Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Osnovne algebarske i kategorijske strukture **4**
2.1 Osnovne algebarske strukture . . . 4
2.2 Kategorije i funktori . . . 6
2.3 Funktori i prirodne transformacije . . . 10
2.4 Adjungirani funktori . . . 12
2.5 Limesi u kategorijama . . . 13
2.6 Striktno monoidalne kategorije . . . 17
2.7 Unutarnje kategorije . . . 17
2.8 Predsnopovi i reprezentabilni funktori . . . 18

3 Monoidalne i obogaćene kategorije **21**
3.1 Monoidalne kategorije i teorem koherencije . . . 21
3.2 Obogaćene kategorije . . . 24
3.3 Striktne n-kategorije . . . 26
3.4 Bikategorije . . . 27
3.5 Simetrične monoidalne kategorije . . . 29
3.6 Unutarnji hom: zatvorene monoidalne kategorije . . . 29

4 Univerzalna algebra **32**
4.1 Monade i komonade . . . 32
4.2 Operadi . . . 35
4.3 Algebarske teorije . . . 38

5 (Ko)lančani kompleksi u kategoriji R-modula **40**
5.1 Homologija lančanih kompleksa . . . 40
5.2 Operacije na kompleksima . . . 44
5.3 Simplicijalni skupovi . . . 47
5.4 Primjeri iz topologije, geometrije i algebre . . . 50

6 Aditivne i abelove kategorije **53**
6.1 Aditivne i abelove kategorije . . . 53

6.2 (Ko)lančani kompleksi i egzaktni funktori u abelovoj kategoriji 54
6.3 Projektivni i injektivni objekti 57
6.4 Rezolvente 58
6.5 Klasični derivirani funktori 60

7 Kategorije (ko)lančanih kompleksa **64**
7.1 Kategorija (ko)lančanih kompleksa 64
7.2 Homotopska kategorija $\mathcal{K}$ 64
7.3 Lokalizacija kategorija 65
7.4 Derivirane kategorije 69
7.5 Loday-Pirashvilijeva tenzorska kategorija i više LP-kategorije 71

8 Strukture na kategorijama lančanih kompleksa **73**
8.1 Abelove kategorije kolančanih kompleksa 73
8.2 Triangulirane kategorije 75
8.3 Derivirana kategorija kao triangulirana kategorija 76
8.4 Derivirani funktori 78

9 Algebre u LP kategoriji **80**
9.1 Posebni objekti u **LP** kategoriji 81
9.2 Leibnizove algebre 83
9.3 Derivacija algebre u LP 84
9.4 Ekstenzije Liejevih algebri u LP 86
9.5 Zatvorenost Loday-Pirashvilijeve monoidalne kategorije 89

10 Algebre u kategorijama lančanih kompleksa **92**
10.1 Tenzorska algebra 92
10.2 Graduirane algebre, dg-algebre 93
10.3 Kvadratične algebre i Koszulova dualnost 95
10.4 A_∞-algebre 98
10.5 L_∞-algebre 102

Poglavlje 1

Uvod

Riječ **algebra** ima mnogo značenja u matematici. Prije svega postoji određena grana matematike koju nazivamo algebra, kao i standardni kolegij na studiju matematike koji se bavi osnovama algebre kao grane matematike. Osnovno poglavlje algebre koje proučava algebarske strukture nazivamo **univerzalna algebra**.

U 2. poglavlju navest ćemo definicije nekih osnovnih algebarskih struktura. Ipak, u radu će se naći mnogi pojmovi (poput tenzorskog produkta modula, slobodne abelove grupe i sl.) koje nećemo nigdje definirati, a koji su standardni dio gradiva na dodiplomskom studiju. Zainteresirani čitatelj definicije i općenita svojstva može pronaći u [15] ili bilo kojem drugom udžbeniku iz algebre.

Većina matematičara $\mathbf{k}$-algebrom smatra $\mathbf{k}$-vektorski prostor (ili $\mathbf{k}$-modul ako je $\mathbf{k}$ samo prsten) s $\mathbf{k}$-bilinearnim produktom, na primjer Liejeve $\mathbf{k}$-algebre čine zanimljivu potklasu. Često pretpostavljamo da je bilinearan produkt asocijativan, ponekad da je unitalan, a u nekim kontekstima čak da je komutativan.

Asocijativne unitalne algebre možemo promatrati u proizvoljnoj monoidalnoj kategoriji, a ponekad ih nazivamo **monoidima** u toj kategoriji. Monoid u kategoriji vektorskih prostora je unitalna asocijativna algebra, a monoid u kategoriji skupova je samo klasični monoid. Teorija kategorija omogućava rad s matematičkim objektima na apstraktnoj razini i uvodi jezik na kojem su mnoge univerzalne konstrukcije jasnije. U 2. i 3. poglavlju dajemo pregled osnovnih pojmova i rezultata teorije kategorije s raznim primjerima iz algebre, geometrije i topologije.

U univerzalnoj algebri postoji nekoliko okvira unutar kojih možemo definirati "algebarske strukture" u nekoj općenitosti i neke od tih struktura također nazivamo algebrama. U različitim okvirima realiziramo ih kao algebre (module) nad monadom, algebre nad (Lawvereovom ili algebarskom) teorijom, algebre nad operadom (ili PRO(P)-om), kao reprezentacije skice itd. U univerzalnoj algebri govorimo i o određenim klasama algebri, dane signature čije operacije zadovoljavaju neki skup jednadžbi, pod nazivom varijeteti algebri.

Lančani kompleksi su postali opće prisutni u modernoj matematici, posebno bujanjem metoda raznih vrsta (ko)homologija. Postoji i posebna disciplina koja pokriva dobar dio općih metoda vezanih uz primjenu lančanih kompleksa, pod nazivom **homološka algebra**.

Kroz nekoliko poglavlja opisat ćemo strukturu abelove i triangulirane kategorije u kategorijama lančanih kompleksa, te prezentirati ulogu deriviranih kategorija i deriviranih funktora.

Mogućnost da se upotpuni teorija Leibnizovih algebri motivacija je za uvođenje Loday-Pirashvilijeve kategorije. To je puna potkategorija kategorije lančanih kompleksa koju čine trunkirani lančani kompleksi. Budući da ta kategorija nije mnogo istražena, a obiluju mnogim lijepim svojstvima idealna je za generalizaciju nekih klasičnih problema. Opisujemo neke tipične algebarske konstukcije, vezu s Leibnizovim algebrama te generalizacije derivacija simetrične algebre i Weylove algebre te problem ekstenzija Liejevih algebri.

Moramo naglasiti da cilj ovog teksta *nije* prezentirati temelje homološke algebre. Cilj je orijentirati uvođenjem općih pojmova kao i nekog broja elementarnih primjera te manjih novih rezultata, u fenomenu koji ne pripada homološkoj algebri u tradicionalnom smislu. Pritom mislimo na pojavu novih tipova algebri u raznim kategorijama lančanih kompleksa.

Najtradicionalnije u tom smislu su **dg-algebre**, dg-koalgebre i dg-Liejeve algebre koje su samo unutarnje algebre, koalgebre i Liejeve algebre u simetričnoj tenzorskoj kategoriji (moguće neograničenih) lančanih kompleksa. Mnogi od zanimljivih, ali relativno osnovnih rezultata u tom području dobiveni su u novije vrijeme što čini teoriju manje standardnom od prave homološke algebre.

Kasnije verzije uključuju takozvane jako homotopske algebre različitih vrsta od kojih su A_∞, L_∞ G_∞ najistaknutiji primjeri uvedeni tek sedamdesetih godina prošlog stoljeća. Njih bi trebali usporediti s algebrama do na homotopiju. Za algebre do na homotopiju identiteti (npr. asocijativnost ako govorimo o "asocijativnim algebrama do na homotopiju) vrijede samo do na homotopiju. U kategoriji lančanih kompleksa možemo tražiti da se homotopija pojavljuje kao diferencijal "više" operacije (tj. operacije koja ima jedan argument više - asocijativnost uključuje tri varijable, pa je diferencijal funkcija od četiri varijable), a ta je operacija opet asocijativna do na višu operaciju i tako dalje. Ova nejasna ideja može se precizirati na više načina i proteklih godina su se mnogo primjenjivale takve algebre. Zapravo su kategorije lančanih kompleksa su jednako važne kao i jednostavni primjeri Quillenovih modelnih kategorija, koje su apstraktan okvir za kategorije s apstraktnom teorijom homotopije (kategorije simplicijalnih skupova, topoloških prostora, CW-kompleksa u još neki važni primjeri).

L_∞-algebre su generalizacije dg-Liejevih algebri, koje su od središnje važnosti u formalnoj teoriji deformacija algebarskih i geometrijskih struktura, što je infinitezimalni dio teorije klasifikacije takvih struktura. Posebno, shvaćanje homotopskih algebri je krucijalno za rezultate o egzistenciji deformacijske kvantizacije. Najvažniji rezultat je Kontsevichev teorem formalnosti, a velik korak prema dokazu tog teorema je Deligneova hipoteza koja kaže da je hochschildova kohomologija compleks asocijativnih algebri u karakteristici nula zapravo algebra nad operadom malih diskova (ili ekvivalentno E_2-operad). Kontsevich je čak pokazao općenitiju tvrdnju da je Hochschildov kompleks E_n-algebre E_{n+1}-algebra.

Povijesno je J. Stasheff prvo uveo pojam A_∞-prostora formalizirajući strukturu "algebre do na koherentnu homotopiju", koju je prenio na prostor petlji bilo kojeg punktiranog topološkog prostora X. T. Kadeishivili je uveo analogon u kategoriju lančanih kompleksa generalizirajući tako dg-algebre, s namjerom da rezultati budu primjenjivi u racionalnoj teoriji homotopije. Danas se neki osnovni pojmovi u racionalnoj teoriji homotopije (npr. minimalni modeli) najbolje mogu objasniti upravo pomoću A_∞-algebri. Konačno, M. Kontsevich je dao generalizaciju "višeobjektnom veziju" A_∞-algebre pod imenom A_∞-kategorija. Pokazuje se da su neki standardni primjeri trianguliranih kategorija (koje su bile dominirajući okvir u homološkoj algebri 1970-tih i 1980-tih godina) imaju precizniju ili koherentniju verziju kao A_∞-kategorije. Na primjer, Fukayina kategorija simplektičkih mnogostrukosti, koje su centralni objekt u zrcalnoj simetriji su A_∞-kategorije, a homološka zrcalna simetrija je tvrdnja o ekvivalenciju određenih A_∞-kategorija.

Iskoristio bih ovu priliku da se zahvalim svom mentoru, doc. dr. sc. Zoranu Škodi na nesebičnoj pomoći, strpljivom vođenju te mnogim korisnim savjetima. Također želim zahvaliti svojoj profesorici iz gimnazije, Senki Sedmak što me je usmjerila u prekrasan svijet matematike. Na kraju, hvala mojim roditeljima i sestri što su bezuvjetna podršku u svemu što radim.

Poglavlje 2

Osnovne algebarske i kategorijske strukture

2.1 Osnovne algebarske strukture

2.1.1. Definicija. **Polugrupa** je neprazan skup G s binarnom relacijom $\cdot\colon G \times G \to G$ koja je

G1. *asocijativna*: $a(bc) = (ab)c$ za sve $a, b, c \in G$.

Monoid je polugrupa G koja sadrži

G2. *(obostran) jedinični element* $e \in G$ takav da je $ae = ea = a$ za sve $a \in G$.

Grupa je monoid G takav da

G3. za svaki $a \in G$ postoji *obostran inverzni element* $a^{-1} \in G$ takav da $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Za polugrupu G kažemo da je **komutativna** ili **abelova** ako je binarna operacija

G4. *komutativna*: $ab = ba$ za sve $a, b \in G$.

2.1.2. Definicija. Neka su G i H grupe. **Homomorfizam grupa** je preslikavanje $f\colon G \to H$ takvo da je

$$f(ab) = f(a)f(b) \text{ za sve } a, b \in G.$$

2.1.3. Definicija. **Prsten** je neprazan skup R s dvije binarne operacije (najčešće ih označavamo s $+$ i $\cdot$) takvim da je

P1. $(R, +)$ abelova grupa;

P2. $a(bc) = (ab)c$ za sve $a, b, c \in R$ (asocijativnost množenja);

P3. $a(b+c) = ab+ac$ i $(a+b)c = ac+bc$ za sve $a, b, c \in R$ (lijeva i desna distributivnost množenja prema zbrajanju).

Komutativan prsten je prsten R takav da je

P4. $ab = ba$ za sve $a, b \in R$.

Prsten s jedinicom je prsten R u kojem postoji element $1_R \in R$ takav da je

P5. $1_R a = a 1_R = a$ za svaki $a \in R$.

Ako je R prsten s jedinicom $1_R \neq 0$ grupa obzirom na množenje onda kažemo da je R **prsten s dijeljenjem**. Komutativan prsten s dijeljenjem je **polje**.

2.1.4. Definicija. Neka su R i P dva prstena. **Homomorfizam prstena** je preslikavanje $f : R \to P$ takvo da je

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ i } f(ab) = f(a)f(b) \text{ za sve } a, b \in R.$$

2.1.5. Definicija. Neka je R prsten. **Lijevi R-modul** je aditivna abelova grupa M s funkcijom $R \times M \to M$ (koju zovemo *djelovanje* i za koju označavamo $(r, m) \mapsto rm$) takvom da za sve $r, s \in R$ i sve $m, n \in M$ vrijedi

M1. $r(m+n) = rm + rn$;

M2. $(r+s)m = rm + sm$;

M3. $r(sm) = (rs)m$.

Ako R ima jedinicu 1_R i vrijedi

M4. $1_r m = m$ za sve $m \in M$

onda kažemo da je M **unitalni** R-modul.

Ako je R prsten s dijeljenjem onda unitalni lijevi R-modul zovemo **lijevi vektorski prostor**. Strukturu **desnog R-modul** na abelovoj grupi definiramo analogno funkcijom $M \times R \to M$.

Neka su R i S dva prstena. Abelova grupa M je R-S-bimodul ako je lijevi R-modul, desni S-modul te za sve $r \in R, s \in S, m \in M$ vrijedi

$$r(ms) = (rm)s.$$

2.1.6. Definicija. Neka su M, N (lijevi) moduli nad prstenom R. Kažemo da je preslikavanje $f : M \to N$ **homomorfizam (lijevih) R-modula** ako za sve $m, n \in M$ i $r \in R$ vrijedi

$$f(m+n) = f(m) + f(n);$$
$$f(ra) = rf(a).$$

Ako je R prsten s dijeljenjem za homomorfizam R-modula kažemo da je **linearno preslikavanje**.

2.1.7. Definicija. Neka je K komutativan prsten s jedinicom. **Algebra nad K** je prsten A takav da je

A1. $(A, +)$ unitalni K-modul;

A2. $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ za sve $k \in K$ i $a, b \in A$.

Neka su A, B K-algebre. **Homomorfizam K-algebri** je preslikavanje $f : A \to B$ koje je homomorfizam prstenova i homomorfizam K-modula.

2.1.8. Definicija. Neka je K komutativan prsten. **Liejeva algebra** nad K je K-modul $\mathfrak{g}$ s bilinearnim preslikavanje $[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (kojeg zovemo *zagrada*) takvim da vrijedi

L1. *antikomutativnost*: $[x, y] = -[y, x]$ za sve $x, y \in \mathfrak{g}$ (što je ekvivalentno s $[x, x] = 0$ za svaki $x \in \mathfrak{g}$);

L2. *Jacobijev identitet*: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [y, x]] = 0$.

Kažemo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ **abelova** ako za sve $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi $[x, y] = 0$.

Neka su $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ Liejeve algebre nad K. **Homomorfizam Liejevih algebri** je K-linearno preslikavanje $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ takvo da je $f([g, h]) = [f(g), f(h)]$.

2.1.9. Definicija. Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad komutativnim prstenom K. **(Lijevi) $\mathfrak{g}$-modul** je K-modul s bilinearnim preslikavanjem $\mathfrak{g} \otimes_k M \to M$ (uz oznaku $x \otimes m \mapsto xm$) takvim da je za sve $x, y \in \mathfrak{g}, m \in M$

$$[x, y]m = x(ym) - y(xm).$$

2.2 Kategorije i funktori

2.2.1. Definicija. Kategorija $\mathcal{C}$ sastoji se od:

1) klase $Ob(\mathcal{C})$ **objekata** u $\mathcal{C}$;

2) svakom uređenom paru (A, B) objekata u $\mathcal{C}$ pridruženog skupa $\mathcal{C}(A, B)$ (ili u drugoj oznaci $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$) čije elemente zovemo **morfizme** s **domenom** A i **kodomenom** B;

3) svakoj uređenoj trojci (A, B, C) objekata iz $\mathcal{C}$ pridruženog preslikavanja

$$\circ\colon \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$$

kojeg zovemo **komponiranje** i koje svakom paru (f, g) morfizama iz domene pridružuje morfizam $g \circ f$ (ili samo gf) iz kodomene;

4) svakom objektu A iz $\mathcal{C}$ pridruženog morfizma $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ kojeg nazivamo **identiteta na** A;

takvih da vrijede sljedeći aksiomi

(C1) skupovi $\mathcal{C}(A, B)$ i $\mathcal{C}(A', B')$ su disjunktni osim ako je $A = A'$ i $B = B'$;

(C2) kompozicija je asocijativna, tj. za svake $f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(B, C), h \in \mathcal{C}(C, D)$ je

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

(C3) za svake $f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(B, C)$ vrijedi

$$1_B \circ f = f, g \circ 1_B = g.$$

Obično za $f \in \mathcal{C}(A, B)$ pišemo $f\colon A \to B$.

2.2.2. Propozicija. Za bilo koji objekt A u $\mathcal{C}$ morfizam $1_A\colon A \to A$ je jedinstven.

2.2.3. Primjeri.

a. Sa **Set** označavamo kategoriju čiji su objekti skupovi, a skup morfizama za dva objekta je skup svih preslikavanja između ta dva skupa.

b. Sa **Grp** označavamo kategoriju čiji objekti su grupe, a morfizmi homomorfizmi grupa.
c. Sa **Top** označavamo kategoriju čiji objekti su topološki prostori, a morfizmi neprekidna preslikavanja.

Morfizmi ne moraju nužno biti preslikavanja:

d. Sa $M_{\mathbf{k}}$ označimo kategoriju čiji su objekti elementi skupa $\mathbb{N}$ (prirodni brojevi), a za dane m, n skup $M_{\mathbf{k}}(m, n)$ čine matrice tipa (m, n) s elementima iz polja **k**.
e. Kategoriju čine i topološki prostori pri čemu za morfizme uzimamo homotopske klase preslikavanja među njima.

2.2.4. Definicija. Za kategoriju $\mathcal{B}$ kažemo da je **potkategorija** kategorije $\mathcal{C}$ ako je zadovoljeno:
1) $Ob(\mathcal{B}) \subset Ob(\mathcal{C})$,
2) $Mor(\mathcal{B}) \subset Mor(\mathcal{C})$,
3) domena, kodomena i komponiranje u $\mathcal{B}$ su restrikcije pripadnih preslikavanja u $\mathcal{C}$,
4) svaka $\mathcal{B}$-identiteta je $\mathcal{C}$-identiteta.

2.2.5. Definicija. Za potkategoriju kažemo da je **puna potkategorija** ako za svake $A, B \in Ob(\mathcal{B})$ vrijedi $\mathcal{B}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$.

2.2.6. Definicija. Produkt kategorija $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n$ je kategorija čija je klasa objekata $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$, a klasa morfizama $Mor(\mathcal{C}_1) \times Mor(\mathcal{C}_2) \times \cdots \times Mor(\mathcal{C}_n)$ pri čemu je kompozicija definirana po komponentama. (Treba provjeriti da je ovo zaista kategorija.)

2.2.7. Definicija. Suprotna kategorija kategorije $\mathcal{C}$ je kategorija $\mathcal{C}^{op}$ čiji objekti i morfizmi su isti kao objekti i morfizmi kategorije $\mathcal{C}$, ali su domena i kodomena zamijenjeni, te je kompozicija definirana 'u suprotnom smjeru', tj. ako je $\circ$ kompozicija u $\mathcal{C}$, a $*$ u $\mathcal{C}^{op}$ onda vrijedi $f * g = g \circ f$.

2.2.8. Definicija. Kažemo da je kategorija $\mathcal{C}$ **mala** ako je njena klasa objekata $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ skup.

2.2.9. Primjer. Malu kategoriju sa samo jednim objektom nazivamo **monoid**.

2.2.10. Grothendieckov univerzum Na ovom mjestu bih se kratko osvrnuo kako temelji čitave teorije kategorije počivaju na proučavanju kolekcija sastavljenih od svih skupova, od svih topoloških prostora i sl. U Zermelo-Fraenkelovoj aksiomatici kolekcija svih skupova nije skup te ta aksiomatika nije dovoljna za potrebe teorije kategorija. Ipak, postoji mnogo pristupa kako problem takvih kolekcija aksiomatizirati. Potrebno je aksiomatizirati pojam klasa koji dopušta postojanje klase svih skupova i sl. Jedan od najpoznatijih pristupa je uvođenje Grothendieckovog univerzuma.

Grothendieckov univerzum je skup U takav da je
1. za svaki $x \in U$ i za svaki $y \in x$, y element od U (tj. U je tranzitivan skup);
2. za svake $x, y \in U$ i $\{x, y\}$ element od U;
3. za svaki $x \in U$ i $\mathcal{P}(x)$, parcijalni skup od x, element od U;
4. za svaki element I i svaku familiju $(x_i)_{i \in I}$ elemenata od U i unija $\bigcup_{i \in I} x_i$ element od U.

Za svaki Grothendieckov univerzum U njegov kardinalni broj je nula, $\aleph_0$ ili jako nedostiživ kardinal. Vrijedi i obrnuto, ako je κ nula, $\aleph_0$ ili jako nedostiživ kardinalni broj onda postoji Grothendieckov univerzumu kardinaliteta κ (to je klasa svih skupova kardinaliteta κ). Dakle, egzistencija Grothendieckovih univerzuma je ekvivalentna egzistenzciji jako nedostiživih kardinalnih brojeva (tj. neprebrojivih regularnih jako graničnih k.b.). Budući da se u Zermelo-Fraenkelovoj aksiomatici ne može dokazati egzistencija jako nedostiživih kardinalnih brojeva dodajemo joj još jedan aksiom koji osigurava egzistenciju Grothendieckovog univerzuma.

Tada je svaki skup sadržan u nekom Grothendieckovom univerzumu. Na taj način, na primjer, ne možemo formirati kategoriju **Set** svih skupova, već za svaki univerzum U možemo formirati kategoriju $\mathbf{Set}_U$ svih skupova koji pripadaju univerzumu U. Nedostatak ove teorije je komplikacija uzrokovana uvođenjem univerzuma - potrebno je pokazati da "esencijalna" svojstva $\mathbf{Set}_U$ ne ovise o izboru U.

Spomenimo još dvije teorije. Lawvere u svojoj teoriji direktno aksiomatizira pojmove "kategorija" i "funktor" te u potpunosti ignorira teoriju skupova, no ta teorija nije dovoljno razvijena i manjka intuicijom. Pristup koji se sve više koristi su razvili Isbell, Mac Lane i Fefermana, a temelji se na nadogradnji Gödel-Bernays-von Neumannove aksiomatike. Skupovi su elementi klasa, a klase elementi konglomerata. Ovaj pristup iziskuje razlikovanje kategorija od kvazikategorija (gdje konglomerat morfizama između dva objekta ne mora biti skup), ali je mnogo elegantniji. Iako za svakodnevne potrebe teorije kategorije nije važno ulaziti u dublje razumijevanje ovih pristupa potrebno je biti svjestan dvije činjenice. Ne postoji **određena** kategorija **Set** već njena egzistencija i svojstva ovise o pristupu zasnivanja temelja. I drugo, postoje pristupi koji nam omogućavaju formalno provođenja kategorijskih konstrukcija koje trenutno radimo.

2.2.11. Definicija. Kažemo da je morfizam $f\colon A \to B$
a) **sekcija** ako postoji morfizam $g\colon B \to A$ takav da je $g \circ f = 1_A$;
b) **retrakcija** ako postoji morfizam $g\colon B \to A$ takav da je $f \circ g = 1_B$;
c) **izomorfizam** ako je sekcija i retrakcija.

2.2.12. Definicija. Kažemo da je morfizam $f\colon A \to B$
a) **monomorfizam** ako za svaka dva morfizma $g, h\colon C \to A$ vrijedi $fg = fh \Rightarrow g = h$;
b) **epimorfizam** ako za svaka dva morfizma $g, h\colon B \to C$ vrijedi $gf = hf \Rightarrow g = h$;
c) **bimorfizam** ako je monomorfizam i epimorfizam.

2.2.13. Definicija. Kažemo da su objekti A i B **izomorfni** ako postoji barem jedan izomorfizam između njih. Kažemo da je (A, m) **podobjekt** od B ako je $m\colon A \to B$ monomorfizam. Kažemo da je (e, B) **kvocijent** (ili kvocijentni objekt) od A ako je $e\colon A \to B$ epimorfizam.

2.2.14. Primjer. Grupoid je kategorija u kojoj su svi morfizmi izomorfizmi.

2.2.15. Uređaj na podobjektima. Neka je B objekt u kategoriji $\mathcal{C}$. Na svim podobjektima definiramo uređaj $(A, f) \leq (C, g)$ ako postoji morfizam $h\colon A \to C$ takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\
& B. \\
C \arrow[ur, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Kažemo da su A i C izomorfni podobjekti od B ako je $A \leq C$ i $C \leq A$. Podobjekti A i C su izomorfni ako i samo ako postoji jedinstveni izomorfizam h takav da gornji dijagram komutira. Relacija $\leq$ je relacija parcijalnog uređaja, pa je biti izomorfan podobjekt relacija ekvivalencije.

Kažemo da je kategorija $\mathcal{C}$ **dobro potencirana** ako za svaki objekt klase ekvivalencije izomorfnih podobjekata čine skup.

Dualno, na svim kvocijentima od B definiramo uređaj $(f, A) \geq (g, C)$ ako postoji morfizam $h\colon A \to C$ takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dd, "h"] \\
B \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
& C.
\end{tikzcd}$$

Analogno definiramo izomorfne kvocijente i dobro kopotencirane kategorije.

2.2.16. Definicija. Za familiju podobjekata $(A_i, m_i)_I$ objekta B u $\mathcal{C}$ definiramo **presjek** kao par (D, d) objekta D i morfizma $d\colon D \to B$ koji zadovoljavaju
1)za svako $i \in I$ postoji morfizam $d_i : D \to A_i$ takav da je $m_i \circ d_i = d$,
2) za bilo koji $g : C \to B$ za koji postoje $g_i : C \to A_i$ takvi da je $m_i \circ g_i = g$ za svako i, postoji jedinstveni morfizam $f : C \to D$ takav da je $g = d \circ f$.

Kažemo da kategorija $\mathcal{C}$ **ima (konačne) presjeke** ako svaka skupovno-indeksirana (konačna) familija podobjekata svakog objekta u $\mathcal{C}$ ima presjek.

2.2.17. Propozicija. Presjek podobjekata $(A_i, m_i)_I$ od B je također podobjekt od B, te je to najveći podobjekt koji je manji od svakog pojedinog podobjekta A_i zadane familije (obzirom na uvedeni uređaj $\leq$).

2.2.18. Propozicija. Ako je $\mathcal{C}$ dobro potencirana kategorija te ima presjeke i ujednačitelje, onda za svaki morfizam $f : A \to B$ postoji objekt C te epimorfizam $e : A \to C$ i monomorfizam $m : C \to B$ takvi da je $f = m \circ e$. Par (e, m) zovemo **epi-mono faktorizacija** morfizma f.

2.2.19. Primjer. Neka je $\mathcal{C}$ kategorija i neka je A objekt u $\mathcal{C}$. *Comma kategorija* $\mathcal{C}/A$ od CC nad A je kategorija čiji objekti su morfizmi u $\mathcal{C}$ s kodomenom A, a morfizam između

$f : B \to A$ i $g : C \to A$ je morfizam u $\mathcal{C}$ $h : B \to C$ takav da je

$$f = g \circ h.$$

2.2.20. Definicija. Kažemo da je morfizam u kategoriji $\mathcal{C}$ **nula morfizam** ako se faktorizira kroz nula objekt.

2.2.21. Definicija. Kažemo da je kategorija $\mathcal{A}$ **punktirana** ako za svaka dva objekta $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ postoji nula morfizam $f \in \hom(A, B)$. Sve nula morfizme u punktiranoj kategoriji označavamo sa 0.

2.2.22. Propozicija. Svaka kategorija koja ima nula objekt je punktirana. Svaka puna potkategorija punktirane potkategorije je punktirana.

2.2.23. Primjer. Kategorije **Grp**, R-**Mod**, **LinTop**, **pSet**, **pTop** su punktirane. Kategorije **Set**, **Top**, **SGrp**, **POS** nisu punktirane.

2.3 Funktori i prirodne transformacije

2.3.1. Definicija. Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kategorije. **Funktor** iz $\mathcal{C}$ u $\mathcal{D}$ se sastoji od preslikavanja koje svakom objektu A iz $\mathcal{C}$ pridružuje objekt FA iz $\mathcal{D}$, te svakom morfizmu $f\colon A \to B$ u $\mathcal{C}$ pridružuje morfizam $F(f)\colon FA \to FB$ tako da vrijedi:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), F(1_A) = 1_{FA}.$$

Za ovako definiran funktor kažemo da je **kovarijantan**. Ukoliko imamo funktor $F\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ onda kažemo da je F **kontravarijantan** funktor iz $\mathcal{C}$ u $\mathcal{D}$.

Ukoliko je domena funktora produkt dviju kategorija onda takav funktor nazivamo i **bifunktorom** (analogno imamo n-funktor).

2.3.2. Definicija. Kažemo da je funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$
a) **vjeran** ako je restrikcija $F\,|_{\mathcal{C}(A,A')}^{\mathcal{D}(FA,FA')}$ injektivna;
b) **pun** ako je restrikcija $F\,|_{\mathcal{C}(A,A')}^{\mathcal{D}(FA,FA')}$ surjektivna;
c) **gust** ako za svaki objekt $B \in Ob(\mathcal{D})$ postoji objekt $A \in Ob(\mathcal{C})$ takav da je FA izomorfno B.

Ovi pojmovi su važni jer pun, vjeran i gust funktor čuva monomorfizme, epimorfizme, izomorfizme, retrakcije, sekcije, komutativne trokute...

2.3.3. Primjer. **Zaboravni funktor** U je bilo koji funktor koji zaboravlja dio strukture. Npr. U : **Top** $\to$ **Set** koji topološki prostor X preslikva u skup X (zaboravljajući topološku strukturu), ili U : $R -$ **Mod** $\to$ **Ab** iz kategorije R-modula za neki prsten R u kategoriju abelovih grupa (s homomorfizmima R-modula, odnosno homomorfizmima grupa kao morfizmima).

2.3.4. Primjer. Sve male kategorije kao objekti s funktorima kao morfizmima čine kategoriju svih kategorija. Tu kategoriju označavamo s **Cat**.

2.3.5. Definicija. Neka su $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funktori. **Prirodna transformacija** $\eta\colon F \Rightarrow G$ se sastoji od klase $\{\eta_A, A \in Ob(\mathcal{A})\}$ morfizama u $\mathcal{B}$

$$\eta_A\colon FA \to GA,$$

takvih da za svaki $\mathcal{A}$-morfizam $f\colon A \to A'$ komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & GA \arrow[d, "G(f)"] \\ FA' \arrow[r, "\eta_{A'}"] & GA'. \end{tikzcd}$$

Kažemo da je prirodna transformacija η **prirodni izomorfizam** ako je η_A izomorfizam za svaki objekt A u $\mathcal{A}$. Kažemo da su funktori F, G **prirodno izomorfni** ($F \cong G$) ako postoji prirodni izomorfizam između njih.

2.3.6. Kompozicije prirodnih transformacija. Prirodne transformacije možemo komponirati na dva načina tako da opet dobijemo prirodnu transformaciju koja nazivamo vertikalna i horizontalna kompozicija i one su vezane zakonom preplitanja. Obično se horizontalna kompozicija naziva Godementov produkt i označava sa $*$, dok je vertikalna kompozicija analogon kompozicije preslikavanja i označava se s $\circ$.

2.3.7. Definicija/Propozicija. (**Godementov produkt**) Neka su $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, H, K : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funktori te neka su $\eta : F \Rightarrow G$ i $\delta : H \Rightarrow K$ prirodne transformacije Tada za svaki objekt A u $\mathcal{A}$ imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd} (H \circ F)(A) \arrow[r, "H(\eta_A)"] \arrow[d, "\delta_{FA}"'] & (H \circ G)(A) \arrow[d, "\delta_{GA}"] . \\ (K \circ F)(A) \arrow[r, "K(\eta_A)"] & (K \circ G)(A) \end{tikzcd}$$

Nadalje, sa

$$\mu_A = \delta_{GA} \circ H(\eta_A) = K(\eta_A) \circ \delta_{FA}$$

je dana prirodna transformacija $\mu : H \circ F \Rightarrow K \circ G$. Tu prirodnu transformaciju nazivamo Godementov produkt i ozačavamo $\mu = \delta * \eta$.

2.3.8. Teorem. (**Zakon preplitanja**) Za prirodne transformacije $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vrijedi:

$$(\alpha \circ \beta) * (\gamma \circ \delta) = (\alpha * \gamma) \circ (\beta * \delta).$$

Zainteresirani čitatelj dokaz može naći u [6] ili [14].

2.3.9. Primjer. Svi funktori između dvije kategorije $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ kao objekti s prirodnim transformacijama kao morfizmima (pri čemu uzimamo vertikalnu kompoziciju) čine kategoriju koju označavamo s $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ ili $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$.

2.3.10. Napomena. Ponekad ćemo skup svih prirodnih transformacija između funktora F i G označavati sa $[F, G]$. Ukoliko bi moglo doći do nejasnoća zbog sličnosti ove oznake s oznakom iz prethodnog primjera posebno ćemo naglasiti o čemu se radi ili koristiti prikladniju oznaku.

2.4 Adjungirani funktori

2.4.1. Izomorfizmi kategorija. Da bismo opisali kada su kategorije 'esencijalno' jednake prvo uvodimo pojam izomorfizma među kategorijama. Kažemo da je funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **izomorfizam** iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako postoji funktor $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ takav da je

$$G \circ F = 1_{\mathcal{A}}, F \circ G = 1_{\mathcal{B}}.$$

Kažemo da su kategorije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ **izomorfne** ako postoji barem jedan izomorfizam između njih.

Budući da nema mnogo primjera izomorfnih kategorija uvodimo pojam ekvivalentnih kategorija.

2.4.2. Definicija. Kažemo da je kategorija $\mathcal{C}$ **skeletalna** ako među objektima u $\mathcal{C}$ nema različitih izomorfnih objekata. **Skelet** kategorije $\mathcal{C}$ je maksimalna puna skeletalna podkategorija od $\mathcal{C}$.

2.4.3. Definicija. Kažemo da su kategorije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ **ekvivalentne** ako imaju izomorfne skelete.

U [12] je dokazan sljedeći vrlo važan teorem.

2.4.4. Teorem. Neka je $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktor, tada su ekvivalentna slijedeće činjenice:
1) F je pun, vjeran i gust,
2) postoji funktor $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ takav da je $F \circ G \cong 1_{\mathcal{A}}$ i $G \circ F \cong 1_{\mathcal{B}}$,
3) kategorije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su ekvivalentne.
U tom slučaju funktor F nazivamo **ekvivalencija**.

Posebno važan aspekt neke matematičke teorije je dualnost. Dualnost omogućava proučavanje jedne vrste objekata na način da se tvrdnje o tim objektima izraze kao tvrdnje o nekoj drugoj vrsti objekata te se račun vrši s tim drugim objektima. Točnije dualnost se temelji na ekvivalenciji dviju kategorija.

2.4.5. Primjer. Kategorije **CHTop** kompaktnih Hausdorffovih topoloških prostora i $\mathbf{C^*Alg}$ komutativnih unitalnih C*-algebri su ekvivalente. Ova ekvivalencija uspostavlja se Gelfand-Naimarkovim teoremom.

2.4.6. Primjer. Kategorija komutativnih prstena **CRng** je ekvivalentna kategoriji afinih shema **Aff**. Razvoj *nekomutativne geometrije* temelji se na generalizacijama ovih struktura.

Mnogo češće od ekvivalencije kategorija pojavljuje se pojam adjunkcije. Činjenica da funktor ima lijevi ili desni adjungurani funktor je slabija od činjenice da funktor ima inverz, ali je dovoljno jaka da sačuva i opiše mnoga bitna svojstva kategorija.

2.4.7. Definicija. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kategorije. Ako su $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funktori, te $\eta\colon 1_{\mathcal{A}} \to G \circ F$ i $\varepsilon\colon F \circ G \to 1_{\mathcal{B}}$ prirodne transformacije takve da je

$$G \overset{\eta * \mathrm{G}}{\to} G \circ F \circ G \overset{\mathrm{G} * \varepsilon}{\to} G = G \overset{1_{\mathrm{G}}}{\to} G,$$
$$F \overset{\mathrm{F} * \eta}{\to} F \circ G \circ F \overset{\varepsilon * \mathrm{F}}{\to} F = F \overset{1_{\mathrm{F}}}{\to} F,$$

kažemo da se radi o **adjunkciji**. Također, kažemo da je F **lijevi adjungirani funktor** od G, a G **desni adjungirani funktor** od F, te označavamo

$$(\eta, \varepsilon) \colon F \dashv G.$$

Kažemo da je η **jedinica**, a da je ε **kojedinica** adjunkcije.

Naravno, prema izrečenom teoremu 2.4.4 ekvivalencija se uvijek može pretvoriti u adjungiranu ekvivalenciju. Kasnije ćemo adjunkciju dokazivati koristeći sljedeću propoziciju čiji dokaz se može naći u [14]. Propoziciju iskazujemo u oznakama prethodne definicije.

2.4.8. Propozicija. F je lijevi adjungirani funktor od G ako i samo ako su bifunktori $\hom(F-, -) \colon \mathcal{B}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ i $\hom(-, G-) \colon \mathcal{B}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ prirodno izomorfni.

2.5 Limesi u kategorijama

Teorija kategorija se prvenstveno bavi univerzalnim konstrukcijama koje se pojavljuju u različitim kontekstima. Limesi su upravo takve konstrukcije.

