Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marcel Maretić

ALGORITAMSKA EKVIVALENCIJA MULTIPLARNIH PRIRODNIH DEDUKCIJA I BETHOVIH TABLÓA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2013.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Marcel Maretić

ALGORITHMIC EQUIVALENCE OF MULTIPLE CONCLUSION NATURAL DEDUCTION SYSTEMS AND BETH'S SEMANTIC TABLEAUX METHOD

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2013.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

MARCEL MARETIĆ

ALGORITAMSKA EKVIVALENCIJA MULTIPLARNIH PRIRODNIH DEDUKCIJA I BETHOVIH TABLÓA

DOKTORSKI RAD

Mentor:

Zvonimir Šikić

Zagreb, 2013.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Marcel Maretić

ALGORITHMIC EQUIVALENCE OF MULTIPLE CONCLUSION NATURAL DEDUCTION SYSTEMS AND BETH'S SEMANTIC TABLEAUX METHOD

DOCTORAL THESIS

Supervisor:

Zvonimir Šikić

Zagreb, 2013.

Mili, Bruni i Branki

Sažetak

Metoda semantičkih stabala je potpuni postupak za logiku prvog reda. Okretanje semantičkih stabala naopako daje Gentzenov sustav multiplarnih sekventi bez reza. Ovaj dobro poznati rezultat pokazuje kako je Gentzenov sustav multiplarnih sekventi ustvari notacijska varijacija Bethove metode semantičkih stabala.

Mi ćemo pokazati kako se sustav multiplarnih prirodnih dedukcija (prirodnih dedukcija s multiplarnom relacijom posljedice) može povezati s Bethovim semantičkim stablima. Pokazati ćemo da i za multiplarni sustav prirodnih dedukcija vrijedi algoritamska ekvivalentnost s metodom semantičkih stabala.

Metoda semantičkih stabala ili tabloa razvijala se potpuno nezavisno od Gentzenovih sustava prirodne dedukcije. Bethova semantička stabla proizlaze iz semantičkog pristupa logici i orijentirana su na klasičnu logiku i njezinu semantiku.

Prirodne dedukcije, s druge strane, proizlaze iz sintaktičkog pristupa logici - iz izgradnje dokaza i pravila zaključivanja. U tom su smislu prirodne dedukcije prikladne za minimalnu i intuicionističku logiku iz kojih se klasična logika dobije tek dodatkom pravila "tertium non datur" (TND) ili pravila "reductio ad absurdum" (RAA).

Mi ćemo pokazati kako se sustav multiplarnih prirodnih dedukcija (prirodnih dedukcija s multiplarnom relacijom posljedice) može povezati s Bethovim semantičkim stablima. Pokazati ćemo da i za multiplarni sustav prirodnih dedukcija vrijedi algoritamska ekvivalentnost s metodom semantičkih stabala. Na ovaj način pokazali bi semantički pristup sustavima multiplarnih prirodnih dedukcija.

Posljedica ovoga je potpunost našeg sustava multiplarnih prirodnih dedukcija (za razliku od Kneale sustava). Za razliku od Shoesmith i Smileyevog pristupa naš sustav multiplarnih prirodnih dedukcija je dobro motiviran i jednostavan.

Ključne riječi

Klasična logika, teorija dokaza, prirodne dedukcije, multiplarne prirodne dedukcije

Abstract

Natural deduction systems are, unlike Gentzen's sequent calculus, not related to semantic trees. Natural deductions arise from syntactic approach to logic – from proof search and inference rules. In that sense they are adequate for minimal and intuitionistic logic. Addition of *tertium non datur* (TND) or *reductio ad absurdum* (RAA) yields deduction calculus for classical logic.

Kneale in [KK56] proposes multiple conclusion deductions as an elegant and symmetrical version of deduction calculus that provides a good fit for classical logic. Kneale's inference rules are local – hypotheses are never discharged. Proofs, which Kneale calls *developments*, are formula trees branching downward *and* upward.

Kneale's calculus of developments is not complete. Shoesmith and Smiley in [SS78] propose adjustments for completion of the calculus. Our approach to multiple conclusion calculus is simple and better motivated. Unlike Shoesmith and Smiley, who in [SS78] motivate multiple conlcusion deductions syntactically, we relate multiple conclusion deductions to semantic trees. We present an elegant and analytic proof search for multiple conclusion deductions.

Essential steps of the algorithm are:

(1) analysis: construction of analytic deductions;

(2) synthesis: matching of analytic deductions that completes the proof search.

Thus, multiple conclusion deductions are analytic in the sense that they yield a simple analytic proof search (as in [Smu95]).

Steps of the proof search algorithm can be motivated semantically. Analysis (step 1) corresponds to semantic analysis and branching of a clausal semantic tree, whereas synthesys (step 2) corresponds to branch closing on the clausal semantic tree. Therefore, proof search for multiple conclusion deductions is algorithmically equivalent to Beth's semantic trees.

Keywords

classical logic, proof theory, natural deductions, multiple conclusion logic

Predgovor

Glavni rezultati ovog rada navedeni su u numeriranim lemama, teoremima i korolarima. Osnovni udžbenički rezultati navedeni su u numeriranim propozicijama. Važniji rezultati teorije navodimo s atribucijom autora i ne dokazuju se.

Udžbenički dio materije iznosi se u uvodnim dijelovima sva tri poglavlja: u točkama 1.1 – 1.5 u prvom, točke 2.1, 2.2 i 2.4 u drugom, te točke 3.1 – 3.3 u trećeg poglavlju. Prezentacija udžbeničkog dijela oslanja se na [Šik14] i [Vuk11], te na monografije [Pra06], [Smu95] i [Tak13].

Račun multiplarnih dedukcija je dorađen i prezentiran na novi način. Razrađena je ideja Knealeovih razvoja, te je za razliku od multiplarnih računa Shoesmith i Smileya ovaj račun jednostavan i prikladan za metodu analitičkih dedukcija.

Originalan doprinos ove disertacije su metoda analitičkih dedukcija te rezultati vezani za nju – primarno je to algoritamska ekvivalencija traženja dokaza u računu multiplarnih dedukcija s metodom tablóa.

Sadržaj rada u više je navrata izložen na Seminaru za matematičku logiku. Zahvaljujem kolegama koji su mi svojim primjedbama pomogli jasnije formulirati sadržaj ovog rada. Posebno želim zahvaliti mentoru Zvonimiru Šikiću na trudu, strpljenju i dobroj volji i profesoru Mladenu Vukoviću na korisnim primjedbama.

Pregled rada

Prvo poglavlje bavi se strukturalnom teorijom dokaza računa multiplarnih dedukcija klasične propozicijske logike. Bavi se svojstvima računa multiplarnih dedukcija propozicijske logike. U prvom dijelu poglavlja prezentiraju se Gentzenov račun prirodnih dedukcija NK i Gentzenov sekventni račun propozicijske logike LK. Navode se teoreme o normalnoj formi za NK i LK. Pokazati ćemo Knealeova multiplarna pravila zaključivanja i motivaciju za njihovo uvođenje. Nakon toga ćemo za ta pravila definirati adekvatni račun (multiplarne prirodne dedukcije) i za njih pokazati osnovne rezultate: teorem o normalnoj formi, potformulnost. Na kraju prvog poglavlja opisan je algoritam za traženje analitičkih dedukcija i skicirani su obrisi metode traženja dokaza u računu multiplarnih dedukcija.

Drugo poglavlje bavi se semantičkim pristupom računu multiplarnih dedukcija. Računima prirodnih dedukcija u pravilu se pristupa sintaktički. Pokazujemo da se korak algoritma traženja analitičkih dedukcija može opisati kao korak semantičke analize. Sinteza analitičkih dedukcija u traženu dedukciju $\Gamma \vdash \Delta$ povezuje se sa zatvaranjem semantičkog stabla za zahtjeve $\Gamma\top$, $\Delta\bot$. Na kraju se poglavlja pokazuje se ekvivalencija prezentirane metode analitičkih (multiplarnih) dedukcija i Bethovih semantičkih stabala za klasičnu propozicijsku logiku, odakle konstruktivno slijedi potpunost računa multiplarnih dedukcija u klasičnoj propozicijskoj logici.

Rezultati prva dva poglavlja u trećem poglavlju prenose se na klasičnu logiku prvog reda. Račun multiplarnih dedukcija dopunjuje se pravilima zaključivanja za kvantifikatore s kojima račun zadržava svojstvo lokalnosti, zbog čega su primjerena za metodu analitičkih dedukcija. I u klasičnoj logici prvog reda vrijedi ekvivalencija metode analitičkih dedukcija i metode semantičkih stabala. Konačno slijedi da je račun multiplarnih dedukcija potpun, analitički, te da je metoda analitičkih dedukcija pozitivni postupak odluke klasične logike prvog reda.

Sadržaj

Popis slika

Popis tablica

1

Dedukcije

U ovom poglavlju definiramo račun multiplarnih prirodnih dedukcija klasične propozicijske logike i proučavamo njegova svojstva. Multiplarne dedukcije motivirat ćemo i definirati kao dedukcijski račun koji je za klasičnu logiku jednostavniji od prirodnih dedukcija Gentzenovog tipa. Pokazat ćemo da u računu multiplarnih dedukcija vrijedi teorem o normalnoj formi. Na kraju poglavlja skicirat ćemo potragu za dokazima u računu multiplarnih prirodnih dedukcija o kojoj će više riječi biti u sljedećem poglavlju.

1.1 Uvod

U uvodnom dijelu poglavlja definiramo alfabet i jezik propozicijske logike.

Alfabet

1. Skup veznika

   $\wedge$ "i", konjunkcija

   $\vee$ "ili", disjunkcija

   $\rightarrow$ kondicional

   $\neg, -$ negacija

   i logičkih konstanti

   $\top$ istina

   $\bot$ neistina

2. Prebrojivi skup propozicijskih varijabli $X, Y, Z, \ldots$

3. Skup pomoćnih simbola "(" i ")", tj. zagrade

Napomena 1.1. *Jezik ne mora sadržavati sve ove veznike i konstante.*

Jezik

Jezik propozicijske logike nad zadanim alfabetom je skup riječi koje zovemo **formule**.

Pojam propozicijske formule definiramo induktivno.

Definicija 1.2 (Formula propozicijske logike)**.**
*Najjednostavnije formule su $\perp$, $\top$ ili pojedinačno varijable X, Y, Z, itd. Njih zovemo **atomi** (ili **atomarne formule**).*

(i) *Atomi su formule.*

(ii) *Ako je A formula, tada je i $-A$ formula.*

(iii) *Ako su A i B formule, tada su i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ i $(A \rightarrow B)$ također formule.*

Slova s početka abecede $A, B, C, \ldots$ koristiti ćemo kao metavarijable za formule.

Negaciju ćemo često označavati i s $\overline{A}$.

Radi jednostavnosti (ali i elegancije) izostavljamo bikondicional $\leftrightarrow$ koji možemo uvesti $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

U zapisivanju formula običaj je ispuštati zagrade. Na primjer, umjesto $(A \wedge B)$ pisat ćemo $A \wedge B$. Također, umjesto $((A \vee B) \vee C)$ i $((A \wedge B) \wedge C)$ pisat ćemo $A \vee B \vee C$ i $A \wedge B \wedge C$.

Pri ispuštanju zagrada pretpostavljamo sljedeći prioritet veznika: $-, \vee, \wedge, \rightarrow$.

Uz ovakvu definiciju za formulu možemo nedvosmisleno reći da je **atom** ili da je složena formula oblika $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ ili $-A$. Atome i negacije atoma zovemo **literali**.

U formulama oblika $-A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ veznike $-$, $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ redom zovemo **glavni veznik**.

Definiramo i pojam potformule.

Definicija 1.3 (Potformula)**.**

(i) *Svaka formula* A *je potformula od* A*,*

(ii) *Ako je* $\neg A$ *potformula od* F*, tada je i* A *potformula od* F*,*

(iii) *Ako je* $A \wedge B$ *ili* $A \vee B$ *ili* $A \rightarrow B$ *potformula od* F *tada su* A *i* B *potformule od* F*.*

Primjer 1.4. $(A \vee (B \wedge C))$ *je formula propozicijske logike.*
Kraće bismo ju zapisali bez vanjskih zagrada $A \vee (B \wedge C)$*.*

$A \vee (B \wedge C)$*,* A*,* $B \wedge C$*,* B*,* C *su sve njezine potformule.*

1.2 O sustavima prirodnih dedukcija

J. Łukasiewics 1926. na primjećuje raskorak između tadašnjih aksiomatskih logičkih računa Hilberta i Fregea i uobičajenih načina dokazivanja u matematici. U aksiomatskim logičkim računima su čak i dokazi vrlo jednostavnih teorema komplicirani i neintuitivni.

Stanisław Jaśkowski 1929. je na poljskom kongresu matematičara u L'vivu (u današnjoj zapadnoj Ukrajini) prezentirao svoj prirodni račun. Rad "*On the Rules of Suppositions in Formal Logic*" je objavio 1934. (vidi [Jaś34]).

Neovisno o Jaśkowskom, Gerhard Gentzen je 1935. objavio rad "*Über das Logische Schliessen*" [Gen35]. Gentzen je, kao i Jaśkowski, želio opisati logički račun za klasičnu logiku blizak uobičajenom zaključivanju u matematici – u kojem se koriste pretpostavke uvode i odbacuju.

Gentzen je sustave prirodnih dedukcija NK i NJ za klasičnu i intuicionističku logiku definirao u svojoj disertaciji 1933. Gentzenov račun prirodnih dedukcija je vrlo sustavno prezentiran: svaki veznik ima svoje pravilo introdukcije i eliminacije.

Uz prirodne dedukcije, definirao je i račun sekventi LK (njem. *Logistischer Klassischer Kalkül*) i LJ (njem. *Logistischer Intuizionistischer Kalkül*) za klasičnu i intuicionističku logiku. Račun sekventi uveo je kao pomoćno sredstvo za proučavanje svojstava prirodnih dedukcija. Pomoću njih je iskazao i dokazao poznati *Hauptsatz* – teorem o eliminaciji reza u sekventnim računima LK i LJ.

Računi prirodnih dedukcija NK i NJ imaju svojevrsni ekvivalent Hauptsatza – to su teoremi o normalnoj formi. Teoremi o normalnoj formi govore o tome da svaka prirodna dedukcija ima normalnu formu. Dokaze teorema o normalnoj formi Gentzen nije objavio, pa se dugo smatralo da ih nije uspio napraviti.

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} -A \to -B \\ \boxed{\begin{array}{c} B \\ -A \to -B \\ \boxed{\begin{array}{c} -A \\ -A \to -B \\ -B \\ B \end{array}} \\ A \end{array}} \\ B \to A \end{array}} \\ (-A \to -B) \to (B \to A) \end{array}$$

Slika 1.1: Prirodna dedukcija Jaśkowskog
Okviri su "poddokazi". Prva formula u okviru je pretpostavka tog okvira. Formule iz vanjskog okvira mogu se ponoviti u ugnježdenim okvirima. Zatvaranjem okvira pretpostavka se odbacuje. Prva formula koju se zapisuje nakon zatvaranja okvira je zaključak te pretpostavke.

Gentzenov rukopis s dokazom pronađen je tek 1977. među materijalima koje je ostavio Paul Bernays (Gentzenov mentor). Pokazalo se da je Gentzen teorem o normalnoj formi dokazao samo za intuicionistički sustav NJ. Taj rezultat nije objavio jer je želio jedinstveni dokaz za NK i NJ račune. To je i bila motivacija za razvoj sekventnih računa LK i LJ za koje je uspio riješiti problem normalne forme.

Pod pojmom prirodnih dedukcija podrazumijeva se nekoliko logičkih računa s pretpostavkama. U ovom radu to će biti Gentzenova varijanta računa prirodnih dedukcija – u kojem su dedukcije stabla formula.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{B}\ (2) \qquad \dfrac{\overline{A}\ (1) \qquad \dfrac{}{-A \to -B}\ (3)}{-B}}{\perp}}{A}\ (1)}{B \to A}\ (2)}{(-A \to -B) \to (B \to A)}\ (3)$$

Slika 1.2: Gentzenova prirodna dedukcija
Gentzenove NK dedukcije su stabla formula. Formula u dedukciji je logička posljedica formula neposredno iznad nje. U korijenu stabla nalazi se konkluzija. Na vrhu stabla nalaze se pretpostavke dedukcije. U nekim se zaključivanjima pretpostavke odbacuje (u ovoj dedukciji odbačene su sve pretpostavke).

1	$\quad -A \to -B$	
2	$\quad\quad B$	
3	$\quad\quad -A \to -B$	R,1
4	$\quad\quad\quad -A$	
5	$\quad\quad\quad -A \to -B$	R,1
6	$\quad\quad\quad -B$	(E$\to$), 4, 5
7	$\quad\quad\quad B$	R,2
8	$\quad\quad\quad \perp$	(I$\perp$), 6,7
9	$\quad\quad A$	(E$-$), 4–8
10	$\quad B \to A$	(I$\to$), 2–9
11	$(-A \to -B) \to (B \to A)$	(I$\to$), 1–10

Slika 1.3: Fitch dijagram – varijanta računa Jaśkowskog. Formule su numerirane i desnoj koloni su navedeni pravilo kojim je formula dobivena i potrebne premise. Fitch umjesto okvira Jaśkowskog koristi (višestruka) uvlačenja. Na početku svakog uvlačenja izdvojena je hipoteza tog poddokaza.

Gentzenov sustav prirodnih dedukcija

Gentzenov račun prirodnih dedukcija nema aksiome već samo pravila (sheme) zaključivanja prirodnih dedukcija. Za razliku od linearnih dedukcija Jaśkowskog, Gentzenove prirodne dedukcije su stabla.

Gentzen je vrlo sustavno uveo pravila zaključivanja: svaki veznik ima svoje pravilo introdukcije i eliminacije. Pravila (sheme) iz tablice 1.1 zovemo pravila zaključivanja Gentzenovog sustava prirodnih dedukcija klasične propozicijske logike.

Svaki od veznika $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $-$ ima svoje pravilo *introdukcije* i pravilo *eliminacije*, odakle i njihove oznake. Na primjer (I$\rightarrow$) i (E$\rightarrow$) su redom oznake za introdukciju i eliminaciju veznika $\rightarrow$.

U pravilima introdukcije formulu ispod crte zaključivanja zovemo **glavna formula**. To je formula u koju se veznik uvodi.

Glavna formula u pravilima eliminacije je

(i) $A \wedge B$ za pravilo (E$\wedge$),

(ii) $A \vee B$ za pravilo (E$\vee$),

(iii) $A \rightarrow B$ za pravilo (E$\rightarrow$),

(iv) $-A$ za pravilo (E$-$).

(za primjerke pravila kako su navedena u prethodnom okviru).

Shema (E$\rightarrow$) poznatija je pod imenom *modus ponens*, (I$-$) kao *reductio ad absurdum*.

Napomena 1.5. *U sustav prirodnih dedukcija klasične logike ponekad se umjesto pravila* (TND) *dodaje pravilo eliminacije dvostruke negacije*

$$\text{(DNE)}\,\frac{--A}{A}$$

Sustav prirodnih dedukcija intuicionističke logike NJ i sustav prirodnih dedukcija klasične logike NK razlikuju se samo u tome što u NJ nema pravila (DNE) *(eliminacija dvostruke negacije) ili aksioma* (TND) *(lat. tertium non datur).*

Uz (TND) *potrebno je i uvesti pravilo* (EFQ) *(od latinskog* ex falso quodlibet – *"iz laži slijedi bilo što").*

U shemama (I$\rightarrow$), (I$-$), (E$\vee$) koristimo oznake $A \cdots C$ i $B \cdots C$ kao pokrate za stabla dedukcije čiji su korijeni C i čiji su neki od vrhova A i B redom. Povlakama nad

PRAVILA ZAKLJUČIVANJA

$$(\mathrm{I}\wedge)\ \frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad\qquad (\mathrm{E}\wedge)\ \frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

$$(\mathrm{I}\vee)\ \frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B} \qquad\qquad (\mathrm{E}\vee)\ \frac{A \vee B \qquad \begin{array}{c} \overline{A}\ (i) \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{B}\ (i) \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ (i)$$

$$(\mathrm{I}\to)\ \frac{\begin{array}{c} \overline{A}\ (i) \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B}\ (i) \qquad\qquad (\mathrm{E}\to)\ \frac{A \to B \quad A}{B}$$

$$(\mathrm{I}-)\ \frac{\begin{array}{c} \overline{A}\ (i) \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\overline{A}}\ (i) \qquad\qquad (\mathrm{E}-)\ \frac{-A \quad A}{\bot}$$

$$(\mathrm{EFQ})\ \frac{\bot}{A} \qquad\qquad (\mathrm{TND})\ \frac{}{A \vee -A}$$

Tablica 1.1: Pravila zaključivanja Gentzenovog računa NK formulama i oznakama uz crte zaključivanja označavamo odbačene pretpostavke — u zaključivanju označenom s "(i)" odbacuje se pretpostavke označene istom oznakom "(i)".

Sheme (I$\to$), (I$-$) i (E$\vee$) u kojima se odbacuje pretpostavke zovemo **hipotetska pravila** zaključivanja.

Primjer Gentzenove dedukcije s odbacivanjem hipoteza dan je na slici 1.2.

U nastavku ćemo dati preciznu definiciju dedukcija (izvoda) u Gentzenovom NK računu.

⋆ ⋆ ⋆

Uređeno korijensko stablo čiji su čvorovi formule zvat ćemo **stablo formula**. Oznakom

$$\frac{\Pi_1 \qquad \Pi_2 \qquad \dots \qquad \Pi_n}{A}$$

označiti ćemo stablo formula koje nastaje spajanjem stabala formula $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ i formule A tako da se korijeni od Π_i povežu s formulom A.

Ostaje za definirati koja stabla formula su prirodne dedukcije.

Definicija 1.6.
Stablo s jednim čvorom A je dedukcija od A čija je premisa A.

Dalje definiramo induktivno:

(I$\wedge$) *Neka je Π_1 dedukcija od A sa skupom premisa Γ_1.*
Neka je Π_2 dedukcija od B sa skupom premisa Γ_2.

Tada je stablo formula

$$\frac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$$

dedukcija od $A \wedge B$ sa skupom premisa $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

(E$\wedge$) *Neka je Π_1 dedukcija od $A \wedge B$ sa skupom premisa Γ_1.*

Tada su stablo formula

$$\frac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A \wedge B\end{matrix}}{A} \qquad i \qquad \frac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A \wedge B\end{matrix}}{B}$$

dedukcije od A i B redom, čiji je skup premisa Γ.

(I∨) *Neka je* Π_1 *dedukcija od* A *sa skupom premisa* Γ_1.
Tada su stabla formula

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix}}{A \vee B} \quad i \quad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix}}{B \vee A}$$

dedukcije od $A \vee B$ *(odnosno* $B \vee A$*) čiji je skup premisa* Γ_1.

(E∨) *Neka je* Π_1 *dedukcija od* $A \vee B$ *sa skupom premisa* Γ_1.
Neka je Π_2 *dedukcija od* C *sa skupom premisa* $\Gamma_2 \cup \{A\}$.
Neka je Π_3 *dedukcija od* C *sa skupom premisa* $\Gamma_3 \cup \{B\}$.
Tada je stablo formula

$$\dfrac{\begin{matrix}\\ \Pi_1\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}A\\ \Pi_2\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}B\\ \Pi_3\\ C\end{matrix}}{C}$$

dedukcija od C *čiji je skup premisa* $\Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \{A\}) \cup (\Gamma_3 \setminus \{B\})$.

(I→) *Neka je* Π_1 *dedukcija od* B *sa skupom premisa* $\Gamma_1 \cup \{A\}$.
Tada je stablo formula

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ B\end{matrix}}{A \to B}$$

dedukcija od $A \to B$ *sa skupom premisa* $\Gamma \setminus \{A\}$.

(E→) *Neka je* Π_1 *dedukcija od* A *sa skupom premisa* Γ_1.
Neka je Π_2 *dedukcija od* $A \to B$ *sa skupom premisa* Γ_2.
Tada je stablo formula

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ A \to B\end{matrix}}{B}$$

dedukcija od B *čiji je skup premisa* $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

(I−) *Neka je* Π_1 *dedukcija od* $\perp$ *sa skupom premisa* $\Gamma_1 \cup \{A\}$.

Tada je stablo formula

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \top\end{matrix}}{-A}$$

dedukcija od $-A$ *sa skupom premisa* $\Gamma_1 \setminus \{A\}$.

(E−) *Neka je* Π_1 *dedukcija od* A *sa skupom premisa* Γ_1.
Neka je Π_2 *dedukcija od* $-A$ *sa skupom premisa* Γ_2.

Tada je stablo formula

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ -A\end{matrix}}{\perp}$$

dedukcija od $\perp$ *sa skupom premisa* $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

(EFQ) *Neka je* Π *dedukcija od* $\perp$. *Tada je i*

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi \\ \perp\end{matrix}}{A}$$

dedukcija od A.

(TND) *Stablo formula*

$$\dfrac{}{A \vee -A}$$

je dedukcija od $A \vee -A$ *čiji je skup premisa* $\emptyset$ *(prazan).*

Primjena hipotetskih pravila (E∨), (I→) *i* (E−) *eliminira formulu* A *iz skupa premisa. Za* A *kažemo da je* ***odbačena hipoteza***. *Odbačene hipoteze označavamo s povlakom iznad njih i brojčanom oznakom koju dopisujemo i uz zaključivanje u kojem je ta hipoteza odbačena.*

Za dedukciju Π *reći ćemo da je* ***dedukcija od*** A ***iz*** Γ *ako je skup premisa dedukcije* Π *podskup od* Γ.

Ako postoji dedukcija od A *iz* Γ *reći ćemo da je* A *izvodljiva iz* Γ, *i to ćemo zapisati* $\Gamma \vdash A$.

Iz definicije je jasno da su dedukcije uređena stabla formula. Ponekad ih se tako definira. Umjesto govora o uređaju mi ćemo slobodno govoriti da je formula A (neposredno) iznad (ili ispod) formule B.

(Reći ćemo da je formula A_i iznad A_j ako postoji niz $A_j, \ldots, A_i$ formula u kojima za sve uzastopne parove formula A', A'' u nizu vrijedi da je A' neposredno iznad A'')

Primjerke pravila zaključivanja zvat ćemo **zaključci**. Govoriti ćemo i da neki zaključak u dedukciji prethodi drugom zaključku (čitamo od gore prema dole). Ili ćemo reći da su zaključci uzastopni.

Formule na vrhu dedukcije zovemo gornji listovi stabla. Gornji listovi dedukcije Π koji nisu odbačene hipoteze tvore skup premisa dedukcije Π.

Napomena 1.7. *Kao što je i u literaturi često običaj, umjesto da govorimo o pojavljivanju formule u dedukciji govoriti ćemo o formuli u dedukciji. Ova zloupotreba je učestala u cijelom tekstu.*

U pravilu, kad govorimo o formuli u dedukciji, misliti ćemo na njezino određeno pojavljivanje, na vrh u stablu koje zovemo dedukcija.

Primjer 1.8.

a) *Sljedeća dedukcija pokazuje "tranzitivnost kondicionala" – iz premisa $A \to B, B \to C$ možemo izvesti $A \to C$.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A}\,(1) \quad A \to B}{B} \qquad B \to C}{C}}{A \to C}\,(1)$$

Pretpostavka A odbačena je u zadnjem zaključku.

b) *Dedukcija kontrapozicije $A \to B \vdash -B \to -A$.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(1)\,\dfrac{}{A} \quad A \to B}{B} \qquad \dfrac{}{-B}\,(2)}{\perp}}{-A}\,(1)}{-B \to -A}\,(2)$$

Pretpostavke A i $-B$ su odbačene.
Premisa dedukcije je $A \to B$, konkluzija je $-B \to -A$.

Lokalna i globalna pravila

Hipotetska pravila (I$\to$), (I$-$), (E$\vee$) i (E$\perp$) ne djeluju samo na zaključku, nego na cijeloj dedukciji. Njihove premise su dedukcije.

Ostala pravila su "lokalna" i odnose se na samo jedan zaključak dedukcije. U tom smislu hipotetska pravila sa svojim mehanizmom odbacivanja pretpostavki djeluju "globalno", na cijeloj dedukciji, na više mjesta i na više formula.

Tako Gentzenove sheme možemo podijeliti na lokalna pravila – pravila zaključivanja (eng. *inference rules*) i globalna pravila – pravila dedukcija (eng. *proof rules*).

1.3 Gentzenov račun sekventi

U ovoj točki slovima grčkog alfabeta Γ, Δ itd. označavat ćemo skupove formula, a velikim slovima latinice $A, B, C, \ldots$ označavat ćemo pojedinačne formule.

Skup $\Gamma \cup \{A\}$ kraće zapisujemo Γ, A, i slično umjesto $\Gamma \cup \Delta$ pišemo Γ, Δ.

Definicija 1.9.
Formalne izraze oblika $\Gamma \vdash \Delta$ zovemo ***sekvente****. Skup Γ zovemo* ***premisa*** *sekvente $\Gamma \vdash \Delta$. Skup Δ zovemo* ***konkluzija*** *sekvente $\Gamma \vdash \Delta$.*

U sljedeće dvije tablice navodimo pravila Gentzenovog sekventnog sustava za klasičnu propozicijsku logiku.

Sekventne dedukcije

Uređeno korijensko stablo čiji su čvorovi sekvente zovemo **sekventno stablo**. Neka od takvih stabala su sekventne dedukcije.

Sekventne dedukcije ćemo induktivno definirati, slično kao prirodne dedukcije.

Definicija 1.10 (Sekventne dedukcije)**.**
Sekventu čija premisa i konkluzija sadrže istu formulu zovemo ***preklapajuća*** *ili* ***inicijalna sekventa****.*

(1) *Preklapajuća sekventa S je sekventna dedukcija sekvente S.*

(2) *Neka je Π_1 sekventna dedukcija sekvente S_1. Ako odgovarajuća primjena sekventnog pravila na S_1 daje sekventu S tada je stablo sekventi*

$$\frac{\Pi_1}{S}$$

sekventna dedukcija sekvente S.

(3) *Neka su Π_1 i Π_2 sekventne dedukcije sekventi S_1 i S_2. Ako odgovarajuća primjena sekventnih pravila na sekvente S_1 i S_2 daje sekventu S, tada je stablo sekventi*

$$\frac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{S}$$

sekventna dedukcija sekvente S.

STRUKTURNA PRAVILA ZA $\vdash$

Preklapanje (P): $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

Slabljenje (S): $$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

Rez (R): $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

Tablica 1.2: Strukturna pravila za $\vdash$

IF–PRAVILA ZA $\vdash$

$$(- \vdash)\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \overline{A} \vdash \Delta} \qquad (\vdash -)\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \overline{A}, \Delta}$$

$$(\wedge \vdash)\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad (\vdash \wedge)\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\vee \vdash)\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad (\vdash \vee)\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$$

$$(\rightarrow\vdash)\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \qquad (\vdash\rightarrow)\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}$$

Tablica 1.3: U lijevom stupcu nalaze se pravila "uvođenja veznika nalijevo" u kojima veznik ulazi u premisu donje sekvente.
U desnom stupcu navedena su pravila "uvođenja veznika nadesno" $(\vdash\ -)$ u kojima veznik ulazi u konkluziju donje sekvente.

Napomena 1.11. *Gentzen premisu sekvente u [Gen35] zove* ***antecedenta****, a konkluziju sekvente* ***konzekventa****.*

Gentzenova definicija sekventne dedukcije uključuje i izvode iz sekventi-premisa.

Sekventne dedukcije, kako su definirane u prethodnoj definiciji 1.10, bismo mogli zvati sekventni dokazi, jer definicija 1.10 ne obuhvaća sekventne izvode iz premisa.

U svakom slučaju, ovako definirane sekventne dedukcije nemaju premise pa nema zabune oko značenja premise.

Upravo definirani sustav sekventnih dedukcija zovemo Gentzenov sekventni račun klasične propozicijske logike. To je propozicijski fragment Gentzenovog LK računa.

Primjer 1.12. *Dedukcija sekvente $A \vdash B \to (A \land B)$:*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A} \qquad \cfrac{}{B \vdash B}}{A, B \vdash A \land B}\,(\vdash \land)}{A \vdash B \to (A \land B)}\,(\vdash\to) \qquad .$$

Napomena 1.13. *Za razliku od Gentzenovog članka i dijela literature, premisa i konkluzija sekventi u ovom radu su skupovi. Kod Gentzena, u [Gen35], premisa i konkluzija sekvente su konačni nizovi formula.*

Gentzen je uveo još pravila u LK koja su ovdje suvišna. Nama će kasnije od tih pravila biti interesantna:

Kontrakcija:	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$	$\dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$
Duplikacija:	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A, A}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A, A \vdash \Delta}$

Uz ova pravila Gentzenova premisa i konkluzija efektivno postaju konačni skupovi formula. Budući da su su ovdje premisa i konkluzija sekvente skupovi, kontrakcija i duplikacija trivijalno vrijede jer su Γ, A, A i Γ, A isti skupovi.

