SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Rafael Mrđen

KOHOMOLOGIJA SNOPOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Pavle Pandžić

Zagreb, srpanj 2011.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima

Sadržaj

Uvod

Snopovi su uvedeni radi povezivanja lokalnih i globalnih svojstava u geometriji, a danas se upotrebljavaju u raznim područjima matematike. Prve ideje su se pojavile još u 19. stoljeću kod problema analitičkog proširenja funkcije, da bi se uz pomoć H. Weyla, J. Leraya i H. Cartana pojam snopa iskristalizirao sredinom 20. stoljeća, kada je uveden pristup geometriji prostora sa strukturom, kao topološkog prostora na kojem je zadan strukturni snop onog tipa funkcija koje su prilagođene danom tipu geometrije, npr. analitičke, neprekidne, ili recimo racionalne funkcije. Snopovi su tako uvedeni u naizgled potpuno različite kontekste.

Predsnopove i snopove je najlakše predstaviti koristeći jezik teorije kategorija, što je samo jedan od razloga zbog kojih je dobar dio ovog rada posvećen upravo teoriji kategorija. Ostali razlozi su činjenice da je teorija kategorija od svog osnutka 1945. godine objavom članka "*General theory of natural equivalences*" S. Eilenberga i S. Mac Lanea s ciljem da se objasni što točno znači prirodnost u matematici, postala neizostavan dio jezika matematičara, kao i alat kojim se seciraju razne apstrakne pojave, strukture i konstrukcije u matematici. Osim toga, postala je i duboka teorija, s direktnim posljedicama na razne grane matematike, na sâmo fundiranje matematike, i s raznim primjenama u teorijskoj fizici i teorijskom računarstvu. Nasuprot teoriji skupova, teorija kategorija ne temelji se jedino na pojmu 'element', odnosno na osnovnim objektima, već na odnosima između tih osnovnih objekata; slično tako se i u teoriji viših kategorija proučavaju odnosi između odnosa između osnovnih objekata, itd. Moć apstrakcije teorije kategorija je navela N. Steenroda da iskuje šaljivi naziv "*opća apstraktna besmislica*" (eng. "*general abstract nonsense*"), koji se kasnije uvriježio kao standardni matematički žargon.

Ubrzo nakon što je uvedena definicija snopa nad topološkim prostorom X u terminima otvorenih podskupova od X, pronađena je i ekvivalentna definicija snopa nad X kao étalnog preslikavanja u X. Suptilnost ekvivalencije tih dviju definicija je bila ključna za razvoj teorije toposa, čiji su osnovni primjerci upravo kategorije snopova. Važno obilježje teorije toposa jest da ujedinjuje dva naizgled udaljena dijela matematike: s jedne strane geometriju i topologiju, a s druge matematičku logiku i teoriju skupova. Doista, topos se može smatrati "generaliziranim prostorom" i "generaliziranim univerzumom skupova". Ti različiti aspekti teorije toposa uočeni su početkom 1960-ih godina, nezavisno od strane A. Grothendiecka u prilagodbi teorije snopova za algebarsku geometriju, F. W. Lawverea u potrazi za aksiomatizacijom kategorije skupova, te P. Cohena u upotrebi metode forsiranja (eng. forcing) za konstruiranje novih modela Zermelo-Fraenkelove teorije skupova.

Najvažnije invarijante snopova su njihove kohomologije. Pravo značenje uloge kohomologije je povijesno bilo nejasno, a potpuno se razjasnilo tek u najnovije vrijeme. Homološka algebra se u svom začetku pojavila kao jezik kojim su se opisivala topološka svojstva geometrijskih objekata. Povijest homološke algebre se može u grubo podijeliti u tri razdoblja. Prvo počinje u 1940-ima, s radovima S. Eilenberga, S. Mac Lanea, D. K. Fadeeva i R. Beara, a završava sa klasičnom monografijom "*Homological algebra*" H. Cartana i S. Eilenberga ([8]), koja do danas nije izgubila ništa od svoje ondašnje ogromne važnosti. Ta monografija sadrži sve bitne konstrukcije homološke algebre koje se smatraju njenim "računskim alatom", primjerice standardne rezolvente i spektralne nizove. Ništa manje važno, sadrži i aksiomatsku definiciju deriviranog funktora aditivnog funktora na kategoriji modula nad prstenom. Neke od tih konstrukcija ćemo izložiti u ovom radu.

A. Grothendieckov rad "*Sur Quelques Points d'Alge'bre Homologique*" poznatiji pod nazivom "*Tôhoku*", objavljen (nakon tri godine odgađanja) 1957. god. u časopisu "*Tôhoku Mathematical Journal*" obilježava početak drugog razdoblja, kojim je dominirao utjecaj A. Grothendiecka i njegove škole algebarske geometrije. Razvoj analitičke i algebarske geometrije doveo je do razvoja pojma snopa, i do ideje da je prirodni argument teorije homologije par prostora i snopa na tom prostoru, a ne sâm prostor. Tu je značajnu ulogu imao J.-P. Serre sa svojim radom "*Faisceaux Algébriques Cohérents*" ([28]) ili kraće *FAC*. A. Grothendieckov navedeni rad iz 1957. naglašava analogiju između parova (prostor, snop Abelovih grupa nad njime) i parova (prsten, modul nad njime) sa homološkog stanovišta, te ističe da kohomologija snopova treba biti definirana kao derivirani funktor globalnih prereza.

Aksiomatski pristup teoriji homologije i kohomologije S. Eilenberga i N. Steenroda je dao prednost Abelovom objektu (snopu) pred neabelovim objektom (prostorom) da služi kao varijabla u teoriji kohomologije. Preciznije, kohomologija fiksiranog topološkog prostora se mogla shvatiti kao niz funktora iz kategorije snopova Abelovih grupa nad tim topološkim prostorom u kategoriju Abelovih grupa koji zadovoljava određene aksiome (tzv. Eilenberg–Steenrodove aksiome) koji ih jedinstveno određuju.

Daljnjim razvojem ideja došlo se do dalekosežnih generalizacija osnovnih pojmova algebarske geometrije na Grothendieckove topologije i topose, koje su proizašle iz činjenice da su kohomološka svojstva prostora potpuno određena kategorijom snopova nad tim prostorom, te da bi zato te kategorije snopova trebale biti osnovni predmet proučavanja. Te su ideje bile i dodatno motivirane konkretnim problemom: poznatom A. Weilovom hipotezom o broju rješenja kongruencija nad poljima pozitivne karakteristike. A. Grothendieck je konstruirao posebnu kohomologiju na étalnim toposima prilagođenu tom problemu, a kasnije su je razvili njegovi studenti. Osim svega toga, važni proizvodi drugog razdoblja povijesti homološke algebre su izračuni i svojstva raznih deriviranih funktora od globalnih prereza, direktne slike, tenzorskog produkta, itd. Od ostalih značajnih radova na tom području svakako treba spomenuti ogromne (ali ipak nedovršene) sveske A. Grothendiecka:

"*Éléments de géométrie algébrique*" (ili kraće *EGA*), "*Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie*" (ili kraće *SGA*), "*Fondements de la Géometrie Algébrique*" (ili kraće *FGA*), te rad od J.-P. Serrea: "*Géometrie Algébrique et Géométrie Analytique*" (ili kraće *GAGA*).

Glavno obilježje trećeg razdoblja povijesti homološke algebre jest razvoj posebne vrste 'razmišljanja u terminima kompleksa' nasuprot dotadašnjem 'razmišljanju u terminima objekata i njihovih kohomoloških invarijanata', ideja koja se najbolje može vidjeti u teoriji perverznih snopova koja se znatno proširila kada su se koeficijenti kohomologije uzeli ne u snopu, već u posebnom kompleksu snopova. U tom periodu pojavljuje se pojam lokalizacije kategorije. Lokalizacijom Abelove kategorije po klasi kvazi-izomorfizama dobiva se pripadna tzv. derivirana kategorija. Derivirane kategorije je uveo 1963. godine J.-L. Verdier, čiji je aspekt proučavanja kategorija doveo do uvođenja pojma trianguliranih kategorija (uz derivirane kategorije kao osnovni primjer).

Pravo mjesto za homološku algebru uočilo se tek u najnovije vrijeme kada su se počele proučavati neabelove kohomologije. Ona se danas može gledati kao specijalni slučaj općenitije homotopske algebre u tzv. teoriji viših kategorija, gdje se kohomologija može definirati kao ∞-kategorički hom-prostor u $(\infty, 1)$-toposu. Konkretnije, ako su X i A objekti $(\infty, 1)$-toposa $\mathbf{H}$, tada se definira da je kohomologija od X s koeficijentima u A skup komponenata povezanosti ∞-grupoida morfizama od X do A u $\mathbf{H}$:

$$H(X, A) := \pi_0 \mathbf{H}(X, A).$$

Cjelovitija slika se može vidjeti u nedavno objavljenoj monografiji J. Luriea "*Higher Topos Theory*" ([21, 7.2.2]), a neke rane istance tih ideja u članku [6]. U tim postavkama važnu ulogu ima tzv. teorija silaska (eng. descent theory), na koju se može gledati kao na poopćenje teorije snopova.

Ovom prilikom zahvalio bih se svojim mentorima, prof. dr. sc. Pavlu Pandžiću i doc. dr. sc. Zoranu Škodi. Posebno bih se zahvalio doc. dr. sc. Zoranu Škodi na svoj pruženoj pomoći oko gradiva i literature, te na inspirirajućim razgovorima. Zahvalio bih se i svojoj obitelji, djevojci i prijateljima na konstantno pružanoj podršci.

1. Osnove teorije kategorija

1.1. Kategorije, funktori i prirodne transformacije

1.1.1. Osnovni pojmovi

Definicija 1.1.1. **Usmjeren graf** *se sastoji od klase* **objekata** *O, klase* **strelica** *A, te dvije funkcije*

$$\mathrm{dom}, \mathrm{cod} \colon A \to O$$

koje zovemo redom **domena** *i* **kodomena**. *Za strelicu* $f \in A$ *pišemo* $\mathrm{dom}\, f \xrightarrow{f} \mathrm{cod}\, f$ *ili* $f \colon \mathrm{dom}\, f \to \mathrm{cod}\, f$. *Klasu*

$$A \times_O A := \{(g, f) \colon g, f \in A, \ \mathrm{dom}\, g = \mathrm{cod}\, f\}$$

zovemo klasa **kompozabilnih parova** *strelica.*

Definicija 1.1.2. **Kategorija** *je usmjeren graf, zajedno sa dvije dodatne funkcije*

$$1 \colon O \to A, \ X \mapsto 1_X$$
$$\circ \colon A \times_O A \to A, \ (g, f) \mapsto g \circ f,$$

koje zovemo respektivno **identiteta** *i* **kompozicija**, *tako da vrijedi:*

- $\mathrm{dom}(1_A) = A = \mathrm{cod}(1_A)$ *za sve* $A \in O$, *te* $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}\, f$ *i* $\mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}\, g$ *za sve kompozabilne parove* (g, f).
- *Ako je* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{k} D$, *tada je* $k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f$ *(***asocijativnost***).*
- *Ako je* $A \xrightarrow{f} B$ *i* $B \xrightarrow{g} C$, *tada je* $1_B \circ f = f$ *i* $g \circ 1_B = g$ *(***neutralnost identitete***).*

Lako se pokaže da je 1_B jedini element s domenom i kodomenom B koji zadovolja gornji uvjet neutralnosti.

Definicija 1.1.3. *Klasu objekata kategorije* C *označavamo s* $\mathrm{Ob}(C)$. *Za objekte* A *i* B *kategorije* C, *klasu*

$$\mathrm{Hom}_C(A, B) := \{f \colon \mathrm{dom}\, f = A, \ \mathrm{cod}\, f = B\}$$

zovemo klasa **morfizama** *od* A *do* B*. Ponekad je označavamo i s* $C(A,B)$ *ili* $\mathrm{Mor}_C(A,B)$*. Klasu svih strelica od* C *označavamo s* $\mathrm{Hom}(C)$*, ili ponekad* $\mathrm{Mor}(C)$*.*

Za kategoriju C *kažemo da je* **mala***, ukoliko su* $\mathrm{Ob}(C)$ *i* $\mathrm{Hom}(C)$ *skupovi. Za istu kažemo da je* **lokalno mala***, ukoliko je* $\mathrm{Hom}_C(A,B)$ *skup za sve objekte* A *i* B *iz* C*. Kategorija* C *je* **konačna***, ukoliko su* $\mathrm{Ob}(C)$ *i* $\mathrm{Hom}(C)$ *konačni skupovi.*

Ako se iz konteksta jasno o kojoj je kategoriji riječ, najčešće oznaku kategorije izostavljamo, tj. pišemo samo $\mathrm{Hom}(A,B) = \mathrm{Hom}_C(A,B)$.

Može se iz ovih definicija činiti da pojam kategorije nije dobro fundiran, te da bi mogao dovesti do raznih skupovno-teoretskih paradoksa. Međutim, pojam kategorije se može uvesti pažljivije, gledajući sve u odnosu na neki unaprijed zadan *univerzum*, čime se mogu izbjeći skupovno-teoretske zavrzlame (za detalje vidi npr. [4, 1.1], [17, 1.1.11], [22, I.6], ili [19]). Stoga ćemo u ovom radu biti fleksibilni oko pojmova skup/klasa, znajući da se poneke nedosljednosti mogu opravdati u aksiomatici **ZFC** + *aksiom o postojanju Grothendieckovih univerzuma*. Prema većini kategorija u ovom radu ćemo se odnositi kao da su lokalno male.

Definicija 1.1.4. *Kategorija* $\mathcal{D}$ *je* **potkategorija** *kategorije* C *ukoliko je* $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(C)$*,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}_C(A,B)$ *za sve objekte* A *i* B *iz* $\mathcal{D}$*, te ukoliko su identiteta i kompozicija od* $\mathcal{D}$ *zapravo restrikcija identitete i kompozicije od* C*.*

Za potkategoriju $\mathcal{D}$ *kategorije* C *kažemo da je* **puna potkategorija** *od* C*, ukoliko je* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A,B) = \mathrm{Hom}_C(A,B)$ *za sve objekte* A *i* B *iz* $\mathcal{D}$*.*

Uočimo neke primjere kategorija koje ćemo često susretati u ovom radu.

Primjer 1.1.5. Kategoriju čiji su objekti svi skupovi, morfizmi sve funkcije, a domena, kodomena, identiteta i kompozicija se podudaraju sa istoimenim pojmovima iz teorije skupova, označavamo sa **Set**.

Analogno definiramo kategoriju čiji su objekti grupe (prstenovi, moduli[1] nad fiksnim prstenom R, vektorski prostori nad fiksnim poljem K), a morfizmi homomorfizmi grupa (homomorfizmi pripadnih algebarskih struktura), te je označavamo s **Grp** (**Ring**, ${}_R\mathbf{Mod}$, ${}_K\mathbf{Vect}$). Kategoriju čiji su objekti Abelove grupe, a morfizmi svi homomorfizmi (Abelovih) grupa, označavamo s **Ab**, te je ona puna potkategorija od **Grp**. Uočimo da je $\mathbf{Ab} = {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$.

Kategoriju čiji su objekti svi topološki prostori, a morfizmi sve neprekidne funkcije, označavamo s **Top**.

Primjer 1.1.6. Kategoriju Δ čiji su objekti svi konačni neprazni ordinali[2], a morfizmi su sve funkcije između konačnih ordinala koje čuvaju uređaj, zovemo ***simpleks-kategorija*** (ili ponekad ***simplicijalna kategorija***).

[1] Posebno lijevi R-moduli, posebno desni. Ako nema potrebe, ne specificiramo.

[2] *Konačni ordinali* su definirani induktivno: $0{:=}\emptyset$, $n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Primjer 1.1.7. Neka je X neki topološki prostor. Definiramo kategoriju (koju označavamo s $\mathbf{Ouv}(X)$) čiji su objekti svi otvoreni skupovi u X. Neka su U i V dva otvorena skupa. Ukoliko je $U \subseteq V$, definiramo da je $\mathrm{Hom}(U, V) := \{i\}$, gdje je $i \colon U \to V$ inkluzija. U suprotnom stavljamo da je $\mathrm{Hom}(U, V) := \emptyset$. Kompozicija i identiteta su definirane na jedini mogući način.

Uočimo da sve kategorije koje smo uzeli za primjer imaju za objekte određene skupove, a morfizmi su im neke funkcije između tih skupova. Kažimo neformalno da se takve kategorije zovu ***konkretne***.

Primjer 1.1.8. Konstrukcija u primjeru 1.1.7 je specijalan slučaj jedne općenitije konstrukcije. Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup (tj. $\leq$ je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija). Definirajmo kategoriju čiji će objekti biti svi elementi od S, a morfizmi sljedeći: Za $x, y \in S$, ukoliko je $x \leq y$, stavimo da je $\mathrm{Hom}(x, y) := \{(x, y)\}$ jednočlan skup, dok u suprotnom stavimo da je $\mathrm{Hom}(x, y) := \emptyset$. Kompozicija i identiteta su definirane na jedini mogući način.

Uočimo sa uvjet antisimetričnosti relacije $\leq$ možemo i izostaviti. Lako se vidi da vrijedi i obrat: svaka mala kategorija kojoj su $\mathrm{Hom}(A, B)$ najviše jednočlani skupovi za sve objekte A i B, može se dobiti na gore opisani način od jedne refleksivne i tranzitivne relacije na skupu objekata. Takve kategorije često zovemo ***preduređajima***[3].

Primjer 1.1.9. Neka je C neka kategorija. Definiramo njoj ***suprotnu*** kategoriju C^{op} na sljedeći način:

- objekti: $\mathrm{Ob}(C^{op}) := \mathrm{Ob}(C)$;
- morfizmi: $f \in \mathrm{Hom}_{C^{op}}(A, B)$ ako i samo ako je $f \in \mathrm{Hom}_C(B, A)$;
- identiteta je ista u C^{op} kao i u C;
- kompoziciju $f \circ g$ u kategoriji C^{op} definiramo da bude jednaka upravo kompoziciji $g \circ f$ u kategoriji C.

Nije teško provjeriti da smo doista dobili dobro definiranu kategoriju, te da je $(C^{op})^{op} = C$.

Ukoliko imamo neki pojam ili tvrdnju u kategoriji C, možemo gledati odgovarajući pojam ili tvrdnju u kategoriji C^{op}, kojeg tada neformalno zovemo ***dualnim*** pojmom početnom pojmu, odnosno ***dualnom*** tvrdnjom početnoj tvrdnji.

Definicija 1.1.10. *Morfizam $A \xrightarrow{f} B$ neke kategorije C je* **izomorfizam**, *ako postoji $B \xrightarrow{g} A$ takav da je $g \circ f = 1_A$ i $f \circ g = 1_B$. Lako se vidi da je u tom slučaju takav g jedinstven, pa ga označavamo s f^{-1} i zovemo* **inverzni morfizam** *od f. Tada kažemo da su objekti A i B*

[3] Eng. *preorders*.

izomorfni, *i pišemo* $A \cong B$. *Lako se provjeri da smo time dobili relaciju ekvivalencije na objektima kategorije* C.

Morfizam $A \xrightarrow{f} B$ *je* **monomorfizam** *(ili* **mono***), ako za bilo koji objekt* C *i morfizme* $C \overset{g_1,g_2}{\rightarrow} A$ *vrijedi implikacija*

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Morfizam $A \xrightarrow{f} B$ *je* **epimorfizam** *(ili* **epi***), ako za bilo koji objekt* D *i morfizme* $B \overset{h_1,h_2}{\rightarrow} D$ *vrijedi implikacija*

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Kažemo da je neki morfizam **bimorfizam** *ako je ujedno i monomorfizam i epimorfizam. Očito je svaki izomorfizam ujedno i bimorfizam. Kažemo da je kategorija* C **balansirana***, ako je svaki bimorfizam ujedno i izomorfizam.* **Podobjekt** *objekta* A *je svaki objekt* B *zajedno s monomorfizmom* $f\colon B \to A$.

Ukoliko su izomorfizmi g i f kompozabilni, tada se lako vidi da je i njihova kompozicija $g \circ f$ izomorfizam, i vrijedi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Lagano se pokaže da i kompozicija monomorfizama (resp. epimorfizama) opet monomorfizam (resp. epimorfizam).

Primjer 1.1.11. Nije teško provjeriti da je u kategoriji **Set** funkcija monomorfizam (resp. epimorfizam, izomorfizam) ako i samo ako je injekcija (resp. surjekcija, bijekcija). Vidimo iz toga da je ta kategorija balansirana.

Definicija 1.1.12. *Objekt* I *u kategoriji je* **inicijalni** *(***početni***) ako za svaki objekt* A *iste kategorije, postoji točno jedan morfizam* $I \to A$. *Objekt* T *je* **terminalan** *(***završni***) ako za svaki objekt* B *postoji točno jedan morfizam* $B \to T$. *Objekt koji je i inicijalni i terminalni zovemo* **nul-objekt**.

Primjer 1.1.13. U kategorijama **Set** i **Top**, inicijalni objekt je $\emptyset$, dok je terminalni bilo koji jednočlan skup. U kategorijama **Grp**, ${}_R$**Mod** i ${}_K$**Vect** je $\{0\}$ nul-objekt.

Direktno iz definicije slijedi:

Propozicija 1.1.14. *Inicijalni (resp. terminalni, nul-objekt) objekt neke kategorije je jedinstven do na jedinstveni izomorfizam.*

Primjer 1.1.15. Neka je C neka kategorija, i A objekt te kategorije. Definiramo ***kategoriju kriški***[4] nad A (u oznaci C/A) na sljedeći način:

- ⋄ objekti kategorije C/A su parovi (X, f), takvi da je $X \xrightarrow{f} A$;

[4]Eng. *slice category*. Kategorija kriški je jedan specijalan slučaj općenitije konstrukcije koja se zove *zarezna kategorija*, odnosno eng. *comma kategorija*; vidi [22, II.6].

- morfizam h od (X, f) do (Y, g) u C/A je morfizam $X \xrightarrow{h} Y$ u C takav da je $g \circ h = f$;
- kompozicija i identiteta u C/A se nasljeđuju iz kategorije C.

Nije teško provjeriti da je C/A dobro definirana kategorija, te da je morfizam h u C/A izomorfizam u C/A ako i samo ako je izomorfizam u C.

Kažemo da su podobjekti objekta A ***ekvivalentni***, ako su oni izomorfni u C/A. Izomorfizam između njih je tada očito jedinstven.

Analogno definiramo kategoriju A/C, u kojoj su objekti parovi (X, f), gdje je $A \xrightarrow{f} X$.

Primjer 1.1.16. Neka su C i $\mathcal{D}$ kategorije. Definiramo ***Kartezijev produkt*** $C \times \mathcal{D}$ kategorija C i $\mathcal{D}$ na sljedeći način:

- objekti kategorije $C \times \mathcal{D}$ su uređeni parovi (X, Y), gdje je X objekt iz C, a Y objekt iz $\mathcal{D}$;
- morfizam od (X_1, Y_1) do (X_2, Y_2) u $C \times \mathcal{D}$ je uređen par morfizama (f, g), gdje je $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ u C, $Y_1 \xrightarrow{g} Y_2$ u $\mathcal{D}$;
- kompozicija se definira 'po komponentama', a $1_{(X,Y)} := (1_X, 1_Y)$.

Nije teško provjeriti da je $C \times \mathcal{D}$ dobro definirana kategorija. Također, ova definicija se lako poopći na Kartezijev produkt bilo koje familije kategorija.

1.1.2. Funktori

Definicija 1.1.17. *Neka su C i $\mathcal{D}$ neke kategorije.* **Kovarijantan funktor** *F s* **domenom** *C i* **kodomenom** *$\mathcal{D}$ (pišemo $F\colon C \to \mathcal{D}$) je funkcija koja svakom objektu A iz C pridruži objekt $F(A)$ iz $\mathcal{D}$, te svakom morfizmu $A \xrightarrow{f} B$ u C pridruži morfizam $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$ u $\mathcal{D}$, tako da vrijedi:*

- *$F(1_A) = 1_{F(A)}$, za sve objekte A u C;*
- *$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, za sve kompozabilne parove (g, f) u C.*

Kontravarijantan funktor *G je kovarijantan funktor $G\colon C^{op} \to \mathcal{D}$. Kovarijantne i kontravarijantne funktore jednom riječju zajedno zovemo* **funktorima**.

Dakle, kontravarijantan funktor G je funkcija koja svakom objektu A iz C pridruži objekt $G(A)$ iz $\mathcal{D}$, te svakom morfizmu $A \xrightarrow{f} B$ u C pridruži morfizam $G(B) \xrightarrow{G(f)} G(A)$ u $\mathcal{D}$, tako da vrijedi:

- $G(1_A) = 1_{G(A)}$, za sve objekte A u C;

◇ $G(g \circ f) = G(f) \circ G(g)$, za sve kompozabilne parove (g, f) u $\mathcal{C}$.

U ovom i sljedećem pododjeljku podrazumijevamo da su funktori kovarijantni, ukoliko nije drugačije naglašeno. Naime, iste definicije i zaključke možemo izvesti i za kontravarijantne funktore, gledajući suprotnu kategoriju.

Lako se može provjeriti da svaki funktor F ***čuva izomorfizme***, tj. ako je f izomorfizam, tada je i $F(f)$ također izomorfizam, i vrijedi $(F(f))^{-1} = F(f^{-1})$.

Definicija 1.1.18. *Funktor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *je* **vjeran** *(resp.* **pun**, **ulaganje kategorija***), ako je restrikcija* $F|_{\mathrm{Hom}(A,B)}\colon \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ *injekcija (resp. surjekcija, bijekcija), za svaki dva objekata* A *i* B *iz* $\mathcal{C}$*.*

Funktor je F **esencijalno surjektivan***, ako za svaki objekt* Y *iz* $\mathcal{D}$ *postoji objekt* X *iz* $\mathcal{C}$ *takav da su* Y *i* $F(X)$ *izmomorfni.*

Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *zovemo* **endofunktor**.

Primjer 1.1.19. Inkluzija potkategorije neke kategorije je vjeran funktor. Inkluzija pune potkategorije u kategoriju je ulaganje kategorija; štoviše, time je puna potkategorija i karakterizirana.

Primjer 1.1.20. Ulaganje kategorije svih kardinalnih brojeva i funkcija između njih u kategoriju **Set** je esencijalno surjektivan funktor.

Primjer 1.1.21. Neka je $\mathcal{C}$ jedna od kategorija definiranih u primjerima 1.1.5, 1.1.6, 1.1.7, ili bilo koja druga konkretna kategorija. Uočimo funktor $G\colon \mathcal{C} \to$ **Set** koji svakom objektu A iz $\mathcal{C}$ pridružuje $G(A) = A$ shvaćen kao skup—bez dodatne strukture, te koji svakom morfizmu iz $\mathcal{C}$ pridružuje tu istu funkciju, zaboravljajući algebarsku/topološku strukturu. Takav funktor zovemo ***zaboravni funktor***.

Općenitije, zaboravni funktor ne mora "zaboravljati" cijelu strukturu, već samo dio. Npr. funktor **Ring** $\to$ **Ab** koji svakom prstenu "sačuva" samo aditivnu strukturu, dok multiplikativnu "zaboravi", je takav funktor.

Možemo na očit način definirati ***restrikciju*** funktora na bilo koju potkategoriju domene tog funktora. Za kategoriju $\mathcal{C}$ možemo definirati ***identički funktor*** $I_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ koji je identiteta na objektima i na morfizmima. Također, za funktore $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ možemo na očiti način definirati njihovu ***kompoziciju*** $G \circ F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$. Lako je pokazati da je $G \circ F$ funktor. Štoviše, lako se pokaže sljedeći teorem:

Teorem 1.1.22. *Klasa svih malih kategorija zajedno sa funktorima između njih čini jednu kategoriju. Tu kategoriju označavmo s* **Cat**.

Primjer 1.1.23. Neka su dani kategorija C i jedan njen objekt A. Promotrimo preslikavanje h^A definirano sa

$$X \mapsto \mathrm{Hom}(A, X)$$
$$\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \mapsto \left(\mathrm{Hom}(A, X) \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Hom}(A, Y)\right),$$

gdje je $\bar{f}(\phi) := f \circ \phi$. Lako je provjeriti da je $h^A : C \to \mathbf{Set}$ kovarijantan funktor, zovemo ga ***kovarijantan hom-funktor***. Ponekad ga označavamo i s $\mathrm{Hom}(A, -)$. Funkciju $\bar{f}$ ponekad označavamo s $(f \circ -)$ i zovemo ***postkompozicija*** sa f.

Primjer 1.1.24. Slično kao u prošlom primjeru, za kategoriju C i jedan njen fiksan objekt B, gledamo preslikavanje h_B definirano sa

$$X \mapsto \mathrm{Hom}(X, B)$$
$$\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \mapsto \left(\mathrm{Hom}(Y, B) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{Hom}(X, B)\right),$$

gdje je $\tilde{f}(\phi) := \phi \circ f$. Lako je provjeriti da je $h_B : C^{op} \to \mathbf{Set}$ kontravarijantan funktor, zovemo ga ***kontravarijantan hom-funktor***. Ponekad ga označavamo i s $\mathrm{Hom}(-, B)$. Funkciju $\tilde{f}$ ponekad označavamo s $(- \circ f)$ i zovemo ***predkompozicija*** sa f.

Definicija 1.1.25. *Funktor $F : C \to \mathcal{D}$ je* **izomorfizam kategorija***, ako postoji funktor $G : \mathcal{D} \to C$ takav da je $G \circ F = I_C$ i $F \circ G = I_{\mathcal{D}}$. Lako se vidi da je u tom slučaju takav G jedinstven pa ga označavamo s F^{-1} i zovemo* **inverzni funktor** *od F. Tada kažemo da su kategorije C i $\mathcal{D}$* **izomorfne***, i pišemo $C \cong \mathcal{D}$. Time je definirana jedna relacija ekvivalencije na klasi kategorija.*

1.1.3. Prirodne transformacije

Definicija 1.1.26. *Neka su dani funktori $F, G : C \to \mathcal{D}$ ili $F, G : C^{op} \to \mathcal{D}$.* **Prirodna transformacija** *$\alpha : F \to G$ je familija morfizama $\{\alpha_X : F(X) \to G(X) : X \in \mathrm{Ob}(C)\}$ u $\mathcal{D}$, tako da vrijedi sljedeći zahtjev* **prirodnosti***: za svaki morfizam $X \xrightarrow{f} Y$ u C, jedan od sljedeća dva dijagrama komutira[5]:*

(a) Ukoliko su oba funktora F i G kovarijantna:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

[5] Kad kažemo da dijagram komutira, želimo reći da su kompozicije morfizama od objekta A do objekta B iste, bez obzira kojim putem išli od A do B; za bilo koje objekte A i B koji se nalaze u tom dijagramu.

(b) Ukoliko su oba funktora F i G kontravarijantna:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] & G(X) \\ F(Y) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y) \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd}$$

Morfizam α_X zovemo X-**ta komponenta** *prirodne transformacije α. Nadalje, α je* **prirodni izomorfizam**, *ukoliko je komponenta α_X izomorfizam, za svaki objekt X u C. U tom slučaju kažemo da su funktori F i G* **prirodno izomorfni**.

Za bilo koji funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ možemo definirati ***identičku prirodnu transformaciju*** $i_F\colon F \to F$ koja objektu X pridružuje morfizam $1_{F(X)}$. Neka su dani još i funktori $G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Za prirodne transformacije $\alpha\colon F \to G$ i $\beta\colon G \to H$ definirati njihovu ***kompoziciju*** $\beta \circ \alpha\colon F \to H$ na sljedeći način: $(\beta \circ \alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X$. Prirodnost od $\beta \circ \alpha$ se vidi iz sljedećeg dijagrama:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(f)"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y) \arrow[r, "\beta_Y"] & H(Y) \end{tikzcd}$$

Gornji dijagram komutira budući da komutiraju i lijevi i desni pravokutnik. Lako se pokaže sljedeći teorem:

Teorem 1.1.27. *Neka je barem jedna od kategorija $\mathcal{C}$ ili $\mathcal{D}$ mala. Tada klasa svih funktora $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ čini jednu kategoriju (koju često označavamo s $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ ili $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$), kojoj su objekti funktori, a morfizmi prirodne transformacije između njih.*

Uočimo da je α izmorfizam u kategoriji $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ ako i samo ako je α prirodni izomorfizam, te u tom slučaju vrijedi $(\alpha^{-1})_X = (\alpha_X)^{-1}$, za svaki objekt X iz $\mathcal{C}$. Koristiti ćemo oznaku $\mathrm{Nat}(F, G)$ za $\mathrm{Hom}_{[\mathcal{C},\mathcal{D}]}(F, G)$.

Pojam izomorfnosti kategorija je poprilično krut i neprirodan, te se ne susreće često u matematici. Rijetko kada možemo naći funktor ima baš striktni inverz, ali i tada možemo primjetitit da pojedine kategorije imaju sličnu strukturu. Stoga ima smisla sljedeća definicija:

Definicija 1.1.28. *Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je* **ekvivalencija kategorija** *ukoliko postoji funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ i prirodni izomorfizmi $\alpha\colon G \circ F \to I_{\mathcal{C}}$ i $\beta\colon F \circ G \to I_{\mathcal{D}}$. U tom slučaju kažemo da su kategorije $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$* **ekvivalentne**, *i pišemo $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.*

Karikirano rečeno, kategorije su ekvivalentne ako su izomorfne "do na izomorfizam". Lako je provjeriti da je upravo uvedena relacija refleksivna i simetrična. Pokazati ćemo da je i tranzitivna. No, prije toga dokažimo jednu važnu karakterizaciju definicije 1.1.28.

Teorem 1.1.29. *Funktor je ekvivalencija kategorija ako i samo ako je vjeran, pun, i esencijalno surjektivan (tj. esencijalno surjektivno ulaganje kategorija).*

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Neka su oznake kao u definiciji 1.1.28. Ukoliko za neke $X \xrightarrow{f,g} Y$ vrijedi $F(f) = F(g)$, tada je i $G(F(f)) = G(F(g))$. Iz prirodnosti od α sada slijedi:

$$f = \alpha_y \circ G(F(f)) \circ \alpha_x^{-1} = \alpha_y \circ G(F(g)) \circ \alpha_x^{-1} = g.$$

Dakle, F je injektivan na morfizmima. Analogno se pokaže da je i G injektivan na morfizmima.

Nadalje, za zadan $F(X) \xrightarrow{g} F(Y)$ stavimo $f := \alpha_Y \circ G(g) \circ \alpha_X^{-1} \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$, te opet koristeći prirodnost od α računamo:

$$G(F(f)) = \alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = \alpha_Y^{-1} \circ \alpha_Y \circ G(g) \circ \alpha_X^{-1} \circ \alpha_X = G(g).$$

Stoga je $F(f) = g$. Dakle, F je ulaganje kategorija.

Za bilo koji objekt Y iz $\mathcal{D}$ imamo izomorfizam $F(G(Y) \xrightarrow{\beta_Y} Y$, pa je stoga F i esencijalno surjektivan.

$\boxed{\Leftarrow}$ Konstruirajmo funktor $G\colon \mathcal{D} \to C$ na u nastavku opisani način. Za bilo koji objekt Y u $\mathcal{D}$ postoji neki objekt X_Y u C i izomorfizam $F(X_Y) \xrightarrow{\beta_Y} Y$. Stavimo $G(Y) := X_Y$.

Za morfizam $Y \xrightarrow{\psi} Y'$ u $\mathcal{D}$, stavimo

$$G(\psi) := F^{-1}(\beta_{Y'}^{-1} \circ \psi \circ \beta_Y) \in F^{-1}(\,\mathrm{Hom}(F(G(Y)), F(G(Y')))) = \mathrm{Hom}(G(Y), G(Y')).$$

Nije teško provjeriti da je G zaista dobro definiran funktor, te da je $\beta\colon F \circ G \to I_{\mathcal{D}}$ prirodni izomorfizam.

Nadalje, za svaki objekt X u C imamo izomorfizam $F(G(F(X))) \xrightarrow{\beta_{F(X)}} F(X)$. Stoga postoji jedinstven izomorfizam $G(F(X)) \xrightarrow{\alpha_X} X$ takav da vrijedi $\beta_{F(X)} = F(\alpha_X)$. Lagano je provjeriti da je $\alpha\colon G \circ T \to I_C$ prirodni izomorfizam (koristeći vjernost od F i prirodnost od β). Dakle, F je ekvivalencija kategorija. □

Napomena 1.1.30. Pažljivom čitatelju nije promakla činjenica da se u dokazu obrata u teoremu 1.1.29 koristio aksiom izbora (**AC**). Bez aksioma izbora, obrat tog teorema naprosto ne vrijedi općenito. U tom se slučaju, funktor koji je pun, vjeran i esencijalno surjektivan naziva se ***slaba ekvivalencija kategorija***. Mi u ovom radu podrazumijevamo aksiom izbora, pa nećemo praviti tu razliku.

Koristeći se karakterizacijom u teoremu 1.1.29, lako je vidjeti da je kompozicija funktora koji su ekvivalencije kategorija, i dalje ekvivalencija kategorija, tj. da je relacija na kategorijama "biti ekvivalentan" (u smislu definicije 1.1.28) još i tranzitivna.