2.5.1. Definicija. Izvor u kategoriji $\mathcal{C}$ je par $(X, (f_i)_I)$ $\mathcal{C}$-objekta X i familije $\mathcal{C}$-morfizama $(f_i : X \to X_i)_I$. X nazivamo domenom izvora, a familiju $(X_i)_I$ kodomenom izvora.

2.5.2. Definicija. Neka su I i $\mathcal{C}$ kategorije te $D \colon I \to \mathcal{C}$ funktor. **Prirodni izvor** za D je izvor $(L, (l_i)_{i \in \operatorname{Ob} I})$ u $\mathcal{C}$ takav da svaki $i \in \operatorname{Ob} I, l_i : L \to D(i)$; a za sve morfizme $m \colon i \to j$ u I sljedeći trokut komutira

$$\begin{tikzcd} & D(i) \arrow[dd, "D(m)"] \\ L \arrow[ur, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & \\ & D(j). \end{tikzcd}$$

2.5.3. Definicija. Neka je $D : I \to \mathcal{C}$ funktor. Za prirodni izvor $(L, (l_i))$ za D kažemo da je **limes od** D ako za bilo koji prirodan izvor $(L', (l'_i))$ za D postoji jedinstveni morfizam $h \colon L' \to L$ tako da za svaki $j \in \operatorname{Ob} I$ komutira sljedeći dijagram

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "l'_j"] & \\ L \arrow[r, "l_j"] & D(j). \end{tikzcd}$$

2.5.4. Definicija. Dualizirajući ove pojmove definiramo **ponor, prirodni ponor** i **kolimes** funktora.

2.5.5. Propozicija. Limesi (i kolimesi) su jedinstveni do na izomorfizam.

2.5.6. Definicija. Kažemo da kategorija $\mathcal{C}$ **ima I-limese** (ili da je **I-potpuna**) ako svaki funktor $D : I \to \mathcal{C}$ ima limes. Kažemo da je $\mathcal{C}$ **(konačno) potpuna** ako je I-potpuna za svaku malu (konačnu) kategoriju I.

2.5.7. Primjer. **Produkt** para objekata (A, B) u $\mathcal{C}$ je trojka (P, π_A, π_B) objekta P te morfizama $\pi_A : P \to A, \pi_B : P \to B$ (koje zovemo **projekcijama**) takvih da za bilo koji objekt C i morfizme $f : C \to A$ i $g : C \to B$ postoji jedinstveni morfizam $h_{fg} : C \to P$ takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h_{fg}"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & P \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B. \end{tikzcd}$$

Produkt (ako postoji) je jedinstven do na izomorfizam i P označavamo s $A \times B$. Analogno definiramo produkt $(\Pi_{i \in I} A_i, (\pi_i)_I)$ proizvoljne klase objekata $(A_i)_I$u $\mathcal{C}$. Ovo je poseban primjer limesa za funktor $A : I \to \mathcal{C}$ pri čemu je I **diskretna kategorija**, tj. kategorija za koju vrijedi $\operatorname{Mor} I = \{1_i, i \in \operatorname{Ob} I\}$, a $A_i = A(i)$.

U kategorijama **Set, Top, Grp** produkti su redom Kartezijev produkt, produkt topoloških prostora, produkt grupa.

Koprodukt $(\coprod_{i \in I} A_i, (\mu_i)_I)$ definiramo kao kolimes za funktor $A : I \to \mathcal{C}$ pri čemu je I diskretna kategorija.

2.5.8. Propozicija. Neka su $(\Pi_{i \in I} A_i, (\pi_i)_I)$ i $(\Pi_{i \in I} B_i, (\rho_i)_I)$ produkti familija $(A_i)_I$ i $(B_i)_I$. Ako za svaki $i \in I$ postoji morfizam $f_i : A_i \to B_i$ onda postoji jedinstveni morfizam Πf_i takav da sljedeći dijagram komutira za svaki $j \in I$

$$\begin{tikzcd} \Pi_{i \in I} A_i \arrow[r, dashed, "\Pi f_i"] \arrow[d, "\pi_j"] & \Pi_{i \in I} B_i \arrow[d, "\rho_j"] \\ A_j \arrow[r, "f"', "j"] & B_j. \end{tikzcd}$$

Ovaj morfizam nazivamo **produkt morfizama** f_i. Analogno definiramo **koprodukt morfizama** f_i.

2.5.9. Primjer. Neka je $(A_i)_I$ familija objekata u $\mathcal{C}$. Kažemo da je familija $((\mu_i)_I, B, (\pi_i)_I)$ **biprodukt** ako je $(B, (\pi_i)_I)$ produkt familije $(A_i)_I$, $((\mu_i)_I, B)$ koprodukt familije $(A_i)_I$ i

$$\pi_k \circ \mu_j = \delta_{jk}$$

za sve $j, k \in I$ pri čemu je δ_{jk} Kroneckerov simbol

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1_{A_j}, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Biprodukt je jedinstven do na izomorfizam i obično ga označavamo s $\bigoplus A_i$.

2.5.10. Propozicija. Neka je $(f_i : A_i \to B_i)_I$ familija morfizama, te neka su $((\mu_i)_I, \bigoplus A_i, (\pi_i)_I)$ i $((\ni_i)_I, \bigoplus B_i, (\rho_i)_I)$ biprodukti familija $(A_i)_I$ i $(B_i)_I$. Tada je

$$\prod f_i = \coprod f_i = \oplus f_i$$

pri čemu se $\oplus f_i$ definira kao jedinstveno preslikavanje $\coprod A_i \to \prod B_i$ takvo da komutira sljedeći dijagram

$$\begin{tikzcd} \coprod A_i \arrow[r, dashed] & \prod B_i \arrow[d, "\rho_k"] \\ A_j \arrow[u, "\mu_j"] \arrow[r, "\delta_{jk} f_j"] & B_k. \end{tikzcd}$$

2.5.11. Primjer. **Ujednačitelj** je limes funktora $A : I \to \mathcal{C}$ pri čemu je I kategorija na grafu

$$\{1\bullet \rightrightarrows \bullet 2\}.$$

Kolimes takvog funktora zovemo **koujednačitelj**.

Ujednačitelj je dakle par (E, e) pridružen paru $\mathcal{C}$-morfizama $f, g : A \to B$ takav da je $e : E \to A$ morfizam u $\mathcal{C}$, $f \circ e = g \circ e$ te da je zadovoljeno univerzalno svojstvo:
za svaki morfizam $e' : E' \to A$ takav da je $f \circ e' = g \circ e'$ postoji jedinstveni morfizam $h : E' \to E$ takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "e'"] & \\ E \arrow[r, "e"] & A. \end{tikzcd}$$

2.5.12. Propozicija. Ako je (E, e) ujednačitelj para $f, g : A \to B$ onda je (E, e) podobjekt od A, tj. e je monomorfizam. Dualno, ako je (c, C) koujednačitelj parda $f, g : A \to B$ onda je (c, C) kvocijent od B, tj. c je epimorfizam.

2.5.13. Definicija. U punktiranoj kategoriji **jezgra** morfizma f je ujednačitelj para $(f, 0)$. **Kojezgra** je morfizma f je koujednačitelj para $(f, 0)$. Jezgru morfizma f označavamo s $Ker(f)$, a kojezgru s $Coker(f)$.

2.5.14. Propozicija. Morfizam f u istaknutoj kategoriji je monomorfizam (odn. epimorfizam) ako i samo ako je jezgra (odn. kojezgra) preslikavanja f nula morfizam.

2.5.15. Propozicija. (**Galoisova korespondencija**.) U istaknutoj kategoriji koja ima jezgre i kojezgre za svaki morfizam $f\colon C \to D$ vrijedi:
a. $Ker(Coker(f)) \leq (C, f)$,
b. $(f, D) \geq Coker(Ker(f))$,
c. $Ker(Coker(Ker(f))) \approx Ker(f)$,
d. $Coker(Ker(Coker(f))) \approx Coker(f)$.
Pri čemu su $\leq$ i $\geq$ uređaji na podobjektima, odnosno kvocijentima.

2.5.16. Primjer. **Povlak** (ili **pullback**) je limes funktora $A : I \to \mathcal{C}$ pri čemu je I kategorija na grafu

$$\begin{tikzcd} & \bullet 1 \arrow[d] \\ 2\bullet \arrow[r] & \bullet 0. \end{tikzcd}$$

Dakle, povlak morfizama $f_i : A_i \to A_0, i = 1,2$ je trojka (P, p_1, p_2) objekta P i morfizama $p_i : P \to A_i, i = 1,2$ takvih da je $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$ te da je zadovoljeno univerzalno svojstvo: za svaku trojku (P', p'_1, p'_2) objekta P' i morfizama $p'_i : P' \to A_i, i = 1,2$ takvih da je $f_1 \circ p'_1 = f_2 \circ p'_2$ postoji jedinstveni morfizam $h : P' \to P$ takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, "p'_1"] \arrow[ddr, "p'_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ & A_2 \arrow[r, "f_2"] & A_0. \end{tikzcd}$$

Povlak je jedinstven do na izomorfizam i označavamo ga s $A_1 \times_{A_0} A_2$. Dualni pojam je **pushout**.

Povlak možemo konstruirati kao ujednačitelj od $(f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2)$ pri čemu su π_1, π_2 projekcije produkta objekata A_1 i A_2 (ako je ta konstrukcija moguća u kategoriji $\mathcal{C}$). To povlači sljedeću tvrdnju.

2.5.17. Korolar. Ako kategorija $\mathcal{C}$ ima konačne produkte i ujednačitelje onda ima i povlak.

Zapravo vrijedi općenitija tvrdnja čiji dokaz čitatelj može naći u [14] ili [6]. Dapače, u iskazu se može dodati još koja ekvivalenta tvrdnja.

2.5.18. Propozicija. Za kategoriju $\mathcal{C}$ ekvivalentno je
1) $\mathcal{C}$ je konačno potpuna.
2) $\mathcal{C}$ ima povlake i terminalni objekt.
3) $\mathcal{C}$ ima konačne produkte i ujednačitelje.
4) $\mathcal{C}$ ima konačne produkte i konačne presjeke.

2.5.19. Propozicija. Neka je $\mathcal{C}$ I-potpuna kategorija te neka je za svaki funktor $D\colon I \to \mathcal{C}$ $(L_D, (l_i(D)))$ limes od D. Tada postoji jedinstven funktor $Lim_I\colon \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ takav da je za svaki funktor D $Lim_I(D) = L_D$ te da za svaku prirodnu transformaciju (morfizam između funktora) $\eta : D \to E$ za svaki $i \in \mathrm{Ob}(I)$ komutiraju dijagrami

$$\begin{tikzcd} Lim_I(D) \arrow[r, "l_i(D)"] \arrow[d, "Lim_I(\eta)"] & D(i) \arrow[d, "\eta_i"] \\ Lim_I(E) \arrow[r, "l_i(E)"] & E(i). \end{tikzcd}$$

Dokaz. Lako se provjeri da je $(L_D, (\eta_i \circ l_i(D))_I)$ prirodni izvor za E. Prema univerzalnom svojstvu postoji jedinstveni morfizam $Lim_I(\eta)$ takav da gornji dijagrami komutiraju za svaki i. Direktnom provjerom vidimo da smo dobili traženi funktor. ■

Mnogi važni funktori čuvaju limese, odnosno kolimese.

2.5.20. Teorem. Neka je $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lijevi adjungirani funktor funktoru $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Tada

1. F čuva sve kolimese. Točnije, ako $A\colon I \to \mathcal{A}$ ima kolimes $(C, (c_i))$ onda $FA\colon I \to \mathcal{B}$ ima kolimes $(F(C), (F(c_i)))$.

2. G čuva sve limese. Točnije, ako $B\colon I \to \mathcal{B}$ ima limes $(L, (l_i))$ onda $GB\colon I \to \mathcal{A}$ ima limes $(G(L), (G(l_i)))$.

2.6 Striktno monoidalne kategorije

2.6.1. Definicija. Striktno monoidalna kategorija je uređena trojka $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_0, \otimes, I)$ pri čemu je $\mathcal{V}_0$ kategorija, $\otimes\colon \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V}_0$ funktor, a I objekt u $\mathcal{V}_0$ takvi da zadovoljavaju striktne zakone asocijativnosti i jedinice

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C), I \otimes A = A, A \otimes I = A$$

za sve objekte $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}_0$ te slično za morfizme. Funktorijalnost $\otimes$ znači zakon preplitanja

$$(g' \circ f') \otimes (g \circ f) = (g' \otimes g) \circ (f' \otimes f)$$

za sve morfizme g', f', g, f za koje definicija kompozicije ima smisla, te $1_{A \otimes B} = 1_A \otimes 1_B$ za sve objekte A, B.

Budući da u teoriji kategorija nije od interesa jednakost objekata, već samo jednakost do na izomorfizam striktno monoidalne kategorije su jako rijetke.

2.6.2. Primjer. Kategorija $[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ endofunktora na danoj kategoriji $\mathcal{C}$ je striktno monoidalna kategorija uz Godementov produkt kao $\otimes$, te $1_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ kao I.

2.6.3. Primjer. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ je striktno monoidalna kategorija. Morfizme iz n u m definiramo za $n \leq m$ kao jedinstveno preslikavanje $\{n\} \to \{m\}$ pri čemu n poistovjećujemo sa $\{n\}$.

2.7 Unutarnje kategorije

2.7.1. Definicija. Neka je $\mathcal{A}$ kategorija koja ima pullback. **Unutarnja kategorija** $\mathcal{C}$ u $\mathcal{A}$ se sastoji od objekta C_0 u $\mathcal{A}$ koji zovemo objekt **objekata u** $\mathcal{C}$, objekta C_1 u $\mathcal{A}$ koji zovemo objekt **morfizama u** $\mathcal{C}$ morfizama $s, t\colon C_1 \to C_0, \mathrm{id}\colon C_0 \to C_1$ u $\mathcal{A}$, povlaka $C_1 \times_{C_0} C_1$ i morfizma $c\colon C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1$.

$$C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1 \rightrightarrows C_0$$

2.7.2. Primjer. Unutarnja kategorija u **Set** je mala kategorija. Unutarnja kategorija u **Top** je kategorija za koju skup objekata i skup morfizama imaju definiranu toppologiju. Npr. za topološki prostor X je $\mathcal{C} = \Pi_1 X$ topološka kategorija pri čemu je $C_0 = X$, a $C_1 = X^{[0,1]}/\sim$ prostor homotopskih klasa puteva u X s istim krajevima.

2.8 Predsnopovi i reprezentabilni funktori

Neka je X topološki prostor. Parcijalno uređen skup $\mathcal{O}(X)$ otvorenih podskupova od X može promatrati kao kategoriju s inkluzijama $U \hookrightarrow V$ kao morfizmima (za $U \subseteq V$).

2.8.1. Definicija. Predsnop (skupova) F na topološkom prostoru X je kontravarijantan funktor $P\colon \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$.

Predsnop se zapravo sastoji od

1. skupova $F(U)$ za svaki otvoren $U \subset X$ (čije elemente zovemo **sekcijama od** F i ponekad označavamo s $\Gamma(U, F)$;

2. morfizama $r_{UV} : F(U) \to F(V)$ za svaki par $V \subset U$ (koja nazivamo **restrikcijama**. Za $f \in F(U)$ $r_{UV}(f)$ označavamo i s $f|_V$.

2.8.2. Napomena. Zamijenimo li kategoriju **Set** nekom drugom kategorijom $\mathcal{C}$ (npr. **Ab, Rng**...) dobivamo **strukturni predsnop** u $\mathcal{C}$ (abelovih grupa, prstena itd.) ako su restrikcije morfizmi u $\mathcal{C}$.

Morfizam predsnopova je prirodna transformacija. Predsnopovi na X čine kategoriju koju označavamo s **PSh** (ili **PAb, PRng** ako se radi o predsnopovima u nekoj drugoj kategoriji.)

2.8.3. Primjer. Za predsnop F kažemo da je **snop** na X ako za svaki otvoreni pokrivač $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ i za svaku familiju sekcija $(s_i \in F(U_i)_i$ takvih da za sve $i, j \in I$

$$r_{U_i, U_i \cap U_j}(s_i) = r_{U_j, U_i \cap U_j}(s_j)$$

(takvu familiju zovemo **kompatibilna familija**) postoji jedinstvena sekcija $x \in F(U)$ takva da je

$$s_i = r_{U,U_i}(s), \forall i \in I.$$

2.8.4. Primjer. U bilo kojoj kategoriji $\mathcal{C}$ hom-funktor je funktor oblika

$$\hom(A, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set} : B \mapsto \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$$

za neki objekt $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$;
(odnosno kontravarijantni funktor

$$\hom(-, A) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set} : B \mapsto \hom_{\mathcal{C}}(B, A)$$

za neki objekt $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$)

Pritom su na morfizmima ti funktori definirani s

$$\hom(f, A)(x) = x \circ f(\text{ odn. } \hom(A, f)(x) = f \circ x).$$

2.8.5. Definicija. Za funktor $G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ kažemo da je **reprezentabilan** ako je prirodno izomorfan funktoru $\hom(A, -)$ za neko $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.

2.8.6. Napomena. Ako je G reprezentabilan funktor onda je reprezentirajući objekt A tog funktora jedinstven do na izomorfizam. Reprezentabilni funktori su važna klasa funktora, a vrlo važno je da čuvaju limese.

2.8.7. Lema. (**Yoneda.**) Ako je $G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ i $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ tada postoji bijekcija

$$Y : [\hom(A, -), G] \to G(A)$$

definirana za svaku prirodnu transformaciju δ s

$$\delta \mapsto \delta_A(1_A)$$

čiji inverz Y' je definiran za elemente $x \in G(A)$ s

$$x \mapsto \xi = (\xi_B),$$

gdje je za sve $f \in \hom(A, B)$

$$\xi_B(f) = G(f)(x).$$

Dokaz. Očito je Y funkcija. Pokažimo da je i Y' funkcija, tj. da je $Y'(x) = (\xi_B)$ zaista prirodna transformacija za svako $x \in G(A)$. Neka su $f : B \to C$ i $g : A \to B$ morfizmi u $\mathcal{C}$. Tada je

$$(\xi_C \circ \hom(A, f))(g) = \xi_C(f \circ g) = G(f \circ g)(x) = (G(f) \circ G(g))(x) = (G(f) \circ \xi_B)(g).$$

Budući da je g proizvoljan imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
\hom(A,B) \arrow[r, "\xi_B"] \arrow[d, "\hom(A,f)"] & G(B) \arrow[d, "G(f)"] \\
\hom(A,C) \arrow[r, "\xi_C"] & G(C).
\end{tikzcd}$$

Prema definiciji za svako $x \in G(A)$ imamo

$$(Y \circ Y')(x) = Y(\xi) = \xi_A(1_A) = G(1_A)(x) = 1_{G(A)}(x),$$

pa je $Y \circ Y' = 1_{G(A)}$.

Neka je $\delta\colon \hom(A, -) \to G$ prirodna transformacija. Tada je $Y(\delta) = \delta_A(1_A)$. Za $\xi = Y'(\delta_A(1_A))$ imamo

$$\xi_A(1_A) = G(1_A)(\delta_A(1_A)) = \delta_A(1_A).$$

Za proizvoljan morfizam $f\colon A \to B$ imamo

$$\xi_B(f) = \xi_B(f \circ 1_A) = (\xi_B \circ \hom(A, f))(1_A).$$

Budući da je ξ prirodna transformacija

$$\xi_B(f) = (G(f) \circ \delta_A)(1_A) = (G(f) \circ \delta_A)(1_A).$$

Budući da je δ prirodna transformacija sada imamo

$$\xi_B(f) = (\delta_B \circ \hom(A, f))(1_A) = \delta_B(f).$$

Dakle, $\delta = \xi$, pa je $Y' \circ Y = 1_{[\hom(A,-),G]}$. Time je dokazano da su Y i Y' međusobno inverzni, pa je dokaz gotov. ■

2.8.8. Korolar. (**Slaba Yonedina lema.**) Primjenimo li Yonedinu lemu na funktor $G = \hom(-, B)$ dobivamo bijekciju skupova

$$\hom(A, B) \to [\hom(A, -), \hom(B, -)].$$

2.8.9. Korolar. Svaka mala kategorija $\mathcal{C}$ se može uložiti kao puna potkategorija u kategoriju $[\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$, tj. kontravarijantan funktor

$$h \colon \mathcal{C}^{op} \to [\mathcal{C}, \mathbf{Set}],$$

koji svakom objektu $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ pridružuje funktor $\hom(A, -)$, a morfizmu $f \colon A \to B$ u $\mathcal{C}$ pridružuje prirodnu transformaciju $(h(f)_C)$ definiranu s

$$h(f)_C(g) = g \circ f$$

za svako $g \colon B \to C$, je pun i vjeran. Funktor h zovemo **Yonedino ulaganje**.

2.8.10. Teorem. Svaki predsnop $P \colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ je kolimes reprezentabilnih predsnopova.

Poglavlje 3

Monoidalne i obogaćene kategorije

3.1 Monoidalne kategorije i teorem koherencije

3.1.1. Definicija. **Monoidalna kategorija** je uređena šestorka $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_0, \otimes, I, a, l, r)$ pri čemu je $\mathcal{V}_0$ kategorija, $\otimes \colon \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V}_0$ funktor, I objekt u $\mathcal{V}_0$, te $a_{XYZ} \colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $l_X \colon I \otimes X \to X$, $r_X \colon X \otimes I \to X$ prirodni izomorfizmi takvi da su zadovoljeni aksiomi koherencije izraženi sljedećim komutativnim dijagramima:

$$\begin{tikzcd}
((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a\otimes 1"'] & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a"] & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \\
(W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[rr, "a"] & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z), \arrow[u, "1\otimes a"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "r\otimes 1"] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1\otimes l"] \\
& X \otimes Y. &
\end{tikzcd}$$

Poseban tip monoidalnih kategorija su **kartezijeve** monoidalne kategorije kod kojih je $\mathcal{V}_0$ kategorija koja ima konačne produkte, $\otimes$ je produkt $\times$ u toj kategoriji, I je terminalni objekt, a a, l, r su kanonski izomorfizmi. Općenito, $\otimes$ nazivamo *tenzorski produkt*, a I *jedinični objekt* u monoidalnoj kategoriji.

3.1.2. Primjer. Striktna monoidalna kategorija je zapravo monoidalna kategorija za koju su a, r, l identitete.

3.1.3. Primjer. Kartezijeve monoidalne kategorije su **Set, Cat, Gpd, Top**- kategorije skupova, kategorija, grupoida, topoloških prostora. Sve ove kategorije su simetrične, te su sve osim **Top** zatvorene.

3.1.4. Primjer. R-**Mod**, kategorija R-modula za komutativan prsten R s uobičajenim tenzorskim produktom $\otimes$ je primjer ne-kartezijeve (simetrične, zatvorene) kategorije. Koherencije su definirane trivijalno. Primjer nesimetrične monoidalne kategorije je kategorija bimodula nad nekomutativnim prstenom R s tenzorskim produktom $\otimes_R$.

3.1.5. Primjer. Poseban slučaj prethodnog primjera čine vektorski prostori nad poljem **k** i **k**-linearna preslikavanja među njima. Tu kategoriju označavam s **Vect**.

3.1.6. Primjer. Neka je (X, x) punktirani topološki prostor. Tada je kategorija $\Pi_1 X$ čiji objekti su petlje u X bazirane u x, a morfizmi homotopske klase homotopija petlji je monoidalna kategorija s konkatenacijom (nadovezivanjem) petlji kao tenzorskim produktom, a reparametrizacijama kao koherencijama.

3.1.7. Definicija. Neka su $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ monoidalne kategorije. **Monoidalan funktor** je par (F, ϕ) funktora $F\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ i *koherencijskih izomorfizama* je

$$\phi_{A,B} F(A) \otimes F(B) \to F(A \otimes B), \phi I \to FI$$

u $\mathcal{W}$, koja su prirodna u A, B i takva da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{tikzcd}
(FA \otimes FB) \otimes FC \arrow[r, "\phi_{A,B} \otimes 1_{FC}"] \arrow[d, "a"'] & F(A \otimes B) \otimes F(C) \arrow[r, "\phi_{A \otimes B, C}"] & F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[d, "Fa"] \\
FA \otimes (FB \otimes FC) \arrow[r, "1_{FA} \otimes \phi_{B,C}"] & FA \otimes (FB \otimes FC) \arrow[r, "\phi_{A, B \otimes C}"] & F(A \otimes (FB \otimes FC))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FA \otimes I \arrow[r, "1_F A \otimes \phi"] \arrow[d, "r_{FA}"'] & FA \otimes FI \arrow[r, "\phi_{A,I}"] & F(A \otimes I) \arrow[d, "Fr_A"] \\
FA \arrow[rr, equal] & & FA
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes FA \arrow[r, "\phi \otimes 1_F A"] \arrow[d, "l_{FA}"'] & FI \otimes FA \arrow[r, "\phi_{I,A}"] & F(I \otimes A) \arrow[d, "Fl_A"] \\
FA \arrow[rr, equal] & & FA
\end{tikzcd}$$

Kažemo da je F **striktno monoidalan funktor** ako je su koherencijski izomorfizmi identitete. Za slabo monoidalan funktor (F, ϕ) kažemo da je **ekvivalencija monoidalnih kategorija** ako je ekvivalencija kategorija. Za svaku ekvivalenciju prema 2.4.4 imamo adjungiranu ekvivalenciju, pa dakle ako je F ekvivalencija monoidalnih kategorija onda postoji funktor $G : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ takav da su F i G adjungirani. Pokazuje se da je G također monoidalan funktor (a ε i η iz adjunkcije invertibilne monoidalne transformacije).

Teoremi koherencije općenito daju opis strukture koji omogućava jednostavanije baratanje. Jednim takvim teoremom za monoidalne kategorije se tvrdi da su "svi dijagrami komutativni". Precizan iskaz tog teorema može se naći u [32]. U knjizi [24] pokazano je primjerom na konkretnom dijagramu kako se ta činjenica dokazuje iz sljedećeg teorema.

3.1.8. Teorem. (**Teorem koherencije**) Svaka monoidalna kategorija je ekvivalentna nekoj striktno monoidalnoj kategoriji.

Dokaz. Sljedeći dokaz je modifikacija dokaza koji su dali Joyal i Street generalizirajući dokaz Cayleyevog teorema o reprezentaciji grupe kao grupe permutacija.

Neka je $\mathcal{A}$ monoidalna kategorija. Definirajmo kategoriju $\mathcal{A}'$ koja će joj biti ekvivalentna. Objekti od $\mathcal{A}'$ su parovi (E, δ) gdje je E endofunktor na $\mathcal{A}$, a δ familija izomorfizama

$$(\delta_{A,B} \colon (EA) \otimes B \xrightarrow{\sim} E(A \otimes B))_{A,B \in \mathcal{A}}$$

prirodnih u $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ i zadovoljavajući očite aksiome koherencije. Tenzorski produkt u definiramo sa

$$(E, \delta) \otimes (E', \delta') = (E \circ E', \delta'')$$

gdje je δ'' definirano na jedini logičan način, što čini $\mathcal{A}'$ striktno monoidalnom kategorijom.

Funktor $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ dan je sa

$$\gamma(Z) = (Z \otimes -, \alpha_Z, -, -).$$

Tako definiran funktor je slabo monoidalan, pun, vjeran i gust, pa je prema 2.4.4 ekvivalencija monoidalnih kategorija. ■

3.1.9. Primjer. **Monoid** ili **algebra** u monoidalnoj kategoriji je $\mathcal{A}$ je uređena trojka objekta A i morfizama $m \colon A \otimes A \to A, e \colon I \to A$ takvih da su sljedeći dijagrami komutativni

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1_A \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes 1_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes I \arrow[r, "1_A \otimes e"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & I \otimes A \arrow[l, "e \otimes 1_A"'] \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd} .$$

3.1.10. Primjer. **Koalgebra** je uređena trojka objekta C i morfizama $\Delta : C \to C \otimes C$ (kojeg zovemo *komnoženje*) i $\varepsilon : C \to I$ (kojeg zovemo *kojedinica*) takvim da su sljedeći dijagrami komutativni

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes 1_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "1_C \otimes \Delta"] & C \otimes C \otimes C, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \otimes I & C \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & I \otimes C \\ & C \otimes C \arrow[ul, "1_C \otimes \varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon \otimes 1_C"'] & \end{tikzcd} .$$

Neka su $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ i $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ koalgebre. Morfizam $f \colon C \to D$ je **morfizam koalgebri** ako je

$$\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C, \varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f.$$

3.1.11. Primjer. Struktura **bialgebre** na objektu B je dana strukturom algebre (B, m, e), koalgebre (B, Δ, ε) tako da su m i e morfizmi koalgebri.

3.1.12. Primjer. Neka je $(H, m, e, \Delta, \varepsilon)$ bialgebra. H je **Hopfova algebra** ako postoji morfizam $S : H \to H$ (kojeg zovemo *antipod*) takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd}
& H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes \mathrm{id}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\nabla"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & K \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
& H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes S"'] & & H \otimes H \arrow[ur, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}$$

3.2 Obogaćene kategorije

U algebri se pokazuje da skupu homomorfizama dvaju R-modula za komutativan prsten R možemo dati strukturu R-modula, u topologiji se na skupu neprekidnih preslikavanja između dva topološka prostora može zadati topologija, a u homološkoj algebri je bitno da preslikavanja lančanih kompleksa možemo organizirati u abelovu grupu. Ove činjenice da skup morfizama između dva objekta u kategoriji ima dodatnu strukturu generalizira pojam obogaćenja kategorije.

3.2.1. Definicija. Neka je $\mathcal{V}$ monoidalna kategorija. **Obogaćena kategorija nad $\mathcal{V}$** (ili kraće **$\mathcal{V}$-kategorija**) $\mathcal{C}$ se sastoji od

1) klase $Ob(\mathcal{C})$ **objekata** u $\mathcal{C}$;
2) svakom uređenom paru (A, B) objekata u $\mathcal{C}$ pridruženog objekta $\mathcal{C}(A, B)$ u $\mathcal{V}$;
3) svakoj uređenoj trojci (A, B, C) objekata iz $\mathcal{C}$ pridruženog preslikavanja

$$M \colon \mathcal{C}(A, B) \otimes \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$$

kojeg zovemo **komponiranje**;
4) svakom objektu A iz $\mathcal{C}$ pridruženog morfizma $j_A \colon I \to \mathcal{C}(A, A)$ kojeg nazivamo **identiteta na A**;

takvih da vrijede sljedeći aksiomi za asocijativnost i jedinicu (tj. komutiraju sljedeći dijagrami):

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
(\mathcal{C}(C,D)\otimes\mathcal{C}(B,C))\otimes\mathcal{C}(A,B) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "M\otimes 1"'] & & \mathcal{C}(C,D)\otimes(\mathcal{C}(B,C)\otimes\mathcal{C}(A,B)) \arrow[d, "1\otimes M"] \\
\mathcal{C}(B,D)\otimes\mathcal{C}(A,B) \arrow[dr, "M"] & & \mathcal{C}(C,D)\otimes\mathcal{C}(A,C) \arrow[dl, "M"] \\
& \mathcal{C}(A,D) &
\end{tikzcd} ;$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(B,B)\otimes\mathcal{C}(A,B) \arrow[r, "M"] & \mathcal{C}(A,B) & \mathcal{C}(A,B)\otimes\mathcal{C}(A,A) \arrow[l, "M"'] \\
I\otimes\mathcal{C}(A,B) \arrow[u, "j\otimes 1"] \arrow[ur, "l"'] & & \mathcal{C}(A,B)\otimes I. \arrow[u, "1\otimes j"'] \arrow[ul, "r"]
\end{tikzcd}$$

Kažemo da je $\mathcal{V}$-kategorija **mala** ako joj je klasa objekata skup.

3.2.2. Definicija. Za funktor $F\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ između $\mathcal{V}$-kategorija $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da je **$\mathcal{V}$-funktor** ako se preslikavanja

$$F_{AB}\colon \mathcal{A}(A,B)\to\mathcal{B}(FA,FB)$$

slažu s kompozicijom i identitetom (tj. ako komutiraju sljedeći dijagrami):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(B,C)\otimes\mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "F\otimes F"] & \mathcal{A}(A,C) \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{B}(FB,FC)\otimes\mathcal{B}(FA,FB) \arrow[r, "M"] & \mathcal{B}(FA,FC)
\end{tikzcd} ;$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A}(A,A) \arrow[dd, "F"] \\
I \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \\
& \mathcal{B}(FA,FA).
\end{tikzcd}$$

3.2.3. Primjer. Najvažniji primjere daju $\mathcal{V}=$**Set, Cat, Ab**. Redom $\mathcal{V}$-kategorije i $\mathcal{V}$-funktori nad tim kategorijama su obične (lokalno male) kategorije s običnim funktorima, 2-kategorije s 2-funktorima i predaditivne kategorije s aditivnim funktorima (vidi poglavlje 5).

3.2.4. Napomena. Razlika između obogaćenih i unutarnjih kategorija. Kod unutarnjih kategorija i skup objekata i skup morfizama određene kategorije $\mathcal{C}$ ima dodatnu strukturu. Kod obogaćenih kategorija skupovi $\mathcal{C}(A,B)$ imaju dodatnu strukturu za svaki par objekata A, B u $\mathcal{C}$.

3.2.5. Definicija. Za $\mathcal{V}$-funktore $F, G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **$\mathcal{V}$-prirodna transformacija** $\alpha\colon F \Rightarrow G$ je familija indeksirana objektima u $\mathcal{A}$ morfizama $\alpha_A\colon I \to \mathcal{B}(F(A), G(A))$ u $\mathcal{V}$ takvih da komutira sljedeći dijagram ($\mathcal{V}$-prirodnost):

$$\begin{tikzcd}
& I \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "\alpha_B \otimes F"] & \mathcal{B}(FB,GB) \otimes \mathcal{B}(FA,FB) \arrow[dr, "M"] & \\
\mathcal{A}(A,B) \arrow[ur, "l^{-1}"] \arrow[dr, "r^{-1}"'] & & & \mathcal{B}(FA,GB). \\
& \mathcal{A}(A,B) \otimes I \arrow[r, "G \otimes \alpha_A"] & \mathcal{B}(GA,GB) \otimes \mathcal{B}(FA,GA) \arrow[ur, "M"'] &
\end{tikzcd}$$

Kompoziciju $\mathcal{V}$-funktora možemo definirati kao kompoziciju funktora. Neka su $F, H, K : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $G, L : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ $\mathcal{V}$-funktori. Definiramo li za $\mathcal{V}$-prirodne transformacije $\alpha : F \Rightarrow H, \beta : H \Rightarrow K, \gamma : G \Rightarrow L$ vertikalnu kompoziciju $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow K$ dijagramom

$$I \overset{r^{-1}}{\to} I \otimes I \overset{\alpha_A \otimes \beta_A}{\to} \mathcal{B}(FA, HA) \otimes \mathcal{B}(HA, KA) \overset{c}{\to} \mathcal{B}(HA, KA)$$

te horizontalnu kompoziciju $\gamma \star \alpha : G \circ F \Rightarrow L \circ H$ dijagramom

$$I \xrightarrow{r^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\alpha_A \otimes \gamma_{HA}} \mathcal{B}(FA, HA) \otimes \mathcal{C}(GHA, LHA) \xrightarrow{G \otimes 1}$$

$$\xrightarrow{G \otimes 1} \mathcal{C}(GFA, GHA) \otimes \mathcal{C}(GHA, LHA) \xrightarrow{c} \mathcal{C}(GFA, LHA)$$

dobivamo sljedeću propoziciju.

3.2.6. Propozicija. Male $\mathcal{V}$-kategorije s $\mathcal{V}$-funktorima i $\mathcal{V}$-prirodnim transformacijama čine kategoriju obogaćenu nad **Cat**. Tu kategoriju označvamo sa $\mathcal{V}$-**Cat**.

3.3 Striktne n-kategorije

Propozicija iz prethodnog dijela motivira uvođenje pojma 2-kategorija, te općenito n-kategorija. Mi ćemo promatrati samo slučaj striktnih n-kategorija. Kategorija cV-**Cat** se sastoji od morfizama, $\mathcal{V}$-funktora i $\mathcal{V}$-prirodnih transformacija. Intuitivno n-kategorija se sastoji od **0-ćelija** (koje se ponašaju poput morfizama), **1-ćelija** (funktori), **2-ćelija** (prirodne transformacije) te tako sve do **n-ćelija** koje sve zajedno zadovoljavaju određene aksiome slaganja. Kao što prirodne transformacije možemo komponirati na dva načina n-ćelije se općenito mogu komponirati na n načina, a aksiomi slaganja su slični zakonu preplitanja koji smo naveli u 2. poglavlju. Mi ćemo dati izrijekom jednostavniju definiciju- striktna n-kategorija je kategorija obogaćena nad striktnom $n-1$-kategorijom. Za razmatranja preko n-ćelija potrebno je uvesti pojam n-globularnih skupova, a detalji o tome te dokaz ekvivalencije dviju definicija može se pronaći u [24].

3.3.1. Definicija. Neka je $(\mathbf{Str}\text{-}n\text{-}\mathbf{Cat})_n$ niz kategorija definiran rekurzivno

$$\mathbf{Str}-0-\mathbf{Cat} = Set, \mathbf{Str}-(n+1)-\mathbf{Cat} = (\mathbf{Str}-n-\mathbf{Cat})-\mathbf{Cat}.$$

Striktna n-kategorija je objekt **Str**-n-**Cat**, a **striktan n-funktor** je morfizam u **Str**-n-**Cat**.

Striktne 0-kategorije su skupovi, a striktne 1-kategorije su kategorije. Striktna 2-kategorija $\mathcal{A}$ se sastoji od skupa $\mathcal{A}_0$ i kategorije $\mathcal{A}(A, B)$ za svake $A, B \in \mathcal{A}_0$, kompozicije funktora (zadane kao i općenito) i jediničnog objekta u $\mathcal{A}(A, A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}_0$ koji zadovoljavaju zakone asocijativnosti i jedinice.

3.3.2. Primjer. Kategorija $\mathcal{V}$-**Cat** je 2-kategorija.

3.3.3. Primjer. Neka je $\mathcal{A}_0$ klasa svih topoloških prostora. Za dva topološka prostora X, Y neka je $\mathcal{A}(X, Y)$ kategorija čiji objekti su neprekidna preslikavanja $X \to Y$, a čiji morfizmi su homotopske klase homotopija tih preslikavanja. Tada je $\mathcal{A}$ striktna 2-kategorija.

3.4 Bikategorije

Bikategorije su prema 2-kategorijama kao što su monoidalne kategorije prema striktno monoidalnim kategorijama - određeni identiteti vrijede samo do na koherenciju.