Napomena 1.14. *Nećemo pisati kao Gentzen pisati $\Gamma \to \Delta$ budući da "$\to$" koristimo za oznaku materijalnog kondicionala, kojeg je Gentzen označavao sa "$\supset$".*

Napomena 1.15 (O praznim sekventama)**.** *Skupovi formula Γ i Δ mogu biti prazni i tada sekvente imaju posebno značenje. Prazan skup se u sekventi obično ne piše.*

1. $\Gamma = \emptyset$
   Umjesto $\emptyset \vdash \Delta$ pišemo $\vdash \Delta$.
   Ova sekventa označava da je skup formula izvodljiv iz praznog skupa.

2. $\Delta = \emptyset$
   Pišemo $\Gamma \vdash$ umjesto $\Gamma \vdash \emptyset$.
   Skup Γ nije konzistentan. Uočimo da iz sekvente $\Gamma \vdash$ slabljenjem slijedi i $\Gamma \vdash B$, za svaku formulu B.

3. $\Gamma, \Delta = \emptyset$
   Pišemo $\vdash$ umjesto $\emptyset \vdash \emptyset$. Ovakva, tzv. prazna sekventa, nije izvodljiva u konzistentnom logičkom računu. Budući da se svaka sekventa slabljenjem može izvesti iz prazne sekvente, izvodljivost prazne sekvente povlači izvodljivost svake sekvente!

⋆ ⋆ ⋆

U prošloj točki smo sa sekventom $\Gamma \vdash A$ sa singularnom konkluzijom zapisivali da postoji dedukcija formule A iz Γ. Sekventu sa singularnom konkluzijom zovemo **singularna sekventa**. Za sekvente čija je konkluzija skup formula (kao u definiciji 1.9) kažemo da su **multiplarne**.

Za prirodnu dedukciju od A iz Γ reći ćemo da je prirodni dedukcijski dokaz sekvente $\Gamma \vdash A$.

1.4 Generalizirana implikacija

Definicija 1.16.
Skup formi Γ (generalizirano) ***implicira*** *skup formi Δ ako ne postoji interpretacija u kojoj su sve forme iz Γ istinite i sve forme iz Δ neistinite. Drugim riječima, u svakoj interpretaciji barem jedna forma iz Γ prima vrijednost $\perp$ ili barem jedna forma iz Δ prima vrijednost $\top$. To kraće zapisujemo*

$$\Gamma \models \Delta$$

i čitamo "Γ ***implicira*** *Δ".*

Izraze oblika $\Gamma \models \Delta$ također zovemo **sekvente**. Kad želimo naglasiti razliku sa sekventom $\Gamma \vdash \Delta$, za $\Gamma \models \Delta$ ćemo reći da je **semantička** sekventa, a za $\Gamma \vdash \Delta$ da je **sintaktička** sekventa.

Za sekventu $\Gamma \models \Delta$ ćemo reći da je valjana ako Γ implicira Δ. Γ i Δ su redom **premisa** i **konkluzija** sekvente $\Gamma \models \Delta$.

Za implikaciju je trivijalno pokazati da vrijede pravila u tablici 1.4.

STRUKTURNA PRAVILA ZA $\models$

Preklapanje (P):
$$\frac{}{\Gamma, A \models A, \Delta}$$

Slabljenje (S):
$$\frac{\Gamma \models \Delta}{\Gamma, A \models \Delta} \qquad \frac{\Gamma \models \Delta}{\Gamma \models A, \Delta}$$

Rez (R):
$$\frac{\Gamma \models \Delta, A \qquad A, \Gamma \models \Delta}{\Gamma \models \Delta}$$

Tablica 1.4: Strukturna pravila za $\models$

Obzirom na značenje IF-veznika za račun semantičkih sekventi trivijalno vrijede i pravila navedena u tablici 1.5. Dvostrukom crtom u ovim pravilima označavamo da se pravilo može primjenjivati u oba smjera – prema dole (uobičajeno), ali i prema gore.

Na primjer, ako vrijedi donja sekventa u pravilu ($\models \wedge$), onda vrijede i gornje sekvente

IF–PRAVILA ZA $\models$

$$(-\models)\ \dfrac{\Gamma \models \Delta, A}{-A, \Gamma \models \Delta} \qquad (\models -)\ \dfrac{A, \Gamma \models \Delta}{\Gamma \models \Delta, -A}$$

$$(\wedge \models)\ \dfrac{A, B, \Gamma \models \Delta}{A \wedge B, \Gamma \models \Delta} \qquad (\models \wedge)\ \dfrac{\Gamma \models \Delta, A \qquad \Gamma \models \Delta, B}{\Gamma \models \Delta, A \wedge B}$$

$$(\vee \models)\ \dfrac{A, \Gamma \models \Delta \qquad B, \Gamma \models \Delta}{A \vee B, \Gamma \models \Delta} \qquad (\models \vee)\ \dfrac{\Gamma \models \Delta, A, B}{\Gamma \models \Delta, A \vee B}$$

$$(\rightarrow \models)\ \dfrac{\Gamma \models \Delta, A \qquad B, \Gamma \models \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \models \Delta} \qquad (\models \rightarrow)\ \dfrac{A, \Gamma \models \Delta, B}{\Gamma \models \Delta, A \rightarrow B}$$

$$(\top \models)\ \dfrac{\Gamma, \top \models \Delta}{\Gamma \models \Delta} \qquad (\models \top)\ \dfrac{}{\Gamma \models \top}$$

$$(\bot \models)\ \dfrac{\Gamma \models \Delta, \bot}{\Gamma \models \Delta} \qquad (\models \bot)\ \dfrac{}{\bot \models \Delta}$$

Tablica 1.5: IF-pravila za $\models$

istog pravila:

$$\text{Ako} \quad \Gamma \models \Delta, A \wedge B, \quad \text{onda} \quad \Gamma \models \Delta, A \quad \text{i} \quad \Gamma \models \Delta, B\ .$$

Propozicija 1.17 (Korektnost LK)**.** *Račun LK je korektan. Ako postoji sekventna dedukcija sekvente $\Gamma \vdash \Delta$, tada vrijedi: $\Gamma \models \Delta$.*

Dokaz. Trivijalan, budući da su sva LK pravila valjana. □

Napomena 1.18 (Logička posljedica prema Tarskom, poopćenje D. Scott)**.**
Sljedeća svojstva zovemo aksiomi logičke posljedice A. Tarskog.

Za relaciju $\mid\!\sim$ koja zadovoljava:

(i) Refleksivnost

$$\Gamma \mid\!\sim \Delta \qquad \textit{ako} \qquad \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$$

(ii) Monotonost

$$\frac{\Gamma \mid\!\sim \Delta}{\Gamma, \Gamma' \mid\!\sim \Delta}$$

(iii) Tranzitivnost (rez)

$$\frac{\Gamma \mid\!\sim \Delta \qquad \Gamma' \mid\!\sim \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \mid\!\sim \Delta, \Delta'}$$

za sve skupove formula Γ, Δ kažemo da je relacija ***logičke posljedice*** *prema Tarskom.*

Ranije navedena strukturna pravila za $\vdash$ i $\models$ sekvente povlače upravo spomenute aksiome Tarskog (preklapanje je refleksivnost, slabljenje daje monotonost, tranzitivnost je rez). Prema tome, relacija izvodljivosti $\vdash$ i generalizirana relacija implikacije $\models$ su primjeri relacije logičke posljedice.

Za relaciju izvodljivosti još kažemo da je sintaktička relacija logičke posljedice. Za implikaciju kažemo da je semantička relacija logičke posljedice.

1.5 Teoremi o normalnoj formi

Ovdje ćemo navesti neke od najvažnijih rezultata za račune NK i LK: teorem o normalnoj formi za prirodne dedukcije, teorem o eliminaciji reza i potformulnost.

Gentzen je pravila eliminacije smatrao posljedicom pravila introdukcije. Introdukcije definiraju značenje veznika, a eliminacije su posljedica introdukcije. Eliminacija koja u dedukciji neposredno slijedi introdukciju (iste formule) je redundantna.

Ova je ideja poznata kao Prawitzov princip inverzije:

> *Pravilo eliminacije je u određenom smislu inverz odgovarajućeg pravila introdukcije: eliminacija nakon introdukcije je u dedukciji redundantna ako ti zaključci dijele istu glavnu formulu, budući da su posljedice eliminacije već utvrđena kao premise introdukcije.*

U dedukcijama je poželjno izbjegavati takve redundantne dijelove.

Definicija 1.19 (Normalna forma prirodnih dedukcija)**.**
Prirodna dedukcija Π *je u normalnoj formi ako ne postoji formula koja je glavna formula dva uzastopna zaključka.*

Za dedukcije u normalnoj formi možemo reći da su direktne.

Propozicija 1.20 (O normalnoj formi prirodnih dedukcija)**.**
Ako postoji prirodna dedukcija od A *iz* Γ*, tada postoji prirodna dedukcija od* A *iz* Γ *u normalnoj formi.*

Iz normalne forme slijedi potformulnost prirodnih dedukcija: sve formule u normalnoj dedukciji su potformule ili negacije potformula neke od premisa ili konkluzije.

Budući da nije uspio dokazati teorem o normalnoj formi za svoje N-račune, Gentzen je razvio račun sekventni LK i LJ. Za sekventne račune dokazao je ekvivalent teorema o normalnoj formi, – teorem o eliminaciji reza, koji je nazvao *Hauptsatz*.

TEOREM O ELIMINACIJI REZA (HAUPTSATZ)

Rez (R) je eliminabilan u računu LK klasične logike.

Drugim riječima:

Ako postoji izvod za sekventu $\Gamma \vdash \Delta$, tada postoji izvod iste sekvente $\Gamma \vdash \Delta$ bez upotrebe reza.

Za sekventne dedukcije kažemo da su u normalnoj formi ako ne sadrže rez. Teorem o eliminaciji reza je zato teorem o normalnoj formi računa LK.

Skicu elegantnog dokaza dat ćemo u sljedećem poglavlju.

Teorem o eliminaciji reza je važan rezultat iz kojeg slijede potformulnost, konzistentnost klasične logike i Craigov teorem o interpolaciji.

Sad ćemo kao posljedice teorema o rezu pokazati elegantne dokaze potformulnosti računa LK i elegantni dokaz konzistentnosti klasične logike.

Propozicija 1.21 (Potformulnost LK)**.** *Ako postoji dedukcija sekvente $\Gamma \vdash \Delta$, tada postoji sekventna dedukcija od $\Gamma \vdash \Delta$ u kojoj su sve formule potformule od Γ ili Δ.*

Dokaz. Za sva sekventna pravila osim reza vrijedi da je svaka formula gornje sekvente potformula neke formule u donjoj sekventi. Dedukcije bez reza svoje najsloženije formule sadrže u najdonjoj sekventi, a sve formule ostalih sekventi su potformule neke formule najdonje sekvente.

Za sekventne dedukcija bez reza zato možemo reći da su *bottom-up*, i to bitno olakšava potragu za dedukcijama. □

Za logički račun u kojem vrijedi svojstvo potformulnosti kažemo da je **analitički** (vidi [Smu95]).

Iz teorema o rezu slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1.22 (Konzistentnost LK)**.**
Gentzenov logički račun sekventi LK je konzistentan, tj. ne postoji formula A takva da su u LK dokazive sekvente $\vdash A$ i $\vdash \neg A$.

Prethodna propozicija vrijedi za logičke račune u kojima je rez eliminabilan.

Potformulnost i konzistentnost računa se slično slijede iz teorema o normalnoj formi.

1.6 Multiplarna pravila zaključivanja

W. Kneale u [KK56] uočava nespretnost nekih pravila zaključivanja u sustavu prirodnih dedukcija. Konkretno, za klasičnu propozicijsku logiku, to su sljedeće primjedbe:

1) U klasičnoj logici su veznici $\wedge$ i $\vee$ dualni. To se vidi u simetriji pravila (I$\vee$) i (E$\wedge$):

$$(\mathsf{I}\vee)\ \dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{B}{A \vee B} \qquad\qquad (\mathsf{E}\wedge)\ \dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}$$

Ove simetrije između drugog para pravila (I$\wedge$) i (E$\vee$), nema:

$$(\mathsf{I}\wedge)\ \dfrac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad\qquad (\mathsf{E}\vee)\ \dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c} \dfrac{}{A}\,(i) \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{}{B}\,(i) \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\,(i)$$

2) Hipotetska pravila (I$\rightarrow$), (I$-$) i (E$\vee$) s odbacivanjem pretpostavki su komplicirana:

$$(\mathsf{I}\rightarrow)\ \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{}{A}\,(i) \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\,(i) \qquad\qquad (\mathsf{I}-)\ (\mathsf{E}\bot)\ \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{}{A}\,(i) \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{-A}\,(i)$$

$$(\mathsf{E}\vee)\ \dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c} \dfrac{}{A}\,(i) \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{}{B}\,(i) \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\,(i)$$

Kneale uočava da se spomenuti nedostaci mogu otkloniti ukoliko se singularnu relaciju izvodljivosti u shemama zaključivanja zamijeni s multiplarnom – s onom koja može imati više od jedne konkluzije.

Kneale predlaže multiplarni sustav pravila zaključivanja za klasičnu logiku s nijednom ili više konkluzija koji rješava ranije spomenute nedostatke.

Definicija 1.23.
Pravila iz tablice 1.6 zovemo ***multiplarna pravila zaključivanja****.*

MULTIPLARNA PRAVILA

$$(\mathsf{I}\wedge)\ \frac{A \qquad B}{A \wedge B} \qquad\qquad (\mathsf{E}\wedge)\ \frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

$$(\mathsf{I}\vee)\ \frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B} \qquad\qquad (\mathsf{E}\vee)\ \frac{A \vee B}{A \qquad B}$$

$$(\mathsf{I}\rightarrow)\ \frac{B}{A \rightarrow B} \quad \frac{}{A \qquad A \rightarrow B} \qquad\qquad (\mathsf{E}\rightarrow)\ \frac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$$

$$(\mathsf{I}-)\ \frac{}{A \qquad -A} \qquad\qquad (\mathsf{E}-)\ \frac{A \qquad -A}{}$$

Tablica 1.6: Multiplarni oblici pravila zaključivanja

*Kao i u NK, svaki veznik ima svoje pravilo introdukcije i eliminacije. Za formulu čiji se glavni veznik uvodi ili eliminira reći ćemo da je **glavna formula** tog zaključka. U ovim pravilima vrijedi da su sve formule zaključka potformule glavne formule.*

Aksiomi i antiaksiomi su specijalni slučajevi pravila zaključivanja. Na primjer, multiplarno pravilo $(\mathsf{I}-)$ bez premisa je aksiom klasične logike *tertium non datur* (TND), a pravilo $(\mathsf{E}-)$ bez konkluzija je primjer antiaksioma.

Napomena 1.24. *Pravila zaključivanja*

$$(\mathsf{I}\rightarrow)\ \frac{}{A \qquad A \rightarrow B} \qquad\qquad (\mathsf{I}\rightarrow)'\ \frac{-A}{A \rightarrow B}$$

su ekvivalentna. U multiplarnim pravilima oblik $(\mathsf{I}\rightarrow)$ *ima prednost zbog toga što: (a) A je prava potformula glavne formule; (b) očuvano je svojstvo (ostalih pravila) da se u pravilima zaključivanja uvodi ili eliminira isključivo veznik na kojeg se pravilo odnosi.*

Napomena 1.25. *Među multiplarna pravila iz tablice 1.6 nismo naveli pravila za $\perp$ i $\top$. $\perp$ i $\top$ nadalje nećemo smatrati dijelom jezika.*

Ako bismo ih ipak htjeli, dodali bismo pravila

$$(\mathrm{E}\bot)\ \frac{\bot}{A} \qquad (\mathrm{I}\bot)\ \frac{A \quad -A}{\bot} \qquad (\mathrm{E}\top)\ \frac{\top}{A \quad -A} \qquad (\mathrm{I}\top)\ \frac{A}{\top}$$

Napomena 1.26 (O singularnoj konkluziji)**.** *Gentzen je račune NK i NJ predstavio sa gotovo jednakim sustavom pravila. Jedina razlika je dodatni aksiom* (TND) *računa NK klasične logike, kojeg račun NJ intuicionističke logike nema.*

Na sličan način su Gentzenovi L-računi (LK za klasičnu i LJ za intuicionističku logiku) gotovo jednaki. Gentzen je uočio da LK račun s restrikcijom singularne konzekvente generira intuicionističku logiku. Pripadni sekventni račun je LJ. Ograničenje singularne konkluzije za intuicionističku logiku nužno je doduše samo za veznike "$-$" i "$\rightarrow$" (pripadni račun je LJ′ (Maheara), vidi dodatak).

Budući da u ovom radu proučavamo isključivo klasičnu logiku, ograničenje singularne konkluzije možemo zanemariti.

Usput, spomenimo što je Gentzen napisao o multiplarnoj konkluziji:

> "Mora se priznati da se ovaj novi koncept sekvente razilazi s 'prirodnim'. Njegovo uvođenje prvenstveno opravdavaju značajne formalne prednosti."
>
> *Gentzen o multiplarnim sekventama (u [Gen38])*

Formalne prednosti multiplarnih sekventi o kojima Gentzen piše pokazat ćemo u odjeljku 2.4 gdje ćemo pokazati ekvivalentnost računa multiplarnih sekventi i Bethovih semantičkih stabala.

1.7 Knealejeve dedukcije

S multiplarnim pravilima možemo vrlo jednostavno izgraditi račun multiplarnih dedukcija.

Prije definicije dogovoriti ćemo oznake.

- Oznakom $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{\Pi}$ označiti ćemo da dedukcija Π ima premisu A.
  Reći ćemo da je Π dedukcija s premisom A (i podrazumijevati da Π može imati i druge premise).
- Oznakom $\genfrac{}{}{0pt}{}{\Pi}{A}$ označiti ćemo da je A jedna od konkluzija dedukcije Π.
  Reći ćemo da Π dedukcija s konkluzijom A (i podrazumijevati da Π može imati i druge konkluzije).

Definicija 1.27 (Knealejeve dedukcije)**.**

I. *A je Knealejeva dedukcija od A iz A.*

II. *Neka je Π Knealejeva dedukcija s konkluzijom A.*
Tada su i

$$\frac{\overset{\Pi}{A} \qquad B}{A \land B} \qquad\qquad \frac{\overset{\Pi}{A}}{A \lor B} \qquad\qquad \frac{\overset{\Pi}{A}}{B \lor A} \qquad\qquad \frac{\overset{\Pi}{A}}{B \to A} \qquad\qquad \frac{\overset{\Pi}{A} \qquad -A}{}$$

Knealejeve dedukcije.

III. *Neka je Π Knealejeva dedukcija s premisom A.*
Tada su i

$$\frac{A \land B}{\underset{\Pi}{A}} \qquad \frac{B \land A}{\underset{\Pi}{A}} \qquad \frac{A \lor B}{\underset{\Pi}{A} \qquad B} \qquad \frac{B \qquad B \to A}{\underset{\Pi}{A}} \qquad \frac{}{\underset{\Pi}{A} \qquad -A} \qquad \frac{}{\underset{\Pi}{A} \qquad A \to B}$$

Knealejeve dedukcije.

IV. *(a) Ako je Π Knealejeva dedukcija s konkluzijom $A \land B$, tada je i*

$$\frac{\overset{\Pi}{A \land B}}{A}$$

Knealejeva dedukcija.

(b) Ako je Π Knealejeva dedukcija s premisom $A \land B$, tada je i

$$\frac{A \qquad B}{\underset{\Pi}{A \land B}}$$

Knealejeva dedukcija.

(c) Ako je Π Knealejeva dedukcija s konkluzijom $A \lor B$, tada je i

$$\frac{\overset{\Pi}{A \lor B}}{A \qquad B}$$

Knealejeva dedukcija.

(d) Ako je Π Knealejeva dedukcija s premisom $A \lor B$, tada su i

$$\frac{A}{\underset{\Pi}{A \lor B}} \qquad\qquad \frac{B}{\underset{\Pi}{A \lor B}}$$

Knealejeve dedukcije.

(e) *Ako je* Π *Knealejeva dedukcija s konkluzijom* $A \to B$*, tada je i*

$$\dfrac{\overset{\Pi}{A \to B} \qquad A}{B}$$

Knealejeva dedukcija.

(f) *Ako je* Π *Knealejeva dedukcija s premisom* $A \to B$*, tada su i*

$$\begin{array}{c} \dfrac{B}{A \to B} \\ \Pi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \dfrac{}{A \to B \qquad A} \\ \Pi \end{array}$$

Knealejeve dedukcije.

(g) *Ako je* Π *Knealejeva dedukcija s konkluzijom* $-A$*, tada je i*

$$\dfrac{\overset{\Pi}{-A} \qquad A}{}$$

Knealejeva dedukcija.

(h) *Ako je* Π *Knealejeva dedukcija s premisom* $-A$*, tada je i*

$$\begin{array}{c} \dfrac{}{-A \qquad A} \\ \Pi \end{array}$$

Knealejeva dedukcija.

Za Knealejevu dedukciju Π *reći ćemo da je* ***Knealejeva dedukcija od*** Δ ***iz*** Γ *ako je skup premisa od* Π *podskup od* Γ *i skup konkluzija podskup od* Δ*.*

Oznakom

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta\ .$$

zapisivat ćemo da postoji Knealejeva dedukcija od Δ *iz* Γ*.*

Pripadni logički račun zovemo ***račun Knealejevih dedukcija****.*

Za razliku od Gentzenovih prirodnih dedukcija, Knealejeve dedukcije mogu imati više "korijena", koje ćemo zvati **donji listovi** stabla. Listove na vrhu stabla zvat ćemo **gornji listovi**.

Donji listovi multiplarne dedukcije tvore skup konkluzija. Gornji listovi tvore skup premisa dedukcije (kod Knealejevih dedukcija ne odbacujemo hipoteze).

Gornje i donje listove zajedno ćemo zvati (samo) listovi multiplarne dedukcije. Za ostale čvorove reći ćemo da su **unutarnji** čvorovi.

Napomena 1.28. *Iz definicije je vidljivo i da su Knealejeve dedukcije aciklički grafovi formula – uređena stabla koja se granaju prema dole* i *prema gore. Kneale je u opisu tzv. računa razvoja naveo ograničenje – razvoji (kao grafovi) ne smiju sadržavati cikluse.*

U tom smislu prethodna definicija odgovara Knealeovim razvojima (odnosno njegovoj ideji multiplarnih dedukcija).

⋆ ⋆ ⋆

Izgradnju Knealejevih dedukcija možemo opisati i na sljedeći način:

Definicija 1.29 (Spoj dedukcija)**.**
Neka su Π_1 i Π_2 Knealejeve dedukcije.
Neka je A jedna od konkluzija od Π_1, i neka je A jedna od premisa od Π_2.

Dedukcije Π_1 i Π_2 možemo spojiti preko vrha A uz poštivanje uređaja u stablima Π_1 i Π_2 (formule koje su bile iznad A u Π_1 biti će iznad formula koje su ispod A u Π_2).

Dobiveni graf formula je Knealejeva dedukcija koju zovemo ***spoj*** *dedukcija Π_2 i Π_2.*

Napomena 1.30. *Knealejevu dedukciju možemo prikazati konačnim brojem spajanja zaključaka. Unutarnji čvorovi sudjeluju u točno dva (uzastopna) zaključka. Listovi sudjeluju u točno jednom zaključku (kao premisa ili konkluzija).*

Primjer 1.31. *Knealejeva dedukcija*

$$\begin{array}{cccc}
 & & \multicolumn{2}{c}{-A \lor B} \\ \cline{1-2} \cline{3-4}
A \to B & A & -A & B \\ \cline{2-3} \cline{4-4}
 & & & A \to B
\end{array}$$

dokazuje $-A \lor B \vdash_{\mathsf{KN}} A \to B$.

Ovu dedukciju možemo prikazati kao spoj sljedećih zaključaka

$$\frac{}{A \to B \qquad A} \qquad \frac{A \qquad -A}{} \qquad \frac{-A \lor B}{-A \qquad B} \qquad \frac{B}{A \to B}$$

Primjer 1.32. *Spoj zaključaka*

$$\frac{-B \qquad B}{} \qquad \frac{A \to B \qquad A}{B} \qquad \frac{}{A \qquad -A}$$

redom preko zajedničkih B i A daje multiplarnu dedukciju

$$\dfrac{-B \qquad \dfrac{A \to B \quad \dfrac{}{A \qquad\quad -A}}{B}}{}$$

(Knealejeva dedukcija logičkog pravila modus tollens $-B, A \to B \vdash -A$)

Primjer 1.33. *Mogli bismo spajati multiplarne dedukcije preko više od jednog zajedničkog čvora. Na primjer, pokušamo li spojiti multiplarne izvode*

$$\dfrac{A \vee B}{A \qquad B}\,, \qquad \dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

preko njihovih zajedničkih formula A i B dobiti ćemo

$$\dfrac{\dfrac{A \vee B}{A \qquad B}}{A \wedge B}$$

Budući da

$$A \vee B \not\models A \wedge B\,,$$

$A \wedge B$ ne smije biti izvodljiva iz $A \vee B$. Iz tog razloga je Kneale dao ograničenje da razvoji (prijedlog multiplarnih izvoda) ne smiju sadržavati cikluse.

Što smo dobili?

Nabrojimo neke formalne prednosti Knealeovih dedukcija.

I. U sustavu multiplarnih pravila (tablica 1.6) vidi se simetrija dualnih $\wedge$ i $\vee$:

$$(\mathsf{I}\wedge)\ \dfrac{A \qquad B}{A \wedge B} \qquad\qquad (\mathsf{E}\vee)\ \dfrac{A \vee B}{A \qquad B}$$

II. Pravilo $(\mathsf{E}\vee)$ je u multiplarnom sustavu bitno jednostavnije. Dedukcija $A \vee B \vdash C$ je s multiplarnim dedukcijama jednostavnija:

$$(\mathsf{E}\vee)\ \dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c} \overline{\ A\ }\,(\mathrm{i}) \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{\ B\ }\,(\mathrm{i}) \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}\ (\mathrm{i}) \qquad \xrightarrow{\text{postaje}} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{A \vee B}{A \qquad B} \\ \vdots \qquad \vdots \\ C \qquad C \end{array}$$

Odbacivanje pretpostavki A i B nije potrebno.

A i B su u desnoj (multiplarnoj) dedukciji unutarnji čvorovi, ne treba ih odbacivati. Nakon što smo ustanovili $A \vee B$, redom možemo vidjeti da obje alternative A i B dovode do istog zaključka C.

Dedukciju od čvora A pratili bismo na dole čitajući

"*pretpostavimo da vrijedi A . . .*"

U tom je smislu i multiplarni račun prirodan – "hipoteze" multiplarnih dedukcija su alternativne konkluzije multiplarnih zaključaka, što je (diskutabilno) prirodnije nego kod singularnih dedukcija.

III. Slično kao i kod (E$\vee$), Gentzenovo pravilo introdukcije kondicionala (I$\rightarrow$):

$$\begin{array}{c} \dfrac{}{A}\,(i) \\ \vdots \\ \text{(I}\rightarrow\text{)}\dfrac{B}{A \rightarrow B}\,(i) \end{array}$$

govori kako se dedukcija $\Gamma, A \vdash B$ može uz odbacivanje pretpostavke prevesti u dedukciju $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ bez pretpostavke A.

Pogledajmo kako to izgleda u multiplarnoj verziji. Spajanjem sljedećih dedukcija preko A i B

$$\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array} \qquad \dfrac{}{A \qquad A \rightarrow B} \qquad \dfrac{B}{A \rightarrow B}$$

dobijemo multiplarnu dedukciju *bez* pretpostavke A

$$\begin{array}{l} \dfrac{}{A \qquad A \rightarrow B} \\ \quad\vdots \\ \quad B \\ \hline A \rightarrow B \end{array}$$

čije su obje konkluzije $A \rightarrow B$. Dakle, ako postoji dedukcija od B s pretpostavkom A, tada postoji dedukcija od $A \rightarrow B$ bez pretpostavke A.

IV. Spajanje multiplarnih zaključaka

$$\dfrac{}{A \qquad -A} \qquad\qquad \dfrac{-A \qquad --A}{}$$

preko formule $(-A)$ daje multiplarnu dedukciju pravila (DNE) $--A \vdash A$:

$$\overline{A \qquad \underline{-A}}\underline{\qquad - - A}$$

V. Pravila zaključivanja Knealejevih dedukcija su lokalna. Svaka formula u dedukciji je logička posljedica formula (ili formule) koje se nalaze neposredno iznad nje. To je u kontrastu s globalnim Gentzenovim hipotetskim pravilima u kojima su premise zaključka dedukcije.

U multiplarnom zapisu "hipoteze" navodimo neposredno nakon $A \vee B$ (notacijska prednost).

Svojstva računa Knealejevih dedukcija

Teorem 1.34. *Račun Knealejevih dedukcija je korektan:*

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \Delta$$

Dokaz. Teorem ćemo dokazati indukcijom po broju zaključaka dedukcije. Bazu indukcije čini provjera valjanosti multiplarnih pravila.

Pretpostavimo da su Knealejeve dedukcije s n ili manje zaključivanja korektne, tj. da za takve vrijedi

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta \Rightarrow \Gamma \models \Delta\,.$$

Neka je Π Knealejeva dedukcija s $n+1$ zaključkom i neka su Π_1 i Π_2 Knealejeve dedukcije čijim spajanjem nastaje dedukcija Π. Neka je Π_1 Knealejeva dedukcija za $\Gamma_1 \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta_1, A$, te Π_2 Knealejeva dedukcija za $\Gamma_2, A \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta_2$.

Spoj "izreže" točno jedno pojavljivanje formule A u dedukciji Π. Ako Π_1 ili Π_2 imaju više od jedne A formule, jedna od njih će nakon spoja "preživjeti" kao pretpostavka i/ili konkluzija od Π.

Označimo s $\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus \{A\}$, te s $\Delta = (\Delta_1 \cup \Delta_2) \setminus \{A\}$.

Sad možemo reći da je Knealejeva dedukcija Π dokaz jedne od sekventi

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta, \qquad \Gamma, A \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta, \qquad \Gamma \vdash_{\mathsf{KN}} A, \Delta \qquad \text{ili trivijalne} \qquad \Gamma, A \vdash_{\mathsf{KN}} A, \Gamma\,. \tag{1.1}$$

Budući da su Π_1 i Π_2 dedukcije s n ili manje zaključivanja, po pretpostavci indukcije vrijedi

$$\Gamma_1 \models \Delta_1, A, \qquad A, \Gamma_2 \models \Delta_2$$

Primjenom pravila reza na semantičkim sekventama dobijemo

$$\frac{\Gamma_1 \models \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \models \Delta_2}{\Gamma \models \Delta},$$

Zbog slabljenja vrijedi i:

$$\frac{\Gamma \models \Delta}{\Gamma, A \models \Delta} \qquad\qquad \frac{\Gamma \models \Delta}{\Gamma \models \Delta, A}$$

čime smo pokazali valjanost svih sekventi iz (1.1). Zaključujemo da je račun Knealeovih dedukcija korektan. □

⋆ ⋆ ⋆

U nastavku ove točke pokazat ćemo potformulnost i teorem o normalnoj formi računa Knealeovih dedukcija pomoću kojih ćemo pokazati da nije potpun.

Definicija 1.35 (Skica zaključka)**.**
Svakom zaključku pridružiti ćemo uređeni i označeni graf na sljedeći način:

(i) *Svakoj premisi p_i i svakoj konkluziji k_i pridružujemo čvor grafa.*

(ii) *Crti zaključka pridružujemo poseban čvor koji ne označavamo.*

Uređaj se prirodno prenosi sa zaključka na skicu. Uvažavamo ga crtanjem premisa iznad crte zaključka koju crtamo iznad konkluzija.

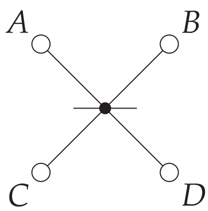
*Ovako pridruženi graf zovemo **skica zaključka**.*

Definiciju skice možemo jednostavno proširiti na multiplarna stabla formula, pa možemo govoriti i o skicama Knealejevih dedukcija.

