimenzionalne brze Fourierove transformacije) i metoda separacije varijabli (primijenjene u Fourierovim transformacijama na \mathbb{R}^3 i $SO(3)$) prirodno paraleliziraju.

7.4.3. Ostala poboljšanja implementacije

Implementacija se može poboljšati reorganizacijom podataka koja bi rezultirala manjim zauzećem memorije i većom brzinom izvođenja kada bi se na više mjesta uspjele iskoristiti matrične operacije ugrađene u MATLAB umjesto petlji. To je najslabije od svih dosad predloženih poboljšanja jer zahtjeva temeljito poznavanje svih koraka algoritma i vrlo pažljivo unošenje promjena. Valja naglasiti da bi takva implementacija, iako s nešto poboljšanim svojstvima u smislu korištenja vremenskih i memorijskih resursa, imala manje razumljiv izvorni kod.

Nadalje, u teoretskom opisu algoritma prikazana je prednost korištenja Driscoll-Healyjeve tehnike integracije na S^2 . Implementacija tog algoritma svakako je jedno moguće poboljšanje postojećeg rješenja.

Konačno, kako veliko memorijsko zauzeće predstavlja problem u primjenama ove implementacije, posljednji se prijedlog poboljšanja odnosi na korištenje tvrdog

diska za pohranu uzoraka funkcije, međurezultata i koeficijenata Fourierove transformacije. Podaci bi se učitali u memoriju onako kako se za tim pojavi potreba te bi se dohvaćali samo potrebni dijelovi polja. Zbog znatno manje brzine čitanja i pisanja s tvrdog diska, izračun bi se soprije izvršavao, ali bi mogao raditi s većim količinama podataka.

Implementacija, razvijena u okviru ovoga rada, mogla bi se uz predložena poboljšanja koristiti u svrhu rješavanja stvarnih problema koji bez korištenja teorije nekomutativne harmonijske analize praktički nisu rješivi.

8. Zaključak

Posebna euklidska grupa gibanja pojavljuje se u mnogim primjenama. Poopćenjem klasične harmonijske analize na koncept matematičke grupe omogućilo je formuliranje postojećih, numerički vrlo složenih problema, na elegantniji način. Konvolucijski integral sada se može učinkovitije računati u transformacijskoj domeni. Ta je činjenica motivirala razvoj brzih algoritama za Fourierovu transformaciju funkcija na $SE(3)$ grupi.

Ideja brze Fourierove transformacije zasniva se na korištenju nereducibilnih unitarnih reprezentacija u obliku operatora. Fourierova transformacija na grupi gibanja kao integral na grupi produkta prostora $SE(3) \times S^2$. Zapis elemenata Fourierove transformacijske matrice u integralnom obliku, kao i primjena interpolacije Kartezijevog na sferni koordinatni sustav, omogućava primjenu otprije razvijenih brzih algoritama za Fourierovu transformaciju na \mathbb{R}^3 , S^2 i $SO(3)$. Na ovaj se način postižu značajna ubrzanja izračuna konvolucije funkcija na grupi $SE(3)$.

Primjene konvolucije funkcija na grupi $SE(3)$ javljaju se u robotici i statističkoj mehanici makromolekula. Neki od problema vezani uz ta područja dosad nisu bili praktično rješivi zbog velike složenosti izravnog pristupa, ali korištenjem brzog algoritma za konvoluciju, oni postaju značajno jednostavniji. No, kako se pokazalo u praktičnom radu, zbog visoke dimenzionalnosti domena, na kojima se definiraju funkcije i transformacijski koeficijenti, za zadovoljavajuće diskretne aproksimacije potrebno je utrošiti mnogo memorijskog prostora. Pozitivno svojstvo implementacije osobito bitno za daljnja poboljšanja laka je mogućnost paralelizacije.

Algoritam za brzu konvoluciju na $SE(3)$ grupi izvrstan je primjer kako se matematički modeli mogu uspješno primijeniti u rješavanju inženjerskih problema. Povezivanje matematike i inženjerstva sigurno će ubrzati razvoj oba područja te unaprijediti svijet kojeg stvaramo i u kojem živimo!

Literatura

1. Chirikjian, G. S.; Kyatkin A. B. Engineering Applications of Noncommutative Harmonic Analysis. CRC Press, 2001.
2. Kyatkin A. B.; Chirikjian G. S. Algorithms for Fast Convolutions on Motion Groups, Applied and Computational Harmonic Analysis 9, (2000.), str. 220-241
3. Wigner, E. P. Group Theory. Prošireno izdanje. London: Academic Press Inc., 1959.
4. Kostelec, P. J.; Rockmore D. N. FFTs on the Rotation Group, Birkhäuser Boston, 2008.
5. Kostelec, P. J.; Rockmore D. N. SOFT: SO(3) Fourier Transforms, 2007.
6. Kostelec, P. J.; Rockmore D. N. S2Kit: A Lite Version of SpharmonicKit, 2004.
7. Žubrinić D. Diskretna matematika. Drugo izdanje. Zagreb: Element, 2002.
8. Elezović N. Fourierov red i integral; Laplaceova transformacija. Nulto izdanje. Zagreb: Element, 2006.
9. Elezović N. Linearna algebra. Treće izdanje. Zagreb: Element, 2003.
10. Stein M. E.; Shakarchi R. Fourier Analysis: An Introduction. New Jersey: Princeton University Press, 2003.
11. Frigo, M. and S. G. Johnson. FFTW: An Adaptive Software Architecture for the FFT. Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 3, (1998.), str. 1381-1384.
12. Cooley, J. W. and J. W. Tukey. An Algorithm for the Machine Computation of the Complex Fourier Series. Mathematics of Computation, Vol. 19, travanj 1965., str. 297-301.