3.4.1. Definicija. Bikategorija $\mathcal{B}$ se sastoji od

1. klase $\mathcal{B}_0$ objekata (ili 0-ćelija),

2. kategorija $\mathcal{B}(A, B)$ (za svaka dva objekta $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$) čije objekte zovemo 1-ćelijama (označavamo $f, g, ...$), a morfizme 2-ćelijama (označavamo $\alpha, \beta, ...$, a njihovu kompoziciju s $\alpha \circ \beta$),

3. funktora

$$c_{ABC} \colon \mathcal{B}(B, C) \times \mathcal{B}(A, B) \to \mathcal{B}(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto f \circ g = fg; (\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta$$

kojeg zovemo kompozicija,

4. objekta $1_A \in \mathcal{B}(A, A)$ za svaki $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ kojeg zovemo jedinica na A,

5. izomorfizma $\alpha_{h,g,f} \colon (hg)f \to h(gf)$ u $\mathcal{B}(A, D)$ za svaku trojku 1-ćelija $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ (izomorfizam koherencije za asocijativnost),

6. prirodnih izomorfizama $l_f \colon 1_B \circ f \to f$ i $r_f \colon f \circ 1_A \to f$ u $\mathcal{B}(A, B)$ za svaku 1-ćeliju $f \colon A \to B$ (izmorfizmi koherencije za jedinicu)

tako da sljedeći dijagrami komutiraju

$$\begin{tikzcd}
((kh)g)f \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a*1"'] & (kh)(gf) \arrow[r, "a"] & k(h(gf)) \\
(k(hg))f \arrow[rr, "a"] & & k((hg)f), \arrow[u, "1*a,"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(gI)f \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "r*1"'] & & g(If) \arrow[dl, "1*l"] \\
& gf. &
\end{tikzcd}$$

3.4.2. Napomena. U slučaju **Cat** funktorijalnost od c povlači zakon preplitanja

$$(\alpha \circ \beta) * (\gamma \circ \delta) = (\alpha * \gamma) \circ (\beta * \delta).$$

3.4.3. Primjer. Bikategorija sa samo jednim objektom je monoidalna kategorija.

3.4.4. Primjer. Striktna 2-kategorija je bikategorija za koju su a, r, l identitete. Bikategorije se ponegdje nazivaju slabim 2-kategorijama ili samo 2-kategorijama.

3.4.5. Primjer. Neka je $\mathcal{B}_0$ klasa svih prstenova s jedinicom. Za dva prstena R, S neka je $\mathcal{B}(R, S)$ kategorija čiji objekti su $R-S$ bimoduli, a morfizmi homomorfizmi bimodula. Tada je uz uobičajeni tenzorski produkt kao kompozicijom, $\mathcal{B}$ bikategorija.

3.4.6. Definicija. Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ bikategorije. **Morfizam bikategorija** $F = (F, \phi)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ se sastoji od

1. funkcije $F_0\colon \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}'_0$ kojeg obično označavamo s F,
2. funktora $F_{A,B}\colon \mathcal{B}(A, B) \to \mathcal{B}'(FA, FB)$ za svaki par $A, B\mathcal{B}_0$, koje isto sve označavamo s F,
3. 2-ćelije $\phi_{g,f}\colon Fg \circ Ff \to F(g \circ f)$ koja je izomorfizam u $\mathcal{B}(A, C)$ za svaki par 1-ćelija $(f : A \to B, g : B \to C)$,
4. 2-ćelije $\phi_A\colon 1_{FA} \to F1_A$ koja je izomorfizam u $\mathcal{B}(A, A)$ za svaki $A \in \mathcal{B}_0$

takvih da je zadovoljeni prirodnost i određeni aksiomi koherencije analogni onima u definiciji 3.1.7.

3.4.7. Propozicija. Za morfizam bikategorija $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ ekvivalentno je:

a. postoji morfizam bikategorija $G : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ takav da je $1_{\mathcal{B}} \simeq G \circ F$ u $[\mathcal{B}, \mathcal{B}]$ i $F \circ G \simeq 1_{\mathcal{B}'}$ u $[\mathcal{B}', \mathcal{B}']$;

b. F je lokalno ekvivalentan (tj. funktori $F_{A,B}$ su ekvivalencije kategorija za sve $A, B\mathcal{B}_0$) i esencijalno surjektivan na objektima (tj. za svako $A\mathcal{B}'_0$ postoji $A \in \mathcal{B}_0$ tako da je $FA \simeq A'$).

3.4.8. Definicija. Za morfizam bikategorija kažemo da je **biekvivalencija** ako zadovoljava jedan od ekvivalentnih uvjeta iz prethodne propozicije.

Za bikategorije postoji analogon Yonedinog ulaganja. To je morfizam bikategoija $\mathbf{y} : \mathcal{B} \to [\mathcal{B}, \mathbf{Cat}]$ takav da preslikava objekt $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{B}$ u morfizam bikategorija

$$\mathcal{B}(-, A)\colon \mathcal{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$$

te kao što je očekivano za 1-ćelije i 2-ćelije. Ako je $\mathcal{B}'$ pod-striktna-2-kategorija od $[\mathcal{B}, \mathbf{Cat}]$ koja se sastoji od svih objekata u slici od $\mathbf{y}$ i svih 1-ćelija i 2-ćelija između njih onda $\mathbf{y}$ definira biekvivalenciju između $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$. To dokazuje sljedeći teorem.

3.4.9. Teorem. (**Teorem koherencije za bikategorije.**) Svaka bikategorija je biekvivalentna nekoj striktnoj 2-kategoriji.

3.5 Simetrične monoidalne kategorije

3.5.1. Definicija. Simetrija u monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$ je prirodni izomorfizam $c_{XY} \colon X \otimes Y \to Y \otimes X$ koji zadovoljava sljedeće aksiome koherencije:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "1"'] & Y \otimes X \arrow[d, "c"] \\
& X \otimes Y,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c\otimes 1"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "c"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[d, "a"] \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[r, "1\otimes c"'] & Y \otimes (Z \otimes X),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes X \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "l"] & & X \otimes I \arrow[dl, "r"] \\
& X \otimes Y. &
\end{tikzcd}$$

Iz posljednjeg dijagrama vidimo da se l može definirati preko r, pa nam tada taj dijagram nije potreban kao jedan od koherencijskih aksioma. U monoidalnoj kategoriji može postojati više od jedne simetrije. Za kartezijevu monoidalnu kategoriju uvijek postoji očita kanonska simetrija $c \colon X \otimes Y \to Y \otimes X$. Monoidalnu kategoriju $\mathcal{V}$ sa simetrijom nazivamo **simetričnom** monoidalnom kategorijom.

3.5.2. Primjer. Super vektorski prostori. V je $\mathbb{Z}_2$-graduirani vektorski prostor, tj. vektorski prostor nad poljem $\mathbf{k}$ s dekompozicijom $V = V_0 \oplus V_1$. Vektore koji se nalaze u potprostorima V_0 i V_1 nazivamo homogenima, parnost vektora $v \in V_i$ je $|v| = i$. Ako su V_0 i V_1 konačnodimenzionalni i njihove dimenzije su redom p i q onda V označavamo i s $\mathbf{k}^{p|q}$. Morfizam super vektorskih prostora je linearno preslikavanje koje poštuje gradaciju. Monoidalna struktura u kategoriji super vektorskih prostora je definirana tako da je

$$(V \otimes W)_0 = (V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1),$$
$$(V \otimes W)_1 = (V_0 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_0).$$

Struktura simetrične monoidalne kategorije je definirana simetrijom $\tau_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ takvom da je

$$\tau_{V,W}(v \otimes w) = (-1)^{|v||w|}(w \otimes v).$$

3.6 Unutarnji hom: zatvorene monoidalne kategorije

3.6.1. Definicija. Kažemo da je monoidalna kategorija $\mathcal{V}$ **zatvorena** ako svaki funktor $- \otimes Y \colon \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V}_0$ ima desni adjungirani funktor $[Y, -]$ tako da imamo adjunkciju

$$\mathcal{V}_0(X \otimes Y, Z) \cong \mathcal{V}_0(X, [Y, Z])$$

s jedinicom i kojedinicom (koja se ponekad naziva evaluacija)

$$d\colon X \to [y, X \otimes Y] \quad e : [Y, Z] \otimes Y \to Z.$$

Stavimo li u spomenutu adjunkciju $X = I$, te primjenimo li $l\colon I \otimes Y \cong Y$ dobivamo prirodni izomorfizam

$$\mathcal{V}_0(Y, Z) \cong V[Y, Z],$$

gdje je V reprezentabilan funktor iz **??**. Budući da je $[Y, Z]$ podizanje skupa morfizama $\mathcal{V}_0(Y, Z)$ po V, taj objekt nazivamo unutarnji hom od Y i Z.

3.6.2. Primjer. **Top** je simetrična (kartezijeva) monoidalna kategorija koja nije zatvorena. Naime, $- \times Y$ ne može imati desni adjungirani funktor jer ne čuva regularne epimorfizme.

Zbog jednostavnosti u nastavku ću raditi sa striktno monoidalnom kategorijom $\mathcal{V}$.

3.6.3. Definicija. Neka je A objekt u $\mathcal{V}_0$. Tada je **unutarnji end-objekt** objekt E u $\mathcal{V}_0$ s morfizmom $\rho\colon E \otimes A \to A$ takav da za svaki objekt Z u $\mathcal{V}_0$ i svaki morfizam $f\colon Z \otimes A \to A$ postoji jedinstveni morfizam

$$g\colon Z \to E$$

takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
Z \otimes A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g \otimes 1_A"'] & A \\
E \otimes A \arrow[ur, "\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

3.6.4. Propozicija. E ima jedinstvenu strukturu monoida u $\mathcal{V}$ takvu da je ρ djelovanje.

Dokaz. Neka je $Z = E \otimes E, f = \rho \circ (E \otimes \rho)$ i $\mu = g : E \otimes E \to E$ za par (Z, f). Tada je μ asocijativno prema vanjskom dijelu sljedećeg komutativnog dijagrama i prema univerzalnosti od E:

$$\begin{tikzcd}
E^2 \otimes E \otimes A \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, "\mu \otimes E \otimes A"'] \arrow[dr, "\mu \otimes \rho"] & & E \otimes E^2 \otimes A \arrow[d, "E \otimes E \otimes \rho"] \arrow[dr, "E \otimes \mu \otimes A"] & \\
E^2 \otimes A \arrow[r, "E \otimes \rho"] \arrow[dd, "\mu \otimes A"'] & E \otimes A \arrow[dd, "\rho"'] & E^2 \otimes A \arrow[l, "\mu \otimes A"'] \arrow[d, "E \otimes \rho"'] & E^2 \otimes A \arrow[dl, "E \otimes \rho"] \arrow[dd, "\mu \otimes A"] \\
 & & E \otimes A \arrow[dl, "\rho"'] & \\
E \otimes A \arrow[r, "\rho"] & A & & E \otimes A \arrow[ll, "\rho"]
\end{tikzcd}$$

Slično, definiramo jedinično preslikavane $\eta : I \to E$ koristeći "kompatibilnost jedinice i (pretpostavljenog) djelovanja" i univerzalnost od E: zahtjevamo $\rho \circ (\eta \otimes A) = l \circ A$ gdje je

l lijevi jedinični izomorfizam u monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$. Dijagram

$$\begin{tikzcd}
E \otimes I \otimes A \arrow[d, "E\otimes\eta\otimes A"'] \arrow[dr, "E\otimes l_A"] & \\
E \otimes E \otimes A \arrow[r, "E\otimes\rho"] \arrow[d, "\mu\otimes A"] & E \otimes A \arrow[d, "\rho"] \\
E \otimes A \arrow[r, "\rho"] & A
\end{tikzcd}$$

komutira, pa prema univerzalnosti od E, $\mu \circ (E \otimes \eta) = l_A \simeq E$.

Jedinstvenost slijedi jer je μ jednoznačno određen aksiomima djelovanja i univerzalnošću od E. ■

Poglavlje 4

Univerzalna algebra

Univerzalna algebra se bavi proučavanje algebarskih struktura i njihovih konstrukcija. U ovom poglavlju želimo prezentirati nekoliko osnovnih pristupa u univerzalnoj algebri. Prvo ćemo opisati algebre kao objekte u monoidalnoj kategoriji s dodatnom strukturom dobivenom od posebne vrste funktora koje nazivamo *monadama*. Pristup preko *operada* je važan u homološkoj algebri, teoriji kategorija, algebarskoj geometriji i matematičkoj fizici (u teorija struna i teorija deformacija), ali i za proučavanje algebri u teoriji viših homotopija. Primjer takvog operada dajemo u posljednjem poglavlju. Operadi su poseban slučaj generalnije strukture koju nazivamo *PROP*, no PROPove nećemo obraditi. Na kraju ćemo kratko opisati *algebarske teorije*. Spomenimo još da su *skice* (eng. sketch), koje je uveo C. Ehresmann 1968., također jedan od načina kako definirati algebarske strukture.

4.1 Monade i komonade

4.1.1. Definicija. **Monada** na kategoriji $\mathcal{C}$ je uređena trojka (T, μ, η) pri čemu je $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (endo)funktor, a $\mu : TT \to T$ (množenje) i $\eta\colon Id_{\mathcal{C}} \to T$ (jedinica) prirodne transformacije takve da komutiraju sljedeći dijagrami:

$$\begin{tikzcd} TTT \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & TT \arrow[d, "\mu"] \\ TT \arrow[r, "\mu"] & T, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, "T"'] & TT \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[dl, "T"] \\ & T & \end{tikzcd} .$$

4.1.2. Definicija. **Algebra nad monadom** T (ili T-algebra) je par (A, θ) objekta A u kategoriji $\mathcal{C}$ i morfizma $\theta\colon TA \to A$ takvih da komutiraju sljedeći dijagrami:

$$
\begin{tikzcd}
TTA \arrow[r, "T\theta"] \arrow[d, "\mu_T A"'] & TA \arrow[d, "\theta"] \\
TA \arrow[r, "\theta"] & A,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\theta"'] & TA \arrow[d, "1_A"] \\
& A
\end{tikzcd}
.
$$

4.1.3. Primjer. Monada za monoide. Neka je T endofunktor na **Set** koji pridružuje skupu A skup svih riječi sastavljenih od elemenata od A (riječi možemo zapisivati abc ili (a,b,c)). Neka je μ_A konkatenacija (npr. $\mu_A(abc, def) = abcdef$), te neka η_A šalje element $x \in A$ u riječ (od jednog slova) x. Lako se provjerava da je zaista riječ o monadi. Nadalje, neka je (A,θ) algebra nad T. Tada se također lako vidi da je A monoid pri čemu je množenje na A definirano s $a \cdot b := \theta(ab)$, a jedinica s $\theta(e)$ pri čemu je e prazna riječ. Dakle, svaka algebra nad monadom T daje monoid, što opravdava naziv monada za monoide. Istaknimo da aksiom za jedinicu u monoidu ne proizlazi iz aksioma za jedinicu monade, već iz aksioma za algebru nad monadom!

4.1.4. Primjer. Monada za male kategorije. Graf se sastoji od dva preslikavanja skupova $s, t : C_1 \to C_0$. Neka je $\mathcal{C}$ =**Grph**, kategorija grafova s komutativnim kvadratima kao morfizmima. Elemente skupa C_1 možemo shvaćati kao morfizme f između objekata $s(f)$ i $t(f)$. Za svaki graf možemo napraviti slobodnu kategoriju nad tim grafom (tj. nad skupom C_1) po uzoru na prethodni primjer, ali pritom moramo paziti da dozvoljavamo samo riječi sastavljene od onih preslikavanja koja se daju komponirati. Algebre nad ovom monadom biti će upravo male kategorije s kompozicijom.

4.1.5. Definicija. Neka su (A,θ) i (A',θ') algebre nad monadom T. **Morfizam** algebri $\overline{f}\colon (A,\theta) \to (A',\theta')$ je komutativni kvadrat u kategoriji $\mathcal{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\theta"] & TA' \arrow[d, "\theta'"] \\
A \arrow[r, "f"] & A'.
\end{tikzcd}
$$

Primjetimo da je svaki morfizam algebri $\overline{f}$ induciran nekim morfizmom f u $\mathcal{C}$ koji se slaže na određeni način s preslikavanjima θ, θ'. Dva morfizma algebri komponiraju se nadovezivanjem dijagrama. Algebre nad monadom T i ovako definirani morfizmi čine kategoriju koju označavamo s $\mathcal{C}^T$.

Vrlo važno svojstvo monada je da one potječu od adjunkcija. Naime, ako je dan par adjungiranih funktora $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G$ pri čemu je $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ and $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, onda je sa $T = GF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $\mu = G\varepsilon F$ i η kao jedinicom adjunkcije (upravo zbog ovog smo uzeli istu oznaku za jedinicu monade i jedinicu u adjunkciji) definirana monada. Lako se provjerava da aksiomi za monadu zaista slijede iz aksioma za adjunkciju. Prirodno se nameće pitanje postoji li za svaku monadu adjunkcija od koje se ta monada može konstruirati na gornji način. Odgovor je pozitivan, čak štoviše za danu monadu postoji mnogo takvih adjunkcija, a posebno važne su dvije dobivene Eilenberg-Mooreovom i Kleislijevom konstrukcijom.

4.1.6. Eilenberg-Mooreova konstrukcija. Neka je T monada na kategoriji $\mathcal{C}$. Definiramo par funktora $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T, G : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ na sljedeći način. Neka je G 'zaboravni funktor', tj. neka je G definiran s

$$G(A, \theta) = A, G(\overline{f}) = f.$$

Funktor F definiramo (po uzoru na mnoge konstrukcije slobodnih objekata) s

$$F(A) = (TA, \mu_{TA}), F(f) = \overline{Tf}.$$

Potrebno je provjeriti (što nećemo ovdje) da je (TA, μ_{TA}) zaista algebra nad T (algebre ovog oblika zovemo **slobodne T-algebre**), te da je $\overline{Tf}$ morfizam algebri. Također se lako provjerava da je zaista $T = GF$. Da bismo dobili adjunkciju potrebno je još definirati prirodne transformacije η, ε. Želimo da η bude jedinica monade, pa ju tako i definiramo te preostaje definirati $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^T}$. Budući da se za algebru (A, θ) prema aksiomima preslikavanje θ slaže sa μ_{TA} i θ slijedi da je $\overline{\theta}$ dobro definirano preslikavanje između algebri (TA, μ_{TA}) i (A, θ). Zato možemo definirati

$$\varepsilon_{(A,\theta)} = \overline{\theta}.$$

Lako se provjerava da je ε zaista prirodna transformacija te da smo dobili adjunkciju $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G$. Time je završena Eilenberg-Mooreova konstrukcija.

4.1.7. Kleislijeva konstrukcija. Neka je i dalje T monada na kategoriji $\mathcal{C}$. U Kleislijevoj konstrukciji prvo ćemo definirati jednu novu kategoriju. **Kleislijeva kategorija $\mathcal{C}_T$** pridružena monadi T na kategoriji $\mathcal{C}$ je kategorija čiji objekti se podudaraju s objektima kategorije $\mathcal{C}$, a čiji morfizmi su definirani kao

$$\mathcal{C}_T(A, B) = \mathcal{C}(A, TB).$$

Ukoliko je $f\colon A \to TB$ morfizam u $\mathcal{C}$ pripadni morfizam u $\mathcal{C}_T$ ćemo označavati sa $\underline{f}$. Za morfizme $f\colon A \to TB, g\colon B \to TC$ definiramo kompoziciju $\underline{g} \circ \underline{f}$ u $\mathcal{C}_T$ kao preslikavanje

$$A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{Tg} TTC \xrightarrow{\mu_C} TC.$$

Asocijativnost kompozicije slijedi iz prirodnosti transformacije μ, pa smo zaista konstruirali kategoriju. Ova kategorija je ekvivalenta punoj potkategoriji slobodnih algebri u kategoriji svih T-algebri $\mathcal{C}^T$. Sada možemo preći na Kleislijevu konstrukciju adjungiranih funktora $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_T, G\colon \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}$.

Funktor F definiramo s

$$F(A) = A, F(f) = Tf \circ \eta_A$$

za svaki objekt A i morfizam $f\colon A \to B$ u $\mathcal{C}$. Funktorijalnost slijedi iz funktorijalnosti od T te prirodnosti transformacije η. Nadalje, funktor G definiramo (zamišljajući da se $\mathcal{C}_T$ zapravo sastoji od slobodnih algebri) s

$$G(A) = TA, G(\underline{f}) = \mu_{TB} \circ Tf$$

za svaki objekt A i morfizam $\underline{f}\colon A \to B$ (što odgovara $f\colon A \to B$) u $\mathcal{C}_T$. Funktorijalnost slijedi opet iz funktorijalnosti od T te prirodnosti od μ. Adjunkciju ćemo konstruirati na sljedeći način. Opet η definiramo kao jedinicu monade, a morfizme $\varepsilon_A : GF(A) \to A$ u $\mathcal{C}_T$ (koji su zapravo morfizmi $TA \to TA$ u $\mathcal{C}$) definiramo jednostavno kao identitete na TA. Ponovno se prirodnost transformacije ε te adjunkcija provjeravaju direktno koristeći aksiome monade.

4.1.8. Napomena. Ove dvije konstrukcije su posebno važne jer su to zapravo terminalni i inicijalni objekti jedne kategorije. Za fiksnu monadu (T, μ, η) na kategoriji $\mathcal{C}$ to je kategorija svih adjunkcija $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G, F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ takvih da je $T = GF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $\mu = G\varepsilon F$ te η jedinica monade. Pri tom su morfizmi funktori $\mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ takvi da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D} \\ & \mathcal{C}'. \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Jedinstveni funktor $\mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$ na određeni način "mjeri" koliko je kategorija $\mathcal{D}$ daleko od toga da bude kategorija algebri nad T. Time su motivirane sljedeće definicije.

4.1.9. Definicija. Kažemo da je adjunkcija $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G, F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ **monadična** ako je kategorija $\mathcal{D}$ ekvivalentna kategoriji $\mathcal{C}^T$ za monadu $T = GF$. Kažemo da je G **monadičan funktor** ako ima lijevi adjungirani funktor F takav da je adjunkcija $F \dashv G$ monadična.

4.1.10. Primjer. Adjunkcija $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G$ za $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}, G\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, gdje je G zaboravni funktor, a F funktor diskretne topologije, nije monadičan.

Potpuno analogno monadama definiraju se komonade. Od velike važnosti je, posebno u Grothendieckovom pristupu algebarskoj geometriji, sljedeći teorem (koji se može izreći i za komonade).

4.1.11. Teorem. (**Beck, ∼1967.**) Funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ je monadičan ako i samo ako:

1. ima lijevi adjungirani funktor,
2. čuva izomorfizme i
3. $\mathcal{C}$ ima koujednačitelje G-rascjepivih parova ujednačitelja te G čuva te koujednačitelje.

4.2 Operadi

Operad je generalizacija familije kompozabilnih funkcija n varijabli za razne n. Posebno su važni u kategorijama u kojima postoji pojam homotopije, gdje imaju ključnu ulogu u organiziranju hijerarhije viših homotopija. Pojam "operad" nastao je spajanjem "operacija" i "monada", a uveo ga je početkom sedamdesetih godina prošlog stoljeća J. P. May ([35]), iako su mnogi primjeri zapravo razmatrani i mnogo ranije (npr. u [5]).

4.2.1. Definicija. Operad $\mathcal{O}$ u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$ se sastoji od objekata $\mathcal{O}(n), n \geq$ u $\mathcal{V}$ s kompozicijom

$$\gamma : \mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(n_m) \to \mathcal{O}(n_1 + \cdots + n_m),$$

$$(\theta, \theta_1, ..., \theta_m) \mapsto \theta \circ (\theta_1, ..., \theta_m),$$

desnog djelovanja simetrične grupe S_n na $\mathcal{O}(n)$ te jedinice $e \in \mathcal{O}(1)$ tako da vrijedi:

1. kompozicija je asocijativna, tj.

$$\theta \circ (\theta_1 \circ (\theta_{1,1}, ..., \theta_{1,k_1}), ...\theta_n \circ (\theta_{n,1}, ..., \theta_{n,k_n})) = (\theta \circ (\theta_1, ..., \theta_n)) \circ (\theta_{1,1}, ..., \theta_{n,k_n}),$$

2. kompozicija je ekvivarijantna obzirom na djelovanje simetričnih grupa: grupe $S_m, S_{n_1}, ..., S_{n_m}$ djeluju na lijevoj strani i to djelovanje je kompatibilno s djelovanjem $S_{n_1+...+n_m}$ na desnoj strani.

3. jedinica e zadovoljava prirodna svojstva obzirom na kompoziciju: $e \circ f = f = f \circ (e, ..., e)$ za svako $f \in \mathcal{O}(k)$.

Morfizam operada je niz preslikavanja $f_n \colon \mathcal{O}(n) \to \mathcal{P}(n), n \geq 0$ takvih da je $f(e) = e$ i

$$f(\theta \circ (\theta_1, ..., \theta_n) = f(\theta) \circ (f(\theta_1), ..., f(\theta_n)).$$

4.2.2. Napomena. Ponekad se razmatraju ne-Σ operadi, tj. operadi u čijoj definiciji se izostavljava djelovanje simetričnih grupa. Tada $\mathcal{O}(n)$ mogu biti objekti proizvoljne monoidalne kategorije.

4.2.3. Napomena. Ekvivalentno se operad definira zadavanjem preslikavanja $\circ_i \colon \mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}(m + n - 1), i = 1, ..., m$ s

$$f \circ_i g = \gamma(f; \mathrm{id}, ..., \mathrm{id}, g, \mathrm{id}, ..., \mathrm{id})$$

za $f \in \mathcal{O}(m), g \in \mathcal{O}(n)$. Asocijativnost se tada svodi na uvjet

$$f \circ_i (g \circ_j h) = (f \circ_i g) \circ_{i+j-1} h$$

uz prirodan uvjet simetrije za $(f \circ_i g) \circ_j h_i$ kada g i h "padaju na različita mjesta" kao argumenti od f.

4.2.4. Primjer. Najvažniji primjer je **operad endomorfizama** $End_A(n) = \mathcal{V}(A^{\otimes n}, A)$ za objekt A u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$. Primjetimo da je bez nekih dodatnih uvjeta (obogaćenja i sl.) ovo operad u **Set**.

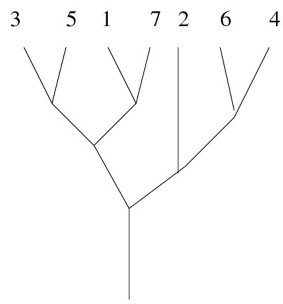
4.2.5. Primjer. Neka je $\mathcal{P}(n)$ skup svih Riemannovih ploha s $n+1$-im rubom (zamišljamo kao plohu s n ulaza i jednim izlazom). Plohe komponiramo tako da izlaz jedne plohe zalijepimo na neki od ulaza druge plohe.

4.2.6. Definicija. **Algebra** A u kategoriji $\mathcal{V}$ nad operadom $\mathcal{O}$ je objekt A u $\mathcal{V}$ s preslikavanjem operada $\mathcal{O} \to End_A$, tj. familijom morfizama

$$\mathcal{O}(n) \times A^{\otimes n} \to A, n \geq 0$$

kompatibilnih s kompozicijom, djelovanjem simetričnih grupa i jedinicom.

4.2.7. Primjer. Operad za komutativne algebre. Neka je $Comm(n) = \mathbf{k}, n \geq 0$ gdje je $\mathbf{k}$ polje. Neka je kompozicija množenje u $\mathbf{k}$ te neka je djelovanje simetričnih grupa trivijalno. Tada je algebra nad operadom $Comm$ u kategoriji **Vect** komutativna asocijativna unitalna algebra. Zaista, algebra nad $Comm$ u **Vect** je $\mathbf{k}$-vektorski prostor A takav da imamo preslikavanja $A^n \to A$ za svako $n \geq 0$ koja su kompatiblna s djelovanjem simetrične grupe. Upravo ta kompatibilnost daje komutativnost i asocijativnost, a jedinica postoji kao slika jedinice u polju pri morfizmu $A^0 = \mathbf{k} \to A$.



4.2.8. Primjer. Operad za asocijativne algebre. $Ass(n)$ definiramo kao skup klasa ekvivalencija planarnih povezanih binarnih (svaki vrh ima stupanj 3) stabala s korjenskim bridom i n listova označenih prirodnim brojevima od 1 do n. Stablo oblika kao na slici ćemo označavati s $(((35)(17))(2(64)))$. Relacija u definiciji operada Ass je najmanja relacija ekvivalencije takva da su $(1(23))$ i $((12)3)$ u relaciji. Kompozicija dva stabla (odnosno pripadnih klasa) je dana ugnježđivanjem jednog stabla na mjesto nekog lista u drugom stablu, dok je djelovanje grupe permutacija dano permutiranjem oznaka listova. Algebre nad ovim operadom su asocijativne algebre.

4.2.9. Primjer. Operad za Liejeve algebre. $Lie(n)$ je vektorski prostor (nad poljem $\mathbf{k}$ karakteristike različite od 2) čija baza je skup označenih binarnih stabala kao u prethodnom primjeru modulo relacije

$$(12) + (21) \sim 0, ((12)3) + ((23)1) + ((31)2) \sim 0.$$

Pritom još definiramo $Lie(0) = 0$. Kompozicija je ponovno ugnježđivanje, a djelovanje simetrične grupe permutacija oznaka. Algebre nad ovim operadom su Liejeve algebre.

4.2.10. Primjer. Operad za Poissonove algebre. *Poissonova algebra* je vektorski prostor V (nad poljem karakteristike 0) s jedinicom e, unutarnjim množenjem $(a, b) \mapsto ab$ i zagradom $(a, b) \mapsto [a, b]$ tako da unutarnji produkt definira strukturu komutativne asocijativne algebre s jedinicom, zagrada definira strukturu Liejeve algebre te je zagrada derivacija unutarnjeg množenja

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$$

za sve $a, b, c \in V$. *Poissonov operad* možemo definirati opet koristeći binarna stabla, ali ovaj put koristeći dvije vrste unutarnjih vrhova (npr. crna i bijela) tako njima obuhvatimo sve potrebne aksiome za dvije operacije Poissonove algebre.

4.2.11. Veza monada i operada. U [35] May je pokazao kako se operadu $\mathcal{O}$ u **Top** može pridružiti monada (T, μ, η) te dokazao da postoji izomorfizam između kategorije algebri nad $\mathcal{O}$ i kategorije T-algebri (induciran bijekcijom između $\mathcal{O}$-djelovanja na algebri A $\mathcal{O} \to End_A$ i preslikavanja $\theta \colon TB \to B$ koji definira strukturu na algebri B). No, postoje neizomorfni operadi koji imaju ekvivalentne kategorije algebri, pa operad sadrži više informacija nego pridružena monada (koja je određena svojom Eilenberg-Mooreovom kategorijom).

4.3 Algebarske teorije

Algebarske teorije je uveo Lawvere, a njima možemo opisati algebatske strukture definirane operacijama koje zadovoljavaju određene jednadžbe. Tako postoji teorija za grupe, za prstenove, za asocijativne algebre, ali ne i za polja. Kratko ćemo dati samo pregled osnovnih pojmova.

4.3.1. Definicija. Teorija konačnih produkata (ili samo **teorija**) je mala kategorija koja ima konačne produkte. **Morfizam teorija** je funktor koji čuva konačne funktore. Uz tako definirani morfizme teorije čine kategoriju.

4.3.2. Definicija. Neka je $\mathcal{C}$ kategorija (ne nužno mala) koja ima konačne produkte. **Model** teorije $\mathbb{T}$ u kategoriji $\mathcal{C}$ je funktor $\mathbb{T} \to \mathcal{C}$ koji čuva konačne produkte. Modeli teorije $\mathbb{T}$ u $\mathcal{C}$ s prirodnim transformacijama čine kategoriju $\mathbb{T}(\mathcal{C})$. Kategoriju $\mathbb{T}($**Set** standardno označavamo s $\mathbb{T} - \mathbf{mod}$, a njene objekte zovemo modelima.

Neka je $\mathcal{S}^{op} \hookrightarrow$ **Set** puna potkategorija kategorije **Set** čiji objekti su skupovi $[n] = \{1, 2, ..., n\}, n \geq 0$. Budući da $\mathcal{S}^{op}$ ima konačne koprodukte, kategorija $\mathcal{S}$ je teorija, a zovemo ju *teorija skupova*. Kako bismo razlikovali objekte u $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}^{op}$, objekte u $\mathcal{S}$ označavamo s $X^0 = 1, X^1 = X, X^2, X^3, ...$ S $x_i : X^n \to X$ označavamo morfizme uz $\mathcal{S}$ pridružene morfizmima $[1] \to [n]$ koji preslikavaju 1 u i. Pokazuje se da je $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ ekvivalentna $\mathcal{C}$ za svaku kategoriju $\mathcal{C}$ s konačnim produktima.

4.3.3. Definicija. Jednovrsna teorija je morfizam teorija $\mathcal{S} \to \mathbb{T}$ koji je identiteta na objektima.

Objekti jednovrsne teorije su dakle prirodni brojevi označeni s $X^0 = 1, X^1 = X, X^2, X^3, ...$ te imamo projekcije $x_1, ..., x_n$ iz X^n na X. Ako je M model jednovrsne teorije $\mathbb{T}$ onda $M(X)$ zovemo *pripadni skup od* M. Na njemu su zadane operacije $u_M \colon M(X)^n \to M(X)$ za svaku element $u \in \hom_{\mathbb{T}}(X^n, X)$. Zato elemente od $\hom_{\mathbb{T}}(X^n, X)$ zovemo *n-arnim operacijama* od $\mathbb{T}$.

Neka je I skup, te $\mathcal{S}^o p/I$ comma kategorija (v. 2.2.19). Lako se vidi da $\mathcal{S}^o p/I$ ima konačne koprodukte, npr. koprodukt od $f_1 : [n_1] \to I$ i $f_2 : [n_2] \to I$ je $\binom{f_1}{f_2} : n_1 \sqcup n_2 \to I$. Zapravo, skup objekata u $\mathcal{S}^o p/I$ se može identificirati sa slobodnim monoidom nad skupom I. Neka je $Fam_I = (\mathcal{S}^o p/I)^{op}$. Fam_I je teorija koju zovemo *teorija I-indeksiranih familija.* Da bi se objekti d Fam_I razlikovali od objekata u $\mathcal{S}^o p/I$ objekt u Fam_I koji odgovara preslikavanju $f \colon [n] \to I$ označavamo s X_f. Objekti u Fam_I su oblika $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}$ za jedinstvenu n-torku $(i_1, ..., i_n) \in I^n$. Funktor

$$Fam_I(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^I$$

koji modelu $M \colon Fam_I \to \mathcal{C}$ pridužuje familijiu $M(X_i)_{i \in I}$ je ekvivalencija.

4.3.4. Definicija. Viševrsna teorija nad I ili I**-vrsna teorija** je morfizam teorija $Fam_I \to \mathbb{T}$ koji je identiteta na objektima.

Intuitivno, modeli M I-vrsne teorije $Fam_I \to \mathbb{T}$ u kategoriji $\mathcal{C}$ s konačnim produktima su I-torke objekata s dodatnom strukturom, tj. raznim operacijama koje moraju zadovoljavati identitete koji čine da funktor M čuva produkte. Za viševrsne teorije postoje razne algebarske konstrukcije nad njima, a moguće je definirati i kohomologiju. Zainteresirani čitatelj mnogo više o algebarskim teorijama može pročitati u [6], a o njihovim kohomologijama u [16].

Lawvere theories [6], single and multisorted [16]

Poglavlje 5

(Ko)lančani kompleksi u kategoriji R-modula

Homološka algebra je aparat koji je razvijen kako bi se dokazali neki nekonstruktivni teoremi u algebri i algebarskoj topologiji. Koncepti homologije i kohomologije topoloških prostora su se do početka II. svjetskog rata uvelike razvili, a tada je pojavom rezolventi i deriviranih funktora započeo razvoj homološke algbre. Kada su ljudi (predvođeni Eilenbergom) uočili da se isti formalizam može primijeniti na druge algebarske sustave čitava teorija je eksplodirala dodirujući gotovo svaki dio algebre. Najvažniji rad iz tog početnog perioda je Cartanova i Eilenbergova knjiga u kojoj su uveli derivirane funktore te projektivne i injektivne module. Kasniji razvoj teorije temelji se na toj knjizi te na radovima MacLanea, Grothendiecka i Verdiera. Upravo zahvaljujući Grothendiecku središnji koncepti homološke algebre su postali abelove kategorije i derivirani funktori.

Homološka algebra koristi u mnogim granama matematike od algebarske topologije i teorije grupa, preko komutativne algebre do algebarske geometrije. Laički rečeno, homološkom algebrom mjerimo prepreke za izvršavanje nekih konstrukcija. Njen začetak na prijelazu iz 19. u 20. stoljeće upravo bio potaknut Poincaréovim razmatranjima o "n-dimenzionalnim rupama" u simplicijalnim kompleksima, a danas je njena primjena toliko raširena da obuhvaća računanje indeksa eliptičkih operatora, egzaktne procjene broja rješenja kongruencija modulo prost broj, teoriju hiperfunkciju, anomalije u kvantnoj teoriji polja itd.

Osnovni pojam svake teorije homologije (odn. kohomologije) je lančani kompleks (odn. kokompleks). Prirodno okruženje za lančane komplekse su abelove kategorije - kategorije s dovoljno strukture da bi se u njima mogla računati homologija. Najvažniji primjer takve kategorije (a kako ćemo vidjeti u nekom smislu esencijalno jedini) je kategorija desnih R-modula za zadani prsten R.

5.1 Homologija lančanih kompleksa

Neka je R fiksan (ne nužno komutativan) prsten. Kako ćemo u daljnjem tekstu koristiti samo desne R-module izostavit ćemo riječ 'desni' te ukoliko bi moglo doći do nejasnoća u tekstu naglasit ćemo da se radi o desnom odnosno lijevom R-modulu.

5.1.1. Definicija. **Lančani kompleks** $C_\bullet$ R-modula je familija R-modula $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ i homomorfizama R-modula

$$C_\bullet \colon \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

gdje je $d_n \circ d_{n+1} = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Homomorfizme d_n zovemo **homomorfizmima ruba**, odnosno **diferencijalima**.

Slično, **kolančani kompleks** $C^\bullet$ R-modula je familija R-modula $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ i homomorfizama R-modula

$$C^\bullet \colon \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

gdje je $d^n \circ d^{n-1} = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Elemente modula C_n (odn. C^n) nazivamo n**-lancima** (odn. n-kolancima), elemente jezgre $\mathsf{Ker}\ (d_n)$ **.** n**-ciklusima** (odn. n-kociklusima), a elemente slike $\mathsf{Im}\ d_{n+1}$ n**-rubovima** (odn. n-korubovima).