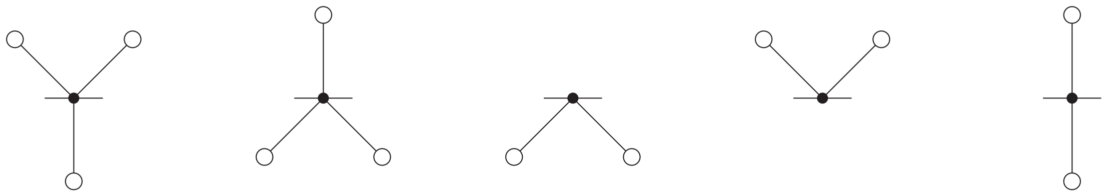
Uređaj iz stabla formula uvažavamo tako što ćemo u skici zaključka čvorove premisa crtati iznad konkluzija, a čvorom crte zaključivanja između njih (što je "iznad" u dedukciji, ostaje takvo i u skici).

Za općenitu shemu multiplarnog zaključka pridruženi graf je:

$$\frac{A \qquad B}{C \qquad D} \quad \longrightarrow$$



Skice pridružene multiplarnim shemama zaključivanja iz definicije 1.23 su na slici 1.4.

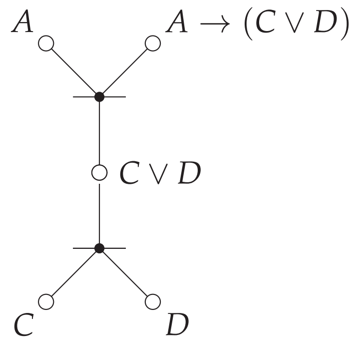


Slika 1.4: Skice pravila zaključivanja

Napomena 1.36. *Čvorovi u skici koji pripadaju crti zaključivanja nisu formule nećemo ih smatrati listovima dedukcije – ne uzimamo ih u obzir prilikom čitanja premisa i konkluzija dedukcije.*

Primjer 1.37. *Lijevo je Knealejeva dedukcija za* $A, A \to (C \vee D) \vdash_{\mathsf{KN}} C, D$.

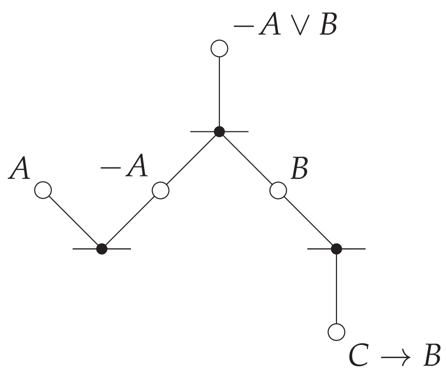
$$\cfrac{A \qquad A \to (C \vee D)}{\cfrac{C \vee D}{C \qquad D}}$$



S desne strane je skica te Knealejeve dedukcije.

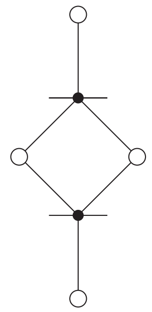
Primjer 1.38. *Knealejeva dedukcija* $C \to B$ *iz* $\{A, -A \vee B\}$ *i pripadna skica:*

$$\begin{array}{ccc} & \multicolumn{2}{c}{\underline{\;-A \vee B\;}} \\ \underline{A \qquad -A} & & \underline{\quad B \quad} \\ & & C \to B \end{array}$$



Apsurdnom "izvodu" $A \vee B \vdash A \wedge B$ iz primjera 1.33 pripala bi sljedeća skica koja sadrži nedozvoljeni ciklus.

$$\dfrac{\dfrac{A \vee B}{A \qquad B}}{A \wedge B}$$



Potformulnost i normalna forma Knealejevih dedukcija

U ovoj točki dokazat ćemo nekoliko tehničkih lema o Knealejevim dedukcijama pomoću kojih ćemo dokazati teorem o normalnoj formi za Knealejeve dedukcije.

Najprije ćemo pokazati da za Knealejeve dedukcije vrijedi svojstvo potformulnosti, tj. da ako vrijedi $\Gamma \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta$ onda postoji minimalni Kneale izvod (po broju zaključaka) koji sadrži samo potforme od Γ, Δ. Iz potformulnosti će slijediti dokaz neadekvatnosti Kneale izvoda.

Definicija 1.39.
Za Knealejevu dedukciju kažemo da je ***normalna*** *(ili u normalnoj formi) ako ne sadrži uzastopnu introdukciju i eliminaciju s istom glavnom formulom.*

U normalnim Knealejevim dedukcijama ne postoje uzastopna zaključivanja poput

$$\dfrac{\dfrac{A}{A \vee B}}{A \qquad B} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}}{A} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{}{A \qquad A \to B} \qquad A}{B} \qquad\qquad \dfrac{A \qquad \dfrac{B}{A \to B}}{B}$$

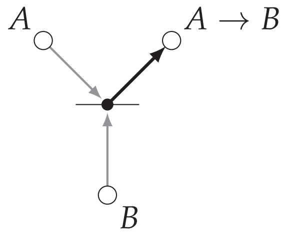
koja (nepotrebno) produžuju dedukciju. U normalnim dedukcijama ne postoji formula koja je glavna formula u dva uzastopna zaključka.

Lema 1.40 (Potformulnost)**.** *Svaka formula u normalnom Kneale izvodu za* $\Gamma \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta$ *je potformula neke formule iz* Γ, Δ.

Dokaz. Na čvorovima skice izvoda Π definirat ćemo novu relaciju uređaja preusmjeravanjem postojećih bridova skice.

Unutar svakog zaključka od Π usmjeriti ćemo bridove na sljedeći način:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad \longmapsto$$



Slika 1.5: Orijentirana skica pravila modus ponens

(i) brid od crte zaključka do glavne formule usmjerimo prema glavnoj formuli tog zaključka

(ii) ostale bridove usmjerimo prema čvoru crte zaključka.

Na primjer, orijentirana skica primjerka pravila (E→) je prikazana na slici 1.5.

Ovako orijentirani graf inducira parcijalni uređaj na Π. Upravo definirani uređaj opisuje relaciju "potformulnosti" – od u do v postoji usmjereni put ako i samo ako je u potformula od v.

Sad možemo nastaviti dokaz. Pretpostavimo da lema ne vrijedi, tj. da postoji normalna Knealejeva dedukcija Π koja sadrži formule koje nisu potformule od Γ, Δ. Neka je Z skup svih (takvih) čvorova koji nisu potformule od Γ ili Δ. Skup Z ne sadrži čvorove premisa ili konkluzija. Svi čvorovi skupa Z su unutarnji, sudjeluju u dva zaključka i incidentni su s točno dva luka.

Zbog potformulnosti ne postoje bridovi iz Z u Z^c (komplement od Z). Skup Z^c je skup formula koje su potformule od Γ, Δ, a skup Z je skup formula koje nisu potformule. Luk od $u \in Z$ do $v \in Z^c$ značio bi da je i u potformula od Γ, Δ.

Budući da je Z po pretpostavci neprazan (i konačan) – postoji m koji je maksimalni element ove relacije. m je iz Z, unutarnji je vrh dedukcije, i zbog maksimalnosti je incidentan je s dva ulazna luka – po jedan luk iz svakog zaključka. To pak znači da je m glavna formula dva uzastopna zaključka. To je moguće samo ako m sudjeluje u uzastopnoj introdukciji i eliminaciji nekog veznika, što je u kontradikciji s pretpostavkom o normalnosti izvoda Π. □

Dedukcije sa slike 1.6 su redundantne, ali su ipak u normalnoj formi. Zato ima smisla govoriti o minimalnim dedukcijama (s najmanje zaključaka).

$$\dfrac{A \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}}{A \wedge B} \qquad\qquad \begin{array}{c} A \vee B \\ \hline A \qquad \dfrac{B}{A \vee B} \end{array}$$

Slika 1.6: Uzastopni zaključci imaju glavne formule istog oblika

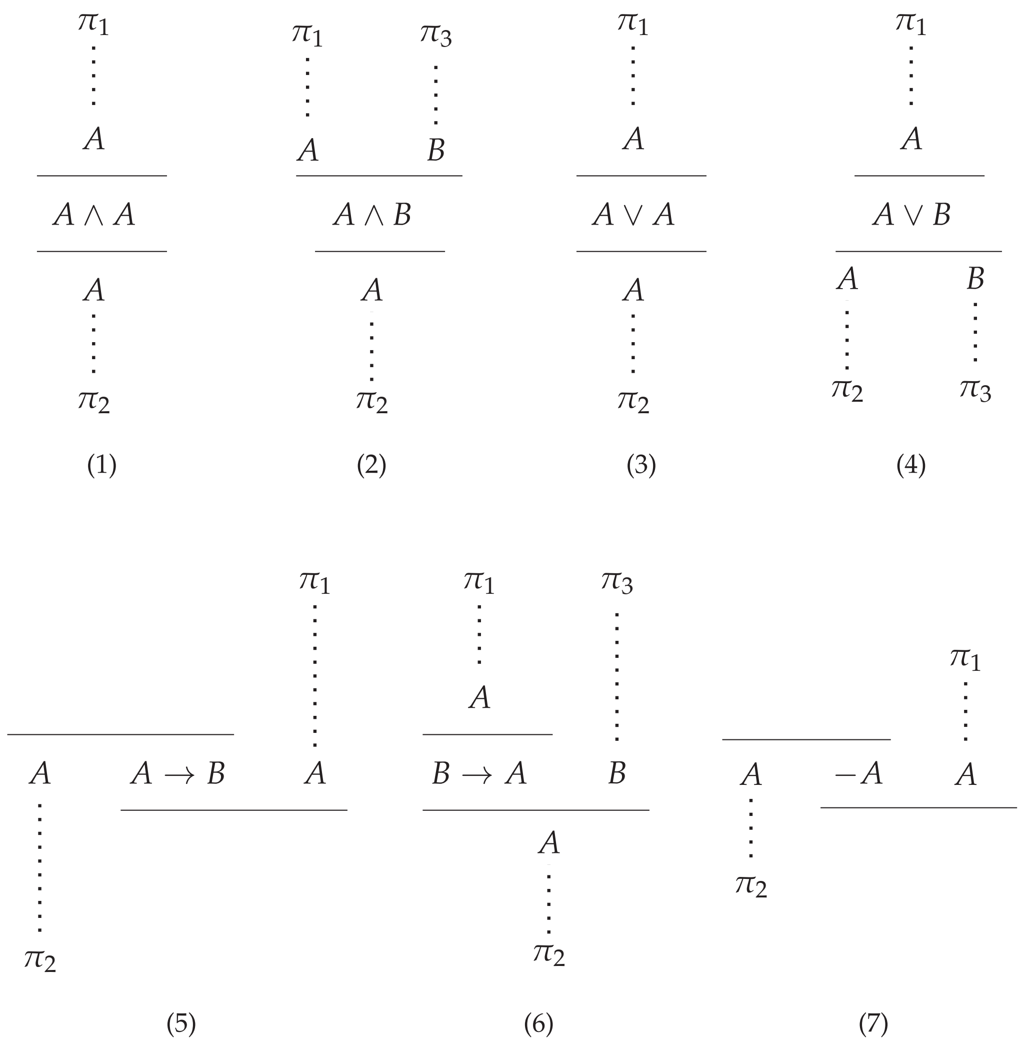
Teorem 1.41 (O normalnoj formi Knealejevih dedukcija)**.**
Ako postoji Knealejeva dedukcija za $\Gamma \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta$*, tada postoji normalna Knealejeva dedukcija za* $\Gamma \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta$*.*

Dokaz. Pokazat ćemo više nego se tvrdi u teoremu – da su minimalne dedukcije u normalnoj formi.

Neka je π izvod za $\Gamma \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta$ s minimalnim brojem zaključivanja. Pokazat ćemo da je π normalan.

Pretpostavimo suprotno, da π nije normalna. Tada su svi mogući oblici π navedeni u slici 1.7.

Za svaki od prethodnih oblika postoji kraća dedukcija (vidi sl. 1.8). koja je također dedukcija Δ iz Γ (premise od π_1 i π_2 su podskup premisa od π, konkluzije od π_1 i π_2 su podskup konkluzija od π), što je u suprotnosti s pretpostavkom o minimalnosti od π. $\square$



Slika 1.7: Oblici "nenormalnih" dedukcija

Slika 1.8: Redukcija "nenormalnih" dedukcije iz sl. 1.7

Za logički račun kažemo da je **potpun** ako se relacija izvodljivosti $\vdash$ i relacija implikacije $\models$ (semantičke posljedice) podudaraju, odnosno ako vrijedi:

$$\Gamma \vdash \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta \,.$$

Račun Knealejevih dedukcija je korektan (teorem 1.34), ali nije potpun. To ćemo pokazati u sljedećem primjerima – postoje tautologije za koje ne postoji Knealejeva dedukcija.

Primjer 1.42. *Formula $B \equiv (A \to A) \wedge (A \vee (A \to A))$ je tautologija za koju ne postoji Kneale izvod.*

Dokaz. B je tautologija. Pokazat ćemo da ne postoji Knealejeva dedukcija od B.

Pretpostavimo suprotno — da postoji (normalna) Knealejeva dedukcija π za $\vdash_{\text{KN}} B$. Možemo pretpostaviti da je π normalna.

Prema lemi 1.40 formule u normalnoj dedukciji su potformule od B. Potformule formule B su

$$A,\ A \to A,\ A \vee (A \to A),\ B$$

S ovim formulama mogući su sljedeći zaključci:

$$\pi_1 \quad \frac{}{A \qquad A \to A} \qquad\qquad \pi_2 \quad \frac{A}{A \to A}$$

$$\pi_3 \quad \frac{A \to A}{A \vee (A \to A)} \qquad\qquad \pi_4 \quad \frac{A \to A \qquad A \vee (A \to A)}{B}$$

$$\pi_5 \quad \frac{A}{A \vee (A \to A)} \qquad\qquad \pi_6 \quad \frac{A \qquad A \to A}{A}$$

$$\pi_7 \quad \frac{A \vee (A \to A)}{A \qquad A \to A} \qquad\qquad \pi_8 \quad \frac{(A \to A) \wedge (A \vee (A \to A))}{A \to A}$$

$$\pi_9 \quad \frac{(A \to A) \wedge (A \vee (A \to A))}{A \vee (A \to A)}$$

Dedukcija π može sadržavati samo prethodne zaključke.

1. Promotrimo zaključke u kojima se pojavljuje formula B.

Ako bi se zaključci π_8 i π_9 našli u izvodu, njima bi trebala prethoditi introdukcija (ne može eliminacija jer je B "najveća" formula u izvodu). To je u suprotnosti s normalnosti od π.

Prema tome, zbog normalnosti moramo odbaciti π_8 i π_9.

Zaključak π_4 koji završava s B ne može biti unutarnji čvor izvoda jer je nakon njega moguća samo eliminacija. Eventualna introdukcija bi dala formulu koja nije potformula od B (nego obrnuto). Eliminacija (E$\wedge$) nakon π_4 krši pretpostavku normalnosti izvoda π.

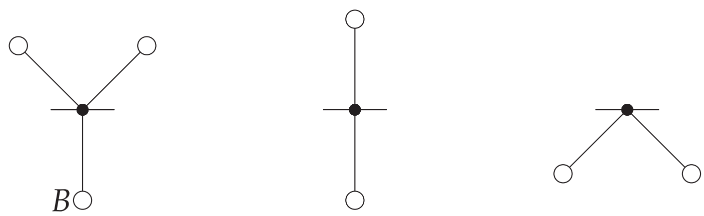
2. Premisa iz π_7 ne može biti početna pretpostavka nego mora biti konkluzija iz π_3 ili π_5. Njihovi spojevi čine sljedeće dedukcije

$$\dfrac{\dfrac{A \to A}{A \vee (A \to A)}}{A \qquad A \to A} \qquad \dfrac{\dfrac{A}{A \vee (A \to A)}}{A \qquad A \to A}$$

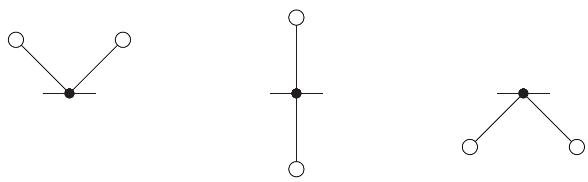
koji ne mogu biti u π jer je π po pretpostavci normalna.

3. Prethodni argument brani nastup π_6 u dedukciji $\vdash_{\mathsf{KN}} B$.
(π_6 može se spojiti samo s π_1 i π_2 što bi pokvarilo normalnost od π.)

4. Preostaju jedino zaključivanja $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.
Na vrhu dedukcije mora biti π_1, na dnu π_4, a u sredini π_2, π_3, π_5. To znači da se pripadna skica mora zatvoriti spajanjem vrhova sljedećih tipova skica:



Skica pripadne Knealejeve dedukcije bi trebao biti graf složen od spojeva prethodnih skica u kojem su svi ovdje neoznačeni (bijeli) vrhovi unutarnji, odnosno spojeni sa dva luka. Za zatvaranje nije bitan vrh B, pa ga možemo maknuti.



Spajanjem ovakvih grafova po (bijelim) vrhovima nije moguće zatvoriti graf bez ciklusa. U zatvaranju ovakvog grafa svi vrhovi (i formule i crte zaključivanja) su stupnja 2. Skice Knealejevih dedukcija su grafovi bez ciklusa (dakle stabla u teoriji grafova) za koje vrijedi da imaju barem jedan vrh stupnja 1 (list). Zaključujemo da ne vrijedi $\vdash_{\mathsf{KN}} B$. $\square$

Primjer 1.43. *Ne postoji Knealejeva dedukcija koja dokazuje distributivnost konjunkcije i disjunkcije:*

$$A \vee (B \wedge C) \vdash_{\mathsf{KN}} (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Dokaz. Pretpostavimo da je Π tražena Knealejeva dedukcija.

Možemo pretpostaviti da je Π minimalna i normalna dedukcija u kojoj vrijedi potformulnost.

1. Zbog potformulnosti vrijedi da su jedine formule u normalnoj dedukciji:

$$A \vee (B \wedge C), A, B \wedge C, B, C$$
$$(A \vee B) \wedge (A \vee C), A \vee B, A, B, A \vee C, A, C$$

   Unutarnji čvorovi dedukcije su

$$A, B \wedge C, B, C, A \vee B, A \vee C$$

2. Gornji listovi od Π mogu biti samo formule $A \vee (B \wedge C)$ koje zbog potformulnosti mogu sudjelovati samo u (E$\vee$).

$$\frac{A \vee (B \wedge C)}{A \qquad B \wedge C}\,.$$

3. Za sljedeći zaključak od $B \wedge C$ vrijedi:

   (a) introdukcija (I$\vee$) s A narušava normalnost od Π

   (b) bilo koja druga introdukcija narušava potformulnost od Π (dobivena konkluzija nije potformula od Γ, Δ.)

   Prema tome sljedeći zaključak formule $B \wedge C$ je samo (E$\wedge$) što znači da su

$$\pi_1 \quad \dfrac{A \vee (B \wedge C)}{A \qquad \dfrac{B \wedge C}{B}} \qquad \text{ili} \qquad \pi_2 \quad \dfrac{A \vee (B \wedge C)}{A \qquad \dfrac{B \wedge C}{C}}$$

   jedini mogući (gornji) dijelovi dedukcije Π.

4. Analognom analizom konkluzije $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ slijedi da su mogući donji dijelovi dedukcije Π sljedeće dedukcije

$$\pi_3 \quad \dfrac{\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{A}{A \vee C}}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)} \qquad\qquad \pi_4 \quad \dfrac{\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{C}{A \vee C}}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

$$\pi_5 \quad \dfrac{\dfrac{B}{A \vee B} \qquad \dfrac{A}{A \vee C}}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)} \qquad\qquad \pi_6 \quad \dfrac{\dfrac{B}{A \vee B} \qquad \dfrac{C}{A \vee C}}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

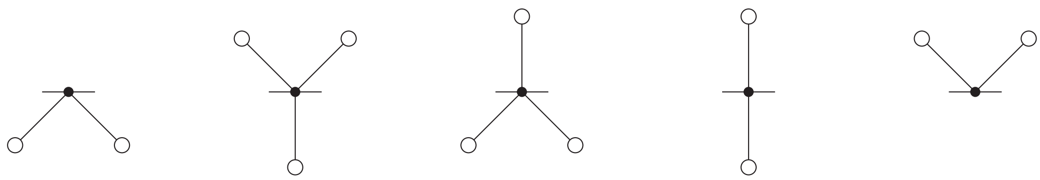
5. Moguće unutarnje dedukcije

$$\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{B}{A \vee B} \qquad \dfrac{A \vee B}{A \qquad B}$$

$$\dfrac{A}{A \vee C} \qquad \dfrac{C}{A \vee C} \qquad \dfrac{A \vee C}{A \qquad C}$$

$$\dfrac{B \qquad C}{B \wedge C} \qquad \dfrac{B \wedge C}{B} \qquad \dfrac{B \wedge C}{C}$$

6. Ako izuzmemo premise i konkluzije, koje za zatvaranje nisu bitne, sve skice su oblika:



Svi čvorovi formula ovih skica u dedukciji Π moraju biti unutarnji čvorovi (stupnja 2). Čvorovi crta zaključivanja su stupnja barem 2. Kao i u prethodnom primjeru, zatvaranje bez ciklusa nije moguće. □

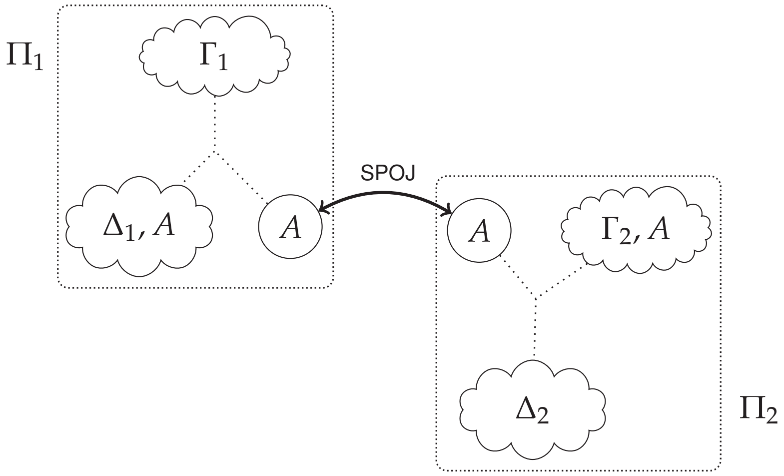
Iz prethodna dva primjera slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1.44. *Račun multiplarnih prirodnih dedukcija s Kneale izvodima* nije *potpun.*

Napomena 1.45. *Za relaciju Kneale izvodljivosti $\vdash_{KN}$ nije dopustivo pravilo reza. U primjeru 1.42 pokazalo se kako su problem u formiranju Knealejeve dedukcije $\vdash_{KN} B$ višestruka pojavljivanja formule A koja ne možemo izrezati (bez zatvaranja ciklusa):*

$$\dfrac{\vdash_{KN} A, B \qquad A \vdash_{KN} B}{\nvdash_{KN} B}$$

Ako za Knealejeve dedukcije Π_1 i Π_2 vrijedi da Π_1 ima barem dvije konkluzije A i Π_2 barem dvije premise A, tada njihovi spojevi ne mogu izrezati sva pojavljivanja od A.



Slika 1.9: Spoj dvije dedukcije koji *ne izrezuje* formulu A

Nakon spoja preko formule A dobijemo dedukciju koja i dalje ima premisu A i konkluziju A (nismo ju uspjeli izrezati). Dakle, za relaciju $\vdash_{\mathsf{KN}}$ ne vrijedi rez:

$$\frac{\Gamma_1, A, A \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash_{\mathsf{KN}} A, A, \Delta_2}{\textbf{ali ne vrijedi} \;\; \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash_{\mathsf{KN}} \Delta_1, \Delta_2}$$

Naravno, ovaj problem se ne pojavljuje kod singularnih prirodnih dedukcija (duplikati premisa A "poklope" se s više kopija dedukcije od A).

Problem duplikata možemo riješiti uvođenjem kontrakcije u pravila dedukcija. Možemo "posuditi" notaciju odbacivanja pretpostavki iz prirodnih dedukcija i tako u multiplarnim dedukcijama "odbacivati duplikate" u kontrakcijama na gore i na dole.

Na primjer

$$\cfrac{(A \land B) \lor (A \land C)}{\cfrac{A \land B}{A_{(1)}} \qquad \cfrac{A \land C}{\cancel{A}_{(1)}}}$$

Možemo dodati i numeričke labele (po uzoru na odbacivanja pretpostavki u NK). Oznake ćemo zapisati pored formula (a ne pored crta zaključivanja).

Definicija 1.46 (Multiplarne dedukcije)**.**

1. *Knealejeva dedukcija Π je multiplarna dedukcija*

2. *Neka je Π_1 multiplarna dedukcija od Δ_1, A iz Γ_1.*
   Neka je Π_2 multiplarna dedukcija iz Γ_1, A.

   Stablo formula Π koje nastaje spojem Π_1 i Π_2 preko formule A je ***multiplarna dedukcija*** *od Δ_1, Δ_2 iz Γ_1, Γ_2.*

   Donje listove A iz Π koji pripadaju podgrafu Π_1 odbacujemo i ne ubrajamo u konkluzije od Π. Gornje vrhove A iz Π koji pripadaju podgrafu Π_2 odbacujemo i ne ubrajamo u premise od Π.

Odbacivanja listova iz definicije zvat ćemo kontrakcije. Kontrakcije radimo prije spajanja dedukcija.

Račun Knealejevih dedukcija s kontrakcijama zovemo račun **multiplarnih dedukcija**. Pripadnu relaciju izvodljivosti označavamo s $\vdash_{\mathsf{MD}}$.

Napomena 1.47. *Sad možemo dati izvod za $\vdash B$ iz primjera 1.42. Ovaj puta ćemo koristiti spoj s kontrakcijama.*

1. *Spojimo π_1 i π_2 iz primjera 1.42. To je "gornji dio" $\vdash A \to A$ tražene dedukcije.*

$$\dfrac{\dfrac{}{A \qquad\qquad \cancel{A \to A}}\,{\scriptstyle (1)}}{{\scriptstyle (1)}\; A \to A}$$

   Napravimo kontrakciju na konkluzijama $A \to A$.

2. *Spojimo π_3 i π_4. To je "donji dio" $A \to A \vdash B$ tražene dedukcije.*

$$\dfrac{{\scriptstyle (2)}\,\cancel{A \to A} \qquad \dfrac{A \to A\ {\scriptstyle (2)}}{A \vee (A \to A)}}{B}$$

   Napravimo kontrakciju na premisama $A \to A$.

3. *Spojimo "gornji" i "donji" dio dedukcije s nužnom kontrakcijom. Dobili smo multiplarnu dedukciju $\vdash B$.*

$$\dfrac{\cancel{A \to A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \qquad\qquad \cancel{A \to A}}}{A \to A}}{A \vee (A \to A)}}{(A \to A) \wedge (A \vee (A \to A))}$$

Napomena 1.48. *Kontrakcije u multiplarnim dedukcijama možemo postići i dodavanjem zaključaka sljedećih oblika*

$$\frac{A \qquad A}{A} \qquad\qquad i \qquad\qquad \frac{A}{A \qquad A}\ .$$

s kojima je dozvoljeno zatvarati cikluse.
Na primjer, dozvoljeno je spojiti zaključke

$$\frac{A \vee A}{A \qquad A} \qquad\qquad \frac{A \qquad A}{A}$$

preko formule A i zatvoriti ciklus u grafu formula:

$$\cfrac{\cfrac{A \vee A}{A \qquad A}}{A}\ .$$

Na ovaj način možemo problem duplikata riješiti prije spoja.

Propozicija 1.49. *Za račun multiplarnih dedukcija vrijedi potformulnost.*

Potformulnost možemo direktno i jednostavno dokazati indukcijom, a možemo i uzeti kao korolar teorema o normalnoj formi multiplarnih dedukcija.

Teorem 1.50 (o normalnoj formi multiplarnih dedukcija)**.** *Ako postoji multiplarna dedukcija od Δ iz Γ, tada postoji multiplarna dedukcija od Δ iz Γ u normalnoj formi.*

Dokaz. Metoda multiplarnih dedukcija (koju ćemo pokazati u sljedećem poglavlju) nalazi dedukciju u normalnoj formi. Metodu možemo uzeti kao konstruktivni dokaz prethodne propozicije i teorema. □

Za razliku od računa Knealejevih dedukcija, za multiplarne dedukcije vrijedi teorem potpunosti.

Teorem 1.51 (Potpunost)**.**
Račun multiplarnih dedukcija je potpun.

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{MD}} \Delta \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma \models \Delta\ .$$

Dokaz korektnosti ($\Rightarrow$).
Uz prihvaćanje kontrakcija kao ovakvih posebnih oblika zaključivanja, možemo ponoviti dokaz korektnosti računa Kneale dedukcija. □

Potpunost računa multiplarnih dedukcija ćemo dokazati kasnije, u poglavlju 2.

Napomena 1.52. *U računu multiplarnih dedukcija sva su pravila zaključivanja lokalna: svaka formula u dedukciji je logička posljedica formula koje su u dedukciji neposredno iznad nje. Globalna pravila multiplarnih dedukcija su pravila izgradnje izvoda: spoj (s kontrakcijom).*

1.8 Sekvente kao metazapis multiplarnih dedukcija

U ovoj točki objasniti ćemo kako se dedukcije multiplarnih sekventi mogu shvatiti kao "recept" za izgradnju multiplarnih dedukcija.

Svako od sekventnih pravila interpretirat ćemo kao pravilo izgradnje multiplarne dedukcije (spajanjem odgovarajućih jednostavnijih dedukcija).

Strukturna pravila

I. Rez (tranzitivnost)
Rez u sekventnom računu govori o tome da se izvod s konkluzijom A i izvod s premisom A mogu spojiti u izvod u kojem se formula "izreže" iz premisa i konkluzija.

U prethodnoj točki smo vidjeli da ovakav skupovni rez možemo postići kontrakcijama i spojem.

II. Slabljenje

(a) Slabljenje nalijevo u sekventama je u slabljenje dedukcija prema gore. Dedukciju koja ima premisu A možemo oslabiti u dedukciju koja ima premise A, B.

$$\begin{array}{c} A \\ \hline \vdots \end{array} \qquad \xrightarrow{\text{slabljenje na gore}} \qquad \begin{array}{c} A \qquad B \\ \hline A \wedge B \\ \hline A \\ \hline \vdots \end{array}$$

(b) Slabljenje nadesno u slabljenje dedukcija prema dole

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \hline A \end{array} \qquad \xrightarrow{\text{slabljenje na dole}} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \hline A \\ \hline A \vee B \\ \hline A \qquad B \end{array}$$

Slabljenje je implicitno uključeno u definiciju multiplarnih dedukcija: *dedukcija od* Δ *iz* Γ *je dedukcija od* Δ' *iz* Γ' *za* $\Gamma' \supset \Gamma$ *i* $\Delta' \supset \Delta$.

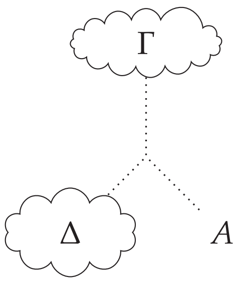
III. Preklapanje
Prema definiciji dedukcija svaka je formula A dedukcija od A iz A. Slabljenjem prema dole ili gore možemo je dovesti do odgovarajuće multiplarne dedukcije inicijalne (preklapajuće) sekvente.