Definicija 1.1.31. *Neka su dani funktori $F_1, G_1 \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $F_2, G_2 \colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, i prirodne transformacije $\alpha \colon F_1 \to G_1$, $\beta \colon F_2 \to G_2$.* **Godementov produkt** *od α i β je prirodna transformacija $\beta * \alpha \colon F_2 \circ F_1 \to G_2 \circ G_1$ definirana sa:*

$$(\beta * \alpha)_X := G_2(\alpha_X) \circ \beta_{F_1(X)} = \beta_{G_1(X)} \circ F_2(\alpha_X). \tag{1.1}$$

Druga jednakost u izrazu (1.1) vrijedi zbog prirodnosti od β u donjem dijagramu:

$$\begin{tikzcd}
F_2(F_1(X)) \arrow[r, "\beta_{F_1(X)}"] \arrow[d, "F_2(\alpha_X)"'] & G_2(F_1(X)) \arrow[d, "G_2(\alpha_X)"] \\
F_2(G_1(X)) \arrow[r, "\beta_{G_1(X)}"] & G_2(G_1(X))
\end{tikzcd}$$

Prirodnost Godementovog produkta $\beta * \alpha$ slijedi iz donjeg dijagrama. Za morfizam $X \xrightarrow{f} Y$ u $\mathcal{C}$ promotrimo:

$$\begin{tikzcd}
F_2(F_1(X)) \arrow[r, "\beta_{F_1(X)}"] \arrow[d, "F_2(F_1(f))"'] & G_2(F_1(X)) \arrow[r, "G_2(\alpha_X)"] \arrow[d, "G_2(F_1(f))"] & G_2(G_1(X)) \arrow[d, "G_2(G_1(f))"] \\
F_2(F_1(Y)) \arrow[r, "\beta_{F_1(Y)}"'] & G_2(F_1(Y)) \arrow[r, "G_2(\alpha_Y)"'] & G_2(G_1(Y))
\end{tikzcd}$$

Lijevi pravokutnik komutira zbog prirodnosti od β, a desni zbog prirodnosti od α i funktorijalnosti od G_2. Stoga cijeli dijagram komutira, pa je $\beta * \alpha$ zaista prirodna transformacija. Nadalje, direkno se može provjeriti da je Godementov produkt asocijativan.

Godementov produkt prirodnih transformacija se ponekad zove i ***horizontalan produkt***, dok se uobičajena kompozicija zove ***vertikalan produkt*** prirodnih transformacija. Postoji određena veza između ta dva produkta—iskazana sljedećim teoremom:

Teorem 1.1.32 (Zakon preplitanja[6]). *Ako su za prirodne transformacije α_1, α_2, β_1, i β_2 zadovoljeni uvjeti kompozabilnosti kao u dijagramu*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left=50, ""{name=U1}] \arrow[r, ""{name=M1}] \arrow[r, bend right=50, ""'{name=D1}] & \bullet \arrow[r, bend left=50, ""{name=U2}] \arrow[r, ""{name=M2}] \arrow[r, bend right=50, ""'{name=D2}] & \bullet ,
\arrow[from=U1, to=M1, phantom, "\Downarrow \alpha_1"]
\arrow[from=M1, to=D1, phantom, "\Downarrow \beta_1"]
\arrow[from=U2, to=M2, phantom, "\Downarrow \alpha_2"]
\arrow[from=M2, to=D2, phantom, "\Downarrow \beta_2"]
\end{tikzcd}$$

---

[6]Eng. *interchange law*.

tada vrijedi relacija

$$(\beta_2 \circ \alpha_2) * (\beta_1 \circ \alpha_1) = (\beta_2 * \beta_1) \circ (\alpha_2 * \alpha_1). \tag{1.2}$$

Dokaz. Označimo $\alpha_i \colon F_i \to G_i$ i $\beta_i \colon G_i \to H_i$, za $i = 1, 2$. Za bilo koji objekt X iz domene funktora F_1 računamo po definiciji

$$\begin{aligned}
((\beta_2 \circ \alpha_2) * (\beta_1 \circ \alpha_1))_X &= H_2((\beta_1 \circ \alpha_1)_X) \circ (\beta_2 \circ \alpha_2)_{F_1(X)} \\
&= H_2(\beta_{1,X}) \circ H_2(\alpha_{1,X}) \circ \beta_{2,F_1(X)} \circ \alpha_{2,F_1(X)} \\
&= H_2(\beta_{1,X}) \circ \beta_{2,G_1(X)} \circ G_2(\alpha_{1,X}) \circ \alpha_{2,F_1(X)} \qquad (1.3) \\
&= (\beta_2 * \beta_1)_X \circ (\alpha_2 * \alpha_1)_X \\
&= ((\beta_2 * \beta_1) \circ (\alpha_2 * \alpha_1))_X,
\end{aligned}$$

gdje jednakost (1.3) vrijedi zbog prirodnosti od β. Dakle, vrijedi (1.2). □

U prethodnom dijagramu kategorije (***0-ćelije***) su označene malim kružićima, funktori (***1-ćelije***) jednostrukim strelicama između kružića, a prirodne transformacije (***2-ćelije***) dvostrukim srelicama između jednostrukih strelica.

1.2. Reprezentabilni funktori i Yonedina lema

Definicija 1.2.1. *Kažemo da je kovarijantan funktor $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$* **reprezentabilan***, ako postoji prirodan izomorfizam $\alpha \colon h^A \to F$, gdje je h^A kovarijantan hom-funktor iz primjera 1.1.23, za neki objekt A u $\mathcal{C}$. U tom slučaju uređen par (A, α) zovemo* **reprezentacija** *funktora F.*

Kažemo da je kontravarijantan funktor $G \colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ **reprezentabilan***, ako postoji prirodan izomorfizam $\beta \colon h_B \to G$, gdje je h_B kontravarijantan hom-funktor iz primjera 1.1.24, za neki objekt B u $\mathcal{C}$. U tom slučaju uređen par (B, β) zovemo* **reprezentacija** *funktora G.*

Definicija 1.2.2. Predsnop (skupova) *na kategoriji $\mathcal{C}$ je svaki kontravarijantan funktor $\mathcal{C}^{op} \to$* **Set***. Kategoriju $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ često označavamo s $\hat{\mathcal{C}}$, te je zovemo* **kategorijom predsnopova** *kategorije $\mathcal{C}$.*

Napomena 1.2.3. Uočimo funktor $h \colon \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ koji ima sljedeće djelovanje:

$$\begin{aligned}
X &\mapsto h_X \\
\left(X \xrightarrow{f} Y\right) &\mapsto \left(h_X \xrightarrow{h_f} h_Y\right),
\end{aligned}$$

gdje je h_f prirodna transformacija definirana s $h_{f,A}\colon \mathrm{Hom}(A,X) \to \mathrm{Hom}(A,Y)$, $g \mapsto f \circ g$. Lako je vidjeti da je h dobro definiran kovarijantan funktor (funktorijalnost od h i prirodnost od h_f slijede iz asocijativnosti kompozicije funkcija). Nadalje, vidimo da $A \cong B$ povlači $h_A \cong h_B$, stoga dualno i $h^A \cong h^B$.

Lema 1.2.4. *Neka je $F\colon C^{op} \to \mathbf{Set}$ kontravarijantan funktor, A bilo koji objekt iz C, te $\alpha\colon h_A \to F$ prirodna transformacija. Tada za bilo koji morfizam $f\colon Y \to A$ vrijedi*

$$\alpha_Y(f) = F(f)(\alpha_A(1_A)) \tag{1.4}$$

Dokaz. Uočimo sljedeći komutativni dijagram (koji slijedi iz prirodnosti od α):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(Y,A) \arrow[r, "\alpha_Y"] & F(Y) \\
\mathrm{Hom}(A,A) \arrow[u, "h_A(f)"] \arrow[r, "\alpha_A"] & F(A) \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}$$

Sada vidimo iz dijagrama da vrijedi $F(f)(\alpha_A(1_A)) = \alpha_Y(h_A(f)(1_A)) = \alpha_Y(f)$. □

Napomena 1.2.5. Dual leme 1.2.4 glasi: Neka je $F\colon C \to \mathbf{Set}$ kovarijantan funktor, A bilo koji objekt iz C, te $\alpha\colon h^A \to F$ prirodna transformacija. Tada za bilo koji morfizam $f\colon A \to Y$ vrijedi (1.4). Dokaz je dualan.

Teorem 1.2.6 (Yonedina lema, jaka verzija)**.** *Neka je $F\colon C^{op} \to$ **Set** kontravarijantni funktor. Tada postoji prirodan izomorfizam*

$$\Phi\colon\ \mathrm{Nat}(h_-, F) \to F,$$

gdje je $\mathrm{Nat}(h_-, F)$ *kompozicija funktora* $\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(-, F) \circ h$ *(h je definiran u napomeni 1.2.3).*

Dokaz. Fiksirajmo objekt X iz C. Definirajmo funkciju $\Phi_X\colon \mathrm{Nat}(h_X, F) \to F(X)$ formulom $\Phi_X(\alpha) := \alpha_X(1_X)$, te $\Psi\colon F(X) \to \mathrm{Nat}(h_X, F)$ sljedećom formulom. Za $u \in F(X)$ i objekt Y u C stavimo

$$\begin{aligned}
\Psi(u)_Y\colon\ & \mathrm{Hom}(Y,X) \to F(Y) \\
& g \mapsto (F(g))(u) \in F(Y).
\end{aligned}$$

Prirodnost od $\Psi(u)$ se lako direktno provjeri, a slijedi iz kontravarijantne funktorijalnosti od F.

Sada računamo po definiciji: $\Phi_X(\Psi(u)) = \Psi(u)_X(1_X) = F(1_X)(u) = 1_{F(X)}(u)$, pa vidimo da vrijedi $\Phi_X \circ \Psi = 1_{F(X)}$. Nadalje, vrijedi:

$$\Psi(\Phi_X(\alpha))_Y(g) = F(g)(\Phi_X(\alpha)) = F(g)(\alpha_X(1_X)) \overset{(1.4)}{=} \alpha_Y(g).$$

Stoga je $\Psi(\Phi_X(\alpha)) = \alpha$, tj. $\Psi \circ \Phi_X = 1_{\mathrm{Nat}(h_X,F)}$. Dakle, za svaki objekt X u C konstruirali smo bijekciju $\Phi_X\colon \mathrm{Nat}(h_X, F) \to F(X)$.

Nije teško provjeriti da je time definiran prirodni izomorfizam $\Phi\colon \mathrm{Nat}(h_-, F) \to F$ (prirodnost se pokaže direktno, koristeći definicije i relaciju (1.4)). □

Korolar 1.2.7 (Yonedina lema, slaba verzija)**.** *Funktor h iz napomene 1.2.3 je pun i vjeran funktor, tj. ulaganje kategorija $C \to \hat{C}$. Dakle, svaka kategorija se ulaže kao puna potkategorija u kategoriju predsnopova.*

Dokaz. Neka su X i Y bilo koji objekti u C. Primjenimo li jaku Yonedinu lemu na funktor $F = h_Y$, dobivamo bijekciju $\Phi_X\colon \mathrm{Nat}(h_X, h_Y) \to h_Y(X) = \mathrm{Hom}(X, Y)$. □

Definicija 1.2.8. *Funktor h iz napomene 1.2.3 zovemo* **Yonedino ulaganje** *kategorije C.*

Dualno bismo mogli definirati Yonedino ulaganje kategorije C u kategoriju $\mathbf{Set}^C$ kovarijantnih funktora. I u tom slučaju vrijede dualni analogni navedenih Yonedinih lema. Navedimo samo jaku verziju:

Teorem 1.2.9 (Yonedina lema, jaka verzija)**.** *Neka je $F\colon C \to$ **Set** kovarijantni funktor. Tada postoji prirodan u X izomorfizam* $\mathrm{Nat}(h^X, F) \cong F(X)$.

Dokazi u tom kovarijantnom slučaju su dualni. Budući da će u ovom radu biti važan pojam snopa—posebnog kontravarijantog funktora, dani su dokazi Yonedinih lema upravo u kontravarijantnom slučaju.

Teorem 1.2.10. *Neka su (A, α) i (B, β) reprezentacije reprezentabilnog kontravarijantnog funktora $F\colon C^{op} \to$ **Set**. Tada postoji jedinstveni izomorfizam $f\colon A \to B$ takav da donji dijagram komutira za svaki objekt X iz C:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X,A) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "h_{f,X}"'] & F(X) \\ \mathrm{Hom}(X,B) \arrow[ur, "\beta_X"'] & \end{tikzcd}$$

Dokaz. Označimo $u := \alpha_A(1_A) \in F(A), v := \beta_B(1_B) \in F(B)$ i uočimo da je funkcija $\beta_A\colon \mathrm{Hom}(A, B) \to F(A)$ bijekcija. Možemo zaključiti da postoji jedinstven morfizam $f\colon A \to B$ takav da vrijedi

$$F(f)(v) \overset{(1.4)}{=} \beta_A(f) = u.$$

Potpuno analogno, zaključujemo da postoji jedinstven morfizam $g\colon B \to A$ za koji je $F(g)(u) = v$. No, tada je $\alpha_A(g \circ f) \overset{(1.4)}{=} F(g \circ f)(u) = F(f)(F(g)(u)) = F(f)(v) = u = \alpha_A(1_A)$, pa je $g \circ f = 1_A$ zbog bijektivnosti od α_A. Analogno je $f \circ g = 1_B$, tj. f je izomorfizam.

Sada, za neki dijagram kao u iskazu teorema i morfizam $g\colon X \to A$ računamo:

$$\beta_X(h_{f,X}(g)) = \beta_X(f \circ g) \overset{(1.4)}{=} F(f \circ g)(v) = F(g)(F(f)(v)) = F(g)(u) \overset{(1.4)}{=} \alpha_X(g),$$

pa zaključujemo da navedeni dijagram komutira.

Ako $f'\colon A \to B$ morfizam koji također zadovoljava uvjete teorema, tada za $X = A$ i $g = 1_A$ u dijagramu imamo $\beta_A(f') = (\beta_A \circ h_{f',A})(1_A) = \alpha_A(1_A) = u = \beta_A(f)$, pa je $f' = f$. □

Naravno, analogna dualna tvrdnja vrijedi za kovarijantne funktore. Specijalno, vidimo da je reprezentirajući objekt reprezentabilnog funktora jedinstven do na izomorfizam.

Funktore čija je domena Kartezijev produkt dvije kategorije zovemo ***bifunktorima***. Oni mogu biti različite kovarijantnosti u različitim varijablama. Na primjer, ***hom-bifunktor*** $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ definiran na objektima s $(A, B) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, a za morfizme $A \xrightarrow{f} A'$ i $B \xrightarrow{g} B'$ u $\mathcal{C}$ definiramo

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B')\\ k &\mapsto g \circ k \circ f,\end{aligned}$$

je kontravarijantan u prvoj, a kovarijantan u drugoj varijabli. Ako je $F\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ bifunktor, te $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ i $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, tada možemo dobiti funktore $F(C,-)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ i $F(-,D)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ definirane na sljedeći način: $F(C,-)(X) := F(C,X)$ na objektima, a $F(C,-)(f) := F(1_C, f)$ na morfizmima; analogno za $F(-,D)$.

Nadalje, ako imamo $\alpha_{CD}\colon F(C,D) \to G(C,D)$ za sve objekte C i D pripadnih kategorija, nije teško formalizirati i dokazati sljedeću tvrdnju: $\alpha\colon F \to G$ je prirodna transformacija bifunktora F i G ako i samo ako je ona prirodna "u svakoj varijabli posebno".

Lema 1.2.11. *Neka je $F\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ bifunktor (kontravarijantan u prvoj varijabli), te neka je za svaki $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ funktor $F(C,-)\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ reprezentabilan, s reprezentacijom (A_C, α^C). Tada postoji jedinstven kovarijantan funktor $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ za koji je $G(C) = A_C$, te za koji imamo prirodan izomorfizam bifunktora $\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(-),-) \to F$ dan s*

$$\alpha^C_D\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(C), D) \to F(C, D).$$

Dokaz. Za svaki $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ i $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ imamo bijekciju $\alpha^C_D\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A_C, D) \to F(C, D)$ prirodnu u D. Konstruirati ćemo traženi funktor G na sljedeći način. Za $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ stavimo $G(C) := A_C$, te stavimo $u_C := \alpha^C_{A_C}(1_{A_C}) \in F(C, A_C)$. Za morfizam $f\colon C \to C'$ u $\mathcal{C}$ neka je $v := F(f, 1_{A_{C'}})(u_{C'}) \in F(C, A_{C'})$. Iz bijektivnosti od $\alpha^C_{A_{C'}}$ i duala leme 1.2.4 slijedi da postoji jedinstven $\bar{f}\colon A_C \to A_{C'}$ u $\mathcal{D}$ za kojeg vrijedi $F(1_C, \bar{f})(u_C) = v$, pa definirajmo $G(f) := \bar{f}$. Stoga, za $C \xrightarrow{f} C'$ imamo $G(C) \xrightarrow{G(f)} G(C')$, te je očito $G(1_C) = 1_{G(C)}$. Za $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C''$ se direktno pokaže da je $F(1_C, G(g) \circ G(f))(u_C) = F(g \circ f, 1_{A_{C''}})(u_{C''})$ koristeći funktorijalnost od F i definiciju od G, pa iz jedinstvenosti slijedi $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$, tj. $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je dobro definiran funktor.

Da bi dokazali da je α prirodan izomorfizam između navedenih bifunktora, potrebno je jedino još dokazati prirodnost u prvoj varijabli. To se pokaže direktnim računom, opet koristeći dual leme 1.2.4, funktorijalnost od F i definiciju od G. Iz istog računa, uz činjenicu da je $\alpha^{C}_{A_{C'}}$ bijekcija, slijedi da je G jedinstveno određen. $\square$

1.3. Limesi i kolimesi

U ovom odjeljku $\mathcal{D}$ redovito označava malu kategoriju.

1.3.1. Dijagrami i univerzalni (ko)konusi

Definicija 1.3.1. *Kovarijantan funktor $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zovemo* **dijagram** *u $\mathcal{C}$.*

Za neki objekt A iz $\mathcal{C}$, uočimo funktor $\Delta_A\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ definiran sa: $Y \mapsto A$ za sve objekte Y, i $f \mapsto 1_A$ za sve morfizme f. Zovemo ga ***konstantni funktor*** u A.

Definicija 1.3.2. *Neka je D neki dijagram u $\mathcal{C}$. Prirodnu transformaciju $\gamma\colon \Delta_A \to D$ zovemo* **konus** *nad D s* **vrhom** *A.*

Konus najčešće zamišljamo kao objekt A (koji je vrh tog konusa) zajedno sa familijom morfizama $\{A \xrightarrow{\gamma_X} D(X)\colon X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})\}$. Uočimo da se prirodnost od γ reducira na komutativnost sljedećeg dijagrama, za bilo koji morfizam $X \xrightarrow{f} Y$ u $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\gamma_X"'] \arrow[dr, "\gamma_Y"] & \\ D(X) \arrow[rr, "D(f)"'] & & D(Y) \end{tikzcd}$$

Neka su $\gamma\colon \Delta_A \to D$ i $\delta\colon \Delta_B \to D$ konusi dijagrama D. ***Morfizam konusa*** γ i δ je morfizam $f\colon A \to B$ takav da je $\delta_X \circ f = \gamma_X$, za sve objekte X iz $\mathcal{D}$. Nije teško vidjeti ukoliko na očiti način definiramo kompoziciju i identitetu morfizama konusa, dobijemo kategoriju svih konusa nad dijagramom D. Tu kategoriju označavamo s $\mathbf{Cone}(D)$.

Definicija 1.3.3. *Terminalni objekt kategorije* $\mathbf{Cone}(D)$*, ukoliko postoji, zovemo* **limes** *ili* **univerzalni konus** *dijagrama D.*

Direktno iz definicije i propozicije 1.1.14 slijedi da ukoliko su γ i δ dva limesa dijagrama D (s vrhovima A i B respektivno), postoji jedinstven izomorfizam $f\colon A \to B$ takav da vrijedi $\delta_X \circ f = \gamma_X$, za sve objekte X iz $\mathcal{D}$. Dakle, limes dijagrama, ako postoji, jedinstven je do na jedinstveni izomorfizam konusa. Označavamo ga s $\lim D$ ili $\varprojlim D$.

Dualno konusu i limesu, možemo uvesti u nastavku definirane pojmove kokonusa i kolimesa.

Definicija 1.3.4. *Prirodnu transformaciju* $\gamma\colon D \to \Delta_A$ *zovemo* **kokonus** *nad dijagramom* D *s* **vrhom** A.

Kokonus najčešće zamišljamo kao objekt A (koji je vrh tog kokonusa) zajedno sa familijom morfizama $\{D(X) \xrightarrow{\gamma_X} A\colon X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})\}$. Prirodnost od γ se reducira na komutativnost sljedećeg dijagrama, za bilo koji morfizam $X \xrightarrow{f} Y$ u $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} D(X) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, "\gamma_X"'] & & D(Y) \arrow[dl, "\gamma_Y"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Analogno kao za konuse, definiramo kategoriju **coCone**(D) kojoj su objekti kokonusi nad dijagramom D, a morfizmi dani na sljedeći način: ***Morfizam kokonusa*** γ i δ s vrhovima A i B redom, je morfizam $f\colon A \to B$ za koji vrijedi $f \circ \gamma_X = \delta_X$ za sve objekte X iz $\mathcal{D}$.

Definicija 1.3.5. *Inicijalni objekt kategorije* **coCone**(D)*, ukoliko postoji, zovemo* **kolimes** *ili* **univerzalni kokonus** *dijagrama* D.

Direktno iz definicije i propozicije 1.1.14 slijedi da ukoliko su γ i δ dva kolimesa dijagrama D (s vrhovima A i B respektivno), postoji jedinstven izomorfizam $f\colon A \to B$ takav da vrijedi $f \circ \gamma_X = \delta_X$, za sve objekte X iz $\mathcal{D}$. Dakle, kolimes dijagrama, ako postoji, jedinstven je do na jedinstveni izomorfizam kokonusa. Označavamo ga s $\mathrm{colim}\, D$ ili $\varinjlim D$.

Definicija 1.3.6. *Kažemo da je kategorija* $\mathcal{C}$ $\mathcal{D}$**-potpuna** *(resp.* $\mathcal{D}$**-kopotpuna***), ako svaki dijagram* $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *ima limes (resp. kolimes).*

Ukoliko je $\mathcal{C}$ $\mathcal{D}$**-potpuna** *(resp.* $\mathcal{D}$**-kopotpuna***) za sve konačne kategorije* $\mathcal{D}$*, kažemo da je* $\mathcal{C}$ **konačno potpuna** *(resp.* **konačno kopotpuna***).*

Ukoliko svaki dijagram ima limes (resp. kolimes), kažemo da je kategorija $\mathcal{C}$ **potpuna** *(resp.* **kopotpuna***)*[7].

Svojstvo terminalnosti limesa u kategoriji konusa (inicijalnosti kolimesa u kategoriji kokonusa) često zovemo ***univerzalno svojstvo*** limesa (kolimesa).

Ponekad na $\lim D$ i $\mathrm{colim}\, D$ nekorektno mislimo kao na vrhove konusa, a ne cjelokupne prirodne transformacije. Iz konteksta bi trebalo biti jasno o kojem se značenju radi.

[7]Umjesto ”potpuna” ponekad se kaže ***kompletna*** ili ***zatvorena***, u svim varijacijama u ovoj definiciji.

Napomena 1.3.7. Pretpostavimo da je kategorija C $\mathcal{D}$-potpuna. Neka su $D_1, D_2 \colon \mathcal{D} \to C$ dijagrami u C, s vrhovima u A i B, i $\alpha \colon D_1 \to D_2$ prirodna transformacija. Uočimo da je $\alpha \circ \lim D_1$ konus nad D_2, s vrhom A. Stoga postoji jedinstveni morfizam $f \colon A \to B$ koji je morfizam i u kategoriji $\mathbf{Cone}(D_2)$. Stavimo da je $\lim \alpha := f$. Sada se lako može provjeriti da je $\lim \colon [\mathcal{D}, C] \to C$ kovarijantan funktor, ukoliko na $\lim D$ mislimo kao na vrh univerzalnog konusa nad D.

Analognom konstrukcijom se također lako vidi da je $\operatorname{colim} \colon [\mathcal{D}, C] \to C$ opet kovarijantan funktor, ukoliko je C $\mathcal{D}$-kopotpuna kategorija.

Napomena 1.3.8. Uočimo funktor $\Delta \colon C \to [\mathcal{D}, C]$ koji koji svakom objektu A pridruži konstantan funktor Δ_A, a svakom morfizmu $f \colon A \to B$ pridruži prirodnu transformaciju $\Delta_f \colon \Delta_A \to \Delta_B$ koja ima komponente $\Delta_{f,X} := f$. Lako se provjeri da je Δ dobro definiran funktor—zovemo ga ***dijagonalni funktor***.

Uočimo da ukoliko je U vrh univerzalnog konusa $\lim D$ dijagrama D, postoji prirodan izomorfizam

$$\Phi \colon h_U \to \operatorname{Nat}(\Delta_{-}, D),$$

za koji je $\Phi_U(1_U) = \lim D$. Naravno, $\operatorname{Nat}(\Delta_{-}, D) := \operatorname{Hom}_{[\mathcal{D},C]}(-, D) \circ \Delta$.

Lema 1.2.4 nam govori da nemamo drugog izbora osim za objekt V i morfizam $V \xrightarrow{f} U$ staviti $\Phi_V(f) := \lim D \circ \Delta_f$. Prirodnost se lako provjeri. Bijektivnost slijedi direkno iz univerzalnog svojstva limesa. Obratno, za zadani prirodni izomorfizam $\Phi \colon h_U \to \operatorname{Nat}(\Delta_{-}, D)$ vrijedi da je $\Phi_U(1_U) = \lim D$ (vidi se primjenom leme 1.2.4).

Dakle, postoji limes dijagrama D ako i samo ako je funktor $\operatorname{Nat}(\Delta_{-}, D)$ reprezentabilan; u tom slučaju vrh limesa je reprezentirajući objekt tog funktora.

Napomena 1.3.9. Dualno napomeni 1.3.8, kolimes dijagrama D određuje, i jedinstveno je određen s prirodnim izomorfizmom $\Psi \colon h^U \to \operatorname{Nat}(D, \Delta_{-})$, gdje je U vrh kokonusa $\operatorname{colim} D$. Stoga postoji kolimes dijagrama D ako i samo ako je funktor $\operatorname{Nat}(D, \Delta_{-})$ reprezentabilan; u tom slučaju vrh kolimesa je reprezentirajući objekt tog funktora.

1.3.2. Važni specijalni slučajevi (ko)limesa

Najvažniji limesi su produkt, pullback i ujednačitelj, dok su najvažniji kolimesi njihovi duali: koprodukt, pushout i koujednačitelj. Kao što ćemo vidjeti, to su (ko)limesi nad posebno izabranim dijagramima.

Prije samih definicija, uočimo (ili dogovorimo se) da je limes praznog dijagrama upravo terminalni objekt, a kolimes praznog dijagrama upravo inicijalni objekt, u danoj kategoriji.

Kažemo da je mala kategorija ***diskretna***, ako u njoj nema morfizama osim identiteta. Neka je I neki skup. Očito ga možemo ga shvatiti kao diskretnu kategoriju, na način da svaki element od I smatramo objektom. Tada svaka funkcija $D \colon I \to \operatorname{Ob}(C)$ može biti shvaćena kao funktor $D \colon I \to C$, ukoliko dodefiniramo $D \colon 1_i \mapsto 1_{D(i)}$ za sve $i \in I$.

Definicija 1.3.10. *Neka je I skup, a C kategorija. Limes dijagrama $i \mapsto A_i$ $(I \to C)$ zovemo* **produkt** *familije objekata $\{A_i \colon i \in I\}$, a vrh tog limesa označavamo s $\prod_{i\in I} A_i$. Komponentu $\pi_i \colon \prod_{i\in I} A_i \to A_i$ zovemo* **i-ta (kanonska) projekcija** *produkta. Vrh produkta dvočlane familije $\{A_1, A_2\}$ označavamo s $A_1 \times A_2$.*

Kolimes istog tog dijagrama zovemo **koprodukt** *familije $\{A_i \colon i \in I\}$, a njegov vrh označavamo s $\coprod_{i\in I} A_i$ (ili a $\sum_{i\in I} A_i$). Komponentu $\iota_i \colon A_i \to \coprod_{i\in I} A_i$ zovemo* **i-ta (kanonska) injekcija** *koprodukta. Vrh koprodukta dvočlane familije $\{A_1, A_2\}$ ponekad označavamo s $A_1 \coprod A_2$ (ili s $A_1 + A_2$).*

Primjer 1.3.11. U kategoriji **Set**, produkt familije objekata je upravo Kartezijev produkt te familije skupova, a i-ta kanonska projekcija produkta je upravo klasična projekcija na i-tu komponentu.

Koprodukt familije objekata u **Set** je disjunktna unija te familije skupova, a i-ta kanonska injekcija koprodukta je upravo inkluzija i-tog skupa u disjunktnu uniju.

Primjer 1.3.12. U kategoriji **Cat**, produkt familije kategorija opisan je u primjeru 1.1.16; uz dodatak da je i-ta kanonska projekcija tog produkta funktor koji projicira na i-tu komponentu, analogno kao kod Kartezijevog produkta skupova.

Koprodukt familije malih kategorija je jednostavno disjunktna unija svih kategorija te familije (unija posebno po objektima i posebno po morfizmima). Kanonske injekcije su inkluzije u disjunktnu uniju.

Primjer 1.3.13. Što se tiče osnovnih algebarskih struktura, u kategorijama **Ab**, ${}_R$**Mod** i ${}_K$**Vect**, produkt familije objekata je zapravo direktni produkt te familije, a koprodukt je direktna suma te familije. U kategoriji **Grp**, produkt familije grupa je također direktni produkt, dok je koprodukt familije grupa tzv. slobodni produkt te familije grupa. U kategoriji **Ring**, produkt familije prstenova je direktni produkt te familije. Vidi [16, I.8, I.9, III.2, IV.1].

Primjer 1.3.14. U kategoriji **Top**, produkt familije topoloških prostora je njihov Kartezijev produkt sa tzv. produktnom topologijom (najmanjom topologijom uz koju su projekcije neprekidne). Koprodukt familije topoloških prostora je disjunktna unija sa tzv. disjunktnom topologijom (najmanjom topologijom uz koju su inkluzije neprekidne).

Produkt i koprodukt familije objekata je asocijativan i komutativan do na izomorfizam. Štoviše, vrijedi slijedeća općenitija propozicija.

Propozicija 1.3.15. *Neka je I neki skup i $I = \bigcup_{k\in K} I_k$ particija tog skupa na disjunktne podskupove (ne nužno neprazne). Tada za bilo koju familiju objekata $\{A_i \colon i \in I\}$ kategorije*

$\mathcal{C}$, ukoliko svi navedeni (ko)produkti postoje, vrijedi:

$$\prod_{i\in I} A_i \cong \prod_{k\in K}\prod_{i\in I_k} A_i \tag{1.5}$$

$$\coprod_{i\in I} A_i \cong \coprod_{k\in K}\coprod_{i\in I_k} A_i. \tag{1.6}$$

Dokaz. Za svaki $k \in K$ označimo $B_k := \prod_{i\in I_k} A_i$ i neka je $\pi_i^k\colon B_k \to A_i$ i-tu kanonska projekcija tog produkta. Neka je $B := \prod_{k\in K} B_k$ i $\pi_k^B\colon B \to B_k$ k-ta kanonska projekcija tog produkta. Može se lako provjeriti da je objekt B zajedno sa familijom morfizama $\{\pi_i^k \circ \pi_k^B\colon k \in K, i \in I_k\}$ univerzalni konus nad familijom $\{A_i\colon i \in I\}$, tj. produkt te familije. Formula (1.5) sada slijedi iz do na izomorfizam jedinstvenosti limesa. Formula (1.6) slijedi dualnom argumentacijom. □

Iz dokaza propozicije 1.3.15 se može vidjeti da možemo naći jedinstvene izomorfizme u relacijama (1.5) i (1.6) koji na odgovarajući način komutiraju s kanonskim projekcijama/injekcijama.

Specijalno, za bilo koje objekte A, B i C vrijedi $A\times B \cong B\times A$ i $(A\times B)\times C \cong A\times(B\times C)$ ukoliko svi navedeni produkti postoje, te $A \coprod B \cong B \coprod A$ i $(A \coprod B) \coprod C \cong A \coprod (B \coprod C)$ ukoliko svi navedeni koprodukti postoje.

Definicija 1.3.16. *Limes (resp. kolimes) nad dijagramom* $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ *zovemo* **ujednačitelj** *(resp.* **koujednačitelj***) od f i g.*

Kažemo da su morfizmi f i g iz $\mathcal{C}$ ***paralelni***, ako je $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$ i $\operatorname{cod} f = \operatorname{cod} g$. Komutativni dijagram oblika $Z \xrightarrow{h} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ zovemo ***vilica*** (mora vrijediti jednakost $f \circ h = g \circ h$). Uočimo da je konus nad paralelnim parom zapravo vilica—i obratno. Komutativni dijagram oblika $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$ zovemo ***kovilica*** (mora vrijediti jednakost $h \circ f = h \circ g$). Uočimo da je kokonus nad paralelnim parom zapravo kovilica—i obratno. Dakle, možemo reći da je (ko)ujednačitelj univerzalna (ko)vilica.

U donjim dijagramima su opisana univerzalna svojstva ujednačitelja (lijevi dijagram) i koujednačitelja (desni dijagram) dijagrama $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$. Vrh ujednačitelja označen je s E, a koujednačitelja s C.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[d, dashed, "\exists! u"'] \arrow[dr, "q"] & & \\
E \arrow[r, "eq"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "cq"] \arrow[dr, "q"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists! u"] \\
& & Q
\end{tikzcd}$$

Napomena 1.3.17. Nije teško pokazati da je istaknuta komponenta ujednačitelja (ako postoji) uvijek monomorfizam. Dualno, istaknuta komponenta koujednačitelja (ako postoji) je uvijek epimorfizam.

Primjer 1.3.18. U kategoriji **Set**, ujednačitelj funkcija $f, g\colon X \to Y$ je $\{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$ zajedno sa inkluzijom u X. Neka je $\sim$ najmanja relacija ekvivalencije na Y koja sadrži $\{(f(x), g(x))\colon x \in X\}$. Lako je provjeriti da je tada koujednačitelj od f i g skup klasa te relacije ekvivalencije $Y/_{\sim}$, uz projekciju koja svaki element od Y šalje u njegovu klasu u kvocijentu $Y/_{\sim}$.

Ujednačitelj u kategorijama iz primjera 1.1.5 je dan istom formulom kao i u **Set**, sa stukturom naslijeđenom od X. Koujednačitelj od f i g u kategorijama **Ab**, ${}_R$**Mod** i ${}_K$**Vect** je $Y/\operatorname{Im}(f-g)$, uz očitu projekciju. U **Grp**, koujednačitelj je dan s Y/N, gdje je N najmanja normalna podgrupa od Y koja sadrži $\{f(x)g(x)^{-1}\colon x \in X\}$. U kategoriji **Top**, koujednačitelj je dan istom formulom kao i u **Set**, uz tzv. kvocijentnu topologiju (za opis kvocijentne topologije vidi [26, 1.22]).

Definicija 1.3.19. *Limes nad dijagramom* $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ *zovemo* **pullback** *(ili* **povlak**, **fibriran produkt***) od f i g nad Z, a njegov vrh označavamo (pomalo neprecizno) s $X \times_Z Y$.*

U donjem dijagramu u kojem je opisano univerzalno svojstvo pullback-a, pripadne komponente (koje se ponekad zovu i ***projekcije***) pullback-a su označene s p_1 i p_2.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "\exists! u"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Nije teško provjeriti da se pullback može definirati i kao produkt familije $\{(X, f), (Y, g)\}$ u kategoriji kriški C/Z definiranoj u primjeru 1.1.15.

Primjer 1.3.20. Neka su $f\colon X \to Z$ i $g\colon X \to Z$ morfizmi u kategoriji **Set**. Lako je provjeriti da je tada njihov pullback dan s: $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \colon f(x) = g(y)\}$, gdje su komponente pullback-a klasične projekcije na prvu, odnosno drugu komponentu.

Specijalno, ukoliko su f i g skupovne inkluzije, tada je njihov pullback zapravo $X \cap Y$, uz komponente koje su također inkluzije.

Istom formulom dan je i pullback u svim kategorijama iz primjera 1.1.5, uz strukturu koja se nasljeđuje od produkta.

Definicija 1.3.21. *Kolimes nad dijagramom* $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ *zovemo* **pushout** *(ili* **fibriran koprodukt***) od f i g nad Z.*

U donjem dijagramu kojim je opisano univerzalno svojstvo pushout-a, P označava vrh pushout-a zadanog dijagrama, a i_1 i i_2 pripadne komponente.

$$
\begin{tikzcd}
Q & & \\
& P \arrow[ul, dashed, "\exists! u"] & Y \arrow[l, "i_2"'] \arrow[ull, bend right, "j_2"'] \\
& X \arrow[u, "i_1"] \arrow[uul, bend left, "j_1"] & Z \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

Lako je vidjeti da se pushout može definirati i kao koprodukt familije $\{(X, f), (Y, g)\}$ u kategoriji Z/C iz primjera 1.1.15.

Primjer 1.3.22. Neka su $f\colon Z \to X$ i $g\colon Z \to Y$ morfizmi u kategoriji **Set**. Neka je $\sim$ najmanja relacija ekvivalencije na $X + Y$ koja sadrži $\{(f(x), g(x)) \colon x \in Z\}$. Lako je provjeriti da je tada njihov pushout skup klasa te relacije ekvivalencije $X + Y/_\sim$, uz očite pripadne komponente.

Specijalno, ukoliko je $Z = X \cap Y$, te f i g skupovne inkluzije, tada je njihov pushout zapravo $X \cup Y$, uz komponente koje su također inkluzije.

Napomena 1.3.23. Uočimo kako se pullback dijagrama $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ može konstruirati pomoću produkta i ujednačitelja, ukoliko postoje. Označimo kanonske projekcije produkta $X \times Y$ redom π_1 i π_2. Neka je $P \overset{eq}{\to} X \times Y$ ujednačitelj paralelnog para $f \circ \pi_1$ i

$g \circ \pi_2$. Nije teško provjeriti koristeći univerzalna svojstva limesa da je P pullback početnog dijagrama, uz komponente $\pi_1 \circ eq$ i $\pi_2 \circ eq$.

Dualnom konstrukcijom možemo dobiti pushout koristeći koprodukt i koujednačitelj.

Zapravo, produkti i ujednačitelji (koprodukti i koujednačitelji) su dovoljni da se dobije limes (kolimes) bilo kojeg dijagrama. O tome govori sljedeći pododjeljak.