5.1.2. Definicija. R-modul $H_n(C_\bullet) = \mathsf{Ker}\ d_n/\mathsf{Im}\ d_{n+1}$ zovemo n**-ti modul homologije** kompleksa $C_\bullet$. R-modul $H^n(C^\bullet) = \mathsf{Ker}\ d^n/\mathsf{Im}\ d^{n-1}$ zovemo n**-ti modul kohomologije** kompleksa $C^\bullet$.

Budući da se svaki lančani kompleks može transformirati u lančani kokompleks stavljajući $D^n = C_{-n}$, $d^n = d_{-n-1}$ u daljnjem tekstu ćemo koristiti samo kolančane komplekse te ćemo koristiti termin 'kompleks'. Svi pojmovi koje ćemo uvesti se po analogiji prevode u termine lančanih kompleksa.

5.1.3. Primjer. R-modul A na trivijalan način možemo poistovjetiti s kompleksom

$$\cdots \to 0 \to 0 \to A \to 0 \to 0 \to \cdots .$$

5.1.4. Definicija. Kažemo da je kompleks $C^\bullet$ **ograničen odozgo** (odn. **odozdo**) ako postoji $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $C^n = 0$ za sve $n > m$ (odn. $n < m$). Kažemo da je kompleks **ograničen** ako je ograničen odozdo i ograničen odozgo.

5.1.5. Definicija. Neka su $B^\bullet, C^\bullet$ kolančani kompleksi. **Morfizam** (ili preslikavanje) **kompleksa** $f^\bullet \colon B^\bullet \to C^\bullet$ je familija homorfizama modula $f^n \colon B^n \to C^n$ takvih da vrijedi

$$d^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d^n, \tag{5.1}$$

to jest da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"] & B^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "d^n"] & C^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ponekad ćemo radi elegantnije zapisa pisati samo d umjesto d_n za diferencijale, a samo f za f_n za preslikavanje kompleksa. Taj zapis ćemo koristiti samo kad je iz konteksta jasno o kojim se indeksima radi.

5.1.6. Lema. Preslikavanje kompleksa $f^\bullet\colon B^\bullet \to C^\bullet$ inducira familiju homomorfizama modula
$$H^n(f)\colon H^n(B^\bullet) \to H^n(C^\bullet).$$

Dokaz. Neka je $b \in H^n(B^\bullet)$ reprezentiran kociklusom $b' \in \mathsf{Ker}\ d^n \subset B^n$. Tada je prema 5.1 $f^n(b') \in \mathsf{Ker}\ d^n \subset C^n$, pa možemo definirati da je $H^n(f)(b)$ klasa ciklusa $f^n(b')$ u $H^n(C^\bullet)$. Zbog 5.1 ta klasa ne ovisi o izboru reprezentanta b' klase b.

Činjenica da je $H^n(f)$ zaista homomorfizam se dokazuje direktno iz definicije. Potrebno je samo primijetiti da je predstavnik produkta klasa $b_1 b_2$ produkt predstavnika klasa b_1 i b_2. ■

Kolančani kompleksi i preslikavanja kolančanih kompleksa čine kategoriju koju označavamo sa **Ch** (od eng. *chain complexes*). Kompozicija morfizama je jasno definirana nadopisavanjem dijagrama. Pune potkategorije ograničenih, ograničenih odozdo, ograničenih odozgo kompleksa označavamo sa $\mathbf{Ch}^b, \mathbf{Ch}^+, \mathbf{Ch}^-$.

5.1.7. Propozicija. $H^n\colon \mathbf{Ch} \to R - \mathbf{Mod}$ je funktor.

Dokaz. Preostaje provjeriti da za bilo koja dva preslikavanja kompleksa f, g za koje je definirana kompozicija vrijedi $H^n(g \circ f) = H^n(g) \circ H^n(f)$, što slijedi direktno iz definicije.
$$H^n(g) \circ H^n(f)(b) = H^n(g)([f^n(b')]) = [g^n(f^n(b'))] = H^n(g \circ f)$$
jer je $f^n(b')$ predstavnik svoje klase, a neovisnost o predstavniku je dio dokaza prethodne leme. ■

5.1.8. Definicija. Za kompleks $C^\bullet$ kažemo da je **egzaktan** ako su svi moduli kohomologije jednaki 0, tj. ako je $\mathsf{Ker}\ d^n = \mathsf{Im}\ d^{n-1}$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Ovakav kompleks još nazivamo **egzaktan niz**. Egzaktan niz oblika
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$
ćemo označavati s
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$
i zvati **kratak egzaktni niz** (SES, eng. short exact sequence).

Istaknimo jednu klasičnu lemu koja se dokazuje na kolegijima iz algebre, a bit će nam potrebna. Dokaz se može naći u [15].

5.1.9. Lema. 5-lema Neka je
$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_4} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_5} \\
B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
\end{array}$$
komutativan dijagram R-modula i homomorfizama R-modula s egzaktnim redovima (morfizam egzaktnih lančanih kompleksa modula). Ako je α_1 epimorfizam, a α_2 i α_4 monomorfizmi, onda je i α_3 monomorfizam. Ako je α_3 monomorfizam, a α_2 i α_4 epimorfizmi, onda je i α_3 epimorfizam.

5.1.10. Definicija. Kažemo da je niz preslikavanja kompleksa

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{i} B^\bullet \xrightarrow{p} C^\bullet \longrightarrow 0$$

egzaktan ako za svaki $n \in \mathbb{Z}$ imamo kratak egzaktni niz

$$0 \longrightarrow A^n \xrightarrow{i^n} B^n \xrightarrow{p^n} C^n \longrightarrow 0.$$

5.1.11. Teorem. (**Dugi egzaktan niz.**) Neka je

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{i} B^\bullet \xrightarrow{p} C^\bullet \longrightarrow 0$$

kratak egzaktan niz kolančanih kompleksa. Tada postoje prirodni homomorfizmi modula $\delta^n\colon H^n(C^\bullet) \to H^{n+1}(A^\bullet)$ (koje zovemo **vezna preslikavanja**) takvi da je niz

$$\cdots \longrightarrow H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^\bullet)} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{H^n(p^\bullet)} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

egzaktan.

Dokaz. Konstrukcija veznih preslikavanja. Neka je kociklus c' predstavnik klase $c = [c'] \in H^n(C^\bullet)$. Budući da je p^n surjektivno preslikavanje postoji $b' \in B^n$ takav da je $c' = p^n(b')$. No, tada je $p^{n+1}(db') = dp^n(b') = dc' = 0$, pa postoji (jedinstven) $a' \in A^{n+1}$ takav da je $db' = i^{n+1}(a')$ Budući da vrijedi $i^{n+2}(da') = di^{n+1}(a) = d(db') = 0$, te budući da je i^{n+2} injekcija slijedi da je $da' = 0$, tj. a' je kociklus.

Klasa kociklusa a' u $H^{n+1}(A^\bullet)$ ne ovisi o izboru reprezentanata c' i b'. Odaberemo li umjesto b' neki b_1 takav da je $p^{n+1}(b_1) = c'$ dobivamo $a_1 \in A^{n+1}$ takav da je $i^{n+1}(a_1) = db_1$. Budući da je $p^n(b' - b_1) = 0$ postoji $a_2 \in A^n$ takav da je $i^n(a_2) = b' - b_1$. Tada je $i^{n+1}(da_2) = d(b' - b_1) = i^{n+1}(a' - a_1)$, pa zbog injektivnost od i^{n+1} slijedi $a' - a_1 = da_2$. Dakle, klasa od a' je neovisna o izboru b'. Slično se pokazuje neovisnost izbora c'. Dakle, možemo definirati

$$\delta^n(c) = [a'].$$

Ponovno koristeći činjenicu da je produkt klasa dan klasom produkta njihovih reprezentanata.

Egzaktnost kod člana $H^n(B^\bullet)$. Primijetimo prvo da je $H^n(p^\bullet) \circ H^n(i^\bullet) = H^n(p^\bullet \circ i^\bullet) = 0$ jer je $p^\bullet \circ i^\bullet = 0$. Neka je $b \in H^n(B^\bullet)$ i $H^n(p^\bullet)(b) = 0$. Neka je kociklus $b' \in B^n$ reprezentant klase b. Budući da je $H^n(p^\bullet)(b) = 0$ postoji $c' \in C^{n-1}$ takav da je $p^n(b') = dc'$, te budući da je p^{n-1} surjekcija postoji $b_1 \in B^{n-1}$ takav da je $c' = p^{n-1}(b_1)$. Kako je $p^n(b' - db_1) = c'$ zbog egzaktnosti postoji $a' \in A^n$ takav da je $b' - db_1 = i^n(a')$. Tada je $i^{n+1}(da') = d(i^n(a)) = db' = 0$, pa je zbog injektivnosti $da' = 0$. Klasa $a = [a']$ je takva da je $H^n(i^\bullet)(a) = b$.

Niz preslikavanja iz iskaza je kompleks. Treba provjeriti $\delta^n \circ H^n(p^\bullet) = 0$ i $H^{n+1}(i^\bullet) \circ \delta^n = 0$. Obje tvrdnje slijede direktno iz definicije preslikavanja δ^n.

Također na sličan način se pokazuju još *egzaktnost kod članova $H^n(C^\bullet)$ i $H^{n+1}(A^\bullet)$.* ■

5.1.12. Definicija. Kažemo da su prelikavanja kompleksa $f, g\colon B^\bullet \to C^\bullet$ **homotopska** ako postoji familija homomorfizama $k = (k^n), k^n\colon B^n \to C^{n-1}$ takva da je za svako $n \in \mathbb{Z}$

$$f^n - g^n = k^{n+1} d_B^n + d_C^{n-1} k^n.$$

Familiju preslikavanja k nazivamo **homotopijom**.

5.1.13. Lema. Ako su f, g homotopska preslikavanja kompleksa, onda je $H^n(f) = H^n(g)$ za svako $n \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da ako je $f - g$ homotopsko 0 onda je $H^n(f - g) = 0$. Neka je $b \in B^n$ kociklus. Tada je

$$(f - g)b = (kd + dk)b = d(k(b)).$$

Dakle, svaki kociklus se preslikava u korub. ■

Naravno, analogna tvrdnja prethodnoj lemi vrijedi za lančane komplekse. Bez dokaza navodimo teorem koji je veza homotopije u kategoriji topoloških prostora i singularne homologije, odnosno homotopije u kategoriji glatkih mnogostrukosti i de Rhamove kohomologije. Dokaz se može pronaći u [12], tm. I.7.11.

5.1.14. Teorem. a) Neka su $\phi, \psi\colon X \to Y$ topološki homotopska neprekidna preslikavanja topoloških prostora. Ta preslikavanja induciraju jednaka preslikavanja grupa singularne homologije s bilo kakvim koeficijentima.

b) Neka su $\phi, \psi\colon X \to Y$ glatko homotopska preslikavanja C^∞-mnogostrukosti. Ta preslikavanja induciraju jednaka preslikavanja na de Rhamovoj kohomologiji.

5.1.15. Definicija. Kažemo da je preslikavanje kompleksa $f\colon B^\bullet \to C^\bullet$ **kvazi-izomorfizam** ako je inducirano preslikavanje $H^n(f)\colon H^n(B^\bullet) \to H^n(C^\bullet)$ izomorfizam za svaki n.

5.2 Operacije na kompleksima

Na kompleksima možemo vršiti razne operacije kako bismo dobili nove komlekse. Ovdje ćemo opisati tri vrlo važne: *translaciju, konus preslikavanja* i *cilindar preslikavanja.*

5.2.1. Definicija. Neka je $C^\bullet = (C^i, d_C^i)$ kompleks i $n \in \mathbb{Z}$. Definirajmo novi kompleks $C[n]^\bullet$ sa

$$C[n]^i = C^{n+i}, d_{C[n]} = (-1)^n d_C.$$

Za preslikavanje kompleksa $f\colon B^\bullet \to C^\bullet$ definirajmo preslikavanje $f[n]\colon B[n]^\bullet \to C[n]^\bullet$ sa $f[n]^i = f^{n+i}$.

Jasno je da na ovaj način dobivamo funktor $T^n\colon \mathbf{Ch} \to \mathbf{Ch}$ definiran s $T^n(C^\bullet) = C[n]^\bullet, T(f) = f[n]$. Ovaj funktor nazivamo **translacija za** $\boldsymbol{n}$.

5.2.2. Definicija. Neka je $f\colon B^\bullet \to C^\bullet$ preslikavanje kompleksa. **Konus preslikavanja** f $C(f)$ je kompleks zadan s

$$C(f)^i = B[1]^i \oplus C^i, d_{C(f)}^i(b^{i+1}, c^i) = (-d_B b^{i+1}, -f(b^{i+1}) + d_C c^i).$$

Ponekad ćemo diferencijal konusa preslikavanja zapisivati kao 2×2 matricu

$$d_{C(f)} = \begin{pmatrix} -d_{B[1]} & 0 \\ -f[1] & d_C \end{pmatrix}.$$

Lako se provjerava da je $d^2_{C(f)} = 0$.

5.2.3. Definicija. Neka je $f\colon B^\bullet \to C^\bullet$ preslikavanje kompleksa. **Cilindar preslikavanja** f $Cyl(f)$ je kompleks zadan s

$$Cyl(f)^i = B^i \oplus B[1]^i \oplus C^i, d^i_{Cyl(f)}(b^i, b^{i+1}, c^i) = (d_B b^i + b^{i+1}, -d_B b^{i+1}, -f(b^{i+1}) + d_C c^i).$$

Cilindar je zaista kompleks jer je

$$d^2 = \begin{pmatrix} d_B & 1_B & 0 \\ 0 & -d_B & 0 \\ 0 & -f & d_C \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} d_B^2 & d_B - d_B & 0 \\ 0 & d_B^2 & 0 \\ 0 & f d_B - d_C f & d_C^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Glavna svojstva ovih operacija su dana sljedećom lemom.

5.2.4. Lema. Za svako preslikavanje kompleksa $f\colon B^\bullet \to C^\bullet$ postoji komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & C^\bullet \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, "\alpha"] & C(f) \arrow[r, "\delta=\delta(f)"] \arrow[d, equal] & B[1]^\bullet \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^\bullet \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, equal] & Cyl(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & C(f) \arrow[r] & 0 & \\
 & B^\bullet \arrow[r, "f"] & C^\bullet & & &
\end{tikzcd}$$

Dijagram je funktorijalan u f te je $\beta\alpha = \mathrm{id}_L$ i $\alpha\beta$ je homotopsko $\mathrm{id}_{Cyl(f)}$.

Dokaz. a) Definicija preslikavanja u prvom redu i provjera komutiranja sa diferencijalom d:

$$\begin{tikzcd}
c^i \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, "d_C"] & (0, c^i) \arrow[d, "d_{C(f)}"] \\
d_C c^i \arrow[r, "\overline{\pi}"] & (0, d_C c^i)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(b^{i+1}, c^i) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d_{C(f)}"] & b^{i+1} \arrow[d, "d_{B[1]}"] \\
(-d_B b^{i+1}, -f(b^{i+1}) + d_C c^i) \arrow[r, "\delta"] & -d_B b^{i+1}
\end{tikzcd}$$

Egzaktnost prvog reda je očita.
b) Definicija preslikavanja u drugom redu i provjera komutiranja sa diferencijalom d:

$$\begin{tikzcd}
(b^i, b^{i+1}, c^i) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "d_{Cyl(f)}"] & (b^{i+1}, c^i) \arrow[d, "d_{C(f)}"] \\
(d_B b^i + b^{i+1}, -d_B b^{i+1}, -f(b^{i+1}) + d_C c^i) \arrow[r, "\pi"] & (-d_B b^{i+1}, -f(b^{i+1}) + d_C c^i)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
b^i \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "d_B"] & (b^i, 0, 0) \arrow[d, "d_{Cyl(f)}"] \\
d_B b^i \arrow[r, "\overline{f}"] & (d_B b^i, 0, 0)
\end{tikzcd}$$

Egzaktnost drugog reda je jasna.
c) Definicija preslikavanja α i β te provjera da komutiraju s diferencijalom d:

$$\begin{tikzcd}
c^i \arrow[r, "d_C"] \arrow[d, "\alpha"] & d_C c^i \arrow[d, "\alpha"] \\
(0, 0, c^i) \arrow[r, "d_{Cyl(f)}"] & (0, 0, d_C c^i)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(b^i, b^{i+1}, c^i) \arrow[r, "d_{Cyl(f)}"] \arrow[d, "\beta"] & (d_B b^i + b^{i+1}, -d_B b^{i+1}, -f(b^{i+1}) + d_C c^i) \arrow[d, "\beta"] \\
f(b^i) + c^i \arrow[r, "d_C"] & f(d_B b^i) + d_C c^i
\end{tikzcd}$$

Komutativnost kvadrata $\pi\alpha = \overline{\pi}, \beta\overline{f} = f$ je jasna.
d) Jasno je da vrijedi $\beta\alpha = \mathrm{id}_L$. Definirajmo $h^i \colon Cyl(f)^i \to Cyl(f)^{i-1}$ s

$$h^i(b^i, b^{i+1}, c^i) = (0, b^i, 0).$$

Tada se lako provjerava da je

$$\alpha\beta = id_{Cyl(f)} - (dh + hd).$$

■

Neka je R komutativan prsten.

5.2.5. Definicija. Neka su $B^\bullet, C^\bullet$ kompleksi R-modula. Tada njihov tenzorski produkt $B^\bullet \otimes C^\bullet$ definiramo kao kompleks zadan modulima

$$(B^\bullet \otimes C^\bullet)^n = \bigoplus_{p+q=n} B^p \otimes_R A^q$$

i diferencijalima
$$d_\otimes^{p+q}(b\otimes c) = d_B(b)\otimes c + (-1)^p b\otimes d_C(c)$$
za $b\in B_p, c\in C_q$. Da je ovako zaista definiran kompleks vidimo na sljedeći način:

$$(d_\otimes \circ d_\otimes)(b\otimes c) = \underbrace{d_B^2(b)}_{=0}\otimes b + (-1)^{p-1}d_B(b)\otimes d_C(c) + (-1)^p d_B(b)\otimes d_C(c) + (-1)^{2p} b\otimes \underbrace{d_C^2(c)}_{=0} = 0.$$

Kao što vidimo iz ovog računa ključno je u definiciji stavljanje predznaka $(-1)^p$. Taj predznak nazivamo **Koszulov predznak**.

5.2.6. Propozicija. $(\mathbf{Ch}, \otimes, \mathbf{k})$ je simetrična monoidalna kategorija.

Dokaz. Svi uvjeti iz 2. poglavlja se jednostavno dobivaju kao posljedice činjenica da su (R-Mod, $\otimes_R$) i $(\mathbb{Z}, +)$ monoidalne kategorije. Simetrija je definirana s $\tau(x\otimes y) = (-1)^{pq}(y\otimes x)$ za $x\in C^p, y\in D^q$. ■

5.3 Simplicijalni skupovi

5.3.1. Definicija. (**Skeletalna kategorija nepraznih konačnih ordinala**) Neka je Δ kategorija čiji su objekti neprazni konačni uređeni skupovi $[n] = \{0 < 1 < 2 < \cdots < n\}$ za $n \geq 0$, a morfizmi nepadajuća preslikavanja $f\colon [n]\to[m]$.

5.3.2. Definicija. Neka je $\mathcal{A}$ kategorija. **Simplicijalni objekt** u $\mathcal{A}$ je kontravarijantni funktor $A\colon \Delta^{op}\to\mathcal{A}$. Analogno, **kosimplicijalni objekt** u $\mathcal{A}$ je kovarijantni funktor $A\colon \Delta\to\mathcal{A}$.

Simplicijalni objekt u kategoriji skupova ćemo jednostavno zvati simplicijalni skup, a slično kod ostalih kategorija (simplicijalni topološki prostor itd.). Pisat ćemo A_n umjesto $A([n])$.

Morfizam simplicijalnih objekata u $\mathcal{A}$ je prirodna transformacija, pa je kategorija simplicijalnih objekata $\mathcal{SA}$ zapravo kategorija funktora $\mathcal{A}^{\Delta^{op}}$. Drugim riječima, simplicijalni objekt je familija objekata $A = (A_n), n = 0,1,2,...$ i morfizama $A(f)\colon A_m\to A_n$ za svako nepadajuće preslikavanje $f\colon[n]\to[m]$ takvih da vrijedi
$$A(f\circ g) = A(g)\circ A(f), A(\mathrm{id}) = \mathrm{id}.$$

5.3.3. Napomena. Nepadajuća preslikavanja su generirana *rubnim* i *degeneracijskim preslikavanjima.* Neka je i**-to rubno preslikavanje** $\partial_n^i : [n-1]\to[n]$ jedino striktno rastuće preslikavanje koje u slici nema i, a neka je i**-to degeneracijsko preslikavanje** $\sigma_n^i : [n+1]\to[n]$ nepadajuća surjekcija takva da je $\sigma_n^i(i) = \sigma_n^i(i+1) = i$.

Svako strogo rastuće preslikavanje je kompozicija rubnih, a svaka nepadajuća surjekcija je kompozicija degeneracijskih preslikavanja. Svako nepadajuće preslikavanje je kompozicija rubnih i degeneracijskih preslikavanja, točnije svako se nepadajuće preslikavanje $f:[m]\to[n]$ može na jedinstven način zapisati kao
$$f = \partial_n^{i_1}\partial_{n-1}^{i_2}\cdots\partial_{n-s+1}^{i_s}\sigma_{m-t}^{j_t}\cdots\sigma_{m-1}^{j_1}$$

gdje je $n \geq i_1 > ... > i_s \geq 0, m > j_1 > ... > j_t \geq 0, n = m - t + s$.

Prethodna tvrdnja se dokazuje koristeći relacije za rubna i degeneracijska preslikavanja:

$$\partial^j_{n+1}\partial^i_n = \partial^i_{n+1}\partial^{j-1}_n, i < j;$$

$$\sigma^j_n\sigma^i_{n+1} = \sigma^i_n\sigma^{j+1}_{n+1}, i \leq j;$$

$$\sigma^j_{n-1}\partial^i_n = \begin{cases} \partial^i_{n-1}\sigma^{j-1}_{n-2}, & i < j; \\ \mathrm{id}_{[n-1]}, & i = j \text{ ili } i = j+1; \\ \partial^{i-1}_{n-1}\sigma^j_{n-2}, & i > j+1. \end{cases}$$

Prema tome zadavanje simplicijalnog objekta je ekvivalentno zadavanju niza objekata $(A_n)_n$, te morfizama $(A(\sigma^i_n))_n$ i $(A(\partial^i_n))_n$ za $i = 0, 1, 2, ..., n$.

5.3.4. Propozicija. Definiramo li $d^n : A_n \to A_{n-1}$ s

$$d_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i A(\partial^i_n)$$

tada je $(A_\bullet, d_\bullet)$ lančani kompleks.

5.3.5. Primjer. Standardni n-simpleks. Δ_n je potprostor od $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Delta_n = \{(t_0, t_1, ..., t_n) \colon 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1\}.$$

Identificiramo li elemente skupa $[n]$ sa vrhovima $v_0 = (1, 0, ..., 0), ..., v_n = (0, ..., 0, 1)$ standardnog simpleksa Δ_n, onda preslikavanje $f \colon [n] \to [m]$ u Δ šalje vrhove simpleksa Δ^n u vrhove simpleksa Δ^m po pravilu $f(v_i) = v_{f(i)}$. Proširimo li po linearnosti dobivamo preslikavanje $\Delta_f \colon \Delta_n \to \Delta_m$ koje nizu (Δ^n) daje strukturu kosimplicijalnog topološkog prostora. Označimo još sa $\dot{\Delta}_n$ unutrašnjost n-simpleksa.

5.3.6. Definicija. Geometrijska realizacija $|A|$ simplicijalnog skupa A je topološki prostor

$$\coprod_{n=0}^{\infty}(\Delta_n \times A_n)/R$$

gdje je R najslabija relacija ekvivalencije takva da su $(s, x) \in \Delta_n \times A_n$ i $(t, y) \in \Delta_m \times A_m$ u relaciji ako je

$$y = A(f)x, s = \Delta_f t$$

za neko nepadajuće preslikavanje $f \colon [m] \to [n]$. Neka je $\tau \coprod_{n=0}^{\infty}(\Delta_n \times A_n) \to \coprod_{n=0}^{\infty}(\Delta_n \times A_n)/R$ kanonsko preslikavanje. Topologija na $|A|$ je definirana tako da je $U \subset |A|$ otvoren ako i samo ako je $\tau^-1(U)$ otvoren.

Geometrijska realizacija ima strukturu CW-kompleksa, no da bismo to pokazali potrebno je promatrati samo simplekse koji ne dolaze od degeneracijskih preslikavanja.

5.3.7. Definicija. Za n-simpleks $a \in A_n$ kažemo da je **degeneriran** ako postoji surjektivno nepadajuće preslikavanje $f\colon [n] \to [m], m < n$ i element $y \in A_m$ takav da je $x = A(f)y$. Ako x nije degeneriran kažemo da je **nedegeneriran** i ako je $x = A(f)y$ za neke f i y, onda je f injekcija. Označimo s $A_{(n)}$ skup svih nedegeneriranih n-simpleksa od A.

Struktura CW-kompleksa na $|A|$ slijedi iz slijedeće propozicije čiji podužі, tehnički dokaz nećemo navesti, a može se naći u [12].

5.3.8. Propozicija. Kanonsko preslikavanje $\dot{\tau}\colon \coprod_n \dot{\Delta}_n \times A_{(n)} \to |A|$ je injektivno.

5.3.9. Primjer. Klasificirajući prostor grupe. Neka je G grupa. Označimo

$$(BG)_n = G^n, BG(f)(g_1, ..., g_n) = (h_1, ..., h_m)$$

za $g : [m] \to [n]$ pri čemu je

$$h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j,$$

$$h_i = e \text{ ako je } f(i-1) = f(i).$$

Npr. neka je $f : [3] \to [4]$ dano s $f(0) = 0, f(1) = f(2) = 2, f(3) = 4$. Tada je $h_1 = g_1g_2, h_2 = e, h_3 = g_3g_4$.

5.3.10. Primjer. Nerv pokrivača topološkog prostora. Neka je X topološki prostor, neka je $U = (U_i)_I$ (ne nužno otvoren) pokrivač od X te

$$A_n = \{(i_0, ..., i_n) : U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n} \neq \emptyset\}$$

$$A(g)(i_0, ..., i_n) = (i_{g(0)}, ..., i_{g(m)})$$

za $g : [m] \to [n]$. Ovaj simplicijalni skup odražava kombinatornu strukturu pokrivača.

Posebno važan primjer je pojam nerva male kategorije (nerv se može definirati samo za kategorije čija klasa objekata čini skup). Geometrijska realizacija nerva kategorije je vrlo velik topološki prostor čija homotopska svojstva čine bazu algebarske K-teorije. Taj prostor se naziva klasificirajući prostor kategorije, a nerv kategorije je direktna generalizacija klasificirajućeg prostora za grupe. Nerv pokrivača topološkog prostora X je poseban primjer nerva kategorije shvatimo li pokrivač kao parcijalno uređen skup s relacijom induciranom inkluzijama. Pritom relaizacija nerva te kategorije ne mora biti ni homotopski ekvivalentna početnom prostoru X.

5.3.11. Definicija. Nerv male kategorije $\mathcal{C}$ je simplicijalni skup $N\mathcal{C}$ takav da je $N\mathcal{C}_n$ skup svih dijagrama oblika

$$C_0 \overset{\varphi_0}{\to} C_1 \overset{\varphi_1}{\to} ... \overset{\varphi_{n-1}}{\to} C_n \tag{5.2}$$

gdje su C_i objekti, a φ_i morfizmi u $\mathcal{C}$.
Preslikavanje $N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_m$ pridruženo nepadajućem preslikavanju $f\colon [m] \to [n]$ transformira dijagram 5.2 u dijagram

$$D_0 \overset{\psi_0}{\to} D_1 \overset{\psi_1}{\to} ... \overset{\psi_{m-1}}{\to} D_m$$

pri čemu je $D_i = C_{f(i)}, \psi_i = \text{id}$ ako je $f(i) = f(i+1)$, a $\psi_i = \varphi_{f(i+1)-1} \circ ... \circ \varphi_{f(i)}$ inače.

Važno je primjetiti da se mala kategorija $\mathcal{C}$ može dobiti iz svog nerva na jedinstven način do na izomorfizam (ne samo do na ekvivalenciju!). Zapravo, $\text{Ob}\,\mathcal{C} = N\mathcal{C}_0, \text{Mor}\,\mathcal{C} = N\mathcal{C}_1$.

5.3.12. Napomene. Funktor $N : \mathbf{Cat} \to [\mathbf{\Delta^{op}}, \mathbf{Set}]$ je pun i vjeran, te ima lijevi adjungirani funktor. Nadalje, N se pojavljuje kao singularni funktor inkluzije $J : \Delta \to \mathbf{Cat}$.

Općenito, neka je $\mathcal{V}$ simetrična monoidalna kategorija, $\mathcal{A}$ mala kategorija, a $\mathcal{B}$ bilo koja kategorija te neka je $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktor. Tada postoji inducirani funktor $\mathcal{B}(F,1)\colon \mathcal{B} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{V}]$ koji preslikava objekt B iz $\mathcal{B}$ u funktor $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F-, B) : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{V}$ i taj funktor nazivamo **singularni funktor**. Više o singularnim funktorima može se pronaći u [18].

Ponekad je vrlo korisno preći iz konteksta kompleksa u kontekst simplicijalnih objekata, i obrnuto. Definiciju abelove kategorije dajemo u sljedećem poglavlju.

5.3.13. Teorem. (**Dold-Kanova korespondencija**) Za svaku abelovu kategoriju $\mathcal{A}$ funktor normaliziranih lančanih kompleksa je ekvivalencija kategorija $\mathcal{SA}$ i $Ch^+(\mathcal{A})$. Pod tom korespondecijom, simplicijalna homotopija odgovara homologiji i homotopski morfizmi simplicijalnih skupova odgovaraju homotopskim preslikavanjima lančanih kompleksa.

5.4 Primjeri iz topologije, geometrije i algebre

5.4.1. Primjer. Singularna homologija topološkog prostora. Neka je X topološki prostor. *Singularni n-simpleks* od X je neprekidno preslikavanje $\phi : \Delta_n \to X$. Simplicijalni skup dobivamo definirajući da je $A_n(X)$ slobodna abelova grupa generirana skupom svih singularnih n-simpleksa od X, a $A(f)$ homomorfizam grupa definiran na generatorima s

$$A(f)(\phi) = \phi \circ \Delta_f$$

za $f : [m] \to [n], \Delta_f : \Delta_m \to \Delta_n$.

Kao što smo vidjeli svaki simplicijalni skup ima strukturu lančanog kompleksa, pa možemo računati pripadnu homologiju. Singularnu homologiju topološkog prostora X označavamo s $H^{sing}_\bullet(X)$.

5.4.2. Primjer. Čechov kompleks. Neka je X topološki prostor, neka je $U = (U_i)_I$ (ne nužno otvoren) pokrivač od X te $\mathcal{F}$ snop abelovih grupa na X. Element $C^n(U, \mathcal{F})$ je familija sekcija $\phi = \{\phi_{i_0,...,i_m} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_m}\}$, po jedna za svaku $(m+1)$-torku indeksa $(i_0, ..., i_m)$. Definiramo $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$.

Homomorfizam $C(g) : C^m \to C^n$ za nepadajuću funkciju $g : [m] \to [n]$ preslikava ϕ u familiju

$$(C(g)\phi)_{i_0,...,i_n} = res(\phi_{i_{g(0)},...,i_{g(m)}})$$

pri čemu je rea restrikcijsko preslikavanje koje odgovara inkluziji $U_{i_{g(0)}} \cap \cdots \cap U_{i_{g(m)}} \hookrightarrow U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$.

Diferencijal definiramo formulom

$$(d\phi)_{i_0,...,i_{m+1}} = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k res(\phi_{i_0,...,i_{k-1},i_{k+1},...,i_{m+1}}).$$

5.4.3. Primjer. de Rhamov kompleks. Neka je X C^∞-mnogostrukost, a $C(X)$ prsten glatkih funkcija na X. Označimo s $\Omega^i(X)$ $C(X)$-modul diferencijalnih i-formi na X, uz $\Omega^0(X) = C(X)$. Neka je $d\colon \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$ vanjska derivacija. Kompleks $\Omega^\bullet(X)$ nazivamo de Rhamov kompleks, a pripadnu kohomologiju označavamo s $H^\bullet_{dR}(X)$.

5.4.4. Napomena. Vanjska derivacija je u potpunosti određena svojstvima:
1) $d(\omega^k \wedge \omega^l) = d\omega^k \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^l, \omega^k \in \Omega^k(X), \omega^l \in \Omega^l(X)$;
2) $d^2 = 0$;
3) $d\colon C(X) \to \Omega^1(X)$ pridružuje svakoj funkciji njen diferencijal.

5.4.5. Teorem. (de Rham, 1931.) de Rhamova kohomologija $H^\bullet_{dR}(X)$ na glatkoj mnogostrukosti X se podudara sa singularnom kohomologijom $H^\bullet_{sing}(X;\mathbb{R})$.

5.4.6. Primjer. Chevalley-Eilenbergov kompleks. Neka je G povezana Liejeva grupa (glatka mnogostrukost s glatkim množenjem i invertiranjem). G djeluje na $C(G)$ i $\Omega^k(G)$ desnim translacijama, pri čemu je djelovanje na $\Omega^k(G)$ određeno komutativnošću s vanjskom derivacijom d. Neka je $\Omega^\bullet_{inv}(G)$ potkompleks od $\Omega^\bullet(G)$ koji se sastoji od G-invarijantnih formi. Ovaj kompleks možemo u potpunosti opisati u terminima Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ grupe G. Shvatimo li $\mathfrak{g}$ kao prostor desno-invarijantnih vektorskih polja na G vrijedi

$$\Omega^k_{inv}(G) = \hom(\Lambda^k(\mathfrak{g}), \mathbb{R})$$

pri čemu je $\Lambda^k(\mathfrak{g})$ prostor antisimetričnih k-linearnih formi na $\mathfrak{g}$.

Ovaj kompleks možemo napraviti i ako ne pretpostavimo postojanje grupe G pridružene algebri $\mathfrak{g}$. Posebno, možemo ga konstruirati i za beskonačnodimenzionalne Liejeve algebre.

Općenito neka je M lijevi $\mathfrak{g}$-modul. Označimo s $C^n(\mathfrak{g}, M) = \hom(\Lambda^n(\mathfrak{g}), M)$. Diferencijal $d^n : C^n(\mathfrak{g}, M) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, M)$ je eksplicitno zadan s

$$\begin{aligned}(d^n f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) \quad = \quad & \textstyle\sum_{1\le j<l\le n+1} (-1)^{j+l-1} f([x_j, x_l], x_1, ..., \hat{x_j}, ..., \hat{x_l}, ..., x_{n+1}) + \\ & + \textstyle\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j x_j f(x_1, ..., \hat{x_j}, ..., x_{n+1}).\end{aligned}$$

Ovaj kompleks (zaista vrijedi $d^2 = 0$) nazivamo Chevalley-Eilenbergov kompleks, a njegovu kohomologiju označavamo s $H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$. U svom radu iz 1948. Chevalley i Eilenberg su uveli nešto drugačiji kompleks te dokazali da se kohomologija tog kompleksa podudara s kohomologijom kako smo je ovdje uveli.

5.4.7. Primjer. Hochschildova (ko)homologija. Neka je A $\mathbf{k}$-algebra (nad komutativnim prstenom $\mathbf{k}$, a M A-bimodul. Označimo s $C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes n}$ te definirajmo $d_n\colon C_n(A, M) \to C_{n-1}(A, M)$ s

$$d_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \cdots \otimes a_{n-1}.$$

Na taj način dobivamo Hochschildov lančani kompleks od M nad A te njegovu homologiju označavamo s $HH_n(A, M)$.

$C^n(A, M) = \hom_{\mathbf{k}}(A^{\otimes n}, M)$ te definirajmo $d^n \colon C^n(A, M) \to C^{n+1}(A, M)$ s

$$df(a_1, ..., a_{n+1}) = a_1 f(a_2, ..., a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1, ..., a_i a_{i+1}, ..., a_{n+1} + (-1)^{n+1} f(a_1, ..., a_n) a_{n+1}.$$

Na taj način dobivamo Hochschildov kolančani kompleks od M nad A te njegovu kohomologiju označavamo s $HH^n(A, M)$.

5.4.8. Napomena. Eilenberg-Steenrodovi aksiomi. Sve homološke teorije na topološkim prostorima zadovoljavaju iste aksiome. Te aksiome primjenjujemo na niz funktora H_n iz kategorije parova topoloških prostora (X, A) (morfizmi $(X, A) \to (Y, B)$ preslikavaju potprostor A u potprostor B) u **Ab** s prirodnom transformacijom $\partial : H_i(X, A) \to H_{i-1}(A)$ koju zovemo **morfizam ruba**. Aksiomi su:
1) **Homotopija.** Homotopska preslikavanja induciraju ista preslikavanja grupa homologije.
2) **Isijecanje.** Ako je (X, A) par i $U \subseteq$ takva da mu je zatvarač sadržan u interioru od A, onda inkluzija $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizam homologija.
3) **Dimenzija.** Ako je P prostor koji se sastoji od samo jedne točke onda je $H_n(P) = 0$ za $n \neq 0$.
4) **Aditivnost.** Ako je $X = \coprod_i X_i$ disjunktna unija familije topoloških prosotora onda je $H_n(X) = \bigoplus_i H_n(X_i)$.
5) **Egzaktnost.** Svaki par (X, A) inducira dugi egzaktan niz inkluzijama $i : A \to X$ i $j : X \to (X, A)$:

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \to \cdots .$$

Grupu $H_n(P)$ nazivamo **grupom koeficijenata**.

Poglavlje 6

Aditivne i abelove kategorije

6.1 Aditivne i abelove kategorije

U 3. poglavlju smo uveli obogaćene kategorije te smo naveli da je vrlo važan primjer obogaćene kategorije nad **Ab**.

6.1.1. Definicija. Kažemo da je kategorija $\mathcal{A}$ **Ab**-kategorija (ili **predaditivna**) ako je obogaćena nad **Ab**.