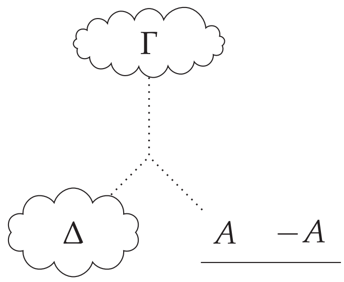
IF-pravila

I. Uvođenje negacije nalijevo $(- \vdash)$

$$(- \vdash)\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{-A, \Gamma \vdash \Delta}$$

govori o tome da iz dedukcije od Δ iz pretpostavki Γ, A možemo izgraditi dedukciju od $\Delta, -A$ iz pretpostavki Γ:

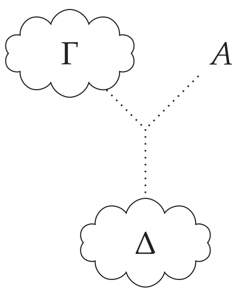


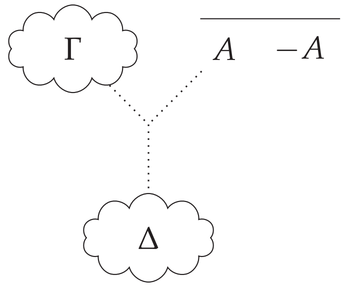


II. Uvođenje negacije nadesno $(\vdash -)$

$$(\vdash -)\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, -A}$$

govori o tome da iz dedukcije od Δ iz pretpostavki Γ, A možemo izgraditi dedukciju od $\Delta, -A$ iz pretpostavki Γ:

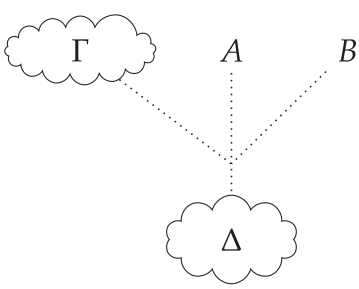


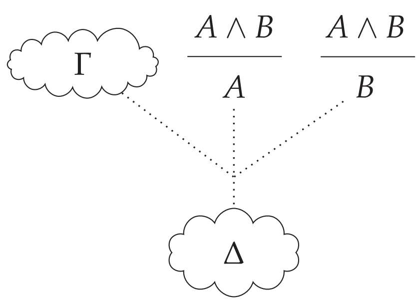


III. Pravilo $(\wedge \vdash)$

$$(\wedge \vdash)\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$$

govori o tome da se dedukcija od Δ iz pretpostavki Γ, A može pretvoriti u dedukciju od $\Delta, -A$ iz pretpostavki Γ:





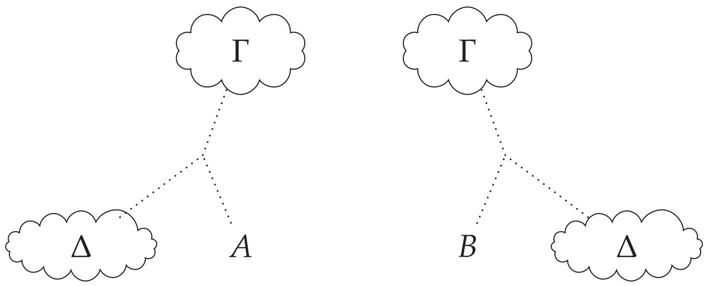
IV. Pravilo ($\vdash \wedge$)

$$(\vdash \wedge)\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$$

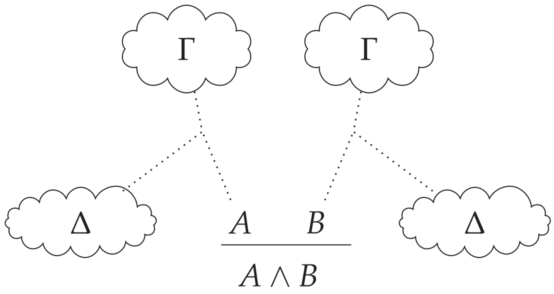
govori o tome da se dvije dedukcije

(a) dedukcija Δ, A iz pretpostavki Γ i

(b) dedukcija Δ, B iz pretpostavki Γ



mogu "spojiti" u dedukciju od Δ, $A \wedge B$ iz pretpostavki Γ:



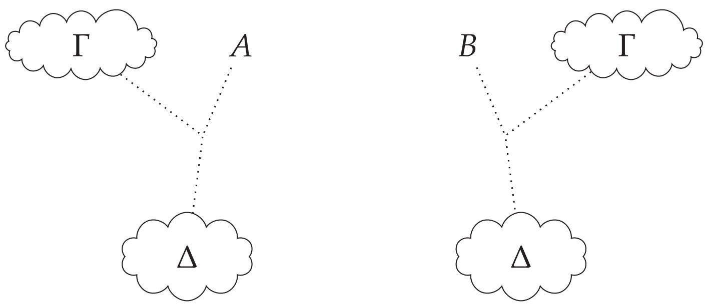
V. Pravilo ($\vee \vdash$)

$$(\vee \vdash)\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$$

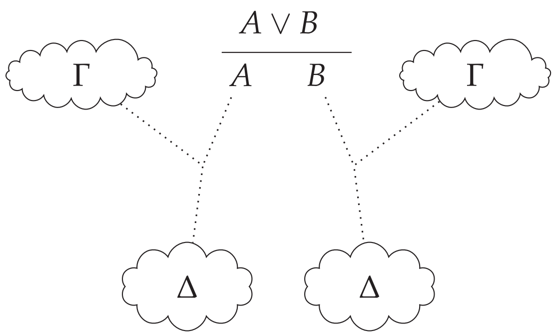
govori o tome da se dvije dedukcije

(a) dedukcija Δ iz pretpostavki Γ, A; i

(b) dedukcija Δ iz pretpostavki Γ, B



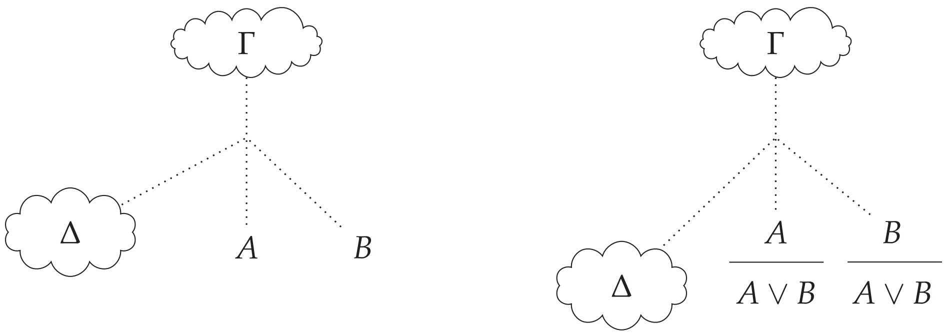
može prevesti u dedukciju



VI. Pravilo ($\vdash \vee$)

$$(\vdash \vee)\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

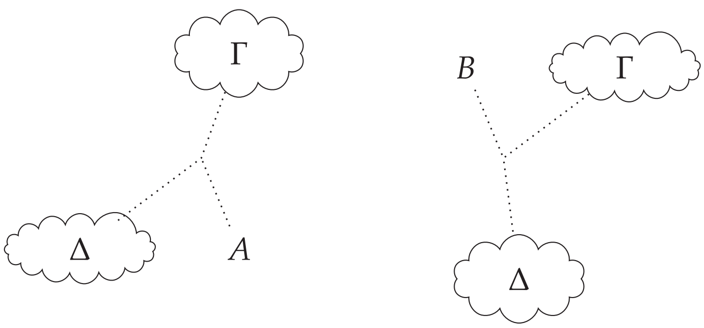
govori da se dedukciju s konkluzijama Δ, A i B može dopuniti u dedukciju od $\Delta, A \vee B$ iz Γ.



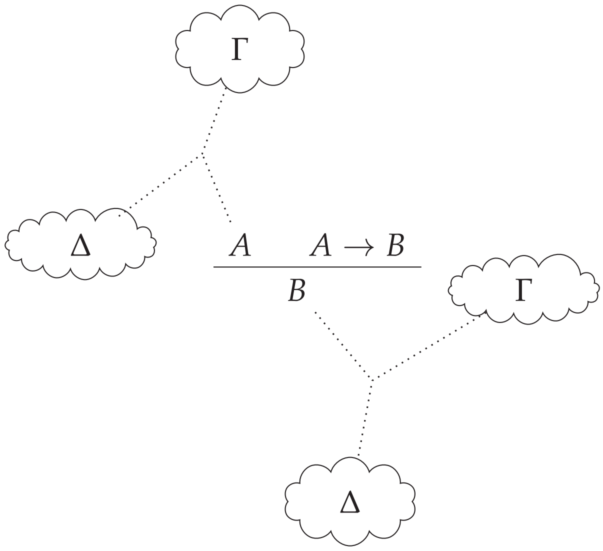
VII. Pravilo ($\to\vdash$)

$$(\to\vdash)\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}$$

govori da se dvije dedukcije



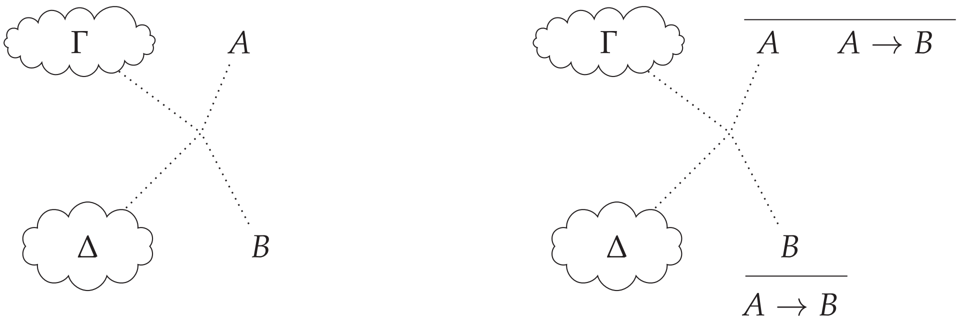
mogu spojiti sa zaključkom $\dfrac{A \qquad A \to B}{B}$ u dedukciju



VIII. Pravilo $(\vdash\rightarrow)$

$$(\vdash\rightarrow)\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B}$$

govori kako se dedukcija s premisom A i konkluzijom B može pretvoriti u dedukciju bez premise A s konkluzijom $A \rightarrow B$.



⋆ ⋆ ⋆

Prethodne sheme omogućuju nam da dedukciju sekvente $\Gamma \vdash \Delta$ koristimo kao "recept" za izgradnju multiplarne dedukcije od Δ iz Γ.

Primjer 1.53. *Dedukcija sekvente*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash Q, P} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash Q}}{P \vdash Q, \overline{Q}}}{P \vdash Q, P \wedge \overline{Q}}}{\vdash \overline{P}, Q, P \wedge \overline{Q}}}{\vdash \overline{P} \vee Q, P \wedge \overline{Q}}}{-(P \wedge \overline{Q}) \vdash \overline{P} \vee Q}$$

sekvente

$$-(P \wedge -Q) \vdash -P \vee Q$$

može se korištenjem prethodnih shema prepisati u multiplarnu dedukciju.

Izgraditi ćemo multiplarnu dedukciju korak po korak prema sekventnoj dedukciji.

1. Postavimo dedukcije inicijalnih sekventi $P \vdash P, Q$ i $P, Q \vdash Q$ (vidi slabljenje):

$$\dfrac{\dfrac{P}{P \vee Q}}{P \qquad Q} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{P \qquad Q}{P \wedge Q}}{Q}$$

2. U desnoj dedukciji prebacimo premisu Q u konkluziju $-Q$:

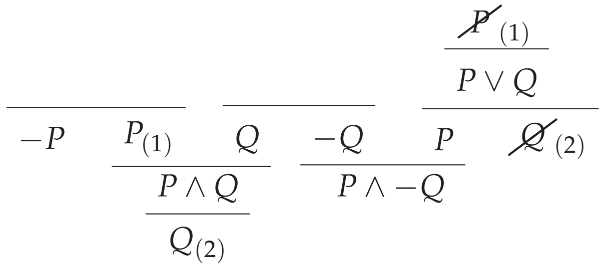
$$\dfrac{\dfrac{P \qquad \dfrac{}{Q \qquad -Q}}{P \wedge Q}}{Q}$$

3. Spojimo prethodne dedukcije lijeve i desne grane (uvođenje $(\vdash \wedge)$)

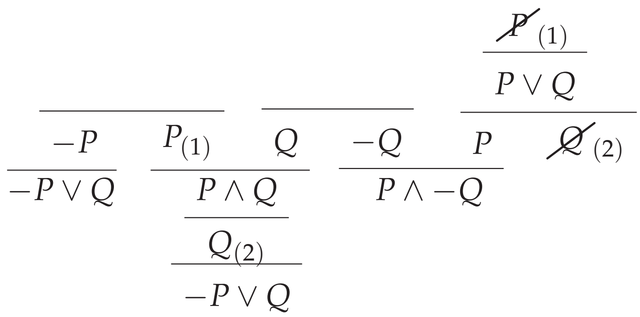
$$\dfrac{\dfrac{P_{(1)} \qquad \dfrac{}{Q \qquad -Q}}{P \wedge Q}}{Q_{(2)}} \qquad \dfrac{-Q \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{P}_{(1)}}{P \vee Q}}{P \qquad \cancel{Q}_{(2)}}}{P \wedge -Q}$$

Nakon spoja napravimo kontrakciju premise P, i zatim kontrakciju konkluzije Q.

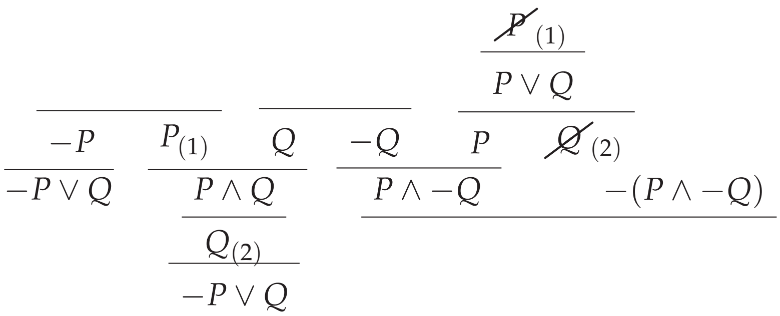
4. Spojimo P sa zaključkom $\dfrac{}{-P \qquad P}$ (nakon toga P više nije u premisama dedukcije):



5. Sljedeći korak je uvođenje $\vee$.



6. $(- \vdash)$ na $P \wedge -Q$ govori o tome da formula $(P \wedge -Q)$ uz negaciju prelazi u premise:



Premisa dedukcije je $-(P \wedge -Q)$, konkluzija dedukcije je $-P \vee Q$.

Kontrakcija na konkluziji $-P \vee Q$ nije potrebna, budući da je dedukcija gotova (kontrakcije su nužne samo prije spojeva/reza).

$\square$

Napomena 1.54. *Uočimo da u prethodnoj dedukciji formule $P \wedge Q$ i $P \vee Q$ nisu potformule premisa i konkluzija. Prema tome dedukcija nije u normalnoj formi (i nije minimalna).*

Jednostavnija dedukcija je

$$
\begin{array}{cccccc}
\cline{1-2}\cline{3-4}
-P & P_{(1)} & Q & -Q & \cancel{P}_{(1)} & \\
\cline{1-1}\cline{2-3}\cline{4-5}
-P \vee Q & \multicolumn{2}{c}{P \wedge Q} & \multicolumn{2}{c}{P \wedge -Q} & -(P \wedge -Q) \\
\cline{2-3}\cline{4-6}
 & \multicolumn{2}{c}{Q} & & & \\
\cline{2-3}
 & \multicolumn{2}{c}{-P \vee Q} & & &
\end{array}
$$

Korespondencija sekventnih dedukcija u normalnoj formi i prirodnih dedukcija u normalnoj formi nije trivijalna (vidi [Ung92]).

Možemo primijetiti da smo obje formule uveli u prvom koraku (kod primjene sheme za slabljenje).

Potpunost računa multiplarnih dedukcija slijedi iz potpunosti računa LK: za $\Gamma \models \Delta$ postoji sekventna dedukcija koju prema prethodnom postupku prevodimo u multiplarnu dedukciju.

1.9 Analitičke multiplarne dedukcije

Za račune u kojima vrijedi potformulnost kaže se da su analitički. Račun sekventi i račun semantičkih stabala su analitički računi. U računima sekventi i semantičkih stabala vrijedi i više od toga – njihova analitičnost omogućuje direktan postupak izgradnje dokaza (sekventne dedukcije ili semantičkoga stabla).

Za prirodne dedukcije[1] Gentzenovog tipa nemamo takav direktni postupak izgradnje dedukcije.

Budući da za račun multiplarnih dedukcija vrijedi potformulnost, dedukciju od $\Gamma \vdash \Delta$ možemo tražiti među dedukcijama koje sadrže samo potformule od Γ, Δ.

Da li u računu prirodnih dedukcija Gentzenovog tipa bezuvjetno vrijedi svojstvo potformulnosti ovisi o tome je li pravilo *reductio ad absurdum*

$$
\text{(RAA)}\ \dfrac{\begin{array}{c}\overline{\neg A}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}
$$

dio računa ili ne. Gentzen u [Gen35] ne navodi (RAA) kao pravilo računa prirodnih dedukcija, dok s druge strane Prawitzov račun dedukcija u monografiji [Pra06] i Van Dalen u [Dal04] sadrže (RAA) kao jedno od pravila.

Definicija 1.55.
Neka je složena formula F jedna od premisa multiplarne dedukcije π. Ako je π

(i) u normalnoj formi;

(ii) svi listovi u π su potformule od F

*reći ćemo da je π **analitička multiplarna dedukcija od** F **na dole**.*

*Analogno, ako je složena formula F (jedna od) konkluzija multiplarne dedukcije π, reći ćemo da je π **analitička multiplarna dedukcija od** F **na gore**.*

*Ako su svi listovi osim F atomi, reći ćemo da je analitička dedukcija π **završena**.*

U ovom radu ćemo pod pojmom analitičke dedukcije smatrati analitičke multiplarne dedukcije na gore ili na dole (u smislu prethodne definicije), iako bi u duhu pret-

[1] Smullyan je u [Smu65] razradio analitički postupak za linearizirane prirodne dedukcije (u duhu dedukcija Jaskowskog ili Fitcha).

hodne diskusije analitičkim dedukcijama mogli smatrati sve dedukcije za koje vrijedi potformulnost, tj. one čiji su svi unutarnji čvorovi potformule listova.

Na primjer, budući da pravilo (E∧) ima dva oblika, dedukcije

$$\frac{X \wedge Y}{X} \qquad \text{i} \qquad \frac{X \wedge Y}{Y}$$

su *sve* analitičke dedukcije od $X \wedge Y$ na dole.

Složenu formulu F možemo analizirati *na dole* tako da tražimo zaključke u kojima se eliminira glavni veznik formule F. To su zaključci u kojima je premisa F glavna formula.

Složene formule analiziramo na sljedeći način:

- analiza formule F na dole:
  formulu F spojimo sa svim zaključcima u kojima je ona glavna premisa
  (to su zaključci eliminacije glavnog veznika od F)
- analiza formule F na gore:
  formulu F spajamo sa svim zaključcima u kojima je F glavna konkluzija
  (to su zaključci introdukcije glavnog veznika od F)

Multiplarna pravila zaključivanja možemo ponoviti kao pravila analize svojih glavnih formula na dole (lijevi stupac) i na gore (desni stupac):

$\boxed{\wedge}\downarrow$	$\dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}$	$\uparrow\boxed{\wedge}$	$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}$
$\boxed{\vee}\downarrow$	$\dfrac{A \vee B}{A \qquad B}$	$\uparrow\boxed{\vee}$	$\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}$
$\boxed{\to}\downarrow$	$\dfrac{A \qquad A \to B}{B}$	$\uparrow\boxed{\to}$	$\dfrac{B}{A \to B} \qquad \dfrac{}{A \qquad A \to B}$
$\boxed{-}\downarrow$	$\dfrac{A \qquad -A}{}$	$\uparrow\boxed{-}$	$\dfrac{}{A \qquad -A}$

Tablica 1.7: Pravila analize na dole (lijevi stupac) i na gore (desni stupac)

Pravila (E$\wedge$), (I$\vee$), (E$\rightarrow$) imaju po dva različita zaključka π_1 i π_2. U svakom od tih zaključaka nalazi se točno dvije formule: glavna formula i po jedna njezina neposredna potformula.

U tom slučaju pod "spoj dedukcije Π s dva zaključka" podrazumijevamo dvije dedukcije koje dobijemo tako da kopiju dedukcije Π spojimo jednu s π_1, a drugu s π_2.

$$\frac{\Pi}{\pi_1} \qquad\qquad \frac{\Pi}{\pi_2}$$

Algoritam 1.1: Analiza od F na dole

ulaz : složena formula F

$$\begin{array}{c}\boxed{F}\\ \downarrow\end{array}$$

izlaz : odgovarajući zaključak/zaključci (prema tablici 1.7) gdje je F premisa i glavna formula

$$\begin{array}{c}\boxed{F}\\ \downarrow\end{array} \mapsto \frac{\boxed{F}}{F_1 \qquad F_2} \qquad \text{ili} \qquad \begin{array}{c}\boxed{F}\\ \downarrow\end{array} \mapsto \frac{\boxed{F}}{F_1}\,,\ \frac{\boxed{F}}{F_2}$$

(F_1 i F_2 nisu nužno konkluzije kao što skica algoritma 1.1 sugerira. Bitno je da su F_1 i F_2 listovi dedukcije čija je premisa i glavna formula F.)

Analogno tražimo zaključke od G na gore.

Primjer 1.56. *Potražimo završene analitičke dedukcije od $X \rightarrow (Y \wedge Z)$ na gore. To ćemo označiti sljedećom oznakom:*

$$\begin{array}{c}\uparrow\\ \boxed{X \rightarrow (Y \wedge Z)}\end{array}$$

(Okvirom je naznačena složena formula koja se analizira, a strelica po potrebi označava smjer analize.)

Postoje dva zaključka u kojima je glavna formula oblika $A \rightarrow B$, pa zato dobijemo dvije moguće dedukcije:

$$\frac{\begin{array}{c}\uparrow\\ \boxed{Y \wedge Z}\end{array}}{X \rightarrow (Y \wedge Z)}\ , \qquad\qquad \frac{}{X \qquad X \rightarrow (Y \wedge Z)}$$

Drugi je zaključak analitički (X je atom). U prvoj dedukciji je $Y \wedge Z$ složena premisa, pa nastavljamo analizu, opet na gore.

Postoji jedan zaključak s glavnom konkluzijom $Y \wedge Z$. Konačno, imamo dvije analitičke dedukcije:

$$\dfrac{\dfrac{Y \qquad Z}{Y \wedge Z}}{X \to (Y \wedge Z)} \quad , \qquad\qquad \dfrac{}{X \qquad X \to (Y \wedge Z)}$$

Primjer 1.57. *Pokažimo na primjeru kako možemo pronaći sve završene analitičke dedukcije od $(X \wedge -Y) \to Z$ na dole:*

$$\begin{array}{c}\boxed{(X \wedge -Y) \to Z} \\ \downarrow\end{array}$$

Postoji točno jedan zaključak u kojemu se "$\to$" eliminira (modus ponens):

$$\dfrac{\overset{\uparrow}{\boxed{X \wedge -Y}} \qquad (X \wedge -Y) \to Z}{Z}$$

Konkluzija Z je atom. Premisa $X \wedge -Y$ je složena, pa ju analiziramo (na gore, pravilo (I$\wedge$)*, samo jedan zaključak):*

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\uparrow}{\boxed{-Y}} \qquad X}{X \wedge -Y} \qquad (X \wedge -Y) \to Z}{Z}$$

Dobili smo dva nova lista X i $-Y$. Složeni list $-Y$ analiziramo na gore (pravilo (I$-$)*, jedan zaključak), i konačno dobijemo dedukciju:*

$$\dfrac{\dfrac{\overline{Y \qquad -Y} \qquad X}{X \wedge -Y} \qquad (X \wedge -Y) \to Z}{Z}$$

Postupak se svodi na analizu potformula zadane formule (staje na atomima). U prethodnom primjeru dobili smo točno jednu dedukciju, budući da niti jedan od zaključaka nije imao dva oblika.

Algoritam 1.2: Traženje analitičke dedukcije formule F na dole (na gore)

ulaz : složena formula F i dedukcija Π čija je F premisa (konkluzija)
izlaz: niz analitičkih dedukcija od F

$P \leftarrow$ skup zaključaka od F na dole (odnosno na gore)
while *u P postoji Π koja nije analitička* **do**
    Neka je $v \neq F$ neposjećeni složeni list od Π
    if *v je premisa od Π* **then**
        π_1, π_2 neka su zaključci od v na gore
    if *v je konkluzija od Π* **then**
        π_1, π_2 neka su zaključci od v na dole
    Neka je $\Pi_1 \leftarrow$ spoj od Π s π_1 preko v
    Neka je $\Pi_2 \leftarrow$ spoj od Π s π_2 preko v
    Zamijeni Π u P s dedukcijama Π_1, Π_2

Teorem 1.58. *Algoritam 1.2 traženja analitičkih dedukcija nalazi* sve *završene analitičke dedukcije zadane formule.*

Objasnimo tvrdnju teorema. Neka su $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$ analitičke dedukcije koje je pronašao algoritam u analizi formule F. Ako je dedukcija Π od Δ iz Γ analitička dedukcija formule F, tada postoji analitička dedukcija Π_i takva da je skup premisa Π_i sadržan u Γ, a skup konkluzija u Δ.

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule. □

Definicija 1.59.
*Neka je Π analitička dedukcija formule F. Sve su formule u dedukciji potformule od F. Za F ćemo reći da je **glavna formula analitičke dedukcije** Π.*

Ako je dedukcija Π zaključak, pojam glavne formule dedukcije poklapa se s pojmom glavne formule zaključka.

Kako pronaći multiplarnu dedukciju $\Gamma \vdash \Delta$?

Ako postoji dedukcija $\Gamma \vdash \Delta$, tada se ta dedukcija može prikazati spojevima dedukcija čije su premise iz Γ i dedukcija čije su konkluzije iz Δ.

U sljedećem poglavlju ćemo pokazati da se, ako vrijedi $\Gamma \models \Delta$, dedukcija od $\Gamma \vdash \Delta$ može izgraditi spajanjem upravo *analitičkih* dedukcija.

Analitičke dedukcije premisa (na dole) iz Γ i konkluzija (na gore) iz Δ možemo odrediti algoritmom 1.2 traženja analitičkih dedukcija.

Ukoliko spojevima analitičkih dedukcija uspijemo "izrezati" sve listove koji nisu iz Γ, Δ, dobiti ćemo dedukciju od $\Gamma \vdash \Delta$.

To nam daje konstruktivni dokaz potpunosti računa multiplarnih dedukcija (dokaz teorema 1.51).

Primjer 1.60.
Pokažimo spajanjem analitičkih dedukcija da vrijedi $A \wedge B \vdash A \vee B$.

Potražimo najprije analitičke dedukcije od $A \wedge B$ na dole i $A \vee B$ na gore:

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B} \qquad\qquad \frac{A}{A \vee B} \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}$$

Spoj prve i treće dedukcije preko formule A daje traženu dedukciju:

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{A}}{A \vee B}$$

Primjer 1.61.
Pokažimo spajanjem analitičkih dedukcija da vrijedi $A \to C$ iz $A \to B, B \to C$.

1. *Analiza:*
   Moramo pronaći odgovarajuće analitičke dedukcije

   $$\begin{array}{c} \boxed{A \to B} \\ \downarrow \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \boxed{B \to C} \\ \downarrow \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \uparrow \\ \boxed{A \to C} \end{array}$$

   Tražene dedukcije su:

   $$\frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad\qquad \frac{B \qquad B \to C}{C} \qquad\qquad \frac{C}{A \to C} \qquad\qquad \frac{}{A \qquad A \to C}$$

2. *Sinteza (sparivanje):*
   Ove dedukcije možemo spojiti u

   $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \to C \qquad A} \qquad A \to B}{B} \qquad B \to C}{C}}{A \to C}$$

   Dobili smo multiplarnu dedukciju $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

Dedukcija dobivena spojevima analitičkih dedukcija je u normalnoj formi (formule na spoju nisu glavne formule svojih zaključaka). Dobivena dedukcija ne mora biti minimalna. Na primjer, spajanjem analitičkih dedukcija $A \wedge B$ na gore i na dole dobili bismo sljedeću dedukciju

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}}{A \wedge B},$$

koja dokazuje sekventu $A \wedge B \vdash A \wedge B$. Trivijalna dedukcija s jednim vrhom (formulom) $A \wedge B$ kraći dokaz iste sekvente.

U sljedećem poglavlju ćemo ovu metodu razraditi, semantički interpretirati, i na kraju pokazati da je ekvivalentna metodi Bethovih semantičkih stabala.

U prethodnom primjeru smo iz dobivenih analitičkih dedukcija uspjeli lako "spariti" analitičke dedukcije i sastaviti traženu dedukciju $\Gamma \vdash \Delta$. Umjesto ovakvog *ad-hoc* sparivanja, u sljedećem poglavlju ćemo pokazati sistematičan postupak traženja sparivanja i konstrukcije dedukcije $\Gamma \vdash \Delta$.

2

Semantički pristup

U ovoj točki ćemo (opet) razmatrati samo konačne skupove formula $(\Gamma, \Delta, \ldots)$.

2.1 Uvod

Preslikavanje $\phi : A_v \to \{\top, \bot\})$ sa skupa propozicijskih varijabli A_v u skup $\{\top, \bot\}$ zovemo **interpretacija**. Interpretaciju (totalnu ili parcijalnu) na skupu propozicijskih varijabli koja neki skup formula Γ čini istinitim zovemo **model** za Γ.

Model koji obara implikaciju $\Gamma \models \Delta$ zovemo **kontramodel**. To je svaki model u kojem su sve formule iz Γ istinite i sve formule iz skupa Δ neistinite.

Semantički postupci dokazivanja implikacije $\Gamma \models \Delta$ svode se na traženje njezinoga kontramodela. Kad postupak pokaže da kontramodel ne postoji možemo zaključiti da vrijedi $\Gamma \models \Delta$.

Izraz oblika $A \top$ ili $A \bot$, gdje je A formula, zovemo **označena formula** ili **zahtjev**. Ako je Γ skup formula onda s $\Gamma \top$ i $\Gamma \bot$ označavamo odgovarajuće skupove označenih formula (npr. sve formule u $\Gamma \top$ označene su s $\top$).

Semantička pravila

Klasična propozicijska logika je istinosno funkcionalna. Istinitost svake formule funkcionalno ovisi o istinitosti njezinih potformula, odnosno njezinih atoma. Tako istinitost složenih (neatomarnih) zahtjeva ovisi o istinitosti njihovih potformula.

Na primjer, složeni zahtjev $(A \wedge B)\top$ ispunjen je ako su istovremeno ispunjeni zahtjevi $A\top$ *i* $B\top$. Zahtjev $(A \wedge B)\bot$ ispunjen je ako je ispunjen zahtjev $A\bot$ *ili* $B\bot$.

$\boxed{-\top}$	$\dfrac{(-A)\top}{A\bot}$	$\boxed{-\bot}$	$\dfrac{(-A)\bot}{A\top}$
$\boxed{\wedge\top}$	$\dfrac{(A \wedge B)\top}{\begin{array}{c}A\top\\ B\top\end{array}}$	$\boxed{\wedge\bot}$	$\dfrac{(A \wedge B)\bot}{A\bot \qquad B\bot}$
$\boxed{\vee\top}$	$\dfrac{(A \vee B)\top}{A\top \qquad B\top}$	$\boxed{\vee\bot}$	$\dfrac{(A \vee B)\bot}{\begin{array}{c}A\bot\\ B\bot\end{array}}$
$\boxed{\rightarrow\top}$	$\dfrac{(A \rightarrow B)\top}{A\bot \qquad B\top}$	$\boxed{\rightarrow\bot}$	$\dfrac{(A \rightarrow B)\bot}{\begin{array}{c}A\top\\ B\bot\end{array}}$

Tablica 2.1: Semantička pravila analize IF-veznika

Za semantičku analizu veznika $-$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ koristimo pravila tablice 2.1 kojima složene zahtjeve prevodimo u ekvivalentne sintaktički jednostavnije zahtjeve.

Primjećujemo da su pravila za analizu binarnih veznika $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ jednog od sljedeća dva oblika:

$$\dfrac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}} \qquad\qquad \dfrac{\beta}{\beta_1 \qquad \beta_2}$$

α zahtjev pretvara se u jednostavnije α_1 i α_2 zahtjeve koji moraju istovremeno vrijediti. β zahtjev pretvara se u alternativne β_1 i β_2 zahtjeve od kojih mora barem jedan biti zadovoljen.

α pravila su $(\wedge\top), (\vee\bot), (\rightarrow\bot)$.

α	α_1	α_2
$A \wedge B \top$	$A \top$	$B \top$
$A \vee B \bot$	$A \bot$	$B \bot$
$A \rightarrow B \bot$	$A \top$	$B \bot$

Tablica 2.2: α pravila označenih zahtjeva

β pravila su $(\wedge\bot), (\vee\top), (\rightarrow\top)$.

β	β_1	β_2
$A \wedge B \bot$	$A \bot$	$B \bot$
$A \vee B \top$	$A \top$	$B \top$
$A \rightarrow B \top$	$A \bot$	$B \top$

Tablica 2.3: β pravila označenih zahtjeva

α i β oznake dio su unificirane notacije koju je u semantičku analizu uveo Raymond Smullyan. Negirani zahtjevi $-A\top$ i $-A\bot$ su istovremeno α i β oblika, i za njih vrijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$.