1.3.3. Dovoljni uvjeti za egzistenciju (ko)limesa

Limes dijagrama $D\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ se može opisati relativno jednostavnom formulom. Direktnom provjerom slijedi:

Propozicija 1.3.24. *Skup* $L := \{(t_X)_{X\in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} \colon t_X \in D(X),\ (\forall f\colon X \to Y)\ D(f)(t_X) = t_Y\}$ *uz očite projekcije* $L \to D(X)$ *je limes dijagrama* $D\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$.

Nešto općenitija konstrukcija opisana u sljedećem teoremu može se provesti u bilo kojoj kategoriji s produktima i ujednačiteljima.

Teorem 1.3.25. *Kategorija je (konačno) potpuna ako i samo ako ima sve (konačne) produkte i ujednačitelje svih paralelnih parova. Dualno, kategorija je (konačno) kopotpuna ako i samo ako ima sve (konačne) koprodukte i koujednačitelje svih paralelnih parova.*

Dokaz. Neka je $D\colon \mathcal{D} \to C$ dijagram, te označimo produkte

$$P := \prod_{X\in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} D(X), \quad Q := \prod_{f\in \mathrm{Hom}(\mathcal{D})} D(\mathrm{cod}(f))$$

sa kanonskim projekcijama $p_X\colon P \to D(X)$ i $q_f\colon Q \to D(\mathrm{cod}(f))$. Po univerzalnom svojstvu produkta, postoje jedinstveni morfizmi $F, G\colon P \to Q$ takvi da za svaki morfizam $f\colon X \to Y$ u $\mathcal{D}$ vrijedi

$$q_f \circ F = p_Y, \quad D(f) \circ p_X = q_f \circ G. \tag{1.7}$$

Neka je $L \xrightarrow{e} P \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} Q$ ujednačitelj tog para, te stavimo $\gamma_X := p_X \circ e\colon L \to D(X)$. Koristeći (1.7) i svojstvo ujednačitelja, računamo:

$$D(f) \circ \gamma_X = D(f) \circ p_X \circ e = q_f \circ G \circ e = q_f \circ F \circ e = p_Y \circ e = \gamma_Y,$$

iz čega slijedi da je $\gamma\colon \Delta_L \to D$ prirodna transformacija, tj. konus nad D. Dokažimo da je i univerzalan. Neka je $\delta\colon \Delta_M \to D$ neki konus nad D, tj. $D(f) \circ \delta_X = \delta_Y$. Univerzalno svojstvo produkta nam daje jedinstven $r\colon M \to P$ za koji je $\delta_Z = p_Z \circ r$, za sve $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Računamo sada:

$$q_f \circ F \circ r = p_Y \circ r = \delta_Y = D(f) \circ \delta_X = D(f) \circ p_x \circ r = q_f \circ G \circ r,$$

iz čega, po univerzalnom svojstvu produkta Q možemo zaključiti da je $F \circ r = G \circ r$. Po univerzalnom svojstvu ujednačitelja L, postoji jedinstven $s\colon M \to L$ takav da je $e \circ s = r$. Ta je jednakost međutim, zbog univerzalnog svojstva produkta P ekvivalentna jednakosti $p_X \circ e \circ s = p_X \circ r$ za sve $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, tj. $\gamma_X \circ s = \delta_X$ za sve $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Ako je $s'\colon M \to L$ neki drugi morfizam koji zadovoljava $\gamma_X \circ s' = \delta_X$ za sve $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, tada vrijedi i $e \circ s' = r$, pa je $s = s'$ zbog univerzalnog svojstva ujednačitelja L. Stoga je γ zaista limes dijagrama D. Obrat je trivijalan, dok se druga tvrdnja dokaže dualno. □

Korolar 1.3.26. *Kategorije* **Set**, **Ab**, **Grp**, ${}_R$**Mod**, **Top** *i* ${}_K$**Vect** *su potpune i kopotpune kategorije.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz teorema 1.3.25 i raznih primjera iz prethodnog pododjeljka. □

Može se pokazati da je i **Cat** potpuna i kopotpuna kategorija. Za detalje, kao i neke druge primjere vidi [1, III.12].

Dokažimo jednu zanimljivu propoziciju koja daje neke nužne uvjete na (ko)potpunost kategorije.

Propozicija 1.3.27. *Mala kategorija koja nije predurеđaj, tj. nije dobivena kao u primjeru 1.1.8, ne može biti ni potpuna, niti kopotpuna.*

Dokaz. Ako kategorija nije predurеđaj, postoje objekti A i B sa barem dva različita morfizma $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Neka je κ kardinalnost skupa svih strelica dane male kategorije. Ako pretpostavimo da je ona potpuna, tada postoji produkt P familije $\{B_i = B\colon i \in \kappa\}$. Sada za bilo koji podskup $S \subseteq \kappa$ možemo naći morfizam $p_S\colon A \to P$ za koji je $\pi_i \circ p_S = f$ ako je $i \in S$, te $\pi_i \circ p_S = g$ ako $i \notin S$, gdje je π_i i-ta kanonska projekcija produkta P. Očito za različite podskupove od κ dobijemo različite morfizme, pa smo konstruirali injekciju $2^\kappa \to \kappa$ (2^k je oznaka za partitivni skup skupa κ). To je naravno apsurd. Dualno se pokaže da ta kategorija nije ni kopotpuna. □

1.3.4. (Ko)limesi i reprezentabilni funktori

Teorem 1.3.28. *Svaki kovarijantan funktor $F\colon \mathcal{D} \to$* **Set** *(sa male kategorije $\mathcal{D}$) je kolimes nekog dijagrama kovarijantnih hom-funktora. Dualno, svaki predsnop $G\colon \mathcal{D}^{op} \to$* **Set** *je kolimes nekog dijagrama kontravarijantnih hom-funktora.*

Dokaz. Definirajmo kategoriju $\mathcal{J}$ na sljedeći način: objekti od $\mathcal{J}$ neka su parovi (D, x), gdje je $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ i $x \in F(D)$; morfizam $(D, x) \xrightarrow{f} (D', x')$ u $\mathcal{J}$ neka je morfizam $D \xrightarrow{f} D'$ u $\mathcal{D}$ za koji vrijedi $F(f)(x) = x'$. Lako se vidi da je $\mathcal{J}$ dobro definirana mala kategorija. Definirajmo funktor $M\colon \mathcal{J}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}}$ na sljedeći način: $M(D, x) := h^D = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, -)$ i za

$(D, x) \xrightarrow{f} (D', x')$ neka je $M(f)\colon h^{D'} \to h^D$ prirodna transformacija zadana na komponentama predkompozicijom sa f. Tvrdimo da je F vrh kolimesa dijagrama M.

Kao u dokazu Yonedine leme 1.2.6 može se vidjeti da možemo naći prirodan izomorfizam $\Psi\colon F \to \mathrm{Nat}(h^{-}, F)$, tj. za svaki $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ bijekciju $\Psi_D\colon F(D) \to \mathrm{Nat}(h^D, F)$ prirodnu u D, za koju vrijedi

$$(\Psi_D(x))_Y(g) = F(g)(x) \quad \forall x \in F(D),\ \forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, Y). \tag{1.8}$$

Nije teško provjeriti da je familija $\gamma := \{\Psi_D(x)\colon (D, x) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})\}$ kokonus nad M s vrhom u F. Dokažimo još da je i univerzalan.

Neka je δ kokonus nad M s vrhom u nekom funktoru $L\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$. Analogno kao prije, možemo naći za svaki $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ bijekciju $\Phi_D\colon L(D) \to \mathrm{Nat}(h^D, L)$ prirodnu u D, za koju vrijedi

$$(\Phi_D(z))_Y(g) = L(g)(z) \quad \forall z \in L(D),\ \forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, Y), \tag{1.9}$$

stoga imamo da je $\delta_{(D,x)} = \Phi_D(z)$, za jedinstven $z \in L(D)$ koji ovisi o (D, x).

$$\begin{tikzcd}
h^{D'} \arrow[rr, "M(f)"] \arrow[d, "\Psi_{D'}(x')"'] \arrow[drr, "\Phi_{D'}(z')" near start] & & h^D \arrow[d, "\Phi_D(z)"] \arrow[dll, "\Psi_D(x)"' near start] \\
F \arrow[rr, dashed, "\Theta"'] & & L
\end{tikzcd}$$

Potrebno je još pokazati da postoji jedinstvena prirodna transformacija $\Theta\colon F \to L$ za koju je $\Theta \circ \Psi_D(x) = \Phi_D(z)$, za sve $(D, x) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$. Ukoliko u posljednjoj jednakosti gledamo D-komponentu u točki 1_D, dobijemo da je $\Theta_D(x) = z$ (gdje je $z \in L(D)$ takav da je $\delta_{(D,x)} = \Phi_D(z)$). Stoga je potrebno pokazati da tako definirana Θ zaista prirodna transformacija.

Ako je $(D, x) \xrightarrow{f} (D', x')$, $\delta_{(D,x)} = \Phi_D(z)$ i $\delta_{(D',x')} = \Phi_{D'}(z')$ (tj. $\Theta_D(x) = z$ i $\Theta_{D'}(x') = z'$), tada iz prirodnosti od δ, relacije (1.9) i bijektivnosti od $\Phi_{D'}$ slijedi $L(f)(z) = z'$. Dakle, vrijedi

$$L(f)(\Theta_D(x)) = L(f)(z) = z' = \Theta_{D'}(x') = \Theta_{D'}(F(f)(x)) \ \Rightarrow\ L(f) \circ \Theta_D = \Theta_{D'} \circ F(f),$$

tj. Θ je prirodna transformacija. Iz jednakosti $L(f)(z) = z'$ lako slijedi $\Theta \circ \Psi_D(x) = \Phi_D(z)$. Druga tvrdnja u iskazu teorema slijedi dualno. $\square$

Možemo malo blaže reći:

Korolar 1.3.29. *Predsnop na maloj kategoriji je kolimes reprezentabilnih predsnopova.*

Definicija 1.3.30. *Kažemo da funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$* **čuva limese**, *ako za svaki dijagram $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ za kojeg postoji limes $\lim D$, postoji i limes dijagrama $F \circ D$ i vrijedi da je $(\lim(F \circ D))_X = F((\lim D)_X)$, za sve objekte X u $\mathcal{D}$.*

Definicija 1.3.31. *Kažemo da funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$* **reflektira limese**, *ako za svaki dijagram $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ i konus l nad D za kojeg je $\{F(l_X)\colon X \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}\}$ limes dijagrama $F \circ D$, vrijedi da postoji i limes dijagrama D, te da je $(\lim D)_X = l_X$ za sve objekte X u $\mathcal{D}$.*

Analogno se definira kada funktor ***čuva/reflektira kolimese***. Slično tome, možemo gledati za kontravarijantne funktore kada prevode limese u kolimese, odnosno kada kolimese prevode u limese. Budući da smo u dokazu teorema 1.3.25 svaki limes uspjeli prikazati kao ujednačitelj dva produkta, slijedi korolar:

Korolar 1.3.32. *Funktor čuva/reflektira limese (kolimese) ako i samo čuva/reflektira produkte i ujednačitelje (koprodukte i koujednačitelje).*

Direktno iz definicije i univerzalnog svojstva slijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 1.3.33. *Pun i vjeran funktor reflektira limese i kolimese. Specijalno, Yonedino ulaganje $h\colon \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ i svaka ekvivalencija kategorija reflektiraju limese i kolimese.*

Teorem 1.3.34. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija i A objekt te kategorije. Kovarijantni hom-funktor $h^A = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ čuva limese.*

Dokaz. Neka je $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dijagram za kojeg postoji limes $\lim D$ s vrhom L. Stavimo $\gamma_X := h^A((\lim D)_X)$; lako se vidi da je γ konus nad $h^A \circ D$ s vrhom $h^A(L) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, L)$.

Neka je $\delta\colon \Delta_M \to h^A \circ D$ neki konus u **Set**. Tada je $\{\delta_X(m)\colon X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{D})\}$ konus nad D s vrhom A, za svaki $m \in M$. Stoga za svaki $m \in M$ postoji jedinstveni $\Phi(m)\colon A \to L$ u $\mathcal{C}$ za koji je $(\lim D)_X \circ \Phi(m) = \delta_X(m)$ za sve $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{D})$, što je ekvivalentno s $\gamma_X \circ \Phi = \delta_X$ za sve $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{D})$. Dakle, $\Phi\colon M \to h^A(L)$ je morfizam konusa δ i γ, očito jedinstveni. □

Ako je objekt B u $\mathcal{C}$, za kontravarijantni hom-funktor h_B također možemo primjeniti teorem 1.3.34 na sljedeći način. Vrijedi $h_B = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, -)\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$, a budući da je limes u $\mathcal{C}^{op}$ isto što i kolimes u $\mathcal{C}$, slijedi:

Korolar 1.3.35. *Kontravarijantan hom-funktor $h_B = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$ kolimese prevodi u limese. Preciznije, ako je D dijagram u $\mathcal{C}$ koji ima kolimes, tada dijagram $h_B \circ D$ ima limes, i vrijedi $(\lim(h_B \circ D))_X = h_B((\operatorname{colim} D)_X)$.*

Iz teorema 1.3.34 i korolara 1.3.35 direktno slijedi:

Korolar 1.3.36. *Neka su A, A_i ($i \in I$) objekti kategorije $\mathcal{C}$. Ukoliko postoji "unutarnji" (ko)produkt u navedenim izrazima, vrijedi*

$$\mathrm{Hom}\left(A, \prod_{i\in I} A_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, A_i), \quad \mathrm{Hom}\left(\coprod_{i\in I} A_i, A\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A_i, A).$$

1.3.5. Preplitanje (ko)limesa

Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ male kategorije, $\mathcal{E}$ neka je $\mathcal{C}$-potpuna i $\mathcal{D}$-potpuna kategorija, te uzmimo bifunktor $F\colon \mathcal{C}\times\mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Za fiksni $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ imamo dijagram $F(C,-)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Štoviše, nije teško provjeriti da je $C \mapsto F(C,-)$ funktor $\mathcal{C} \to [\mathcal{D},\mathcal{E}]$, uz sljedeće dodefiniranje na morfizmima:

$$\left(C \xrightarrow{f} C'\right) \mapsto \left(F(C,-) \xrightarrow{\bar{f}} F(C',-)\right), \text{ gdje je } \bar{f}_D := F(f, 1_D).$$

Taj funktor možemo postkomponirati s funktorom $\lim\colon [\mathcal{D},\mathcal{E}] \to \mathcal{E}$ definiranim u napomeni 1.3.7; dobijemo funktor kojeg sugestivno označavamo s $\lim_{D\in\mathcal{D}} F(-,D)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$. Vrh limesa tog funktora sugestivno označavamo s $\lim_{C\in\mathcal{C}}(\lim_{D\in\mathcal{D}} F(C,D))$. Na analogan način, fiksirajući prvo $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, dođemo do objekta $\lim_{D\in\mathcal{D}}(\lim_{C\in\mathcal{C}} F(C,D))$.

Teorem 1.3.37. *Uz prethodno uvedene oznake limesi međusobno "komutiraju", tj. vrijedi:*

$$\lim_{C\in\mathcal{C}}\left(\lim_{D\in\mathcal{D}} F(C,D)\right) \cong \lim_{D\in\mathcal{D}}\left(\lim_{C\in\mathcal{C}} F(C,D)\right). \tag{1.10}$$

Dokaz. Lijevu stranu u relaciji (1.10) označimo s L a desnu sa R. Za objekte $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ i $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ označimo komponente sljedećih limesa:

$$L \xrightarrow{p_C} \lim_{D\in\mathcal{D}} F(C,D) \xrightarrow{q_{CD}} F(C,D) \xleftarrow{r_{CD}} \lim_{C\in\mathcal{C}} F(C,D) \xleftarrow{s_D} R.$$

Nije teško provjeriti da kompozicije $\{q_{CD} \circ p_C\colon C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$ čine konus nad funktorom $F(-,D)$, za sve $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Stoga postoji jedinstven $\lambda_D\colon L \to \lim_{C\in\mathcal{C}} F(C,D)$ za kojeg je $q_{CD} \circ p_C = r_{CD} \circ \lambda_D$ za sve $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Slično se (uz *diagram chasing*[8]) vidi da je $\{\lambda_D\colon D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})\}$ konus nad $\lim_{C\in\mathcal{C}} F(C,-)$, pa postoji jedinstveni morfizam $\lambda\colon L \to R$ za kojeg je $s_D \circ \lambda = \lambda_D$ za sve $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

Ponavljajući ovu konstrukciju simetrično, dobijemo morfizam $\mu\colon R \to L$ sa odgovarajućim komutirajućim svojstvom. Vrijedi $q_{CD} \circ p_C \circ \mu \circ \lambda = q_{CD} \circ p_C$, pa je zbog univerzalnosti $\mu \circ \lambda = 1_L$. Analogno se pokaže da je i $\lambda \circ \mu = 1_R$. □

[8] Jurnjava po dijagramu.

Uočimo da nam u dokazu teorema 1.3.37 zapravo nije bila potrebna ($\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$)-potpunost kategorije $\mathcal{E}$, dovoljno je da svi navedeni limesi postoje da bi vrijedila formula (1.10). U tom slučaju se još dodatno na sličan način može pokazati da za konus $l_{CD} := q_{CD} \circ p_C$ (ili također $l_{CD} := r_{CD} \circ s_D$) vrijedi $l = \lim F$.

Dualizirajući cijelu gornju diskusiju, vidimo da vrijedi formula

$$\operatorname*{colim}_{C\in\mathcal{C}}\left(\operatorname*{colim}_{D\in\mathcal{D}} F(C,D)\right) \cong \operatorname*{colim}_{D\in\mathcal{D}}\left(\operatorname*{colim}_{C\in\mathcal{C}} F(C,D)\right), \tag{1.11}$$

ukoliko svi navedeni kolimesi postoje, te da odgovarajuće kompozicije komponenata navedenih kolimesa čine kolimes funktora F.

U nastavku ćemo dati neke dovoljne uvjete pod kojima limes i kolimes međusobno "komutiraju". Na sličan način kao u dokazu teorema 1.3.37 može se koristeći univerzalna svojstva (ko)limesa konstruirati "kanonski" morfizam

$$\lambda\colon \operatorname*{colim}_{C\in\mathcal{C}}\left(\lim_{D\in\mathcal{D}} F(C,D)\right) \to \lim_{D\in\mathcal{D}}\left(\operatorname*{colim}_{C\in\mathcal{C}} F(C,D)\right). \tag{1.12}$$

Međutim, on ne mora nužno biti izomorfizam, u što se lako uvjerimo u kategoriji **Set** gledajući dvočlane (ko)produkte malih skupova. No, pod nekim uvjetima ipak dobijemo izomorfizam.

Definicija 1.3.38. *Kategorija koja ima bar jedan objekt je* **filtrirana**, *ako vrijedi:*

- *za bilo koje objekte A i B postoji objekt C i morfizmi $A \to C$ i $B \to C$,*
- *za bilo koje morfizme $f, g\colon A \to B$ postoji objekt C i morfizam $h\colon B \to C$ tako da vrijedi $h \circ f = h \circ g$.*

Lema 1.3.39. *Neka je $\mathcal{D}$ konačna, a $\mathcal{C}$ filtrirana kategorija. Tada za svaki dijagram $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ postoji kokonus nad F.*

Dokaz. Indukcijom po broju objekata se lako vidi da tvrdnja vrijedi ukoliko je $\mathcal{D}$ diskretna kategorija. Također se indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ lako pokaže da za $f_1, f_2, \dots, f_n\colon C \to C'$ u $\mathcal{C}$ postoji $f\colon C' \to C''$ tako da vrijedi $f \circ f_i = f \circ f_j$ za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Primjenimo prvu tvrdnju na diskretnu konačnu familiju objekata $\{F(D)\colon D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}\}$; dobijemo kokonus $f_D\colon F(D) \to C$ nad tom familijom. Za svaki morfizam $d\colon D \to D'$ u $\mathcal{D}$ imamo paralelni par $f_D, f_{D'} \circ F(d)\colon F(D) \to C$, pa možemo naći $g_d\colon C \to C_d$ tako da je $g_d \circ f_D = g_d \circ f_{D'} \circ F(d)$. Sada možemo naći kokonus $h_d\colon C_d \to C'$ nad diskretnom konačnom familijom objekata $\{C_d\colon d \in \operatorname{Hom}(\mathcal{D})\}$. Prema drugoj tvrdnji u ovom dokazu, možemo naći $k\colon C' \to C''$ tako da vrijedi $k \circ h_d \circ g_d = k \circ h_{d'} \circ g_{d'}\colon C \to C''$ za sve morfizme d, d' u $\mathcal{D}$. Označimo tu kompoziciju sa $l\colon C \to C''$. Lako se provjeri da je $\{l \circ f_D\colon D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}\}$ kokonus nad F. □

Filtriran kolimes je kolimes dijagrama kojemu je domena mala filtrirana kategorija. Oni su zgodni jer se u kategoriji **Set** mogu opisati relativno jednostavnom formulom. Direktnom provjerom, koristeći se lemom 1.3.39, dobije se sljedeća propozicija:

Propozicija 1.3.40. *Neka je $\mathcal{C}$ mala filtrirana kategorija i $F\colon \mathcal{C} \to$ **Set** funktor. Filtrirani kolimes* $\operatorname{colim} F$ *dan je s:*

$$s_C\colon F(C) \to L := \coprod_{C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} F(C) \Big/ \sim, \quad s_C(x) := [x],$$

gdje je $[x]$ klasa ekvivalencije od $x \in L$, a $\sim$ relacija ekvivalencije definirana s

$$(x \in F(C))\,(x' \in F(C'))\; x \sim x' \;\Leftrightarrow\; (\exists f\colon C \to C'')\,(\exists g\colon C' \to C'')\; F(f)(x) = F(g)(x').$$

Teorem 1.3.41. *Neka je $\mathcal{C}$ mala filtrirana kategorija, $\mathcal{D}$ konačna kategorija, te neka je zadan bifunktor $F\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to$ **Set**. Tada vrijedi:*

$$\operatorname*{colim}_{C \in \mathcal{C}} \Big(\lim_{D \in \mathcal{D}} F(C, D)\Big) \cong \lim_{D \in \mathcal{D}} \Big(\operatorname*{colim}_{C \in \mathcal{C}} F(C, D)\Big). \tag{1.13}$$

Dokaz. Označimo lijevu stranu izraza (1.13) sa L, a desnu sa R. Propozicije 1.3.24 i 1.3.40 nam daju točan opis kako izgledaju skupovi L i R:

$$L = \left(\coprod_{C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \Big\{ (x_D)_{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} \colon x_D \in F(C, D),\ (\forall f\colon D \to D')\ F(1_C, f)(x_D) = x_{D'} \Big\} \right) \Big/ \sim,$$

pri čemu su nizovi $(x_D)_{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})}$ $(x_D \in F(C, D))$ i $(y_D)_{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})}$ $(y_D \in F(C', D))$ ekvivalentni ako i samo ako postoje morfizmi $f\colon C \to C''$ i $g\colon C' \to C''$ u $\mathcal{C}$ takvi da vrijedi $F(f, 1_D)(x_D) = F(g, 1_D)(y_D)$ za sve $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$;

$$R = \Big\{ ([x_D])_{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} \colon x_D \in F(C, D),\ (\forall f\colon D \to D')\ [F(1_C, f)(x_D)] = [x_{D'}] \Big\},$$

pri čemu su, za fiksan $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, $x \in F(C, D)$ i $y \in F(C', D)$ ekvivalentni ako i samo ako postoje morfizmi $f\colon C \to C''$ i $g\colon C' \to C''$ u $\mathcal{C}$ takvi da vrijedi $F(f, 1_D)(x) = F(g, 1_D)(y)$.

Morfizam $\lambda\colon L \to R$ iz (1.12) tada ima oblik:

$$\lambda\left([(x_D)_{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})}]\right) := ([x_D])_{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})}.$$

Lako se vidi da je λ dobro definirano, a koristeći se lemom 1.3.39, lako se pokaže injektivnost. Da bi dokazali još i surjektivnost od λ, uzmimo neki $([x_D])_{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} \in R$, gdje su $x_D \in F(C_D, D)$ za sve $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Zbog leme 1.3.39 postoje $f_D\colon C_D \to C$, pa vrijedi da je $([x_D])_{D\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})} = ([F(f_D, 1_D)(x_D)])_{D\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})}$, gdje su $F(f_D, 1_D)(x_D) \in F(C, D)$. Za bilo koji morfizam $f\colon D \to D'$ u $\mathcal{D}$ vrijede ekvivalencije

$$F(f_D, f)(x_D) \sim F(1_{C_D}, f)(x_D) \sim x_{D'} \sim F(f_{D'}, 1_{D'})(x_{D'}),$$

pa stoga postoje $g_f, h_f\colon C \to C_f$ za koje je $F(g_f \circ f_D, f)(x_D) = F(h_f \circ f_{D'}, 1_{D'})(x_{D'})$. Primjenimo li lemu 1.3.39 na dijagram koji se sastoji od svih g_f i h_f, za $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{D})$, dobijemo morfizme $k\colon C \to C'$ i $k_f\colon C_f \to C'$ tako da je $k = k_f \circ g_f = k_f \circ h_f$, za sve $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{D})$. Sada se lako provjeri da je $\left[(F(k \circ f_D, 1_D)(x_D))_{D\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})}\right] \in L$ element kojeg λ pošalje u $([x_D])_{D\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})}$. □

Napomena 1.3.42. Izrazi $\lim_{C\in\mathcal{C}} \lim_{D\in\mathcal{D}}$, $\mathrm{colim}_{C\in\mathcal{C}} \lim_{D\in\mathcal{D}}$ i ostale kombinacije koje se javljaju u relacijama (1.10), (1.11) i (1.13) mogu se dodefinirati do funktora $[\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}] \to \mathcal{E}$, uz određene uvjete na (ko)potpunost kategorije $\mathcal{E}$, na sličan način kao u napomeni 1.3.7. Tada se pokazuje da su izomorfizmi u tim relacijama koje smo konstruirali u dokazima zapravo prirodni izomorfizmi.

Zbog teorema 1.3.41 možemo reći da u kategoriji **Set** filtrirani kolimesi komutiraju sa konačnim limesima. No međutim, prava vrijednost tog teorema leži u činjenici da se to komutiranje može prenijeti u mnoge algebarske situacije. Primjerice, pokaže se da zaboravni funktor **Ab** $\to$ **Set** čuva i reflektira konačne limese i filtrirane kolimese. Stoga, i u kategoriji **Ab** vrijedi da filtrirani kolimesi komutiraju sa konačnim limesima. Za detalje vidi [4, 2.13].

1.3.6. (Ko)limesi u kategoriji funktora

Neka su $\mathcal{D}$ i $\mathcal{C}$ male kategorije. Ako nam je zadan funktor $F\colon \mathcal{D} \to [\mathcal{C}, \mathcal{E}]$, tada za svaki objekt $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ imamo funktor $F(-)(C)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ koji ima djelovanje $D \mapsto F(D)(C)$ na objektima, i $d \mapsto F(d)_C$ na morfizmima.

Teorem 1.3.43. *Neka su $\mathcal{D}$ i $\mathcal{C}$ male kategorije, te neka je zadan funktor $F\colon \mathcal{D} \to [\mathcal{C}, \mathcal{E}]$. Ako za svaki $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ funktor $F(-)(C)\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ ima limes, tada i funktor F ima limes, koji se "računa po točkama"[9]. Analogna tvrdnja vrijedi i za kolimese.*

Dokaz. Direktno se provjeri da za morfizam svaki $f\colon C \to C'$ u $\mathcal{C}$ dobijemo prirodnu transformaciju $F(-)(f)\colon F(-)(C) \to F(-)(C')$ definiranu s $F(-)(f)_D := F(D)(f)$.

Neka je za $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ konus p^C s vrhom u $L(C)$ limes funktora $F(-)(C)$. Svaki morfizam $f\colon C \to C'$ u $\mathcal{C}$ zbog univerzalnosti limesa inducira morfizam $L(f)\colon L(C) \to L(C')$ jedinstveno određen s jednakostima $p_D^{C'} \circ L(f) = F(D)(f) \circ p_D^C$ za sve $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Direktno se provjeri da je time zadan funktor $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, te da je $p_D\colon L \to F(D)$ prirodna

[9]Točno značenje "računanja po točkama" se može vidjeti u dokazu.

transformacija (uz $(p_D)_C := p_D^C$), za sve $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Sada se može lako provjeriti da je p limes funktora F s vrhom u L. □

Dobili smo i formule: $(\lim F)_{D,C} = (\lim F(-)(C))_D$, ili ukoliko gledamo samo vrhove limesa a ne cjelokupne konuse: $(\lim F)(C) = \lim F(-)(C)$. Analogne formule vrijede za kolimese.

Korolar 1.3.44. *Ako je $\mathcal{C}$ mala, a $\mathcal{E}$ (ko)potpuna kategorija, onda je i kategorija* $[\mathcal{C}, \mathcal{E}]$ *(ko)potpuna, i (ko)limesi se "računaju po točkama".*

Korolar 1.3.45. *Neka je $\mathcal{C}$ mala kategorija. Kategorije* $\hat{\mathcal{C}} = [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ *i* $[\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$ *su potpune i kopotpune, (ko)limesi im se "računaju po točkama", te im filtrirani kolimesi komutiraju sa konačnim limesima.*

Teorem 1.3.46. *Yonedino ulaganje $h\colon \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ čuva limese.*

Dokaz. Neka je $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktor s limesom p. Trebamo dokazati da za sve $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ i $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ vrijedi $(p_D \circ -) = (\lim(h \circ F))_{D,C}$. Vrijedi:

$$(\lim(h \circ F))_{D,C} \overset{\text{teorem 1.3.43}}{=} (\lim h(F(-))(C))_D = (\lim(h^C \circ F))_D \overset{\text{teorem 1.3.34}}{=} h^C(p_D) = (p_D \circ -).$$

□

1.3.7. Inverzni i direktni limesi sa usmjerenog skupa

Cilj ovog pododjeljka je opisati (ko)limese nad tzv. usmjerenim skupovima u nekim jednostavnim algebarskim kategorijama. Neka je stoga $\mathcal{C}$ jedna od kategorija **Set**, **Grp**, **Ab**, **Ring** ili ${}_R\mathbf{Mod}$.

Definicija 1.3.47. Usmjeren skup $(I, \leq)$ *je neprazan skup I zajedno sa refleksivnom, antisimetričnom i tranzitivnom relacijom $\leq$, tako za svaka dva elementa $i, j \in I$ postoji $k \in I$ za kojeg vrijedi $i \leq k$ i $j \leq k$.*

Primjer 1.3.48. Neka je X topološki prostor. Stavimo $\mathbf{Ouv}(X) := \{U \subseteq X\colon U \text{ otvoren}\}$, te neka vrijedi $U \leq V$ ako i samo ako je $V \subseteq U$. Tada je $(\mathbf{Ouv}(X), \leq)$ usmjeren skup, jer su $U, V \leq U \cap V \in \mathbf{Ouv}(X)$ za sve $U, V \in \mathbf{Ouv}(X)$.

Primjer 1.3.49. Neka je X topološki prostor, te fiksirajmo neku točku $x \in X$. Stavimo $\mathbf{Ouv}(X)_x := \{U \subseteq X\colon U \text{ otvoren},\ x \in U\}$, te neka je relacija $\leq$ na $\mathbf{Ouv}(X)_x$ definirana kao u primjeru 1.3.48. Tada je $(\mathbf{Ouv}(X)_x, \leq)$ usmjeren skup.

Primjer 1.3.50. Neka je X topološki prostor, i neka je zadan $S \subseteq X$ bilo koji podskup. Stavimo $\mathbf{Ouv}(X)_S := \{U \subseteq X\colon U \text{ otvoren},\ S \subseteq U\}$, te neka je relacija $\leq$ na $\mathbf{Ouv}(X)_S$ definirana kao u primjeru 1.3.48. Tada je $(\mathbf{Ouv}(X)_S, \leq)$ usmjeren skup.

Usmjeren skup možemo shvatiti kao kategoriju, na jednostavan način kao što je opisano u primjeru 1.1.8. Očito dobijemo malu filtriranu kategoriju, u kojoj je produkt infimum, a koprodukt supremum; inicijalni objekt je minimum od I, dok je terminalni maksimum. Uočimo da je kategorija koja se na taj način dobije iz usmjerenog skupa iz primjera 1.3.48 suprotna kategoriji iz primjera 1.1.7.

Definicija 1.3.51. *Neka je $(I, \leq)$ usmjeren skup shvaćen kao kategorija. Funktor $I^{op} \to C$ zovemo* **inverzni sustav**. *Limes inverznog sustava zovemo* **inverzni limes**.

Funktor $I \to C$ zovemo **direktni sustav**. *Kolimes direktnog sustava zovemo* **direktni limes**[10].

Uočimo da je inverzni sustav zadan familijom objekata $\{A_i \colon i \in I\}$ iz C i familijom morfizama $\{f_{ij} \in \mathrm{Hom}_C(A_j, A_i) \colon i, j \in I, i \leq j\}$ tako da vrijedi $f_{ii} = 1_{A_i}$ i $f_{ij} = f_{ik} \circ f_{kj}$ za sve $i, j, k \in I$ za koje je $i \leq k \leq j$.

Slično, direktni sustav je zadan familijom objekata $\{B_i \colon i \in I\}$ iz C i familijom morfizama $\{g_{ij} \in \mathrm{Hom}_C(B_i, B_j) \colon i, j \in I, i \leq j\}$ tako da vrijedi $g_{ii} = 1_{B_i}$ i $g_{ij} = g_{kj} \circ g_{ik}$ za sve $i, j, k \in I$ za koje je $i \leq k \leq j$.

Izravnom provjerom se pokaže:

Propozicija 1.3.52. *Inverzni limes inverznog sustava $(\{A_i\}_I, \{f_{ij}\}_I)$ je dan formulom*

$$\left\{ (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \;:\; a_i = f_{ij}(a_j) \ \forall i, j \in I, i \leq j \right\},$$

gdje se algebarska struktura nasljeđuje od produkta $\prod_{i \in I} A_i$, dok su komponente inverznog limesa restrikcije kanonskih projekcija tog produkta.

Direktni limes direktnog sustava $(\{B_i\}_I, \{g_{ij}\}_I)$ je dan formulom

$$\left. \bigsqcup_{i \in I} B_i \middle/ \sim \right.,$$

gdje je $\sqcup$ oznaka za disjunktnu uniju, a $\sim$ relacija ekvivalencije definirana na sljedeći način: za $b_i \in B_i$ i $b_j \in B_j$ vrijedi $b_i \sim b_j$ ako i samo ako postoji $k \in I$ takav da vrijedi $g_{ik}(b_i) = g_{jk}(b_j)$. Algebarska struktura i komponente direktnog limesa su definirane na očit način.

[10] Pojmovi *inverzni limes* i *direktni limes* su često u literaturi sinonimi za limes i kolimes, redom (između ostaloga, kao i *projektivni limes* i *induktivni limes*, redom). Nama će atribut direktni/inverzni označavati da je domena dijagrama usmjeren skup.

1.4. Adjungirani funktori

Od sada na dalje ćemo kompoziciju morfizama i funktora ponekad pisati izostavljajući oznaku $\circ$ (npr. gf umjesto $g \circ f$) i zagrade (npr. FX umjesto $F(X)$), ukoliko nema opasnosti da dođe do zabune.

Ako su dani funktori $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G,H} \mathcal{E} \xrightarrow{K} \mathcal{F}$ funktori, i $\mu\colon G \to H$ prirodna transformacija, tada označavamo Godementov produkt $\mu F := \mu * i_F\colon GF \to HF$ i $K\mu := i_K * \mu\colon KG \to KH$, gdje su $F \xrightarrow{i_F} F$ i $K \xrightarrow{i_K} K$ identičke prirodne transformacije. Dakle, po komponentama vrijedi $(\mu F)_X = \mu_{FX}$ i $(K\mu)_X = K(\mu_X)$.

Definicija 1.4.1. *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ bilo koje kategorije, te neka su $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktori. Kažemo da je funktor F* **lijevi adjungirani** *funktoru G, odnosno da je funktor G* **desni adjungirani** *funktoru F, i pišemo $F \dashv G$, ako postoje prirodne transformacije $\eta\colon I_{\mathcal{C}} \to GF$ i $\epsilon\colon FG \to I_{\mathcal{D}}$, koje zovemo redom* **jedinica** *i* **kojedinica adjunkcije** *$F \dashv G$, tako da sljedeći* **trokutni dijagrami** *komutiraju:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, "\epsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, "G\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Teorem 1.4.2. *Vrijedi $F \dashv G$ ako i samo ako za svaki objekt X u $\mathcal{C}$ i Y u $\mathcal{D}$ postoji izomorfizam $\alpha_{XY}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$ koji je prirodan u X i u Y, tj. ako i samo ako su bifunktori $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ prirodno izomorfni.*

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Neka su oznake postavljene kao u definiciji 1.4.1. Za $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$ i $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$ stavimo

$$\alpha_{XY}(f) := G(f) \circ \eta_X, \qquad \beta_{XY}(g) := \epsilon_Y \circ F(g).$$

Iz prirodnosti od η slijedi prirodnost od $\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))$, a iz prirodnosti od η i ϵ i trokutnih identiteta slijedi da je $\alpha_{XY}^{-1} = \beta_{XY}$. Dakle, α je prirodni izomorfizam između navedenih bifunktora.

$\boxed{\Leftarrow}$ Definirajmo $\eta_X := \alpha_{X,FX}(1_{FX})$ i $\epsilon_Y := \alpha_{GY,Y}^{-1}(1_{GY})$ za $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ i $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Iz prirodnosti od α u oba argumenta pokaže se prirodnost od $\eta\colon I_{\mathcal{C}} \to GF$ i $\epsilon\colon FG \to I_{\mathcal{D}}$, te trokutni identiteti. $\square$

Karakterizacija u prethodnom teoremu se ponekad uzima za definiciju adjungiranih funktora. Možemo uočiti iz istog teorema da je dual tvrdnje $F \dashv G$ upravo $G \dashv F$.