6.1.2. Definicija. Kažemo da je $\mathcal{A}$ **aditivna** ako ima konačne biprodukte i ako je predaditivna.

Napomena. Prema [14], ukoliko je $\mathcal{A}$ aditivna kategorija onda je struktura abelove grupe na skupu morfizama za svaka dva objekta jedinstvena te možemo zloupotrebljavati oznaku $\mathcal{A}$ za tu kategoriju bez dodatne strukture i za aditivnu kategoriju.

6.1.3. Primjer. Kategorija R-**Mod** je aditivna kategorija za svaki prsten R.

6.1.4. Primjer. Kategorija $\mathbf{Ban}_\infty$ Banachovih prostora i ograničenih linearnih operatora je aditivna: zbroj dva ograničena linearna operatora opet je linearni operator, a konačni koprodukti su izomorfni konačnim produktima.

6.1.5. Primjer. Kategorija **Grp** nije aditivna jer kartezijev produkt dviju grupa nije jednak sumi grupa (koproduktu).

Prisjetimo se pojmova jezgre i kojezgre iz 2. poglavlja.

6.1.6. Definicija. Kažemo da je kategorija $\mathcal{A}$ **abelova** ako je aditivna i ako za svaki morfizam $f\colon A \to B$ postoji niz

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} B \xrightarrow{c} K'$$

takav da je $j \circ i = f$, K je jezgra od f, K' je kojezgra od f, a I je jezgra od c i kojezgra od k. Svaki takav niz zovemo **kanonska dekompozicija**.

6.1.7. Napomena. Kažemo da je kategorija **normalna** ako svaki morfizam ima jezgru, kojezgru i epi-mono faktorizaciju te je svaki monomorfizam normalan (monomorfizam je normalan ako je jezgra nekog morfizma). Kažemo da je kategorija **konormalna** ako je njena dualna kategorija normalna, te da je **egzaktna** ako je normalna i konormalna. Sada možemo reći da je punktirana kategorija abelova ako i samo ako je egzaktna i ima konačne biprodukte. Primjetimo da je **Grp** konormalna, ali nije normalna, a kategorija punktiranih skupova **pSet** normalna, ali nije konormalna.

6.1.8. Napomena. Ukoliko kanonska dekompozicija postoji svaka druga kanonska dekompozicija joj je izomorfna i taj izomorfizam je jedinstven.

6.1.9. Napomena. Budući da su egzaktnost i imanje konačnih biprodukata samodualni strukture aditivne i abelove kategorije su samodualne - dualna kategorija aditivne kategorije je aditivna, a dualna kategorija abelove je abelova.

6.1.10. Propozicija. Svaka abelova kategorija je konačno potpuna i konačno kopotpuna.

Dokaz. Budući da abelova kategorija ima konačne produkte i ujednačitelje (egzaktnost) slijedi da je konačno potpuna prema 2.5.18. Budući da je struktura abelove kategorije samodualan slijedi i konačna kopotpunost. ■

6.1.11. Primjer. Kategorija R-**Mod** je abelova kategorija. To je ujedno najvažniji tip abelovih kategorija kao što pokazuje teorem koji slijedi. Posebno, **Ab** je abelova kategorija.

6.1.12. Teorem. (**Freyd-Mitchell**) Ako je $\mathcal{A}$ mala abelova kategorija onda postoji prsten R i egzaktan, pun i vjeran funktor iz $\mathcal{A}$ u R-**Mod**, koji ulaže $\mathcal{A}$ kao punu potkategoriju u smislu da $\hom_{\mathcal{A}}(M,N) \equiv \hom_R(M,N)$.

6.1.13. Primjer. Predsnopovi i snopovi centralni su pojmovi u algebarskoj geometriji. Kategorije predsnopova abelovih grupa **PAb** i snopova abelovih grupa **SAb** su abelove kategorije.

6.1.14. Definicija. Kažemo da je funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ između aditivnih kategorija **aditivan** ako su za svaka dva objekta $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ svi morfizmi

$$F\colon \hom_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \hom_{\mathcal{A}'}(FX,FY)$$

homomorfizmi abelovih grupa.

6.1.15. Primjer. Promatram ćemo mnogo aditivnih funktora (iako nisu svi zanimljivi funktori takvi), pa na ovom mjestu dajemo primjer funktora između aditivnih kategorija koji nije aditivan. Neka je R komutativan prsten, a $T^n\colon R-Mod \to R-Mod$ funktor zadan sa

$$T^n(M) = M^{\otimes n}, T^n(f) = f^{\otimes n}.$$

6.2 (Ko)lančani kompleksi i egzaktni funktori u abelovoj kategoriji

Potpuno analogno definiciji (ko)lančanog kompleksa u kategoriji R-**Mod** definiramo (ko)lančane komplekse u abelovoj kategoriji zamjenivši R-module i homomorfizme R-modula s objektima i morfizmima u proizvoljnoj abelovoj kategoriji. Također se slično definiraju morfizmi i homotopija među kompleksima u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$ te se dobiva kategorija koju označavamo $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$. Ipak, pri definiranju kohomologije moramo malo reformulirati definiciju.

Neka je dan niz objekata i morfizama $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$ takav da je $gf = 0$. Neka je $(K, k) = Ker(g), (K', k') = Coker(f)$. Tada prema definiciji jezgre i kojezgre postoje morfizmi $a\colon X \to K, b\colon K' \to Y$ takvi da je sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
& K' \arrow[dr, "b"] & \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "a"'] & Y \arrow[u, "k'"] \arrow[r, "g"] & Z \\
& K \arrow[u, "k"'] &
\end{tikzcd} .$$

6.2.1. Propozicija. Postoji kanonski izomorfizam između $Coker(a)$ i $Ker(b)$.

Dokaz. Dokaz provodimo u tri koraka.

Prvo, iz kanonske dekompozicije i five-lemma slijedi da za svaki monomorfizam $\varphi : X \to Y$ imamo $(X, \varphi) = Ker(Coker(\varphi))$, te analogno za svaki epimorfizam $\psi : Y \to Z$ imamo $(\psi, Z) = Coker(Ker(\psi))$.

Drugo, ako pretopostavimo da je f monomorfizam, a g epimorfizam slijedi da za $\varphi = k'k\colon K \to K'$ vrijedi $(X, a) = Ker(\varphi), (b, Z) = Coker(\varphi)$. U ovom slučaju traženi izomorfizam dolazi od kanonske dekompozicije od φ.

Treće, ako f i g nisu kao u prethodnom slučaju zamjenimo ih njihovim kanonskim dekompozicijama te dobivamo dijagram:

$$\begin{tikzcd}
& & K' \arrow[dr, "b'"] \arrow[drr, "b"] & & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, "a"'] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "a'"] & Y \arrow[u, "k'"] \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r] & Z \\
& & K \arrow[u, "k"'] & &
\end{tikzcd} .$$

gdje su

$$X' = Coker(Ker(f)) = Ker(Coker(f)),$$

$$Z' = Ker(Coker(g)) = Coker(Ker(g)).$$

Očito je f' monomorfizam, a g' epimorfizam. Primjenimo li nekoliko puta prvi korak i definicije jezgre i kojezgre dobivamo morfizme a' i b' takve da gornji dijagram komutira i da je

$$Coker(a') = Coker(a), Ker(b') = Ker(b).$$

Time smo sveli ovaj slučaj na drugi korak. ∎

6.2.2. Definicija. Za kompleks $C^\bullet$ u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$ definiramo $(n+1)$-**kohomologiju** kao objekt

$$H^{n+1} = Coker(a^n) = Ker(b^{n+1})$$

gdje su a^n i b^{n+1} morfizmi a i b dobiveni provodeći gornje razmatranje za niz $C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2}$.

6.2.3. Definicija. Za kompleks $C^\bullet$ u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$ kažemo da je **acikličan** ili **egzaktan kod člana** C^n ako je $H^n(C^\bullet) = 0$. Kažemo da je $C^\bullet$ **egzaktan** ako je acikličan kod svakog člana.

6.2.4. Definicija. Kažemo da je aditivan funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ između abelovih kategorija **egzaktan** ako je za svaki kratak egzaktan niz

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

u $\mathcal{A}$ niz

$$0 \to FX \to FY \to FZ \to 0$$

egzaktan u $\mathcal{A}'$. Kažemo da je F **lijevo egzaktan** (odn. **desno egzaktan**) ako je egzaktan kod svakog člana osim možda kod FZ (odn. FX).

Napomena. Prvi korak u dokazu gornje propozicije pokazuje da je svaki kratak egzaktni niz

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

kanonski izomorfan nizu

$$0 \to Ker(g) \to Y \to Coker(f) \to 0.$$

Egzaktni funktori su od posebne važnosti. Povijesno se egzaktnost počela proučavati sa željom da se izračuna vrijednost funktora F na nekim određenim objektima, npr. da se izračuna prostor sekcija $\Gamma(\mathcal{F})$ snopa $\mathcal{F}$. Da je funktor Γ egzaktan račun bi se mnogo pojednostavio, no budući da je samo lijevo egzaktan zadaća homološke algebre je naći rješenje za taj problem neegzaktnosti.

Jednostavan i često vrlo koristan način dokazivanja lijeve i desne egzaktnosti je uspostavljanje adjunkcije.

6.2.5. Teorem. (**Adjunkcije i egzaktnost**) Neka su $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ adjunkirani par aditivnih funktora među abelovim kategorijama, tj. neka je dan prirodan izomorfizam

$$\tau\colon \hom_{\mathcal{B}}(L(A), B) \xrightarrow{\equiv} \hom_{\mathcal{A}}(A, R(B)).$$

Tada je L desno egzaktan, a R lijevo egzaktan.

Dokaz. Neka je $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ egzaktan niz u $\mathcal{B}$. Zbog prirodnosti izomorfizma τ egzaktnost niza

$$0 \to \hom_{\mathcal{B}}(L(A), B') \to \hom_{\mathcal{B}}(L(A), B) \to \hom_{\mathcal{B}}(L(A), B'')$$

povlači egzaktnost niza

$$0 \to \hom_{\mathcal{A}}(A, R(B')) \to \hom_{\mathcal{A}}(A, R(B'')) \to \hom_{\mathcal{A}}(A, R(B''))$$

za sve A u $\mathcal{A}$. Prema Yonedinoj lemi 2.8.8 niz

$$0 \to R(B') \to R(B) \to R(B'')$$

mora biti egzaktan, što pokazuje da je R lijevo egzaktan. Analogno se pokazuje da je L desno egzaktan. ■

6.2.6. Primjer. Neka je $\mathcal{A}$ abelova kategorija te Y objekt u $\mathcal{A}$. Funktori

$$\mathcal{A} \to \mathbf{Ab} \colon X \mapsto \hom_{\mathcal{A}}(Y, X),$$

$$\mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Ab} \colon X \mapsto \hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

su lijevo egzaktni.

6.2.7. Primjer. Neka je R prsten, te **Mod**-R kategorija desnih R-modula te neka je Y lijevi R-modul. Tada je funktor

$$\mathbf{Mod} - R \to \mathbf{Ab} \colon X \mapsto X \otimes_R Y$$

desno egzaktan.

6.2.8. Primjer. Snopifikacija je desno egzaktan funktor, direct image i inverse image functors...

6.3 Projektivni i injektivni objekti

6.3.1. Definicija. Objekt Y u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$ je **projektivan** (odn. **injektivan**) ako i samo ako je funktor $X \mapsto \hom_{\mathcal{A}}(Y, X)$ (odn. funktor $X \mapsto \hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$) egzaktan.

6.3.2. Definicija. Kažemo da je desni R-modul **plosnat** ako je funktor $X \mapsto Y \otimes_R X$ iz primjera 6.2.7 egzaktan.

Ove definicije su generalizacija definicija projektivnih i injektivnih R-modula (koji su, dakle, projektivni i injektivni objekti u kategoriji R-modula). Kao što se dokazuje za module (vidi npr. [15] u proizvoljnoj abelovoj kategoriji imamo karakterizaciju projektivnih i injektivnih modula.

Promotrimo u abelovoj kategoriji dvije vrste dijagrama:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl] \arrow[d] & \\ X \arrow[r] & X'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y & \\ X \arrow[ur] & X'' \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Lijevi dijagram ćemo zvati **dijagram projektivnosti**, a desni **dijagram injektivnosti**.

6.3.3. Propozicija. Objekt Y u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$ je projektivan ako i samo ako za svaki epimorfizam $X \to X''$ i za svaki morfizam $Y \to X''$ postoji morfizam $Y \to X$ takav da je pripadni dijagram projektivnosti komutativan.

Dualizirajući čitavu propoziciju dolazimo do analogne karakterizacije injektivnog objetka u abelovoj kategoriji.

6.3.4. Napomena. Za kompleks $P^\bullet$ u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$ kažemo da je **kompleks projektivnih objekata** ako je P^n projektivan objekt u $\mathcal{A}$. $P^\bullet$ **ne mora biti projektivan objekt** u kategoriji $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ kompleksa u $\mathcal{A}$. Zapravo $P^\bullet$ je projektivan u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ ako i samo ako je rascjepivo egzaktan niz projektivnih objekata u $\mathcal{A}$.

6.4 Rezolvente

6.4.1. Lema/Definicija. a. Neka su $K^\bullet$ i $L^\bullet$ kompleksi u $\mathcal{A}$ i neka je $k = (k^i), k^i \colon K^i \to L^{i-1}$ niz morfizama u $\mathcal{A}$. Tada preslikavanja

$$h = kd + dk \colon K^\bullet \to L^\bullet,$$

to jest

$$h^i = k^{i+1}d^i_K + d^{i-1}_L k^i \colon K^i \to L^i$$

čine morfizam kompleksa. Za morfizam $h \colon K^\bullet \to L^\bullet$ kažemo da je **homotopan** nuli (i pišemo $h \sim 0$).
b. Morfizmi homotopni nuli čine ideal u Mor $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ u sljedećem smislu: ako su $h_1, h_2 \colon K^\bullet \to L^\bullet$ i $h_1, h_2 \sim 0$ onda je $h_1 + h_2 \sim 0$, te je $fh_1 \sim 0$ i $h_2 g \sim 0$ kad god te kompozicije postoje.
c. Ako je $f \sim g$ onda je $H^\bullet(f) = H^\bullet(g)$ pri čemu je $H^\bullet(f)$ definirano kao u 5.1.6.

Dokaz. a. Formalno imamo $dh = dkd = hd$ jer je $d^2 = 0$. Precizan dokaz dobivamo staljanjem odgovarajućih indeksa.
b. Neka je $h_1 = dk_1 + k_1 d, h_2 = dk_2 + k_2 d$. Tada je $h_1 + h_2 = d(k_1 + k_2) + (k_1 + k_2)d$. Slično $fh_1 = d(fk_1) + (fk_1)d, h2g = d(k_2 g) + (k_2 g)d$ jer f i g komutiraju s d
c. Dovoljno je provjeriti da ako je $h \colon K^\bullet \to L^\bullet$ homotopno 0, onda je $H^\bullet(h) = 0$. Neka je $k = (k_i)$ pripadna homotopija, $a \in H^i(K^\bullet)$ i a' kociklus koji reprezentira klasu a. Tada se $H^i(h)a \in H^i(L^\bullet)$ može reprezentirat kociklusom

$$h^i a' = k^{i+1}d^i_K a' + d^{i-1}_L k^i a' = d^{i-1}_L(k^i a')$$

jer je a' kociklus. Dakle, $H^i(h)a = 0$. ■

6.4.2. Definicija. Neka je X objekt u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$. **Lijeva rezolventa** od X je kompleks objekata $P^\bullet$ u $\mathcal{A}$ takvih da je $P_i = 0$ za $i < 0$ zajedno s morfizmom $\varepsilon : P_0 \to X$ takvih da je uvećan kompleks

$$\cdots \xrightarrow{d} P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \to 0$$

egzaktan. **Projektivna rezolventa** je lijeva rezolventa $P^\bullet$ pri čemu su svi objekti P_i projektivni. Analogno se definiraju pojmovi **desne** i **injektivne rezolvente**. Lijeve rezolvente su odozdo omeđeni lančani kompleksi, a desne rezolvente su odozdo omeđeni kolančani kompleksi.

6.4.3. Definicija. Kažemo da abelova kategorija $\mathcal{A}$ **ima dovoljno projektivnih objekata** ako za svaki objekt A u $\mathcal{A}$ postoji epimorfizam $P \to A$ za neki projektivni objekt P. Analogno, kažemo da abelova kategorija $\mathcal{A}$ **ima dovoljno injektivnih objekata** ako za svaki objekt A u $\mathcal{A}$ postoji monomorfizam $A \to I$ za neki injektivni objekt I.

6.4.4. Lema. Ako abelova kategorija $\mathcal{A}$ ima dovoljno projektivnih objekata onda svaki objekt X u $\mathcal{A}$ ima projektivnu rezolventu.

Dokaz. Odaberimo neki projektivni objekt P_0 i epimorfizam $\varepsilon_0 : P_0 \to M$ te stavimo $M_0 = Ker(\varepsilon_0)$. Induktivno, za dani objekt M_{n-1} odaberimo projektivni objekt P_n i epimorfizam $\varepsilon_n : P_n \to M_{n-1}$ te stavimo da je $M_n = Ker(\varepsilon_n)$, a d_n kompozicija $P_n \to M_{n-1} \to P_{n-1}$. Budući da je $d_n(P_n) = M_{n-1} = Ker(d_{n-1})$, lančani kompleks $P_\bullet$ je rezolventa od M. ■

6.4.5. Teorem. Neka su X, Y objekti u $\mathcal{A}$, $P^\bullet \stackrel{\varepsilon_X}{\to} X, Q^\bullet \stackrel{\varepsilon_Y}{\to} Y$ projektivne rezolvente od X i Y, a $f \colon X \to Y$ morfizam. Tada postoji morfizam rezolventi $R(f) \colon P^\bullet \to Q^\bullet$ koji proširuje f u smislu da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "R(f)^0"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Q_0 \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y. \end{tikzcd}$$

Svake dva takva proširenja $R(f)$ i $R'(f)$ su homotopska.

Skica dokaza. Egzistencija i jedinstvenost morfizama $R(f)^n$ dokazuje se indukcijom po n. Jedinstveno preslikavanje $R(f)^0$ (baza indukcije) dobivamo iz dijagrama projektivnosti

$$\begin{tikzcd} & P^0 \arrow[dl, "R(f)^0"] \arrow[d, "f\varepsilon_X"] & \\ Q^0 \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Korak provodimo na sličan način, ali zaključivanje moramo provoditi na generalnijem dijagramu

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"] & \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \end{tikzcd} .$$

Ako je donji red egzaktan, objekt P je projektivan te je $\beta \circ \gamma = 0$ onda postoji jedinstveni morfizam $\delta : P \to Q$ takav da dijegram komutira. Homotopnost se također dokazuje indukcijom koristeći razmatrajući ovakve dijagrame.

6.4.6. Napomena. Prema prethodnom teoremu za $X = Y$ i $f = \mathrm{id}_X$ za svake dvije rezolvente istog objekta postoji morfizam između njih koji proširuje identitetu te je taj morfizam jedinstven do na homotopiju. Dakle, projektivna rezolventa je jedinstvena do na homotopiju.

6.5 Klasični derivirani funktori

Kako bismo pojednostavili notaciju za kompleks $P^\bullet$ pisat ćemo samo P.

6.5.1. Definicija. Homološki δ-funktor između abelovih kategorija $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je niz aditivnih funktora $(T_n\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B})_{n\geq 0}$ s morfizmima

$$\delta_n\colon T_n(C) \to T_{n-1}(A)$$

definiranim za svaki kratak egzaktni niz $0 \to A \to B \to C \to 0$ u $\mathcal{A}$. Ovdje podrazumijevamo $T_n = 0$ za $n < 0$. Pri tom zahtjevamo da vrijedi:
1. Za svaki kratak egzaktan niz $0 \to A \to B \to C \to 0$ postoji dugi egzaktan niz

$$\cdots \to T_{n+1}(C) \xrightarrow{\delta} T_n(A) \to T_n(B) \to T_n(C) \xrightarrow{\delta} T_{n-1}(A) \to \cdots .$$

2. Za svaki morfizam kratkih egzaktnih nizova $0 \to A \to B \to C \to 0$ i $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd} T_n(C') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & T_{n-1}(A') \arrow[d] \\ T_n(C) \arrow[r, "\delta"] & T_{n-1}(A). \end{tikzcd}$$

6.5.2. Primjer. Naravno, osnovni primjer je homologija $H_\bullet$ iz kategorije $\mathbf{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ u kategoriju $\mathcal{A}$.

6.5.3. Napomena. Analogno se definira **kohomološki δ-funktor** po uzoru na kohomologiju.

6.5.4. Definicija. Morfizam $S \to T$ δ-funktora je sustav prirodnih transformacija $S_n \to T_n$ koje komutiraju s δ. Za homološki δ-funktor T kažemo da je **univerzalan** ako, za bilo koji drugi δ-funktor S i prirodnu transformaciju $f_0\colon S_0 \to T_0$, postoji jedinstveni morfizam $\{f_n\colon S_n \to T_n\}$ δ-funktora koji proširuje f_0.

6.5.5. Primjer. Homologija $H_\bullet : \mathbf{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je univerzalan δ-funktor (v. [40]).

6.5.6. Konstrukcija klasičnog lijevog deriviranog funktora. Neka je $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ desno egzaktan funktor abelovih kategorija. Ako $\mathcal{A}$ ima dovoljno projektivnih objekata onda konstruiramo **lijevi derivirani funktor** $L_iF (i \geq 0)$ na sljedeći način. Neka je A objekt u $\mathcal{A}$ i $P \to A$ projektivna rezolventa, definiramo

$$L_iF(A) = H_i(F(P)).$$

Primjetimo da je $F(P_1) \to F(P_0) \to F(A) \to 0$ egzaktan niz, pa je $L_0F(A) \equiv F(A)$. Nadalje, objekti $L_iF(A)$ su dobro definirani do na prirodni izomorfizam. Točnije, ako je $Q \to A$ neka druga projektivna rezolventa onda postoji kanonski izomorfizam

$$L_iF(A) = H_i(F(P)) \xrightarrow{\cong} H_i(F(Q)).$$

Nadalje, ako je $f : A' \to A$ morfizam u $\mathcal{A}$ onda postoji prirodni morfizam $L_iF(f)\colon L_iF(A') \to L_iF(A)$ za svako $i \geq 0$. Dokazi svih ovih tvrdnji su jednostavni, a provode se korištenjem teorema 6.4.5.

6.5.7. Teorem. Za svako $i \geq 0$ L_iF je aditivni funktor iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.

Dokaz. Identiteta na P podiže identitetu na A, pa je $L_iF(\mathrm{id}_A)$ identiteta. Za dane morfizme $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ i preslikavanja kompleksa $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ koja podižu f i g kompozicija $\widetilde{g}\widetilde{f}$ podiže gf. Zato je $g_*f_* = (gf)_*$, pa je L_iF funktor. Ako su $f_1, f_2\colon A' \to A$ dva morfizma čija su podizanja $\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}$, onda je suma $\widetilde{f_1} + \widetilde{f_2}$ podizanje od $f_1 + f_2$. Dakle, $(f_1 + f_2)_* = f_{1*} + f_{2*}$, što pokazuje da je L_iF aditivan. ■

U [40] se nadalje dokazuju sljedeći teoremi.

6.5.8. Teorem. Derivirani funktor $L_\bullet F$ je homološki δ-funktor.

6.5.9. Teorem. Neka je $\mathcal{A}$ abelova kategorija koja ima dovoljno projektivnih objekata. Tada za svaki desno egzaktni funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ derivirani funktori L_nF čine univerzalan δ-funktor.

6.5.10. Napomena. Analogno se za lijevo egzaktni funktor abelovih kategorija $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definira **desni derivirani funktor** $R_iF, i \geq 0$. Za objekt A i injektivnu rezolventu $A \to I$ definiramo

$$R^iF(A) = H^i(F(I)).$$

6.5.11. Napomena. Derivirane funktore možemo definirati i za kontravijarantan funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kao pripadne derivirane funktore (kovarijantnog) funktora $F^{op} : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$.

6.5.12. Primjer. (**Ext funktori**) Neka je A objekt u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$. Funktor

$$\mathcal{A} \to \mathbf{Ab}\colon B \mapsto \hom_{\mathcal{A}}(A, B),$$

je lijevo egzaktan. Ako $\mathcal{A}$ ima dovoljno injektivnih objekata imamo desne derivirane funktore koje nazivamo *Ext* grupe:

$$Ext^i(A, B) := R^i\hom(A, -)(B).$$

Posebno je $Ext^0(A, B) = \hom(A, B)$.

Problem ekstenzija i Ext^1. Neka su A, B objekti u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$ i neka je $E(A, B)$ skup klasa ekvivalencija egzaktnih nizova oblika:

$$E : 0 \to B \to C \to A \to 0$$

pri čemu je relacija ekvivalencije (lako se provjerava!) zadana tako da je $E \sim E'$ ako i samo ako postoji komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
E: & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 . \\
E': & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & C' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Uočimo da je prema 5-lemi α izomorfizam.

Za $\varphi : B \to B'$ i $E \in E(A, B)$ definirajmo φE kao klasu reprezentiranu egzaktnim nizom

$$E : 0 \to B' \to C' \to A \to 0$$

gdje je C' pushout od B' i C nad B, tj. $C' = B' \coprod_B C$. Lagano se pokazuje da je φE dobro definirano te da je na taj način dano djelovanje $\hom(B, B')$ na $E(A, B)$. Slično definiramo djelovanje $\hom(A', A)$ na $E(A, B)$

$$(E, \psi) \mapsto E\psi$$

te vrijedi $(\varphi E)\psi = \varphi(E\psi)$.

Neka su $E \in E(A, B), E' \in E(A', B')$. Definirajmo $E \oplus E' \in E(A \oplus A', B \oplus B')$ kao klasu niza

$$0 \to B \oplus B' \to C \oplus C' \to A \oplus A' \to 0.$$

Neka su $\Delta_A \colon A \to A \oplus A$ i $\nabla_B \colon B \oplus B \to B$ prirodni dijagonalni i kodijagonalni morfizmi. Definiramo binarnu operaciju na $E(A, B)$ koju zovemo **Baerova suma** sa

$$(E, E') \mapsto \nabla_B(E \oplus E')\Delta_A.$$

Obzirom na Baerovu sumu $E(A, B)$ je abelova grupa u kojoj je

$$0 \to B \to A \oplus B \to A \to 0$$

neutralni element.

Pokazuje se da je $E(A, B)$ izomorfno sa $Ext^1(A, B)$.

6.5.13. Primjer. (**Tor funktori**) Neka je R prsten s jedinicom te neka je B lijevi R-modul. Tada je funktor

$$\mathbf{Mod} - R \to \mathbf{Ab} \colon A \mapsto A \otimes_R B$$

desno egzaktan. Definiramo abelove grupe

$$Tor_n^R(A, B) = (L_n T)(A).$$

Posebno je $Tor_0^R(A,B) \equiv A \otimes_R B$.

Ovaj funktor nazivamo Tor jer za abelove grupe Tor grupe postaju torzione grupe. Za abelovu grupu B je tako $Tor_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B) = B/pB$, $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B) =_p B = \{b \in B | pB = 0\}$ te $Tor_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B) = 0$ za $n \geq 2$. Zaista, promotrimo li rezolventu

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p \to 0$$

$Tor_n(\mathbb{Z}/p, B)$ dobivamo kao grupe homologije kompleksa

$$0 \to B \xrightarrow{p} B \to 0.$$

Poglavlje 7

Kategorije (ko)lančanih kompleksa

7.1 Kategorija (ko)lančanih kompleksa

U 5.1 smo uveli (ko)lančane komplekse R-modula, a u 6.2 (ko)lančane komplekse u proizvoljnoj abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$. Uveli smo i morfizme među njime, te dobili kategoriju $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. Kategoriju $\mathbf{Ch}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ označavat ćemo s $\mathbf{Ch}$. Podsjetimo se - kažemo da je kompleks $C^\bullet$ u abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$ **ograničen odozgo** (odn. **odozdo**) ako postoji $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $C^n = 0$ za sve $n > m$ (odn. $n < m$). Kažemo da je kompleks **ograničen** ako je ograničen odozdo i ograničen odozgo. Pune potkategorije ograničenih, ograničenih odozdo, ograničenih odozgo kompleksa u $\mathcal{A}$ označavamo sa $\mathbf{Ch}^b(\mathcal{A}), \mathbf{Ch}^+(\mathcal{A}), \mathbf{Ch}^-(\mathcal{A})$.

7.2 Homotopska kategorija $\mathcal{K}$

Neka je $\mathcal{A}$ abelova kategorija. U prošlom poglavlju smo dokazali sljedeću lemu kroz koju smo definirali homotopiju kompleksa.

7.2.1. Lema/Definicija. a. Neka su $K^\bullet$ i $L^\bullet$ kompleksi u $\mathcal{A}$ i neka je $k = (k^i), k^i \colon K^i \to L^{i-1}$ niz morfizama u $\mathcal{A}$. Tada preslikavanja

$$h = kd + dk \colon K^\bullet \to L^\bullet,$$

to jest

$$h^i = k^{i+1}d^i_K + d^{i-1}_L k^i \colon K^i \to L^i$$

čine morfizam kompleksa. Za morfizam $h \colon K^\bullet \to L^\bullet$ kažemo da je **homotopan** nuli (i pišemo $h \sim 0$).

b. Morfizmi homotopni nuli čine ideal u Mor $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ u sljedećem smislu: ako su $h_1, h_2 \colon K^\bullet \to L^\bullet$ i $h_1, h_2 \sim 0$ onda je $h_1 + h_2 \sim 0$, te je $fh_1 \sim 0$ i $h_2 g \sim 0$ kad god te kompozicije postoje.

c. Kažemo da su f, g **homotopni** ako je $f - g \sim 0$. Tada je $H^\bullet(f) = H^\bullet(g)$ pri čemu je $H^\bullet(f)$ definirano kao u 5.1.6.

7.2.2. Definicija. Kažemo da je morfizam $f \colon K^\bullet \to L^\bullet$ **kvazi-izomorfizam** ako je inducirani morfizam $H^n(f) \colon H^n(K^\bullet) \to H^n(L^\bullet)$ izomorfizam za svaki n.

7.2.3. Definicija. Za abelovu kategoriju $\mathcal{A}$ definiramo **homotopsku kategoriju** $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ kao kategoriju čiji su objekti objekti od $\mathcal{A}$, a morfizmi klase homotopske ekvivalencije morfizama od $\mathcal{A}$. Pune potkategorije ograničenih, ograničenih odozdo, ograničenih odozgo kompleksa u homotopskoj kategoriji $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ označavamo sa $\mathcal{K}^b(\mathcal{A}), \mathcal{K}^+(\mathcal{A}), \mathcal{K}^-(\mathcal{A})$.

7.3 Lokalizacija kategorija

Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna kategorija, a Σ proizvoljna klasa morfizama u $\mathcal{B}$. Pokazat ćemo da postoji univerzalni funktor koji pretvara elemente od Σ u izomorfizme. Točnije, konstruirat ćemo kategoriju $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ i funktor $Q\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ s univerzalnim svojstvom da za svaki drugi funktor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ takav da je $F(s)$ izomorfizam u $\mathcal{C}$ za svako $s \in \Sigma$ postoji jedinstven funktor $G\colon \mathcal{B}[\Sigma^{-1}] \to \mathcal{C}$ takav da je $F = G \circ Q$.

7.3.1. Definicija. Takav funktor nazivamo **lokalizacija po** Σ, a kategoriju $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ (u drugoj oznaci $\Sigma^{-1}\mathcal{B}$) **lokalizirana kategorija** od $\mathcal{B}$ po Σ.

7.3.2. Konstrukcija lokalizirane kategorije. Uvedimo prvo pojam **abstraktnog 1-dijagrama** (kratko dijagrama). Dijagram $\mathcal{E}$ je struktura koja se sastoji od klase objekata $\mathrm{Ob}\,\mathcal{E}$ i klase morfizama $\mathrm{Mor}\,\mathcal{E}$ s preslikavanjima $\mathrm{S},\mathrm{T} : \mathrm{Mor}\,\mathcal{E} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}$ koje nazivamo *source* i *target*. Primjetimo da za razliku od kategorije ovdje ne tražimo postojanje kompozicije i identiteta na objektu.

Za cijeli broj $n > 0$ definiramo **put** duljine n od A do B u dijagramu $\mathcal{E}$ kao uređeni skup $(A, f_1, f_2, ..., f_n, B)$ gdje su A i B objekti, a f_i morfizmi u $\mathcal{E}$ takvi da je $\mathrm{S}(f_{i+1}) = \mathrm{T}(f_i)$ te da je $\mathrm{S}(f_1) = A, \mathrm{T}(f_n) = B$. Za $n = 0$ definiramo put duljine 0 kao uređen par (A, A).

Nadalje, **kategoriju puteva** $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ u dijagramu $\mathcal{E}$ čine objekti i putevi u $\mathcal{E}$. Pritom definiramo da je

$$\mathrm{id}_A = (A, A), \mathrm{S}(A, f_1, ..., f_n, B) = A, \mathrm{T}(A, f_1, ..., f_n, B) = B,$$

$$(B, g_1, ..., g_m, C) \circ (A, f_1, ..., f_n, B) = (A, f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m, C).$$

Ako je klasa svih puteva od A do B skup za sve objekte A, B onda je kategorija puteva zaista kategorija u smislu definicije 2.2.1.

Neka je dana kategorija $\mathcal{B}$ i Σ proizvoljna klasa morfizama u $\mathcal{B}$. Neka je $S = \{f_s : s \in \Sigma\}$ bilo koja klasa disjunktna s $\mathrm{Mor}\,\mathcal{B}$ te neka je $\mathcal{E}$ dijagram čiji objekti su točno objekti od $\mathcal{B}$, a morfizmi $\mathrm{Mor}\,\mathcal{E} = \mathrm{Mor}\,\mathcal{B} \cup S$. Preslikavanja S,T definiramo na morfizmima od $\mathcal{B}$ tako da svakom morfizmu S pridruži njegovu domenu, a T njegovu kodomenu. Za svako $f_s \in S$ neka je $\mathrm{S}(f_s) = \mathrm{T}(s), \mathrm{T}(f_s) = \mathrm{S}(s)$ gdje je $s \in \Sigma \subset \mathrm{Mor}\,\mathcal{B}$.

Na morfizmima u $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ zadajmo relaciju $\sim$ kao najmanju relaciju ekvivalencije takvu da je

$$(A, f_1, ..., f_n, B) \sim (A, g_1, ..., g_{n-1}, B)$$

ako postoji $i \in \{1, 2, ..., n\}$ takav da je
$g_j = f_j$ za $j < i$,
$g_j = f_{j+1}$ za $j > i$,

$$g_i = \begin{cases} f_i \circ f_{i+1}, & f_i, f_i \in \operatorname{Mor} \mathcal{E}. \\ id_{s(f_i)}, \quad f_i = f_s \in S, s \in \Sigma, f_{i+1} = s \text{ ili } f_{i+1} = f_s \in S, s \in \Sigma, f_i = s. \end{cases}$$

Lako se provjerava da gore definiran $\circ$ inducira kompoziciju na klasama ekvivalencije relacije $\sim$. Time od kategorije $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ dobivamo kategoriju koju označimo s $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$. Definiramo li $Q\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ na objektima od $\mathcal{B}$ identički, a tako da morfizam $f\colon A \to B$ u $\mathcal{B}$ šalje u klasu reprezentiranu s (A, f, B) dobivamo funktor te $Q(s)$ zaista izomorfizam u $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ za svako $s \in \Sigma$. Pokažimo da Q zaista ima univerzalno svojstvo s početka ove točke. Neka je funktor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ takav da je $F(s)$ izomorfizam u $\mathcal{C}$ za svako $s \in \Sigma$. Definirajmo $G\colon \mathcal{B}[\Sigma^{-1}] \to \mathcal{C}$ sa

$$G(A) = F(A), \text{ za } A \in \operatorname{Ob} \mathcal{B} = \operatorname{Ob} \mathcal{B}[\Sigma^{-1}],$$
$$G(f) = F(f), f \in \operatorname{Mor} \mathcal{B},$$
$$G([f_s]) = F(s^{-1}), s \in S.$$

Sada se lako provjerava da je G dobro definirano i da je $F = G \circ Q$. Time je konstrukcija lokalizirane kategorije završena.

U primjenama je vrlo važno možemo li na kakav jednostavan način baratiti morfizmima kategorije razlomaka. Pokazuje se da u slučaju da klasa Σ zadovoljava neke uvjete možemo za morfizme nalaziti "zajednički nazivnik" što nam omogućava dodatnu strukturu (npr. aditivnu).

7.3.3. Definicija. Za klasu $\Sigma \subset \operatorname{Mor} \mathcal{B}$ kažemo da je **(lijevo) lokalizirajuća** ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:
1) **multiplikativnost** $\mathrm{id}_A \in \Sigma$ za svako $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{B}$ i $f \circ g \in \Sigma$ za svake $f, g \in \Sigma$ za koje je kompozicija definirana.
2) **lijevi Oreov uvjet** za svake $f \in \operatorname{Mor} \mathcal{B}, s \in \Sigma$ postoje $g \in \operatorname{Mor} \mathcal{B}, t \in \Sigma$ takvi da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & C \arrow[d, "s"] \\ A \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

3) **lijeva reverzibilnost** za svake $f, g \in \hom(A, B)$ i za svako $s \in \Sigma$ takve da je $sf = sg$ postoji $t \in \Sigma$ takav da je $ft = gt$.

7.3.4. Napomena. Ova definicija će nam omogućiti konstrukcije 's lijeve strane' i to će biti sasvim dovoljno. Općenito se može definirati desni Oreov uvjet dualizirajući lijevi, te se desna reverzibilnost definira analogno lijevoj.

7.3.5. Teorem. Kategorija razlomaka. Neka je Σ lokalizirajuća klasa morfizama u kategoriji $\mathcal{B}$. Tada se morfizmi u $\mathcal{B}[\Sigma^{-1}]$ mogu opisati kao klase "krovova", tj. morfizam

$A \to B$ je klasa dijagrama (s, f) u $\mathcal{B}$ oblika

$$\begin{tikzcd}
& A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

za neke $s \in \Sigma, f \in \operatorname{Mor} \mathcal{B}$ pri čemu je $(s, f) \sim (t, g)$ ako i samo ako postoji treći krov (r, h) koji tvori komutativni dijagram oblika

$$\begin{tikzcd}
& & A''' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f"', near start] & & A'' \arrow[dlll, "t", near start] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & & & B
\end{tikzcd} .$$

Identita $\mathrm{id}\colon A \to A$ je klasa pridružena krovu (id_A, id_A).