Ponekad se zahtjeve ne označava s $\top$ i $\bot$. Propozicijsku formulu možemo smatrati zahtjevom označenim s $\top$. Tako umjesto $A\top$ možemo zapisati samo A, a umjesto $A\bot$ zapisat ćemo $-A$.

U tom slučaju reći ćemo da su formule **neoznačeni zahtjevi**. S neoznačenim zahtjevima semantička analiza provodi se do literala: umjesto atomarnog zahtjeva $X\top$ zapisujemo samo atom X, a umjesto zahtjeva $X\bot$ pisat ćemo $-X$.

U neoznačenoj varijanti α pravila i β pravila navodimo u tablici 2.4.

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$-(A \vee B)$	$-A$	$-B$
$-(A \rightarrow B)$	A	$-B$

β	β_1	β_2
$-(A \wedge B)$	$-A$	$-B$
$A \vee B$	A	B
$A \rightarrow B$	$-A$	B

Tablica 2.4: α i β pravila neoznačenih zahtjeva

Uočimo da vrijedi

$$\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$$
$$\beta \equiv \beta_1 \vee \beta_2$$

U ovom kontekstu složenim formulama smatramo formule koje nisu literali.

Za svaku složenu formulu propozicijske logike je jasno da li je α ili β i koje su njezine α_1, α_2 i β_1, β_2 ako postoje.

Primjenjivanjem pravila semantičke analize sve do literala možemo dobiti logički ekvivalentnu formulu u bazi veznika $\wedge, \vee, -$. Iz tog se oblika može odrediti konjunktivna (ili disjunktivna) normalna forma ekvivalentna polaznom skupu zahtjeva.

Na primjer, pokazat ćemo da se semantička analiza semantičkim stablima može shvatiti kao prevođenje u disjunktivnu normalnu formu (ekvivalentnu konjunkciji skupa polaznih zahtjeva).

Napomena 2.1 (α i β oblik formule)**.** *Za složenu propozicijsku formulu A (ako je interpretiramo kao neoznačeni zahtjev) prema tablici 2.4 možemo jasno reći je α ili β oblika. U tom slučaju su dobro definirani i pojmovi njezinih potformula (α_1 i α_2 za α formule, te β_1, i β_2 za β formule).*

Napomena 2.2. *U tablicama 2.4 nema formule oblika $- - A$. Takva je formula istovremeno α i β oblika pri čemu su $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 = A$.*

U ostatku poglavlja ćemo za formule (kao i za zahtjeve) govoriti da su α ili β oblika.

Napomena 2.3. *Označene zahtjeve možemo smatrati formulama. "Skidanje" oznake sa zahtjeva pretvara označeni zahtjev u neoznačeni zahtjev, odnosno formulu:*

$$A\top \mapsto A$$
$$A\bot \mapsto -A \,.$$

Prema tome, u odgovarajućem kontekstu, zahtjeve možemo smatrati formulama i obratno.

2.2 Bethova semantička stabla

Evert W. Beth je 1955. u članku "*Semantic Entailment and Formal Derivability*" (vidi [Bet55]) uveo postupak semantičkog dokazivanja koji je nazvao tabló (eng. *tableau*) metoda .

Neovisno o njemu je Jaako Hintikka razradio sličnu metodu saturiranih skupova.

Raymond Smullyan je ideje metoda Betha i Hintikke dotjerao i uklopio u metodu koju je nazvao **analitički tabló**. Danas je to najpopularnija varijanta ovih metoda i to je metoda koju ćemo u ovom radu zvati Bethovo semantičko stablo.

Osnovna ideja Bethove metode je da se primjenom semantičkih pravila na α i β zahtjevima izgradi stablo zahtjeva s čijih se grana mogu prepisati modeli zadanog skupa zahtjeva. Na primjer, semantičko dokazivanje implikacije $\Gamma \models \Delta$ svodi se na traženje modela za koje ta implikacija ne vrijedi, pa je polazni skup zahtjeva $\Gamma\top$, $\Delta\bot$. Ako pokažemo da takvih modela nema, zaključujemo da vrijedi $\Gamma \models \Delta$.

Primjena α pravila u Bethovom stablu dopisuje jednostavnije α_1, α_2 zahtjeve na sve grane stabla ispod α zahtjeva. Primjena β pravila dopisuje po dvije nove grane na svaku granu ispod β zahtjeva – na jednu se dopisuje β_1 zahtjev, a na drugu β_2 zahtjev.

Kad na neki zahtjev primijenimo odgovarajuće pravilo, taj zahtjev označimo i smatramo obrađenim. Ukoliko svi zahtjevi neke grane obrađeni, takvu granu smatramo završenom. Ukoliko na grani postoje suprotni zahtjevi (zahtjevi oblika $A\top$ i $A\bot$), zaključujemo da ne postoji model koji ispunjava zahtjeve te grane. Takvu granu smatramo zatvorenom. Zatvorene grane također smatramo završenima.

Grane koji nisu zatvorene zovemo otvorene. Svaka završena otvorena grana predstavlja kontramodel polaznog skupa zahtjeva.

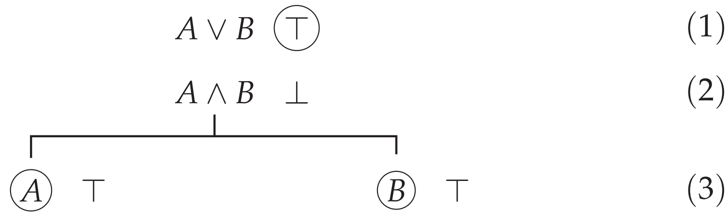
Primjer 2.4. *Semantičko stablo za $A \vee B \models A \wedge B$.*

Stablo počinje $\top$-označavanjem zahtjeva premisa, i $\bot$-označavanjem zahtjeva konkluzije.

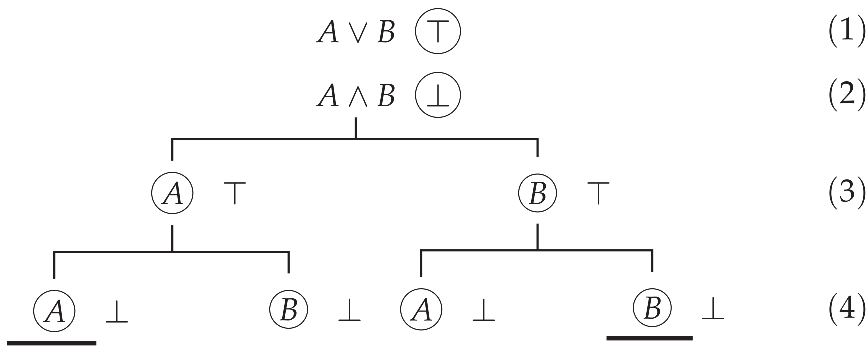
$$A \vee B \quad \top \tag{1}$$

$$A \wedge B \quad \bot \tag{2}$$

Najprije obradimo zahtjev (1) (β oblik). Dvije grane dopisuju se na dno stabla.



Zahtjev (1) je obrađen i to označavamo zaokruživanjem njegove oznake (⊤).



Zahtjev (2) je također β oblika i pod svaku otvorenu granu dopisuje po dvije nove grane. Svi zahtjevi su obrađeni. Dvije grane sadrže kontradiktorne zahtjeve. To su zatvorene grane koje potcrtavamo.

Ostale su dvije otvorene grane s kojih se može pročitati kontramodel zadane implikacije. Implikaciju $A \vee B \models A \wedge B$ *obaraju modeli*

(i) $A\top$ *i* $B\bot$*;*

(ii) $A\bot$ *i* $B\top$.

⋆ ⋆ ⋆

Semantička pravila iz prethodne točke možemo jednostavno (i prirodno) prepisati u pravila izgradnje semantičkog stabla (tablica 2.5).

- α pravilo
  dopisuje zahtjeve α_1 i α_2 na sve otvorene grane ispod zadanog zahtjeva.

- β pravilo
  svaku otvorenu granu ispod zadanog zahtjeva grana u dvije nove grane: jednu s β_1, drugu s β_2 zahtjevom.

$\boxed{-\top}$	$-A$ $\top$ A $\bot$	$\boxed{-\bot}$	$-A$ $\bot$ A $\top$
$\boxed{\wedge\top}$	$A \wedge B$ $\top$ A $\top$ B $\top$	$\boxed{\wedge\bot}$	$A \wedge B$ $\bot$ A $\bot$ | B $\bot$
$\boxed{\vee\top}$	$A \vee B$ $\top$ A $\top$ | B $\top$	$\boxed{\vee\bot}$	$A \vee B$ $\bot$ A $\bot$ B $\bot$
$\boxed{\rightarrow\top}$	$A \rightarrow B$ $\top$ A $\bot$ | B $\top$	$\boxed{\rightarrow\bot}$	$A \rightarrow B$ $\bot$ A $\top$ B $\bot$

Tablica 2.5: Pravila izgradnje semantičkog stabla

Zaokruživanjem oznake $\top$ ili $\bot$ pored zahtjeva označavamo da je taj zahtjev obrađen.

Definicija 2.5 (Semantičko stablo)**.**
Stablo zahtjeva koje počinje nizom svih zahtjeva iz $\Gamma\top$ i $\Delta\bot$, a čiji je svaki sljedeći zahtjev Z posljedica primjene nekog semantičkog pravila na neki zahtjev koji u stablu prethodi zahtjevu Z, zovemo semantičko stablo za $\Gamma\top, \Delta\bot$.

*Grana semantičkog stabla **nije potpuno razvijena** ako na njoj postoji zahtjev na koji nije primijenjeno semantičko pravilo. Ako na grani takvih zahtjeva nema, kažemo da je grana **potpuno razvijena**.*

*Grana je **zatvorena** ako se na njoj pojavljuju kontradiktorni zahtjevi, npr. $A \top$ i $A \bot$. Inače je **otvorena**.*

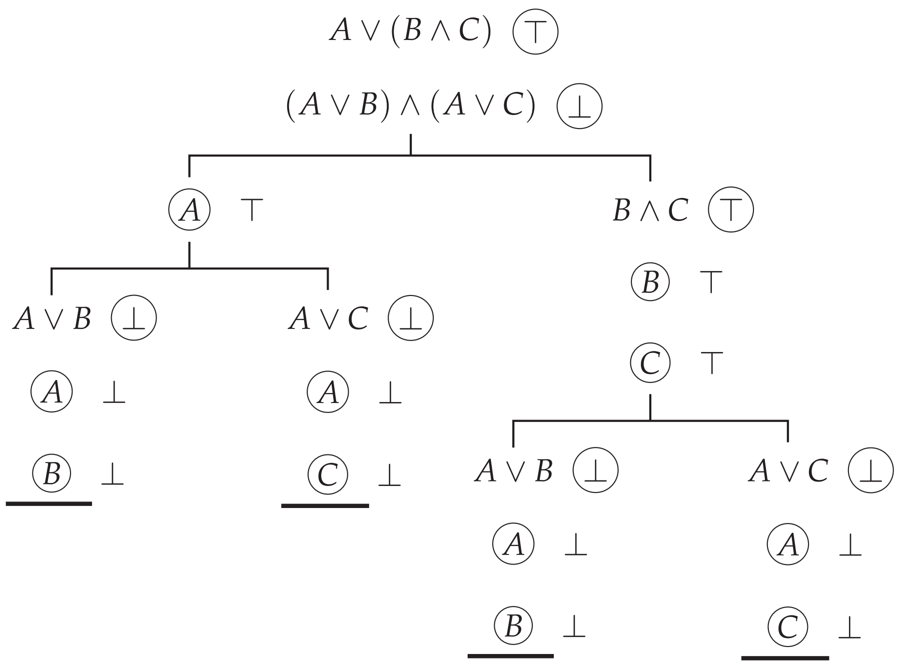
*Grana je **završena** ako je potpuno razvijena ili zatvorena.*

*Stablo je **završeno** ako su mu sve grane završene.*

Stablo je ***zatvoreno*** *ako su mu sve grane zatvorene.*

Za semantičko stablo od $\Gamma\top$, $\Delta\bot$ reći ćemo da je stablo semantičko stablo od $\Gamma \not\models \Delta$.

Primjer 2.6 (zatvoreno stablo).
Metodom semantičkog stabla pokazat ćemo da vrijedi $A \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.



i. Potcrtavanjem grane označavamo njezino zatvaranje (tj. da grana sadrži kontradiktorne zahtjeve)

ii. Atomarne zahtjeve ne zaokružujemo (tu analiza završava)

Semantičko stablo se zatvorilo. Kontraprimjer implikacije ne postoji, pa vrijedi

$$A \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge (A \vee C)\,.$$

Definicija 2.7.
Skup S koji zadovoljava sljedeća svojstva:

H1. Ne postoji formula A takva da je $A \in S$ *i* $-A \in S$

H2. Ako je $\alpha \in S$, *tada su* $\alpha_1 \in S$ *i* $\alpha_2 \in S$

H3. Ako je $\beta \in S$, tada je $\beta_1 \in S$ ili $\beta_2 \in S$

zovemo ***Hintikkin skup****.*

Skup zahtjeva (formula) otvorene grane završenog semantičkog stabla je Hintikkin skup.

Propozicija 2.8 (Hintikkina lema)**.**
Svaki Hintikkin skup S je konzistentan (ispunjiv).
(Postoji interpretacija u kojoj su sve formule iz S istinite).

Metodu semantičkih stabala možemo shvatiti kao logički račun. Dokazi tog računa su zatvorena semantička stabla. U tom smislu, iz Hintikkine leme slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 2.9 (Potpunost metode semantičkih stabala)**.**
Račun Bethovih semantičkih stabala je potpun.

> *Bethovo semantičko stablo sa zahtjevima $\Gamma\top$, $\Delta\bot$ je zatvoreno ako i samo ako vrijedi $\Gamma \models \Delta$.*

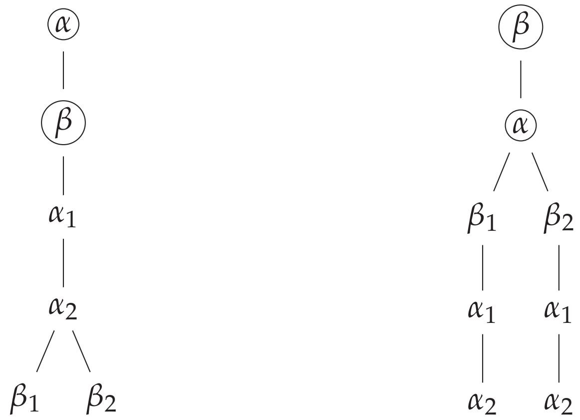
⋆ ⋆ ⋆

Koraci izgradnje Bethovog semantičkog stabla nisu deterministički određeni. U većini koraka izgradnja stabla može nastaviti na više načina. Npr. ako α pravila obradimo prije β pravila uštedjeti ćemo na veličini stabla (grananje stabla se odgađa, vidi sliku 2.1).

Uobičajeno je u dokazivanju meta-teorema o semantičkim stablima uvesti sistematizaciju postupka.

Semantičko stablo propozicijske klasične logike možemo graditi tako da svaki od polaznih zahtjeva analiziramo odvojeno. Za svaki zahtjev možemo izgraditi posebno semantičko stablo. Dobivena stabla možemo spojiti i nakon spoja zatvoriti neispunjive grane.

Ovakav pristup izgradnji semantičkog stabla (odvojeni postupci analize i sinteze) ćemo koristiti u ostatku poglavlja.



(a) (b)

Slika 2.1: Redoslijed (α, β) i redoslijed (β, α) obrade zahtjeva

2.3 Stabla ispunjivosti

Definicija 2.10 (Stablo ispunjivosti)**.**
*Korjensko uređeno stablo zahtjeva s izdvojenim otvorenim i zatvorenim granama zvat ćemo **stablo ispunjivosti skupa zahtjeva** $\Gamma\top$, $\Delta\bot$ ako vrijedi*

(i) svaki model koji ispunjava zahtjeve neke otvorene grane stabla ispunjava zahtjeve $\Gamma\top$, $\Delta\bot$;

(ii) za svaki model koji ispunjava zahtjeve $\Gamma\top$, $\Delta\bot$ postoji grana na stablu koju taj model ispunjava.

*Za stablo ispunjivosti skupa zahtjeva kojemu su sve grane zatvorene reći ćemo da je **zatvoreno**. Za model koji ispunjava zahtjev neke otvorene grane stabla ispunjivosti kratko ćemo reći da je **model stabla ispunjivosti**.*

Na stablu ispunjivosti pojmovi otvorene i zatvorene grane imaju istu značenje kao i kod semantičkih stabala. Potpuno razvijena semantička stabla su stabla ispunjivosti.

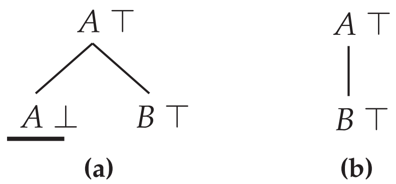
Ako formule shvatimo kao neoznačene zahtjeve, stablo ispunjivosti možemo prikazati kao stablo formula.

Napomena 2.11.
Uvjeti (i) i (ii) garantiraju da je stablo ispunjivosti skupa zahtjeva isrpan i točan popis modela koji taj skup zahtjeva ispunjuju (svi modeli imaju svoju granu, te ne postoje grane koje su višak).

Definicija 2.12 (o ekvivalentnosti)**.**
Stabla ispunjivosti τ_1 *i* τ_2 *od* $\Gamma \not\models \Delta$ *smatrat ćemo ekvivalentnima ako njihove otvorene grane imaju iste modele, tj. za svaki model stabla ispunjivosti* τ_1 *je i model stabla ispunjivosti* τ_2 *(i obrnuto).*

Jasno, ako su stabla ispunjivosti τ_1 *i* τ_2 *ekvivalentna, i* τ_1 *zatvoreno stablo, tada slijedi da je i* τ_2 *zatvoreno stablo.*

Primjer 2.13. *Na slici 2.2 skicirana su dva ekvivalentna stabla ispunjivosti skupa zahtjeva* $\{(A \to B)\top, A\top\}$*. Stabla ispunjivosti skicirat ćemo kao stabla koja se granaju prema dole (kao i semantička stabla).*



Slika 2.2: Ekvivalentna stabla ispunjivosti za skup zahtjeva $\{(A \to B)\top, A\top\}$

Otvorene grane stabla ispunjivosti ne mogu sadržavati $A\top$ *i* $A\bot$ *zahtjeve. Zato, u slučaju da stablo ispunjivosti gradimo (a ne sažimamo), takve grane zatvaramo istom notacijom kao i u metodi semantičkog stabla.*

Definicija 2.14.
Sažetak semantičkog stabla *je stablo ispunjivosti istog skupa zahtjeva koje nastaje uklanjanjem složenih zahtjeva iz završenog semantičkog stabla*

Prema Hintikkinoj lemi (str. 67) model potpuno razvijene otvorene grane određen je vrijednostima na atomima. Sažetak semantičkog stabla je stablo ispunjivosti istog skupa zahtjeva koje je ekvivalentno polaznom semantičkom stablu.

U sljedećoj točki ćemo, za razliko od upravo pokazanog sažimanja (sažetka) semantičkog stabla, stabla ispunjivosti skupa zahtjeva graditi direktno iz konjunktivne forme ekvivalentne polaznom skupu zahtjeva.

.

Klauzalno stablo

Formula F je u **konjunktivnoj normalnoj formi** ako je oblika

$$(A_{11} \vee \cdots \vee A_{1k_1}) \wedge (A_{21} \vee \cdots \vee A_{2k_2}) \wedge \cdots \wedge (A_{n1} \vee \cdots \vee A_{nk_n})$$

pri čemu su A_{ij} literali. Blokove $(A_{i1} \vee \cdots \vee A_{ik_i})$ zovemo elementarne disjunkcije.

Skupove literala zovemo **klauze**. Formulu možemo zapisati kao skup klauzi. U tom slučaju kažemo da je formula u **klauzalnoj formi**.

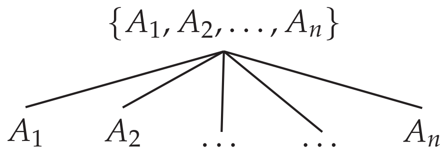
⋆ ⋆ ⋆

Za analizu $\top$-označenih klauzi uvodimo dodatno pravilo semantičkih stabala.

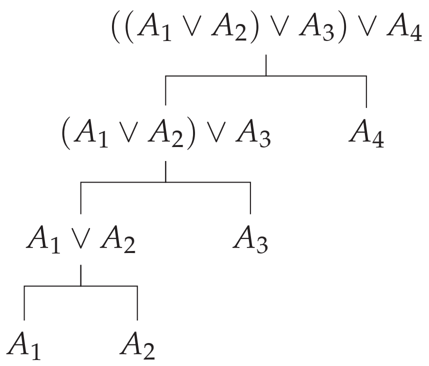
Definicija 2.15 (Semantičko pravilo za ispunjivost (konzistentnost) klauze)**.** *Ako klauzu interpretiramo kao $\top$-označeni zahtjev, vrijedi sljedeće pravilo u neoznačenom obliku:*

$$\boxed{\text{KL}} \qquad \frac{\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}}{A_1 \qquad A_2 \qquad \ldots \qquad A_n}$$

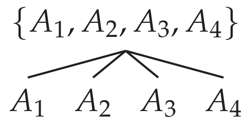
Isto pravilo u obliku stabla zapisujemo:



Primjer 2.16. *Semantičko stablo koje ispituje konzistentnost klauze $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ je*



Isto se stablo u klauzalnom obliku može kraće zapisati:

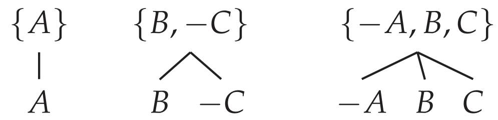


Definicija 2.17 (Jednostavno klauzalno stablo konjunktivne forme)**.**
Jednostavno klauzalno stablo *konjunktivne (klauzalne) forme je sažetak semantičkog stabla konjunktivne forme izgrađenog pravilom* $\boxed{\text{KL}}$ *.*

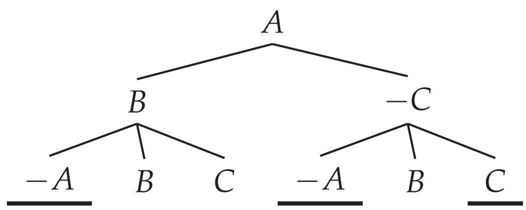
Primjer 2.18. *Klauze konjuktivne forme* $A \wedge (B \vee -C) \wedge (-A \vee B \vee C)$ *su*

$$\{A\}, \{B, -C\} \quad i \quad \{-A, B, C\}.$$

Semantička stabla ovih klauzi su:



Sažetak konkatenacije ovih stabala je jednostavno klauzalno stablo



Slika 2.3: Jednostavno klauzalno stablo

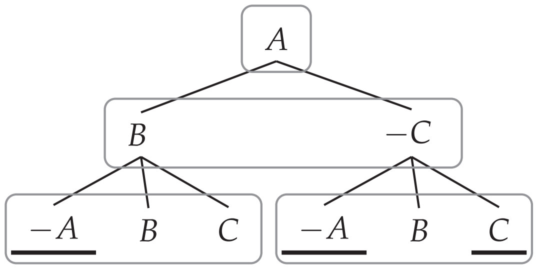
Teorem 2.19. *Jednostavno klauzalno stablo konjunktivne forme je kao stablo ispunjivosti ekvivalentno Bethovom semantičkom stablu te konjunktivne forme.*

Dokaz. Trivijalan. □

U jednostavnom klauzalnom stablu je lako uočiti od kojih je klauzi izgrađeno.

Definicija 2.20 (Klauza u stablu)**.**
Skup vrhova (formula) u klauzalnom stablu koji imaju istog roditelja zovemo ***klauza u stablu****.*

Klauzu u stablu tvore vrhovi koji su "braća". Na slici 2.4 označene su klauze u stablu klauzalnog stabla iz prethodnog primjera.



Slika 2.4: Uokvirene klauze u klauzalnom stablu

Napomena 2.21. *Na sličan način na koji se "zloupotrebljava" pojam "formule u dedukciji" i koristi umjesto pojma "pojavljivanje formule u dedukciji", često ćemo govoriti o* klauzi u stablu *umjesto o* primjerku klauze u stablu.

Iz iste klauze se u klauzalnom stablu kreira više odgovarajućih primjeraka klauze u stablu. Za takve klauze u stablu reći ćemo da su **istog oblika** (skupovi njihovih formula su iste klauze).

Ekvivalentno stablo ispunjivosti možemo iz zadanih klauzi izgraditi direktno, nema potrebe za "sažimanjem" (sažetkom semantičkog stabla). Klauzalna stabla su stabla ispunjivosti. Stablo gradimo od gore prema dole, dodajući klauze u stablu na otvorene grane stabla. Grane koje sadrže kontradiktorne zahtjeve zatvaramo.

Nije nužno da su istoj visini stabla klauze istog oblika, kao što je to slučaj kod jednostavnog klauzalnog stabla (vidi slike 2.3 i 2.4).

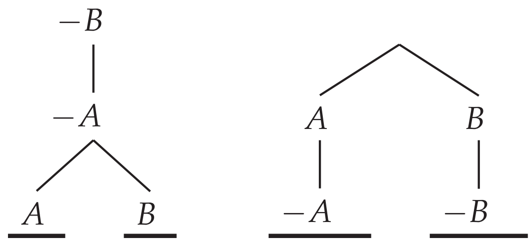
Ovako direktno izgrađeno semantičko stablo također gradimo od gore prema dole. U svakom listu možemo slobodno birati sljedeću klauzu. Na primjer, možemo (ako postoji) izabrati klauzu koja će zatvoriti barem jednu granu.

Za tako izgrađeno stablo reći ćemo da je **završeno** ako je

(i) zatvoreno; ili su

(ii) sve otvorene grane potpuno razvijene (prolaze kroz klauze svih oblika).

Tako izgrađeno (završeno) stablo zovemo **opće klauzalne stablo** ili kratko **klauzalno stablo**.



(a) (b)

Slika 2.5: Jednostavno klauzalno stablo (a) i opće klauzalno stablo (b) klauzi $\{A, B\}$, $\{-A\}$, $\{-B\}$

Teorem 2.22. *Opće klauzalno stablo je stablo ispunjivosti ekvivalentno jednostavnom klauzalnom stablu istog skupa zahtjeva.*

Dokaz. Neka je n najniža visina stabla na kojoj klauze nisu istog oblika. Na visini n umetnemo neku od klauzi koja se u stablu prvi puta pojavljuje na toj visini. Na granama na kojima je ta klauza umetnuta možemo skratiti eventualna kasnija dvostruka pojavljivanja te klauze.

Na taj način dobili smo ekvivalentno stablo koje je "jednostavno do visine $n+1$" (većoj visini od polaznog stabla). Postupak ponavljamo dok stablo ne bude jednostavno, a postupak će sigurno stati najkasnije na visini m, gdje je m broj klauzi (zahtjeva).

Na primjer, za stablo sa slike 2.5 (b) dovoljno je na visinu 2 umetnuti (klauzu) $\{-B\}$ na lijevu granu ili (klauzu) $\{-A\}$ na desnu granu. $\square$

2.4 Semantička sekventna stabla

Semantičku analizu možemo provesti pomoću semantičkih sekventi.

Sekventa $\Gamma \not\models \Delta$ je negacija sekvente $\Gamma \models \Delta$ i označava da implikacija $\Gamma \models \Delta$ ne vrijedi. Odnosno, $\Gamma \not\models \Delta$ označava da za implikaciju $\Gamma \models \Delta$ postoji kontramodel.

Na primjer, sekventa

$$A, B \not\models C, D$$

označava da postoji model koji obara implikaciju $A, B \models C, D$. Jasno, to je svaki model u kojem je $A\top$, $B\top$ i $C\bot$, $D\bot$.

Prema definiciji za $\not\models$-sekvente vrijede sljedeća pravila koja koristimo za analizu sekventi sa složenim formulama.

SEMANTIČKA PRAVILA ZA SEKVENTNA STABLA

$\boxed{-\top}$
$$\frac{\Gamma, \overline{A} \not\models \Delta}{\Gamma \not\models A, \Delta}$$

$\boxed{-\bot}$
$$\frac{\Gamma \not\models \overline{A}, \Delta}{\Gamma, A \not\models \Delta}$$

$\boxed{\wedge\top}$
$$\frac{\Gamma, A \wedge B \not\models \Delta}{\Gamma, A, B \not\models \Delta}$$

$\boxed{\wedge\bot}$
$$\frac{\Gamma \not\models A \wedge B, \Delta}{\Gamma \not\models A, \Delta \qquad \Gamma \not\models B, \Delta}$$

$\boxed{\vee\top}$
$$\frac{\Gamma, A \vee B \not\models \Delta}{\Gamma, A \not\models \Delta \qquad \Gamma, B \not\models \Delta}$$

$\boxed{\vee\bot}$
$$\frac{\Gamma \not\models A \vee B, \Delta}{\Gamma \not\models A, B, \Delta}$$

$\boxed{\to\top}$
$$\frac{\Gamma, A \to B \not\models \Delta}{\Gamma \not\models A, \Delta \qquad \Gamma, B \not\models \Delta}$$

$\boxed{\to\bot}$
$$\frac{\Gamma \not\models A \to B, \Delta}{\Gamma, A \not\models B, \Delta}$$

Pravila za izgradnju sekventnih semantičkih stabala su ekvivalentna Gentzenovim sekventnim pravilima. Na primjer, pravilom

$$\frac{\Gamma, A \vee B \not\models \Delta}{\Gamma, A \not\models \Delta \qquad \Gamma, B \not\models \Delta}$$

tvrdi se:

$$\text{"Ako } \Gamma, A \vee B \not\models \Delta \text{ onda } \Gamma, A \not\models \Delta \text{ ili } \Gamma, B \not\models \Delta\text{".}$$

No, to je kontrapozicija tvrdnje:

$$\text{"Ako } \Gamma, A \models \Delta \text{ i } \Gamma, B \models \Delta \text{ onda } \Gamma, A \vee B \models \Delta\text{"',}$$

što je upravo Gentzenovo pravilo ($\vee \models$):

$$\frac{\Gamma, A \models \Delta \quad \text{i} \quad \Gamma, B \models \Delta}{\Gamma, A \vee B \models \Delta.}$$

Isto vrijedi i za ostala pravila. Prema tome, svako sekventno $\not\models$-pravilo odgovara pravilu sekventnog računa "okrenutom naopako".

Forme u premisi (s lijeve strane $\not\models$) su $\top$-označene. Forme u konkluziji (s desne strane) su $\perp$-označene. Semantički analiziramo forme s obiju strana sekvente i pritom gradimo semantičko sekventno stablo primjenjujući pravila.

Pravila iz prethodnog okvira su pravila eliminacije veznika: $\top$ pravila (lijevi stupac) eliminiraju glavni veznik formule premise, a $\perp$ pravila (desni stupac) eliminiraju pravila iz konkluzije sekvente. Primjena α pravila pretvara sekventu u novu, sintaktički jednostavniju sekventu. Primjena β pravila razgrana granu stabla na dvije sintaktički jednostavnije grane. Na ovaj se način iz osnovne sekvente gradi (također semantičko) stablo.

Primjena pravila na grani staje kad dobijemo tzv. "preklapajuću sekventu" oblika

$$\Gamma, C \not\models C, \Delta \ .$$

Takvu granu smatramo **zatvorenom** budući da ne postoji interpretacija u kojoj je takva tzv. **preklapajuća** $\not\models$ sekventa istinita – u premisi je zahtjev $C\top$, a u konkluziji $C\perp$.

Grana je potpuno razvijena ako su u njezinoj posljednjoj sekventi sve formule atomi. Ako grana nije zatvorena, reći ćemo da je otvorena. S potpuno razvijene otvorene grane možemo pročitati kontramodel polazne implikacije $\Gamma \models \Delta$: svi atomi iz premise sekvente primaju vrijednost $\top$, a svi atomi iz konkluzije sekvente primaju vrijednost $\perp$.

Postupak semantičke analize staje kad je svaka grana zatvorena ili završena (svi njezini zahtjevi su analizirani).