Primjer 1.4.3. Neka je $\mathcal{D}$ mala kategorija, a $\mathcal{C}$ $\mathcal{D}$-potpuna kategorija. U napomeni 1.3.8 smo vidjeli da postoji prirodna u V bijekcija $\mathrm{Hom}_{[\mathcal{D},\mathcal{C}]}(\Delta_V, D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, \lim D)$, gdje je lim funktor shvaćen kao u napomeni 1.3.7. Lako se provjeri da je ta bijekcija prirodna i u D, pa stoga imamo adjunkciju $\Delta \dashv \lim$.

Dualno (napomene 1.3.7 i 1.3.9), ukoliko je $\mathcal{C}$ $\mathcal{D}$-kopotpuna kategorija, imamo prirodnu u V i u D bijekciju $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim} D, V) \cong \mathrm{Hom}_{[\mathcal{D},\mathcal{C}]}(D, \Delta_V)$, pa slijedi da je $\operatorname{colim} \dashv \Delta$.

Propozicija 1.4.4. *Neka su dani funktori* $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D} \underset{G'}{\overset{F'}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}$ *za koje vrijede adjunkcije* $F \dashv G$ *i* $F' \dashv G'$. *Tada je i* $F'F \dashv GG'$.

Dokaz. Komponirajući prirodne izomorfizme iz karakterizacije u teoremu 1.4.2 dobivamo prirodni izomorfizam $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(F'F(-), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), G'(-)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, GG'(-))$. □

Propozicija 1.4.5. *Funktor* $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *ima lijevog adjungiranog ako i samo ako je za svaki* $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *funktor* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(-))\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ *reprezentabilan.*

Dokaz. Ako je $F \dashv G$, tada iz teorema 1.4.2 slijedi da je za svaki $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ par (FC, α_C) reprezentacija funktora $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(-))$. Obrat slijedi direktno iz leme 1.2.11. □

Teorem 1.4.6. *Ako su* $F_1, F_2\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *oboje lijevi adjungirani funktoru* $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, *tada postoji prirodni izomorfizam* $\alpha\colon F_1 \to F_2$. *Dualno, i desni adjungirani funktor zadanom funktoru, ako postoji, jedinstven je do na prirodni izomorfizam.*

Dokaz. Ako su $\alpha^i\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_i(-), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))$ prirodni izomorfizmi, za $i = 1, 2$, tada su (F_iC, α^i_C) reprezentacije funktora $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(-))$, za svaki $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Po dualu teorema 1.2.10 imamo izomorfizam $\alpha_C\colon F_1C \to F_2C$ za koji sljedeći dijagram komutira za sve $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_2C, Y) \arrow[dl, "-\circ\alpha_C"'] \arrow[dr, "\alpha^2_{CY}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1C, Y) \arrow[rr, "\alpha^1_{CY}"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GY)
\end{tikzcd}$$

Koristeći taj dijagram i prirodnost od α^1 i α^2 pokaže se i prirodnost od α, *diagram chasing* metodom:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_2C', F_2C') \arrow[dl, "-\circ\alpha_{C'}"'] \arrow[dr, "\alpha^2_{C',F_2C'}"] \arrow[dd, "-\circ F_2(g)"'] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1C', F_2C') \arrow[rr, "\alpha^1_{C',F_2C'}"' near end] \arrow[dd, "-\circ F_1(g)"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', GF_2C') \arrow[dd, "-\circ g"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_2C, F_2C') \arrow[dl, "-\circ\alpha_C"'] \arrow[dr, "\alpha^2_{C,F_2C'}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1C, F_2C') \arrow[rr, "\alpha^1_{C,F_2C'}"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GF_2C')
\end{tikzcd}$$

U dijagramu je morfizam $g\colon C \to C'$ u $\mathcal{C}$ uzet po volji. □

Teorem 1.4.7. *Ako je funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ekvivalencija kategorija, tada postoji njemu lijevi adjungirani, tako da su jedinica i kojedinica te adjunkcije prirodni izomorfizmi. Dualno, postoji i njemu desni adjungirani, tako da su jedinica i kojedinica te adjunkcije prirodni izomorfizmi.*

Dokaz. Po teoremu 1.1.29 funktor G je pun, vjeran i esencijalno surjektivan. Zato za svaki $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ možemo naći $FC \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ i izomorfizam $\eta_C\colon C \to GFC$. Ukoliko za morfizam $f\colon C \to C'$ u $\mathcal{C}$ definiramo $Ff := G^{-1}(\eta_{C'} \circ f \circ \eta_C^{-1})$, lako se provjeri da je $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor, te $\eta\colon I_{\mathcal{C}} \to GF$ prirodni izomorfizam.

Za $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ stavimo $\epsilon_D := G^{-1}(\eta_{GD}^{-1})\colon FGD \to D$, koji je očito izomorfizam. Lako se provjeri da je $\epsilon\colon FG \to I_{\mathcal{D}}$ prirodni izomorfizam. Komutativnost trokutnih dijagrama se također izravno provjeri. Stoga imamo adjunkciju $F \dashv G$ gdje su jedinica η i kojedinica ϵ prirodni izomorfizmi. □

Teorem 1.4.8. *Funktor koji ima lijevog adjungiranog čuva limese. Dualno, funktor koji ima desnog adjungiranog čuva kolimese.*

Dokaz. Neka za $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ i $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ imamo $\alpha\colon \mathrm{Hom}(F(-),-) \to \mathrm{Hom}(-,G(-))$ prirodni izomorfizam, te neka je dan dijagram $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ s limesom $l = \lim D\colon \Delta_L \to D$. Za svaki objekt X iz $\mathcal{J}$ stavimo $\gamma_X := G(l_X)\colon GL \to GDX$; očito je $\gamma\colon \Delta_{GL} \to GD$ konus nad dijagramom GD u $\mathcal{C}$. Dokažimo još da je univerzalan.

Neka je $\delta\colon \Delta_M \to GD$ konus nad GD. Ako stavimo $\hat{\delta}_X := \alpha^{-1}_{M,DX}(\delta_X)\colon FM \to DX$, lako se provjeri da je $\hat{\delta}\colon \Delta_{FM} \to D$ konus nad D. Stoga postoji jedinstven $h\colon FM \to L$ za kojeg vrijedi $l_X \circ h = \hat{\delta}_X$ za sve objekte X u $\mathcal{J}$. No tada se lako vidi da za $\hat{h} := \alpha_{ML}(h)\colon M \to GL$ vrijedi $G(l_X) \circ \hat{h} = \delta_X$ za sve objekte X u $\mathcal{J}$, kao i da je $\hat{h}$ s tim svojstvom jedinstven. Stoga je $\gamma = \lim GD$. □

Direktno iz teorema 1.4.7 i 1.4.8 slijedi:

Korolar 1.4.9. *Ekvivalencija kategorija čuva limese i kolimese.*

1.5. Kanove ekstenzije

Definicija 1.5.1. *Neka su dani funktori $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$.* **Lijeva Kanova ekstenzija** *od G duž F (u oznaci* $\mathrm{Lan}_F G$*) je par (L, α), gdje su $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funktor i $\alpha\colon G \to LF$ prirodna transformacija, sa (univerzalnim) svojstvom da za svaki drugi par (H, γ), gdje su $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funktor i $\gamma\colon G \to HF$ prirodna transformacija, postoji jedinstvena prirodna transformacija $\delta\colon L \to H$ tako da vrijedi $\delta F \circ \alpha = \gamma$.*

Desna Kanova ekstenzija *od G duž F (koju označavamo s $\mathrm{Ran}_F\, G$) je par (R,β), gdje su $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funktor i $\beta\colon RF \to G$ prirodna transformacija, sa (univerzalnim) svojstvom da za svaki drugi par (H,γ), gdje su $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funktor i $\gamma\colon HF \to G$ prirodna transformacija, postoji jedinstvena prirodna transformacija $\delta\colon H \to R$ tako da vrijedi $\beta \circ \delta F = \gamma$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow" near start] & \mathcal{D} \arrow[dl, "\mathrm{Lan}_F\, G"] \\ \mathcal{E} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow" near start] & \mathcal{D} \arrow[dl, "\mathrm{Ran}_F\, G"] \\ \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

Kanove ekstenzije su važne u teoriji kategorija jer se mnogi pojmovi poput (ko)limesa, adjunkcije, i sl. mogu svesti na poseban slučaj neke Kanove ekstenzije. Vidi [22, X.7], odjeljak pod nazivom *"All Concepts Are Kan Extensions"*.

1.6. Monoidalne i obogaćene kategorije

1.6.1. Monoidalne kategorije

Definicija 1.6.1. Monoidalna kategorija *je petorka $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_0, \otimes, I, a, l, r)$, gdje je $\mathcal{V}_0$ kategorija, $\otimes\colon \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V}_0$ bifunktor, $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_0)$, te su nam dani sljedeći prirodni izomorfizmi: $a_{XYZ}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $l_X\colon I \otimes X \to X$ i $r_X\colon X \otimes I \to X$, tako da sljedeći dijagrami (***aksiomi koherencije***) komutiraju:*

$$\begin{tikzcd} ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a\otimes 1"'] & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a"] & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \\ (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[rr, "a"] & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[u, "1\otimes a"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "r\otimes 1"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1\otimes l"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd}$$

U gornjim dijagramima su izostavljene oznake komponenata prirodnih transformacija; nije teško uočiti o kojim je komponentama navedenih prirodnih transformacija riječ. Ukoliko su izomorfizmi a, l i r identičke prirodne transformacije, kažemo da je data monoidalna kategorija ***striktna***.

Vrijedi *Mac Laneov teorem koherencije*, kojeg ćemo iskazati neformalno: U monoidalnoj kategoriji komutira svaki dijagram koji se može "izgraditi" samo pomoću komponenata prirodnih izomorfizama a, l, r, 1, te bifunktora $\otimes$. Za detalje vidi [22, VII.2].

Primjer 1.6.2. Neka je R komutativan prsten s jedinicom. Tada svaki R-modul smatramo unitarnim. Kategorija ${}_R\mathbf{Mod}$ je monoidalna uz klasičan tenzorski produkt $\otimes$. Vidi [16, IV.5].

Primjer 1.6.3. Neka je $\mathcal{V}_0$ bilo koja kategorija koja ima sve konačne produkte. Tada možemo na njoj dobiti strukturu monoidalne kategorije ukoliko definiramo $A \otimes B := A \times B$ na objektima, a na morfizmima koristimo faktorizaciju preko univerzalnog svojstva. Za I stavimo terminalni objekt, a a, l i r konstruiramo redom koristeći kanonske projekcije i univezalno svojstvo produkta. Za tako dobivenu monoidalnu kategoriju kažemo da je ***Kartezijeva***.

Primjer 1.6.4. Na kategoriji endofunktora $[C, C]$ neke kategorije C imamo strukturu striktne monoidalne kategorije, ukoliko za $\otimes$ stavimo da bude kompozicija, te $I := I_C$.

1.6.2. Obogaćene kategorije nad monoidalnom kategorijom

Često puta možemo u nekoj zadanoj kategoriji uočiti da skupovi $\mathrm{Hom}(X, Y)$ imaju dodatnu stukturu. Primjerice, u kategoriji ${}_R\mathbf{Mod}$ skupovi $\mathrm{Hom}(X, Y)$ imaju strukturu Abelove grupe. Time motiviramo sljedeću definiciju.

Definicija 1.6.5. *Neka je $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_0, \otimes, I, a, l, r)$ monoidalna kategorija.* **$\mathcal{V}$-kategorija** *(ili* **kategorija obogaćena nad** *$\mathcal{V}$) $\mathcal{A}$ sastoji se od klase* **objekata** $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$*,* **hom-objekta** $\mathcal{A}(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_0)$ *za sve $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$,* **kompozicije** $M \colon \mathcal{A}(B, C) \otimes \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{A}(A, C)$ *za sve trojke $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, i* **identitete** $j \colon I \to \mathcal{A}(A, A)$ *za sve $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, tako da sljedeći dijagrami (***aksiom asocijativnosti*** i* **aksiom identitete** *resp.) komutiraju:*

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathcal{A}(C,D) \otimes \mathcal{A}(B,C)\big) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "M\otimes 1"'] & & \mathcal{A}(C,D) \otimes \big(\mathcal{A}(B,C) \otimes \mathcal{A}(A,B)\big) \arrow[d, "1\otimes M"] \\
\mathcal{A}(B,D) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "M"] & \mathcal{A}(A,D) & \mathcal{A}(C,D) \otimes \mathcal{A}(A,C) \arrow[l, "M"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(B,B) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "M"] & \mathcal{A}(A,B) & \mathcal{A}(A,B) \otimes \mathcal{A}(A,A) \arrow[l, "M"'] \\
I \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[u, "j\otimes 1"] \arrow[ur, "l"'] & & \mathcal{A}(A,B) \otimes I \arrow[u, "1\otimes j"'] \arrow[ul, "r"]
\end{tikzcd}$$

Uočimo da je (lokalno mala) kategorija upravo kategorija obogaćena nad Kartezijevom monoidalnom kategorijom **Set**. Preduređaj je upravo kategorija obogaćena nad diskretnom kategorijom $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Definicija 1.6.6. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ $\mathcal{V}$-kategorije.* **$\mathcal{V}$-funktor** $T \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *se sastoji od funkcije $T \colon \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ i morfizama $T_{AB} \colon \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{B}(TA, TB)$ za svaki par $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ koji su kompatibilni s identitetom i kompozicijom, tj. tako da sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathcal{A}(A,A) \arrow[rr, "T"] & & \mathcal{B}(TA,TA) \\ & I \arrow[ul, "j"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A}(B,C)\otimes\mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "T\otimes T"'] & \mathcal{A}(A,C) \arrow[d, "T"] \\ \mathcal{B}(TB,TC)\otimes\mathcal{B}(TA,TB) \arrow[r, "M"] & \mathcal{B}(TA,TC) \end{tikzcd}$$

Možemo na očiti način definirati ***kompoziciju*** $\mathcal{V}$-funktora, tako da dobijemo kategoriju svih $\mathcal{V}$-kategorija i $\mathcal{V}$-funktora među njima[11]. Označavamo je s $\mathcal{V}$-**Cat**.

Definicija 1.6.7. *Neka su $T, S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $\mathcal{V}$-funktori između $\mathcal{V}$-kategorija.* $\mathcal{V}$**-prirodna transformacija** *$\alpha\colon T \to S$ je familija svojih* **komponenata** *$\alpha_A : I \to \mathcal{B}(TA, TB)$ (indeksirana sa $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$) koja zadovoljava* $\mathcal{V}$**-prirodnost***, tj. sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & I\otimes\mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "\alpha_B\otimes T"] & \mathcal{B}(TB,SB)\otimes\mathcal{B}(TA,TB) \arrow[dr, "M"] & \\ \mathcal{A}(A,B) \arrow[ur, "l^{-1}"] \arrow[dr, "r^{-1}"'] & & & \mathcal{B}(TA,SB) \\ & \mathcal{A}(A,B)\otimes I \arrow[r, "S\otimes\alpha_A"'] & \mathcal{B}(SA,SB)\otimes\mathcal{B}(TA,SA) \arrow[ur, "M"'] & \end{tikzcd}$$

Ako su dani $\mathcal{V}$-funktori $T, S, R\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, za $\mathcal{V}$-prirodne transformacije $\alpha\colon T \to S$ i $\beta\colon S \to R$ definiramo ***kompoziciju*** $\beta \circ \alpha\colon T \to R$ po komponentama:

$$I \cong I \otimes I \xrightarrow{\beta_A\otimes\alpha_A} \mathcal{B}(SA, RA) \otimes \mathcal{B}(TA, SA) \xrightarrow{M} \mathcal{B}(TA, RA).$$

Više o obogaćenim kategorijama vidi u [18].

1.6.3. Striktne n-kategorije

Definicija 1.6.8. *Rekurzivno definiramo niz kategorija $(n\text{-}\mathbf{Cat})_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ na sljedeći način. Neka je 0-**Cat** := **Set**, te stavimo $(n+1)$-**Cat** := $(n$-**Cat**$)$-**Cat**, tj. $(n+1)$-**Cat** je kategorija svih kategorija obogaćenih nad Kartezijevom monoidalnom kategorijom n-**Cat**. Kategoriju obogaćenu nad $(n-1)$-**Cat**, tj. objekt kategorije n-**Cat** zovemo* **striktna n-kategorija***; morfizam u kategoriji n-**Cat** zovemo* **striktan n-funktor**.

Uočimo da je 1-**Cat** = **Cat**. Teoremi 1.1.27 i 1.1.32 nam kažu da je kategorija **Cat** zapravo striktna 2-kategorija.

Više o n-kategorijama (striktnim i *slabim*) vidi u [20, I.1.4, III].

[11] Zapravo bi trebalo malo opreznije prisupiti kako bi imali dobro definiranu kategoriju—treba uzeti samo male $\mathcal{V}$-kategorije.

1.7. Abelove kategorije

Abelove kategorije generaliziraju najvažnija svojstva kategorije ${}_R\mathbf{Mod}$, te samim time stavljaju homološku algebru u apstraktniji kontekst.

1.7.1. Jezgre i kojezgre

U ovom odjeljku ćemo raditi s kategorijama koje imaju nul-objekt (tj. istodobno inicijalni i terminalni objekt). Njega ćemo uvijek označavati s 0. Navedimo neke činjenice koje se vrlo jednostavno pokažu:

Propozicija 1.7.1. *(a) Za objekt A, jedinstveni morfizam* $0 \to A$ *je monomorfizam, a jedinstveni morfizam* $A \to 0$ *je epimorfizam.*

(b) Za svaki par objekata A i B postoji jedinstven morfizam $0_{AB}\colon A \to B$*, tako da za sve* $D \xrightarrow{f} A$ *i* $B \xrightarrow{g} C$ *vrijedi* $0_{AB} \circ f = 0_{DB}$ *i* $g \circ 0_{AB} = 0_{AC}$*. Morfizam* 0_{AB} *zovemo* **nul-morfizam** *od A do B. Ako nema opasnosti od zabune, pišemo* 0 *umjesto* 0_{AB}*.*

(c) Nul-morfizam 0_{AB} *je jedinstveni morfizam* $A \to B$ *koji se faktorizira kroz nul-objekt.*

Definicija 1.7.2. Jezgra *(resp.* **kojezgra***) morfizma* $f\colon A \to B$ *je ujednačitelj (resp. koujednačitelj) paralelnog para* $f, 0_{AB}\colon A \to B$*; označavamo je s* $\operatorname{Ker} f \to A$ *(resp.* $B \to \operatorname{Coker} f$*) (ponekad* $\operatorname{Ker} f$ *i* $\operatorname{Coker} f$ *označavaju morfizme, a ponekad objekte—iz konteksta bi trebalo biti jasno o čemu je riječ).*

Lako se provjeri da je ujednačitelj od $f, g\colon A \to B$ upravo $\operatorname{Ker}(f - g)$ i $\operatorname{Ker}(g - f)$, dualno koujednačitelj istog para je $\operatorname{Coker}(f - g)$, kao i $\operatorname{Coker}(g - f)$. Nadalje, svaka jezgra je nužno monomorfizam, a svaka kojezgra epimorfizam.

Primjer 1.7.3. Jezgra monomorfizma $A \to B$ je nul-morfizam $0 \to A$. Kojezgra epimorfizma $A \to B$ je nul-morfizam $B \to 0$. Jezgra od 0_{AB} je 1_A, a kojezgra 1_B.

Primjer 1.7.4. U kategorijama **Grp**, **Ab**, **Ring**, ${}_R\mathbf{Mod}$ i ${}_K\mathbf{Vect}$ jezgra morfizma $f\colon A \to B$ je skup $\{x \in A\colon f(x) = 0\}$ nultočaka od f (jezgra u klasičnom smislu), uz kanonsko ulaganje i naslijeđenu algebarsku strukturu. U kategorijama **Ab**, ${}_R\mathbf{Mod}$ i ${}_K\mathbf{Vect}$ kojezgra morfizma $f\colon A \to B$ je kanonska projekcija $B \to B/\operatorname{Im} f$.

Napomena 1.7.5. Direktno se pokaže da sljedeće formule vrijede za bilo koji morfizam f, ukoliko navedene (ko)jezgre postoje:

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} f)) = \operatorname{Ker} f, \quad \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f)) = \operatorname{Coker} f. \tag{1.14}$$

Napomena 1.7.6. Često ćemo koristiti i sljedeću očitu tvrdnju: Neka je f monomorfizam i g epimorfizam. Za morfizam h vrijedi $\operatorname{Ker}(fh) = \operatorname{Ker} h$ i $\operatorname{Coker}(hg) = \operatorname{Coker} h$, ukoliko je kompozicija dobro definirana i (ko)jezgre postoje.

1.7.2. Predaditivne i aditivne kategorije

Kategoriju **Ab** = ${}_{\mathbb{Z}}$**Mod** možemo shvatiti kao monoidalnu sa tenzorskim produktom kao u primjeru 1.6.2 (za objekt I uzmemo naravno aditivnu Abelovu grupu $\mathbb{Z}$). Kategoriju obogaćenu nad takvom monoidalnom kategorijom **Ab** (odnosno **Ab**-kategoriju) zovemo ***predaditivna*** kategorija.

Dakle, u predaditivnoj kategoriji su $\mathrm{Hom}(A, B)$ Abelove grupe (koristiti ćemo aditivnu notaciju $+$), te je kompozicija morfizama asocijativna i obostrano distributivna nad zbrajanjem, tj. za morfizme $A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{k} D$ vrijedi $k(h+g)f = khf + kgf$. Nadalje, homomorfizam $j\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Hom}(A, A)$ je jedinstveno određen djelovanjem na 1. Stavimo $1 \mapsto 1_A$, pa za 1_A vrijedi $1_A m = m$ i $n 1_A = n$ za sve $A' \xrightarrow{m} A$ i $A \xrightarrow{n} A''$. Stoga je svaki $\mathrm{Hom}(A, A)$ zapravo prsten s jedinicom. Ponekad ćemo pisati kraće $1_A = 1$, ukoliko nema opasnosti od zabune. Nadalje, jasno je da su neutralni elementi grupa $\mathrm{Hom}(A, B)$ nul-morfizmi. Ako postoji inicijalan ili terminalan objekt u predaditivnoj kategoriji, tada on mora biti nul-objekt.

Aditivan funktor je **Ab**-funktor između predaditivnih kategorija. To je dakle, funktor u klasičnom smislu (čuva identitete i kompozicije), ali restringiran na $\mathrm{Hom}(A, B)$ inducira homomorfizam grupa (za $A = B$ inducira čak i homomorfizam prstenova s jedinicom). Kovarijantni i kontravarijantni hom-funktori su aditivni.

Propozicija 1.7.7. *Adjungirani funktor aditivnom funktoru je aditivan.*

Dokaz. Neka su oznake postavljene kao teoremu 1.4.2, te neka je funktor G aditivan. Neka su $g, g'\colon X \to X'$ morfizmi u C. Računamo:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{X,FX'}(F(g+g')) = GF(g+g') \circ \eta_X = \eta_{X'}(g+g') = \eta_{X'}g + \eta_{X'}g' = \\
&= GFg \circ \eta_X + GFg' \circ \eta_X = G(Fg + Fg') \circ \eta_X = \alpha_{X,FX'}(Fg + Fg').
\end{aligned}$$

Zbog bijektivnosti od $\alpha_{X,FX'}$ slijedi $F(g+g') = Fg + Fg'$, pa je F aditivan funktor. Dualno se pokaže da je i desni adjungirani funktor aditivnom funktoru opet aditivan. □

Napomena 1.7.8. Uz dokaz prethodnog teorema, uočimo još da za $f, f'\colon FX \to Y$ vrijedi $\alpha_{XY}(f + f') = G(f + f') \circ \eta_X = G(f) \circ \eta_X + G(f') \circ \eta_X = \alpha_{XY}(f) + \alpha_{XY}(f')$, pa je stoga α_{XY} izomorfizam Abelovih grupa $\mathrm{Hom}(FX, Y)$ i $\mathrm{Hom}(X, GY)$.

Napomena 1.7.9. Ukoliko imamo predaditivne kategorije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, gdje je $\mathcal{A}$ mala, tada imamo kategoriju $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ kojoj su objekti svi aditivni funktori $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i morfizmi prirodne transformacije između tih funktora. Lako se provjeri da je tada i $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ predaditivna kategorija, ukoliko stavimo $(\alpha + \beta)_A := \alpha_A + \beta_A$, gdje su α i β prirodne transformacije između istih aditivnih funktora.

Definicija 1.7.10. **Biprodukt** *objekata A i B u predaditivnoj kategoriji je dijagram oblika (1.15) u kojem vrijede relacije (1.16):*

$$A \underset{\iota_A}{\overset{p_A}{\leftrightarrows}} C \underset{\iota_B}{\overset{p_B}{\rightleftarrows}} B, \tag{1.15}$$

$$p_A\iota_A = 1_A, \quad p_B\iota_B = 1_B, \quad \iota_A p_A + \iota_B p_B = 1_C. \tag{1.16}$$

Lema 1.7.11. *Postoji produkt (koprodukt) objekata A i B ako i samo postoji njihov biprodukt. Štoviše, u biproduktu (1.15) familija $\{p_A, p_B\}$ čini produkt objekata A i B, a $\{\iota_A, \iota_B\}$ njihov koprodukt. Specijalno, postoji produkt od A i B ako i samo ako postoji njihov koprodukt.*

Dokaz. Neka je dan biprodukt (1.15) objekata A i B. Uočimo da zbog (1.16) vrijede jednakosti $p_A\iota_B = p_A(\iota_A p_A + \iota_B p_B)\iota_B = p_A\iota_B + p_A\iota_B$, pa je $p_A\iota_B = 0$; analogno je i $p_B\iota_A = 0$.

Uzmimo neki konus $A \xleftarrow{f_A} D \xrightarrow{f_B} B$ nad $\{A, B\}$; morfizam $h := \iota_A f_A + \iota_B f_B$ je traženi morfizam konusa. Ako je $h' \colon D \to C$ neki drugi morfizam konusa, uočimo da tada vrijedi $h' = (\iota_A p_A + \iota_B p_B)h' = h$. Dakle, $\{p_A, p_B\}$ čini produkt, a dualno se vidi da $\{\iota_A, \iota_B\}$ čini koprodukt od A i B.

Obratno, uzmimo da je $A \xleftarrow{p_A} C \xrightarrow{p_B} B$ produkt od A i B. Zbog univerzalnog svojstva produkta možemo naći jedinstvene morfizme $\iota_A \colon A \to C$ i $\iota_B \colon B \to C$ tako da vrijede relacije: $p_A\iota_A = 1_A$, $p_B\iota_A = 0$, $p_B\iota_B = 1_B$, te $p_A\iota_B = 0$. Stavimo $h := \iota_A p_A + \iota_B p_B$; lako se provjeri da vrijedi $p_A h = p_A$ i $p_B h = p_B$, pa opet zbog univerzalnog svojstva produkta mora biti $h = 1_C$. Dakle, vrijede sve relacije u (1.16), pa smo zaista dobili biprodukt. Dualno se i iz koprodukta dobije biprodukt. □

Lema 1.7.12. *U biproduktu (1.15) vrijede formule* $\operatorname{Ker} p_B = \iota_A$, $\operatorname{Ker} p_A = \iota_B$, $\operatorname{Coker} \iota_A = p_B$ *i* $\operatorname{Coker} \iota_B = p_A$.

Dokaz. Dokažimo prvu od navedenih formula—ostale slijede analogno/dualno. Jasno je da vrijedi $p_B\iota_A = 0$. Neka je $f \colon D \to C$ morfizam za kojeg vrijedi $p_B f = 0$. Tada za $\bar{f} := p_A f$ vrijedi $\iota_A \bar{f} = f$. Očito je $\bar{f}$ jednistven s tim svojstvom. □

Definicija 1.7.13. *Predaditivna kategorija je* **aditivna**, *ako u njoj imamo nul-objekt i sve dvočlane produkte.*

Propozicija 1.7.14. *U aditivnoj kategoriji postoje svi konačni produkti i konačni koprodukti.*

Dokaz. Egzistencija konačnih produkata se lako pokaže induktivno; produkt $A \times B \times C$ se dobije iz produkta $(A \times B) \times C$. Dualno se pokaže i egzistencija konačnih koprodukata, budući da po lemi 1.7.11 postoje svi dvočlani koprodukti. □

Biprodukt od A i B u aditivnoj kategoriji postoji, i jedinstven do na jedinstveni izomorfizam koji komutira s komponentama, pa ga označavamo s $A \oplus B$. Može definirati biprodukt od po volji konačno mnogo objekata, te se analogno kao u lemi 1.7.11 pokaže:

Propozicija 1.7.15. *Za bilo koju konačnu familiju $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ objekata aditivne kategorije, ekvivalentno je:*

(a) Familija morfizama $\{p_i \colon C \to A_i \colon i = 1, 2, \ldots, n\}$ čini produkt od $\mathcal{A}$.

(b) Familija morfizama $\{\iota_i \colon A_i \to C \colon i = 1, 2, \ldots, n\}$ čini koprodukt od $\mathcal{A}$.

(c) Imamo morfizme $A_i \underset{\iota_i}{\overset{p_i}{\leftrightarrows}} C$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ za koje vrijede relacije

$$\sum_{i=1}^{n} \iota_i p_i = 1_C, \qquad p_i \iota_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1; & i = j \\ 0: & i \neq j \end{cases},$$

tj. dijagram $A_i \underset{\iota_i}{\overset{p_i}{\leftrightarrows}} C$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je **biprodukt** *objekata $A_1, A_2, \ldots, A_n$.*

Objekt C iz propozicije 1.7.15 označava se s $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ i zove ***direktna suma*** objekata $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Direktna suma je asocijativna i komutativna do na izomorfizam, te vrijedi formula:

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i, \bigoplus_{j=1}^{m} B_j\right) \cong \bigoplus_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} \mathrm{Hom}(A_i, B_j).$$

Propozicija 1.7.16. *Za funktor F između aditivnih kategorija je ekvivalentno:*

(a) F je aditivan.

(b) F čuva konačne biprodukte.

(c) F čuva konačne produkte.

(d) F čuva konačne koprodukte.

Dokaz. Očito (a) povlači (b), iz definicije biprodukta. Zbog propozicije 1.7.15 (b) povlači (c), osim za slučaj produkta nad praznim skupom objetaka, tj. nul-objeta. No, posebno se ručno provjeri da F čuva i nul-objekt. Uvjeti (c) i (d) su ekvivalentni, što se može vidjeti iz dokaza leme 1.7.11 (pomoću produkta smo konstruirali koprodukt), te oni zajedno povlače (b), opet zbog propozicije 1.7.15.

Ukoliko vrijedi (b), F čuva nul-objekt, pa stoga i sve nul-morfizme. Za morfizme $f, g \colon A \to B$ možemo naći $h \colon A \to B \oplus B$ tako da vrijedi $p_1 h = f$ i $p_2 h = g$, gdje su

p_1 i p_2 kanonske projekcije navedenog biprodukta. Stoga je $f - g = (p_1 - p_2)h$, pa je dovoljno pokazati da je $F(p_1 - p_2) = Fp_1 - Fp_2$, da bi dokazali aditivnost od F. Neka su ι_1 i ι_2 kanonske injekcije istog biprodukta. Tvrdnja slijedi, jer vrijedi $F(p_1 - p_2)F(\iota_i) = 1$ i $(Fp_1 - Fp_2)F(\iota_i) = 1$, za $i = 1, 2$. □

Jasno da se uvjeti (b), (c) i (d) u propoziciji 1.7.16 mogu oslabiti, dovoljno je da funktor čuva sve dvočlane biprodukte (produkte, koprodukte).

Primjer 1.7.17. Neka je $\mathcal{B}$ aditivna kategorija i $\mathcal{A}$ mala predaditivna kategorija. Tada je kategorija $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ iz napomene 1.7.9 aditivna, te se biprodukti u njoj "računaju po točkama". Štoviše, svi konačni (ko)limesi se mogu "računati po točkama"—dovoljno je provjeriti da su (ko)produkt i (ko)ujednačitelj aditivnih funktora aditivni, što se direktno provjeri, pa tvrdnja slijedi iz teorema 1.3.43 i 1.3.25. Za detalje vidi [5, 1.3].

Primjer 1.7.18. Kategorija ${}_R\mathbf{Mod}$ je aditivna, ukoliko zbrajanje morfizama u $\mathrm{Hom}(A, B)$ definiramo klasično, "po točkama".

Spomenimo jedan poprilično iznenađujući rezultat: Dvije aditivne strukture na kategoriji su nužno izmorfne. To se pokaže tako da se svaki zbroj morfizama $f + g$ prikaže pomoću određenih limesa/kolimesa u danoj kategoriji. Za detalje vidi [5, 1.2]. Zaključno, nije nužno naglasiti o kojoj se točno aditivnoj strukturi radi kad govorimo o konkretnoj aditivnoj kategoriji.

1.7.3. Abelove kategorije

Definicija 1.7.19. *Aditivna kategorija je* **Abelova***, ukoliko svaki morfizam ima jezgru i kojezgru, te ukoliko je svaki monomorfizam jezgra i svaki epimorfizam kojezgra nekog morfizma. Za takav monomorfizam kažemo da je* **normalan***, a epimorfizam* **konormalan**[12].

Za monomorfizam f i epimorfizam g, iz (ko)normalnosti i formule (1.14) slijedi:

$$f = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, f), \quad g = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, g). \tag{1.17}$$

Primjer 1.7.20. Glavni primjer Abelove kategorije jest svakako kategorija ${}_R\mathbf{Mod}$. Monomorfizam $f\colon A \to B$ je jezgra od kanonske projekcije $B \to B/\operatorname{Im} f$, a epimorfizam $g\colon A \to B$ je kojezgra inkluzije $\mathrm{Ker}\, g \to A$.

Kategorija **Grp** nije Abelova, budući da je inkluzija $H \to G$ u **Grp** jezgra samo ukoliko je H normalna podgrupa od G.

[12]Može se zahtijevati da Abelova kategorija ima nul-objekt, konačne (ko)produkte, (ko)jezgre, te da su monomorfizmi normalni, a epimorfizmi konormalni. Zatim se pokaže da na kategorijama koje zadovoljavaju ta navedena svojstva uvijek postoji aditivna struktura, kao što je to učinjeno u [5, 1.6].

Uočimo da je suprotna kategorija Abelove kategorije opet Abelova kategorija. U Abelovim kategorijama možemo primjetiti mnoge pojave koje vrijede u ${}_R\mathbf{Mod}$ kategorijama, a navedene su u sljedećih nekoliko propozicija.

Propozicija 1.7.21. *U Abelovoj kategoriji morfizam koji je monomorfizam i epimorfizam, nužno je izomorfizam. Drugačije rečeno, svaka Abelova kategorija je balansirana.*

Dokaz. Ako je f monomorfizam, tada je $f = \operatorname{Ker} g$ na neki morfizam g. Ako je f još i epimorfizam, tada iz $gf = 0$ slijedi $g = 0$. No, jezgra nul-morfizma je izomorfizam. □

Propozicija 1.7.22. *Abelova kategorija je konačno potpuna i konačno kopotpuna.*

Dokaz. Prema propoziciji 1.7.14, postoje svi konačni produkti. Ujednačitelj paralelnog para f i g je jezgra $\operatorname{Ker}(f - g)$, koja postoji po definiciji. Konačna potpunost sada slijedi iz teorema 1.3.25, a dualno slijedi i konačna kopotpunost. □

Direktno se dokaže sljedeća propozicija.

Propozicija 1.7.23. *Za morfizam $f\colon A \to B$ u Abelovoj kategoriji, ekvivalentno je:*

(a) f *je monomorfizam.* *(b)* $\operatorname{Ker} f = 0 \xrightarrow{0} A$. *(c)* $(\forall h\colon C \to A)\ fh = 0 \Rightarrow h = 0$.

Dualno, za morfizam $g\colon A \to B$ u Abelovoj kategoriji, ekvivalentno je:

(a) g *je epimorfizam.* *(b)* $\operatorname{Coker} g = B \xrightarrow{0} 0$. *(c)* $(\forall h\colon B \to C)\ hg = 0 \Rightarrow h = 0$.

U Abelovoj kategoriji, za morfizam f vrijedi $(\operatorname{Coker} f)f = 0$, pa ukoliko definiramo $m := \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f)$, vrijedi $f = me$ za jedinstveni morfizam e. U sljedećem teoremu ćemo točno opisati taj morfizam e, no prije toga dokažimo jednu tehničku lemu.

Lema 1.7.24. *Neka je u Abelovoj kategoriji $f = me$, gdje je $m = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f)$. Ukoliko je $f = m'e'$ za monomorfizam m', tada postoji jedinstveni morfizam t za kojeg je $m = m't$ i $e' = te$. Nadalje, e je epimorfizam.*

Dokaz. Stavimo $p = \operatorname{Coker} m$ i $p' = \operatorname{Coker} m'$. Zbog (1.14) je $p = \operatorname{Coker} f$, a zbog (1.17) imamo $m' = \operatorname{Ker} p'$. Vrijedi $p'f = p'm'e' = 0$ pa je $p' = wp$ za neki morfizam w. Sada imamo $p'm = wpm = 0$, pa imamo faktorizaciju $m = m't$ za jedinstveni t. Nadalje, vrijedi $m'e' = me = m'te$, pa jer je m' monomorfizam, vrijedi $e' = te$.

Uzmimo da za neki paralelni par morfizama r i s vrijedi $re = se$. Tada se e faktorizira kroz ujednačitelj u od para r, s u obliku $e = ue'$ za neki morfizam e', pa imamo jednakosti $f = me = mue'$. Kompozicija mu je monomorfizam, jer je kompozicija monomorfizama, pa po prvom dokazanom dijelu ove leme imamo $m = muv$ za neki morfizam v, pa je $uv = 1$. Tada iz $ru = su$ slijedi $r = ruv = suv = s$, pa je e epimorfizam. □

Teorem 1.7.25 (Mono-epi faktorizacija)**.** *Svaki morfizam $f\colon A \to B$ u Abelovoj kategoriji ima rastav $f = me$, gdje je m monomorfizam, a e epimorfizam. Štoviše, možemo uzeti $m = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, f)$ i $e = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, f)$.*

Nadalje, ako je dan neki drugi rastav $f' = m'e'$, gdje je m' monomorfizam, a e' epimorfizam, te morfizmi g i h takvi da dijagram

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"'] & \bullet \arrow[r, "m"] & \bullet \arrow[d, "h"] \\ \bullet \arrow[r, "e'"'] & \bullet \arrow[r, "m'"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

komutira, tada postoji jedinstven morfizam k takav da je $e'g = ke$ i $m'k = hm$.