Kompozicija morfizama reprezentiranima krovovima (s, f) i (t, g) je klasa krova $(st', gf')4$ dobivenog lijevim Oreovim uvjetom:

$$\begin{tikzcd}
& & A'' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "f'"] & & \\
& A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & B' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd} .$$

7.3.6. Napomena. Ove krovove mogli bismo zvati lijevim krovovima. U skladu s napomenom prije ove propozicije postoje desni krovovi, no kao što smo rekli oni nam neće biti potrebni.

Dokaz. Dokaz ovog teorema je poprilično dugačak jer se mora provjeriti mnogo činjenica. Sve osim da je kompozicija dobro definirana dokazano je u [12], pa ćemo ovdje samo dokazati ono što nedostaje.

Kako bismo pojednostavili notaciju te olakšali čitatelju "crtanje dokaza" označimo s (A, s, A', f, B) krov

$$\begin{tikzcd}
& A' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & B.
\end{tikzcd}$$

Neka je $(A, s, E, f, B) \sim (A, s', E', f', B)$ i $(B, t, F, g, C) \sim (B, t', F', g', C)$ te neka je $(E, s", E", f", E')$ krov koji definira ekvivalenciju $(s, f) \sim (s', f')$, a $(F, t", F", g", F')$ krov koji definira ekvivalenciju $(t, g) \sim (t', g')$. Neka je (E, r, D, h, F) takav krov da je (A, sr, D, gh, C) krov koji reprezentira kompoziciju $[(t,g)\circ(s,f)]$, a (E',r',D',h',F') takav krov da je $(A,s'r',D',g'h',C)$ krov koji reprezentira kompoziciju $(t','g)\circ(s',f')$. Želimo pokazati da je $(E,r,D,h,F)\sim(E',r',D',h',F')$.

Neka su krovovi (D,t''',F''',g''',F'') i E'',s''',E''',f''',D' dobiveni lijevim Oreovim uvjetom nad F i E', tj. takvi da je

$$h\circ t'''=t''\circ g''',\, f''\circ s'''=r'\circ f'''.$$

Neka je (F''',p,G,k,E''') krov dobiven lijevim Oreovim uvjetom nad E

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"'] & E''' \arrow[d, "s''\circ s'''"] \\
F''' \arrow[r, "r\circ t'''"] & E.
\end{tikzcd}$$

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned}
t'(g''g'''p) &= tt''g'''p=tht'''p=frt'''p=fs''s'''k= \\
&= f'f''s'''k=f'r'f''k=t'(h'f'''k)
\end{aligned}$$

zbog lijeve reverzibilnosti postoji $q:H\to G$ takav da je

$$(g''g'''p)q=(h'f'''k)q.$$

Tvrdimo da krov $(D,t'''pq,H,f'''kq,D')$ definira $(E,r,D,h,F)\sim(E',r',D',h',F')$. Zaista zbog

$$srt''pg=ss''s'''kq=s'f''s'''kq=s'r'f'''kq,$$

$$ght'''pq=gt''g'''pq=g'g''g'''pq=h'f''kq$$

imamo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & & H \arrow[dl, "t'''pq"'] \arrow[dr, "f'''kq"] & & \\
 & D \arrow[dl, "sr"'] \arrow[drrr, "gh"' near start] & & D' \arrow[dlll, "s'r'" near start] \arrow[dr, "g'h'"] & \\
A & & & & C
\end{tikzcd}.$$

■

Za konstrukciju deriviranih funktora vrlo važna će nam biti sljedeća propozicija.

7.3.7. Propozicija. Neka je $\mathcal{C}$ kategorija, Σ lokalizirajuća klasa morfizama u $\mathcal{C}$, a $\mathcal{B}\subset\mathcal{C}$ puna potkategorija te neka vrijede sljedeći uvjeti:
1. $\Sigma_B=\Sigma\cap\operatorname{Mor}\mathcal{B}$ je lokalizirajuća klasa u $\mathcal{B}$.
2. Za svako $s\colon A\to A'$, $s\in\Sigma$, $A\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}$ postoji $f\colon A''\to A'$ takvo da je $sf\in\Sigma$, $A''\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}$.
Tada je $\mathcal{B}[\Sigma_{\mathcal{B}}^{-1}]$ puna potkategorija od $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$. Točnije, kanonski funktor $\mathcal{B}[\Sigma_{\mathcal{B}}^{-1}]\to\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ je pun i vjeran.

7.4 Derivirane kategorije

7.4.1. Definicija. Neka je $\mathcal{A}$ abelova kategorija. **Derivirana kategorija** $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ je kategorija razlomaka kategorije $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ po kvazi-izomorfizmima. Funktor lokalizacije ćemo i dalje označavati s Q.

Nažalost klasa svih kvazi-izomorfizama u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ ne mora biti lokalizirajuća, pa bi baratanje s morfizmima u deriviranoj kategoriji direktno po definiciji bilo vrlo komplicirano. No, problem se može elegantno riješiti krenemo li od homotopske kategorije. Budući da je homotopska kategorija aditivna te su funktori H^i dobro definirani, kvazi-izomorfizmi se u homotopskoj kategoriji $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ definiraju na isti način kao u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. Ključ je u činjenici da je klasa kvazi-izomorfizama u $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ lokalizirajuća te da se lokalizacijom $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ dobiva također derivirana kategorija $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Za dokaz te tvrdnje bit će nam potrebna prvo jedna lema.

7.4.2. Lema. Neka su $f, g\colon K^\bullet \to L^\bullet$ homotopna. Tada je $Q(f) = Q(g)$ u $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Dokaz. Neka je $f = g + dh + hd$. Definirajmo $c(h) : C(f) \to C(g)$ s

$$C(h)(k^{i+1}, l^i) = (k^{i+1}, l^i + h(k^{i+1})).$$

Lagano se provjerava da $c(h)$ komutira s diferencijalima, pa zaista dobivamo morfizam kompleksa.

Definirajmo $cyl(h) : Cyl(f) \to Cyl(g)$ s

$$cyl(h)(k^i, k^{i+1}, l^i) = (k^i, k^{i+1}, l^i + h(k^{i+1})).$$

Promotrimo dijagram konstruiran od prvih redova dijagrama iz leme 5.2.4 (koja se potpuno analogno dokazuje u bilo kojoj abelovoj kategoriji) za f i g:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, equal] & C(f) \arrow[r, "\delta(f)"] \arrow[d, "c(h)"] & K'[1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\overline{\pi}"] & C(g) \arrow[r, "\delta(g)"] & K'[1] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dijagram je komutativan. Primjenimo li 5-lemu na pripadni ekzagtni kohomološki niz

$$\begin{tikzcd}
H^{i-1}(K[1]') \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(L') \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(C(f)) \arrow[r] \arrow[d, "H^i(c(h))"] & H^i(K'[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{i+1}(L') \arrow[d, equal] \\
H^{i-1}(K[1]') \arrow[r] & H^i(L') \arrow[r] & H^i(C(g)) \arrow[r] & H^i(K'[1]) \arrow[r] & H^{i+1}(L')
\end{tikzcd}$$

vidimo da je $c(h)$ kvazi-izomorfizam. Promotrimo li srednje redove dijagrama iz leme 5.2.4 vidimo da je $cyl(h)$ kvazi-izomorfizam. Da bismo dovršili dokaz promotrimo sljedeći dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & L' \arrow[d, "\alpha_f"] \\
K' \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, equal] & Cyl(f) \arrow[d, "cyl(h)"] \\
K' \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[dr, "g"'] & Cyl(g) \arrow[d, "\beta_g"] \\
 & L'.
\end{tikzcd}$$

Gornji trokut ne komutira u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ dok kvadrat i donji trokut komutiraju. U $D(\mathcal{A})$ i gornji trokut postaje komutativan jer su prema lemi 5.2.4 $Q(\alpha_f)$ i $Q(\beta_f)$ su međusobno inverzni, pa $f = \beta_f \circ \overline{f}$ povlači $Q(f) = Q(\beta_f) \circ Q(f)$ i $Q(\overline{f}) = Q(\alpha_f) \circ Q(f)$. Konačno, direktno se vidi da je $\beta_g \circ cyl(h) \circ \alpha_f = \mathrm{id}_{L'}$, pa je $Q(f) = Q(g)$. ■

7.4.3. Propozicija. Lokalizacija od $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ po kvazi-izomorfizmima je kanonski izomorfna deriviranoj kategoriji $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Isto vrijedi za $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ i $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ gdje je $* = +, -, b$.

Dokaz. Neka je $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ lokalizacija od $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ po kvazi-izomorfizmima. Kompozicija funktora

$$\mathbf{Ch}(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \widetilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$$

preslikava kvazi-izomorfizme u izomorfizme. Prema univerzalnom svojstvu lokalizacije taj se funktor faktorizira kroz funktor $G\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \widetilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$. Prema konstrukciji G je bijekcija na objektima. Interpretacija morfizama u lokaliziranoj kategoriji kao klasa puteva povlači da je G surjekcija na morfizmima jer se svaki morfizam u $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ može podići do morfizma u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. Injektivnost funktora G na morfizmima slijedi iz prethodne leme. ■

7.4.4. Teorem. Klasa svih kvazi-izomorfizama u $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ za $* = \emptyset, +, -, b$ je lokalizirajuća.

7.4.5. Sada možemo deriviranoj kategoriji dati strukturu **aditivne kategorije**. Neka su $\varphi, \varphi'\colon A \to B$ morfizmi u $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ reprezentirani krovovima

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & B,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C' \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
A & & B.
\end{tikzcd}$$

Proširimo dijagram

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "r"] & C' \arrow[d, "s'"] \\
C \arrow[r, "s"] & A
\end{tikzcd}$$

do komutativnog dijagrama u $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Budući da su s, s', r kvazi-izomorfizmi, r' je također kvazi-izomorfizam. Zato se φ i φ' mogu reprezentirat krovovima oblika (pri čemu je $t = sr = s'r'$)

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "fr"] & \\ A & & B, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "f'r'"] & \\ A & & B. \end{tikzcd}$$

Sada možemo definirati sumu $\varphi + \varphi'$ u $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ kao klasu krova

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "fr+f'r'"] & \\ A & & B. \end{tikzcd}$$

Aksiomi aditivne kategorije se sada lako provjere.

7.5 Loday-Pirashvilijeva tenzorska kategorija i više LP-kategorije

Loday i Pirashvili su kategoriju linearnih preslikavanja standardno označavali s LM, a u ovom radu tu kategoriju nazivamo prema njihovih inicijalima kako bi naglasili da se radi o kategoriji s određenim tenzorskim produktom kojeg su oni uveli u [27] i [28].

U ovom poglavlju radit ćemo s vektorskim prostorima nad fiksnim poljem $\mathbf{k}$. Prisjetimo se da je kateogorija $Vect$ vektorskih prostora i linearnih preslikavanja među njima simetrična monoidalna kategoriju (s uobičajenim tenzorskim produktom i poljem $\mathbf{k}$ kao jedinicom).

7.5.1. Definicija. **LP kategorija** je kategorija čiji objekti su $\mathbf{k}$-linearna preslikavanja $f\colon V \to W$ gdje su V, W $\mathbf{k}$-vektorski prostori, čiji morfizmi su parovi linearnih preslikavanja $(\alpha_1 : V \to V', \alpha_0 : W \to W')$ takvi da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f"'] & V' \arrow[d, "f'"] \\ W \arrow[r, "\alpha_0"] & W'. \end{tikzcd}$$

Kompozicija morfizama je definirana po komponentama, tj. slaganjem komutatvnih kvadrata jednog do drugog. Definirajmo tenzorski produkt dvaju objekta u **LP** s

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f\otimes"] \\ W \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} V' \arrow[d, "f':="] \\ W' \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} V \otimes W' + W \otimes V' \arrow[d, "f\otimes 1_{W'} + 1_W \otimes f'"] \\ W \otimes W' \end{tikzcd}$$

U čitavom tekstu kad ćemo govoriti o objektima poput V (domene objekta) koristit ćemo termin "gore", a kad ćemo govoriti o W (kodomeni objekta) koristit ćemo izraz "dolje".

7.5.2. Propozicija. Uz ovako definiran tenzorski produkt **LP** je simetrična zatvorena monoidalna kategorija.

Dokaz. Simetrija je dana s $\tau\colon X \otimes Y \to Y \otimes Y$ na očit način. Aksiomi koherencije se lako provjeravaju, a činjenici da je ta kategorija zatvorena posvetit ćemo cijelu jednu točku. ∎

Ovdje bismo željeli istaknuti da se Loday-Pirashvilijeva kategorija može promatrati kao kategorija *trunkiranih lančanih kompleksa duljine* jedan. Naime, Loday-Pirashvilijeva kategorija je puna potkategorija kategorije **Ch**(**Vect**) kompleksa $C^\bullet$ za koje je $C^i = 0$ za sve $i \neq 0, 1$. Tenzorski produkt u toj potkategoriji možemo definirati kao trunkaciju tenzorskog produkta u **Ch**(**Vect**) na članove 0 i 1 (izbacili smo član $C_1 \otimes C_1$ na 2. mjestu u lancu). To je onda gotovo isti tenzorski produkt kakav su uveli Loday i Pirashivili razlika je samo u tome što se kod lančanih kompleksa u tenzorskom produktu pojavljuje predznak koji je uveden kako bi se zadržala struktura kompleksa. Budući da kod trunkiranih lanaca imamo samo jedno preslikavanje možemo zanemariti uvjet $d^2 = 0$ te u tenzorskom produktu izostaviti taj predznak.

Ovo daje ideju kako definirati više Loday-Pirashivilijeve kategorije. To su pune potkategorije kategorije **Ch**(**Vect**) trunkiranih kompleksa duljine n, tj. kompleksa $C^\bullet$ za koje je $C^i = 0$ za sve $i \notin \{0, 1, ..., n\}$.

Poglavlje 8

Strukture na kategorijama lančanih kompleksa

8.1 Abelove kategorije kolančanih kompleksa

8.1.1. Propozicija. Kategorija kolančanih kompleksa nad abelovom kategorijom ponovno je abelova kategorija.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ abelova kategorija. Radi jednostavnosti ćemo u ovom dokazu za $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ pisati $\mathbf{Ch}$. Definiramo li zbroj morfizama $f, g : B^\bullet \to C^\bullet$ po komponentama

$$(f+g)^n = f^n + g^n$$

$\mathbf{Ch}$ postaje predaditivna kategorija. Naime, budući da je $\mathcal{A}$ predaditivna sva svojstva (asocijativnost, neutralni element, suprotni element) osim dobre definiranosti slijede direktno. No, definicija je dobra jer $f+g$ očito komutira s diferencijalom.

Sada ćemo definirati kompleks $B^\bullet \oplus C^\bullet$ za koji ćemo pokazati da je biprodukt kompleksa $B^\bullet$ i $C^\bullet$. Komponentu $(B^\bullet \oplus C^\bullet)^n$ definiramo kao objekt u $\mathcal{A}$ takav da je

$$(\pi_B^n, \pi_C^n, (B^\bullet \oplus C^\bullet)^n, \mu_B^n, \mu_C^n)$$

biprodukt od B^n i C^n u $\mathcal{A}$. Prema propoziciji 2.5.10 postoji jedinstveno preslikavanje $d^n : (B^\bullet \oplus C^\bullet)^n \to (B^\bullet \oplus C^\bullet)^{n+1}$ biprodukta koje zadovoljava određeni komutativni dijagram. Jednom kad pokažemo da je tako dobiven kompleks upravo taj komutativan dijagram garantira da smo dobili preslikavanja kompleksa $\pi_B \colon B^\bullet \oplus C^\bullet \to B^\bullet, \pi_c \colon B^\bullet \oplus C^\bullet \to C^\bullet, \mu_B \colon B^\bullet \to B^\bullet \oplus C^\bullet, \mu_C \colon C^\bullet \to B^\bullet \oplus C^\bullet$ takva da je

$$(\pi_B, \pi_C, B^\bullet \oplus C^\bullet, \mu_B, \mu_C)$$

biprodukt u kategoriji $\mathbf{Ch}$. Dakle, ostalo je pokazati da je zaista dobro definiran kompleks, tj. da je $d^{n+1} \circ d^n = 0$. No, to slijedi ponovno iz spomenutih komutativnih dijagrama. Promatramo dva uzastopna takva dijagrama (kompoziciju). U proširenom dijagramu su donji i gornji morfizam jednaki $d_B^2 = d_C^2 = 0$, pa umjesto $d^{n+1} \circ d^n$ možemo staviti 0 tako da dijagram komutira. Budući da je morfizam $d^{n+1} \circ d^n$ također morfizam između biprodukata, a takav je jedinstven slijedi da je $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Dakle, kategorija **Ch** ima konačne biprodukte, pa je aditivna.

Kako bismo konstruirali jezgru u **Ch** ponovno radimo po komponentama. Neka je $f : B^\bullet \to C^\bullet$ morfizam u **Ch**. Definiramo kompleks $K^\bullet$ s $(K^n, k^n) = Ker(f^n)$. Prema propoziciji 2.5.19 postoji jedinstveno preslikavanje $d^n : Ker(f^n) \to Ker(f^{n+1}$ takvo da je $k = (k^n) : K^\bullet \to B^\bullet$ morfizam kompleksa ukoliko je $K^\bullet$ kompleks. Da je $d^2 = 0$ pokazuje se ponovno istim trikom kao i za biprodukte gledajući dva uzastopna komutativna kvadrata. Sada je lako provjeriti da je $(K^\bullet, k)$ zaista jezgra od f u **Ch** 8univerzalno svojstvo). Budući da je kojezgra dualan pojam pokazali smo da u **Ch** postoje jezgre i kojezgre.

Epi-mono faktorizacija se također konstruira po komponentama. Jedini "teži" dio u konstrukciji je dokaz da se tako dobiva zaista epi-mono faktorizacija u **Ch** što slijedi iz leme koju dajemo iza dokaza.

Još je preostalo samo pokazati da je svaki monomorfizam (epimorfizam) normalan. No vjerujemo da je čitatelj koji je pratio ovaj dokaz dosad vidi kako to npr. za monomorfizam slijedi upravo iz prethodnih razmatranja o jezgri i sljedećoj lemi. ■

8.1.2. Lema. Morfizam kompleksa $f : B^\bullet \to C^\bullet$ u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ je monomorfizam (odn. epimorfizam) ako i samo ako je $f^n : B^n \to C^n$ monomorfizam (odn. epimorfizam) u $\mathcal{A}$ za svako $n \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Dokazujemo samo tvrdnju za monomorfizme.

Pretpostavimo prvo da je f monomorfizam u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. Neka je $n \in \mathbb{Z}$ i neka su $r^n, s^n : A \to B^n$ morfizmi u $\mathcal{A}$ takvi da je $f^n \circ r^n = f^n \circ s^n$. Proširimo objekt A u $\mathcal{A}$ do kompleksa $A^\bullet$ tako da stavimo $A^n = A^{n+1} = A, A^m = 0$ za $m \neq n, n+1$. Te neka je $d_A^n = id_A$. Definiramo li $r^{n+1} = d_B \circ r^n, s^{n+1} = d_B \circ s^n, r^m, s^m = 0$ za $m \neq n, n+1$ dobivamo morfizme $r, s : A^\bullet \to B^\bullet$ takve da je $f \circ r = f \circ s$. Budući da je f monomorfizam slijedi da je $r = s$, što povlači $r^n = s^n$. Budući da je n bio proizvoljan f_n je monomorfizam za svaki n.

Neka je sad f morfizam u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ takav da je f^n monomorfizam za svaki n. Neka su $r, s : A^\bullet \to B^\bullet$ morfizmi u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ takvi da je $f \circ r = f \circ s$. Tada je $f^n \circ r^n = f^n \circ s^n$, a budući da su f^n monomorfizmi slijedi da je $r^n = s^n$ za svako n, tj. $r = s$. Dakle, f je monomorfizam. ■

8.1.3. Napomena. Budući da smo sve konstrukcije činili po komponentama slijedi da je i **LP** kategorija (kao kategorija trunkiranih kompleksa) aditivna. No, moramo pripaziti da nije sve potpuno analogno. U prethodnoj lemi smo u prvom dijelu dokaza konstruirali komutativni kvadrat prema višim nivoima. U **LP** nemamo svih nivoa, pa u jednom smjeru moramo dokazivati drugačije. Neka je opet f monomorfizam u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. Neka je $n \in \mathbb{Z}$ i neka su $r^n, s^n : A \to B^n$ morfizmi u $\mathcal{A}$ takvi da je $f^n \circ r^n = f^n \circ s^n$. Proširimo objekt A u $\mathcal{A}$ do kompleksa $A^\bullet$ tako da stavimo $A^n = A, A^m = 0$ za $m \neq n$. Stavimo li $r^m = s^m = 0$ za $m \neq n$ dobivamo morfizme $r, s : A^\bullet \to B^\bullet$ takve da je $f \circ r = f \circ s$, pa završavamo dokaz na isti način. Dakle, sve konstrukcije možemo provesti, pa je **LP** i abelova kategorija.

8.1.4. Napomena. Analogno razmatranje vrijedi za pune potkategorije $\mathbf{Ch}^{+}, \mathbf{Ch}^{-}, \mathbf{Ch}^{b}$.

8.1.5. Napomena. Vidjeli smo već da homotopska i derivirana kategorija imaju strukturu aditivne kategorije. No, one nužno nemaju strukturu abelove kategorije. Pokušamo li provesti gornje konstrukcije problem nastaje već pri konstrukciji jezgre. Ipak derivirana kategorija ima dodatnu strukturu tzv. triangulirane kategorija koja omogućava razne račune. U konkretnom slučaju možemo pokazati da derivirana kategorija nije abelova pokazujući npr. da nije poluprosta (tj. da se svaki kratak egzaktna niz ne cijepa). Naime, triangulirana abelova kategorija mora bit poluprosta prema **??** IV.1.

8.2 Triangulirane kategorije

8.2.1. Definicija. Neka je $T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ automorfizam na aditivnoj kategoriji $\mathcal{D}$. **Trokut** na uređenoj trojci (A, B, C) objekata u $\mathcal{D}$ je trojka (u, v, w) morfizama, pri čemu je $u : A \to B, v : B \to C, w : C \to T(A)$. Obično trokut prikazujemo dijagramom

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "w"'] & \\ A \arrow[rr, "u"] & & B. \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

Morfizam trokuta je trojka (f, g, h) takva da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \arrow[r, "w'"] & TA'. \end{tikzcd}$$

Pojam triangulirane kategorije uveli su Grothendieck i Verdier, a nezavisno je Puppe proučavajući kategoriju stabilne homotopije otkrio da je ta kategorija također triangulirana (uvodeći triangulirane kategorije s nešto drugačijim aksiomima).

8.2.2. Definicija. (Verdier) **Triangulirana kategorija** $\mathcal{D}$ je aditivna kategorija zadana s automorfizmom $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ (kojeg zovemo **funktor translacije**) i familijom **istaknutih** (ili egzaktnih) trokuta (u, v, w) takvih da su zadovoljeni sljedeći aksiomi:

T1. a. $A \overset{\mathrm{id}}{\to} A \to 0 \to T(A)$ je istaknuti trokut.

b. Svaki trokut koji je izomorfan istaknutom trokutu je istaknut.

c. Svaki morfizam $A \overset{u}{\to} B$ se može nadopuniti do istaknutog trokuta $A \overset{u}{\to} B \overset{v}{\to} C \overset{w}{\to} TA$.

T2. Rotacija. Trokut $A \overset{u}{\to} B \overset{v}{\to} C \overset{w}{\to} TA$ je istaknut ako i samo ako je trokut $B \overset{v}{\to} C \overset{w}{\to} TA \overset{-Tu}{\to} TB$ istaknut.

T3. Morfizmi. Za svaka dva dana istaknuta trokuta i morfizme f, g u $\mathcal{D}$ kao u dijagramu

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \arrow[r, "w'"] & TA' \end{tikzcd}$$

postoji barem jedan morfizam $h\colon C \to C'$ u $\mathcal{D}$ takav da gornji dijagram čini morfizam trokuta.

T4. Aksiom oktaedra. Za svaku šestorku objekata A, B, C, A', B', C' objekata u $\mathcal{D}$ takvu da su trojke (u, j, ∂) na (A, B, C'), (v, x, i) na (B, C, A') i (vu, y, δ) na (A, C, B') istaknute postoji istaknuti trokut $(f, g, (Tj)i$ na (C', B', A') takav da su u oktaedru

$$\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[dl, "x"] \arrow[ddrr, "y"] & & \\
 & & A' \arrow[dll, "i"] \arrow[ddd, "(Tj)i"] & & & \\
B \arrow[uurrr, "v"] \arrow[ddrr, "j"'] & & & & & B' \arrow[ulll, "g"'] \arrow[dll, dotted, "\delta"] \\
 & & & A \arrow[uuu, dotted, "vu"] \arrow[ulll, dotted, "u"] & & \\
 & & C' \arrow[uurrr, "f"'] \arrow[ur, dotted, "\partial"] & & &
\end{tikzcd}$$

trokuti koji nisu spomenuti (preostala 4) komutativni te je

$$yv = fj, u\delta = ig.$$

8.3 Derivirana kategorija kao triangulirana kategorija

Potpuno analogno dokazu leme 5.2.4 dokazuje se ista tvrdnja za komplekse u proizvoljnoj abelovoj kategoriji.

8.3.1. Lema. Za svako preslikavanje kompleksa $f\colon B^\bullet \to C^\bullet$ postoji komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] & C^\bullet \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, "\alpha"] & C(f) \arrow[r, "\delta=\delta(f)"] \arrow[d, equal] & B[1]^\bullet \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^\bullet \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, equal] & Cyl(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & C(f) \arrow[r] & 0 & & \\
 & B^\bullet \arrow[r, "f"] & C^\bullet & & & &
\end{tikzcd}$$

Dijagram je funktorijalan u f te je $\beta\alpha = \mathrm{id}_L$ i $\alpha\beta$ je homotopsko $\mathrm{id}_{Cyl(f)}$.

8.3.2. Definicija. Kažemo da je trokut u kategoriji kompleksa $(\mathbf{Ch}, \mathcal{K}, \mathcal{D}, \mathcal{D}^+, ...)$ **istaknut** ako je izomorfan srednjem redu

$$B^\bullet \xrightarrow{\overline{f}} Cyl(f) \xrightarrow{\pi} C(f) \xrightarrow{\delta} B[1]^\bullet$$

nekog dijagrama kao u prethodnoj lemi.

8.3.3. Propozicija. Svaki kratak egzaktan niz kompleksa u $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ je kvazi-izomorfan nekom istaknutom trokutu.

8.3.4. Teorem. Neka je

$$B^\bullet \xrightarrow{u} C^\bullet \xrightarrow{v} D^\bullet \xrightarrow{w} B[1]^\bullet$$

istaknuti trokut u $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Tada je niz

$$\cdots H^i(B^\bullet) \xrightarrow{H^i(u)} H^i(C^\bullet) \xrightarrow{H^i(v)} H^i(D^\bullet) \xrightarrow{H^i(w)} H^i(B[1]^\bullet) = H^{i+1}(B^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

egzaktan.

8.3.5. Teorem. Kategorija $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ je triangulirana kategorija.

Aksiom T1 je trivijalan, dok je dokaz od T4 vrlo dug i iscrpljujuć pa ga nećemo dati. Za aksiom T2 dovoljno je promatrati samo trokute oblika (standardne trokute) $A \overset{f}{\to} B \overset{\alpha(f)}{\to} C(f) \overset{\beta(f)}{\to} TA$. Dijagram

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, equal] & C(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, equal] & TA \arrow[r, "-Tf"] & TB \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, "\alpha(f)"] & C(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"] & C(\alpha(f)) \arrow[r, "\beta(\alpha(f))"] & TB
\end{tikzcd}$$

s može dopuniti do izomorfizma trokuta definiramo li $\phi : TA \to C(\alpha(f))$ s $\phi^n = (-f^{n+1}, \mathrm{id}_{A^{n+1}}, 0)$ te $\psi : C(\alpha(f)) \to TA$ s $\psi^n(a^n, a^{n+1}, b^n) = a^n + 1$.

Za T3 opet gledamo samo standardne trokute. Prema pretpostavci imamo dijagram

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "v"] & C(f) \arrow[r, "\beta(f)"] & TA \arrow[d, "Tu"] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "\alpha(f')"] & C(f') \arrow[r, "\beta(f')"] & TB'
\end{tikzcd}$$

u kojem je lijevi kvadrat komutativan u $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Dijagram možemo nadopuniti do morfizma trokuta definiramo li $w : C(f) \to C(f')$ s

$$w^n = \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ s^{n+1} & v^n \end{pmatrix}.$$

8.3.6. Definicija. Kažemo da je lokalizirajuća klasa morfizama $\Sigma \subset \mathrm{Mor}\, \mathcal{D}$ **kompatibilna s triangulacijom** triangulirane kategorije $\mathcal{D}$ ako je

1. $s \in \Sigma$ ako i samo ako je $T(s) \in \Sigma$.
2. za svake $f, g \in \Sigma$ u dijagramu aksioma **TR3.** i $h \in \Sigma$.

8.3.7. Teorem. Neka je $\mathcal{D}$ triangulirana kategorija i neka je Σ lokalizirajuća klasa morfizama u $\mathcal{D}$ kompatibilna s triangulacijom. Definirajmo funktor translacije T_Σ u $\mathcal{D}_\Sigma$ na prirodan način. Trokut u $\mathcal{D}_\Sigma$ zovemo istaknut ako je izomorfan slici istaknutog trokuta u $\mathcal{D}$ pri lokalizaciji $\mathcal{D}_\Sigma$. Tada je $\mathcal{D}_\Sigma$ s translacijskim funktorom i ovom klasom istaknutih trokuta triangulirana kategorija.

8.3.8. Korolar. Derivirane kategorije $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ su triangulirane.

Dokaz. Potrebno je samo primjetiti da je klasa svih kvazi-izomorfizama u $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ kompatibilna s triangulacijom u $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ te primjeniti prethodni teorem. ■

8.4 Derivirani funktori

Već smo spomenuli da neki od najvažnijih aditivnih funktora u abelovim kategorijama (poput hom, $\otimes$,...) nisu egzaktni. No postoji način da za svaki lijevo (odn. desno) egzaktan funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ između abelovih kategorija konstruiramo funktor $RF\colon \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ (odn. $LF\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$) koji ćemo zvati **desni** (odn. **lijevi**) derivirani funktor od F koji će preslikavati istaknute trokute u istaknute trokute.

Konstrukcija deriviranih funktora nije jednostavna jer krije mnoge suptilnosti. Ovdje ćemo samo u kratkim crtama opisati neke od koraka u toj konstrukciji. Želimo proširiti funktor na lančane komplekse, a najjednostavnije bi bilo kad bismo to mogli po komponentama (kao što smo radili razne druge konstrukcije na početku ovog poglavlja). Takvo proširenje preslikava homotopske morfizme ponovno u homotopske, te na taj način inducira proširenje $\mathcal{K}^*(F) : \mathcal{K}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^*(\mathcal{B})$ za $* = \emptyset, +, -, b$.

8.4.1. Propozicija. Neka je F egzaktan funktor. Tada $\mathcal{K}^*(F)$ preslikava kvazi-izomorfizme u kvazi-izomorfizme, pa na taj način inducira funktor $\mathcal{D}^*(F)\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$. Funktor $\mathcal{D}^*(F)$ je egzaktan, tj. preslikava istaknute trokute u istaknute.

Problem nastaje ako F nije egzaktan funktor. Tada nećemo F proširiti na sve komplekse, već ćemo samo odabrati neke reprezentante klasa kvazi-izomorfnih kompleksa (npr. za $M\otimes-$ ćemo promatrati samo komplekse plosnatih modula).

8.4.2. Definicija. Kažemo da je klasa objekata $R \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ **adaptirana** lijevom (ili desnom) egzaktnom funktoru F ako je stabilna na konačne direktne sume i zadovoljava sljedeća dva svojstva:
1. Ako je F lijevo egzaktan onda F preslikava bilo koji egzaktan kompleks u $\mathbf{Ch}^+(R)$ u egzaktan kompleks. Ako je F desno egzaktan onda F preslikava bilo koji egzaktan kompleks u $\mathbf{Ch}^-(R)$ u egzaktan kompleks.
2. Ako je F lijevo egzaktan onda je svaki objekt u $\mathcal{A}$ podobjekt nekog objekta u R. Ako je F desno egzaktan onda je svaki objekt u $\mathcal{A}$ kvocijent nekog objekta u R. (Ako R zadovoljava ovaj uvjet kažemo da R ima dovoljno objekata.)

8.4.3. Napomena. Ako je F egzaktan onda je bilo koja klasa koja ima dovoljno objekata adaptirana funktoru F.

8.4.4. Propozicija. Neka je R adaptirana klasa lijevo egzaktnom funktoru $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i neka je Σ_R klasa kvazi-izomorfizama u $\mathcal{K}^+(R)$. Tada je Σ_R lokalizirajuća klasa morfizama u $\mathcal{K}^+(R)$ i kanonski funktor $\mathcal{K}^+(R)[\Sigma_R^{-1}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ je ekvivalencija kategorija.

8.4.5. Kostrukcija deriviranih funktora. Ukoliko je R adaptirana klasa lijevo egzaktnom funktoru $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ onda desni derivirani funktor RF od F definiramo na objektima kategorije $K^+(R)[\Sigma_R^{-1}]$ po komponentama: $RF(K^\bullet)^n = F(K^n)$ za $K^\bullet \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}^+(R)$. Budući da F aciklične objekte u $\mathcal{K}^+(R)$ preslikava u aciklične još jednom bi se moglo pokazati da se kvazi-izomorfizmi preslikavaju u kvazi-izomorfizme i da na RF možemo gledati kao na funktor iz $\mathcal{K}^+(R)[\Sigma_R^{-1}]$ u $\mathcal{D}(\mathcal{B})$. Prema prethodnoj propoziciji RF možemo definirati na $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ komponiramo li s ekvivalencijom $\Phi : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^+(R)[\Sigma_R^{-1}]$. Konstrukcija sadrži mnogo nejasnoća- izbor klase R i ekvivalencije Φ nije jedinstven, no ipak definicija dobra. Da bismo to pokazali RF definiramo ovako:

8.4.6. Definicija. Desni derivirani funktor aditivnog lijevo egzaktnog funktora $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je par (RF, ε) gdje je $RF\colon \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ egzaktni funktor, a $\varepsilon_F\colon Q_{\mathcal{B}} \circ K^+(F) \to RF \circ Q_{\mathcal{A}}$ prirodna transformacija takvi da vrijedi univerzalno svojstvo: za bilo koji egzaktan funktor $G\colon \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ i prirodnu transformaciju $\varepsilon\colon Q_{\mathcal{B}} \circ K^+(F) \to G \circ Q_{\mathcal{A}}$ postoji jedinstvena prirodna transformacija $\eta\colon RF \to G$ takva da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & Q_{\mathcal{B}} \circ K^+(F) \arrow[dl, "\varepsilon_F"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
RF \circ Q_A \arrow[rr, "\eta \circ Q_A"] & & G \circ Q_A.
\end{tikzcd}$$

Analogno definiramo **lijevi derivirani funktor** desno egzaktnog funktora F.

U [12] se dalje pokazuje da je derivirani funktor jedinstven (ako postoji) te da za svaki lijevi egzaktan funktor za koji postoji adaptirana klasa objekata derivirani funktor zaista može konstruirati na gore opisani način. Sljedeći teorem govori zašto smo uvodili rezolvente.

8.4.7. Teorem. Ako $\mathcal{A}$ ima dovoljno injektivnih objekata onda je klasa $\mathcal{I}$ svih injektivnih objekata u $\mathcal{A}$ adaptirana svakom lijevo egzaktnom funktoru F.

Poglavlje 9

Algebre u LP kategoriji

Krenuvši od bilo koje kategorije $\mathcal{V}_0$ možemo konstruirati kategoriju morfizama $\mathrm{Arr}(\mathcal{V}_0)$: objekti te kategorije su morfizmi u $\mathcal{V}$, a morfizmi iz $f : V \longrightarrow W$ u $f' : V' \longrightarrow W'$ su komutativni kvadrati oblika

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & V' \arrow[d, "f'"] \\ W \arrow[r, "v"] & W'. \end{tikzcd}$$

Ukoliko umjesto kategorije $\mathcal{V}_0$ gledamo neku monoidalnu kategoriju $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_0, \otimes, I, a, l, r)$ tada i kategorija $\mathrm{Arr}(\mathcal{V}_0)$ dobiva prirodnu strukturu monoidalne kategorije: za objekte u $\mathrm{Arr}(\mathcal{V}_0)$ tenzoriramo domene posebno, kodomene posebno i morfizme posebno te lako to proširimo na morfizme (morfizama). To je standardna monoidalna struktura $\mathrm{Arr}(\mathcal{V})$. U slučaju kad je $\mathcal{V}$ simetrična zatvorena monoidalna kategorija, Loday i Pirashvili uveli su na $\mathrm{Arr}(\mathcal{V}_0)$ nestandardnu simetričnu zatvorenu monoidalnu strukturu koju su oni nazvali "infinitezimalnom". Ta tenzorska kategorija označava se sa $\mathbf{LP}_{\mathcal{V}}$, a ako je početna simetrična zatvorena monoidalna kategorija $\mathcal{V}$ kategorija vektorskih prostora nad fiksnim poljem karakteristike nula tada je označavamo prosto sa **LP**. Definicije asocijativne algebre, Liejeve algebre, (bi)modula nad asocijativnim algebrama itd. lako se napišu u terminima tenzorskog produkta i morfizama, bez spominjanja elemenata, tako da imaju smisla u općenitijim monoidalnim kategorijama. U **LP** teorija Liejevih algebri ima jako lijepa svojstva slična klasičnom slučaju: imamo recimo omotačke algebre i PBW teorem, analogon Adovog teorema i slično (dokaz se nalazi u [20]). Veliki i značajni problem, je naći analogon globalnih Liejevih objekata, tj. analogona Liejevih grupa te funktorijalne korespodencije među (povezanim jednostavno povezanim) realnim Liejevim grupama i realnim Liejevim algebrama (Lie-Cartanov teorem). Adov teorem je u većini klasičnih dokaza Lie-Cartanovog teorema netrivijalni i ključni korak, što, uz dobra svojstva tenzorske kategorije Lodaya i Pirashvilija daje nadu da bi se moglo proširiti i na taj kontekst. Budući da se Leibnizove algebre može proučavati kroz korespondenciju s Liejevim algebrama u **LP** pronalazak "Leibnizovih grupa" bio bi korolar.