Primjer 2.23. *Pokažimo da vrijedi*

$$-A \lor B \models A \to B$$

pomoću semantičkih pravila za $\not\models$ *sekvente.*

Rješenje.

$$\dfrac{-A \lor B \not\models A \to B}{\dfrac{-A \not\models A \to B}{\dfrac{-A, A \not\models B}{\dfrac{A \not\models A, B}{}}} \qquad \dfrac{B \not\models A \to B}{\dfrac{B, A \not\models B}{}}} \tag{2.1}$$

U ovom su stablu radi lakšeg snalaženja zaokruženi veznici koji se analiziraju. □

Sekventno semantičko stablo ekvivalentno je Bethovom semantičkom stablu istog skupa zahtjeva: ako se koraci analize izvode u istom redoslijedu, grane (otvorene i zatvorene, gledane kao skupovi zahtjeva) oba stabla se podudaraju. Okretanjem zatvorenog sekventnog stabla "naopako" uz zamjenu "$\not\models$" za "$\vdash$" iz razvijeno zatvorenog stabla sekvente $\Gamma \not\models \Delta$ dobije se sekventna dedukcija od $\Gamma \vdash \Delta$.

Na primjer, okretanje sekventnog semantičkog stabla (2.1) iz prethodnog primjera daje sekventnu dedukciju:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A, B}}{-A, A \vdash B}}{-A \vdash A \to B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B, A \vdash B}}{B \vdash A \to B}}{-A \lor B \vdash A \to B} \quad .$$

Prethodni primjer je ilustracija elegantnog dokaza teorema potpunosti računa LK i teorema o eliminaciji reza računa LK (oslanja se na potpunost metode semantičkih stabala, vidi [Šik14]).

Propozicija 2.24 (potpunost Gentzenovog LK računa)**.**
Gentzenov sekventni LK račun je potpun i korektan:

$$\Gamma \models \Delta \quad \textit{ako i samo ako} \quad \Gamma \vdash \Delta\ .$$

Prethodni postupak objašnjava zašto se za sekventne dedukcije često kaže da su naopaki tabloi (npr. vidi[Fit83], [Šik14]).

⋆ ⋆ ⋆

Iz prethodne diskusije može se zaključiti i više od potpunosti: u sekventnim izvodima dobivenim okretanjem zatvorenih stabala *nema upotrebe pravila reza*. Tako se elegantno dokazuje Gentzenov teorem o eliminaciji reza sekventnog računa LK.

Korolar 2.25. *Račun multiplarnih dedukcija klasične propozicijske logike je potpun.*

Dokaz. Prema poimanju računa LK kao metasustava računa multiplarnih dedukcija, iz potpunosti LK slijedi potpunost računa multiplarnih dedukcija: sekventnu dedukciju $\Gamma \vdash \Delta$ možemo prepisati u multiplarnu dedukciju $\Gamma \vdash_{\mathsf{MD}} \Delta$ (vidjeti odjeljak 1.8, str. 44). □

Sličnu (algoritamsku) ekvivalenciju želimo postići s metodom analitičkih dedukcija. O tome ćemo više u ostatku poglavlja.

2.5 Metoda analitičkih dedukcija

U sljedećih nekoliko točaka želimo pokazati kako se ranije definirani pohlepni algoritam traženja multiplarne dedukcije može semantički motivirati.

Osim toga, uz metodu traženja svih analitičkih dedukcija riješiti ćemo i problem sparivanja analitičkih dedukcija koji je u primjerima na kraju prvog poglavlja riješen *ad-hoc*. Na taj način dobije se metoda traženja dokaza u računu multiplarnih dedukcija koju ćemo nazvati metoda analitičkih dedukcija, ili kraće MAD.

⋆ ⋆ ⋆

Neka je Π netrivijalna analitička dedukcija (s barem jednim zaključkom) i neka je F glavna formula od Π. Neka su A_i premise dedukcije Π i neka su B_j konkluzije dedukcije Π.

Vrijedi

$$Z \models -A_1, \ldots, -A_k, B_1, \ \ldots, B_k \quad ,$$

gdje je $Z = F$ ili $-F$, ovisno o tome da li je F premisa ili konkluzija od Π.

Ekvivalentno, zahtjev Z je $F\top$ ako je Π analitička dedukcija na dole, odnosno Z je $F\bot$ ako je Π analitička dedukcija na gore.

Prema tome iz analitičke dedukcije slijedi da zahtjev Z povlači ispunjivost jednog od zahtjeva

$$-A_1, \ldots, -A_k, B_1, \ldots, B_l \, .$$

$$\{\overbrace{-A_1, \ldots, -A_k}^{\text{iz premisa od } \Pi},\ \underbrace{B_1, \ldots, B_l}_{\text{iz konkluzija od } \Pi}\}$$

Slika 2.6: Formiranje izvedenih zahtjeva analitičke dedukcije Π

Definicija 2.26.
Na upravo opisani način, netrivijalnoj analitičkoj dedukciji Π možemo pridružiti ***polazni zahtjev*** *Z i disjunkciju* ***izvedenih zahtjeva*** *$-A_1, \ldots, -A_k, B_1, \ldots, B_l$.*

Posebno, izvedeni zahtjevi završene *analitičke dedukcije Π tvore klauzu $\mathcal{L}$.*

Vrijedi

$$Z \models \mathcal{L}$$

Za $\mathcal{L}$ ćemo reći da je ***klauza završene analitičke dedukcije*** Π*.*

Za zahtjev Z analitičke dedukcije Π vrijedi:

(i) Z je $\top$-zahtjev ako je Π analitička dedukcija na dole;

(ii) Z je $\perp$-zahtjev ako je Π analitička dedukcija na gore.

Primjer 2.27. Π *je sljedeća analitička dedukcija od* $(X \wedge -Y) \rightarrow Z$*.*

$$\dfrac{\dfrac{\overline{Y \qquad -Y} \qquad X}{X \wedge -Y} \qquad \boxed{(X \wedge -Y) \rightarrow Z}}{Z}$$

Glavna formula dedukcije Π *je* $(X \wedge -Y) \rightarrow Z$*.* Π *je dedukcija na dole i njezin zahtjev je*

$$((X \wedge -Y) \rightarrow Z)\ \top\ .$$

Π *je završena analitička dedukcija. Klauza od* Π *je*

$$\{-X, Y, Z\}\ .$$

Budući da na analitičke dedukcije možemo gledati kao na semantičku analizu njihovih zahtjeva, tako ćemo i na konačan skup dedukcija gledati kao na skup (konjunkciju) njihovih zahtjeva.

Neka su $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ završene analitičke dedukcije, te neka su Z_i i $\mathcal{L}_i$ pripadni zahtjevi i klauze. Vrijedi

$$Z_1, \ldots, Z_n \models \mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{L}_n$$

Ovdje umjesto klauzi $\mathcal{L}$ podrazumijevamo disjunkcije njihovih literala.

Specijalno, ako su Π_i analitičke dedukcije istog zahtjeva Z, vrijedi:

$$Z \models \mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{L}_n\ ,$$

gdje je s desne strane implikacije klauzalna forma.

Ako su Π_i *sve* završene analitičke dedukcije zahtjeva Z vrijedi i obrat.

Teorem 2.28 (Klauzalna forma analitičkih dedukcija).
Ako su $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ (završene) analitičke dedukcije zahtjeva Z dobivene algoritmom traženja analitičkih dedukcija (algoritam 1.2), vrijedi:

$$Z \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{L}_n \, .$$

Drugim riječima, algoritmom traženja analitičkih dedukcija zahtjev Z prevodimo u njegovu klauzalnu formu

$$\{\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n\}$$

Za veznik $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, -\}$.

(i) (E$\circ$) zaključak možemo interpretirati kao semantičku analizu $\top$-označene glavne formule primjenom semantičkog pravila ($\circ\top$).

(ii) (I$\circ$) zaključak možemo interpretirati kao semantičku analizu $\perp$-označene glavne formule primjenom semantičkog pravila ($\circ\perp$).

$(\wedge\perp)\ \dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}$	$(\wedge\top)\ \dfrac{A \wedge B}{A}$ i $\dfrac{A \wedge B}{B}$
$(\vee\perp)\ \dfrac{A}{A \vee B}$ i $\dfrac{B}{A \vee B}$	$(\vee\top)\ \dfrac{A \vee B}{A \qquad B}$
$(\rightarrow\perp)\ \dfrac{B}{A \rightarrow B}$ i $\dfrac{}{A \qquad A \rightarrow B}$	$(\rightarrow\top)\ \dfrac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$
$(-\perp)\ \dfrac{}{A \qquad -A}$	$(-\top)\ \dfrac{A \qquad -A}{}$

Tablica 2.6: Multiplarna pravila zaključivanja možemo interpretirati kao pravila semantičke analize njihovih glavnih formula

Zahtjevi zaključaka eliminacije su $\top$-označeni, a zahtjevi zaključaka introdukcije su $\perp$-označeni ($\top$-zahtjevi analiziraju se prema dole, $\perp$-zahtjevi analiziraju se prema gore).

Lema 2.29.
Zahtjev (oba) zaključka pravila s dva oblika je analiza α formula.
Zahtjev zaključka pravila s jednim oblikom je analiza β formule.

Dokaz. Trivijalan, dovoljno je provjeriti sve slučajeve u tablici 2.6.

Konkretnije, multiplarna pravila koja imaju dva oblika, poput (E∧), (I∨), (I→) su primjeri semantičke analize α zahtjeva.

Za njih vrijedi da je α zahtjev Z glavne formule ekvivalentan konjunkciji izvedenih zahtjeva α_1 i α_2

Na primjer, za dva oblika pravila (E→) vrijedi

$$\frac{}{A \qquad \boxed{A \to B}} \qquad\qquad \frac{B}{\boxed{A \to B}}$$

$(A \to B)\bot$ je α zahtjev ekvivalentan konjunkciji izvedenih $\alpha_1 = A$, $\alpha_2 = -B$.

Multiplarna pravila (I∧), (E∨), (E→) koja imaju jedan oblik su primjeri semantičke analize β zahtjeva. Za njih vrijedi da je β zahtjev glavne formule analitičke dedukcije ekvivalentan disjunkciji izvedenih zahtjeva potformula β_1 i β_2. □

Dokaz teorema 2.28. U svakom koraku algoritma 1.2 polazni zahtjev je ekvivalentan konjunkciji svih izvedenih zahtjeva. Kad je analiza završena, izvedeni listovi su atomi pa je disjunkcija izvedenih zahtjeva klauza.

Konačno, zahtjev Z je logički ekvivalentan konjunkciji klauzi svih analitičkih dedukcija. Drugim riječima, klauze analitičkih dedukcija tvore klauzalnu formu ekvivalentnu zahtjevu Z. □

Ako primijenimo algoritam 1.2 traženja dedukcija na skup zahtjeva $\Gamma\top$, $\Delta\bot$ tako da $\top$-zahtjeve analiziramo na dole, a $\bot$-zahtjeve na gore. Za te dedukcije reći ćemo da su analitičke dedukcije skupa zahtjeva $\Gamma\top, \Delta\bot$.

Algoritam 1.2 daje klauzalnu formu ekvivalentnu skupu zahtjeva $\Gamma\top$, $\Delta\bot$. Iz klauzi te forme možemo izgraditi klauzalno stablo, koje je ekvivalentno Bethovom semantičkom stablu istog skupa zahtjeva.

Napomena 2.30. *Sad je jasno da su analitičke dedukcije* analitičke *u istom smislu kao što su to i semantička stabla.*

Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.31. *Klauzalno stablo izgrađeno od klauzi analitičkih dedukcija $\Gamma\top, \Delta\bot$ ekvivalentno je Bethovom semantičkom stablu od $\Gamma\top, \Delta\bot$.*

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji klauze analitičkih dedukcija tvore klauzalnu formu ekvivalentnu konjunkciji zahtjeva $\Gamma\top, \Delta\bot$. □

Spojevi dedukcija i rezolucija

Vratimo se sad na semantičko dokazivanje implikacije $\Gamma \models \Delta$. Nakon semantičke analize svih formula iz Γ i svih formula iz $-\Delta$ dobiti ćemo niz analitičkih dedukcija. Analitičke dedukcije skupa $\Gamma, -\Delta$ možemo spajati. Dozvoljeno je (i nužno) primjenjivati kontrakciju i duplikaciju na listovima s propozicijskim varijablama.

Ako uspijemo "poklopiti" sve varijable dobiti ćemo multiplarni izvod kojemu su sve pretpostavke iz Γ i sve konkluzije iz Δ, pa imamo $\Gamma \vdash \Delta$. Zato vrijedi i $\Gamma \models \Delta$.

Neka je Π_1 analitička dedukcija zahtjeva Z_1 s konkluzijom A, te neka je Π_2 analitička dedukcija zahtjeva Z_2 s premisom A.

Tada vrijedi:

$$Z_1 \models \mathcal{M}, A$$
$$Z_2 \models \mathcal{N}, -A$$

gdje smo s $\mathcal{M}, A$ i $\mathcal{N}, -A$ označili klauze od Π_1 i Π_2. Nakon spoja dobije se dedukcija iz koje vrijedi

$$Z_1, Z_2 \models \mathcal{M}, \mathcal{N}\ .$$

Novu dedukciju možemo semantički interpretirati:

Zahtjevi Z_1 i Z_2 povlače ispunjivost klauze $\mathcal{M}, \mathcal{N}$
($\mathcal{M}, \mathcal{N}$ je unija klauzi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ bez formule A).

Upravo opisani postupak na klauzama je primjer rezolucije klauze $\mathcal{M}, A$ i klauze $\mathcal{N}, -A$.

Definicija 2.32 (Rezolucija)**.**
Pravilo

$$\frac{\mathcal{M}, A \qquad \mathcal{N}, -A}{\mathcal{M}, \mathcal{N}}$$

*zovemo **rezolucija**. Klauzu $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ zovemo **rezolventa**.*

Ako su klauze $\mathcal{M}, A$ i $\mathcal{N}, -A$ ispunjive, tada je ispunjiva i rezolventa $\mathcal{M}, \mathcal{N} = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$.
(rezolucija čuva ispunjivost).

Spojevi završenih analitičkih dedukcija nisu analitičke dedukcije. Ali, možemo ih na sličan način semantički interpretirati. Zahtjeve tih dedukcija određuju njihove maksimalne formule (to su upravo zahtjevi analitičkih dedukcija koje su komponente spojene dedukcije.) Klauza koju tvore njezini (preostali) listovi-atomi je upravo rezolventa ovih spojeva.

Neispunjivost rezolvente povlači inkonzistentnost polaznih klauzi, a vrijedi i obrat.

Propozicija 2.33 (prema [Fit83]).
Skupu klauzi S je inkonzistentan ako i samo ako je praznu rezolventu $\emptyset$ izvodljiva iz S primjenama rezolucije.

Stablo primjena rezolucije kojim se izvodi prazna klauza može se prepisati u sparivanje analitičkih dedukcija tih klauzi – multiplarnu dedukciju čije su premise podskup od Γ, a konkluzije podskup od Δ. Budući da u stablu nema ciklusa, rezultat prepisivanja je multiplarna dedukcija.

Takvo prepisivanje ćemo ilustrirati na sljedećem primjeru.

Primjer 2.34. *Analitičke dedukcije implikacije*

$$A \wedge -C, -B \vee C \models A \wedge -B, -A \vee C$$

su:

$$\frac{A \wedge -C}{A} \qquad \frac{A \wedge -C}{-C} \qquad \frac{-B}{-B \vee C} \qquad \frac{C}{-B \vee C}$$

$$\frac{A \qquad -B}{A \wedge -B} \qquad \frac{-A}{-A \vee C} \qquad \frac{C}{-A \vee C}$$

Klauze ovih dedukcija su $\{\{A\}, \{-C\}, \{-A, B\}, \{-B, C\}\}$.

Sljedeće primjene rezolucija pokazuju da ovaj skup klauzi nije konzistentan.

$$\cfrac{\{-C\} \qquad \cfrac{\cfrac{\{A\} \qquad \{-A, B\}}{\{B\}}\,(1) \qquad \{-B, C\}}{\{C\}}\,(2)}{\emptyset}\,(3) \tag{2.2}$$

Primjene rezolucije (1), (2) i (3) dovode do praznog skupa, pa zaključujemo da je skup klauzi inkonzistentan.

Uspješnu rezoluciju možemo prepisati u spojeve pripadnih dedukcija:

1. *Rezolucija (1) na klauzama $\{A\}$ i $\{-A, B\}$ govori da treba spojiti analitičke dedukcije tih klauzi:*

$$\frac{A \wedge -C}{A} \qquad\qquad \frac{A \qquad \overline{-B \qquad B}}{A \wedge -B}$$

2. *Rezolucija (2) na klauzi iz prethodnog koraka $\{B\}$ i klauzi $\{-B, C\}$ govori da treba spojiti dedukciju iz prošlog koraka s analitičkom dedukcijom*

$$B \quad \frac{-B \vee C}{-B \qquad C}$$

3. *U zadnjem koraku spaja se dedukcija prethodnog koraka s analitičkom dedukcijom klauze $\{-C\}$:*

$$\frac{C}{-A \vee C}$$

4. *Konačno dobijemo multiplarnu dedukciju*

$$\frac{\dfrac{A \wedge -C}{A} \qquad \overline{-B}}{A \wedge -B} \qquad \underline{B \qquad \overline{-B}} \qquad \frac{-B \vee C}{-B \qquad \dfrac{C}{-A \vee C}}$$

$\star\star\star$

Za traženje sparivanja mogu se koristiti algoritmi traženja rezolucije.

Napomena 2.35.
Vrijedi i obrat, sparivanje analitičkih dedukcija može se prepisati u stablo rezolucija prazne klauze.

O sparivanjima

Sparivanjem analitičkih dedukcija (kao u prethodnom primjeru) dobije se dedukcija $\Gamma \vdash \Delta$, što je dovoljno za pokazati $\Gamma \models \Delta$.

Problem traženja sparivanja analitičkih dedukcija povezan je s problemom konzistentnosti klauzalne forme – problemom koji je u teoriji složenosti poznat kao SAT problem[1].

Propozicija 2.36 (Cook-Levin, 1971.)**.**
Ako je SAT u $\mathbf{P}$*, onda je* $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

SAT je prvi problem za koji je dokazano da njegova pripadnost $\mathbf{P}$ povlači $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. Takve probleme zovemo NP-potpuni problemi. NP-potpunost drugih problema dovoljno je pokazati redukcijom SAT problema na njih.

Problem traženja sparivanja (SPAR)**.**
Za zadani skup završenih analitičkih dedukcija od Γ *na dole i* Δ *na gore potrebno je naći sparivanje koje daje multiplarnu dedukciju iz koje slijedi* $\Gamma \vdash \Delta$.

Teorem 2.37. *Problem traženja sparivanja na skupu završenih analitičkih dedukcija je NP-potpun.*

Dokaz.

1. Za proizvoljno povezivanje analitičkih dedukcija je lako provjeriti je li zaista rješenje problema sparivanja. Problem sparivanja je u klasi NP jer se rješenje problema (sparivanje) može verificirati u polinomijalnom vremenu.

2. i. Dovoljno je napraviti polinomijalnu redukciju 3SAT problema na problem sparivanja. U 3SAT problemu potrebno je odrediti konzistentnost tzv. 3KNF klauzalne forme čije klauze imaju točno 3 literala. 3SAT je kao i SAT NP-potpun problem (za detalje vidjeti npr. [Sip06]).

   ii. Svakoj klauzi $\mathcal{L}_i = \{X', Y', Z'\}$ formule φ pridružimo analitičku dedukciju Π_i pripadne klauze na dole:

$$\Pi_i \qquad \cfrac{X' \vee Y' \vee Z'}{\cfrac{X' \vee Y'}{X' \qquad Y'} \qquad Z'}$$

   i po potrebi je završimo (ovisi o tome je li npr. X' pozitivni ili negativni literal).

[1] od eng. *satisfiability* – ispunjivost

Prema propoziciji 2.33 formula φ je inkonzistentna ako i samo ako postoji sparivanje analitičkih dedukcija Π. Na ovaj način 3SAT je polinomijalno reduciran na SPAR:

$$\text{3SAT} \leq_P \text{SPAR} .$$

Iz 1. i 2. i NP-potpunosti od 3SAT slijedi tvrdnja teorema (za detalje o 3SAT i SAT problemima vidjeti [Sip06]). $\square$

Mi ćemo u sljedećoj točki pokazati kako pronaći sparivanje na zatvorenom klauzalnom stablu.

2.6 Sparivanja u zatvorenim klauzalnim stablima

Definicija 2.38 (Augumentirano klauzalno stablo)**.**
Klauzalno stablo u kojem su povučeni lukovi između čvorova unutar iste grane koji tu granu zatvaraju zovemo ***augumentirano klauzalno stablo****.*

Lukove koji zatvaraju grane zovemo ***lukovi zatvaranja****.*

Definicija 2.39.
Za klauzu u stablu čiji je svaki vrh incidentan s lukom zatvorenja reći ćemo da je ***sparena klauza****. Klauzu u stablu čiji nijedan vrh nije incidentan s lukom zatvorenja smatramo sparenom. Ta klauza nije bitna za zatvaranje semantičkog stabla.*

Za zatvoreno klauzalno stablo čije su sve klauze u stablu sparene reći ćemo da je ***spareno****.*

Za klauzu u stablu koja nije sparena reći ćemo da je ***nesparena****. Vrhove te klauze dijelimo na sparene i nesparene.*

Zatvorenje klauzalnog stabla u kojem su sve klauze sparene zovemo ***sparivanje klauzalnog stabla****.*

Sparivanje analitičkih dedukcija od $\Gamma\top, \Delta\bot$ možemo pretvoriti u sparivanje klauzalnog stabla analitičkih dedukcija $\Gamma\top, \Delta\bot$.

Ukoliko je zatvoreno klauzalno stablo nastalo od klauzi analitičkih dedukcija skupa zahtjeva $\Gamma\top, \Delta\bot$, sparivanje tog stabla može se vrlo lako pretvoriti u multiplarnu dedukciju $\Gamma \vdash \Delta$.

Za korektnost algoritma traženja sparivanja u zatvorenom klauzalnom stablu ključna je sljedeća lema:

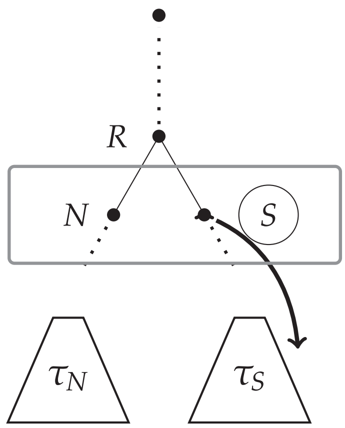
Lema 2.40. *Lukovi nesparenog fragmenta klauze nisu nužni za zatvaranje klauzalnog stabla.*

Dokaz. Neka je S spareni, a N nespareni vrh nesparene klauze u stablu. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da klauza ima točno dva vrha.

Po pretpostavci se grane koje prolaze kroz N dio klauze zatvaraju. Isti lukovi zatvorenja mogu se povući i na S (sparenom dijelu) klauze. Prema tome postojeći luk od S nije nužan za zatvaranje svoje grane (i stabla).

Zato u stablu možemo zaobići "klauzu" $\{N, S\}$. Na vrh R (roditelj klauze $\{N, S\}$) spojimo stablo τ_N.

Iz stabla se izrezuje klauza $\{N, S\}$ i podstablo τ_S. Od zaokruženih dijelova se zatvara "manje" stablo. □



Slika 2.7: Vrh R je roditelj nesparene klauze; Vrh N je nespareni dio klauze; Vrh S je spareni dio klauze, Stabla τ_N i τ_S su redom podstabla vrhova N i S

Izbacivanjem nesparene klauze moguće je "raspariti" neke nove klauze. No budući da je stablo i dalje zatvoreno, možemo ponoviti postupak. Postupak mora stati budući da u svakom koraku uklanjamo lukove.

Prethodna propozicija omogućuje nam formulaciju sljedećeg algoritma:

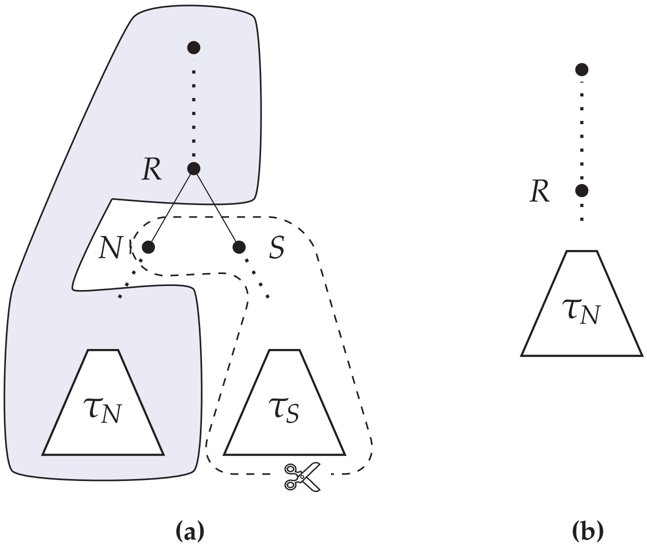
Algoritam 2.1: Traženje sparivanja u zatvorenom klauzalnom stablu

ulaz : Zatvoreno klauzalno stablo
izlaz : Spareno augumentirano klauzalno stablo

povuci lukove zatvaranja u stablu
while *postoje nesparene klauze u stablu* **do**
    neka je $K = \{N, \dots\}$ nesparena klauza stabla
    neka je τ_N podstablo nesparenog vrha N
    neka je R roditelj klauze K
    obriši lukove incidentne s klauzom K
    postavi τ_N kao novo podstablo vrha R ($\tau(R) \leftarrow \tau_N$)

Lema 2.41 (Korektnost algoritma).
U koracima algoritma klauzalno stablo se "smanjuje" – izbacuju se bridovi i vrhovi. U svakom koraku čuva se zatvorenost stabla.

Dokaz. U koracima algoritma stablo se "smanjuje" (izbacuju se vrhovi i brišu lukovi incidentni s njima). Nakon svakog "rezanja" stablo ostaje zatvoreno. Budući da bridova u stablu ima konačno mnogo – algoritam staje. Kad stane imamo neprazno zatvoreno stablo bez nesparenih fragmenata – imamo sparivanje. □



Slika 2.8: Nakon brisanja lukova incidentnih s klauzom $\{N, S\}$ stablo τ_N postaje podstablo vrha R.
Sporna klauza se zaobiđe.

Prethodna propozicija daje i sljedeći korolar.

Korolar 2.42. *Algoritam 2.1 traženja sparivanja je korektan.*

Drugim riječima: za Γ i Δ za koje vrijedi $\Gamma \models \Delta$ algoritam nalazi sparivanje na klauzalnom stablu.

Napomena 2.43. *Algoritam ne daje minimalno sparivanje. Staje kod prvog sparivanja na koje naiđe. Možemo čak reći da ovaj algoritam da na zatvorenom M-stablu pronalazi najveće sparivanje!*

Rezimé traženja sparivanja na zatvorenom klauzalnom stablu

1. **Povlačenje lukova**
   Sve grane zatvorenog klauzalnog stabla su zatvorene. Na svakoj grani povučemo luk (orjentirani brid) između (svih) literala koji tu granu zatvaraju. Pritom ih orijentiramo od pozitivnog prema negativnom literalu.

2. **DAG**
   Dobiveni graf je DAG (usmjereni aciklički graf, eng. *directed acyclic graph*). Neusmjerenih ciklusa može biti.

3. **Spareni i nespareni vrhovi**
   Vrhovi grafa su literali. Izdvajamo klauze. Za literal koji sudjeluje u zatvaranju grane reći ćemo da je **sparen**. Za vrhove koji nisu spareni reći ćemo da su **nespareni**.

   Klauze su sparene ako su svi njihovi vrhovi spareni. Klauze u stablu koje nisu sparene zovemo nesparene klauze.

4. **Brisanje**
   Brišemo nesparene klauze i s njima incidentne lukove.

5. **Ponavljamo brisanje sve dok u stablu postoje nesparene klauze**
   Brisanjem lukova mogu se prethodno sparene klauze pretvoriti u nesparene klauze. Dok ima nesparenih klauzi u stablu ponavljamo prethodni korak.

6. **Spajanje dedukcija**
   Dobiveni graf u kojem su sve klauze sparene daje sparivanje.

   Klauze u stablu govore nam koje analitičke dedukcije treba spojiti.

Primjer

Primjer 2.44. *Sparivanje za dokazivanje distributivnosti* $\land$ *i* $\lor$*:*

$$A \lor (B \land C) \vdash (A \lor B) \land (A \lor C)$$

Cijeli postupak u koracima.

I. Analiza (analitičke dedukcije od $\Gamma \vdash \Delta$)

$$\left.\begin{array}{cc} \dfrac{A \lor (B \land C)}{A \qquad \dfrac{B \land C}{B}} & \qquad \dfrac{A \lor (B \land C)}{A \qquad \dfrac{B \land C}{C}} \end{array}\right] \text{ iz analize } \top\text{-zahtjeva}$$

$$\left.\begin{array}{cc} \dfrac{\dfrac{A}{A \lor B} \qquad \dfrac{A}{A \lor C}}{(A \lor B) \land (A \lor C)} & \qquad \dfrac{\dfrac{A}{A \lor B} \qquad \dfrac{C}{A \lor C}}{(A \lor B) \land (A \lor C)} \\ \\ \dfrac{\dfrac{B}{A \lor B} \qquad \dfrac{A}{A \lor C}}{(A \lor B) \land (A \lor C)} & \qquad \dfrac{\dfrac{B}{A \lor B} \qquad \dfrac{C}{A \lor C}}{(A \lor B) \land (A \lor C)} \end{array}\right] \text{ iz analize } \bot\text{-zahtjeva}$$

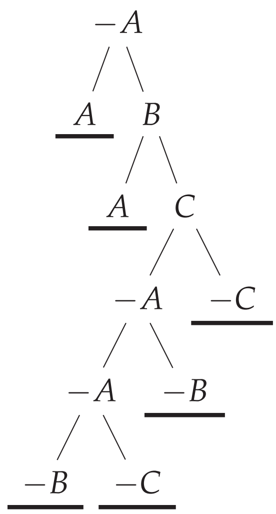
II. Sinteza:

(a) Klauze:
Analitičkim dedukcijama (po redu) korespondiraju sljedeće klauze:

$$\begin{array}{l} \{A, B\}, \{A, C\}, \\ \{-A\}, \{-A, -C\}, \{-A, -B\}, \{-B, -C\} \end{array}$$

(b) Formiranje klauzalnog stabla za niz klauzi

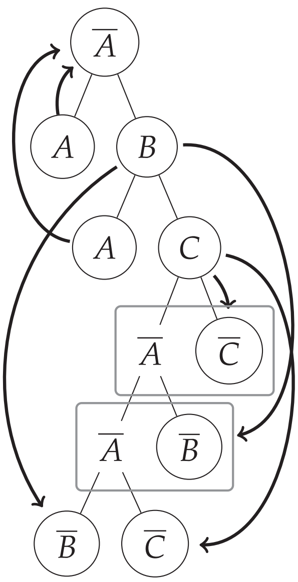
$$\{-A\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{-A, -C\}, \{-A, -B\}, \{-B, -C\}$$



Slika 2.9: Zatvoreno klauzalno stablo

Stablo je zatvoreno pa možemo ići na sljedeći korak.

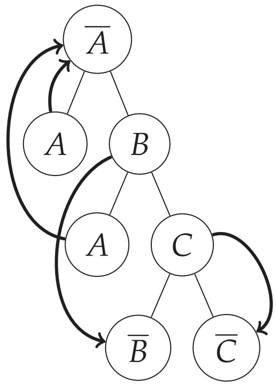
(c) Sparivanje:



Slika 2.10: Klauzalno stablo s povučenim lukovima.
Uokvirene su nesparene klauze u stablu.

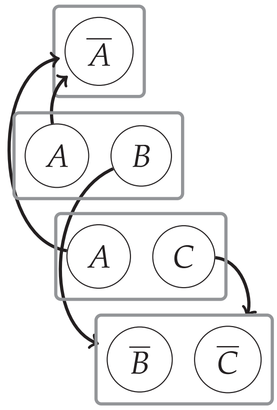
Na zatvorenom stablu povukli smo lukove koji stablo zatvaraju. Čvorovi stabla incidentni s lukovima su zaokruženi.

Nesparene klauze su $\{-A, -C\}$ i $\{-A, -B\}$ pa ćemo njih u traženju sparivanja izbaciti. Nakon izbacivanja ostaje spareno stablo (pa više ne treba ništa izbacivati).



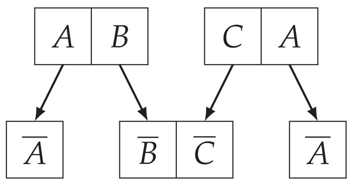
Slika 2.11: Spareno stablo,više nema nesparenih klauzi $\{-A, -C\}$ i $\{-A, -B\}$.