Dokaz. Neka je $f = me$, gdje je $m = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, f)$. Jer je m monomorfizam, za svaki kompozabilni morfizam t vrijedi $ft = 0$ ako i samo ako je $et = 0$, iz čega možemo zaključiti da je $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, e$. Prema lemi 1.7.24 e je epimorfizam, pa prema (1.17) vidimo da je $e = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, f)$.

Neka su $f = me$ i $f' = m'e'$ dva rastava, gdje su m, m' monomorfizmi i e, e' epimorfizmi, te g i h morfizmi takvi da je $hf = f'g$. Stavimo $u = \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, e$, pa je $e = \mathrm{Coker}\, u$. Vrijedi $m'e'gu = f'gu = hfu = 0$, pa jer je m' monomorfizam, vrijedi $e'gu = 0$. Stoga postoji jedinstven morfizam k za kojeg vrijedi $e'g = ke$. Nadalje, vrijedi $hme = hf = f'g = m'e'g = m'ke$, pa jer je e epimorfizam, vrijedi i $m'k = hm$. □

Definicija 1.7.26. *Ukoliko je $f = me$ rastav kao u teoremu 1.7.25, morfizam m zovemo* **slika***, a morfizam e* **koslika** *morfizma f, i pišemo $m = \mathrm{Im}\, f$ i $e = \mathrm{Coim}\, f$. Rastav $f = me$ se zove* **mono-epi faktorizacija** *(ili* **kanonska dekompozicija***) morfizma f.*

Napomena 1.7.27. Ukoliko su $f = me = m'e'$ dvije mono-epi faktorizacije morfizma $A \xrightarrow{f} B$, tada teorem 1.7.25 (primjenjen na $g = 1_A$ i $h = 1_B$, i obratno) daje (jedinstven, kanonski) izomorfizam k za kojeg vrijedi $e' = ke$ i $m'k = m$. U tom smislu je mono-epi faktorizacija jedinstvena, te možemo pisati $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, f)$ i $\mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, f)$.

U kategoriji ${}_R\mathbf{Mod}$, uobičajeni pojam slike homomorfizma, uz skupovnu inkluziju se može uzeti kao slika u mono-epi faktorizaciji. Taj izbor je jedinstven, do na ekvivalenciju podobjekata (koja je definirana u primjeru 1.1.15).

Važno svojstvo Abelovih kategorija jest da funktori nad njima čine opet Abelovu kategoriju. Sljedeća propozicija se pokaže direktno, uz korištenje činjenica iz primjera 1.7.17 i teorema 1.3.43.

Propozicija 1.7.28. *Neka je $\mathcal{A}$ Abelova kategorija, $\mathcal{C}$ mala aditivna kategorija i $\mathcal{D}$ mala kategorija. Tada su kategorije $\mathrm{Add}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ i $[\mathcal{D}, \mathcal{A}]$ Abelove.*

1.7.4. Egzaktni nizovi i egzaktni funktori

Do kraja ovog poglavlja ćemo raditi u nekoj fiksiranoj Abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$, ukoliko nije drugačije naglašeno.

Definicija 1.7.29. *Kompozabilan par morfizama* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *je* **egzaktan u** B*, ako je*[13] $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$*, ili ekvivalentno* $\operatorname{Coker} f = \operatorname{Coim} g$*. Kažemo da je neki linearan niz kompozabilnih morfizama* $A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1}$ **egzaktan***, ako je egzaktan u svakom* A_i *(osim prvog i zadnjeg ako postoje).* **Kratki egzaktni niz** *je egzaktni niz oblika*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0\,. \tag{1.18}$$

Lako se vidi (iz primjera 1.7.3, (1.17) i propozicije 1.7.23) da je niz (1.18) egzaktan u A ako i samo ako je f monomorfizam, egzaktan u C ako i samo ako je g epimorfizam, egzaktan u A i B ako i samo ako je $f = \operatorname{Ker} g$, te egzaktan u B i C ako i samo ako je $g = \operatorname{Coker} f$. Posebno, niz (1.18) je egzaktan ako i samo ako je $f = \operatorname{Ker} g$ i $g = \operatorname{Coker} f$.

Primjer 1.7.30. Neka je dan biprodukt $A \underset{\iota_A}{\overset{p_A}{\leftrightarrows}} A \oplus B \underset{\iota_B}{\overset{p_B}{\rightleftarrows}} B$. Tada iz leme 1.7.12 slijedi da je sljedeći niz kratki egzaktan:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B \xrightarrow{p_B} B \longrightarrow 0\,.$$

Kažemo da je takav kratki egzaktni niz ***cijepajući***[14]. Da bi niz kratki egzaktni niz (1.18) bio cijepajući, lako se provjeri da je dovoljno da f ima lijevi inverz, ili da g ima desni inverz.

Primjer 1.7.31. Mono-epi faktorizacija morfizma f daje sljedeća dva kratka egzaktna niza:

$$0 \longrightarrow \bullet \xrightarrow{\operatorname{Ker} f} \bullet \xrightarrow{\operatorname{Coim} f} \bullet \longrightarrow 0\,, \quad 0 \longrightarrow \bullet \xrightarrow{\operatorname{Im} f} \bullet \xrightarrow{\operatorname{Coker} f} \bullet \longrightarrow 0\,.$$

Definicija 1.7.32. *Neka je* $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *aditivan funktor između Abelovih kategorija.*

(a) F *je* **lijevo egzaktan** *ako čuva sve egzaktne nizove oblika* $0 \to A \to B \to C$.

(b) F *je* **desno egzaktan** *ako čuva sve egzaktne nizove oblika* $A \to B \to C \to 0$.

(c) F *je* **egzaktan** *ako čuva sve kratke egzaktne nizove.*

Očito je funktor egzaktan ako i samo ako je lijevo egzaktan i desno egzaktan. Vrijedi sljedeća važna karakterizacija, koja se ponekad uzima za definiciju:

[13]Preciznije bi bilo zahtijevati da su $\operatorname{Im} f$ i $\operatorname{Ker} g$ ekvivalentni kao podobjekti od B.

[14]Eng. *split exact*.

Propozicija 1.7.33. *Za aditivan funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ između Abelovih kategorija vrijedi:*

(a) F je lijevo egzaktan ako i samo ako čuva sve konačne limese.

(b) F je desno egzaktan ako i samo ako čuva sve konačne kolimese.

(c) F je egzaktan ako i samo ako čuva konačne limese i konačne kolimese.

Dokaz. Ako F čuva sve konačne limese, tada čuva sve jezgre, pa je očito lijevo egzaktan. Obratno, lijevo egzaktan funktor očito čuva jezgre, pa i ujednačitelje. Zbog propozicije 1.7.16 i korolara 1.3.32 slijedi da F čuva sve konačne limese. Time je dokazana tvrdnja (a), tvrdnja (b) se dokaže dualno, a tada tvrdnja (c) slijedi trivijalno. □

Zbog propozicije 1.7.16 i korolara 1.3.32, u propoziciji 1.7.33 je dovoljno umjesto čuvanja konačnih (ko)limesa staviti samo čuvanje (ko)ujednačitelja.

Korolar 1.7.34. *Aditivan funktor je egzaktan ako i samo ako čuva sve egzaktne nizove.*

Korolar 1.7.35. *Lijevo egzaktan funktor je egzaktan ako i samo ako čuva epimorfizme. Dualno, desno egzaktan funktor je egzaktan ako i samo ako čuva monomorfizme.*

Iz teorema 1.4.8 i 1.4.7, te propozicija 1.7.16 i 1.7.33 slijedi:

Korolar 1.7.36. *Funktor koji ima lijevog adjungiranog je lijevo egzaktan. Dualno, funktor koji ima desnog adjungiranog je desno egzaktan. Specijalno, ekvivalencija Abelovih kategorija je egzaktna.*

Iz teorema 1.3.34, 1.3.46, propozicije 1.7.33 i činjenice da zaboravni funktor $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ reflektira limese se može zaključiti:

Teorem 1.7.37. *Za svaki $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ kategorije $\mathcal{A}$ su funktori $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-)\colon \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ i $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(A,-)\colon \mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Ab}$ lijevo egzaktni. Također je i Yonedino ulaganje $h\colon \mathcal{A} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Ab}]$ lijevo egzaktno.*

Teorem 1.7.38. *Yonedino ulaganje $h\colon \mathcal{A} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Ab}]$* **reflektira egzaktnost***, tj. ako je niz $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D,A) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D,B) \xrightarrow{g\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D,C)$ u $\mathbf{Ab}$ egzaktan za svaki $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, tada je niz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ u $\mathcal{A}$ egzaktan.*

Dokaz. Stavimo prvo $D = A$, pa imamo $gf = g \circ (f \circ 1_A) = 0$. Označimo $\mathrm{Ker}\, g\colon K \to B$, te stavimo $D = K$. Budući da je $g \circ \mathrm{Ker}\, g = 0$, postoji $h\colon K \to A$ za kojeg je $fh = \mathrm{Ker}\, g$. Iz tih činjenica lako slijedi $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$. □

Bez dokaza ćemo dati jedan netrivijalan i neočekivan rezultat o smještenju Abelovih kategorija u kategorije modula. Dokaz se može vidjeti u [5, 1.14].

Teorem 1.7.39 (Freyd-Mitchell)**.** *Neka je $\mathcal{A}$ mala Abelova kategorija. Tada postoji prsten R i egzaktno ulaganje kategorija $\mathcal{A} \to {}_R\mathbf{Mod}$. Dakle, svaka mala Abelova kategorija je puna potkategorija neke kategorije modula.*

1.7.5. Leme o dijagramima

Navedimo neke važne leme homološke algebre koje ćemo u nastavku trebati.

Lema 1.7.40 (Lema o jezgri)**.** *Neka je u Abelovoj kategoriji dan komutativni dijagram*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\delta"'] & C \arrow[d, "\epsilon"] \\
 & D \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\theta"'] & E \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\lambda"'] & F \arrow[d, "\mu"] \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\nu"'] & H \arrow[r, "\xi"'] & I
\end{tikzcd}$$

u kojem je $\gamma = \operatorname{Ker}\theta$, $\delta = \operatorname{Ker}\lambda$ i $\epsilon = \operatorname{Ker}\mu$, te u kojem su oba retka egzaktna. Tada postoje jedinstveni morfizmi $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ koji, dodani u taj dijagram, ne kvare njegovu komutativnost. Nadalje, niz $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ je egzaktan.

Lema 1.7.41 (Kratka 5-lema)**.** *Neka je u Abelovoj kategoriji dan komutativni dijagram*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\delta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\zeta"'] & E \arrow[r, "\eta"'] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kojemu su oba retka egzaktna. Ako su γ i ϵ monomorfizmi (resp. epimorfizmi, izomorfizmi), tada je i δ monomorfizam (resp. epimorfizam, izomorfizam).

Lema 1.7.42 (Lema o zmiji[15])**.** *Neka je u Abelovoj kategoriji dan komutativan dijagram*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\delta"] & C \arrow[d, "\epsilon"] & \\
 & D \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\theta"'] & E \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\lambda"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\nu"'] \arrow[d, "\pi"'] & H \arrow[r, "\xi"'] \arrow[d, "\rho"] & I \arrow[d, "\sigma"] & \\
 & J \arrow[d] & K \arrow[d] & L \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

kojemu su svi reci i svi stupci egzaktni. Tada postoje jedinstveni morfizmi $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *i* $J \xrightarrow{\tau} K \xrightarrow{\varphi} L$ *koji, dodani u taj dijagram, ne kvare njegovu komutativnost. Nadalje, postoji (kanonski odabran)* **vezni morfizam** $C \xrightarrow{\omega} J$ *takav da je sljedeći niz egzaktan:*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\omega} J \xrightarrow{\tau} K \xrightarrow{\varphi} L.$$

Lema 1.7.43 (Prirodnost veznog morfizma)**.** *Ukoliko nam je u Abelovoj kategoriji dan (trodimenzionalan) komutativni dijagram*

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\theta"'] & & E \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\lambda"'] & & F \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\mu"'] & & 0 & \\
 & & D' \arrow[rr] & & E' \arrow[rr] & & F' \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[rr] \arrow[dr] & & H \arrow[rr] \arrow[dr] & & I \arrow[dr] & & & \\
 & 0 \arrow[r] & G' \arrow[rr] \arrow[from=uu, crossing over, "\theta'"] & & H' \arrow[rr] \arrow[from=uu, crossing over, "\lambda'"] & & I' \arrow[from=uu, crossing over, "\mu'"] & &
\end{tikzcd}$$

[15]Eng. *Snake lemma*.

s egzaktnim recima, univerzalno svojstvo (ko)jegre i lema o zmiji (lema 1.7.42) daju nam dijagram

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\theta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\lambda \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\mu \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\theta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\lambda \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\mu \arrow[d] \\
\operatorname{Ker}\theta' \arrow[r] & \operatorname{Ker}\lambda' \arrow[r] & \operatorname{Ker}\mu' \arrow[r, "\omega'"'] & \operatorname{Coker}\theta' \arrow[r] & \operatorname{Coker}\lambda' \arrow[r] & \operatorname{Coker}\mu'
\end{tikzcd}$$

s egzaktnim recima, gdje su ω i ω' vezni morfizmi. Taj dijagram je komutativan.

Dokazi navedenih lema mogu se vidjeti u dodatku A.

2. Snopovi na topološkom prostoru

2.1. Snopovi i étalni prostori, snopifikacija

2.1.1. Definicija snopa i osnovni primjeri

Neka je X topološki prostor i $\mathbf{Ouv}(X)$ mala kategorija otvorenih podskupova od X i njihovih ulaganja, definirana u primjeru 1.1.7. ***Predsnop*** na topološkom prostoru X s vrijednostima u kategoriji C je svaki kontravarijantni funktor $P\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to C$. Ako nije drugačije naglašeno, gledamo samo slučajeve kada je C jednaka **Set**, **Ab**, ${}_R\mathbf{Mod}$ ili **Ring**, te tada P zovemo predsnop skupova, Abelovih grupa, R-modula ili prstenova. Morfizmi predsnopova su naravno prirodne transformacije. Posebno ćemo označiti kategoriju predsnopova skupova topološkog prostora X sa $\mathbf{PSh}(X) := [\mathbf{Ouv}(X)^{op}, \mathbf{Set}]$. Ukoliko je $i\colon V \to U$ inkluzija otvorenih podskupova od X, funkciju $P(i)\colon PU \to PV$ ćemo često označavati s p_{UV}, i zvati ***restrikcijom*** s U na V. Također ćemo za $x \in PU$ pisati $p_{UV}(x) =: x|_V$. Skup, Abelovu grupu, R-modul ili prsten PU zovemo ***prerez*** (ili ***sekcija***) predsnopa P nad otvorenim skupom U; PX zovemo ***globalni prerez*** (ili ***globalna sekcija***) predsnopa P. Funktorijalnost od P je ekvivalentna s činjenicama: $p_{UU} = 1_U$ za sve U, i za sve $W \subseteq V \subseteq U$ vrijedi

$$p_{VW} \circ p_{UW} = p_{UW}, \text{ odnosno } x|_W = (x|_V)|_W \ \forall x \in PU.$$

Familija objekata $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{Ouv}(X))$ je ***pokrivač*** objekta $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ouv}(X))$, ukoliko vrijedi $\bigcup_{i\in I} U_i = U$. ***Okolina*** točke x je svaki otvoren skup koji ju sadrži.

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je predsnop P* **separiran** *(ili da je* **monopredsnop***), ako za svaki otvoren skup U i njegov pokrivač $\{U_i\}_{i\in I}$, te za svaka dva različita elementa $x, y \in PU$ postoji $i \in I$ za kojeg vrijedi $x|_{U_i} \neq y|_{U_i}$.*

Epipredsnop *je predsnop P takav da svaki otvoren skup U i njegov pokrivač $\{U_i\}_{i\in I}$ imaju sljedeće svojstvo: ako za elemente $x_i \in PU_i$ vrijedi $x_i|_{U_i\cap U_j} = x_j|_{U_i\cap U_j}$ za sve $i, j \in I$, tada postoji $x \in PU$ za kojeg je $x|_{U_i} = x_i$ za sve $i \in I$.*

Definicija 2.1.2. **Snop** *je separirani epipredsnop.*

Zbog separiranosti snopa, u zahtjevu da je snop epipredsnop (u definiciji 2.1.1) je jasno da postoji jedinstven $x \in PU$ koji zadovoljava navedeno svojstvo.

Napomena 2.1.3 (***Aksiom snopa*** ili ***snopovski uvjet***). Snop se može ekvivalentno definirati kao predsnop P koji ima svojstvo da za svaki otvoreni skup U i njegov pokrivač $\{U_i\}_{i\in I}$ vrijedi da je dijagram

$$PU \longrightarrow \prod_{i\in I} PU_i \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} P(U_i \cap U_j)$$

ujednačitelj. Morfizmi u dijagramu su naravno oni koji se dobiju iz restrikcija od P pomoću univerzalnog svojstva produkta i njegovih projekcija. Ovakva formulacija ima smisla u svakoj potpunoj kategoriji, a ne samo u konkretnim kategorijama.

Budući da prazan skup ima za pokrivač praznu familiju, zbog separiranosti prerez svakog snopa nad praznim skupom je najviše jednočlan, no zbog kontravarijantnosti (netrivijalnog) snopa, taj prerez ne može biti prazan skup, dakle, mora biti jednočlan skup.

Morfizmi između snopova nad istim topološkim prostorom s vrijednostima u istoj kategoriji su prirodne transformacije. Kategoriju snopova skupova nad topološkim prostorom X označavamo[1] sa $\mathbf{Sh}(X)$, te je to puna potkategorija od $\mathbf{PSh}(X)$.

Primjer 2.1.4. Klasični primjeri snopova koji su zapravo motivirali uvođenje snopova u matematiku su sljedeći. Neka je X kvaziprojektivni variatet nad poljem K opskrbljen topologijom Zariskog. Za otvoren podskup $U \subseteq X$ neka je $\mathcal{O}(U)$ prsten regularnih funkcija $U \to K$, te neka ulaganjima među otvorenim podskupovima od X odgovaraju uobičajenje restrikcije funkcija. Tada je $\mathcal{O}$ snop prstenova nad X, zovemo ga ***snopom regularnih funkcija*** nad X. Za detalje vidi [14, I.1–4].

Slično, ako je X topološki prostor, za otvoren podskup $U \subseteq X$ neka je $C(U)$ skup svih neprekidnih funkcija $U \to \mathbb{R}$. Uz uobičajenu restrikciju, C je ***snop neprekidnih realnih funkcija*** topološkog prostora X. Analogno za glatku (analitičku) mnogostrukost definiramo snopove C^k (za $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) i ***snop analitičkih funkcija***, a za kompleksnu mnogostrukost ***snop holomorfnih funkcija*** i ***snop meromorfnih funkcija***.

Predsnop ograničenih realnih funkcija nad topološkim prostorom općenito nije snop. U pozadini toga leži činjenica da ograničenost funkcije nije lokalno svojstvo.

Primjer 2.1.5. Neka je X topološki prostor i S skup. Definiramo ***konstantni snop*** P skupova nad X određen sa S na sljedeći način. Neka S ima diskretnu topologiju, te za otvoren skup $U \subseteq X$ stavimo PU da bude skup svih neprekidnih preslikavanja $U \to S$. Uz uobičajenu operaciju restrikcije dobijemo snop. Uočimo da za otvoren i povezan skup $U \subseteq X$ vrijedi $PU \cong S$. Ukoliko je U otvoren podskup kojemu su komponente povezanosti otvorene (što uvijek vrijedi ako je lokalno povezan), tada je PU produkt kopija od S, po jedna za svaku komponentu povezanosti od U. Analogna konstrukcija kao za skup S vrijedi i za Abelovu grupu, R-modul ili prsten.

[1] Kategorije predsnopova i snopova nad X ponekad se označavaju i s $\mathbf{PFas}_X$ i $\mathbf{Fas}_X$, redom. Oznake dolaze od francuske riječi za snop—*faisceau*.

2.1.2. Lokalna struktura (pred)snopa

Definicija 2.1.6. *Neka je P predsnop nad X, $x \in X$ neka točka, te $\mathbf{Ouv}(X)_x$ usmjeren skup definiran u primjeru 1.3.49. Direktni limes restrikcije od P na $\mathbf{Ouv}(X)_x$ je* **vlat**[2] *predsnopa P u točki x (u oznaci P_x). Pišemo sugestivno $P_x = \operatorname{colim}_{U \ni x} PU$.*

Iz propozicije 1.3.52 slijedi da su elementi od P_x reprezentirani uređenim parovima (U, s), gdje je $U \subseteq X$ otvoren, $x \in U$, te $s \in PU$. Nadalje, parovi (U, s) i (V, t) su ekvivalentni (tj. reprezentiraju isti element od P_x) ako postoji $W \subseteq X$ otvoren, tako da vrijedi $x \in W \subseteq U \cap V$ i $s|_W = t|_W$. Klasu ekvivalencije po toj relaciji zovemo ***klica***[3]. Algebarska struktura u P_x (ukoliko imamo snop sa vrijednostima u algebarskoj kategoriji) se može zadati na reprezentantima, na sljedeći način: $(U, s) + (V, t) = (U \cap V, s|_{U \cap V} + t|_{U \cap V})$. Klicu u vlati P_x određenu parom (U, s) često označavamo i s $[s]_x$.

Neka su P i Q predsnopovi nad X, $x \in X$ i $\varphi\colon P \to Q$ morfizam predsnopova. Univerzalno svojstvo kolimesa inducira jedinstveni morfizam $\varphi_x\colon P_x \to Q_x$ za kojeg vrijedi formula $\varphi_x([s]_x) = [\varphi_U(s)]_x$ za sve otvorene skupove $U \subseteq X$ i $s \in PU$. Lako se vidi da je pridruživanje $(P \xrightarrow{\varphi} Q) \mapsto (P_x \xrightarrow{\varphi_x} Q_x)$ funktorijalno.

Sljedeća propozicija ističe lokalnu prirodu snopa. Ista tvrdnja za predsnopove ne bi vrijedila.

Propozicija 2.1.7. *Neka je $\varphi\colon F \to G$ morfizam snopova nad X. Tada je φ izomorfizam ako i samo ako je $\varphi_x\colon F_x \to G_x$ izomorfizam za svaki $x \in X$.*

Dokaz. Prirodni izomorfizam φ očito inducira izomorfizme φ_x. Obratno, pretpostavimo da je $\varphi_x\colon F_x \to G_x$ izomorfizam za svaki $x \in X$. Dovoljno je dokazati da je za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ funkcija φ_U injekcija i surjekcija.

Ako pretpostavimo da vrijedi $\varphi_U(s) = \varphi_U(t)$ za neke $s, t \in FU$, tada za svaki $x \in U$ vrijedi $\varphi_x([s]_x) = [\varphi_U(s)]_x = [\varphi_U(t)]_x = \varphi_x([t]_x)$. Stoga je $[s]_x = [t]_x$, pa postoji otvoren skup $V_x \subseteq U$ za koji vrijedi $s|_{V_x} = t|_{V_x}$. Familija $\{V_x : x \in U\}$ je pokrivač od U, pa separiranosti snopa F vrijedi $s = t$. Zato je φ_U injekcija.

Neka je $u \in GU$ bilo koji. Za svaki $x \in U$ možemo naći okolinu $W_x \subseteq U$ od x i $f(x) \in FW_x$ tako da je $[u]_x = \varphi_x([f(x)]_x) = [\varphi_{W_x}(f(x))]_x$. Stoga je $u|_{T_x} = \varphi_{T_x}(g(x)) \in GT_x$ za neku okolinu $T_x \subseteq W_x$ od x, gdje je $g(x) := f(x)|_{T_x} \in FT_x$. Familija $\{T_x : x \in U\}$ je pokrivač od U, te za $x, y \in U$ vrijedi

$$\varphi_{T_x \cap T_y}(g(x)|_{T_x \cap T_y}) = \varphi_{T_x}(g(x))|_{T_x \cap T_y} = u|_{T_x \cap T_y} = \varphi_{T_y}(g(y))|_{T_x \cap T_y} = \varphi_{T_x \cap T_y}(g(y)|_{T_x \cap T_y}),$$

pa zbog već dokazane injektivnosti od $\varphi_{T_x \cap T_y}$ slijedi $g(x)|_{T_x \cap T_y} = g(y)|_{T_x \cap T_y}$. Jer je F epipredsnop, postoji $v \in FU$ za kojeg je $v|_{T_x} = g(x)$ za sve $x \in U$. Sada vrijedi $\varphi_U(v)|_{T_x} = u|_{T_x}$ za sve $x \in U$, pa zbog separiranosti snopa G vrijedi $\varphi_U(v) = u$. Stoga je φ_U i surjekcija. □

[2]Eng. *stalk*.

[3]Eng. *germ*.

Propozicija 2.1.7 ima sljedeće profinjenje: Morfizam $\varphi\colon F \to G$ je monomorfizam (resp. epimorfizam) u kategoriji snopova nad X ako i samo ako je $\varphi_x\colon F_x \to G_x$ monomorfizam (resp. epimorfizam) za svaki $x \in X$. Za dokaz vidi [23, II.6].

2.1.3. Svežnjevi i étalni prostori

Definicija 2.1.8. **Étalni prostor** *nad topološkim prostorom X je neprekidno preslikavanje $\pi\colon E \to X$ sa topološkog prostora E, koje je* **lokalni homeomorfizam**[4]*, tj. za svaki $x \in E$ postoji otvoren skup $U \subseteq E$ koji sadrži x, takav da je skup $\pi(U) \subseteq X$ otvoren, te da je $\pi|_U\colon U \to \pi(U)$ homeomorfizam.*

Morfizam étalnih prostora $E \xrightarrow{\pi} X$ i $F \xrightarrow{\rho} X$ je neprekidno preslikavanje $f\colon E \to F$ za koje vrijedi $\rho \circ f = \pi$. Time dobijemo kategoriju svih étalnih prostora nad X, u oznaci $\mathbf{Et}(X)$. Ta kategorija je očito puna potkategorija od kategorije kriški $\mathbf{Top}/X := \mathbf{Bund}(X)$. Objekte od $\mathbf{Bund}(X)$ zovemo[5] ***svežnjevima*** nad X.

Neka je $p\colon E \to X$ svežanj nad X (p često zovemo ***projekcija***). Za otvoren $U \subseteq X$ i inkluziju $i\colon U \to X$ stavimo

$$\Gamma_p(U) := \{s\colon U \to E \text{ neprekidno}\colon ps = i\}.$$

Uz uobičajene restrikcije funkcija, direktno se provjeri da je Γ_p snop skupova nad X. Zovemo ga ***snop prereza***[6] svežnja $p\colon E \to X$. Elemente od $\Gamma_p(U)$ ponekad zovemo ***prerezima*** (ili ***sekcijama***) svežnja $p\colon E \to X$ nad U. Ponekad umjesto Γ_p pišemo ΓE, ako je jasno o kojoj je projekciji riječ. Nadalje, morfizam svežnjeva $f\colon (E \xrightarrow{p} X) \to (F \xrightarrow{q} X)$ na očit način inducira morfizam predsnopova $\Gamma(f)\colon \Gamma_p \to \Gamma_q$ (na komponentama postkompozicijom sa f). Sada se lako vidi da je $\Gamma\colon \mathbf{Bund}(X) \to \mathbf{PSh}(X)$ funktor.

Neka je P predsnop skupova nad X. Označimo disjunktnu uniju svih vlati od P sa

$$\Lambda_P := \coprod_{x \in X} P_x,$$

te neka je preslikavanje $\pi\colon \Lambda_P \to X$ definirano sa $[s]_x \mapsto x$. Svaki $s \in PU$ (gdje je $U \subseteq X$ otvoreni podskup) određuje funkciju $\tilde{s}\colon U \to \Lambda_P$ zadanu sa $\tilde{s}(x) := [s]_x$. Na skupu Λ_P uzmimo topologiju kojoj je baza $\{\tilde{s}(U)\colon U \subseteq X \text{ otvoren}, s \in PU\}$. Direktno se može provjeriti da su sva preslikavanja $\tilde{s}$ i π neprekidna. Štoviše, $\tilde{s}\colon U \to \tilde{s}(U)$ je homeomorfizam, za $s \in PU$. Također, nije teško vidjeti da je π lokalni homeomorfizam, tj. svežanj $\pi\colon \Lambda_P \to X$ je étalni prostor. Ukoliko je $\varphi\colon P \to Q$ morfizam predsnopova skupova nad

[4] Za lokalni homeomorfizam sa étalnog prostora često kažemo i da je ***étalno preslikavanje***.

[5] Ponekad ih zovemo (topološkim) ***prostorima nad*** X, ili (topološkim) ***prostorima s bazom*** X.

[6] Eng. *sheaf of cross-sections*.

X, lako se provjeri da je preslikavanje $\Lambda_\varphi \colon \Lambda_P \to \Lambda_Q$ definirano po komponentama disjunktne unije sa $[s]_x \mapsto \varphi_x([s]_x)$ neprekidno, te da komutira sa odgovarajućim projekcijama svežnjeva Λ_P i Λ_Q nad X. Time smo konstruirali funktor $\Lambda \colon \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Bund}(X)$.

Teorem 2.1.9. *Za svaki topološki prostor X i funktore $\mathbf{Bund}(X) \underset{\Lambda}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathbf{PSh}(X)$ definirane u prethodnoj diskusiji vrijedi adjunkcija $\Lambda \dashv \Gamma$.*

Dokaz. Za bilo koji predsnop skupova P nad X i otvoren podskup $U \subseteq X$ stavimo

$$\eta_{P,U} \colon PU \to (\Gamma\Lambda_P)(U), \quad \eta_{P,U}(s) := \tilde{s}. \tag{2.1}$$

Sljedeće činjenice se direktno provjere: $\eta_{P,U}$ je dobro definirano; $\eta_P \colon P \to \Gamma\Lambda_P$ je prirodna transformacija; $\eta \colon I_{\mathbf{PSh}(X)} \to \Gamma\Lambda$ je prirodna transformacija.

Za bilo koji svežanj $p \colon E \to X$ definirajmo $\epsilon_E \colon \Lambda_{\Gamma E} \to E$ na sljedeći način. Za bilo koji $[s]_x \in \Lambda_{\Gamma E}$ (dakle imamo $U \subseteq X$ otvoren podskup, $x \in U$ i $s \colon U \to E$ neprekidno preslikavanje tako da vrijedi $p(s(y)) = y$ za sve $y \in U$) stavimo

$$\epsilon_E([s]_x) := s(x). \tag{2.2}$$

Funkcija ϵ_E je dobro definirana, jer ukoliko je $[s]_x = [t]_y \in \Lambda_{\Gamma E}$, tada je $x = y$, i funkcije s i t se podudaraju na nekoj okolini od $x = y$, pa je $s(x) = t(y)$. Direktno se provjeri da je ϵ_E neprekidno, te da na odgovarajući način komutira sa projekcijama svežnjeva $\Lambda_{\Gamma E}$ i E (tj. ϵ_E je morfizam svežnjeva nad X). Štoviše, direktno se provjeri da je $\epsilon \colon \Lambda\Gamma \to I_{\mathbf{Bund}(X)}$ prirodna transformacija.

Također se može direktno provjeriti da komutiraju odgovarajući trokutni dijagrami koji daju adjunkciju $\Lambda \dashv \Gamma$ u kojoj je η jedinica, a ϵ kojedinica. □

Teorem 2.1.10. *Adjunkcija iz teorema 2.1.9 restringirana na potkategorije $\mathbf{Et}(X)$ i $\mathbf{Sh}(X)$ daje ekvivalenciju kategorija $\mathbf{Et}(X) \simeq \mathbf{Sh}(X)$.*

Dokaz. Restrikcijom funktora Γ i Λ na zadane potkategorije zaista dobijemo

$$\mathbf{Et}(X) \underset{\Lambda}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathbf{Sh}(X)\,,$$

budući da svakom svežnju (pa tako i étalnom prostoru) nad X funktor Γ pridružuje snop prereza nad X, te za svaki presnop (pa tako i snop) P nad X konstruirani svežanj Λ_P je étalni prostor nad X.

Dokažimo da je prirodna transformacija $\eta \colon I_{\mathbf{Sh}(X)} \to \Gamma\Lambda$ definirana sa (2.1) prirodni izomorfizam. Neka je P snop nad X i $U \subseteq X$ otvoren podskup. Dovoljno je dokazati da je funkcija $\eta_{P,U}$ injekcija i surjekcija.

Ako za neke $s, t \in PU$ vrijedi $\tilde{s} = \tilde{t}$, tada za svaki $x \in U$ vrijedi $[s]_x = [t]_x$, pa se s i t podudaraju restringirani na neku okolinu od x. Zbog separiranosti snopa P vrijedi $s = t$, pa je $\eta_{P,U}$ zaista injekcija.

Uzmimo bilo koji $h \in (\Gamma\Lambda_P)(U)$. Tada je $h\colon U \to \Lambda_P$ neprekidno preslikavanje tako da je $h(x) \in P_x$ za sve $x \in U$. Za svaki $x \in U$ možemo naći okolinu $U_x \subseteq U$ od x i $s_x \in PU_x$ tako da je $h(x) = [s_x]_x$, pa zbog neprekidnosti postoji okolina $V_x \subseteq U_x$ od x za koju je $h(V_x) \subseteq \tilde{s}_x(U_x)$. Iz toga zaključujemo da je $h|_{V_x} = \tilde{s}_x|_{V_x}$. Familija $\{V_x \colon x \in U\}$ je pokrivač od U, te je $\tilde{s}_x|_{V_x \cap V_y} = \tilde{s}_y|_{V_x \cap V_y}$ za sve $x, y \in U$ (jer se obje funkcije $\tilde{s}_x$ i $\tilde{s}_y$ poudaraju sa h na $V_x \cap V_y$). Stoga je $\eta_{P,V_x\cap V_y}(s_x|_{V_x\cap V_y}) = \eta_{P,V_x\cap V_y}(s_y|_{V_x\cap V_y})$, pa zbog dokazane injektivnosti od $\eta_{P,V_x\cap V_y}$ vrijedi $s_x|_{V_x\cap V_y} = s_y|_{V_x\cap V_y}$. Jer je P epipredsnop, postoji $s \in PU$ za kojeg vrijedi $s|_{V_x} = s_x|_{V_x}$ za sve $x \in U$. Sada direktno slijedi da je $\eta_{P,U}(s) = h$, pa je $\eta_{P,U}$ i surjekcija.

Dokažimo da je prirodna transformacija $\epsilon\colon \Lambda\Gamma \to I_{\mathbf{Et}(X)}$ definirana sa (2.2) prirodni izomorfizam. Neka je $p\colon E \to X$ étalni prostor nad X. Potrebno je dokazati da je funkcija $\epsilon_E\colon \Lambda_{\Gamma_p} \to E$ homeomorfizam.

Za bilo koju točku $y \in E$ stavimo $x := p(y) \in X$, te neka je $p|_F\colon F \to U$ homeomorfizam, gdje je $F \subseteq E$ okolina od y. Tada je $s := (p|_F)^{-1} : U \to E$ neprekidno, $p(s(z)) = z$ za sve $z \in U$, te je $s(x) = y$. Dakle, s je prerez iz $\Gamma_p(U)$ za kojeg je $s(x) = y$. Ako je $s' \in \Gamma_p(V)$ neki drugi prerez za kojeg je $s'(x) = y$, gdje je $V \subseteq X$ okolina od x, lako se vidi da je tada $[s]_x = [s']_x \in \Lambda_{\Gamma_p}$ (postoji okolina od x na kojoj se s i s' podudaraju).

Definirajmo sada funkciju $\theta\colon E \to \Lambda_{\Gamma_p}$ na sljedeći način. Za $y \in E$ stavimo $\theta(y) := [s]_x$, gdje je $x := p(y)$, $U \subseteq X$ okolina od x i $s \in \Gamma_p(U)$ neki prerez za kojeg vrijedi $s(x) = y$. Iz diskusije u prethodnom odlomku slijedi da je θ dobro definirano. Direktnom provjerom se vidi da je obostrani inverz od ϵ_E. Da bi pokazali da je θ i neprekidno, uzmimo bilo koji otvoren $W \subseteq X$ i prerez $r \in \Gamma_p(W)$; vrijedi $\theta^{-1}(\tilde{r}(W)) = r(W)$. Lako se vidi da je $r(W) \subseteq E$ otvoren, koristeći činjenicu da je $p\colon E \to X$ étalno preslikavanje. Dakle, ϵ_E je zaista homeomorfizam. □

Korolar 2.1.11. *Svaki snop skupova je izomorfan snopu prereza nekog étalnog prostora.*

2.1.4. Snopifikacija

I dalje zadržavamo oznake funktora $\mathbf{Bund}(X) \underset{\Lambda}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathbf{PSh}(X)$ iz prethodnog pododjeljka, te su nam η i ϵ redom jedinica i kojedinica adjunkcije $\Lambda \dashv \Gamma$.

Definicija 2.1.12. *Funktor* $\Gamma\Lambda\colon \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ *zovemo* **funktor snopifikacije**. *Za predsnop P skupova nad X, morfizam $\eta_P\colon P \to \Gamma\Lambda_P$ zovemo* **snopifikacija** *predsnopa P.*

Iz teorema 2.1.10 direktno slijedi da je snopifikacija bilo kojeg snopa F skupova nad X ništa drugo nego izomorfizam snopova $\eta_F\colon F \to \Gamma\Lambda_F$. Svojstvo snopifikacije opisano sljedećim teoremom zovemo ***univerzalno svojstvo*** snopifikacije.