9.1 Posebni objekti u LP kategoriji

Vidjeli smo da se algebre u monoidalnoj kategoriji mogu definirati preko dijagrama. Za ilustraciju dajemo jednu definiciju (asocijativne algebre), a u ostatku ćemo pretpostaviti da čitatelj zna kako bi definirao ostale objekte te dajemo ekplicitan opis strukture (Liejevu algebru, modul nad algebrom itd.).

9.1.1. Definicija. **Asocijativna algebra** u **LP** je par $\underline{V} = (V \xrightarrow{f} W), \mu\colon \underline{V} \to \underline{V})$ takav da slijedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd}
\underline{V} \otimes \underline{V} \otimes \underline{V} \arrow[r, "1_V \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes 1_V"] & \underline{V} \otimes \underline{V} \arrow[d, "\mu"] \\
\underline{V} \otimes \underline{V} \arrow[r, "\mu"] & \underline{V}
\end{tikzcd}$$

9.1.2. Propozicija. Ako je $\underline{V} = (V \xrightarrow{f} W), \mu\colon \underline{V} \to \underline{V})$ asocijativna algebra u **LP**, onda je W asocijativna algebra, V je W-bimodul, a f preslikavanje W-modula.

9.1.3. Propozicija. Struktura **Liejeve algebre** u **LP** objekta $\underline{V} = (V \xrightarrow{\phi} W)$ sastoji se od strukture Liejeve algebre na prostoru W, strukture Liejevog modula nad W na V, tako da za sve $v \in V$ i $w \in W$ vrijedi

$$f([v, w]) = [f(v), w].$$

9.1.4. Propozicija. Struktura **lijevog modula** u **LP** nad algebrom $\underline{A} = (M \xrightarrow{f} A)$ na objektu $\underline{V} = (V \xrightarrow{\phi} W)$ se sastoji od strukture lijevog A-modul na W, lijevog A-modul na V te homomorfizama lijevih A-modula ϕ i $\nu\colon M \otimes W \to V$ takvih da vrijedi

$$f(m)w = \phi(\nu(m \otimes w))$$

za sve $m \in M, w \in W$.

Analogno se definira desni modul u **LP** nad nekom algebrom u **LP**, te modul nad Liejevom algebrom u **LP**.

9.1.5. Lema. Neka je $M \to \mathfrak{g}$ Liejeva algebra u **LP** te neka je $U(\mathfrak{g})$ univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$. Tada postoji jedinstveno desno djelovanje od $U(\mathfrak{g})$ na $U(\mathfrak{g}) \otimes M$ takvo da vrijedi

$$(x \otimes m) \cdot g = xg \otimes m + x \otimes [m, g]$$

za svaki $x \in U(\mathfrak{g}), m \in M, g \in \mathfrak{g}$. Time $U(\mathfrak{g}) \otimes M$ postaje $U(g)$-bimodul.

Dokaz. Lako se pokazuje da vrijedi formula

$$(1 \otimes m) \cdot [g, h] = ((1 \otimes m) \cdot g) \cdot h - ((1 \otimes m) \cdot h) \cdot g.$$

Ovo pokazuje da je desno djelovanje $U(\mathfrak{g})$ na $U(\mathfrak{g}) \otimes M$ dobro definirano. ■

9.1.6. Definicija. Univerzalna omotačka algebra u LP $U(M,\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\phi : M \to \mathfrak{g}$ u **LP** je asocijativna algebra

$$f : U(\mathfrak{g}) \otimes M \to U(\mathfrak{g})$$

u **LP** gdje je $U(\mathfrak{g})$ klasična omotačka algebra od $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g}) \otimes M$ je $U(\mathfrak{g})$-bimodul, a preslikavanje f je inducirano preslikavanjem $1 \otimes m \mapsto \phi(m) \in \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$.

9.1.7. Napomena. Preslikavanje f je homomorfizama $U(\mathfrak{g})$-bimodula jer je

$$\phi(m)g = g\phi(m) + [\phi(m), g]$$

u $U(\mathfrak{g})$. Kao i u klasičnom slučaju pokazuje se da je U funktor iz kategorije Liejevih algebri u **LP** u kategoriju asocijativnih algebri u **LP** te da je lijevo adjungiran funktoru $(-)_{Lie}$. Funktor $(-)_{Lie}$ pridružuje asocijativnoj algebri $M \to A$ u **LP** Liejevu algebru (M, A_{Lie}) pri čemu je zagrada na A_{Lie} definirana s $[a,b] = ab - ba$, a djelovanje A_{Lie} na M s $[m,a] = ma - am$.

9.1.8. Primjer. Neka su A, B algebre. Označimo s $Der(A,B)$ prostor svih derivacija algebre A u algebru B, tj. svih linearnih preslikavanja $f\colon A \to B$ takvih da je

$$f(ab) = f(a)b + af(b).$$

Prostor $Der(A,A)$ označimo samo s $Der(A)$. Neka su $f, g \in Der(A)$ derivacije algebre A. Tada je

$$(f\circ g - g\circ f)(ab) = f(g(a)b+ag(b)) - g(f(a)b+af(b)) = f(g(a))b - g(f(a))b + af(g(b)) - ag(f(b)).$$

Dakle,

$$[f,g] := f \circ g - g \circ f$$

je opet derivacija. Zbog asocijativnosti kompozicije zadovoljen je Jacobijev identitet, pa je $Der(A)$ Liejeva algebra.

Prostor $A \otimes A$ je bimodul nad A uz množenje definirano s

$$\alpha(a_1 \otimes a_2)\alpha' = (\alpha a_1) \otimes (a_2 \alpha').$$

Neka je $f \in Der(A)$. Tada f inducira preslikavanje $f^*\colon A \otimes A \to A \otimes A$ s

$$f^*(a \otimes b) = f(a) \otimes b + a \otimes f(b).$$

Neka je $g \in Der(A, A \otimes A)$. Označimo u buduće $g(a) = a_1 \otimes a_2$. Tada je

$$[g,f]_M = g \circ f - f^* \circ g$$

također element $Der(A, A \otimes A)$. Zaista,

$$\begin{aligned}
[g,f]_M(ab) &= (g \circ f - f^* \circ g)(ab) = g(f(a)b + af(b)) - f^*(a_1 \otimes a_2 b + ab_1 \otimes b_2) = \\
&= g(f(a))b + f(a)g(b) + g(a)f(b) + ag(f(b)) - \\
&\quad - f(a_1) \otimes a_2 b - a_1 \otimes f(a_2)b - g(a)f(b) - f(a)g(b) - af(b_1) \otimes b_2 - ab_1 \otimes f(b_2) = \\
&= [g,f]_M(a)b + a[g,f]_M(b).
\end{aligned}$$

Na sličan način pokazuje se da je

$$[g,[f_1,f_2]]_M = [[g,f_1]_M,f_2]_M - [[g,f_2]_M,f_1]_M$$

za $g \in Der(A, A\otimes A)$, te $f_1, f_2 \in Der(A)$, pa je $Der(A, A\otimes A)$ Liejev modul nad $Der(A)$.

Definirajmo $\phi\colon Der(A, A\otimes A) \to Der(A)$ s

$$\phi(g)(a) = a_1 a_2$$

za $g(a) = a_1 \otimes a_2$. Tada je ϕ linearno preslikavanje, te vrijedi

$$\begin{aligned}\phi([g,f]_M)(a) &= \phi(g\circ f)(a) - \phi(f * \circ g)(a) = \phi(g)(f(a)) - f(a_1)a_2 - a_1 f(a_2) = \\ &= \phi(g)(f(a)) - f(\phi(g)(a)) = [\phi(g), f](a).\end{aligned}$$

Dakle, ϕ je ekvivarijantno, pa je

$$\phi\colon Der(A, A\otimes A) \to Der(A)$$

Liejeva algebra u **LP**.

9.1.9. Definicija/Propozicija. Simetrična algebra $S = S(V \xrightarrow{\mathrm{f}} W)$ objekta $V \xrightarrow{\mathrm{f}} W$ u **LP** je objekt

$$S = \{(S(W)\otimes\ V + V\otimes\ S(W))/\sim^{1\otimes} \overset{\mathrm{f+f\otimes}}{\longrightarrow}{}^{1}\ S(W)\},$$

gdje je $S(W)$ je simetrična algebra nad W u klasičnom smislu, a $\sim$ relacija ekvivalencije pri čemu je $q(w)\otimes v \sim v \otimes q(w)$. Upravo zato ću smatrat

$$S = \{S(W)\otimes_s\ V \overset{1\otimes\ \mathrm{f}}{\to}\ S(W)\},$$

pri čemu je $\otimes_s$ simetrično množenje s elementima iz $S(W)$. Očito je $S(W)\otimes_s V$ $S(W)$-modul, pa je S zaista algebra u **LP**.

9.1.10. Napomena. Analogno se definiraju tenzorska i vanjska algebra u **LP**. Ipak istaknimo da je vanjski produkt objekta $V \to W$ u **LP** objekt $\Lambda^n(V\to W) = (\Lambda^{n-1}W\otimes V \to \Lambda^n(W)$.

9.2 Leibnizove algebre

Leibnizove algebre uveo je J. L. Loday primjetivši da je za definiciju Chevalley-Eilenbergovog kompleksa dovoljan samo uvjet ekvivalentan Jacobijevom identitetu.

9.2.1. Definicija. Desna Leibnizova algebra je uređen par vektorskog prostora $\mathfrak{h}$ i bilinearnog preslikavanja $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{h}\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ takvog da za sve $f,g,h\in\mathfrak{h}$ vrijedi Leibnizov identitet:

$$[f,[g,h]] = [[f,g],h] - [[f,h],g].$$

Homomorfizam Leibnizovih algebri je linearno preslikavanje $\alpha\colon \mathfrak{h}\to\mathfrak{h}'$ takvo da je za sve $f,g\in\mathfrak{h}$

$$\alpha[f,g] = [\alpha(f),\alpha(g)]'.$$

Leibnizove algebre i homomorfizmi Leibnizovih algebri čine kategoriju koju označavamo s **Leib**.

9.2.2. Primjer. Svaka Liejeva algebra ujedno i Leibnizova jer se uz uvjet $[x, y] = -[y, x]$ Jacobijev identitet prevodi u Leibnizov identitet.

9.2.3. Lema. Neka je $(f : M \to \mathfrak{g})$ Liejeva algebra u **LP**. Tada je vektorski prostor M uz bilinearno preslikavanje $[\cdot, \cdot]$ definirano sa

$$[m, m'] = [m, f(m')]_M$$

Leibnizova algebra. Štoviše, f je homomorfizam Leibnizovih algebri.

Dokaz. Obje činjenice slijede direktno iz definicije Liejeve algebre u **LP** jer struktura Liejevog modula nad $\mathfrak{g}$ na M inducira Leibnizov identitet, a $\mathfrak{g}$-ekvivarijantnost preslikavanja f inducira da je f homomorfizam Leibnizovih algebri. ■

9.2.4. Lema. Neka je $\mathfrak{h}$ Leibnizova algebra, te neka je I ideal u $\mathfrak{h}$ generiran elementima $[x, x], x \in \mathfrak{h}$. Tada je $\mathfrak{h}/I$ Liejeva algebra (označimo ju s $\mathfrak{h}_{Lie}$. Štoviše, surjektivno preslikavanje $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}_{Lie}$ je Liejeva algebra u **LP**.

Dokaz. Leibnizov identitet se uz antikomutativnost trivijalno prevodi u Jacobijev identitet, pa je zato $\mathfrak{h}_{Lie}$ zaista Liejeva algebra. Analogno razmatranju u dokazu prethodne leme zaključujemo da Leibnizovo pravilo na $\mathfrak{h}$ inducira strukturu Liejevog modula nad $\mathfrak{h}_{Lie}$, a budući da je kanonsko surjekcija iz iskaza homomorfizam Leibnizovih algebri ono inducira $\mathfrak{h}_{Lie}$-ekvivarijantno preslikavanje. ■

Dakle, u prethodne dvije leme konstruirali smo funktore između kategorije **Leib** i kategorije **Lie u LP**. Ti funktori su adjungirani. Štoviše, kompozicija koja počinje i završava u **Leib** je identiteta.

9.3 Derivacija algebre u LP

U svom radu [4] izračunao sam, po prvi puta, strukturu modula derivacija unutarnje simetrične algebre objekta u Loday-Pirashvilijevoj tenzorskoj kategoriji u konačno-dimenzionalnom slučaju, te nešto veći unutarnji modul derivacija iste simetrične algebre.

Derivacije obične simetrične algebre n-dimenzionalnog vektorskog prostora su oblika $\sum P_i \partial_i$ gdje je P_i polinom u n varijabli, a ∂_i je i-ta parcijalna derivacija.

9.3.1. Definicija. Derivacija algebre $\underline{A} = (M \to A)$ u **LP** je endomorfizam $d = (d_M, d_A)$ te algebre u **LP** koji zadovoljava generalizirano Leibnizovo pravilo, tj. ovi dijagrami komutiraju

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \otimes \underline{A} \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\mu(d\otimes 1)+\mu(1\otimes d)"'] & \underline{A} \arrow[d, "d"] \\ & \underline{A} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "d_M"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "d_A"] & A \end{tikzcd}$$

`generalizirano Leibnizovo pravilo` `slaganje s` f

9.3.2. Množenje s elementom algebre. Neka je M bimodul nad algebrom A, te $a \in A$. Neka je $\hat{a} : M \to M$ preslikavanje zadano sa

$$m \mapsto am, \forall m \in M.$$

U daljnjem tekstu proučavat ću samo module za koje je pridruživanje $a \mapsto \hat{a}$ injektivno, pa ću elemente od A poistovjećivati s pripadnim endomorfizmom na M.

Neka je $D_0(\underline{A})$ skup svih derivacija algebre $\underline{A} = (M \to A)$ u **LP**.

9.3.3. Propozicija. $D_0(\underline{A})$ je lijevi A-modul uz operacije definirane po komponentama

$$\begin{aligned} &d + d' := (d_A + d'_A, d_M + d'_M), \\ &ad := (\hat{a} \circ d_M, \hat{a} \circ d_A). \end{aligned}$$

Posebno, to je vektorski prostor nad poljem $\mathbf{k}$.

Vidjeli smo da je za objekt $\underline{V} = (V \stackrel{f}{\to} W)$ u **LP** simetrična algebra od je objekt $\{S(W) \otimes_s V \stackrel{1\otimes f}{\to} S(W)\}$. Promatramo li modul derivacija simetrične algebre situacija s nalaženjem generatora se komplicira, no našao sam "elementarne derivacije" koje poopćuju parcijalne derivacije, i kojih ima nekoliko tipova. Kao druga komplikacija, jezgra induciranog preslikavanja $S(W) \otimes V \to S(W)$ veća je od najmanjeg $S(W)$-podmodula od $S(W) \otimes V$ koje sadrži $\ker f$, naime ono sadrži i kombinacije tipa $f(v_1)v_2 - f(v_2)v_1$ gdje su $v_1, v_2 \in V$. Ta dodatna jezgra stvara velika usložnjenja i nove fenomene u dokazima, kojih nema u klasičnom slučaju.

Prema teoremu o rangu i defektu postoji izomorfizam između slike i direktnog komplementa jezgre preslikavanja f, pa u V možemo odabrati bazu $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_{r+d}\}$ takvu da je $\{v_{r+1}, ..., v_{r+d}\}$ baza za $\mathsf{Ker}\ f$, a u W možemo odabrati bazu $\{w_1, ..., w_r, w_{r+1}, ..., w_{r+p}\}$ tako da je $w_i = f(v_i)$ za $i = 1, ..., r$.

9.3.4. Propozicija. $D_0(S)$ generiran je kao $S(W)$-modul linearnim preslikavanjima koje možemo podijeliti u četiri tipa i definirati sa:

$$\begin{array}{lll} I) & \sigma_i^j = (d_V : v_k \mapsto \delta_{ik} v_j, d_W : w_k \mapsto \delta_{ik} w_j), \forall k & i, j \in \{1, ..., r\}; \\ II) & \sigma_i^j = (d_V : v_k \mapsto \delta_{ik} v_j, d_W = 0), \forall k & i \in \{1, ..., r+d\}, j \in \{r+1, ..., r+d\}; \\ III) & d_i^{jk} = (d_V : v_l \mapsto \delta_{il} c_{kj}(w, v), d_W = 0), \forall l, & i \in \{r+1, ..., r+d\}, 1 \le j < k \le r; \\ IV) & \partial^i = (d_V = 0, d_W = \partial_i), & i \in \{r+1, ..., r+p\}. \end{array}$$

Ove derivacije ću zvati **elementarnim derivacijama**.

Našao sam komutacijske relacije među "elementarnim derivacijama" i razmatrao najmanju podalgebru algebre endomorfizama simetrične algebre koja sadrži sve elementarne derivacije i samu simetričnu algebru (čiji su elementi uloženi u algebru endomorfizama kao operatori (pred)množenja). Ta algebra je jednostavniji analogon Weylove algebre u **LP** (pri čemu su V i W su konačno dimenzionalni) koji nazivamo $\mathbf{Weyl}_0(\underline{V})$ i koja je zapravo "donji dio" unutarnje algebre **Weyl** u **LP** koja je zapravo projekcija tipa $\mathbf{Weyl}_1(\underline{V}) \to \mathbf{Weyl}_0(\underline{V})$ i koja je unutarnja podalgebra unutarnjeg $\underline{\mathrm{End}}$-a unutarnje simetrične algebre $S(\underline{V})$ objekta $\underline{V} = (V \xrightarrow{f} W)$ u **LP** s konačno-dimenzionalnim V i W. Ta unutarnja podalgebra najmanja je unutarnja podalgebra u **LP** koja sadrži *unutarnji modul derivacija* od $S(\underline{V})$ koji je također veći od modula derivacija i unutarnji je modul nad cijelom unutarnjom algebrom $S(\underline{V})$ radije nego samo obični modul nad donjom komponentom $S(W)$. Primijetimo da klasična Weylova algebra zavisi samo od dimenzije n, dok struktura Weylove algebre u **LP** zavisi od dimenzije od V, dimenzije od W i od dimenzije jezgre linearnog operatora $f : V \to W$ (ili, ekvivalentno, od indeksa od f). Uvedeni su i novi pojmovi Weylove i unutarnje Weylove algebre u tom kontekstu, te učinjeni prvi koraci prema određenju njihove strukture.

9.4 Ekstenzije Liejevih algebri u LP

U [40] je opisana bijekcija između klasa ekvivalencija ekstenzija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i druge kohomološke grupe Chevalley-Eilenbergovog kompleksa (v. 5.4.6) razmatranjem članova nižeg stupnja u tzv. Hochschild-Serreovom spektralnom nizu. Ta metoda je korištena jer se elementarniji pristup može primjeniti samo ukoliko je $\mathfrak{g}$ slobodan $\mathbf{k}$-modul ($\mathbf{k}$ komutativan prsten). Budući da u **LP** kategoriji radimo s vektorskim prostorima nad poljem $\mathbf{k}$, ovdje ćemo iznijeti elementarniji pristup klasičnom problemu ekstenzija te vidjeti kako se generalizira za Liejeve algebre u **LP**. Prvo nam je potreban pojam poluprostih kategorija.

9.4.1. Definicija. Abelova kategorija je **poluprosta** ako se svaki kratak egzaktan niz u njoj cijepa.

9.4.2. Primjer. **Vect** i **LP** su poluproste kategorije.

9.4.3. Definicija. **Ekstenzija Liejevih algebri** $(\mathfrak{e}, \pi)$ (od $\mathfrak{g}$ s M) je kratak egzaktan niz Liejevih algebri

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

pri čemu je M abelova Liejeva algebra. Kažemo da su ekstenzije $(\mathfrak{e}, \pi)$ i $(\mathfrak{e}', \pi')$ **ekvivalente** ako postoji izomorfizam $\alpha : \mathfrak{e} \to \mathfrak{e}'$ takav da je $(\mathrm{id}_M, \alpha, \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})$ (izo)morfizam kratkih egzaktnih nizova.

9.4.4. Napomena. Budući da je i element $i(m)$ u $\mathfrak{e}$ ćemo označavati samo s m.

9.4.5. Propozicija. Neka je $(\mathfrak{e}, \pi)$ ekstenzija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ s M. Tada je s $gm := [g, m]$ za $g'\mathfrak{e}$ takav da je $\pi(g') = g$ definirano djelovanje $\mathfrak{g}$ na M, tj. M ima strukturu lijevog $\mathfrak{g}$-modula.

Dokaz. Provjerimo samo da je gm dobro definirano. Neka su $g', g'' \in \mathfrak{e}$ takvi da je $\pi(g') = \pi(g)$. Tada je $g' - g'' \in Ker(\pi)$, pa postoji $m' \in M$ takav da je $m' = i(m') = g' - g''$. Tada je $[g', m] - [g'', m] = [m', m] = 0$ jer je M abelova Liejeva algebra. ■

9.4.6. Definicija. Neka je M lijevi $\mathfrak{g}$-modul. **Semidirektan produkt** $M \rtimes \mathfrak{g}$ je skup $M \times \mathfrak{g}$ sa strukturom Liejeve algebre defniranom s

$$[(m, g), (n, h)] = (gn - hm, [g, h]).$$

Budući da je **Vect** poluprosta kategorija moći ćemo generalizirati semidirektan produkt na način koji će nam riješiti problem klasifikacije ekstenzija. Tokom razmatranja na nekoliko će se mjesta pojaviti detalji koje nećemo raspisivati (npr. da je negdje zadovoljen Jacobijev identitet, linearnost i sl.) jer smatramo da se lako provjeravaju, a razbili bi ideju dokaza koji želimo generalizirati.

Naime, za svaku ekstenziju $(\mathfrak{e}, \pi)$ postoji homomorfizam vektorskih prostora $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{e}$ koji cijepa tu ekstenziju. Primjetimo da je s

$$f(g, h) = [\sigma(g), \sigma(h)] - \sigma([g, h])$$

definirano antisimetrično bilinearno preslikavanje (2-forma) $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M$. Zaista, π je homomorfizam lijevih algebri, pa je desna strana u $Ker(\pi) = Im(i) \cong M$. Preslikavanje σ inducira linearnu bijekciju $M \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{e}$ zadanu s

$$(m, g) \mapsto i(m) + \sigma(g).$$

Sada na $M \times \mathfrak{g}$ imamo induciranu strukturu Liejeve algebre (tako da spomenuta bijekcija bude homomorfizam Liejevih algebri) s

$$[(m, g), (n, h)] = (gn - hm + f(g, h), [g, h]). \tag{9.1}$$

Ovu Liejevu algebru ćemo označavati s $M \rtimes_f \mathfrak{g}$.

9.4.7. Lema. f je 2-kociklus u Chevalley-Eilenbergovom kompleksu i klasa $[f] \in H^2_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ ne ovisi o izboru preslikavanja σ.

Dokaz. f je 2-kociklus jer je

$$\begin{aligned}
d^2 f(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) &= [\sigma([x_1,x_2]),\sigma(x_3)] - \sigma([[x_1,x_2],x_3]) - [\sigma([x_1,x_3]),\sigma(x_2)]+ \\
&\quad +\sigma([[x_1,x_3],x_2]) + [\sigma([x_2,x_3]),\sigma(x_1)] - \sigma([[x_2,x_3],x_1])- \\
&\quad -x_1[\sigma(x_2),\sigma(x_3)] + x_1\sigma([x_2,x_3]) + x_2[\sigma(x_1),\sigma(x_3)]- \\
&\quad -x_2\sigma([x_1,x_3]) - x_3[\sigma(x_1),\sigma(x_2)] + x_3\sigma([x_1,x_2]) = \\
&= \underbrace{\sigma([[x_1,x_3],x_2] - [[x_1,x_2],x_3] - [[x_2,x_3],x_1])}_{Jacobi} + \\
&\quad + \underbrace{[\sigma([x_1,x_2]),\sigma(x_3)] + x_3\sigma([x_1,x_2])}_{=0} + \\
&\quad \underbrace{-[\sigma([x_1,x_3]),\sigma(x_2)] - x_2\sigma([x_1,x_3])}_{=0} + \\
&\quad + \underbrace{[\sigma([x_2,x_3]),\sigma(x_1)] + x_1\sigma([x_2,x_3])}_{=0} + \\
&\quad \underbrace{-x_1[\sigma(x_2),\sigma(x_3)] + x_2[\sigma(x_1),\sigma(x_3)] - x_3[\sigma(x_1),\sigma(x_2)]}_{Jacobi} = 0.
\end{aligned}$$

Neka je σ' neko drugo cijepanje te f' forma pridružena σ'. Tada je

$$\begin{aligned}
(f'-f)(x,y) &= [\sigma'(x),\sigma'(y)-\sigma(y)] + [\sigma'(x)-\sigma(x),\sigma(y)] - (\sigma'-\sigma)([x,y]) = \\
&= x\cdot(\sigma'-\sigma)(y) - y\cdot(\sigma'-\sigma)(x) - (\sigma'-\sigma)([x,y]) = \\
&= d^1(\sigma-\sigma')(x,y).
\end{aligned}$$

Što pokazuje da je $[f]=[f']$. ∎

Ako su $(\mathfrak{e},\pi)$ i $(\mathfrak{e}',\pi')$ ekvivalentne ekstenzije onda one induciraju iste klase u $H^2_{Lie}(\mathfrak{g},M)$, pa je dobro definirano preslikavanje

$$\Psi : [(\mathfrak{e},\pi)] \mapsto [f].$$

9.4.8. Teorem. Skup klasa ekvivalencije ekstenzija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ s M je u bijekciji s $H^2_{Lie}(\mathfrak{g},M)$, tj. Ψ je bijekcija.

Dokaz. Neka su f, f' forme pridružene ekstenzijama $(\mathfrak{e},\pi)$ i $(\mathfrak{e}',\pi')$ i pretpostavimo da je $[f]=[f']$. Tada postoji $g\colon \mathfrak{g}\to M$ takvo da je $f'-f=d^1g$. Za cijepanje $\sigma''=\sigma'+i'\circ g : \mathfrak{g}\to\mathfrak{e}'$ dobivamo formu $f'' : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to M$ takvu da je $f=f''$. Tada je prema konstrukciji $M\rtimes_f \mathfrak{g}$ s projekcijom na $\mathfrak{g}$ ekvivalentno ekstenziji $(\mathfrak{e},\pi)$. Kako je $M\rtimes_{f''}\mathfrak{g}$ s projekcijom na $\mathfrak{g}$ ekvivalentno $(\mathfrak{e},\pi')$, a izomorfno (kao Liejeva algebra) s $M\rtimes_f\mathfrak{g}$ slijedi da su početne ekstenzije ekvivalente. Time smo dokazali da je Ψ injekcija.

Neka je f bilo koja 2-forma. Lako se provjerava da je uvjet $d^2f=0$ dovoljan da s 9.1 bude definirana strukturu Liejeve algebre na $M\times\mathfrak{g}$. Dakle, za $[f]\in H^2_{Lie}(\mathfrak{g},MM)$ Ψ klasu ekstenzije

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M\rtimes_f\mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

preslikava u $[f]$. ∎

Pređimo sada na slučaj Liejevih algebri u **LP**. Budući da je **LP** potkategorija kategorije lančanih kompleksa, a u 7. poglavlju smo pokazali što su monomorfizmi, epimorfizmi, jezgre, kojezgre u potonjoj kategoriji znamo ih opisati i u **LP**.

Objekt $M \to \mathfrak{g}$ je abelova Liejeva algebra u **LP** ako je $\mathfrak{g}$ abelova Liejeva algebra, a djelovanje od $\mathfrak{g}$ na M trivijalno. Ekstenzija Liejevih algebri u **LP** je kratak egzaktan niz Liejevih algebri

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\phi"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & W \arrow[r, "i"] & \mathfrak{h} \arrow[r, "p"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

u **LP** pri čemu je $\phi : V \to W$ abelova Liejeva algebra u **LP**. Na objektu $\phi : V \to W$ definiramo strukturu lijevog modula nad Liejevom algebrom $(M, \mathfrak{g})$ u **LP** s

$$[g, w] = i^{-1}[p^{-1}(g), i(w)],$$

$$[g, v] = j^{-1}[p^{-1}(g), j(v)],$$
$$\nu(m \otimes w) = -j^{-1}[i(w), q^{-1}(m)]$$

za $w \in W, v \in V, m \in M, g \in \mathfrak{g}$. Budući da je $V \to W$ abelova definicije su dobre te se lako provjerava da vrijedi $[f(m), w] = \phi(\nu(m \otimes w))$.

Za svako cijepanje $(t : M \to N, s : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h})$ morfizma (q, p) možemo definirati 2-formu u **LP**, tj. morfizam $(f_1, f_0) : \Lambda(M \to \mathfrak{g}) = (\mathfrak{g} \otimes M \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}) \to (V \to W)$ s

$$f_1(g, m) = t([g, m]) - [s(g), t(m)],$$

$$f_0(g_1, g_2) = s([g_1, g_2]) - [s(g_1), s(g_2)].$$

Na objektu $(V \times M \to W \times \mathfrak{g})$ definiramo strukturu Liejeve algebre u **LP** tako da dolje stavimo $W \rtimes_{f_0} \mathfrak{g}$, a djelovanje od $W \rtimes_{f_0} \mathfrak{g}$ na $V \times M$ definiramo s

$$(w, g) \cdot (v, m) = ([g, v] - \nu(m \otimes w) + f_1(g, m), [g, m].$$

R. Kurdiani u [20] konstruira analogon Chevalley-Eilenbergovog kompleksa u **LP**, no ne dokazuje vezu druge kohomologije s ekstenzijama. Budući da je ideja ovog rada prezentirati različite algebre u različitim kategorijama na ovom mjestu ćemo se ipak zadovoljiti samo ovakvim opisom 2-kociklusa u **LP**.

9.5 Zatvorenost Loday-Pirashvilijeve monoidalne kategorije

Tenzorski produkt u **LP** je lijevo adjungirani funktor internom hom-funktoru, tj.

$$\hom(A, \underline{\hom}(B, C)) \cong \hom(A \otimes B, C).$$

Ova činjenica nije dokazana u [28], pa ćemo njen dokaz napraviti u nastavku.

U **LP** kategoriji postoji interni hom-funktor. Neka su ($\underline{V} = f\colon V \to W$) i ($\underline{V'} = f'\colon V' \to W'$) objekti u **LP**. Tada je

$$\underline{\mathrm{hom}}(\underline{V}, \underline{V'}) = (\phi\colon X \to Y),$$

gdje je

$$\begin{aligned} Y &= \mathrm{hom}_{LP}(\underline{V}, \underline{V'}) = \{\alpha : V \to V', \beta : W \to W' \mid f' \circ \alpha = \beta \circ f\}, \\ X &= \{(\alpha, \beta, \varphi \mid \varphi : W \to V', \beta = f' \circ \varphi\}, \end{aligned}$$

a ϕ preslikavanje koje zaboravlja dijagonalu φ.

9.5.1. Adjunkcija tenzorskog produkta $-\otimes B$ i hom-objekta hom$(B, -)$ u LP.

Dokaz. Neka su A, C neka dva objekta u **LP**. Želimo pokazati da postoji prirodni izomorfizam ψ između $\mathrm{hom}(A \otimes B, C)$ i $\mathrm{hom}(A, \underline{\mathrm{hom}}(B, C))$. Elementi u $\mathrm{hom}(A \otimes B, C)$ su trojke

$$q = (q_0\colon A_0 \otimes B_0 \to C_0, q_1\colon A_1 \otimes B_0 \to C_1, q_2\colon A_0 \otimes B_1 \to C_1)$$

takve da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} A_1 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 \arrow[r, "q_1+q_2"] \arrow[d, "f_A \otimes B_0 + A_0 \otimes f_B"'] & C_1 \arrow[d, "f_C"] \\ A_0 \otimes B_0 \arrow[r, "q_0"] & C_0. \end{tikzcd}$$

S druge strane, označimo li $\underline{\mathrm{hom}}(B, C) = (\phi : X \to Y)$, elementi u $\mathrm{hom}(A, \underline{\mathrm{hom}}(B, C))$ su parovi

$$p = (p_1\colon A_1 \to X, p_0\colon A_0 \to Y)$$

takvi da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f_A"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ A_0 \arrow[r, "p_0"] & Y. \end{tikzcd}$$

Definirajmo

$$\begin{aligned} (\psi(q))_0(a_0) &= (q_2(a_0, .), q_0(a_0, .)); \\ (\psi(q))_1(a_1) &= (q_2(f_A(a_1), .), q_0(f_A(a_1), .), q_1(a_1, .)). \end{aligned}$$

Tada je očito $\psi(q) \in \mathrm{hom}(A, \mathrm{hom}(B, C))$, tj. dobiveni par zadovoljava komutativni dijagram. Dakle, konstruirali smo preslikavanje $\psi\colon \mathrm{hom}(A \otimes B, C) \to \mathrm{hom}(A, \underline{\mathrm{hom}}(B, C))$ koje je očito linearno.

Nadalje, definirajmo

$$\begin{aligned} (\psi'(p))_0(a_0 \otimes b_0) &= (p_0(a_0))_0(b_0); \\ (\psi'(p))_1(a_1 \otimes b_0) &= (p_1(a_1))_\varphi(b_0); \\ (\psi'(p))_2(a_0 \otimes b_1) &= (p_0(a_0))_1(b_1). \end{aligned}$$

Tada je isto $\psi'(p) \in \hom(A \otimes B, C)$ jer za dane a_0, a_1 imamo komutativne dijagrame (elementi u X i Y):

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "(p_0(a_0))_1"] \arrow[d, "f_B"'] & C_1 \arrow[d, "f_C"] \\ B_0 \arrow[r, "(p_0(a_0))_0"] & C_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "(p_1(a_1))_1"] \arrow[d, "f_B"'] & C_1 \arrow[d, "f_C"] \\ B_0 \arrow[r, "(p_1(a_1))_0"] \arrow[ur, "(p_1(a_1))_\varphi"] & C_0, \end{tikzcd}$$

pa po elementima zaista imamo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd} a_1 \otimes b_0 + a_0 \otimes b_1 \arrow[r] \arrow[d] & (p_1(a_1))_\varphi(b_0) + (p_0(a_0))_1(b_1) \arrow[d] \\ f_A(a_1) \otimes b_0 + a_0 \otimes f_B(b_1) \arrow[r] & (p_0(f_A(a_1))_0(b_0) + (p_0(a_0))_0(f_B(b_1)) \end{tikzcd}$$

Dakle, definirali smo preslikavanje $\psi' \colon \hom(A, \underline{\hom}(B, C)) \to \hom(A \otimes B, C)$ koje je također očito linearno, te vrijedi da su $\psi\psi'$ i $\psi'\psi$ identitete. Dakle, ψ je izomorfizam. Ovo smo radili za fiksne A, C, pa označimo sa ψ_{AC} ovako dobiveno preslikavanje ψ za A i C.

Ostaje pokazati prirodnost preslikavanja ψ u A i C. No na sličan način pokazuje se da ako imamo morfizme $C \xrightarrow{\mathrm{g}} C'$ i $A' \xrightarrow{\mathrm{h}} A$ u **LP** sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} \hom(A \otimes B, C) \arrow[r, "\psi_{AC}"] \arrow[d, "\hom(h \otimes B, g)"] & \hom(A, \underline{\hom}(B, C)) \arrow[d, "\hom(h, \underline{\hom}(B, g))"] \\ \hom(A' \otimes B', C') \arrow[r, "\psi_{A'C'}"] & \hom(A', \underline{\hom}(B', C')). \end{tikzcd}$$

■

Nadalje definiramo $\underline{\mathrm{End}}(\underline{V}) := \underline{\hom}(\underline{V}, \underline{V})$. Iz adjunkcije u prethodnoj točki slijedi da je $\underline{\mathrm{End}}(\underline{V})$ zaista unutarnji end-objekt u **LP** kako je definirano u 3.6.3, tj. da ima univerzalno svojstvo. U [20] je pokazano da je $\underline{\mathrm{End}}(\underline{V})$ asocijativna algebra u **LP** pri čemu su množenje na Y, te djelovanje na X dani sa

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta)(\alpha', \beta') &= (\alpha\alpha', \beta\beta'), \\ (\alpha', \beta')(\alpha, \beta, \varphi) &= (\alpha'\alpha, \beta'\beta, \alpha'\varphi), \\ (\alpha, \beta, \varphi)(\alpha', \beta') &= (\alpha\alpha', \beta\beta', \varphi\beta'). \end{aligned}$$

Posebno, prema 4.1. u [28] $\underline{\mathrm{End}}(\underline{V})$ je Liejeva algebra u **LP**.

9.5.2. Definicija. Evaluacijsko preslikavanje na algebri $\underline{\mathrm{End}}(\underline{V})$ je morfizam u **LP**

$$ev \colon \underline{\mathrm{End}}(\underline{V}) \otimes \underline{V} \to \underline{V}$$

koji se sastoji zapravo od tri preslikvanja ($ev_X \colon X \otimes W \to V, ev_V \colon Y \otimes V \to V, ev_W \colon Y \otimes W \to W$) zadana s

$$\begin{aligned} ev_X((\alpha, \beta, \varphi), w) &= \varphi(w), \\ ev_V((\alpha, \beta), v) &= \alpha(v), \\ ev_W((\alpha, \beta), w) &= \beta(w). \end{aligned}$$

ev je zaista morfizam u **LP** zbog definicije prostora X.

Poglavlje 10

Algebre u kategorijama lančanih kompleksa

10.1 Tenzorska algebra

10.1.1. Definicija. Tenzorska algebra $T(V)$ vektorskog prostora V je vektorski prostor $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} V^{\otimes n}$ sa strukturom algebre definiranom na generatorima s

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) \bigotimes (x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+m}) = x_1 \otimes \cdots x_n \otimes x_{n+1} \otimes \cdots x_{n+m}.$$

Na tenzorskoj algebri se može zadati struktura koalgebre s

$$\Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i=0}^{n} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i) \bigotimes (x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n).$$

No, možemo definirati čak strukturu Hopfove algebre, ali s drukčijom strukturom koalgebre

$$\Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma\in Sh(i,n-i)} (x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i)}) \bigotimes (x_{\sigma(i+1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}),$$

pri čemu je $Sh(i, n-i)$ skup svih permutacijama $\sigma \in S_n$ za koje vrijedi $\sigma(j) < \sigma(j+1)$ za sve $j \neq i$.

Lako se provjeri da je na taj način dobivena bialgebra, a antipod se zadaje s

$$S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (-1)^n (x_n \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}).$$

Spomenimo još da je tenzorska algebra $T(V)$ univerzalni objekt nad V u kategoriji algebri, pa se preslikavanje T koje vektorskim prostorima pridružuje njihove tenzorske algebre jednostavno proširuje do funktora iz kategorije vektorskih prostora u kategoriju algebri. Funktor T je lijevo adjungiran zaboravnom funktoru, pa tenzorsku algebru $T(V)$ ponekad zovemo slobodnom algebrom nad V.