(d) Formiranje dedukcije:



Slika 2.12: Sparivanje – klauze i lukovi sparivanja

Dobiveni DAG možemo nacrtati tako da svi lukovi gledaju dole (topološko sortiranje)



Slika 2.13: Skica formiranja dedukcije

Nakon toga umjesto klauzi ispišemo pripadajuće analitičke dedukcije, napravimo naznačene spojeve i dobijemo traženu dedukciju $\Gamma \vdash \Delta$.

$\square$

2.7 Algoritamska ekvivalencija

Metoda analitičkih Bethovih tabloa i metoda analitičkih dedukcija su ekvivalentne metode. Koraci u semantičkoj analizi isti su u obje metode. Rezultate semantičke analize zahtjeva metode zapisuju na različiti način. Možemo reći da metoda tabloa zahtjeve prevodi u ekvivalentnu disjunktivnu normalnu formu DNF, dok metoda analitičkih dedukcija zahtjeve prevodi u u ekvivalentnu klauzalnu ili konjunktivnu KNF formu.

Stabla koja metode grade (semantičko i klauzalno MAD stablo) su kao stabla ispunjivosti ekvivalentna.

Metodu analitičkih dedukcija možemo podijeliti na dva dijela:

(1) analizu: potragu analitičkih dedukcija;

(2) sintezu: pokušaj zatvaranja klauzalnog stabla (i traženje sparivanja)

U metodi tabloa koraci analize i sinteze su isprepleteni. Usporedba je prikazana na slici 2.14.

Za pokazati $\Gamma \models \Delta$ je dovoljno pokazati da se MAD klauzalno stablo zatvara. Traženje multiplarne dedukcije od Δ iz Γ je dodatni korak u metodi analitičkih dedukcija.

U metodi analitičkih dedukcija nije nužno pronaći sve analitičke dedukcije, pa tek nakon toga izgraditi klauzalno stablo. Klauzalno stablo možemo dopuniti odgovarajućom klauzom čim u analizi nastane završena analitička dedukcija. Možemo ga pokušati zatvoriti i prije završetka analize (potrage za svim analitičkim dedukcijama).

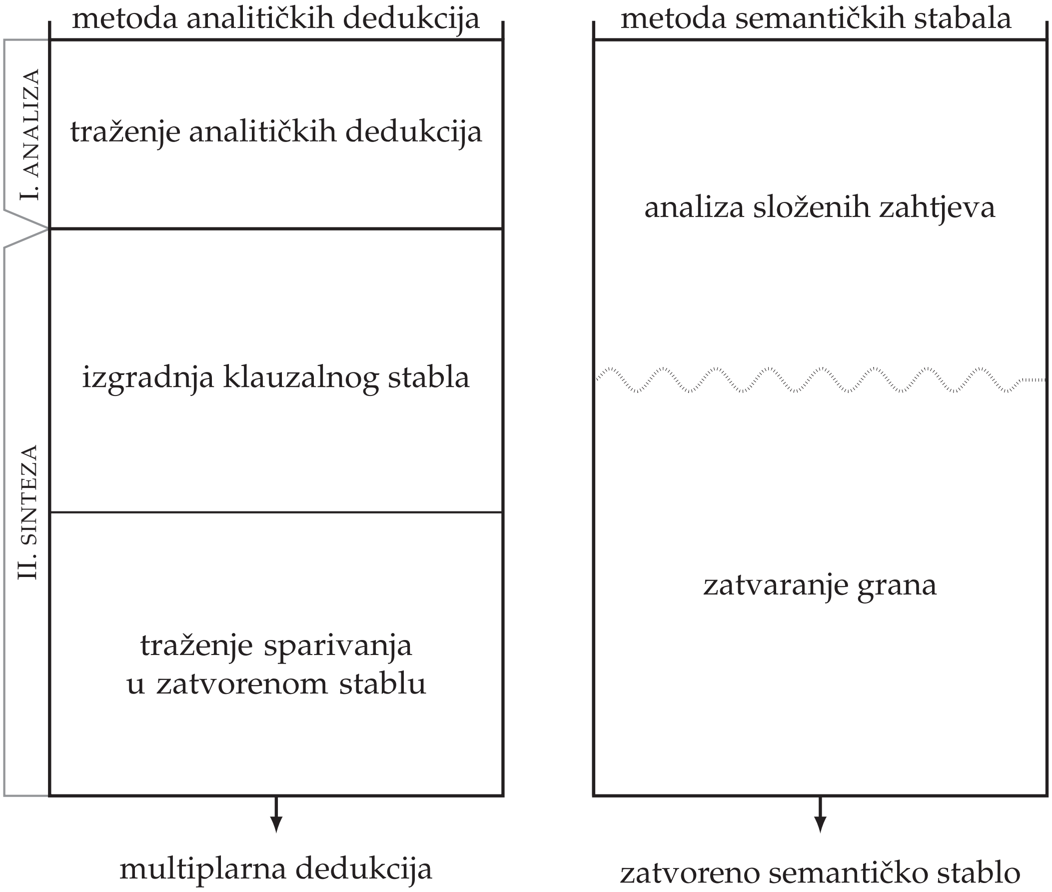
Na taj se način klauzalno stablo može zatvoriti ranije, kao i Bethovo stablo, i prije nego su analizirani svi zahtjevi.

⋆ ⋆ ⋆

Svaki osim inicijalnog zahtjeva koji nastaje u semantičkoj analizi ima svog prethodnika kojemu je on $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ili β_2 izvedeni zahtjev.

Tako za svaki zahtjev (inicijalni i izvedeni) semantičkog stabla možemo naći "odgovarajući" zahtjev u nekoj analitičkoj dedukciji koja nastaje MAD analizom istog skupa zahtjeva – to je zahtjev koji ima isto porijeklo (isti niz prethodnika).

Redoslijed obrade zahtjeva Bethovog tabloa možemo prenijeti na metodu analitičkih dedukcija. A vrijedi i obrat, budući da svakom zahtjevu u MAD možemo pridružiti odgovarajući (ili više njih, ovisno o grananju) zahtjev na Bethovom tablou.



Slika 2.14: Usporedba metode analitičkih dedukcija s metodom semantičkog stabla
Za razliku od Bethove metode, metoda analitičkih dedukcija ima jasno razgraničene dijelove analize i sinteze.

Iz prethodnog i teorema 2.28 slijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.45 (Algoritamska ekvivalencija)**.**
Neka je $Z_1, \ldots, Z_n$ redoslijed obrade zahtjeva koji zatvara Bethov tablo za $\Gamma\top, \Delta\bot$. Tada obrada odgovarajućih zahtjeva u istom redoslijedu zatvara klauzalno stablo u metodi analitičkih dedukcija.

Jasno, vrijedi i obrat teorema. U tom smislu možemo reći da su metode algoritamski ekvivalentne.

3

Multiplarne dedukcije u logici prvog reda

U ovom poglavlju želimo metodu analitičkih dedukcija iz prethodnog poglavlja proširiti s klasične propozicijske logike na klasičnu logiku prvog reda.

Na primjer, da vrijedi $\exists y \forall x Fxy \models \forall x \exists y Fxy$ pokazali bismo analizom formula $\exists y \forall x Fxy$ na dole i formule $\forall x \exists y Fxy$ na gore. Dobili bismo graf

$$\dfrac{\dfrac{\exists y \forall x Fxy}{\forall x Fby}}{Fba} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{Fba}{\exists y Fby}}{\forall x \exists y Fxy} \quad .$$

čijim spajanjem preko formule Fba dobijemo traženu multiplarnu dedukciju

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists y \forall x Fxy}{\forall x Fxa}}{Fba}}{\exists y Fby}}{\forall x \exists y Fxy} \quad .$$

U ovom poglavlju najprije je potrebno proširiti multiplarna pravila s odgovarajućim pravilima eliminacije i introdukcije kvantifikatora, i definirati račun multiplarnih dedukcija klasične logike prvog reda. Nakon toga ćemo proširiti MAD metodu i pokazati ekvivalenciju s Bethovom metodom semantičkih stabala.

3.1 Uvod

Jezik teorija prvog reda

Riječi jezika teorije prvog reda su kvantifikacijske formule koje definiramo u sljedećoj definiciji.

Definicija 3.1.
Kvantifikacijske formule izgrađene su od:

- *individualnih varijabli* $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$;
- *individualnih konstanti ili parametara* $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$;
- *predikatskih konstanti* $P_o^n, P_1^n, P_2^n, P_3^n, \ldots$, *za sve* $n \geq 0$;
- *logičkih konstanti* $-, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall$ *i*
- *zagrada (,)*

prema sljedećim induktivnim pravilima (u kojima individualnu varijablu ili konstantu zovemo ***term****):*

(i) n-mjesni predikat kojem slijedi n terma je (atomarna) formula.

(ii) Ako su F i G formule onda su $-F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ *i* $(F \rightarrow G)$ *formule.*

(iii) Ako je F formula i x varijabla onda su $\exists xF$ *i* $\forall xF$ *formule.*

Formule koje sadrže samo 0-mjesne predikate zovemo ***propozicijskim formulama****.*

Formule koje sadrže samo 1-mjesne predikate zovemo ***monadskim formulama****.*

Formule koje sadrže barem jedan 2- ili višemjesni predikat zovemo ***poliadske formule****.*

Definicija 3.2 (Doseg, slobodna i vezana varijabla, otvorena i zatvorena formula)**.**
Doseg *nekog primjerka kvantifikatora (ili veznika) u nekoj formuli je najkraća potformula u kojoj se on pojavljuje.*

Za primjerak kvantifikatora $\exists$ *ili* $\forall$ *kojem slijedi neka varijabla x kažemo da je x-kvantifikator.*

*Primjerak neke varijable x u formuli F je **slobodan u** F ako na tom mjestu nije u dosegu nijednog x-kvantifikatora u F. Još kažemo da se x na tom mjestu pojavljuje slobodno. Inače je taj primjerak **vezan u** F, tj. x se na tom mjestu pojavljuje vezano.*

***Zatvorena formula** je ona u kojoj se nijedna varijabla ne pojavljuje slobodno. Formulu koja nije zatvorena zovemo **otvorena formula**.*

*Primjerak kvantifikacije $\forall x$ ili $\exists x$ je **prazan** ako u njegovom dosegu nema primjerka varijable x koji je slobodan.*

S $A(a/x)$ označiti ćemo formulu u kojoj umjesto svih slobodnih nastupa varijable x stoji parametar a.

Semantika klasične logike prvog reda

Kako bi mogli govoriti o istinitosti zatvorenih formula potrebno je definirati strukturu.

Definicija 3.3 (Relacijska struktura – interpretacija kvantifikacijskih formula)**.**
Relacijska struktura $\mathcal{U}$ sastoji se od univerzuma U, koji je neprazni skup i pridruženja $|\ |$ koje imenskim i predikatskim konstantama pridružuje sljedeće objekte:

(i) za individualnu konstantu a: $|a| \in U$,

(ii) za 0-mjesnu predikatsku konstantu $P^0 : |P^0| = \top$ ili $|P^0| = \bot$,

(iii) za n-mjesnu predikatsku konstantu $P^n : |P^n| \subseteq U^n$.

(Pridruženje $|\ |$ može biti zadano na svim ili samo nekim konstantama, tj. može biti totalno ili parcijalno.)

Tako zadanu strukturu $\mathcal{U}$ označavamo s:

$$\mathcal{U} = (U; |\ |) = (U; |a|, \ldots; |P^0|, \ldots; |P^1|, \ldots; |P^2|, \ldots; \ldots).$$

Vrlo često $|\gamma|$ identificiramo s γ, pa je tada $\mathcal{U} = (U; a, \ldots; P^0, \ldots; P^1, \ldots; P^2, \ldots; \ldots)$.

Definicija 3.4 (Istinitost zatvorene formule u strukturi)**.**
Istinitost zatvorene formule F u strukturi $\mathcal{U} = (U, |\ |)$, u kojoj je interpretacija $|\ |$ definirana na svim konstantama formule F, označavamo s $\mathcal{U} \models F$ i induktivno definiramo sljedećim pravilima:

(i) $\mathcal{U} \models P^0$ *akko* $|P^0| = \top$,

(ii) $\mathcal{U} \models P^n a \ldots b$ *akko* $(|a|, \ldots, |b|) \in |P^n|$,

(iii) $\mathcal{U} \models -F$ *akko* $\mathcal{U} \not\models F$ *(tj.* $-\mathcal{U} \models F$*)*,

(iv) $\mathcal{U} \models F \wedge G$ *akko* $(\mathcal{U} \models F) \wedge (\mathcal{U} \models G)$
$\mathcal{U} \models F \vee G$ *akko* $(\mathcal{U} \models F) \vee (\mathcal{U} \models G)$
$\mathcal{U} \models F \rightarrow G$ *akko* $(\mathcal{U} \models F) \rightarrow (\mathcal{U} \models G)$

(v) Označimo s $\mathcal{U}^a_m$ strukturu koja se od strukture $\mathcal{U}$ eventualno razlikuje u tome što je $|a|_{\mathcal{U}} = m$. Tada
$\mathcal{U} \models \forall x\, F$ *akko* $\forall m \in U\ (\mathcal{U}^a_m \models F(a/x))$,
$\mathcal{U} \models \exists x\, F$ *akko* $\exists m \in U\ (\mathcal{U}^a_m \models F(a/x))$,
gdje je a individualna konstanta koja se ne pojavljuje u F.

$\mathcal{U} \models F$ čitamo "F je istinita u $\mathcal{U}$" ili "$\mathcal{U}$ ispunjava F".

Istinitost zatvorene formule je određena strukturom. Za istinitost otvorenih formula potrebno je definirati valuacije na strukturi.

Definicija 3.5.
*(Totalna ili parcijalna) **valuacija na strukturi** je preslikavanje skupa slobodnih varijabli u univerzum te strukture. Par strukture i valuacije zovemo **interpretacija**.*

Interpretaciju $\mathcal{M}$ koja skup formula Γ čini istinitim zovemo **model** od Γ i pišemo $\mathcal{M} \models \Gamma$.

Pojam generalizirane implikacije prenosimo iz propozicijske logike: $\Gamma \models \Delta$ ako ne postoji model koji sve formule iz Γ čini istinitima, i sve formule iz Δ čini neistinitima.

Propozicija 3.6.
Za generaliziranu implikaciju kvantificiranih formula vrijede pravila tablice 3.1.

$$(\models \forall)\frac{\Gamma \models \Delta, F}{\Gamma \models \Delta, \forall x F} \qquad (\forall \models)\frac{F(t/x), \Gamma \models \Delta}{\forall x F, \Gamma \models \Delta}$$

ako x nije slobodan u Γ, Δ — ako je t term slobodan u $F(t/x)$

$$(\models \exists)\frac{\Gamma \models \Delta, F(t/x)}{\Gamma \models \Delta, \exists x F} \qquad (\exists \models)\frac{F, \Gamma \models \Delta}{\exists x F, \Gamma \models \Delta}$$

ako je t term slobodan u $F(t/x)$ — ako x nije slobodan u Γ, Δ

Tablica 3.1: Semantička pravila kvantifikacije

Neformalno pravila tablice 3.1 tumačimo na sljedeći način:

($\models \forall$) Ako $F(x)$ slijedi iz premisa Γ koje ništa ne pretpostavljaju o x, onda iz istih premisa slijedi i $\forall x F(x)$;

($\forall \models$) Ako Δ slijedi iz $F(t/x)$, onda Δ slijedi i iz $\forall x$ F;

($\models \exists$) Ako iz premisa Γ slijedi $F(t/x)$, onda iz istih premisa Γ slijedi i $\exists x F$;

($\exists \models$) Ako iz $F(x)$ slijedi Δ koji ne tvrdi ništa o x, onda Δ slijedi i iz $\exists x F(x)$.

3.2 Multiplarne dedukcije logike prvog reda

Sustav pravila zaključivanja propozicijske logike s dodatnim pravilima introdukcije i eliminacije za kvantifikatore čini Gentzenov sustav pravila prirodnih dedukcija logike prvog reda.

Pravila introdukcije i eliminacije kvantifikatora Gentzenovog (singularnog) računa prirodnih dedukcija navodimo u tablici 3.2.

$$(\mathrm{I}\exists)\ \frac{A(a/x)}{\exists x A(x)} \qquad (\mathrm{E}\exists)\ \frac{\exists x A(x) \qquad \begin{matrix}\overline{A(a/x)}\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{B}$$

uz ograničenja, vidi nap. 3.7 (za $(\mathrm{E}\exists)$)

$$(\mathrm{I}\forall)\ \frac{A(a/x)}{\forall x A(x)} \qquad (\mathrm{E}\forall)\ \frac{\forall x A(x)}{A(a/x)}$$

uz ograničenja, vidi nap. 3.7 (za $(\mathrm{I}\forall)$)

Tablica 3.2: Gentzenova pravila introdukcije i eliminacije kvantifikatore računa NK

Napomena 3.7. *Pravila* (E∃) *i* (I∀) *dolaze s ograničenjima:*

(E∃) *Parametar a* ne smije se *pojaviti u premisi $\exists x A(x)$, ni u formuli B, niti bilo kojoj pretpostavki premise B osim u odbačenim hipotezama $A(a/x)$*

(I∀) *Parametar a* ne smije se *pojaviti u pretpostavkama dedukcije o kojima ovisi premisa $A(a/x)$ zaključka.*

Dedukcije Gentzenovog NK računa logike prvog reda definiraju se induktivno proširivanjem definicije 1.6 uz uvažavanje pravila tablice 3.2.

Mogli bismo za račun multiplarnih dedukcija preuzeti Gentzenova pravila. No, preuzimanje Gentzenovih pravila znači ponovno uvođenje i odbacivanje hipoteza u račun multiplarnih dedukcija. S takvim pravilima gubi se "povezanost" i "lokalnost" dedukcija, što komplicira analitičku izgradnju multiplarnih dedukcija.

Egzistencijalna instancijacija

Gentzenov oblik pravila (E∃) zamijeniti ćemo oblikom koji je poznat kao **egizstencijalna instancijacija**:

$$(\mathrm{E}\exists)' \ \frac{\exists x A(x)}{A(a/x)} \ .$$

uz uvjet da se parametar a u dedukciji ne pojavljuje u premisi $\exists x A(x)$

Za konkluziju (E∃)′ zaključka reći ćemo da je **hipoteza koja uvodi** a.

Ograničenja pravila (E∃)′ i (I∀) moramo prilagoditi multiplarnom računu.

Prije diskusije o ograničenjima novih pravila moramo definirati i prilagoditi nekoliko pojmova preuzetih iz Prawitzove monografije [Pra06].

Definicija 3.8 (povezanost formula u multiplarnoj dedukciji)**.**
Veza od formule *A* ***do formule*** *B* ***u multiplarnoj dedukciji*** *Π je konačan niz formula (vrhova) $A_1, \ldots, A_n$ za koji vrijedi:*

(i) $A_1 = A$, $A_n = B$;

(ii) *Za $i < n$ uzastopne formule su A_i, A_{i+1} formule istog zaključka* ili *formule iste kontrakcije.*

Definicija 3.9 (a-povezanost)**.**
*Formule A i B su a-**povezane** u dedukciji Π ako postoji veza od A do B tako da sve formule u vezi sadrže parametar a.*

Gentzenovi uvjeti (I∀) pravila govore o svim pretpostavkama dedukcije što uključuje hipoteze koje još nisu odbačene. U multiplarnom računu hipoteze (E∃)′ zaključka su unutarnji čvorovi dedukcije, pa ih treba posebno izdvojiti.

Sad možemo dati globalno ograničenje pravila (E∃)′ i (I∀) za multiplarni račun dedukcija:

Premisa (I∀) zaključka koji eliminira parametar a ne smije biti a-povezana s nekom od premisa dedukcije ili s (E∃)′ hipotezom koja uvodi parametar a.

⋆ ⋆ ⋆

Multiplarne prirodne dedukcije logike prvog reda sad možemo induktivno definirati proširivanjem definicije multiplarnih dedukcija (1.27 i 1.46) i uvažavanjem pravila tablice 3.3.

(I∀) $\dfrac{A(a/x)}{\forall x A(x)}$

premisa $A(a/x)$ ne smije biti a-povezana s nekom premisom dedukcije ili s (E∃)-hipotezom koja uvodi a

(E∀) $\dfrac{\forall x A(x)}{A(a/x)}$

(I∃) $\dfrac{A(a/x)}{\exists x A(x)}$

(E∃)′ $\dfrac{\exists x A(x)}{A(a/x)}$

premisa $\exists x A(x)$ ne smije sadržavati parametar a

Tablica 3.3: Pravila zaključivanja za kvantifikatore s egzistencijalnom instancijacijom: dualnost je vidljiva u simetriji oba para pravila (I∃) s (E∀), i (E∃) s (I∀). Nema odbacivanja hipoteza. Pravila su lokalna, ali imaju globalna ograničenja.

Definicija 3.10 (Multiplarne dedukcije logike prvog reda)**.**
U nastavku umjesto pojma multiplarna dedukcija prvog reda *pisati ćemo kratko* multiplarna dedukcija*.*

Oznakom

$$\begin{array}{c} \Pi \\ A \\ \hline B \end{array}$$

označiti ćemo uređeni graf koji nastaje dodavanjem novih listova B ispod svih donjih listova oblika A multiplarnog grafa Π.

Sada definiramo račun multiplarnih dedukcija klasične logike prvog reda. On se sastoji od IF-pravila, strukturnih pravila i kvantifikatorskih pravila. Sada ih redom navodimo.

I. IF pravila

Pravila tvorbe multiplarnih dedukcija za IF veznike možemo preuzeti iz definicije Kneale dedukcija 1.27 mutatis mutandis.

II. Strukturna pravila

(REZ) *Neka je* Π_1 *multiplarna dedukcija od* Δ_1, A *iz* Γ_1.
Neka je Π_2 *multiplarna dedukcija od* Δ_2 *iz* Γ_2, A.
Neka je Π_1' *multiplarni graf koji nastaje kontrakcijama na konkluzijama* A *u* Π_1.
Neka je Π_2' *multiplarni graf koji nastaje kontrakcijama na premisama* A *u* Π_2.
Multiplarni graf formula koji nastaje spojem od Π_1' *i* Π_2' *preko vrha* A *je multiplarna dedukcija od* Δ_1, Δ_2 *iz* Γ_1, Γ_2.

III. Kvantifikatorska pravila

(E∀) *Neka je* Π *multiplarna dedukcija od* $\Delta, \forall A(x)$ *iz* Γ. *Tada je*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ \forall x A(x)\end{array}}{A(a)}$$

multiplarna dedukcija od $\Delta, A(a)$ *iz* Γ.

(I∃) *Neka je* Π *multiplarna dedukcija od* $\Delta, A(a)$ *iz* Γ. *Tada je*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ A(a)\end{array}}{\exists x A(x)}$$

multiplarna dedukcija od $\Delta, \exists x A(x)$ *iz* Γ.

(E∃) *Neka je* Π *multiplarna dedukcija od* Δ *iz* $\Gamma, A(a)$ *i neka se parametar* a *ne pojavljuje u* Δ. *Tada je*

$$\begin{array}{c}\dfrac{\exists x A(x)}{A(a)} \\ \Pi\end{array}$$

multiplarna dedukcija od Δ *iz* $\Gamma, \exists x A(x)$.

(I∀) *Neka je* Π *multiplarna dedukcija od* $\Delta, A(a)$ *iz* Γ *i neka se u* Γ *ne pojavljuje parametar* a. *Tada je*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ A(a)\end{array}}{\forall x A(x)}$$

multiplarna dedukcija od $\Delta, \forall x A(x)$ *iz* Γ.

Ako je Π *multiplarna dedukcija od* Δ *iz* Γ *pišemo* $\Gamma \vdash \Delta$.

Primjer 3.11. *Ograničenja brane apsurdnu dedukciju*

$$\cfrac{\cfrac{\exists x Px}{Pa}}{\forall x Px} \; .$$

Donji zaključak ove dedukcije nije pravilan – ne možemo zaključiti $\forall x Px$ budući da su premisa od (I$\forall$) *i hipoteza od* (E$\exists$) *a-povezane (to je ista formula/vrh u stablu).*

Teorem 3.12. *Račun multiplarnih dedukcija klasične logike prvog reda je korektan:*

$$\Gamma \vdash \Delta \Rightarrow \Gamma \models \Delta \; .$$

Dokaz. Kvantifikatorska pravila tvorbe su prema propoziciji 3.6 valjana. □

Napomena 3.13 (O simetriji pravila)**.**
U računu multiplarnih dedukcija propozicijske logike postigli smo simetriju između dualnih $\wedge$ i $\vee$, koju bismo htjeli i za kvantifikatorska pravila, budući da su $\exists$ i $\forall$ dualni:

$$\forall x(-Px) = -(\exists x Px) \; .$$

Simetrije među Gentzenovim shemama (E$\exists$) *i* (I$\forall$) *nema, budući da je* (E$\exists$) *hipotetsko pravilo.*

Kneale (a i Kleene i Quine) simetriju pravila eliminacije i introdukcije dualnih veznika $\forall$ i $\exists$ dobivaju korištenjem oznaka

$$\frac{\exists x A(x)}{\{A(a)\}} \qquad\qquad \frac{\{A(a)\}}{\forall x A(x)}$$

koje su pokrate za (potencijalno beskonačna) pravila

$$\frac{\exists x A(x)}{A(a) \qquad A(b) \qquad A(c) \qquad \ldots} \qquad\qquad \frac{A(a) \qquad A(b) \qquad A(c) \qquad \ldots}{\forall x A(x)}$$

što je nije upotrebljivo za metodu analitičkih dedukcija.

Analiza i pseudodedukcije

Mi ćemo dedukcije ponovno graditi analizom formula na gore i na dole. Na primjer, dedukciju

$$\frac{\forall x Px}{Pa}$$

ćemo kao i prije semantički interpretirati – analiza na dole je analiza $\top$-zahtjeva:

$$\textit{Zahtjev} \quad (\forall x Px)\top \quad \textit{povlači zahtjev} \quad Pa\top \quad \textit{(za svaki a).}$$

Slično možemo korektno semantički interpretirati i stablo formula

$$\frac{Pa}{\forall x Px} \tag{3.1}$$

kao analizu prema gore:

$$\textit{Zahtjev} \quad (\forall x Px)\perp \quad \textit{povlači zahtjev} \quad Pa\perp \quad \textit{(za neki a).}$$

Uočimo da stablo formula (3.1) prema prethodnoj definiciji nije multiplarna dedukcija. No, multiplarne dedukcije logike prvog reda možemo kao i prije u propozicijskoj logici prikazati kao spojeve na atomima upravo ovakvih stabala formula. Ovakva stabla formula zvati ćemo **analitičke pseudodedukcije**.

Pokazati ćemo da se dedukcija od Δ iz Γ, ako vrijedi $\Gamma \models \Delta$, može dobiti sparivanjem analitičkih pseudodedukcija.

Metodu analitičkih dedukcija ćemo objasniti nakon sljedeće točke u kojoj ćemo kratko ponoviti metodu tabloa za klasičnu logiku prvog reda.

3.3 Semantička analiza

U ovoj točki dopuniti ćemo istinosno-funkcionalna pravila izgradnje semantičkog stabla dopuniti s pravilima za analizu kvantifikatorskih formula klasične logike prvog reda.

Pravila analize kvantifikatorskih formula dijelimo na dva tipa, koje se u Smullyanovoj unificiranoj notaciji označava s γ i δ.

γ pravila

Zahtjeve oblika $(\forall x Ax)\top$ i $(\exists x Ax)\bot$ zovemo γ zahtjevi. Pravila kojima analiziramo γ zahtjeve zovemo γ pravila.

γ	γ_1	γ_2	$\dots$
$(\forall x Ax)\ \top$	$Aa\ \top$	$Ab\ \top$	$\dots$
$(\exists x Ax)\ \bot$	$Aa\ \bot$	$Ab\ \bot$	$\dots$

Tablica 3.4: γ zahtjev povlači zahtjeve $\gamma_1, \gamma_2, \dots$

γ zahtjev se na beskonačnom nosaču $\{a, b, c, \dots\}$ ne može u potpunosti obraditi. U Bethovim stablima zato umjesto γ zahtjeva zaokružujemo dopisane elemente nosača s kojima zahtjev primjenjujemo.

δ pravila

Zahtjeve oblika $(\exists x Ax)\top$ i $(\forall x Ax)\bot$ zovemo δ zahtjevi. Pravila kojima analiziramo δ zahtjeve zovemo δ pravila.

U analizi δ zahtjeva u nosač ubacujemo novi element. S novim elementom zadaje se novi zahtjev $Aa\top$ ili $Aa\bot$ (vidi tablicu). Novi objekt a treba dopisati uz sve primjerke γ formula. δ zahtjev je time obrađen.

δ	δ_1
$(\exists x Ax)\ \top$	$Aa\ \top, \quad a$ je novi
$(\forall x Ax)\ \bot$	$Aa\ \bot, \quad a$ je novi

Tablica 3.5: δ pravila za δ zahtjeve

Bethova semantička stabla logike prvog reda

Metodom semantičkih stabala tražimo model za $\Gamma\top, \Delta\bot$, odnosno kontramodel za $\Gamma \models \Delta$ (kao i prije u propozicijskom slučaju).

$\boxed{\exists\top}$	$\begin{array}{ll} \exists x F & \top \\ F(a/x) & \top \end{array}$ (a nova konstanta, dopisati uz $\forall\top, \exists\bot$)	$\boxed{\exists\bot}$	$\begin{array}{ll} \exists x F & \bot\ @ \\ F(a/x) & \bot \end{array}$
$\boxed{\forall\top}$	$\begin{array}{ll} \forall x F & \top\ @ \\ F(a/x) & \top \end{array}$	$\boxed{\forall\bot}$	$\begin{array}{ll} \forall x F & \bot \\ F(a/x) & \bot \end{array}$ (a nova konstanta, dopisati uz sve $\forall\top, \exists\bot$)

Tablica 3.6: Kvantifikatorska pravila semantičkih stabala

Obrada δ zahtjeva unosi novi element u nosač, dok obrada γ zahtjeva omogućuje provjere zahtjeva na (svim) elementima nosača.

Primjer 3.14. *Pokažimo metodom semantičkih stabala da vrijedi*

$$\forall x \forall y (Rxy \to -Rxx \wedge -Ryy) \models \forall x - Rxx\ . \tag{3.2}$$

Iz početnih zahtjeva

$$\begin{array}{l} \forall x \forall y (Rxy \to -Rxx \wedge -Ryy)\ \top \\ \forall x - Rxx\ \bot \end{array}$$

izgradimo stablo:

$\forall x \forall y(Rxy \to -Rxx \wedge -Ryy) \quad \top, @$		(1), *a iz* (3)
$\forall x - Rxx \quad \perp$		(2)
$-Raa \quad \perp$		(3) *iz* (2), *novi a*
$Raa \quad \top$		(4) *iz* (3)
$Raa \to -Raa \wedge -Raa \quad \top$		(5) *iz* (1) *a*
$Raa \quad \perp$	$-Raa \quad \top$	(6) *iz* (5)
	$Raa \quad \perp$	(7)

Uočimo da je (2) zahtjev oblika δ. U nosač unosimo novi a, čime stvaramo novi zahtjev (3). Novi element nosača dopisuje se uz γ zahtjev (1).

Stablo se zatvorilo, prema tome implikacija (3.2) *je valjana.*

Primjer 3.15.
Pokažimo da se zahtjev $(\forall x \exists y Rxy)\top$ *na beskonačnom univerzumu ne može potpuno obraditi (sl. 3.1).*

$$
\begin{array}{lll}
\forall x \exists y Rxy & \top, a, b, c, \ldots & (1),\ a \text{ jer } U \neq \emptyset \\
\exists Ray & \top & (2) \text{ iz } (1)\ a \\
Rab & \top & (3) \text{ iz } (2), \text{ novi } b \\
\exists Rby & \top & (4) \text{ iz } (1)\ b \\
Rbc & \top & (5) \text{ iz } (4), \text{ novi } c \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Slika 3.1: Tabló analize zahtjeva $\forall x \exists y Rxy\ \top$ – dijelovi koji se ponavljaju istaknuti su u okvirima

Ovo stablo se ne može zatvoriti. Budući da se radi o beskonačnom nosaču, ne može se završiti.

Primjer modela koji ispunjava zahtjev $(\forall \exists xy Rxy)\top$ *je interpretacija predikata* R *kao relacije* $x < y$ *na skupu* $\mathbb{N}$:

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) \quad x < y\,.$$

⋆ ⋆ ⋆

Prethodni primjeri ilustriraju koliko je semantička analiza kvantifikatorskih formula teži problem od semantičke analize propozicijskih formula. Algoritam ne staje uvijek – neke se zahtjeve ne može potpuno obraditi u konačno koraka.