Teorem 2.1.13. *Neka je $\eta_P\colon P \to \Gamma\Lambda_P$ snopifikacija predsnopa P skupova nad X. Tada za svaki snop F skupova nad X i morfizam predsnopova $\theta\colon P \to F$ postoji jedinstven morfizam snopova $\sigma\colon \Gamma\Lambda_P \to F$ tako da je $\sigma \circ \eta_P = \theta$.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta_P"] \arrow[dr, "\theta"'] & \Gamma\Lambda_P \arrow[d, dashed, "\exists!\sigma"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Dokaz. Znamo da je snopifikacija $\eta_F\colon F \to \Gamma\Lambda_F$ snopa F izomorfizam, a zbog prirodnosti od η sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta_P"] \arrow[d, "\theta"'] & \Gamma\Lambda_P \arrow[d, "\Gamma\Lambda_\theta"] \\ F & \Gamma\Lambda_F \arrow[l, "\eta_F^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Stoga morfizam snopova $\sigma := \eta_F^{-1} \circ \Gamma\Lambda_\theta\colon \Gamma\Lambda_P \to F$ zadovoljava traženo svojstvo. Ako je $\tau\colon \Gamma\Lambda_P \to F$ morfizam snopova za kojeg je $\tau \circ \eta_P = \sigma \circ \eta_P$, dokažimo da je tada $\tau = \sigma$. Neka je $U \subseteq X$ bilo koji otvoren skup i $h \in (\Gamma\Lambda_P)(U)$. Za $x \in U$ možemo naći okolinu $V_x \subseteq U$ okolinu od x i $s_x \in PV_x$ tako da je $h(x) = [s_x]_x$, te kao u dokazu teorema 2.1.10 možemo postići da bude $h|_{V_x} = \tilde{s}_x$ (zbog neprekidnosti od h). Računamo:

$$\sigma_U(h)|_{V_x} = \sigma_{V_x}(h|_{V_x}) = \sigma_{V_x}(\eta_{P,V_x}(s_x)) = \tau_{V_x}(\eta_{P,V_x}(s_x)) = \tau_U(h)|_{V_x}.$$

Budući da je familija $\{V_x\colon x \in U\}$ očito pokrivač od U, zbog separiranosti od F slijedi $\sigma_U(h) = \tau_U(h)$. Time smo pokazali da je $\sigma = \tau$. □

Pod snopifikacijom predsnopa P općenito mislimo na morfizam $P \to F$, gdje je F snop, koji zadovoljava univerzalno svojstvo iz teorema 2.1.13. Ako su $P \to F_1$ i $P \to F_2$ dvije snopifikacije predsnopa P, tada očito postoji jedinsven izomorfizam snopova $F_1 \to F_2$ koji na odgovarajući način komutira sa tim snopifikacijama.

Teorem 2.1.14. *Neka je $I\colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PSh}(X)$ funktor inkluzije i $\Gamma\Lambda\colon \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ funktor snopifikacije. Tada vrijedi adjunkcija $\Gamma\Lambda \dashv I$.*

Dokaz. Jedinica adjunkcije je $\eta\colon I_{\mathbf{PSh}(X)} \to I\Gamma\Lambda$ definirana u dokazu teorema 2.1.9, a kojedinica $\eta^{-1}\colon \Gamma\Lambda I \to I_{\mathbf{Sh}(X)}$ (iz dokaza teorema 2.1.10 slijedi da je kojedinica dobro definirana). Tvrdnja teorema slijedi direktnom provjerom.

Drugi način da se pokaže teorem jest da za bilo koji predsnop P i snop F skupova nad X, pomoću univerzalnog svojstva snopifikacije (teorema 2.1.13) konstruira bijekcija $\mathrm{Hom}(P, F) \to \mathrm{Hom}(\Gamma\Lambda_P, F)$ prirodna u P i F. □

Propozicija 2.1.15. *Neka je $\eta_P\colon P \to \Gamma\Lambda_P$ snopifikacija predsnopa P skupova nad X. Tada je inducirani morfizam na vlatima $(\eta_P)_x\colon P_x \to (\Gamma\Lambda_P)_x$ izomorfizam, za sve $x \in X$.*

Dokaz. Neka je $(\eta_P)_x([s]_x) = (\eta_P)_x([t]_x)$ za (bez gubitka općenitosti) $s, t \in PU$, gdje je $U \subseteq X$ okolina od $x \in X$. Tada je $[\tilde{s}]_x = [\tilde{t}]_x$, pa postoji okolina $V \subseteq U$ od x tako da je $\tilde{s}|_V = \tilde{t}|_V$. Posebno je i $[s]_x = \tilde{s}(x) = \tilde{t}(x) = [t]_x$, pa je $(\eta_P)_x$ injekcija.

Za bilo koji $[h]_x \in (\Gamma\Lambda_P)_x$, gdje je $U \subseteq X$ okolina od X i $h \in (\Gamma\Lambda_P)(U)$, kao u dokazu teorema 2.1.10 možemo postići da bude $h|_V = \tilde{s}$, gdje je $V \subseteq U$ okolina od x i $s \in PV$. Tada je $(\eta_P)_x([s]_x) = [h]_x$, pa je $(\eta_P)_x$ i surjekcija. □

Propozicija 2.1.15 nam zapravo kaže da prilikom snopifikacije lokalna struktura predsnopa ostaje nepromjenjena.

Primjer 2.1.16. Neka je X topološki prostor i S skup. Definiramo ***konstantni predsnop*** skupova nad X određen s S, koji svakom otvorenom podskupu od X pridruži skup S, a za restrikcije ima 1_S. Snopifikacijom konstantnog predsnopa dobijemo konstantni snop definiran u primjeru 2.1.5.

2.1.5. (Ko)limesi snopova

Korolar 1.3.45 kaže da je kategorija $\mathbf{PSh}(X)$ potpuna i kopotpuna, te se (ko)limesi u njoj računaju po točkama. Pokazati ćemo da je i $\mathbf{Sh}(X)$ potpuna i kopotpuna. Budući da funktor inkluzije $\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PSh}(X)$ ima lijevog adjungiranog (teorem 2.1.14), on čuva limese (teorem 1.4.8). Stoga limes snopova u $\mathbf{Sh}(X)$, ako postoji, ne može biti ništa drugo nego njihov limes u $\mathbf{PSh}(X)$.

Propozicija 2.1.17. *Neka je $\{F_i\colon i \in I\}$ familija snopova skupova nad X. Tada je produkt te familije u $\mathbf{Sh}(X)$ dan sljedećom formulom: $(\prod_{i\in I} F_i)(U) = \prod_{i\in I} F_iU$, za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$. Za otvorene podskupove $V \subseteq U$ od X restikcija produkta te familije na prereze $\prod_{i\in I} F_iU \to \prod_{i\in I} F_iV$ je jedinstveni morfizam kroz kojeg se faktorizira konus $\prod_{i\in I} F_iU \to F_iU \to F_iV$ nad familijom $\{F_iV\colon i \in I\}$.*

Dokaz. Predsnop $\prod_{i\in I} F_i$ je produkt dane familije snopova u $\mathbf{PSh}(X)$. Direktnom provjerom se vidi da je $\prod_{i\in I} F_i$ snop. Stoga on mora biti i produkt te familije u $\mathbf{Sh}(X)$. □

Slično tome, pokaže se i sljedeća analogna propozicija za ujednačitelje, nakon čega primjenom teorema 1.3.25 slijedi navedeni teorem o potpunosti kategorije $\mathbf{Sh}(X)$.

Propozicija 2.1.18. *Ujednačitelj paralenog para u $\mathbf{Sh}(X)$ između dva snopa skupova nad X postoji, i jednak je njihovom ujednačitelju u $\mathbf{PSh}(X)$.*

Teorem 2.1.19. *Kategorija* $\mathbf{Sh}(X)$ *je potpuna, i limesi u njoj se dobiju kao odgovarajući limesi u* $\mathbf{PSh}(X)$*, po točkama. Drugačije rečeno, ulaganje kategorija* $\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PSh}(X)$ *reflektira limese.*

Koristeći univerzalno svojstvo snopifikacije, lako se vidi da vrijedi:

Teorem 2.1.20. *Kategorija* $\mathbf{Sh}(X)$ *je kopotpuna, i kolimesi u njoj se dobiju kao odgovarajući kolimesi u* $\mathbf{PSh}(X)$*, po točkama, uz postkompoziciju sa snopifikacijom.*

Razlog zašto se snopovi bolje ponašaju pod limesom nego kolimesom jest taj što je snopovski uvjet dan kao limes, te jer limesi međusobno komutiraju.

2.2. Direktna i inverzna slika

2.2.1. Konstrukcija i svojstva

Neka je $f\colon X \to Y$ morfizam u **Top**, i F snop skupova nad X. Definirajmo snop f_*F skupova nad Y na sljedeći način: za otvoren podskup $U \subseteq Y$ neka je $(f_*F)(U) := F(f^{-1}(U))$, te za otvorene podskupove $V \subseteq U$ od Y neka je restrikcija $(f_*F)(U) \to (f_*F)(V)$ budućeg predsnopa f_*F upravo restrikcija $F(f^{-1}(U)) \to F(f^{-1}(V))$ snopa F. Lako se provjeri da je f_*F dobro definirani snop skupova nad Y, te ga zovemo ***direktna slika*** snopa F duž f.

Ako je $\varphi\colon F \to G$ morfizam u $\mathbf{Sh}(X)$, za svaki otvoren podskup $U \subseteq Y$ definirajmo $(f_*\varphi)_U := \varphi_{f^{-1}(U)}\colon (f_*F)(U) \to (f_*G)(U)$. Time dobijemo morfizam $f_*\varphi\colon f_*F \to f_*G$ u $\mathbf{Sh}(Y)$, te smo tako dobili funktor $f_*\colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y)$ kojeg zovemo ***funktor direktne slike*** duž f. Uočimo još da za kompozabilne morfizme g i f u **Top** vrijedi $(gf)_* = g_*f_*$, te $(1_X)_* = 1_{\mathbf{Sh}(X)}$. Direktna slika se još zove ***potisak*** ili ***pushforward***.

Za morfizam $f\colon X \to Y$ u **Top** i snop G skupova nad Y konstruirati ćemo snop $f^{-1}G$ skupova nad X. Za otvoren podskup $U \subseteq X$ neka je prvo G_U restrikcija funktora G na usmjeren skup $\mathbf{Ouv}(Y)_{f(U)}$ definiran u primjeru 1.3.50, označimo zatim direktni limes $\operatorname{colim} G_U =: G'(U)$ (pišemo sugestivno $G'(U) = \operatorname{colim}_{V \supseteq f(U)} G(V)$). Lako je vidjeti da G' možemo pretvoriti u predsnop skupova nad X, ukoliko mu restrikcije konstruiramo pomoću restrikcija od G i univerzalnog svojstva kolimesa. Zatim definiramo $f^{-1}G$ kao snop dobiven snopifikacijom od G', i zovemo ga ***inverzna slika*** snopa G. Uz očito dodefiniranje na morfizmima, dobili smo funktor $f^{-1}\colon \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(X)$, kojeg zovemo ***funktor inverzne slike*** duž f. Inverzna slika se još zove ***povlak*** ili ***pullback***.

Napomena 2.2.1. Iako je inverzna slika definirana složenijom formulom, vlati inverzne slike se lakše računaju nego vlati direktne slike. Naime, uz oznake kao u prethodnom odlomku, za bilo koji $x \in X$ vrijedi

$$(G')_x = \operatorname*{colim}_{U \ni x} G'U = \operatorname*{colim}_{U \ni x} \operatorname*{colim}_{V \supseteq f(U)} GV \cong \operatorname*{colim}_{V \ni f(x)} GV = G_{f(x)},$$

gdje smo iskoristili komutiranje kolimesa i neprekidnost od f. Koristeći propoziciju 2.1.15, slijedi formula $(f^{-1}G)_x \cong G_{f(x)}$.

Teorem 2.2.2. *Za svaki morfizam $f\colon X \to Y$ u* **Top** *i funktore* $\mathbf{Sh}(X) \underset{f^{-1}}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} \mathbf{Sh}(Y)$ *direktne i inverzne slike duž f vrijedi adjunkcija $f^{-1} \dashv f_*$.*

Dokaz. Neka su G i F snopovi skupova redom nad Y i X. Konstruirati ćemo bijekciju $\sigma\colon \mathrm{Hom}(f^{-1}G, F) \to \mathrm{Hom}(G, f_*F)$ prirodnu u G i F. Neka je $\varphi\colon f^{-1}G \to F$ bilo koji morfizam snopova. Tada imamo $\varphi' := \varphi \circ \eta_{G'}\colon G' \to F$, tj. $\varphi'_U\colon G'U \to FU$, gdje je $G'U = \mathrm{colim}_{V \supseteq f(U)} G(V)$, za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$. Za bilo koji otvoren podskup $W \subseteq Y$ imamo morfizam $\sigma(\varphi)_W := \varphi'_{f^{-1}(W)} \circ c_W\colon GW \to F(f^{-1}(W)) = (f_*F)(W)$, gdje je $c_W\colon GW \to G'(f^{-1}(W))$ komponenta kolimesa. Direktno se provjeri da je $\sigma(\varphi)\colon G \to f_*F$ morfizam snopova, kao i da je tako definirano preslikavanje σ prirodno u G i F.

Neka je $\psi\colon G \to f_*F$ morfizam snopova, i $U \subseteq X$ otvoren podskup. Ako imamo otvoren podskup $V \subseteq Y$ za kojeg je $f(U) \subseteq V$, tada je $U \subseteq f^{-1}(V)$, pa imamo kompoziciju $GV \overset{\psi_V}{\to} F(f^{-1}(V)) \to FU$. Time smo dobili kokonus nad funktorom G restringiranim na $\mathbf{Ouv}(Y)_{f(U)}$, pa zbog univezalnog svojstva kolimesa postoji jedinstven morfizam $\psi'_U\colon G'U \to FU$ koji na odgovarajući način komutira sa komponentama navedenog kokonusa i kolimesa. Lako se vidi da je $\psi'\colon G' \to F$ morfizam snopova, pa po univerzalnom svojstvu snopifikacije postoji jedinstven morfizam snopova $\tau(\psi)\colon f^{-1}G \to F$ za kojeg vrijedi $\tau(\psi) \circ \eta_{G'} = \psi'$. Direktnom provjerom se vidi da je τ obostrani inverz od σ, pa je σ zaista bijekcija. □

Definicija 2.2.3. *Neka je $Y \subseteq X$, $i\colon Y \to X$ ulaganje topoloških prostora, te F snop skupova nad X. Snop $i^{-1}F$ nad Y zovemo* **restrikcija** *snopa F na potprostor Y, te pišemo $F|_Y := i^{-1}F$.*

Uočimo da zbog napomene 2.2.1 vrijedi $(F|_Y)_y = F_y$, za sve $y \in Y$. Desni adjungirani funktor funktoru restrikcije je funktor direkne slike $i_*\colon \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(X)$, dan formulama $(i_*G)(U) = G(U \cap Y)$ i $i_*(\varphi)_U = \varphi_{U \cap Y}$, za otvoren podskup $U \subseteq X$, G snop skupova nad Y, te φ morfzam u $\mathbf{Sh}(Y)$. Ponekad kažemo da je snop i_*G dobiven ***proširenjem s nulom*** od snopa G.

Za otvoren podskup $U \subseteq X$ vrijedi $F|_U(V) = FV$ za svaki otvoreni podskup $V \subseteq U$, te su restrikcije snopa $F|_U$ naslijeđene od snopa F.

2.2.2. Funktor globalnih prereza

Definicija 2.2.4. *Za topološki prostor X definiramo* **funktor globalnih prereza** *(ili* **funktor globalne sekcije***) Γ na sljedeći način*[7]*:*

$$\Gamma\colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Set}, \qquad \left(F \xrightarrow{\varphi} G\right) \overset{\Gamma}{\mapsto} \left(FX \xrightarrow{\varphi_X} GX\right).$$

Funktor globalnih prereza se može dobiti i kao direktna slika, na sljedeći način. Neka je $f\colon X \to \{x\}$ morfizam u **Top**, gdje je $\{x\}$ jednotočkovni prostor, i $f_*\colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(\{x\})$ funktor direktne slike duž f. Uočimo da vrijedi $(f_*F)(\{x\}) = F(f^{-1}(\{x\})) = FX$, te za morfizam snopova $f_*(\varphi)_{\{x\}} = \varphi_X$. Snop nad jednočlanim prostorom nije ništa drugo nego skup, pa uz tu identifikaciju $\mathbf{Sh}(\{x\}) \simeq \mathbf{Set}$ imamo da je $\Gamma = f_*$. Iz teorema 2.2.2 i 1.4.8 direktno slijede korolari:

Korolar 2.2.5. *Funktor globalnih prereza je desni adjungirani, odnosno ima lijevog adjungiranog.*

Korolar 2.2.6. *Funktor globalnih prereza čuva limese.*

Lako se provjeri da je lijevi adjungirani funktor funktoru globalnih prereza upravo funktor koji svaki skup šalje u konstantan snop iz primjera 2.1.5.

Neka je $i\colon \{x\} \to X$ ulaganje topoloških prostora; tada imamo funktor direktne slike $i_*\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Sh}(X)$, uz već navedenu identifikaciju $\mathbf{Sh}(\{x\}) \simeq \mathbf{Set}$. Dakle, za skup S i $U \subseteq X$ otvoren podskup vrijedi

$$(i_*S)(U) = \begin{cases} S & : \ x \in U, \\ \{*\} & : \ x \notin U. \end{cases}$$

Oznaka $\{*\}$ označava neki jednočlan skup. Restrikcije snopa i_*S su očito 1_S, ili trivijalno preslikavanje u $\{*\}$. Za snop i_*S kažemo da je ***snop neboder***[8] skupa S u točki $x \in X$. Nije teško vidjeti da je $(i_*S)_y = S$ za svaki y iz topološkog zatvarača skupa $\{x\} \subseteq X$, te $(i_*S)_y = \{*\}$ za preostale $y \in X$.

Uočimo još i funktor (kojeg zovemo ***funktor vlati*** u x) $\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Set}$ koji ima djelovanje

$$\left(F \xrightarrow{\varphi} G\right) \mapsto \left(F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x\right).$$

Funktor vlati u točki x nije ništa drugo nego funktor restrikcije na jednotočkovni potprostor $\{x\}$, stoga iz teorema 2.2.2 i 1.4.8 odmah slijede korolari:

[7]Oznaku Γ za funktor globalnih prereza ne treba miješati sa $\Gamma\colon \mathbf{Bund}(X) \to \mathbf{PSh}(X)$ iz odjeljka 2.1.

[8]Eng. *skyscraper sheaf.*

Korolar 2.2.7. *Funktor vlati u x je lijevi adjungirani funktoru direktne slike i_*, gdje je $i\colon \{x\} \to X$ inkluzija.*

Korolar 2.2.8. *Funktor vlati u točki čuva kolimese.*

Napomena 2.2.9. Slično kao funktor globalnih prereza, za bilo koji otvoren podskup $U \subseteq X$ možemo definirati ***funktor prereza nad*** U, u oznaci $\Gamma(U, \cdot)\colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Set}$, formulom $(F \xrightarrow{\varphi} G) \mapsto (FU \xrightarrow{\varphi_U} GU)$. Vrijedi $\Gamma(U, F) = \Gamma(F|_U)$, tj. $\Gamma(U, \cdot)$ je kompozicija funktora globalnih prereza i funktora restrikcije na potprostor U.

Za kraj odjeljka spomenimo još da postoji drugi "topološki" način da se konstruira funktor inverzne slike, preko étalnih prostora danih snopova. Ako je $f\colon X \to Y$ morfizam u **Top**, tada za svaki svežanj $E \to Y$ nad Y možemo naći (jedinstven do na prirodni izomorfizam) svežanj $f^*E \to X$ nad X tako da je sljedeći dijagram pullback (fibrirani produkt):

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Time smo dobili funktor $f^*\colon \mathbf{Bund}(Y) \to \mathbf{Bund}(X)$, za kojeg se pokaže da se može restringirani na $f^*\colon \mathbf{Et}(Y) \to \mathbf{Et}(X)$. Zatim naposlijetu definiramo ***funktor inverzne slike*** $f^*\colon \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(X)$ kao kompoziciju

$$\mathbf{Sh}(Y) \xrightarrow{\Lambda} \mathbf{Et}(Y) \xrightarrow{f^*} \mathbf{Et}(X) \xrightarrow{\Gamma} \mathbf{Sh}(X)\,,$$

gdje su Λ i Γ ekvivalencije kategorija iz teorema 2.1.10.

Može se pokazati da za tako definirani funktor inverzne slike također vrijedi adjunkcija $f^* \dashv f_*$, ali i da f^* čuva sve konačne limese. Dokazi i detalji navedenih tvrdnji se mogu vidjeti u [23, II.9].

Za još jedan način zadavanja inverzne slike, preko Kanovih ekstenzija, vidi [23, VII.5].

2.3. Snopovi algebarskih struktura

Neka je X topološki prostor, te neka **AbPSh(X)** i **AbSh(X)** označavaju kategorije predsnopova i snopova Abelovih grupa nad X, redom. Bez ulaženja u sitne detalje, spomenimo da sve sve konstrukcije iz odjeljka 2.1. mogu provesti i za snopove Abelovih grupa (kao i za snopove ostalih algebarskih struktura). U ovom slučaju ćemo gledati svežnjeve $E \xrightarrow{p} X$ nad X u kojima imamo strukturu Abelove grupe na svakom ***vlaknu*** $p^{-1}(\{x\})$ za $x \in X$, na način da inducirana preslikavanja invertiranja $E \to E$ i zbrajanja $E \times_X E \to E$ na fibriranom produktu, budu neprekidna prelikavanja svežnjeva nad X. Na taj način dobijemo kategoriju

AbBund(X), i njenu punu potkategoriju **AbEt**(X) u kojoj gledamo samo svežnjeve koji su lokalni homeomorfizmi.

Analogno slučaju skupova, konstruiramo funktore $\mathbf{AbBund}(X) \underset{\Lambda}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathbf{AbPSh}(X)$ za koje vrijedi adjunkcija $\Lambda \dashv \Gamma$, te koji restringirani na $\mathbf{AbEt}(X) \underset{\Lambda}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathbf{AbSh}(X)$ daju ekvivalenciju kategorija $\mathbf{AbEt}(X) \simeq \mathbf{AbSh}(X)$. Kompozicijom tih funktora dobijemo snopifikaciju $\Gamma\Lambda\colon \mathbf{AbPSh}(X) \to \mathbf{AbSh}(X)$ koja također zadovoljava univerzalno svojstvo (analogon teorema 2.1.13), te inducira izomorfizme na vlatima. Snopifikacija predsnopova Abelovih grupa je lijeva adjungirana za ulaganje $\mathbf{AbSh}(X) \to \mathbf{AbPSh}(X)$, stoga čuva kolimese. Snopifikaciju predsnopa P ćemo ponekad označavati i s $P \to P^+$.

Morfizam $f\colon X \to Y$ u **Top** na analogan način kao u odjeljku 2.2. inducira funktore direktne i inverzne slike $\mathbf{AbSh}(X) \underset{f^{-1}}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} \mathbf{AbSh}(Y)$ koji čine adjungirani par $f^{-1} \dashv f_*$. Kao specijalan slučaj direktne slike, imamo funktor globalnih prereza $\Gamma\colon \mathbf{AbSh}(X) \to \mathbf{Ab}$ koji ima djelovanje $(F \xrightarrow{\varphi} G) \mapsto (FX \xrightarrow{\varphi_X} GX)$. Funktor globalnih prereza ima lijevog adjungiranog, stoga čuva limese.

Za $x \in X$ imamo i funktor vlati $\mathbf{AbSh}(X) \to \mathbf{Ab}$ u točki x koji ima sljedeće djelovanje: $(F \xrightarrow{\varphi} G) \mapsto (F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x)$. Funktor vlati ima desnog adjungiranog, stoga čuva kolimese.

Analogno slučaju skupova se vidi da je kategorija **AbSh**(X) je potpuna, i da se limesi u njoj dobiju kao odgovarajući limesi u **AbPSh**(X), po točkama.

Iz propozicije 1.7.28 slijedi da je kategorija **AbPSh**(X) Abelova.

Teorem 2.3.1. *Kategorija* **AbSh(X)** *je Abelova.*

Dokaz. Za morfizme $F \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} G$ u **AbSh(X)** definiramo $(\varphi + \psi)_U(x) := \varphi_U(x) + \psi_U(x)$ za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$ i $x \in FU$; time dobijemo da je **AbSh(X)** predaditivna kategorija. Očito imamo sve dvočlane produkte, dok za nul-objekt imamo snop koji svakom otvorem skupu u X pridruži trivijalnu Abelovu grupu; dakle **AbSh(X)** je aditivna.

Jezgra morfizma u **AbSh(X)** je poseban limes, stoga ona postoji i računa se po točkama. Kojezgra morfizma $F \xrightarrow{\varphi} G$ jest upravo kojezgra istog morfizma **AbPSh(X)** (po točkama), postkomponirana sa snopifikacijom. Lako se pokaže da i u **AbSh(X)** vrijede formule (1.17) (koristeći činjenicu da one vrijede u **AbPSh(X)** i univerzalno svojstvo snopifikacije), iz čega slijedi još i (ko)normalnost. □

Iz prethodno navedenih adjunkcija slijedi da je snopifikacija desno egzaktna, funktor inkluzije $\mathbf{AbSh}(X) \to \mathbf{AbPSh}(X)$ lijevo egzaktan, funktor globalnih prereza lijevo egzaktan, te funktor vlati desno egzaktan.

Propozicija 2.3.2. *Neka je $F \xrightarrow{\varphi} G$ morfizam u* **AbSh(X)** *i $x \in X$. Tada vrijede jednakosti:* $(\operatorname{Coker}\varphi)_x = \operatorname{Coker}(\varphi_x)$, $(\operatorname{Ker}\varphi)_x = \operatorname{Ker}(\varphi_x)$, $(\operatorname{Im}\varphi)_x = \operatorname{Im}(\varphi_x)$ *i* $(\operatorname{Coim}\varphi)_x = \operatorname{Coim}(\varphi_x)$.

Dokaz. Prva jednakost direktno slijedi jer je funktor vlati lijevi adjungirani, pa čuva kolimese. Neka je $[s]_x \in (\operatorname{Ker}\varphi)_x$, gdje je $s \in (\operatorname{Ker}\varphi)(U)$ za neku okolinu U od x. Iz komutativnosti dijagrama

$$\begin{tikzcd}
(\operatorname{Ker}\varphi)(U) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\varphi_U \arrow[r, hook] & FU \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & GU \arrow[d] \\
(\operatorname{Ker}\varphi)_x \arrow[rr] & & F_x \arrow[r, "\varphi_x"] & G_x
\end{tikzcd}$$

slijedi da je $\varphi_x([s]_x) = 0$, pa imamo inkluziju $(\operatorname{Ker}\varphi)_x \hookrightarrow \operatorname{Ker}\varphi_x$. Obratno, ukoliko je $[s]_x \in \operatorname{Ker}\varphi_x$, vrijedi $0 = \varphi_x([s]_x) = [\varphi_U(s)]_x$, pa je $\varphi_U(s)|_V = 0$ za neku okolinu $V \subseteq U$ od x. No, tada je $\varphi_V(s|_V) = 0$, tj. $s|_V \in (\operatorname{Ker}\varphi)(V)$, dakle $[s]_x = [s|_V]_x \in (\operatorname{Ker}\varphi)_x$. Time smo dokazali drugu jednakost, a preostale dvije direktno slijede. □

Jednakost $(\operatorname{Ker}\varphi)_x = \operatorname{Ker}(\varphi_x)$ je također posljedica činjenice da u **Ab** filtrirani kolimes (funktor vlati) komutira sa konačnim limesom (jezgrom).

Koristeći se propozicijama 2.3.2 i 1.7.23, dobijemo:

Propozicija 2.3.3. *Neka je $F \xrightarrow{\varphi} G$ morfizam u* **AbSh**(X)*. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) $\varphi\colon F \to G$ *je monomorfizam.*

(b) $\varphi_U\colon FU \to GU$ *je monomorfizam, za svaki otvoreni podskup* $U \subseteq X$.

(c) $\varphi_x\colon F_x \to G_x$ *je monomorfizam, za svaki* $x \in X$.

Nadalje, sljedeće dvije tvrdnje su međusobno ekvivalentne:

(i) $\varphi\colon F \to G$ *je epimorfizam.*

(ii) $\varphi_x\colon F_x \to G_x$ *je epimorfizam, za svaki* $x \in X$.

Korolar 2.3.4. *Funktor vlati u točki je egzaktan.*

Dokaz. Od prije znamo da je desno egzaktan, a iz propozicije 2.3.3 vidimo da čuva monomorfizme, pa je po korolaru 1.7.35 i lijevo egzaktan. □

Koristeći propozicije 2.3.2 i 2.1.7 možemo lako pokazati i jaču tvrdnju:

Korolar 2.3.5. *Niz* $\ldots \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow \ldots$ *u* **AbSh**(X) *je egzaktan ako i samo ako je niz* $\ldots \longrightarrow F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} H_x \longrightarrow \ldots$ *u* **Ab** *egzaktan za svaki* $x \in X$.

Korolar 2.3.6. *Funktor snopifikacije je egzaktan.*

Dokaz. Od prije znamo da je desno egzaktan, pa je po korolaru 1.7.35 dovoljno pokazati da čuva monomorfizme. Neka je $P \xrightarrow{\varphi} Q$ monomorfizam u **AbPSh**(X). Primjenjujući snopifikaciju, dobijemo sljedeći komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & Q \arrow[d] \\ P^+ \arrow[r, "\varphi^+"] & Q^+ \end{tikzcd}$$

Prelaskom na vlat u točki x, snopifikacija inducira izomorfizme. Lako se pokaže da je $\varphi_x \colon P_x \to Q_x$ monomorfizam. Stoga je φ_x^+ monomorfizam, za sve $x \in X$, pa po propoziciji 2.3.3 slijedi da je φ^+ monomorfizam. □

Što se tiče mono-epi faktorizacije morfizma φ u **AbSh**(**X**), sliku od φ možemo dobiti tako da na domeni slike u **AbPSh**(**X**) od φ primjenimo snopifikaciju, pa iskoristimo univerzalno svojstvo snopifikacije. Kosliku od φ u **AbSh**(**X**) možemo dobiti tako da kosliku u **AbPSh**(**X**) postkomponiramo sa snopifikacijom.

2.4. Elementarni toposi

Elementarni topos je, grubo rečeno, kategorija koja ima slična svojstva kao kategorija **Set**. Ta svojstva bi bila: postoje svi konačni limesi i kolimesi, imamo potenciranje objekata, te podobjekti nekog objekta odgovaraju karakterističnim funkcijama.

2.4.1. Potenciranje i unutarnji hom-bifunktor

Neka je u nastavku C kategorija sa svim konačnim produktima, te terminalnim objektom I. Za bilo koji objekt X imamo funktor $(- \times X) \colon C \to C$ koji zovemo ***množenje zdesna*** s X. Desni adjungirani funktor od $(- \times X)$, ako postoji, zovemo ***potenciranje*** sa X, te njegovo djelovanje (na objektima) označavamo s $Y \mapsto Y^X$, ili ponekad $Y \mapsto \mathbf{Hom}(X, Y)$. Dakle, u tom slučaju imamo prirodnu u Y i Z bijekciju

$$\mathrm{Hom}(Y \times X, Z) \cong \mathrm{Hom}(Y, Z^X). \tag{2.3}$$

Kojedinicu $Z^X \times X \to Z$ te adjunkcije zovemo ***evaluacija***. Ako u kategoriji C postoje potenciranja sa svim objektima, tada kažemo da je ona ***Kartezijevo zatvorena***. U tom slučaju se može pokazati (pomoću teorema 3 iz [22, str. 102]) da imamo bifunktor $(X, Y) \mapsto Y^X$, odnosno $\mathbf{Hom} \colon C^{op} \times C \to C$ ($\mathbf{Hom}(X, Y) = Y^X$) kojeg zovemo ***unutarnji hom-bifunktor***, te je izomorfizam (2.3) prirodan u svim trima varijablama X, Y i Z. Unutarnji hom-bifunktor se ponegdje označava i s $\underline{\mathrm{Hom}}$. Lako vidimo da tada također imamo i sljedeće prirodne izomorfizme:

$$I^X \cong I, \quad X^I \cong X, \quad Z^{X\times Y} \cong (Z^Y)^X, \quad (X\times Y)^Z \cong X^Z \times Y^Z.$$

Prva tri izomorfizma vidimo pomoću (2.3), te koristeći vjernost Yonedinog ulaganja, a zadnji od navedenih izomorfizama slijedi jer poteciranje sa Z ima lijevog adjungiranog pa čuva produkte (teorem 1.4.8).

Primjer 2.4.1. Kategorija **Set**, kao i njena puna potkategorija koja se sastoji samo od konačnih skupova (koju ćemo označavati s **FinSet**) su Kartezijevo zatvorene, i za njih vrijedi **Hom** = Hom. Također je i **Cat** Kartezijevo zatvorena, sa analognim unutarnjim hom-bifunktorom.

Napomena 2.4.2. Općenitije, možemo promatrati unutarnji hom-bifuntor u bilo kojoj monoidalnoj kategoriji (kao desni adjungirani funktor od $(- \otimes X)$), a ne samo Kartezijevoj. Monoidalna kategorija je ***zatvorena***, ako ima unutarnji hom-bifunktor.

Teorem 2.4.3. *Ako je $\mathcal{D}$ mala kategorija, tada je kategorija $\hat{\mathcal{D}} = [\mathcal{D}^{op}, \mathbf{Set}]$ Kartezijevo zatvorena.*

Dokaz. Za funktore $P, Q\colon \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$ definirajmo funktor Q^P na sljedeći način:

$$Q^P := \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{D}}}((-\times P)\circ h, Q)\colon \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}, \tag{2.4}$$

gdje je $h\colon \mathcal{D} \to \hat{\mathcal{D}}$ Yonedino ulaganje. Dakle, za objekt C iz $\mathcal{D}$, $Q^P(C)$ je skup svih prirodnih transformacija $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, C)\times P \to Q$.

Za funktor $R\colon \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$ i prirodnu transformaciju $\varphi\colon R\times P \to Q$, definirati ćemo prirodnu transformaciju $\Phi(\varphi)\colon R \to Q^P$ na sljedeći način: za $C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ i $u \in RC$ stavimo

$$(\Phi(\varphi)_C)(u)_D\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, C)\times PD \to QD, \quad (f, x) \mapsto \varphi_D((Rf)(u), x).$$

Rutinski se provjeri da je $(\Phi(\varphi)_C)(u)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, C)\times P \to Q$ prirodna transformacija, da je $\Phi(\varphi)\colon R \to Q^R$ prirodna transformacija, te da je preslikavanje tako definirano preslikavanje $\Phi\colon \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{D}}}(R\times P, Q) \to \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{D}}}(R, Q^P)$ prirodno u R i Q.

Potrebno je pokazati još da je Φ bijekcija. No, prije toga definirajmo prirodnu transformaciju (evaluaciju) $e\colon Q^P\times P \to Q$ na sljedeći način: za $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, prirodnu transformaciju $\theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, C)\times P \to Q$ i $y \in PC$ stavimo $e_C(\theta, y) := \theta_C(1_C, y)$. Prirodnost od e direktno slijedi. Sada za prirodnu transformaciju $\phi\colon R \to Q^P$ definiramo $\Psi(\phi)\colon R\times P \to Q$ da bude kompozicija

$$R\times P \xrightarrow{\phi\times i_P} Q^P\times P \xrightarrow{e} Q\,.$$

Direktnom provjerom se vidi da je Ψ obostrani inverz od Φ, pa je stoga Φ bijekcija. □

2.4.2. Klasifikator podobjekata

Neka je u nastavku C kategorija sa svim konačnim limesima, te terminalnim objektom I.

Definicija 2.4.4. Klasifikator podobjekata[9] *kategorije C je monomorfizam $t\colon I \to \Omega$ (kojeg zovemo* **istina***), koji ima svojstvo da za svaki monomorfizam $m\colon S \to X$ u C postoji jedinstven morfizam $\phi_m\colon X \to \Omega$ tako da donji dijagram tvori pullback:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & I \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, dashed, "\exists!\phi_m"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Morfizam ϕ_m zovemo **karakteristična funkcija** *podobjekta $S \xrightarrow{m} X$ od X.*

Očito je klasifikator podobjekata, ako postoji, jedinstven do na izomorfizam. Uočimo da su dva podobjekta od X ekvivalentna ako i samo ako imaju istu karakterističnu funkciju. Dakle, klase ekvivalencije podobjekata objekta X su u bijektivnoj korespodenciji s $\mathrm{Hom}_C(X, \Omega)$, pa ukoliko smo u lokalno maloj kategoriji, radi se o skupu. Za kategoriju u kojoj klase ekvivalencije podobjekata objekta X čine skup, za sve objekte X te kategorije, kažemo da je ***dobro potencirana***[10].

Primjer 2.4.5. U kategorijama **Set** i **FinSet** imamo za klasifikator podobjekata ulaganje $t\colon \{0\} \to \{0, 1\}$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{D}$ mala kategorija. Funktor $Q\colon \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$ je ***podfunktor*** funktora $P\colon \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$ (ponekad pišemo $Q \subseteq P$), ako za svaki $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ vrijedi $QC \subseteq PC$, te za svaki morfizam $C \xrightarrow{f} D$ u $\mathcal{D}$ vrijedi da je funkcija $Qf\colon QD \to QC$ restrikcija funkcije Pf. U tom slučaju imamo prirodnu transformaciju $Q \to P$ kojoj su komponente inkluzije, te je ona očito monomorfizam. Stoga je Q podobjekt od P u kategoriji $\hat{\mathcal{D}}$.

Obratno, ako je $\theta\colon R \to P$ monomorfizam u $\hat{\mathcal{D}}$, tada je za svaki objekt C iz $\mathcal{D}$ funkcija $\theta_C\colon RC \to PC$ injekcija. To slijedi iz činjenice da se u kategoriji funktora limesi računaju po točkama, te da je u bilo kojoj kategoriji morfizam $A \xrightarrow{f} B$ monomorfizam ako i samo ako je donji dijagram pullback:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

[9]Eng. *subobject classifier*.
[10]Eng. *well-powered*.

Naravno, dualna tvrdnja vrijedi i za epimorfizme. Označimo sa QC sliku od θ_C; na očiti način Q postaje podfunktor od P, te je ekvivalentan sa R kao podobjekt od P. Drugim riječima, svaki podobjekt funktora u $\hat{\mathcal{D}}$ ekvivalentan je s nekim podfunktorom tog funktora.