13. Coleman A. J. Induced Representations with Applications to S_n and $GL(n)$. Queen's University, Kingston, Ontario, 1966.
14. Rader, C. M., "Discrete Fourier Transforms when the Number of Data Samples Is Prime," Proceedings of the IEEE, Vol. 56, lipanj 1968, str. 1107-1108.
15. Vilenkin N. J.; Klimyk A. U. Representation of Lie group and special functions, vol. 1-3, Kluwer, 1991.
16. Drake J.B.; Worley P.; D'Azevedo E. Spherical Harmonic Transform Algorithms. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 35, No. 3, članak 23, listopad 2008.
17. Virchenko N.; Fedotova I. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications. World Scientific Publishing Company, 2001.
18. Kuipers, L.; Meulenbeld, B. On a generalization of Legendre's associated differential equation. Proc. Knkl. Nederl. Akad. Weten. A. 60, 4. (1957). str. 436-450.
19. Selig, J. M.; Geometric fundamentals of robotics. Springer Science, 2005.
20. Stein, M. E.; Shakarchi R. Fourier Analysis: An Introduction. New Jersey: Princeton University Press, 2003.
21. Grama A., Gupta A., Karypis G., Kumar V.; Introduction to Parallel Computing. Addison Wesley, 2003.

Naslov, sažetak i ključne riječi

Naslov

Implementacija algoritma za brzu konvoluciju na $SE(3)$ grupi

Sažetak

Opisan je i implementiran algoritam za brzu numeričku konvoluciju na posebno euklidskoj grupi u trodimenzionalnom prostoru. Matematička teorija, potrebna za razvoj tehnike brze Fourierove transformacije na grupi gibanja, uključuje teoriju grupa i reprezentacije s posebnim naglaskom na nereducibilne unitarne reprezentacije grupe $SE(3)$. Zapis elemenata Fourierove transformacijske matrice u integralnom obliku omogućava rastav problema na potprobleme za koje već postoje efikasni numerički postupci i na taj se način postižu značajna ubrzanja. Za N točaka uzorkovanja, složenost izračuna, koja u slučaju izravne implementacije konvolucijskog integrala iznosi $\mathcal{O}(N^2)$, smanjena je na $\mathcal{O}(N^{7/6}(\log N)^2) + \mathcal{O}(N^{(\gamma+1)/3})$ gdje parametar γ ovisi o učinkovitosti matričnog množenja, $2 \leq \gamma \leq 3$. Opisane su potencijalne primjene algoritma u robotici i statističkoj mehanici makromolekula. Praktični rezultati obuhvaćaju niz programskih skripti za okruženje MATLAB.

Ključne riječi

grupa gibanja, nereducibilne unitarne reprezentacije grupe $SE(3)$, brza Fourierova transformacija, numerička konvolucija na $SE(3)$, primjene Fourierove transformacije na grupi gibanja

Title, abstract and keywords

Title

Implementation of a fast $SE(3)$ convolution algorithm

Abstract

This thesis provides a description and an implementation of an algorithm for a fast numerical convolution defined on the three-dimensional Euclidean space. Theoretical base, necessary for development of fast Fourier transforms on motion group, includes group and representation theory with special emphasis on irreducible unitary representations of the $SE(3)$ group. The integral form of the Fourier transform matrix elements allows us to apply previously developed methods for fast numerical calculations and to considerably increase efficiency of the convolution algorithm. For N sample points, the complexity of computations is reduced from $\mathcal{O}(N^2)$ to $\mathcal{O}(N^{7/6}(\log N)^2) + \mathcal{O}(N^{(\gamma+1)/3})$ where parameter γ depends on the efficiency of matrix multiplication, $2 \leq \gamma \leq 3$. Possible applications in robotics and statistical mechanics of macromolecules are explored. The practical results include a set of MATLAB scripts.

Keywords

motion group, irreducible unitary representations of $SE(3)$, fast Fourier transform, numerical $SE(3)$ convolution, applications of the motion group Fourier transform

Dodatak - popis izrađenih funkcija

Praktično rješenje obuhvaća sljedeće funkcije:

- `setParam` – stvara strukturu parametara iz ulaznih vrijednosti
- `seft` – računa brzu izravnu $SE(3)$ Fourierovu transformaciju; prihvaća funkciju na $SE(3)$ i strukturu parametara
- `iseft` – računa brzu inverznu $SE(3)$ Fourierovu transformaciju; prihvaća spektar funkcije na $SE(3)$ i strukturu parametara
- `convSe` – računa brzu numeričku konvoluciju funkcija na $SE(3)$ koristeći `seft` i `iseft`
- `randSe` – prema ulaznim parametrima stvara slučajnu funkciju na $SE(3)$
- `soft` – računa brzu izravnu $SO(3)$ Fourierovu transformaciju koristeći pozive izvršnih progama biblioteke *SOFT*
- `isoft` – računa brzu inverznu $SO(3)$ Fourierovu transformaciju koristeći pozive izvršnih progama biblioteke *SOFT*
- `loadQ` – računa vrijednosti poopćene pridružene Legendreove funkcije druge vrste koristeći pozive izvršnih progama biblioteke *SOFT*

Detaljne informacije o implementaciji, strukturi i korištenju pojedinih funkcija nalaze se u izvornom kodu.