10.1.2. Definicija. **Simetrična algebra** $S(V)$ nad vektorskim prostorom V je kvocijent tenzorske algebre s idealom generiranim elementima oblika $v \otimes w - w \otimes v$.

Simetrična algebra također zadovoljava univerzalno svojstvo, ali kao komutativna unitalna asocijativna algebra. Primjetimo da je simetrična algebra $S(V)$ zapravo izomorfna algebri polinoma u nepoznanacima koje čine bazu za V.

10.1.3. Definicija. **Vanjska algebra** $\Lambda(V)$ nad vektorskim prostorom V je kvocijent tenzorske algebre s idealom generiranim elementima oblika $v \otimes v$.

Inducirani produkt na $\Lambda(V)$ označavamo s $\wedge$. Primjetimo da je taj produkt (nazivamo ga vanjski) antikomutativan $x \wedge y = -y \wedge x$. Zapravo, za $n \in S_n$ vrijedi

$$x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(n)} = sgn(\sigma) x_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

Strukutura koalgebre (a onda i bialgebre) se definira slično kao kod tenzorske algebre s

$$\Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in Sh(i,n-i)} sgn(\sigma)(x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i)}) \bigotimes (x_{\sigma(i+1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}).$$

Vanjska algebra zadovoljava univerzalno svojstvo u kategoriji kokomutativnih koalgebri.

10.2 Graduirane algebre, dg-algebre

10.2.1. Definicija. Za prsten R kažemo da je **graduiran prsten** ako postoje potprstenovi R_i takvi da vrijedi

$$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i,$$
$$R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}.$$

Elemente potprstena R_i zovemo **homogenim elementima stupnja** i.

10.2.2. Definicija. Za modul M nad graduiranim prstenom R kažemo da je **graduirani modul** nad R ako postoje potprostori M_i takvi da je $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i, R_i\ M_j \subseteq M_{i+j}$.

10.2.3. Definicija. **Graduirana algebra** nad graduiranim prstenom R je algebra A koja je graduirani modul nad R takav da vrijedi

$$A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}.$$

10.2.4. Napomena. Za ovakve algebre još kažemo da su $\mathbb{Z}$-graduirane algebre. Naime, analogno možemo definirati G-graduirane algebre za bilo koji monoid G. Pritom je $A = \bigoplus_{i \in G} A_i, A_i\ A_j \subseteq A_{i \cdot j}$. Za $\mathbb{N}_0$-graduiranu algebru A kažemo da je pozitivno graduirana ako je $A_i = 0$ za $i < 0$. $\mathbb{Z}_2$-graduirane algebre nazivamo još superalgebrama.

10.2.5. Primjer. Algebra $\mathbf{k}[x_1, ..., x_n]$ polinoma u n varijabli nad poljem $\mathbf{k}$ je pozitivno graduirana algebra. Pri tom su homogeni elementi stupnja i upravo linearne kombinacije monoma stupnja i. Ovo je zapravo simetrična algebra nad n-dimenzionalnim vektorskim prostorom.

10.2.6. Primjer. Tenzorska, simetrična i vanjska algebra nad vektorskim prostorom su graduirane s očitom graduacijom.

10.2.7. Primjer. Budući da su najvažniji graduirani prsteni koji se pojavljuju u algebarskoj geometriji kvocijenti prstena polinoma važno je definirati graduirani ideal. Obostrani ideal I u graduiranoj algebri R je **graduirani ideal** ako je $I = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(I \cap R_i)$.

10.2.8. Definicija. Homomorfizam graduiranih algebri R i S je homomorfizam **k**-algebri $\phi\colon R \to S$ takav da je za svaki $i \in \mathbb{Z}$

$$\phi(R_i) \subseteq S_i.$$

Ukoliko je za graduirane algebre R, S homomorfizam algebri $\phi\colon R \to S$ takav da je $\phi(R_i) \subseteq S_{i+n}$ kažemo da je ϕ **homomorfizam graduiranih algebri stupnja** n.

10.2.9. Definicija. Diferencijalna graduirana algebra (ili **dg-algebra, DGA**) je graduirana algebra A s homomorfizmom $d : A \to A$ stupnja -1 takvim da je

$$d^2 = 0,$$

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^i ad(b)$$

za sve $a \in A_i, b \in A_j$. Homomorfizam d zovemo **diferencijal**.

10.2.10. Primjer. Svaka graduirana algebra ima trivijalnu strukturu dg-algebre stavimo li $d = 0$.

10.2.11. Primjer. Kohomologija $H^*(A)$ dg-algebre A je graduirana algebra.

10.2.12. Primjer. Vanjska (Grassmanova) algebra je DGA uz vanjski produkt kao produkt te vanjsku derivaciju kao diferencijal.

10.2.13. Napomena. Struktura dg-algebre ekvivalentna je strukturi algebre (monoida) u simetričnoj monoidalnoj kategoriji **Ch**. Upravo ova činjenica na neki način objašnjava naslov rada. Naš cilj je pokazati gdje se i kako pojavljuje neke vrste posebnih dg-algebri.

10.2.14. Notacija i konvencije. Dok radimo u kontekstu dg-objekata posebno je važno paziti na predznake. Zato postoje neka pravila koja na neki način omogućavaju određenu strukturu. Osnovna konvencija je da se pri komutiranju dvaju elementa stupnjeva m i n uvodi predznak $(-1)^{mn}$, tj.

$$v \otimes w = (-1)^{mn} w \otimes v$$

za v stupnja m i w stupnja n. Na nekim mjestima ćemo s $|v|$ označavati stupanj elementa v, pa ćemo gornje pravilo pisati kao

$$v \otimes w = (-1)^{|v||w|} w \otimes v,$$

a ponekad ukoliko je jasno iz konteksta na što se misli

$$v \otimes w = (-1)^{vw} y \otimes v.$$

Nadalje, za proizvoljnu permutaciju $\sigma \in S_n$ i danu n-torku $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ definiramo **Koszulov predznak** $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma; v_1, ..., v_n)$ s

$$v_{\sigma(1)} \otimes \cdots v_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_n.$$

Predznak $\varepsilon(\sigma)$ dobiven je iteracijom osnovne konvencije i je jednak $(-1)^k$ pri čemu je k broj zamjena elemenata neparnog stupnja. Predznak permutacije $sgn(\sigma)$ ponekad ćemo označavati i s $(-1)^\sigma$. Ukoliko nećemo drugačije naglasiti smatra se da grupa permutacija S_n djeluje na $V^{\otimes n}$ s

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Za preslikavanje graduiranih vektorskih prostora $f \colon V^{\otimes} \to W$ kažemo da je **simetrično** ako vrijedi

$$f(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$$

te kažemo da je **antisimetrično** ako vrijedi

$$f(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma \varepsilon(\sigma) f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

10.3 Kvadratične algebre i Koszulova dualnost

10.3.1. Definicija. **Kvadratična algebra** nad poljem $\mathbf{k}$ je pozitivna graduirana algebra A takva da je $A_0 = \mathbf{k}$, da je A generirana s A_1 te da je ideal relacija među elementima od A_1, kojeg označavamo s $R(A)$, potprostor kvadratičnih relacija, tj. $R(A) \subseteq A_1 \otimes A_1$.

U svim primjerima ćemo pretpostavljati da je $dim(A_1) < +\infty$. Ovakvu strukturu označavamo s

$$A \leftrightarrow \{A_1, R(A)\}.$$

10.3.2. Definicija. **Morfizam** kvadratičnih algebri $f \colon A \to B$ se sastoji od linearnog preslikavanja $f_1 \colon A_1 \to B_1$ takvog da je

$$(f_1 \otimes f_1)(R(A)) \subseteq R(B).$$

Kompozicija je očito dobro definirana, te kvadratične algebre uz ovako definirane morfizme čine kategoriju **QA**. Nadalje, postoji zaboravni funktor $U \colon \mathbf{QA} \to \mathbf{k}-\mathbf{Mod} \colon A \to A_1$.

10.3.3. Primjer. Tenzorska algebra $T(V) \leftrightarrow \{V, \{0\}\}$, simetrična algebra $S(V) \leftrightarrow \{V, \{v \otimes w - w \otimes v\}\}$ i vanjska algebra $\Lambda(V) \leftrightarrow \{V, \{v \otimes v\}\}$ su kvadratične algebre.

10.3.4. Definicija. **Koszulov dual** $A^!$ kvadratične algebre $A \leftrightarrow \{A_1, R\}$ definiramo kao

$$A^!(V) \leftrightarrow \{V^*, R^\perp\}$$

pri čemu je $V^* = \hom(V, \mathbf{k})$ dualni prostor prostora V, a $R^\perp = \{f \in (V^* \otimes V^*) = (V \otimes V)^* \colon f(r) = 0, \forall r \in R\}$ anihilator potprostora $R \subseteq V \otimes V$.

Osnovna linearna algebra daje $(A^!)^! = A$.

10.3.5. Propozicija. $S(V)^! = \Lambda(V*)$.

Dokaz. Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor te neka je $\{x_1, ..., x_n\}$ baza za V. Tada je potprostor R generiran elementima $x_i x_j - x_j x_i, i < j$. Neka je $\{\hat{x_1}, ..., \hat{x_n}\}$ dualna baza dane baze za V. Elementi skupa $S = \{\hat{x_i} \otimes \hat{x_i}, i = 1, ..., n\} \cup \{\hat{x_i} \otimes \hat{x_j} + \hat{x_j} \otimes \hat{x_i}, 1 \leq i < j \leq n\}$ poništavaju R, pa je $S \subseteq R^{\perp}$. Budući da je

$$dim(R^{\perp}) = dim(V^* \otimes V^*) - dim(R) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = dim([S])$$

iz linearne nezavisnosti skupa S slijedi da je S baza za $R^{\perp}$. No, onda je $S(V)^! \leftrightarrow \{V^*, R^{\perp}\} \leftrightarrow \Lambda(V^*)$. ■

Spomenimo da u kategoriji **QA** imamo čak 4 vrste produkta koji daju strukturu zatvorene simetrične monoidalne kategorije. Navest ćemo dva produkta za ilustraciju.

10.3.6. Definicija. Za kvadratične algebre A, B definiramo

$$A \circ B \leftrightarrow \{A_1 \otimes B_1, S_{(23)}(R(A) \otimes B_1^{\otimes 2} + A_1^{\otimes 2} \otimes R(B))\},$$

$$A \bullet B \leftrightarrow \{A_1 \otimes B_1, S_{(23)}(R(A) \otimes R(B))\}$$

pri čemu je $S_{(23)}$ zamjena drugog i trećeg faktora u $A_1 \otimes A_1 \otimes B_1 \otimes B_1$.

Bez dokaza navodimo nekoliko tvrdnji vezanih uz ove produkte.

10.3.7. Propozicija. $(A \circ B)^! = A^! \bullet B^!$ i $(A \bullet B)^! = A^! \circ B^!$. Algebra $K = \mathbf{k}[\varepsilon], \varepsilon^2 = 0$ je jedinični objekt za produkt $\circ$, a $L = \mathbf{k}[x] = K^!$ je jedinični objekt za $\bullet$.

Ovi produkti su posebno interesantni jer vrijedi (prema [12])

$$\mathrm{hom}(A \bullet B, C) = Hom(A, B^! \circ C).$$

Ovo pokazuje da je monoidalna kategorija $(\mathbf{QA}, \bullet, \mathbf{k}[x])$ zatvorena, a unutarnji Hom od B i C možemo definirati s

$$\mathbf{Hom}(B, C) = B^! \circ .C$$

Posebnu klasu kvadratičnih algebri čine Koszulove algebre. Koszulove algebre su se pojavile kao klasa algebri za koje je računanje Ext funktora moguće korištenjem određene vrste rezolventi koje je proučavao Stewart Priddy i koje je zvao Koszulovim rezolventama. Koszulove rezolvente su mnogo manje od bar rezolventi, a ipak imaju iste homologije. Pokazuje se da su Koszulove algebre najjednostavnija klasa algebri za koje Koszulova rezolventa trivijalnog modula ima minimalnu slobodnu rezolventu. Na ovom mjestu ćemo pokušati razjasniti ovo još malo, a više se može pronaći u pregledu [19].

Prema tom pregledu, u kategoriji konačno generiranih graduiranih modula nad graduiranom algebrom A ekvivalentno je da je objekt M plosnat, projektivan i slobodan. Zato je svaka projektivna rezolventa P u toj kategoriji slobodna, tj. $P_i = A^{b}_{i}$ za neko $b_i \in \mathbb{N}$. Morfizam $A^{b_i} \to A^{b_{i-1}}$ je određen matricom $T_i \in M_{b_i, b_{i-1}(A)}$.

10.3.8. Definicija. Rezolventa je **minimalna** ako je $T_i \in M_{b_i,b_{i-1}(A_+)}$ za sve i. Pri tom smo s A_+ označili ideal $\bigoplus_{i>0} A_i$.

Ako je A Noetherina graduirana algebra onda minimalna rezolventa postoji, a brojevi b_i su jedinstveno određeni. Motivacija za spomenuti pregled je dokaz tvrdnje da je projektivna dimenzija jednaka upravo duljini minimalne rezolvente. Nama je zanimljviji dio o Koszulovim algebrama.

10.3.9. Definicija. Graduirana Noetherina algebra A je **Koszulova algebra** ako su elementi u matricama T_i elementi prostora A_1.

10.3.10. Propozicija. Svaka Koszulova algebra je kvadratična.

Gotovo svi primjeri koje smo imali u ovom poglavlju su primjeri Koszulovih algebri, a te algebre se pojavljuju u raznim dijelovima matematike (npr. Reiner proučava Koszulove algebre u kombinatorici). Posebno važan primjer koji čitatelju može ukazati da se Koszulove algebre pojavljuju i da su važne u nekomutativnoj algebri je kvantna (nekomutativne) ravnina.

10.3.11. Primjer. (**Kvantna ravnina.**) Neka je $\mathbf{k}$ polje, te neka je $q \in \mathbf{k}$ različit od 0. Tada je kvantna ravnina algebra generirana s dva generatora x, y koji zadovoljavaju relaciju

$$x \otimes y = qy \otimes x.$$

Minimalna rezolventa trivijalnog modula $\mathbf{k}$ za kvantnu ravninu je

$$A \xrightarrow{T_2} A^2 \xrightarrow{T_1} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k}$$

pri čemu je

$$T_1(f, g) = fx + gy, T_2(f) = (-qfy, x).$$

Sada vidimo da T_1 i T_2 zaista imaju elemente koji su elementi od A_1 (vektorskog prostora razapetog s x i y), pa je kvantna ravnina zaista primjer Koszulove algebre.

10.3.12. Kvadratični operadi Na kraju ove glave o Koszulovoj dualnosti spomenimo da su prema Kontsevichevim ideja Ginzburg i Kapranov u [13] 1994. uveli pojam **kvadratičnog operada** kao operada nad kojim su algebre određene kvadratične algebre. Za kvadratične operade u spomenutom radu uvodi se pojam Koszulove dualnosti i pokazuje se da je operad komutativnih algebri dualan operadu Liejevih algebri te da je operad asocijativnih algebri dualan sam sebi.

Proučavajući Leibnizove algebre, Loday je primjetio da su spomenute tri "vrste" algebra dio jedne veće mreže odnosa posebno lijepih kvadratičnih algebri koju naziva **"operadični leptir"**. Operad Leibnizovih algebri dualan je operadu tzv. **Zinbiel** (ili prosto "dualnih Leibnizovih") algebri, diasocijativne algebre dualne su tzv. drvolikim (dendriformnim) algebrama, te glavni funktori među tim algebrama također imaju svoje duale. U svom radu [26] opisuje dialgebre kao algebre koje su prema Leibnizovim algebrama isto što i asocijativne prema Liejevim. Npr. postoji dual situacije u kojoj od svake asocijativne dialgebre možemo načiniti Leibnizovu s lijevim adjungiranim univerzalnim omotačkim funktorom.

Prema Lodayu, svi ovi tipovi algebri nad kvadratičnim operadima (asocijativne, komutativne, Liejeve, Leibnizove, dendriformne Zinbielne i asocijativne dialgebre) korisne su u algebarskoj K-teoriji.

10.4 A$_\infty$-algebre

10.4.1. Povijest i motivacija. A_∞-prostore i A_∞-algebre (odnosno jako homotopski asocijativne algebre, SHA-algebre) je šezdesetih godina 20. st. prvi uveo J. Stasheff kao alat za proučavanje topoloških prostora "nalik grupi". Kroz sljedeća dva desetljeća A_∞-strukture su se razvijale kroz teoriju homotopija, a od devedesetih godina sve se promjenilo otkrivanjem koliko su ove strukture važne u geometriji, algebri i matematičkoj fizici. Posebno utjecaj je dao govor M. Kontsevicha postavivši hipotezu u kojoj se zrcalna simetrija dovodi u vezu s A_∞-kategorijama.

Jedan od osnovnih motivacijskih problema je možemo li samo iz njegove kohomologije rekonstruirati kompleks A-modula za asocijativnu unitalnu algebru A. Odgovor je naravno da je to nemoguće osim u nekim specijalnim situacijama, no koju dodatnu strukturu moramo pretpostaviti na kohomologiji da bi se problem mogao riješiti? Odgovor je da kohomologija ima jedinstvenu strukturu A_∞-modula nad A koja sadrži upravo dovoljno informacija za rekonstrukciju.

A_∞- i L_∞-algebre su kompleksi koji su generalizacije (kao što ćemo vidjeti) asocijativnih i Liejevih algebri pri čemu uvjet asocijativnosti, odnosno Jacobijev identitet vrijedi samo do na homotopiju, a ta homotopija opet zadovoljava neki svoj uvjet do na homotopiju i tako u beskonačnost. Sama ideja 'koherencije do na homotopiju' je mnogo jasnija razmotrimo li prvo primjer A_∞-prostora.

10.4.2. Primjer. Prostor petlji. Neka je $(X, *)$ topološki prostor s baznom točkom $*$ te neka je ΩX prostor baznih petlji u X: točka u ΩX je neprekidno preslikavanje $f\colon S^1 \to X$ koje prelikava baznu točku kružnice u baznu točku $*$. Kompozicijsko preslikavnje

$$m_2\colon \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$$

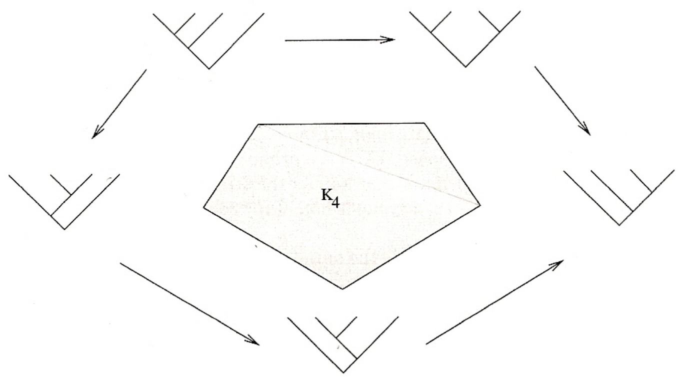
preslikava par petlji (f_1, f_2) u petlju $f_1 * f_2 = m_2(f_1, f_2)$ dobivenu prolazeći f_1 prvom polovicom kružnice, a f_2 drugom polovicom kružnice.

Ovako definirana kompozicija nije asocijativna jer za $(f_1 * f_2) * f_3$ prvu polovicu kružnice dijelimo na četvrtine dok za $f_1*(f_2*f_3)$ drugu dijelimo drugu polovicu kružnice. Očito postoji homotopija $m_3\colon I \times \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$ koja spaja dvije mogućnosti za kompoziciju tri petlje.

Želimo li komponirati 4 petlje postoji 5 načina kako da to učinimo (općenito za n petlji postoji $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ načina, Catalanov broj). Donja slika prikazuje kako možemo koristeći m_3 dobiti dvije staze homotopije koje povezuju kompoziciju $(f_1, f_2, f_3, f_4) \mapsto ((f_1 * f_2) * f_3) * f_4$ i kompoziciju $(f_1, f_2, f_3, f_4) \mapsto f_1 * (f_2 * (f_3 * f_4))$. Ove staze su očito homotopne i pripadnu homotopiju označavamo s

$$m_4\colon K_4 \times (\Omega X)^4 \to \Omega X$$

pri čemu je K_4 pentagon omeđen spomenutim stazama. Na taj način bismo mogli nastaviti dalje.



Stasheff je definirao politope K_n dimenzije $n-2$ za sve $n \geq 2$ ($K_2 = *, K_3 = I$) i definirao je općenito A_∞**-prostor** kao topološki prostor Y s preslikavanjima

$$m_n\colon K_n \times Y^n \to Y, n \geq 2$$

koja su kompatibilna i dozvoljavaju "striktnu jedinicu". Prostor petlji je osnovni primjer takvog prostora. No, vrijedi i obratno, svaki topološki prostor koji ima strukturu A_∞ prostora i čije komponente povezanosti čine grupu je homotopski ekvivalentan nekom prostoru petlji.

Ukoliko je Y A_∞-prostor singularni lančani kompleks od Y je paradigmatski primjer A_∞-algebre.

10.4.3. Definicija. A_∞**-algebra** nad poljem $\mathbf{k}$ je graduirani vektorski prostor $A = \bigoplus A_i$ s homorfizmima graduiranih vektorskih prostora stupnja $2-n$

$$m_n\colon A^{\otimes n} \to A, n \geq 1$$

koji zadovoljavaju

$$\sum_{n=r+s+t} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}) = 0.$$

10.4.4. Napomena. Ovdje smo koristili konvenciju za predznake prema Getzler-Jones koja reducira broj simbola. Prema Koszulovom pravilu za predznake imamo $(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y)$.

10.4.5. Napomena. Gornji uvjet nam za $n = 1$ daje $m_1^2 = 0$ što povlači da je (A, m_1) lančani kompleks. Nadalje, za $n = 2$ imamo preslikavanje $m_2\colon A \otimes A \to A$ koje zadovoljava

$$m_1 m_2 - m_2(m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1) = 0$$

što znači da je m_1 (graduirana) derivacija obzirom na množenje m_2. Ako označimo $m_2(a,b) = ab$ onda pazeći na konvencije imamo

$$m_1(ab) = m_1(a)b + (-1)^{|a|} a m_1(b).$$

Konačno za $n = 3$ imamo

$$m_2(1 \otimes m_2 - m_2 \otimes 1) = m_1 m_3 + m_3(m_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m_1).$$

S lijeve strane je **asocijator** za m_2, a s desne homotopija lančanog kompleksa (A, m_1). Dakle, asocijativnost množenja m_2 vrijedi samo do na homotopiju!

10.4.6. Primjer. Ako je $A_i = 0$ za sve $i \neq 0$ onda je $A = A_0$ i $m_n = 0$ za sve $n \neq 2$ (jer su m_n stupnja $n-2$). Dakle, dobivamo klasičnu asocijativnu algebru.

10.4.7. Primjer. Ako je $m_n = 0$ za $n \geq 3$ tada je A asocijativna dg-algebra. Obratno, svaka dg-algebra ima strukturu A_∞-algebre stavimo li $m_n = 0, n \geq 3$.

10.4.8. Primjer. Homologija lančanog kompleksa (A, m_1) je asocijativna graduirana algebra s množenjem induciranim od m_2.

Označimo $d = m_1, m = m_2, h = m_3$. Budući da je $H_n(A) = Ker(d_n)/Im(d_{n+1})$, element od $H_n(A)$ ćemo označavati s $[a] = a + Im(d_{n+1})$ pri čemu je $d_n(a) = 0$. Pokažimo da je s

$$m'([a],[b]) = [m(a \otimes b)]$$

dobro definirano množenje na $H_\bullet(A)$ i da to množenje poštuje gradaciju $\bigoplus_{n \in ZZ} H_n(A)$.

Neka je $[a] = [a'] \in H_p(A)$ i $[b] = [b'] \in H_q(A)$. Tada je $d_p(a) = d_p(a') = 0, d_q(b) = d_q(b') = 0$ te postoje $x \in A_{p+1}, y \in A_{q+1}$ takvi da je $d_{p+1}(x) = a - a', d_{q+1}(y) = b - b'$. Slijedi:

$$\begin{aligned} m(a \otimes b) - m(a' \otimes b') &= m(a \otimes (b - b') + (a - a') \otimes b') = \\ &= m(a \otimes d(y) + d(x) \otimes b') = \\ &= m(a \otimes d(y) + (-1)^a d(a) \otimes y + (-1)^x x \otimes d(b') + d(x) \otimes b') = \\ &= d(m((-1)^a a \otimes y + x \otimes b')) \end{aligned}$$

što pokazuje da je $m(a \otimes b) - m(a' \otimes b') \in Im(d_{p+q+1})$, pa je m' zaista dobro definirano. Očito m' poštuje gradaciju, tj. $H_p(A)H_q(A) \subseteq H_{p+q}(A)$.

Pokažimo još asocijativnost množenja m'.

$$\begin{aligned} m'(m'([a],[b]),[c]) - m'([a], m'([b],[c])) &= [m(m(a \otimes b) \otimes c)] - [m(a \otimes m(b \otimes c))] = \\ &= [d(h(a \otimes b \otimes c)) + h(d(a) \otimes b \otimes c + (-1)^a a \otimes d(b) \otimes c + (- \\ &= [d(h(a \otimes b \otimes c))] = 0 \end{aligned}$$

jer je $d(a) = d(b) = d(c) = 0$.

10.4.9. A_∞-operad. Operadi mogu biti dosta korisni kad se govori o ∞-algebrama. Markl je u svom radu opisao da bi za dani operad $\mathcal{O}$ jako homotopski operad $\mathcal{O}_\infty$ trebao biti minimalni model od $\mathcal{O}$. Za neke klase operada je moguće eksplicitno opisati minimalni model kao što su to npr. Ginzburg i Kapranov učinili za Koszulove operade.

A_∞-operad je operad dg-vektorskih prostora dan na sljedeći način. Neka je $A_\infty(n)$ (za $n \geq 2$) vektorski prostor razapet klasama ekvivalencije povezanih planarnih stabala s korjenskim bridom i n listova označenih brojevima 1 do n pri čemu unutarnji vrhovi mogu imati stupanj ≥ 3 (za razliku od operada za asocijativne algebre gdje je svaki unutarnji brid morao imati stupanj točno 3). Za $n = 1$ imamo samo jedno stablo s jedinstvenim bridom između korijena i vrha, a za $n = 0$ imamo prazan skup.

Za $T \in A_\infty(n)$ definiramo stupanj (u gradaciji graduiranog vektorskog prostora $A_\infty(n)$) formulom

$$|T| = v(T) + 1 - n = e(T) + 1 - 2n$$

gdje je $v(T)$ broj vrhova, a $e(T)$ broj bridova u stablu (tj. u nekom reprezentantu klase) T.

Ponovno definiramo djelovanje grupe permutacija kao permutiranje oznaka listova, a kompozicije kao ugnježđivanje - pri čemu moramo paziti na predznake: ukoliko stavljamo stablo T_2 umjesto i-tog lista u stablu T_1 rezultirajuće stablo moramo pomnožiti s predznakom $(-1)^{(e(T_2)(n_1(i))}$ pri čemu je $n_1(i)$ broj bridova koji su desno od i-tog lista u T_1 (desno od jedinstvenog puta od korijena do i-tog lista bilo gdje u stablu).

Još je potrebno definirati diferencijal $d\colon A_\infty(n) \to A_\infty(n)$. Zato je potrebno uvesti pojam *kontrakcije unutarnjeg brida*. Neka je e brid u stablu T. S T/e označavamo stablo dobiveno od T kontrakcijom brida e.

Tada definirimo

$$dT := \sum_{T' : T = T'/e} \varepsilon T$$

pri čemu je ε predznak dobiven prema broju bridova lijevo ili ispod brida e u stablu T' (ne računajući stablo).

A. A.Voronov je u svojim bilješkama zapisao i nekoliko glavnih koraka u dokazu sljedećih tvrdnji.

10.4.10. Propozicija. Operator d zadovoljava $d^2 = 0$. Struktura operada na A_∞ je kompatibilna s diferencijalom d, tj. A_∞ je dg-operad.

10.4.11. Teorem. Algebra nad A_∞-operadom je A_∞-algebra.

Dokaz. Operacije m_n dolaze od *korola*, tj. od stabala sa samo jednim unutarnjim vrhom stupnja $n + 1$. ■

10.4.12. A_∞-kategorije. Fukaya je prvi radio sa strukturama za koje se kasnije pokazalo da se uklapaju u Kontsevichevu definiciju A_∞-kategorija. Ovdje nećemo dati čak niti Kontsevichevu definiciju jer iziskuje mnogo novih pojmova (iako ne odveć kompliciranih), no spomenimo da je A_∞-kategorije prirodna generalizaicija A_∞-algebri jer su A_∞-kategorije s jednim objektom upravo A_∞-algebre. Fukaya povezuje A_∞-kategorije s Floerovom homologijom, a Kontsevich razvija geometrijski pristup i poveznice sa zrcalnom simetrijom.

10.5 L_∞-algebre

Pri definiranju A_∞-algebri pojavila su se preslikavanja m_n koja generaliziraju množenje u asocijativnoj algebri. S Liejevim algebrama može postupiti na sličan način generalizirajući zagradu, ali ćemo opisati i alternativnu definiciju koja je mnogo kompaktnija.

10.5.1. Definicija 1. L_∞**-algebra** je graduirani vektorski prostor $V = \bigoplus_{i\geq 1} V_i$ s kolekcijom antisimetričnih homomorfizama graduiranih prostora $l_n\colon V^{\otimes n} \to V$ stupnja $n-2$ takvih da vrijedi

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma\in Sh(i,n-i)} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sigma}(-1)^{i(j-1)} l_j(l_i(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(i)}) \otimes v_{\sigma(i+1)} \otimes \cdots v_{\sigma(n)}) = 0.$$

Napomena. Koristeći antisimetričnost možemo definirati preslikavanja $l_n\colon \Lambda^n(V) \to V$ koja zadovoljavaju isti identitet.

Napomena. Za $n = 1, 2$ generalizirani Jacobijev uvjet iz definicije glasi

$$l_1^2 = 0,$$

$$l_1(l_2(a \otimes b)) = l_2(l_1(a) \otimes b) + (-1)^a l_2(a \otimes l_1(b)),$$

pa je svaka L_∞-algebra dg-algebra. U literaturi se za L_∞-algebre koristi i naziv jako homotopska Liejeva algebra (sh-Liejeva algebra).

10.5.2. Primjer. Graduirana Liejeva algebra je graduirani vektorski prostor V s antisemtričnim bilinearnim preslikavanjem (kojeg također zovemo zagrada) $[-,-]\colon V\otimes V \to V$ takvim da je $[V_p, V_q] \subseteq V_{p+q}$ i da vrijedi graduirani Jacobijev identitet

$$[u, [v, w]] = [[u, v], w] + (-1)^{pq}[v, [u, w]].$$

dg-Liejeva algebra primjer je L_∞-algebre uz $l_1 = d, l_2 = [-,-], l_3 = 0$. Općenito L_∞-algebra nije graduirana Liejeva algebra, već graduirani Jacobijev identitet vrijedi do na homotopiju.

Sada ćemo dati alternativnu definiciju L_∞-algebri, no prije toga uvedimo pojam koderivacije u bilo kojoj koalgebri.

10.5.3. Definicija. Neka je $\mathbf{k} \supset \mathbb{Q}$ polje. Za $\mathbf{k}$-linearno preslikavanje $D\colon H \to H$ u $\mathbf{k}$-koalgebri H s komnoženjem Δ kažemo da je **koderivacija** ako je

$$(D \otimes 1 + 1 \otimes D) \circ \Delta = \Delta \circ D.$$

Za graduirane koalgebre definiramo graduiranu koderivaciju pri čemu se u gornjem uvjetu primjenjuje Koszulovo pravilo.

10.5.4. Definicija 2. L_∞**-algebra** je graduirani vektorski prostor $V = \bigoplus_{i\geq 1} V_i$ s graduiranom koderivacijom stupnja -1

$$D\colon \Lambda(V) \to \Lambda(V)$$

takvom da je $D^2 = 0$.

Neka je $D = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots$ pri čemu su d_i preslikavanja stupnja $i-1$. Budući da smo već opisali strukturu koalgebre na $\Lambda(V)$ možemo uvjet da je D koderivacija ekvivalentno zapisati kao familiju uvjeta

$$d_i(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_j \sum_{\sigma \in Sh(j,n-j)} \varepsilon(\sigma) d_i(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(j)}) \otimes v_{\sigma(j+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Raspisivanjem uvjeta $D^2 = 0$ dobivamo redom

$$d_1^2 = 0,$$

$$d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0,$$

$$d_1 d_3 + d_2 d_2 + d_3 d_1 = 0, ...$$

Odavdje vidimo da zaista dobivamo strukturu sličnu kao kod definicije 1. Dokaz ekvivalencije dviju definicija je popriličan zbog mnogih predznaka na koje treba paziti, a dan je u [23].

10.5.5. Primjer. Asocijativna algebra ima strukturu Liejeve algebre ukoliko definiramo zagradu (komutator) s $[x, y] = xy - yx$. Radimo li s graduiranim algebrama moramo uključiti i predznake $[x, y] = xy - (-1)^{xy} yx$. Ova konstrukcija se može provesti i u jako homotopskom kontekstu.

Neka je A A_∞-algebra pri čemu su m_n preslikavanja iz same definicije A_∞-algebre. **sh-komutator** na A definiramo s

$$l_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \varepsilon(\sigma) m_n(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}).$$

Preslikavanja l_n zaista čine sturkturu L_∞-algebre na A, no ta provjera iziskuje poprilično zahtjevan račun.

10.5.6. Napomena. Za kraj ćemo spomenuti neke novije rezultate koji potvrđuju da se teorija Liejevih algebri može u određenoj mjeri proširiti na L_∞-algebre te uputiti na literaturu gdje se može vidjeti primjena tih teorija.

V. Baranovsky u [3] konstruira univerzalnu omotačku algebru $U(L)$ L_∞-algebre L s A_∞-strukturom.

S drufe strane, u [37] se uvodi Chevalley-Eilenbergova dg-algebra pridružena L_∞-algebri te se konstruira Weilova algebra za L_∞-algebru L koja se podudara s Weilovom algebrom klasično kada je L Liejeva algebra.

J. Baez i A. Crans u [2] uvode Liejeve 2-algebre u kontekst unutarnjih kategorija u **Vect** te ih dovode u vezu s L_∞-algebrama s 2 netrivijalna člana.

Bibliografija

[1] J. Baez, *Universal algebra and diagrammatic reasoning*, Geometry of Computation 2006.

[2] J. Baez, A. Crans, *Higher-dimensional algebra IV: Lie 2-algebras*, Theory and Application of Categories, Vol 12, No. 15, 2004.

[3] V. Baranovsky, *A universal enveloping for L_∞-algebras*, 2007.

[4] M. Bašić, *Derivacije unutarnje simetrične algebre i Weylova algebra u Loday-Pirashvilijevoj tenzorskoj kategoriji*, rad za Rektorovu nagradu Sveučilišta u Zagrebu, 2008.

[5] J. M. Boardman, R. M. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 347, Springer-Verlag 1973.

[6] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1, Basic Category Theory*, Cambridge Uni. Press

[7] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2, Categories and Structures*, Cambridge Uni. Press

[8] T. Brzeziński, R. Wisbauer, *Corings and comodules*, London Math. Soc. Lec. Note Series 309, Cambridge UNiv. Press 2003.

[9] S. C. Coutinho, *A Primer of Algebraic D-modules*, Cambridge University Press 1995.

[10] K. Ebrahimi-Fard, *Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation*, Lett. Math. Phys. 61 (2002), no. 2, 139–147.

[11] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer 1967.

[12] S. I. Gelfand, Y. I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer 1988.

[13] V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads* , Duke Math. J. 76 (1994), no. 1, 203–272.

[14] H. Herrlich, G. E. Strecker, *Category Theory*, Allyn and Bacon Inc. 1973.

[15] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer 1974.

[16] M. Jibladze, T. Pirashvili, *Quillen cohomology and Baues-Wirsching cohomology of algebraic theories*, J. Algebra, 1991.

[17] B. Keller,*Introduction to A-infinity algebras and modules*, Homology, Homotopy and App., vol. 3., No. 1, 2001., 1–35.

[18] G. M. Kelly, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, Reprints in Theory & Appl. Cat. No. 10 (2005.)

[19] U. Krähmer, *Notes on Koszul algebras*, Warsaw

[20] R. Kurdiani, *Cohomology of Lie Algebras in the Tensor Category of Linear Maps*, Comm. Algebra 27 (1999), no. 10, 5033–5048.

[21] R. Kurdiani, T. Pirashvili, *A Leibniz algebra structure on the second tensor power*, J. Lie Theory 12 (2002), no. 2, 583–596.

[22] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga 1967.

[23] T. Lada, J. Stasheff, *Introduction to sh Lie Algebras for physicists*, UNC-MATH-92/2

[24] T. Leinster, *Higher Operads, Higher Categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **298**, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, [arXiv:math/0305049] [math.CT].

[25] J. L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 301. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[26] J. L. Loday, *Dialgebras and related operads*, 7–66, Lecture Notes in Math., 1763, Springer, Berlin, 2001.

[27] J. L. Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann. 296 (1993.) 139–158.

[28] J. L. Loday, T. Pirashvili, *The tensor category of linear maps and Leibniz algebras*, Georgian Math. Journal 5 (1998.) No. 3, 263–276.

[29] J. Lurie, *Derived Algebraic Geometry II: Noncommutative Algebra*, [arXiv:0709.3091]

[30] J. Lurie, *Higher topos theory*, [arXiv:math/0608040]

[31] V. Lyubashenko, Category of A_∞-categories, Kiev, 2008.

[32] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, GTM 5, Springer 1971.

[33] S. Majid, *Foundations of quantum group theory*, CUP 1995.

[34] Yu. I. Manin, *Quantum groups and noncommutative geometry*, Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC, 1988.

[35] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Springer-Verlag, 1972.

[36] A. L. Rosenberg, *Noncommutative schemes*, Compositio Math. 112 (1998), pp. 93–125.

[37] H. Sati, U. Schreiber, J. Stasheff, *L-infinity algebra connections and applications to String- and Chern-Simons n-transport*, [arXiv:0801.3480v2]

[38] Z. Škoda, *Noncommutative localization in noncommutative geometry*, London Math. Society Lecture Note Series 330, ed. A. Ranicki; pp. 220–313, math.QA/0403276.

[39] A. A. Voronov, *Topics in Mathematical Physics* , lecture notes, 2001.

[40] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1994.