Definicija 2.4.6. **Sito**[11] *na objektu C kategorije $\mathbf{C}$ je skup S morfizama s kodomenom C koji ima svojstvo da za svaki $f \in S$ i morfizam h vrijedi $fh \in S$, ukoliko je kompozicija fh dobro definirana.*

Ako je Q podfunktor hom-funktora $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, C)$ tada možemo konstruirati sito na C tako da stavimo $S := \{f : A \to C : A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ f \in QA\}$. Obratno, za dano sito S na C i $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ stavimo $QA := \{f : A \to C : f \in S\}$; time smo dobro definirali podfunktor Q hom-funktora $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, C)$. Štoviše, ove dvije konstrukcije su međusobno inverzne, pa stoga možemo identificirati sita na C i podfunktore od $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, C)$.

Teorem 2.4.7. *Ako je $\mathcal{D}$ mala kategorija, tada kategorija $\hat{\mathcal{D}} = [\mathcal{D}^{op}, \mathbf{Set}]$ ima klasifikator podobjekata.*

Dokaz. Definirajmo funktor $\Omega : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$ na sljedeći način: za $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ neka je ΩC skup svih sita na C; za morfizam $C' \xrightarrow{g} C$ u $\mathcal{D}$ definirajmo funkciju $\Omega g : \Omega C \to \Omega C'$ djelovanjem $S \mapsto \{h : gh \in S\}$. Direktno se provjeri da je Ω dobro definiran funktor.

Terminalni objekt I u $\hat{\mathcal{D}}$ je očito konstatni funktor u $\{0\}$. Definirajmo prirodnu transformaciju $t : I \to \Omega$ tako da za $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ stavimo $t_C(0)$ da bude maksimalno sito na C, tj. sito koje se sastoji od svih morfizama koji imaju kodomenu C. Pokažimo da je tako definirani $t : I \to \Omega$ klasifikator podobjekata u $\hat{\mathcal{D}}$.

Neka je $Q \subseteq P$ u $\hat{\mathcal{D}}$. Za $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ i $x \in PC$ stavimo

$$\varphi_C(x) := \{f : A \to C : A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ (Pf)(x) \in QA\}. \tag{2.5}$$

Tada je $\varphi : P \to \Omega$ dobro definirana prirodna transformacija, te je $\varphi_C(x)$ maksimalno sito ako i samo ako je $x \in QC$. To upravo znači da je dijagram funktora

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[d, "t"] \\ P \arrow[r, "\varphi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

po komponentama pullback u $\mathbf{Set}$, dakle pullback u $\hat{\mathcal{D}}$. Ako je $\theta : P \to \Omega$ neka druga prirodna transformacija za koju je taj dijagram pullback, tada za bilo koji $f : A \to C$ i bilo koji $x \in PC$ vrijedi $(Pf)(x) \in QA$ ako i samo ako je $\theta_A((Pf)(x))$ maksimalno sito na A, što je zbog prirodnosti od θ ekvivalentno s činjenicom da je skup $\{h : fh \in \theta_C(x)\}$ maksimalno sito na A. Zadnji uvjet je očito ekvivalentan s činjenicom $f \in \theta_C(x)$, čime smo pokazali da i θ zadovoljava relaciju (2.5), tj. $\theta = \varphi$. □

[11] Eng. *sieve*.

2.4.3. Snopovi skupova čine elementarne topose

Definicija 2.4.8. **Elementarni topos** *(ili kraće,* **topos***) je konačno potpuna i konačno kopotpuna, Kartezijevo zatvorena kategorija koja ima klasifikator podobjekata.*

Primjer 2.4.9. Kategorije **Set** i **FinSet** su elementarni toposi. Iz korolara 1.3.45 i teorema 2.4.3 i 2.4.7 odmah slijedi da je za svaku malu kategoriju C, kategorija $\hat{C}$ elementarni topos. Posebno, za svaki topološki prostor X, kategorija $\mathbf{PSh}(X)$ je elementarni topos.

Propozicija 2.4.10. *Neka je F snop i P predsnop skupova nad X. Tada je predsnop F^P definiran sa (2.4) snop skupova nad X. Posebno, kategorija* $\mathbf{Sh}(X)$ *je Kartezijevo zatvorena.*

Dokaz. Ukoliko pažljivo raspišemo definiciju (2.4) u našem slučaju, dobijemo da za otvoren podskup $U \subseteq X$ vrijedi (do na određenu prirodnu identifikaciju)

$$F^P(U) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(X)}(P|_U, F|_U),$$

te je za otvorene podskupove $V \subseteq U$ od X i $\alpha\colon P|_U \to F|_U$ restrikcija $\alpha|_V\colon P|_V \to F|_V$ dana na očiti način. Iz tog opisa, lako se provjeri po definiciji da je F^P snop, koristeći činjenicu da je F snop. □

Propozicija 2.4.11. *Predsnop Ω nad X konstruiran u dokazu teorema 2.4.7 je snop skupova nad X. Posebno, $t\colon I \to \Omega$ je klasifikator objekata u* $\mathbf{Sh}(X)$.

Dokaz. Za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$ (do na određenu prirodnu identifikaciju) vrijedi $\Omega U = \{W \subseteq U\colon W \text{ otvoren u } X\}$, dok morfizam $V \hookrightarrow U$ u $\mathbf{Ouv}(X)$ inducira preslikavanje $\Omega U \to \Omega V$ dano s $W \mapsto W \cap V$. Direktno po definicji sada slijedi da je Ω separiran, i epipredsnop. □

Teoremi 2.1.19 i 2.1.20 i propozicije 2.4.10 i 2.4.11 nam daju osnovni rezultat ovog odjeljka:

Teorem 2.4.12. *Za svaki topološki prostor X, kategorija* $\mathbf{Sh}(X)$ *je elementarni topos.*

Elementarni toposi imaju razna korisna svojstva, primjerice, može se dokazati da je svaki elementarni topos balansirana kategorija, što je još jedna odlika kategorije **Set**. Nadalje, može se pokazati da u elementarnom toposu imamo jedinstvenu do na izomorfizam mono-epi faktorizaciju, te da nije nužno zahtijevati konačnu kopotpunost—ona se može dokazati. Vidi [23, IV].

Proučavanje kategorija snopova na topološkim prostorima i njihovih generalizacija je s vremenom preraslo u proučavanje toposa. Mnoga logička svojstva se odražavaju u klasifikatoru podobjekata danog toposa. U nekim okolnostima, toposi mogu pružiti alternativan pogled na fundiranje matematike i teorije skupova. Npr. korištenje metode *forsiranja* za dokazivanje nezavisnosti hipoteze kontinuuma o ostalim aksiomima **ZFC** teorije skupova može se zgodno opisati u terminima konstrukcija na toposima. Također, pogodno odabrani toposi mogu zamijeniti kategoriju **Set** kao "osnovnu" kategoriju matematike.

2.5. Snopovi na sajtu

U ovom poglavlju ćemo definirati pojam snopa na kategorijama koje ne dolaze nužno od otvorenih skupova topološkog prostora. Poopćiti ćemo pojam "topologije" na kategoriji. A. Grothendieck je ranih 1960-ih uočio da je za to poopćenje prirodnije umjesto otvorenog skupa aksiomatizirati pojam pokrivača.

Definicija 2.5.1. Grothendieckova predtopologija[12] *na kategoriji C je zadana sljedećim podacima: Svakom objektu U kategorije C pridružena je kolekcija nekih skupova oblika $\{U_i \to U : i \in I\}$. Svaki takav skup zovemo* **pokrivač** *od U, te zahtjevamo sljedeće aksiome:*

(i) Ako je $V \to U$ izomorfizam, onda je $\{V \to U\}$ pokrivač od U.

(ii) Ako je $\{U_i \to U : i \in I\}$ pokrivač od U i $V \to U$ morfizam, tada postoji pullback $U_i \times_U V$ za sve $i \in I$, i projekcije $\{U_i \times_U V \to V : i \in I\}$ čine pokrivač od V.

(iii) Ako je $\{U_i \to U : i \in I\}$ pokrivač od U, te ako za svaki $i \in I$ imamo $\{V_{ij} \to U_i : j \in J_i\}$ pokrivač od U_i, tada kompozicije $\{V_{ij} \to U : i \in I, j \in J_i\}$ čine pokrivač od U.

Kategoriju zajedno sa Grothendieckovom predtopologijom na njoj zovemo **sajt**[13].

Napomena 2.5.2. Svojstva (ii) i (iii) direktno povlače sljedeće: ako su $\{U_i \to U : i \in I\}$ i $\{V_j \to U : j \in J\}$ pokrivači od U, tada postoji pullback $U_i \times_U V_j$ za sve $i \in I, j \in J$, te je skup $\{U_i \times_U V_j \to U : i \in I, j \in J\}$ pokrivač od U.

Primjer 2.5.3. Za svaki topološki prostor X, kategorija $\mathbf{Ouv}(X)$ je sajt, uz standardnu definiciju pokrivača otvorenog skupa. Zovemo ga ***maleni sajt pridružen*** X.

Primjer 2.5.4. Na kategoriji **Top** definirajmo da je pokrivač topološkog prostora X svaki skup $\{X_i \to X : i \in I\}$ istovremeno otvorenih, neprekidnih i injektivnih funkcija, kojima je unija slika jednaka X. Dobiveni sajt zovemo ***veliki sajt***.

Slično, umjesto istovremeno otvorenih, neprekidnih i injektivnih funkcija možemo gledati lokalne homeomorfizme—za tako dobivenu Grothendieckovu predtopologiju kažemo da je ***globalna étalna*** topologija na **Top**.

[12] U literaturi se ovako definiran pojam negdje zove *baza topologije* (npr. u [23, III.2]), ili *Grothendieckova topologija* (npr. u [32, 2.3]).

[13] Eng. *site*. Najčešće se zbog tehničkih razloga zahtjeva da sajt bude mala kategorija, posebno u slučajevima kada gledamo kategorije (pred)snopova na tom sajtu.

Definicija 2.5.5. *Predsnop F na sajtu C (tj. kontravarijantni funktor $F\colon C^{op} \to$ **Set**) je* **separiran**, *ako za svaki pokrivač $\{U_i \to U : i \in I\}$ i $a, b \in FU$ takve da se njihove slike u FU_i podudaraju za sve $i \in I$, nužno slijedi $a = b$.*

Predsnop F je **snop**, *ako vrijedi sljedeće. Neka su nam dani pokrivač $\{U_i \to U : i \in I\}$ i $a_i \in FU_i$ za $i \in I$. Za $i, j \in I$ neka su $p_1\colon U_i \times_U U_j \to U_i$ i $p_2\colon U_i \times_U U_j \to U_j$ projekcije pullback-a. Ako vrijedi $(Fp_1)(a_i) = (Fp_2)(a_j)$ za sve $i, j \in I$, tada postoji jedinstven $a \in FU$ kojemu je slika u FU_i jednaka upravo a_i, za sve $i \in I$.*

Uočimo da je svaki snop nužno separiran. ***Morfizam*** snopova je prirodna tranformacija između njih kao funktora. Analogno se definira snop (Abelovih) grupa, prstenova ili modula na sajtu. Te se definicije na malenim sajtovima očito podudaraju s definicijama iz odjeljka 2.1. Uočimo još da se i snop na sajtu može definirati "dijagramski": Predsnop F je snop ako i samo ako za svaki pokrivač $\{U_i \to U : i \in I\}$ vrijedi da je donji dijagram ujednačitelj:

$$FU \longrightarrow \prod_{i\in I} FU_i \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j)\,.$$

Primjer 2.5.6. Svaki kontravarijantni hom-funktor $\mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Set}$ je snop na velikom sajtu.

Sličan, ali opet drugačiji pristup Grothendieckovoj (pred)topologiji pomoću sita, odnosno podfunktora kontravarijantnih hom-funktora može se vidjeti u [23, III.2]). Definirani pojmovi ovdje i tamo nisu u potpunosti ekvivalentni, no njihov odnos je sličan kao odnos pojmova "baza topologije" i "topologija" u klasičnom smislu.

Limes snopova na sajtu postoji, i jednak je njihovom limesu predsnopova (po točkama). Na kategoriji predsnopova na sajtu može se također definirati snopifikacija (i prije toga tzv. *plus konstrukcija*) koja je lijevi adjungirani funktor inkluziji snopova na tom sajtu u predsnopove, zadovoljava univerzalno svojstvo, te čuva sve kolimese i konačne limese. Vidi [23, III.4-6].

Ponekad različite Grothendieckove predtopologije (pa čak i neekvivalentne u nekom smislu) na istoj kategoriji definiraju iste snopove. Iz toga možemo naslutiti da su snopovi na sajtu fundamentalniji pojam od samog sajta.

Definicija 2.5.7. *Kategoriju ekvivalentnu kategoriji svih snopova skupova na nekom sajtu zovemo* **Grothendieckov topos**.

U [23, III.6-7] je dokazan sljedeći teorem, koji je poopćenje teorema 2.4.12:

Teorem 2.5.8. *Svaki Grothendieckov topos je elementarni topos.*

Dokaz tog teorema u grubim crtama prati dokaz teorema 2.4.12, no tehnički je dosta zamršeniji. Obrat teorema 2.5.8 ne vrijedi općenito, no *Giraudov teorem* daje nužne i dovoljne uvjete kada je neka kategorija Grothendieckov topos. Iskaz i dokaz Giraudovog teorema se može vidjeti u [23, Appendix] ili [3, 3.6].

2.6. Lokalno prstenovani prostori i sheme

Osim već spomenute primjene snopova u matematičkoj logici (u prethodna dva odjeljka), snopovi su jako važan pojam u algebarskoj geometriji. Koriste se kao "strukturna informacija" u samoj definiciji sheme, koja je osnovno poopćenje variateta. Snopovi i njihove kohomologije imaju važnu ulogu u klasifikaciji variateta.

U ovom odjeljku svi prstenovi su komutativni prstenovi s jedinicom, a homomorfizmi prstenova čuvaju jedinice.

Neka je A prsten (komutativan, s jedinicom). Definirajmo da je **Spec** A skup svih prostih ideala u A, te za bilo koji ideal $\mathfrak{a}$ u A stavimo da je $V(\mathfrak{a})$ skup svih prostih ideala u A koji sadrže $\mathfrak{a}$. Lako se vidi da postoji jedinstvena topologija na skupu **Spec** A u kojoj su zatvoreni skupovi točno $V(\mathfrak{a})$, za sve ideale $\mathfrak{a}$ u A; tu topologiju zovemo ***topologija Zariskog*** na **Spec** A. Time skup **Spec** A postaje kompaktan topološki prostor.

Za $\mathfrak{p} \in$ **Spec** A neka je $A_\mathfrak{p}$ lokalizacija od A u prostom idealu $\mathfrak{p}$ (vidi [16, III.4]). Za otvoren skup $U \subseteq$ **Spec** A definirajmo $\mathcal{O}U$ da bude skup svih funkcija $s\colon U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$ (kodomena je disjunktna unija) za koje je $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$ za sve $\mathfrak{p} \in U$, te za koje vrijedi sljedeći uvjet: za svaki $\mathfrak{p} \in U$ postoji okolina $V \subseteq U$ od $\mathfrak{p}$ i elementi $a, f \in A$ tako da za svaki $\mathfrak{q} \in V$ imamo $f \notin \mathfrak{q}$ i $s(\mathfrak{q}) = a/f \in A_\mathfrak{q}$ (drugim riječima, s je lokalno kvocijent elemenata prstena A). Očito je $\mathcal{O}$ snop prstenova (komutativnih, s jedinicom) na **Spec** A, te ga zovemo ***strukturni snop*** pridružen prstenu A.

Definicija 2.6.1. Spektar *prstena A je par topološkog prostora* **Spec** A *opskrbljenog topologijom Zariskog, i strukturnog snopa $\mathcal{O}$ pridruženim prstenu A.*

Za bilo koji $f \in A$, označimo s (f) glavni ideal generiran s f, te $D(f)$ neka bude otvoren skup $($**Spec** $A) \setminus V((f))$. Nije teško vidjeti da je $\{D(f)\colon f \in A\}$ baza topologije Zariskog na **Spec** A. Mogu se pokazati sljedeće činjenice:

(a) Za svaki $\mathfrak{p} \in$ **Spec** A imamo izomorfizam prstenova $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}$ vlati strukturnog snopa u točki $\mathfrak{p}$ i lokalizacije prstena u prostom idealu $\mathfrak{p}$.

(b) Za svaki $f \in A$ imamo izomorfizam prstenova $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$, gdje je A_f lokalizacija prstena A po multiplikativno zatvorenom skupu $\{f^n\colon n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. Posebno (za $f = 1$), vrijedi $\Gamma\mathcal{O} \cong A$.

Dokazi se mogu vidjeti u [14, II.2]; mi ćemo ih ovdje izostaviti budući da su tehničke naravi. Drugi način da se definira strukturni snop sprektra prstena jest da se prvo definira na baznim otvorenim skupovima kao u svojstvu (b). Zatim se uoči da tako definiran predsnop zadovoljava svojstvo slično snopovskom uvjetu, te se pomoću toga vidi da se taj predsnop može dodefinirati do snopa na cijeloj topologiji Zariskog. Takva konstrukcija može se vidjeti u [30, V.2.2–3] ili [13, 2].

Definicija 2.6.2. **Prstenovani prostor** *je uređen par* (X, O_X) *topološkog prostora* X *i snopa prstenova* O_X *nad* X*, kojeg zovemo* **strukturni snop**. **Morfizam** *prstenovanih prostora* (X, O_X) *i* (Y, O_Y) *je uređen par* $(f, f^\sharp)$*, gdje je* $f\colon X \to Y$ *neprekidno preslikavanje, te* $f^\sharp\colon O_Y \to f_*O_X$ *morfizam snopova*[14] *nad* Y.

Time smo dobili kategoriju prstenovanih prostora, u kojoj ćemo uočiti jednu nama zanimljivu potkategoriju. Prije toga uvedimo pojam lokalnog prstena. Prsten je ***lokalan***, ako ima jednistveni maksimalni ideal, tj. maksimalni ideal koji sadrži sve druge prave ideale. To je očito ekvivalentno s činjenicom da svi neinvertibilni elementi čine ideal, odnosno da je zbroj dva neinvertibilna elementa opet neinvertibilan. Homomorfizam između lokalnih prstenova je ***lokalan homomorfizam***, ako je praslika maksimalnog ideala maksimalan ideal.

Definicija 2.6.3. *Prstenovani prostor* (X, O_X) *je* **lokalno prstenovani prostor***, ako je za svaki* $x \in X$ *vlat* $O_{X,x}$ *u točki* x *lokalan prsten.* **Morfizam** *lokalno prstenovanih prostora* (X, O_X) *i* (Y, O_Y) *je morfizam* $(f, f^\sharp)$ *istih prstenovanih prostora, takav da je za svaki* $x \in X$ *inducirani homomorfizam na vlatima* $f^\sharp_{f(x)}\colon O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ *lokalni homomorfizam lokalnih prstenova.*

Navedeni inducirani homomorfizam je kompozicija:

$$O_{Y,f(x)} \to (f_*O_X)_{f(x)} = \operatorname*{colim}_{V \ni f(x)} O_X(f^{-1}(V)) \to \operatorname*{colim}_{U \ni x} O_X U = O_{X,x}.$$

Napomena 2.6.4. Lokalno prstenovani prostori i njihovi morfizmi čine kategoriju koja jest potkategorija, ali nije puna potkategorija kategorije svih prstenovanih prostora.

Primjer 2.6.5. Spektar prstena A je lokalno prstenovan prostor, budući da je $O_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}$ za svaki $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spec}\, A$, gdje je O strukturni snop tog spektra (poznata je činjenica da lokalizacijom prstena po prostom idealu dobijemo lokalan prsten, vidi [16, III.4]).

Definicija 2.6.6. **Afina shema** *je lokalno prstenovan prostor koji je izomorfan (kao lokalno prstenovan prostor) spektru nekog prstena.* **Shema** *je lokalno prstenovan prostor* (X, O_X) *za kojeg vrijedi da svaki* $x \in X$ *ima okolinu* U *takvu da je* $(U, O_X|_U)$ *afina shema. Tu okolinu zovemo* **afinom okolinom** *točke* x. **Morfizam** *shema je morfizam odgovarajućih lokalno prstenovanih prostora.*

Način na koji sheme poopćuju variatete se može vidjeti u [14, II.2]. Ukratko, konstruira se pun i vjeran funktor iz kategorije variateta nad poljem K u kategoriju kriški shema nad K, gdje se polje K na trivijalan način shvati kao shema.

[14]Za neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$, te F i G snopove nad X i Y redom, ***komorfizam*** snopova $F \to G$ nad f je morfizam snopova $G \to f_*F$. Oni su u prirodnoj bijekciji sa morfizmima $f^{-1}G \to F$, zbog adjunkcije $f^{-1} \dashv f_*$. Dakle, morfizam $(f, f^\sharp)\colon (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ prstenovanih prostora se sastoji od morfizma $f\colon X \to Y$ topoloških prostora, i komorfizma $f^\sharp\colon O_X \to O_Y$ nad f snopova prstenova.

Spektar se može dodefinirati na morfizmima do kontravarijantnog funktora iz kategorije **CRing** komutativnih prstenova s jedinicom u kategoriju afinih shema, te je tako definiran pun, vjeran i esencijalno surjektivan. Stoga je kategorija $\mathbf{CRing}^{op}$ ekvivalentna kategoriji afinih shema. Za detalje vidi [13, 2], a za neke osnovne korake u konstrukciji [14, II.2].

Definicija 2.6.7. *Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ prstenovani prostor.* **Snop $\mathcal{O}_X$-modula** *(ili* **$\mathcal{O}_X$-modul***) je snop F Abelovih grupa nad X takav da je za svaki otvoreni podskup $U \subseteq X$ grupa FU zapravo modul nad prstenom $\mathcal{O}_X U$, tako da je za sve otvorene podskupove $V \subseteq U$ od X homomorfizam grupa $FU \to FV$ usklađen sa homomorfizmom prstenova $\mathcal{O}_X U \to \mathcal{O}_X V$ (tj. za sve $r \in \mathcal{O}_X U$ i $a \in FU$ vrijedi $(r \cdot a)|_V = r|_V \cdot a|_V$).* **Morfizam** *$\mathcal{O}_X$-modula je morfizam snopova Abelovih grupa koji je u svakoj komponenti homomorfizam modula.*

Trivijalno je snop $\mathcal{O}_X$ prstenova $\mathcal{O}_X$-modul. Nije teško vidjeti da je kategorija svih snopova $\mathcal{O}_X$-modula Abelova, te ju označavamo s ${}_{\mathcal{O}_X}\mathbf{Mod}$.

Napomena 2.6.8. Ako je $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ morfizam prstenovanih prostora, tada za svaki $\mathcal{O}_X$-modul F direktna slika f_*F ima prirodnu strukturu $\mathcal{O}_Y$-modula, preko komorfizma $f^\sharp$. Dakle, imamo ***funktor direktne slike*** $f_*\colon {}_{\mathcal{O}_X}\mathbf{Mod} \to {}_{\mathcal{O}_Y}\mathbf{Mod}$. Međutim, za neki $\mathcal{O}_Y$-modul G snop Abelovih grupa $f^{-1}G$ nad X nema prirodnu strukturu $\mathcal{O}_X$-modula, pa stoga definiramo ***inverznu sliku*** $\mathcal{O}_Y$-modula G da bude $\mathcal{O}_X$-modul

$$f^*G := f^{-1}G \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X,$$

gdje se tenzorski produkt snopova radi po komponentama. Time smo dobili ***funktor inverzne slike*** $f^*\colon {}_{\mathcal{O}_Y}\mathbf{Mod} \to {}_{\mathcal{O}_X}\mathbf{Mod}$, te se pokaže da vrijedi adjunkcija $f^* \dashv f_*$, tj. postoji izomorfizam

$$\mathrm{Hom}_{{}_{\mathcal{O}_X}\mathbf{Mod}}(f^*G, F) \cong \mathrm{Hom}_{{}_{\mathcal{O}_Y}\mathbf{Mod}}(G, f_*F)$$

koji je prirodan u F i G. Za više detalja vidi [13, 7].

Neka je A prsten i M modul nad A. Definirati ćemo $\mathcal{O}_{\mathbf{Spec}\,A}$-modul ***asociran*** modulu M nad $\mathbf{Spec}\,A$, u oznaci $\tilde{M}$, na sljedeći način. Za bilo koji otvoren podskup $U \subseteq \mathbf{Spec}\,A$ definirajmo $\tilde{M}U$ da bude skup svih funkcija $s\colon U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} M_\mathfrak{p}$ (kodomena je disjunktna unija), gdje je $M_\mathfrak{p}$ lokalizacija modula[15] M u prostom idealu $\mathfrak{p}$ u A, te za koje je $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$ za sve $\mathfrak{p} \in U$, i vrijedi sljedeći uvjet: za svaki $\mathfrak{p} \in U$ postoji okolina $V \subseteq U$ od $\mathfrak{p}$ i elementi $m \in M, f \in A$ tako da za svaki $\mathfrak{q} \in V$ imamo $f \notin \mathfrak{q}$ i $s(\mathfrak{q}) = m/f \in M_\mathfrak{q}$. Uz očite restrikcije, $\tilde{M}$ postaje $\mathcal{O}_{\mathbf{Spec}\,A}$-modul.

Definicija 2.6.9. *Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ shema. Snop $\mathcal{O}_X$-modula F je* **kvazikoherentan***, ako postoji pokrivač $\{U_i \colon i \in I\}$ od X takav da za sve $i \in I$ postoji prsten A_i tako da je*

[15] Lokalizacija modula po prostom idealu se može napravi potpuno analogno kao i lokalizacija komutativnog prstena po prostom idealu. Alternativno, na lokalizaciju modula možemo gledati kao na tenzorski produkt A-modula: $M_\mathfrak{p} = M \otimes_A A_\mathfrak{p}$.

$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \cong (\mathbf{Spec}\, A_i, \mathcal{O}_{\mathbf{Spec}\, A_i})$*, te postoji modul* M_i *nad* A_i *za kojeg je* $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$*. Nadalje, snop* $\mathcal{O}_X$*-modula* $\mathcal{F}$ *je* **koherentan***, ako je kvazikoherentan i u definiciji kvazikoherentnosti možemo izabrati module* M_i *koji su konačnogenerirani* A_i*-moduli.*

Primjer 2.6.10. Strukturni snop svake sheme je koherentan.

U [14, II.5] je pokazano da za prsten A pridruživanje $M \mapsto \tilde{M}$ daje ekvivalenciju kategorije ${}_A\mathbf{Mod}$ i kategorije kvazikoherentnih $\mathcal{O}_{\mathbf{Spec}\, A}$-modula.

3. Kolančani kompleksi i simplicijalni skupovi

U ovom poglavlju ćemo uvesti osnovne pojmove i definicije homološke algebre. Raditi ćemo u Abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$, ukoliko nije na konkretnim mjestima posebno naglašeno drugačije.

3.1. Kolančani kompleksi i kohomologije

3.1.1. Kategorija (ko)lančanih kompleksa

Definicija 3.1.1. **Lančani kompleks** $C_\bullet$ *u Abelovoj kategoriji* $\mathcal{A}$ *je kolekcija objekata* $\{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *i morfizama* $\{d_n : n \in \mathbb{Z}\}$*:*

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots,$$

za koje vrijedi $d_n \circ d_{n+1} = 0$ *za sve* $n \in \mathbb{Z}$*. Morfizme* d_n *zovemo* **morfizmima ruba**[1] *ili* **diferencijalima** *lančanog kompleksa* $C_\bullet$*.*

Primjer 3.1.2. Svaki egzaktni niz možemo shvatiti kao lančani kompleks, "dodavajući nul-objekte" na lijevoj i desnoj strani ako je potrebno.

Morfizam lančanih kompleksa $C_\bullet$ i $D_\bullet$ je familija morfizama $\{f_n : C_n \to D_n : n \in \mathbb{Z}\}$, za koje dijagram

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & D_n \arrow[r] & D_{n-1} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

komutira, za sve $n \in \mathbb{Z}$. Morfizmi koji u tom dijagramu nisu naznačeni su naravno odgovarajući morfizmi ruba pripadnih lančanih kompleksa.

Time smo na očiti način dobili kategoriju svih lančanih kompleksa u kategoriji $\mathcal{A}$, koju označavamo sa $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. Lako se vidi da je to Abelova kategorija, u kojoj se sve potrebne operacije mogu napraviti "po komponentama".

[1] Eng. *boundary maps*. Često umjesto $d_n \circ d_{n+1} = 0$ pišemo izostavljajući indekse $d^2 = 0$, ukoliko ne postoji opasnost da dođe do zabune.

Lančani kompleks $C_\bullet$ je ***odozgo ograničen*** (resp. ***odozdo ograničen***), ako postoji $n \in \mathbb{Z}$ tako da je $C_k = 0$ za sve $k > n$ (resp. $k < n$). Lančani kompleks je ***ograničen***, ako je odozgo i odozdo ograničen.

Dualizirajući prethodne pojmove, dolazimo do sljedeće definicije:

Definicija 3.1.3. Kolančani kompleks $C^\bullet$ *u Abelovoj kategoriji* $\mathcal{A}$ *je kolekcija objekata* $\{C^n : n \in \mathbb{Z}\}$ *i morfizama* $\{d^n : n \in \mathbb{Z}\}$*:*

$$\dots \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots,$$

za koje vrijedi $d^n \circ d^{n-1} = 0$ *za sve* $n \in \mathbb{Z}$*. Morfizme* d_n *zovemo* **morfizmima koruba**[2] *ili* **diferencijalima** *kolančanog kompleksa* $C^\bullet$*.*

Analogno se definiraju morfizmi kolančanih kompleksa, Abelova kategorija $\mathbf{coCh}(\mathcal{A})$ svih kolančanih kompleksa kategorije $\mathcal{A}$, te (odozgo/odozdo) ograničenost kolančanih kompleksa.

Napomena 3.1.4. Od svakog lančanog kompleksa $C_\bullet$ možemo dobiti kolančani kompleks $C^\bullet$, ukoliko za sve $n \in \mathbb{Z}$ stavimo $C^n := C_{-n}$ i $d^n := d_{-n}$. Takvo pridruživanje daje izomorfizam kategorija $\mathbf{Ch}(\mathcal{A}) \cong \mathbf{coCh}(\mathcal{A})$.

Zbog napomene 3.1.4 vidimo da je dovoljno u nastavku odlučiti se za proučavanje samo lančanih kompleksa, ili samo kolančanih kompleksa. Mi ćemo izabrati kolančane komplekse, iz razloga što je poznato da kohomologija na kolančanim kompleksima općenito daje bolje rezultate nego homologija na lančanim kompleksima. Ponekad ćemo samo pisati 'kompleks', a podrazumijevati 'kolančani kompleks'.

3.1.2. Kohomologija kolančanih kompleksa

Lema 3.1.5. *Neka je* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *niz u kojem je* $gf = 0$*. Označimo morfizme* $k := \operatorname{Ker} g \colon K \to Y$ *i* $k' := \operatorname{Coker} f \colon Y \to K'$*. Iz definicije (ko)jezgre slijedi da postoje jedinstveni morfizmi* $a \colon X \to K$ *i* $b \colon K' \to Z$ *takvi da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[dr, "b"] & \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "a"'] & Y \arrow[u, "k'"] \arrow[r, "g"] & Z \\ & K \arrow[u, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Tada postoji prirodan izomorfizam objekata $\operatorname{Coker} a \cong \operatorname{Ker} b$*, odnosno možemo ih poistovjetiti.*

[2] Korub ili ***kogranica***, eng. *coboundary*.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je f monomorfizam, a g epimorfizam. Iz tih pretpostavki i formula (1.17) se lako provjeri da je $a = \operatorname{Ker}\varphi$ i $b = \operatorname{Coker}\varphi$, gdje je $\varphi := k'k\colon K \to K'$. Tražena tvrdnja sada slijedi iz svojstava mono-epi faktorizacije od φ.

U općenitom slučaju, zamjenjujući morfizme f i g sa njihovim mono-epi faktorizacijama dobijemo komutativni dijagram

$$
\begin{tikzcd}
 & & K' \arrow[dr, dashed, "b'"'] \arrow[drr, "b"] & & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, "a"'] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, dashed, "a'"] & Y \arrow[u, "k'"'] \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r] & Z, \\
 & & K \arrow[u, "k"'] & &
\end{tikzcd}
$$

gdje je f' monomorfizam, g' epimorfizam, te $\operatorname{Coker} a = \operatorname{Coker} a'$ i $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Ker} b'$. Tražena tvrdnja u ovom općenitom slučaju sada slijedi iz prvog dijela dokaza. □

Definicija 3.1.6. *Neka je $C^\bullet$ kolančani kompleks. Definiramo* **n-tu kohomologiju** *kompleksa $C^\bullet$ (u oznaci $H^n(C^\bullet)$) kao objekt* $\operatorname{Coker} a^{n-1} = \operatorname{Ker} b^n$, *gdje su a^{n-1} i b^n određeni jedinstveno sljedećim komutativnim dijagramom*[3]*:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Coker} d^{n-1} \arrow[dr, "b^n"] & \\
C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[dr, "a^{n-1}"] & C^n \arrow[u] \arrow[r, "d^n"] & C^{n+1} \\
 & \operatorname{Ker} d^n \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Može se vidjeti iz definicija i svojstava mono-epi faktorizacije da je kolančani kompleks $C^\bullet$ egzaktan u C^n ako i samo ako je $H^n(C^\bullet) = 0$. Ponekad se u tom slučaju kaže da je $C^\bullet$ ***acikličan*** u C^n, te da je kolančani kompleks ***acikličan***, ako je acikličan u svakom članu, tj. ako su mu sve kohomologije nul-objekti. Dakle, vidimo da kohomologije na neki način "mjere" koliko je kolančani kompleks "daleko" od egzaktnosti.

Primjer 3.1.7. Za kolančani kompleks $C^\bullet$ u kategoriji ${}_R\mathbf{Mod}$ se lako vidi da za sve $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi relacija $H^n(C^\bullet) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$.

[3] Na isti način definiramo ***n-tu homologiju*** lančanog kompleksa $C_\bullet$ (u oznaci $H_n(C_\bullet)$). U pravilu ćemo govoriti samo o kohomologiji, no teba biti svjestan da dualni pojmovi i rezultati vrijede za homologiju.