D. Hilbert je 1928. godine postavio tzv. problem odluke (njem. *Entscheidungsproblem*) koji glasi "*naći algoritam koji odgovora je li proizvoljna formula logike prvog reda valjana ili nije*".

Propozicija 3.16 (Church, 1936. i nezavisno Turing 1937.)**.**
Klasična logika prvog reda ***nije odlučiva****.*

Propozicija 3.16 je negativno rješenje Hilbertovog problema – ne postoji postupak koji u konačnom broju koraka može odrediti da li je implikacija $\Gamma \models \Delta$ formula logike prvog reda valjana.

Ciklička metoda semantičkih stabala

Metodu semantičkih stabala možemo sistematizirati na sljedeći način. Zahtjeve ćemo obrađivati u ciklusima C_i čime želimo osigurati da postupak sustavno ne zanemari neki zahtjev bitan za zatvaranje stabla.

U prvi ciklus C_0 uvrštavamo početne zahtjeve semantičkog stabla.

Zahtjeve u ciklusu C_i obraditi ćemo sljedećim prioritetom:

(i) α i β zahtjevi

(ii) δ zahtjevi

(iii) γ zahtjevi

Unutar ciklusa najviši prioritet imaju istinosno-funkcionalni zahtjevi (α i β-zahtjevi). Dokle god među zahtjevima trenutnog ciklusa ima neobrađenih α i β zahtjeva, algoritam ne može obraditi γ ili δ zahtjev.

Zahtjevi koji nastanu u obradi u ciklusu C_k uvrštavaju se u sljedeći ciklus C_{k+1}.

Kad se obrade svi zahtjevi ciklusa C_k, prelazi se na obradu zahtjeva sljedećeg ciklusa C_{k+1}.

Na ovaj način osiguravamo da "otvorenost" semantičkog stabla nije posljedica sustavno lošeg odabira obrade zahtjeva.

Ovako sistematiziranu metodu semantičkih stabala zovemo **ciklička metoda semantičkih stabala**. U nastavku pod pojmom metoda semantičkih stabala podrazumijevamo njezinu cikličku varijantu.

Iz [Šik14] prenosimo osnovni rezultat o cikličkoj metodi semantičkih stabala.

Propozicija 3.17 (Pozitivnost cikličke metode)**.**
Ako vrijedi $\Gamma \models \Delta$, stablo izgrađeno cikličkom metodom zatvoriti će se u konačnom broju koraka.

Dakle, za klasičnu logiku prvog reda postoji pozitivni postupak odluke. Ciklička metoda Bethovih semantičkih stabala je pozitivni postupak odluke za logiku prvog reda.

Negativni postupak ne postoji (zbog propozicije 3.16).

3.4 Metoda analitičkih dedukcija

Analiza s multiplarnim dedukcijama

U duhu analize propozicijskih formula metodom dedukcija, kao i ranije, $\top$-zahtjeve analiziramo na dole korištenjem pravila eliminacije, a $\bot$-zahtjeve analiziramo korištenjem pravila introdukcije ("prema gore").

Tako i uvodimo pravila za semantičku analizu kvantificiranih formula (tablica 3.7).

PRAVILA ANALITIČKIH DEDUKCIJA ZA KVANTIFIKATORE

$\boxed{\forall\top}$ $\dfrac{\forall x A x}{A a}$, za $a, b, c, \ldots$

$\boxed{\forall\bot}$ $\dfrac{A a}{\forall x A x}$ (a novi element nosača)

$\boxed{\exists\top}$ $\dfrac{\exists x B x}{B a}$ (a novi element nosača)

$\boxed{\exists\bot}$ $\dfrac{B a}{\exists x B x}$, za $a, b, c, \ldots$

$(\exists\top)$ i $(\forall\bot)$ su δ pravila. Njihova obrada unosi nove elemente u nosač.

Tablica 3.7: Semantička pravila analitičkih dedukcija za kvantifikatore
U lijevom stupcu su $\top$-pravila (analiza na dole).
U desnom stupcu su $\bot$-pravila (analiza na gore)

Definicija 3.18.
Stablo formula koje dobijemo analizom kvantifikatorskih formula na gore ili na dole primjenom IF-pravila i pravila iz tablice 3.7 zvati ćemo ***analitičke pseudodedukcije****.*

Analitičke pseudodedukcije su multiplarna stabla formula koja nisu nužno multiplarne dedukcije, ali čijim se spojevima mogu izgraditi multiplarne dedukcije.

Za pseudodedukcije ćemo kao i za analitičke dedukcije reći da su **završene** ako su svi njihovi izvedeni listovi atomi.

Sinteza

Završenim pseudodedukcijama pridružujemo klauze na isti način kao i u propozicijskom slučaju: klauzu završene pseudodedukcije tvore atomi koji su donji listovi pseudedukcije i negacije atoma koji su gornji listovi pseudodedukcije.

Iz sparivanja klauzi se spajanjem pripadnih analitičkih dedukcija dobije tražena multiplarna dedukcija.

Primjer 3.19. *Pokažimo $\forall x Fx \models \exists x Fx$.*

Zahtjeve analiziramo na dole i na gore kao i ranije:

$$\begin{array}{c} \boxed{\forall x Fx} \\ \downarrow \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \uparrow \\ \boxed{\exists x Fx} \end{array}$$

Oba zahtjeva su γ formule:

$$\frac{\forall x Fx}{\gamma} \qquad\qquad \frac{\gamma}{\exists x Fx}$$

"Između redaka" dedukcije zapisujemo metainformacije o zahtjevima. U završenim analitičkim pseudodedukcijama metazapis "ispuštamo".

Budući da je nosač U neprazan, postoji objekt $a \in U$. Oba γ zahtjeva obradimo s a:

$$\begin{array}{c} \forall x Fx \\ \hline \gamma \; @ \\ \hline Fa \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} Fa \\ \hline \gamma \; @ \\ \hline \exists x Fx \end{array}$$

Ovdje smo dobili dvije završene pseudodedukcije:

$$\frac{\forall x Fx}{Fa} \qquad\qquad \frac{Fa}{\exists x Fx}$$

koje možemo spojiti u multiplarnu dedukciju:

$$\begin{array}{c} \forall x Fx \\ \hline Fa \\ \hline \exists x Fx \end{array} .$$

Primjer 3.20. *Ako bismo pomoću analitičkih dedukcija pokušali pokazati $\exists x F(x) \models \forall x F(x)$, morali bismo potražiti analitičke dedukcije*

$$\begin{array}{c} \boxed{\exists x Fx} \\ \downarrow \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \uparrow \\ \boxed{\forall x Fx} \end{array}$$

Oba zahtjeva su primjeri δ formula, svaki će kreirati po jedan (novi) element nosača:

$$\frac{\exists x Fx}{Fa} \qquad\qquad \frac{Fb}{\forall x Fx}\ .$$

Dobili smo dvije završene analitičke dedukcije s atomarnim zahtjevima Fa i $-Fb$ koje ne možemo spojiti. Pripadno klauzalno stablo je otvoreno i $Fa\top, Fb\bot$ je kontramodel implikacije $\exists x F(x) \models \forall x F(x)$.

Budući da svako δ pravilo unosi novi element, u ovom primjeru ne možemo dobiti dvije spojive analitičke dedukcije kao na primjer:

$$\frac{\exists x Fx}{Fa} \qquad\qquad \frac{Fa}{\forall x Fx}$$

čiji spoj daje apsurdni izvod

$$\cfrac{\cfrac{\exists x Fx}{Fa}}{\forall x Fx}\ .$$

U sparivanju analitičkih pseudodedukcija neće biti problema s ograničenjima egzistencijalne instancijacije. Obrada svakog δ pravila u nosač unosi novi element. Zato nije moguće povezati premisu (I$\forall$) zaključka koja eliminira parametar a i hipotezu (E$\exists$) zaključka koji parametar uvodi.

Primjer 3.21 (Analiza koja ne završava)**.**
Analiza zahtjeva $\forall x \exists y Fxy\top$ koji smo već analizirali semantičkim stablom u primjeru 3.15 daje niz pseudodedukcija

$$\cfrac{\cfrac{\forall x \exists y Fxy}{\gamma\ a}}{\cfrac{\exists y Fay}{\cfrac{\delta\ \text{novi } b}{Fab}}} \qquad \cfrac{\cfrac{\forall x \exists y Fxy}{\gamma\ a\ b}}{\cfrac{\exists y Fby}{\cfrac{\delta\ \text{novi } c}{Fbc}}} \qquad \cfrac{\cfrac{\forall x \exists y Fxy}{\gamma\ a\ b\ c}}{\cfrac{\exists y Fcy}{\cfrac{\delta\ \text{novi } d}{Fcd}}} \qquad \ldots$$

Ovim pseudodedukcijama odgovaraju zahtjevi:

$$Fab, Fbc, Fcd, \ldots$$

Kao i u ranijem primjeru analize metodom semantičkog stabla, analiza ne završava.

Metoda analitičkih dedukcija logike prvog reda

Analiza i sinteza su jasno razgraničeni dijelovi metodi analitičkih dedukcija u propozicijskoj logici. U logici prvog reda više ne mogu biti: sinteza ne može započeti tek kad analiza završi. Klauzalno stablo gradimo paralelno s postupkom analize i želimo ga zatvoriti čim prije moguće.

Zato čim analizom zahtjeva stvorimo završenu pseudodedukciju dopunjujemo klauzalno stablo s klauzom te pseudodedukcije. Ako se klauzalno stablo zatvori, analiza prestaje. Inače (ako klauzalno stablo ostaje otvoreno) nastavljamo analizu.

Sparivanje u zatvorenom klauzalnom stablu tražimo na isti način kao i u propozicijskom slučaju. Zatim korištenjem sparivanja odgovarajućim spajanjima pseudodedukcija konstruiramo traženu dedukciju (algoritam 2.1, str. 88).

Cijela metoda sažeta je u algoritmu 3.1.

Algoritam 3.1: Metoda analitičkih dedukcija (MAD) za logiku prvog reda

---

ulaz : Skup zahtjeva $\Gamma\top, \Delta\bot$
izlaz : Multiplarna dedukcija $\Gamma \vdash \Delta$ (ako takva postoji)

1 $C \leftarrow$ ciklus s inicijalnim zahtjevima
2 $\mathcal{K} \leftarrow$ prazno (otvoreno) klauzalno stablo

3 **while** *$\mathcal{K}$ je otvoreno i C nije prazan* **do**
4   **while** *u ciklusu C ima neobrađenih zahtjeva* **do**
5   Obradi zahtjeve ciklusa C.
6   Novonastale zahtjeve uvrsti u sljedeći ciklus C'.
7   Čim obradom zahtjeva nastane završena pseudodedukcija,
8   dopuni stablo $\mathcal{K}$ odgovarajućom klauzom.
9   Ako se $\mathcal{K}$ zatvorilo, idi na 11
10     $C \leftarrow C'$

11 Ako je $\mathcal{K}$ zatvoreno potražimo sparivanje/dedukciju

---

Primjer 3.22. *Pokažimo* $\exists y\forall xFxy \models \forall x\exists yFxy$ *metodom analitičkih dedukcija:*

Dokaz. Analizu započinje traženjem pseudodedukcija od $\exists y\forall xFxy$ na dole i od $\forall x\exists yFxy$ na gore:

$$\begin{array}{c} \boxed{\exists y\forall xFxy} \\ \downarrow \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \uparrow \\ \boxed{\forall x\exists yFxy} \end{array}$$

Ovo su δ zahtjevi:

$$\frac{\exists y\forall xFxy}{\delta} \qquad\qquad \frac{\delta}{\forall x\exists yFx}$$

Dvije δ formule obraditi ćemo u prvom ciklusu. Nakon toga imamo sljedeće pseudodedukcije:

$$\begin{array}{c} \exists y\forall xFxy \\ \hline \delta \quad a \text{ novi} \\ \hline \forall xFay \\ \hline \gamma \quad a,b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \gamma \quad a,b \\ \hline \exists yFb \\ \hline \delta \quad b \text{ novi} \\ \hline \forall x\exists yFxy \end{array}$$

U drugom ciklusu su dvije γ formule s nosačem $\{a,b\}$. Ako u prvoj dedukciji primijenimo γ pravilo s b i u drugoj dedukciji s a u dobijemo dvije završene analitičke dedukcije.

$$\begin{array}{c} \exists y\forall xFxy \\ \hline \delta \quad a \text{ novi} \\ \hline \forall xFay \\ \hline \gamma \quad a, b \\ \hline Fab \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} Fab \\ \hline \gamma \quad a, b \\ \hline \exists yFb \\ \hline \delta \quad b \text{ novi} \\ \hline \forall x\exists yFxy \end{array}$$

Tražene analitičke pseudodedukcije bez γ i δ metazapisa su

$$\begin{array}{c} \exists y\forall xFxy \\ \hline \forall xFay \\ \hline Fab \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} Fab \\ \hline \exists yFb \\ \hline \forall x\exists yFxy \end{array}$$

Njihovim spajanjem preko Fab čime dobijemo traženu dedukciju:

$$\begin{array}{c} \exists y\forall xFxy \\ \hline \forall xFxa \\ \hline Fba \\ \hline \exists yFby \\ \hline \forall x\exists yFxy \end{array}$$

□

Napomena 3.23.
Metode analitičkih dedukcija i metoda semantičkih stabala analiziraju semantičke zahtjeve na isti način. Analiza zahtjeva stvara nove zahtjeve prema istim α, β, δ i γ pravilima. Razlikuju se u zapisivanju i postupanju s dobivenim zahtjevima, no isti novonastali zahtjevi ulaze u sljedeći ciklus obiju metoda.

U nastavku ćemo pretpostaviti da ciklička metoda semantičkog stabla zatvara stablo isključivo na kraju svakog ciklusa. Slično ćemo pretpostaviti i za MAD: klauzalno stablo dopunjuje se na kraju svakog ciklusa.

Ova prilagodba ne utječe na konačni ishod ovih metoda, budući da se zatvaranje odgovarajućeg stabla eventualno odgađa za konačan broj koraka (koliko ih ima u ciklusu).

Za prilagođene varijante metoda vrijedi:

1. *Ako i-ti ciklusi ovih metoda sadrže iste zahtjeve, tada se podudaraju i sljedeći ciklusi.*
2. *Neka metoda A staje prva (zatvori odgovarajuće stablo) nakon obrade k-tog ciklusa. Svi zahtjevi obrađeni u metodi A obrađeni su i u metodi B.*

3.5 Algoritamska ekvivalencija

Svaka formula prvog reda može se prevesti u logički ekvivalentnu preneks formu. U nastavku ćemo za Γ i Δ pretpostavljati da su skupovi formula u preneks formi.

Dokaz ekvivalentnosti metoda zasniva se na sljedećoj propoziciji.

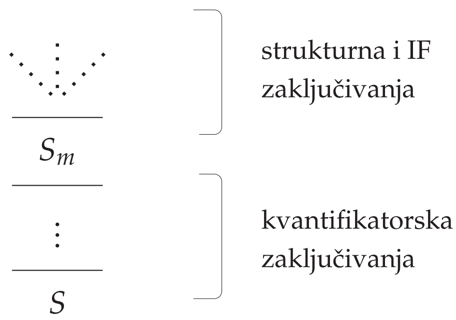
Propozicija 3.24 (Gentzenov teorem o midsekventi)**.** *Neka su Γ i Δ skupovi preneks formula. Ako u LK postoji sekventna dedukcija od $\Gamma \vdash \Delta$ u LK, tada postoji sekventna dedukcija bez reza Π iste sekvente takva da u Π postoji sekventa S_m koja ne sadrži kvantifikatore te vrijedi:*

(i) pravila zaključivanja u Π iznad sekvente S_m su strukturna ili IF-pravila;

(ii) pravila zaključivanja u Π ispod sekvente S_m su kvantifikatorska pravila.

*Sekventu S_m zovemo **midsekventa sekventnog izvoda** Π.*

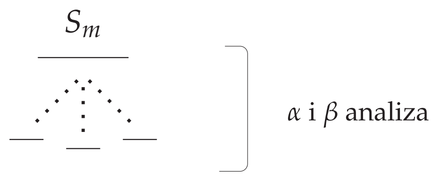
Teorem o midsekventi je Gentzen iskazao i dokazao u [Gen35]. Izvorno ga je nazvao *izoštreni teorem o rezu* (njem. *verschärfte Hauptsatz*).



Slika 3.2: Skica LK dedukcije s midsekventom S_m.
U gornjem dijelu dedukcije su strukturna pravila (slabljenje) i IF pravila zaključivanja. Kvantifikatorska pravila zaključivanja su u donjem dijelu dedukcije u kojem se stablo formula ne grana.

Napomena 3.25. *Dokaz teorema o midsekventi (v. [Tak13]) je konstruktivan: pokazuje kako se transformacijama LK dedukciju bez reza može dovesti do LK dedukcije s midsekventom.*

Iz dualnosti zatvorenih sekventnih semantičkih stabala i LK dedukcija (vidi točku 2.4) zaključujemo da za neispunjivi skup zahtjeva $\Gamma \not\models \Delta$ postoji semantičko sekventno stablo s midsekventom.



Slika 3.3: Zatvoreno stablo midsekvente
"Okretanjem" gornjeg dijela LK dedukcije s midsekventom dobijemo zatvoreno sekventno semantičko stablo čiji su početni zahtjevi S_m.

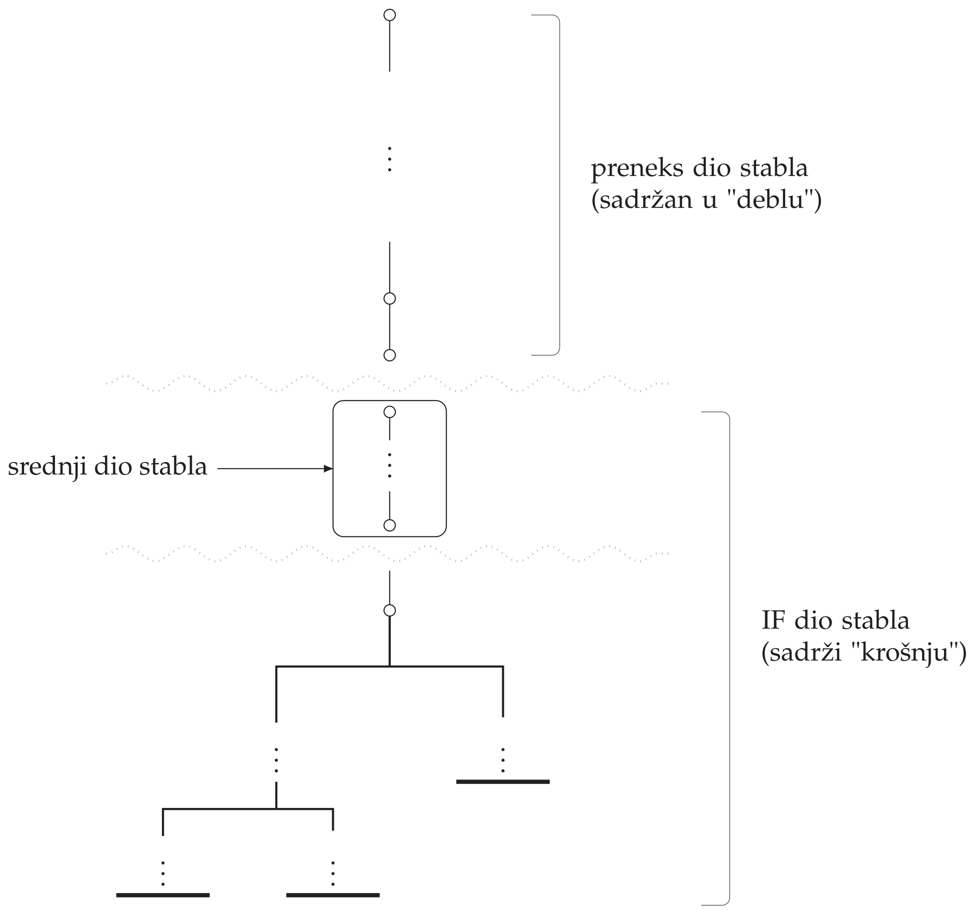
Zahtjevi midsekvente dovoljni su za zatvaranje tog stabla (slika 3.3).

Iz prethodnog slijedi i tzv. tabló varijanta teorema o midsekventi.

Propozicija 3.26 (Tabló verzija teorema o midsekventi)**.**
Ako vrijedi $\Gamma \models \Delta$, tada postoji zatvoreno semantičko stablo od $\Gamma\top$, $\Delta\bot$ u kojem sve primjene δ i γ pravila prethode svim primjenama α i β pravila.

Dakle, zatvoreno semantičko stablo može se razviti tako da se dijeli na dva dijela: gornji dio sadrži samo kvantifikatorske zahtjeve, a donji dio stabla sadrži samo IF-zahtjeve (vidi sliku 3.4). Takvo, tzv. dvodijelno stablo se u svojem gornjem (kvantifikatorskom) dijelu ne grana. U srednjem dijelu stabla nalaze se tzv. zahtjevi midsekvente – to su IF zahtjevi nastali iz γ ili δ zahtjeva.

Napomena 3.27. *Zatvoreno semantičko stablo skupa preneks zahtjeva $\Gamma\top$, $\Delta\bot$ možemo prepisati u dvodijelno stablo tako da obradimo isti niz zahtjeve s istim parametrima koji je zatvorio stablo, ali sad (u drugom prolazu) biramo redoslijed u kojem prednost imaju kvantifikatorski zahtjevi: najprije prepišemo (i obradimo) sve kvantifikatorske zahtjeve polaznog stabla i tek zatim sve IF-zahtjeve (u njihovom redoslijedu).*



Slika 3.4: Skica zatvorenog tablóa preneks zahtjeva
Stablo ima oblik okrenutog "botaničkog" stabla s deblom i krošnjom.
Preneks preneks zahtjevi su u gornjem dijelu (deblu) stabla. U srednjem dijelu stabla (na početku IF dijela, još uvijek na deblu) su zahtjevi midsekvente. Krošnja pripada IF dijelu stabla (za nju su zaslužni β zahtjevi).

Teorem 3.28 (ekvivalencija metoda za preneks formule).
Bethovo semantičko stablo preneks zahtjeva $\Gamma\top, \Delta\bot$ se zatvara ako i samo ako se zatvara i klauzalno stablo istog skupa zahtjeva u metodi analitičkih dedukcija.

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo da se Bethovo semantičko stablo skupa zahtjeva $\Gamma\top, \Delta\bot$ zatvara. Pokazati ćemo da se u tom slučaju zatvara i MAD klauzalno stablo.

1. Ako se zatvara Bethovo semantičko stablo, tada se zatvara i semantičko stablo u cikličkoj varijanti metode. To zatvoreno semantičko stablo možemo prema napomeni 3.25 transformirati u sekventno semantičko s midsekventom S_m.
2. Midsekventa S_m sadrži IF-zahtjeve koji su nastali u cikličkoj varijanti. Prema napomeni 3.23 ti zahtjevi nastaju i u MAD metodi. Zahtjevi midsekvente su dovoljni za zatvaranje semantičkog stabla.
3. Budući da su ove metode na IF-zahtjevima ekvivalentne, slijedi da će se i MAD klauzalno stablo zatvoriti (čim se u potpunosti obrade zahtjevi midsekvente S_m).

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da se zatvorilo MAD klauzalno stablo u metodi analitičkih dedukcija. U zatvorenom klauzalnom stablu možemo naći sparivanje.

1. U svakoj završenoj analitičkoj pseudodedukciji koja sudjeluje u sparivanju postoji formula bez kvantifikatora koja pseudodedukciju dijeli na kvantifikatorski i IF dio. Svaka od tih formula je semantički zahtjev Z_i koji nastaje i obrađuje se i u cikličkoj metodi semantičkog stabla.
2. Zahtjev Z_i nema prethodnika β oblika (zbog preneks forme). To znači da se na semantičkom stablu nalazi ili u gornjem (preneks) dijelu stabla, ili na svakoj (u tom koraku izgradnje) otvorenoj grani.
3. Slobodno možemo pretpostaviti da se svi Z_i nalaze u gornjem dijelu semantičkog stabla.
4. Budući da su Z_i IF-zahtjevi koji zatvaraju MAD klauzalno stablo, zbog ekvivalencije metoda na IF-zahtjevima slijedi da će se zatvoriti i Bethovo semantičko stablo (kad se potpuno obrade zahtjevi Z_i).

$\square$

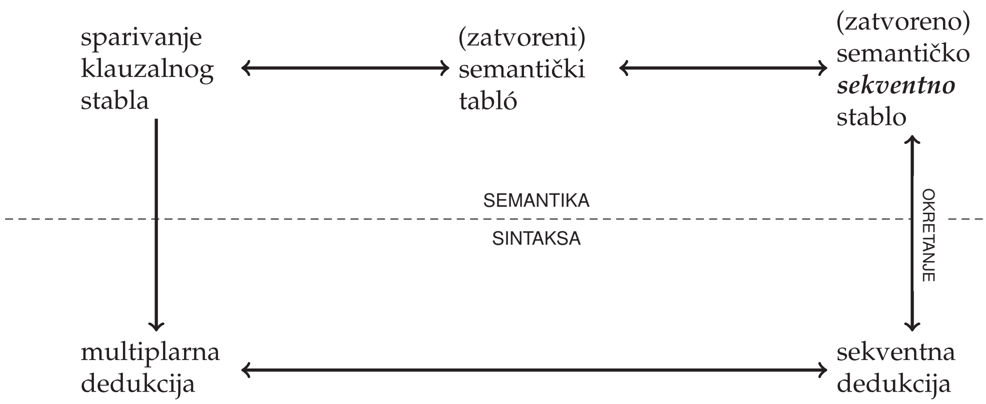
Iz teorema slijedi:

1. Metoda analitičkih dedukcija je pozitivni postupak odluke za logiku prvog reda.
2. Račun multiplarnih dedukcija klasične logike prvog reda je potpun.
3. Dedukcije koje nastaju sparivanjem su u normalnoj formi. Metoda analitičkih dedukcija je konstruktivni dokaz teorema o normalnoj formi za račun multiplarnih dedukcija klasične logike prvog reda.

Zaključak

Razlike između sekventnog računa i Bethovih semantičkih stabala su u klasičnoj logici notacijske, odnosno "sintaktičke, prirode. Često se kaže da su *sekventni izvodi tablói okrenuti naopačke*[1].

Multiplarne prirodne dedukcije klasične logike mogu se na jednostavan način prepisati u sekventni i u tabló izvod. Sustav (pravila) je jednostavan i dobar za semantički pristup. Na ovaj način proširujemo algoritamsku ekvivalenciju Bethovih semantičkih stabala (analitičkih tablóa) i sekventnih izvoda na algoritamsku ekvivalenciju s multiplarnim dedukcijama.



Prepisivanje sparivanja klauzalnog stabla u izvode drugih računa.

Koraci izgradnje Bethovog stabla odgovaraju koracima metode analitičkih dedukcija. Zatvoreno Bethovo stablo ne možemo prepisati u multiplarnu dedukciju, kao što je to moguće s Bethovim stablom sekventnom dedukcijom, ali možemo ponoviti iste korake semantičke analize i kao rezultat dobiti multiplarnu dedukciju.

Zato možemo reći da su u klasičnoj logici sva tri najraširenija tipa logičkih računa (dedukcije, sekvente i tabloi) analitički i "algoritamski ekvivalentni".

[1](npr. M. Fitting u [Fit83])

Literatura

[Bet55] E. W. Beth. "Semantic Entailment and Formal Derivability". *Mededlingen van der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen* (1955.), str. 309–342 (cit. na str. 63).

[BJ74] G. Boolos i R. Jeffrey. *Computability and Logic*. Open University set book. University Press, 1974.

[Bus98] S. Buss. *Handbook of Proof Theory*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier Science, 1998.

[Dal04] D. van Dalen. *Logic and Structure*. Universitext (1979). Springer, 2004. (cit. na str. 52).

[Fit83] M. Fitting. *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*. Synthese Library. Springer, 1983. (cit. na str. 77, 83, 125).

[Fit96] M. Fitting. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. Graduate Texts in Computer Science Series. Springer-Verlag, 1996.

[Gab96] D. Gabbay. *Labelled deductive systems. 1*. Oxford Logic Guides. Clarendon Press, 1996.

[Gal86] J. Gallier. *Logic for computer science: foundations of automatic theorem proving*. Computer Science and Technology Series. Harper & Row, 1986.

[Gen35] G. Gentzen. "Untersuchungen über das logische Schließen. I". *Mathematische Zeitschrift* 39.1 (1935.), str. 176–210 (cit. na str. 3, 14, 52, 120).

[Gen38] G. Gentzen. "Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises fur die reine Zahlentheorie". *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften* 4 (1938.), str. 19–44 (cit. na str. 23).

[GJ33] Gentzen, Gerhard i J. von Plato. "Dokaz teorema normalizacije". rukopis pronađen kod P. Bernaysa, priredio J. van Plato. 1933.

[GS69] Gentzen, G. i Szabo, E. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Pub. Co., 1969.

[Jaś34] S. Jaśkowski. "On the Rules of Suppositions in Formal Logic". Studia Logica 1 (1934.), str. 232–258 (cit. na str. 3).

[KK56] Kneale, William i Kneale, Martha. *Development of Logic*. Clarendon Press, 1956., str. 538–548 (cit. na str. xiii, 21).

[Mar13] M. Maretić. "Multiple Conclusion Deductions in Classical Logic". *Logic and Applications*. IUC Dubrovnik, 2013.

[NP11] S. Negri i J. von Plato. *Proof Analysis: A Contribution to Hilbert's Last Problem*. Cambridge University Press, 2011.

[NPR08] S. Negri, J. von Plato i A. Ranta. *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press, 2008. ISBN: 9780521068420.

[Pfe84] F. Pfenning. "Analytic and Non-analytic Proofs". LNCS (1984.).

[Pra06] D. Prawitz. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2006. (cit. na str. xv, 52, 104).

[Sch77] K. Schütte. *Proof theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1977.

[Sip06] M. Sipser. *Introduction To The Theory Of Computation*. Advanced Topics Series. Thomson Course Technology, 2006. (cit. na str. 85, 86).

[Smu65] R. Smullyan. "Analytic Natural Deduction". *Journal of Symbolic Logic* 30.2 (1965.), str. 123–139 (cit. na str. 52).

[Smu95] R. Smullyan. *First-Order Logic*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publ., 1995. (cit. na str. xiii, xv, 20).

[SS78] Shoesmith, D. J. i Smiley, T. J. *Multiple Conclusion Logic*. Cambridge University Press, 1978. (cit. na str. xiii).

[Šik14] Z. Šikić. "Logika". Sveučilišni udžbenik iz matematičke logike. 2014. (cit. na str. xv, 76, 77, 113).

[Šik87] Z. Šikić. "Sistemi pravila i sistemi sekventi". Disertacija. Sveučilište u Zagrebu, 1987.

[Tak13] G. Takeuti. *Proof Theory: Second Edition*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2013. (cit. na str. xv, 120).

[TS00] A. Troelstra i H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2000.

[Ung92] A. Ungar. *Normalization, Cut-Elimination, and the Theory of Proofs*. Csli Lecture Notes. Center for the Study of Language i Information, 1992. (cit. na str. 51).

[Von11] J. Von Plato. "A Sequent Calculus Isomorphic to Gentzen's Natural Deduction". *The Review of Symbolic Logic* 4 (2011.), str. 43–53.

[Vuk11] M. Vuković. "Primjenjena logika". skripta za kolegij na doktorskom studiju matematike 2011/2012. 2011. (cit. na str. xv).

Životopis

Rođen u Čakovcu 19.10.1977. Osnovnu školu i prirodoslovno-matematičku gimnaziju pohađao u Varaždinu. Srednju školu završio u Denveru, Colorado, S.A.D. Diplomirao teorijsku matematiku u Zagrebu 2002. Od 2002. do 2011. radi kao asistent na katedri za matematiku Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu. Od 2011. zaposlen kao asistent na katedri za kvantitativne metode Fakulteta organizacije i informatike u Varaždinu. Živi i radi u Varaždinu. Oženjen, otac dvoje djece.

Popis radova

[1] A. Dujella, M. Maretić – Kriptografija, Sveučilišni udžbenik, Element, Zagreb, 2007.

[2] M. Maretić – Što je kriptografija, Matematičko fizički list, 2008.,

[3] M. Maretić – Causal Models, zbornik CECIIS konferencije, 2011.

[4] M. Maretić – Multiple Conclusion Deductions in Classical Logic, Logic and Applications, IUC Dubrovnik, 2013. http://imft.ftn.uns.ac.rs/math/cms/LAP2013/Program

Kazalo

https://db.tt/fsmj1Y5s

commit 489eec500505541d486d04a9edf75dccc3001908