Morfizam kompleksa $f\colon C^\bullet \to D^\bullet$ inducira morfizam $H^n(f)\colon H^n(C^\bullet) \to H^n(D^\bullet)$ n-tih kohomologija tih kompleksa:

$$\begin{tikzcd}
C^{n-1} \arrow[rr, "d_C^{n-1}"] \arrow[dr, "a_C"'] \arrow[dd, "f^{n-1}"'] & & C^n \arrow[rr, "d_C^n"] \arrow[dd, "f^n"] & & C^{n+1} \arrow[dd, "f^{n+1}"] \\
& \operatorname{Ker} d_C^n \arrow[ur, "k_C"] \arrow[rr, "c_C"] \arrow[dd, dashed, "\bar{f}^n"] & & \operatorname{Coker} a_C = H^n(C^\bullet) \arrow[dd, dashed, "H^n(f)"] & \\
D^{n-1} \arrow[rr, "d_D^{n-1}"] \arrow[dr, "a_D"'] & & D^n \arrow[rr, "d_D^n"] & & D^{n+1} \\
& \operatorname{Ker} d_D^n \arrow[ur, "k_D"'] \arrow[rr, "c_D"] & & \operatorname{Coker} a_D = H^n(D^\bullet) &
\end{tikzcd}$$

Vrijedi $d_D^n \circ f^n \circ k_C = f^{n+1} \circ d_C^n \circ k_C = 0$, pa univerzalno svojstvo jezgre povlači da postoji jedinstveni $\bar{f}^n\colon \operatorname{Ker} d_C^n \to \operatorname{Ker} d_D^n$ takav da vrijedi $f^n \circ k_C = k_D \circ \bar{f}^n$. Sada računamo:

$$k_D \circ a_D \circ f^{n-1} = d_D^{n-1} \circ f^{n-1} = f^n \circ d_C^{n-1} = f^n \circ k_C \circ a_C = k_D \circ \bar{f}^n \circ a_C,$$

pa jer je k_D monomorfizam, zaključujemo da je $a_D \circ f^{n-1} = \bar{f}^n \circ a_C$. Iskoristimo posljednju jednakost da dobijemo $c_D \circ \bar{f}^n \circ a_C = c_D \circ a_D \circ f^{n-1} = 0$, pa po univerzalnom svojstvu kojezgre postoji jedinstveni morfizam $H^n(f)\colon H^n(C^\bullet) \to H^n(D^\bullet)$ za kojeg je $H^n(f) \circ c_C = c_D \circ \bar{f}^n$. Na taj način, za svaki $n \in \mathbb{Z}$ imamo aditivan funktor $H^n\colon \mathbf{coCh}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

Definicija 3.1.8. *Morfizam kompleksa $f\colon C^\bullet \to D^\bullet$ je* **kvazi-izomorfizam**, *ako su morfizmi $H^n(f)\colon H^n(C^\bullet) \to H^n(D^\bullet)$ izomorfizmi, za sve $n \in \mathbb{Z}$.*

Lema 3.1.9. *Neka je $C^\bullet$ kolančani kompleks. Za svaki $n \in \mathbb{Z}$ postoji jedinstveni morfizam $\tilde{d}^n\colon \operatorname{Coker} d^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^{n+1}$ takav da je dijagram*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d] & C^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & C^{n+2} \arrow[r] & \cdots \\
& & \operatorname{Coker} d^{n-1} \arrow[r, "\tilde{d}^n"] & \operatorname{Ker} d^{n+1} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

komutativan. Nadalje, sljedeći niz je egzaktan:

$$0 \longrightarrow H^n(C^\bullet) \longrightarrow \operatorname{Coker} d^{n-1} \xrightarrow{\tilde{d}^n} \operatorname{Ker} d^{n+1} \longrightarrow H^{n+1}(C^\bullet) \longrightarrow 0\,. \tag{3.1}$$

Dokaz. Egzistencija i jedinstvenost od $\tilde{d}^n$ direktno slijede iz univerzalnog svojstva jezgre i kojezgre. Nadalje, koristeći se univerzalnim svojstvima i mono-epi faktorizacijom od

d^n možemo dobiti sljedeći komutativni dijagram (strelica $\hookrightarrow$ označava monomorfizam, a strelica $\twoheadrightarrow$ epimorfizam):

$$\begin{tikzcd}
H^n(C^\bullet) \arrow[r, hook] & \operatorname{Coker} d^{n-1} \arrow[r, two heads] \arrow[rrd] & \operatorname{Im} d^n \arrow[r, hook] \arrow[rd, hook] & \operatorname{Ker} d^{n+1} \arrow[d, hook] & \\
C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"'] & C^n \arrow[u, two heads] \arrow[ru, two heads] \arrow[rr, "d^n"'] & & C^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"'] & C^{n+2}
\end{tikzcd}$$

Iz tog dijagrama, korištenjem napomene 1.7.6 se lako vidi da je niz (3.1) egzaktan u $H^n(C^\bullet)$ i $\operatorname{Coker} d^{n-1}$, a slično se vidi i egzaktnost u $\operatorname{Ker} d^{n+1}$ i $H^{n+1}(C^\bullet)$. □

Teorem 3.1.10. *Neka je* $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ *kratki egzaktni niz u* $\mathbf{coCh}(\mathcal{A})$. *Tada on inducira sljedeći egzaktni niz (kojeg zovemo* **dugi egzaktni kohomološki niz***):*

$$\ldots \to H^{n-1}(C^\bullet) \to H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet) \to H^n(C^\bullet) \to H^{n+1}(A^\bullet) \to \ldots$$

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{Z}$ imamo kratki egzaktni niz $0 \to A^n \to B^n \to C^n \to 0$ kratki egzaktni niz u $\mathcal{A}$. Iz leme o jezgri (lema 1.7.40), njezinog duala i leme 3.1.9 slijedi da za svaki $n \in \mathbb{Z}$ imamo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Coker} d_A^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{d}_A^n"] & \operatorname{Coker} d_B^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{d}_B^n"] & \operatorname{Coker} d_C^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{d}_C^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_A^{n+1} \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_B^{n+1} \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_C^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

kojemu su oba retka egzaktna , gdje su d_A^n, d_B^n i d_C^n morfizmi koruba redom kompleksa $A^\bullet$, $B^\bullet$ i $C^\bullet$. Iz egzaktnosti niza (3.1) i leme o zmiji (lema 1.7.42) sada slijedi traženi dugi egzaktni kohomološki niz. □

Napomena 3.1.11. Neka je dan morfizam

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & B^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D^\bullet \arrow[r] & E^\bullet \arrow[r] & F^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kratkih egzaktnih nizova u $\mathbf{coCh}(\mathcal{A})$. Prateći konstrukciju pripadnih dugih egzaktnih kohomoloških nizova, te koristeći prirodnost veznog morfizma (lema 1.7.43), vidimo da taj morfizam inducira morfizam između spomenutih dugih egzaktnih kohomoloških nizova. Preciznije, dobijemo komutativan dijagram:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H^{n-1}(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(A^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(B^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}(A^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H^{n-1}(F^\bullet) \arrow[r] & H^n(D^\bullet) \arrow[r] & H^n(E^\bullet) \arrow[r] & H^n(F^\bullet) \arrow[r] & H^{n+1}(D^\bullet) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

3.1.3. Homotopija morfizama kompleksa

Definicija 3.1.12. **Homotopija** $\Sigma\colon \varphi \to \psi$ *između morfizama* $\varphi, \psi\colon C^\bullet \to D^\bullet$ *kompleksa* $C^\bullet$ *i* $D^\bullet$ *(sa morfizmima koruba* d_C^n *i* d_D^n*, redom) je familija morfizama* $\{\Sigma^n\colon C^n \to D^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\begin{tikzcd}
C^{n-1} \arrow[r, "d_C^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "d_C^n"] \arrow[dl, "\Sigma^n"'] \arrow[d, shift right, "\varphi^n"'] \arrow[d, shift left, "\psi^n"] & C^{n+1} \arrow[dl, "\Sigma^{n+1}"] \\
D^{n-1} \arrow[r, "d_D^{n-1}"'] & D^n \arrow[r, "d_D^n"'] & D^{n+1}
\end{tikzcd}$$

takva da vrijedi $\varphi^n - \psi^n = d_D^{n-1}\Sigma^n + \Sigma^{n+1}d_C^n$ *za sve* $n \in \mathbb{Z}$ *(kraće pišemo* $\varphi - \psi = d_D\Sigma + \Sigma d_C$*).*

Morfizmi $\varphi, \psi\colon C^\bullet \to D^\bullet$ *kompleksa su* **homotopni** *(pišemo* $\varphi \simeq \psi$*), ako postoji homotopija između njih.*

Lagano se iz definicije pokaže sljedeća propozicija:

Propozicija 3.1.13. *Relacija* $\simeq$ *na morfizmima između dva kompleksa je relacija ekvivalencije. Štoviše, ta relacija je stabilna na kompoziciju, tj.* $\varphi \simeq \psi$ *povlači* $\phi\varphi \simeq \phi\psi$ *i* $\varphi\theta \simeq \psi\theta$*, čim su kompozicije dobro definirane.*

Ako su $\varphi, \psi, \phi, \theta\colon C^\bullet \to D^\bullet$*, relacije* $\varphi \simeq \psi$ *i* $\phi \simeq \theta$ *povlače* $\varphi + \phi \simeq \psi + \theta$*.*

Propozicija 3.1.14. *Ako su* $\varphi, \psi\colon C^\bullet \to D^\bullet$ *homotopni morfizmi, tada oni induciraju iste morfizme na kohomologijama, tj.* $H^n(\varphi) = H^n(\psi)\colon H^n(C^\bullet) \to H^n(D^\bullet)$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\varphi \simeq 0$ uz homotopiju Σ, tj. $\varphi^n = d_D^{n-1}\Sigma^n + \Sigma^{n+1}d_C^n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker} d_C^n \arrow[r] \arrow[d, "k"] & \operatorname{Coker} a = H^n(C^\bullet) \arrow[ddd, dashed, bend left] \\
C^{n-1} \arrow[ur, "a"] \arrow[r, "d_C^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "d_C^n"] \arrow[dl, "\Sigma^n"'] \arrow[d, "\varphi^n"] & C^{n+1} \arrow[dl, "\Sigma^{n+1}"'] \\
D^{n-1} \arrow[r, "d_D^{n-1}"] \arrow[dr, "b"'] & D^n \arrow[r, "d_D^n"] & D^{n+1} \\
 & \operatorname{Ker} d_D^n \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Coker} b = H^n(D^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Označimo s k jezgru od d_C^n; vrijedi $\varphi^n k = d_D^{n-1}\Sigma^n k$, pa je morfizam kojeg φ^n inducira na $\operatorname{Ker} d_C^n \to \operatorname{Ker} d_D^n$ upravo jednak $b\Sigma^n k$. No, taj morfizam na $\operatorname{Coker} a \to \operatorname{Coker} b$ očito inducira 0, tj. $H^n(\varphi) = 0$. Tvrdnja sada slijedi iz aditivnosti od H^n i propozicije 3.1.13. □

3.2. Klasični derivirani funktori

3.2.1. δ-funktori

Definicija 3.2.1. **(Kovarijantan) kohomološki δ-funktor** *T između Abelovih kategorija $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je familija aditivnih funktora $\{T^n\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ zajedno sa familijom morfizama $\delta^n\colon T^n(C) \to T^{n+1}(A)$ (koje zovemo* **vezni morfizmi** *tog kohomološkog δ-funktora) definiranim za svaki kratki egzaktni niz $0 \to A \to B \to C \to 0$ u $\mathcal{A}$ i za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, tako da vrijede sljedeći uvjeti:*

(a) Za svaki kratki egzaktni niz kao gore imamo **dugi egzaktni niz**

$$0 \to T^0(A) \to T^0(B) \to T^0(C) \xrightarrow{\delta^0} T^1(A) \to T^1(B) \to T^1(C) \xrightarrow{\delta^1} T^2(A) \to \dots$$

(b) Za svaki morfizam $\Big(0 \to A \to B \to C \to 0\Big) \to \Big(0 \to A' \to B' \to C' \to 0\Big)$ kratkih egzaktnih nizova, sljedeći inducirani dijagram je komutativan[4], za svaki $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{array}{ccc} T^n(C) & \longrightarrow & T^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^n(C') & \longrightarrow & T^{n+1}(A') \end{array}$$

Primjer 3.2.2. Iz teorema 3.1.10 i napomene 3.1.11 slijedi da aditivni funktori kohomologije $H^* := \{H^n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ čine kohomološki δ-funktor iz Abelove kategorije $\mathbf{coCh}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ svih kolančanih[5] kompleksa $\ldots \to A^n \to A^{n+1} \to \ldots$ u $\mathcal{A}$ za koje je $A^m = 0$ za sve $m < 0$, u kategoriju $\mathcal{A}$.

Kraće ćemo govoriti δ-funktor, podrazumijevajući da se radi o kohomološkom.

Definicija 3.2.3. **Morfizam** *između δ-funktora T i S je familija prirodnih transformacija $\{T^n \to S^n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ koje komutiraju sa veznim morfizmima tih δ-funktora (tj. induciraju komutativne "ljestve" između dugih egzaktnih nizova od T i S). Kažemo da je δ-funktor T* **univerzalan***, ako za svaki δ-funktor S i prirodnu transformaciju $f^0\colon T^0 \to S^0$ postoji jedinstven morfizam $f\colon T \to S$ δ-funktora koji proširuje f^0.*

Primjer 3.2.4. Za svaki egzaktni funktor F možemo dobiti trivijalan primjer univerzalnog δ-funktora: $T^0 := F$ i $T^n := 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

[4] Ovo svojstvo zovemo ***prirodnost*** veznih morfizama.

[5] Analogno, imamo i Abelovu kategoriju $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ svih lančanih kompleksa $\ldots \to A^{n+1} \to A^n \to \ldots$ u $\mathcal{A}$ za koje je $A^m = 0$ za sve $m < 0$.

3.2.2. Projektivni i injektivni objekti, rezolvente

Prisjetimo se (teorem 1.7.37) da su funktori $\mathrm{Hom}(A,-), \mathrm{Hom}(-,A)$ lijevo egzaktni, za bilo koji objekt A.

Definicija 3.2.5. *Objekt P je* **projektivan***, ako je funktor* $\mathrm{Hom}(P,-)$ *egzaktan. Objekt I je* **injektivan***, ako je funktor* $\mathrm{Hom}(-,I)$ *egzaktan.*

Injektivnost/projektivnost objekata se može karakterizirati "dijagramski"; lako se vidi da vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 3.2.6. *Objekt P je projektivan ako i samo ako za svaki morfizam $P \to X'$ i epimorfizam $X \to X'$ postoji morfizam $P \to X$ tako da prvi od dva donja dijagrama komutira; Objekt I je injektivan ako i samo ako za svaki morfizam $Y' \to I$ i monomorfizam $Y' \to Y$ postoji morfizam $Y \to I$ tako da drugi od dva donja dijagrama komutira:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dashed, "\exists"'] \arrow[dr] & \\ X \arrow[r] & X' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[d, dashed, "\exists"] \\ & & I \end{tikzcd}$$

Nizovi $X \to X' \to 0$ i $0 \to Y' \to Y$ u tim dijagramima su egzaktni.

Definicija 3.2.7. *Kažemo da Abelova kategorija $\mathcal{A}$* **ima dovoljno projektivnih objekata***, ako za svaki objekt A postoji epimorfizam $P \to A$, gdje je P projektivan objekt, odnosno da* **ima dovoljno injektivnih objekata***, ako za svaki objekt A postoji monomorfizam $A \to I$, gdje je I injektivan objekt.*

Egzaktni niz oblika $\ldots \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to A \to 0$ ćemo zvati ***lijeva rezolventa*** (ili ***lijeva rezolucija***) objekta A, a egzaktni niz oblika $0 \to A \to R^0 \to R^1 \to R^2 \to \ldots$ ***desna rezolventa*** (ili ***desna rezolucija***) objekta A.

Lako se vidi da kategorija ima dovoljno projektivnih objekata ako i samo ako za svaki objekt A možemo naći lijevu rezolventu

$$\ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

takvu da je P_n projektivan, za sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$. Takvu rezolventu zovemo ***projektivna rezolventa*** objekta A. Dovoljnost je očigledna, a nužnost slijedi induktivno ponavljajući konstrukciju egzaktnog niza $0 \longleftarrow A \xleftarrow{\epsilon_0} P_0 \xleftarrow{\mathrm{Ker}\,\epsilon_0} \bullet \xleftarrow{\epsilon_1} P_1$, u kojem su ϵ_0 i ϵ_1 dobiveni iz pretpostavke.

Dualno, kategorija ima dovoljno injektivnih objekata ako i samo ako za svaki objekt A možemo naći desnu rezolventu

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \ldots$$

takvu da je I^n injektivan, za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Takvu rezolventu zovemo ***injektivna rezolventa*** objekta A.

Lema 3.2.8. *Neka je zadana* $0 \to B \to I^0 \to \dots$ *injektivna rezolventa od B, bilo koja* $0 \to A \to R^0 \to \dots$ *desna rezolventa od A, te morfizam* $f' \colon A \to B$*. Tada postoji jedinstven do na homotopiju morfizam kompleksa*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & R^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & R^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & R^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"] & \dots \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Dokaz. Morfizam f^0 možemo dobiti iz injektivnosti od I^0 i propozicije 3.2.6. Sada morfizam $R^0 \to R^1$ rastavimo u mono-epi faktorizaciju $R^0 \twoheadrightarrow R \hookrightarrow R^1$, te uočimo da zbog egzaktnosti gornjeg retka vrijedi $\mathrm{Coker}(A \to R^0) = (R^0 \twoheadrightarrow R)$. Kompozicija $A \to R^0 \xrightarrow{f^0} I^0 \to I^1$ je 0, pa postoji morfizam $R \to I^1$ takav da je kompozicija $R^0 \twoheadrightarrow R \to I^1$ jednaka kompoziciji $R^0 \xrightarrow{f^0} I^0 \to I^1$. Morfizam f^1 sada dobijemo iz injektivnosti od I^1 i propozicije 3.2.6. Očito možemo na isti način induktivno nastaviti postupak i dobiti cijeli traženi morfizam kompleksa.

Pretpostavimo da je $\{g^n \colon R^n \to I^n \colon n \in \mathbb{N}_0\}$ familija morfizama koja također zadovoljava tvrdnju lemu. U nastavku ćemo opisati konstrukciju tražene homotopije Σ. Stavimo prvo $\Sigma^0 \colon R^0 \to B$ da bude 0. Morfizam $f^0 - g^0$ pretkomponiran sa $A \to R^0$ očito daje 0, pa se faktorizira kao $R^0 \twoheadrightarrow R \to I^0$. Injektivnost od I^0 nam daje $\Sigma^1 \colon R^1 \to I^0$. Pretpostavimo sada da smo za neko $n \in \mathbb{N}$ našli Σ^{n-1} i Σ^n kao u dijagramu

$$\begin{tikzcd} R^{n-2} \arrow[r, "d_R^{n-2}"] & R^{n-1} \arrow[r, "d_R^{n-1}"] \arrow[dl, "\Sigma^{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f^{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g^{n-1}"] & R^n \arrow[r, "d_R^n"] \arrow[dl, "\Sigma^n"'] \arrow[d, shift right, "f^n"'] \arrow[d, shift left, "g^n"] & R^{n+1} \\ I^{n-2} \arrow[r, "d_I^{n-2}"'] & I^{n-1} \arrow[r, "d_I^{n-1}"'] & I^n \arrow[r, "d_I^n"'] & I^{n+1} \end{tikzcd}$$

(za $n = 1$ umjesto R^{-1} i I^{-1} imamo A i B), tako da vrijedi $f^{n-1} - g^{n-1} = d_I^{n-2}\Sigma^{n-1} + \Sigma^n d_R^{n-1}$. Lako se može vidjeti da morfizam $-d_I^{n-1}\Sigma^n + f^n - g^n$ pretkomponiran sa d_R^{n-1} daje 0, stoga analogno kao prije koristeći mono-epi faktorizaciju od $R^n \to R^{n+1}$ i injektivnost od I^n dobivamo traženi $\Sigma^{n+1} \colon R^{n+1} \to I^n$. Time smo induktivno konstruirali traženu homotopiju. $\square$

Napomena 3.2.9. Uočimo da u dokazu leme 3.2.8 nismo koristili da je $0 \to B \to I^0 \to \dots$ injektivna rezolventa, već slabiji uvjet—da je kompleks (ne nužno egzaktan) u kojemu je I^n injektivan objekt, za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

3.2.3. Desni derivirani funktori

Neka je $\mathcal{A}$ Abelova kategorija koja ima dovoljno injektivnih objekata, $\mathcal{B}$ Abelova kategorija, te $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lijevo egzaktni funktor. Za svaki objekt A iz $\mathcal{A}$ izaberimo neku injektivnu rezolventu $0 \to A \to I^0 \to I^1 \to \dots$ (često se piše kraće $0 \to A \to I^\bullet$). Označimo sa $FI^\bullet$ kompleks $0 \to FI^0 \to FI^1 \to FI^2 \to \dots$, te za $n \in \mathbb{N}_0$ označimo $R^nF(A) := H^n(FI^\bullet)$. Djelovanje od R^nF na morfizmima se lako definira koristeći lemu 3.2.8 i propoziciju 3.1.14. Na taj način smo dobili aditivan funktor $R^nF\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Definicija 3.2.10. *Funktor R^nF definiran u prethodnoj diskusiji zovemo* n**-ti desni derivirani funktor** *(ili* n**-ti desni izvedeni funktor***) funktora F.*

Uočimo da različiti izbori injektivnih rezolventi daju prirodno izomorfne desne derivirane funktore od F. To se lako vidi primjenjujući lemu 3.2.8 na $1_A\colon A \to A$ u oba smjera između dviju injektivnih rezolventi od A, te zatim koristeći funktorijalnost od F i propoziciju 3.1.14.

Propozicija 3.2.11. *Vrijedi $R^0F \cong F$. Ako je F egzaktan, tada je $R^nF = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Jer je F lijevo egzaktan, egzaktnost niza $0 \to A \to I^0 \to I^1$ povlači egzaktnost niza $0 \to FA \to FI^0 \to FI^1$. Iz toga lako slijedi $R^0F(A) = H^0(0 \to FI^0 \to FI^1) \cong FA$. Lako se vidi i odgovarajuća tvrdnja za morfizme.

Ako je dodatno F i desno egzaktan, tada je cijeli niz $0 \to FA \to FI^0 \to FI^1 \to \dots$ egzaktan, pa je niz $0 \to FI^0 \to FI^1 \to \dots$ egzaktan svuda osim možda u FI^0. No tada su mu sve kohomologije jednake 0, osim možda nulte. □

Lema 3.2.12 (Lema o potkovi[6])**.** *Neka je dan dijagram oblika*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \dots \\
 & A \arrow[d, "g"'] & & & \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r, "\epsilon''"] \arrow[d] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & \dots \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

[6] Eng. *Horseshoe lemma.*

u kojem je stupac egzaktan, a reci injektivne rezolvente, koje označimo s $0 \to A' \to I^\bullet$ *i* $0 \to A'' \to J^\bullet$ *redom, te stavimo* $K^n := I^n \oplus J^n$ *za sve* $n \in \mathbb{N}_0$*. Tada postoji injektivna rezolventa* $0 \to A \to K^0 \to K^1 \to \dots$ *(ili kraće* $0 \to A \to K^\bullet$*) od A, takva da je niz* $0 \to I^\bullet \xrightarrow{\iota} K^\bullet \xrightarrow{\pi} J^\bullet \to 0$ *egzaktan, gdje su morfizmi* ι *i* π *sastavljeni od injekcija i projekcija biprodukata* K^n*, te takva da morfizmi kompleksa* ι *i* π ***podižu*** f *i* g *redom, tj. sljedeći dijagram komutira*[7]*:*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[d, "\iota^0"] \\
A \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & K^0 \arrow[d, "\pi^0"] \\
A'' \arrow[r, "\epsilon''"] & J^0
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Lagano se vidi koristeći propoziciju 3.2.6 da je K^n injektivan, za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Iz primjera 1.7.30 imamo da je niz $0 \to I^n \to K^n \to J^n \to 0$ (cijepajući) egzaktan, za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Injektivnost od I^0 nam daje morfizam $A \to I^0$, a potom svojstvo biprodukta K^0 morfizam $\epsilon\colon A \to K^0$. Kratka 5-lema (lema 1.7.41) povlači da je ϵ monomorfizam.

Iz svojstava mono-epi faktorizacije od $I^0 \to I^1$ i $J^0 \to J^1$ i duala leme o jezgri (lema 1.7.40) dobijemo dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker}\epsilon' \arrow[r] \arrow[d] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \dots \\
 & \operatorname{Coker}\epsilon \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker}\epsilon'' \arrow[r] \arrow[d] & J^1 \arrow[r] & J^2 \arrow[r] & \dots \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

u kojem je stupac egzaktan, a reci injektivne rezolvente. Tvrdnja sada slijedi induktivno provodeći opisanu konstrukciju. □

Teorem 3.2.13. *Neka je* $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *lijevo egzaktni funktor, gdje kategorija* $\mathcal{A}$ *ima dovoljno injektivnih objekata. Familija desnih deriviranih funktora* $R^*F := \{R^nF\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ *je kohomološki* δ*-funktor (u dokazu ćemo konstruirati vezne morfizme).*

[7] Drugim riječima, morfizam kompleksa $I^\bullet \xrightarrow{\iota} K^\bullet$ se "dodavajući" f proširuje na morfizam između ***augmentiranih*** kompleksa $0 \to A' \to I^\bullet$ i $0 \to A \to K^\bullet$. Analogno za $K^\bullet \xrightarrow{\pi} J^\bullet$.

Dokaz. Neka je $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ kratki egzaktni niz u $\mathcal{A}$, neka su $I^\bullet$ i $J^\bullet$ injektivne rezolvente od A' i A'' redom, te neka je $K^\bullet$ injektivna rezolventa od A dobivena pomoću leme o potkovi (lema 3.2.12). Tada je $0 \to I^n \to K^n \to J^n \to 0$ cijepajući egzaktni niz, pa jer je F aditivan, iz propozicije 1.7.16 slijedi da je niz $0 \to FI^n \to FK^n \to FJ^n \to 0$ također cijepajući egzaktan, za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Iz toga možemo zaključiti da je niz kompleksa $0 \to FI^\bullet \to FK^\bullet \to FJ^\bullet \to 0$ egzaktan. Taj niz generira dugi egzaktni kohomološki niz (teorem 3.1.10):

$$0 \to R^0F(A') \to R^0F(A) \to R^0F(A'') \xrightarrow{\delta^0} R^1F(A') \to R^1F(A) \to R^1F(A'') \xrightarrow{\delta^1} R^2F(A') \to \dots$$

Potrebno je još pokazati prirodnost veznih morfizama. Neka je dan komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sa egzaktnim recima. Izaberimo injektivne rezolvente od A', A'', B' i B'', redom u oznakama $0 \to A' \xrightarrow{\epsilon'} I^\bullet$, $0 \to A'' \xrightarrow{\epsilon''} J^\bullet$, $0 \to B' \xrightarrow{\eta'} M^\bullet$ i $0 \to B'' \xrightarrow{\eta''} N^\bullet$, te neka su $0 \to A \xrightarrow{\epsilon} K^\bullet$ i $0 \to B \xrightarrow{\eta} L^\bullet$ injektivne rezolvente od A i B dobivene pomoću leme o potkovi. Koristeći lemu 3.2.8 možemo naći morfizme kompleksa $F' \colon I^\bullet \to M^\bullet$ i $F'' \colon J^\bullet \to N^\bullet$ koji podižu f' i f'' redom. Tvrdimo da postoji morfizam kompleksa $F \colon K^\bullet \to L^\bullet$ koji podiže f, takav da sljedeći dijagram kompleksa (sa egzaktnim recima) komutira:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "F'"'] & K^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & J^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "F''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^\bullet \arrow[r] & L^\bullet \arrow[r] & N^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Prirodnost veznih morfizama slijedi iz ovog dijagrama, koristeći napomenu 3.1.11. U nastavku ćemo konstruirati traženi morfizam F.

Označimo biprodukte $I^0 \underset{\iota_I}{\overset{\pi_I}{\rightleftarrows}} K^0 \underset{\iota_J}{\overset{\pi_J}{\rightleftarrows}} J^0$ i $M^0 \underset{\iota_M}{\overset{\pi_M}{\rightleftarrows}} L^0 \underset{\iota_N}{\overset{\pi_N}{\rightleftarrows}} N^0$. Zbog injektivnosti od I^0 i M^0 imamo morfizme $\sigma^I \colon A \to I^0$ i $\sigma^M \colon B \to M^0$ za koje je $\epsilon' = \sigma^I\varphi$ i $\eta' = \sigma^M\alpha$, a zbog dokaza leme o potkovi možemo pretpostaviti da je $\pi_I\epsilon = \sigma^I$ i $\pi_M\eta = \sigma^M$. Lako se vidi da vrijedi $(\sigma^M f - F'^0\sigma^I)\varphi = 0$, stoga postoji jedinstveni $\tau \colon A'' \to M^0$ za kojeg vrijedi $\tau\psi = \sigma^M f - F'^0\sigma^I$. Zbog injektivnosti od M^0 postoji $\gamma^0 \colon J^0 \to M^0$ za kojeg vrijedi $\gamma^0\epsilon'' = \tau$. Koristeći svojstva biprodukata K^0 i L^0 možemo naći $F^0 \colon K^0 \to L^0$ za kojeg vrijede relacije

$$\pi_M F^0 \iota_I = F'^0, \quad \pi_N F^0 \iota_I = 0, \quad \pi_M F^0 \iota_J = \gamma^0 \;\; i \;\; \pi_N F^0 \iota_J = F''^0.$$

Iz tih relacija lako slijede željene relacije $F^0\iota_I = \iota_M F'^0$, $\pi_N F^0 = F''^0\pi_J$. Nadalje, koristeći dosad izvedene formule i (1.16), pokaže se da vrijedi $F^0\epsilon = \eta f$.

Komponente morfizma F se dalje dobiju induktivno, u svakom koraku rastavljajući morfizme koruba injektivnih rezolventi u njihove mono-epi faktorizacije (kao u dokazu leme o potkovi - lema 3.2.12), te ponavljajući gore opisanu konstrukciju od F^0. □

Lema 3.2.14. *Ako je I injektivan objekt u $\mathcal{A}$ i $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lijevo egzaktni funktor, tada je $R^nF(I) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz činjenice da je $0 \to I \to I \to 0 \to 0 \to 0 \to \dots$ injektivna rezolventa od I. □

Teorem 3.2.15. *Uz pretpostavke teorema 3.2.13, δ-funktor R^*F je univerzalan.*

Dokaz. Neka je $T = \{T^n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ δ-funktor na $\mathcal{A}$ i $\varphi^0\colon F \to T^0$ prirodna transformacija. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ imamo definirane prirodne transformacije $\varphi^i\colon R^iF \to T^i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, koji na odgovarajući način komutiraju sa veznim morfizmima. Za svaki objekt A možemo lako konstruirati egzaktni niz $0 \to A \to I \to A' \to 0$, gdje je I injektivan objekt (stavimo da $I \to A'$ bude kojezgra od $A \to I$). Budući da je $R^nF(I) = 0$ (lema 3.2.14), imamo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
R^{n-1}F(I) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_I^{n-1}"] & R^{n-1}F(A') \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{A'}^{n-1}"] & R^nF(A) \arrow[r] & 0 \\
T^{n-1}(I) \arrow[r] & T^{n-1}(A') \arrow[r] & T^n(A) &
\end{tikzcd}$$

sa egzaktnim recima, iz kojeg slijedi da postoji jedinstveni morfizam $\varphi_A^n\colon R^nF(A) \to T^n(A)$ koji dodan u taj dijagram, ne kvari njegovu komutativnost. Dokažimo da smo tako dobili prirodnu transformaciju $\varphi^n\colon R^nF \to T^n$. Za morfizam $f\colon A \to B$ možemo konstruirati morfizam kratkih egzaktnih nizova

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & I \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & J \arrow[r] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

u kojem su I i J injektivni (g dobijemo iz injektivnosti od J, a h iz egzaktnosti redaka). Taj dijagram inducira sljedeći:

$$\begin{tikzcd}
R^nF(A) \arrow[rrr, "R^nF(f)"'] \arrow[ddd, "\varphi^n_A"'] & & & R^nF(B) \arrow[ddd, "\varphi^n_B"] \\
& R^{n-1}F(A') \arrow[ul, "\delta_1"'] \arrow[r, "R^{n-1}F(h)"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}_{A'}"'] & R^{n-1}F(B') \arrow[ur, "\delta_2"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}_{B'}"] & \\
& T^{n-1}(A') \arrow[dl, "\delta_3"'] \arrow[r, "T^{n-1}(h)"] & T^{n-1}(B') \arrow[dr, "\delta_4"] & \\
T^n(A) \arrow[rrr, "T^n(f)"] & & & T^n(B)
\end{tikzcd}$$

U tom dijagramu središnji mali četverokut komutira jer je φ^{n-1} po pretpostavci prirodna transformacija. Lijevi i desni četverokut komutiraju zbog izbora morfizama φ^n_A, odnosno φ^n_B. Gornji i donji četverokut komutiraju zbog prirodnosti veznih morfizama. Vezni morfizam δ_1 je epimorfizam, jer je niz $R^{n-1}F(A') \xrightarrow{\delta_1} R^nF(A) \to R^nF(I) = 0$ egzaktan. Koristeći te činjenice, lako se *diagram chasing*-om pokaže da tada i vanjski najveći četverokut komutira, tj. da je φ^n prirodna transformacija. Uočimo da prethodna argumentacija s $A = B$ i $f = 1_A$ pokazuje da φ^n_A ne ovisi o izboru monomorfizma $A \to I$.

Potrebno je još pokazati da φ^n komutira sa veznim morfizmima bilo kojeg kratkog egzaktnog niza. Neka je sada $0 \to A \to B \to C \to 0$ bilo koji egzaktni niz, te kao prije konstruirajmo morfizam egzaktnih nizova

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & I \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

gdje je I injektivan. Dobijemo dijagram

$$\begin{tikzcd}
R^{n-1}F(A') \arrow[drr] \arrow[ddd, "\varphi^{n-1}_{A'}"'] & & \\
& R^{n-1}F(C) \arrow[ul, "R^{n-1}F(h)"] \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n-1}_C"] & R^nF(A) \arrow[d, "\varphi^n_A"] \\
& T^{n-1}(C) \arrow[dl, "T^{n-1}(h)"'] \arrow[r] & T^n(A) \\
T^{n-1}(A') \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

iz kojeg slijedi tražena komutativnost unutrašnjeg desnog četverokuta. □

Napomena 3.2.16. Kohomološki δ-funktor H^* iz primjera 3.2.2 je univerzalan δ-funktor. To se može dokazati slično kao i teorem 3.2.15, uz korištenje konstrukcije *konusa preslikavanja*[8] (vidi [33, 1.5]).

Propozicija 3.2.17. *Neka je $U\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egzaktni funktor. Tada za svaki kompleks $C^\bullet$ i $n \in \mathbb{Z}$ postoji izomorfizam $U(H^n(C^\bullet)) \cong H^n(UC^\bullet)$ prirodan u $C^\bullet$.*

Dokaz. Tvrdnja direktno slijedi iz činjenice da egzaktni funktor čuva jezgre i kojezgre. □

Propozicija 3.2.18. *Neka je $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lijevo egzaktni funktor, gdje $\mathcal{A}$ ima dovoljno injektivnih objekata, te neka je $U\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ egzaktni funktor. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $U \circ R^nF \cong R^n(U \circ F)$.*

Dokaz. Slijedi iz propozicije 3.2.17. □

Neka su $F, F'\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lijevo egzaktni funktori, gdje $\mathcal{A}$ ima dovoljno injektivnih objekata, te neka je $\alpha\colon F \to F'$ prirodna transformacija. Ona inducira morfizam kompleksa $FI^\bullet \to F'I^\bullet$ gdje je $0 \to A \to I^\bullet$ injektivna rezolventa nekog objekta A iz $\mathcal{A}$. Taj morfizam kompleksa inducira morfizam na n-tim kohomologijama tih kompleksa, a time dobijemo prirodnu transformaciju $R^n(\alpha)\colon R^nF \to R^nF'$. Lako se vidi da smo na taj način dobili aditivan funktor R^n definiran na kategoriji lijevo egzaktnih funktora $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Napomena 3.2.19. Ako je G desno egzaktni funktor između Abelovih kategorija od kojih domena ima dovoljno projektivnih objekata, tada se na dualan način koristeći projektivne rezolvente konstruira njemu ***n*-ti lijevi derivirani funktor** (ili ***n*-ti lijevi izvedeni funktor**), u oznaci L_nG, za $n \in \mathbb{N}_0$. Naravno, za njih vrijede sve tvrdnje koje se dobiju dualizirajući dokazane tvrdnje za desne derivirane funktore lijevo egzaktnih funktora, pa ih nećemo posebno isticati.

3.2.4. Desni sateliti

Definicija 3.2.20. *Neka je $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ aditivan funktor između Abelovih kategorija. Univerzalni kohomološki δ-funktor $T = \{T^n\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ je* **desni satelit** *od F, ako vrijedi $F \cong T^0$.*

Iz definicije univerzalnosti slijedi da je desni satelit od F, ako postoji, jedinstven do na izomorfizam δ-funktora. Iz dugog egzaktnog niza δ-funktora slijedi da je nužan uvjet za egzistenciju desnog satelita od F lijeva egzaktnost od F.

Ukoliko domena lijevo egzaktnog funktora F ima dovoljno injektivnih objekata, tada iz propozicije 3.2.11 i teorema 3.2.15 slijedi da je R^*F desni satelit od F.

[8] Eng. *mapping cone*.

3.2.5. Kategorije modula, Ext- i Tor-funktori

U ovom odjeljku navesti ćemo važne primjere deriviranih funktora u kategoriji ${}_R\mathbf{Mod}$ unitarnih lijevih R-modula, gdje je R prsten s jedinicom. No, prije svega pokazati ćemo prvo da ta kategorija ima dovoljno projektivnih i injektivnih objekata.

Neka je $F = \sum_{\mathcal{B}} R$ slobodan R-modul (karakteriziran teoremom 2.1 u [16, IV.2]) s bazom $\mathcal{B}$, te neka je $f\colon F \to B$ homomorfizam i $g\colon A \to B$ epimorfizam R-modula. Za svaki $b \in \mathcal{B}$ možemo naći $a_b \in A$ tako da je $g(a_b) = f(b)$. Pridruživanje $b \mapsto a_b$ se proširuje do homomorfizma R-modula $h\colon F \to A$ za kojeg vrijedi $gh = f$. Dakle, F je projektivan objekt u ${}_R\mathbf{Mod}$, tj. projektivan R-modul. Neka je sada C bilo koji R-modul i $F = \sum R$ slobodni R-modul s bazom koja je bijektivna sa skupom C. Ta bijekcija se proširuje do homomorfizma R-modula $F \to C$ koji je očito surjektivan. Zaključno, vrijedi:

Propozicija 3.2.21. *Kategorija ${}_R\mathbf{Mod}$ ima dovoljno projektivnih objekata.*

Činjenica da kategorija ${}_R\mathbf{Mod}$ ima dovoljno injektivnih objekata se nešto teže pokaže, i dokaz provodi se u nekoliko koraka.

Lema 3.2.22 (Baerov kriterij)**.** *R-modul J je injektivan ako i samo ako se za svaki lijevi ideal L od R bilo koji homomorfizam R-modula $L \to J$ može proširiti do homomorfizma R-modula $R \to J$.*

Dokaz. Jedino je obrat netrivijalan. Pretpostavimo da vrijedi navedeno svojstvo proširenja, i neka je $g\colon A \to B$ monomorfizam i $f\colon A \to J$ homomorfizam R-modula. Koristeći Zornovu lemu lako se može vidjeti da postoji maksimalan (u smislu proširenja) homomorfizam R-modula $h\colon H \to J$ koji zadovoljava $\operatorname{Im} g \subseteq H \leq B$ i $hg = f$. Pretpostavimo da postoji $b \in B \setminus H$ i definirajmo skup $L := \{r \in R\colon rb \in H\}$ koji je očito lijevi ideal u R. Funkcija $r \mapsto h(rb)$ je homomorfizam R-modula $L \to J$, pa se po pretpostavci proširuje do homomorfizma R-modula $k\colon R \to J$ za kojeg vrijedi $k(r) = h(rb)$ za sve $r \in L$. Označimo $c := k(1_R) \in J$ i definirajmo preslikavanje $\bar{h}\colon H + Rb \to J$ formulom $\bar{h}(a + rb) := h(a) + rc$ za $a \in H$ i $r \in R$. Direktno se provjeri da je $\bar{h}$ dobro definirani homomorfizam R-modula koji proširuje h, što je kontradikcija s maksimalnošću od h. Dakle, mora vrijediti $H = B$, pa je J injektivan R-modul. □

Definicija 3.2.23. *Abelova grupa D je* **djeljiva***, ako za svaki $y \in D$ i $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ postoji $x \in D$ takav da je $nx = y$.*

Lema 3.2.24. *Abelova grupa D je djeljiva ako i samo ako je injektivan objekt u ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$.*

Dokaz. Neka je D djeljiva Abelova grupa. Jedini lijevi ideali u $\mathbb{Z}$ su $n\mathbb{Z}$, za $n \in \mathbb{Z}$, pa uzmimo neki $f\colon n\mathbb{Z} \to D$ homomorfizam $\mathbb{Z}$-modula. Postoji $x \in D$ za kojeg je $nx = f(n)$, pa definirajmo da je $\bar{f}\colon \mathbb{Z} \to D$ homomorfizam koji je jedinstveno određen s $1 \mapsto x$. Očito $\bar{f}$ proširuje f, pa je po lemi 3.2.22 D injektivan objekt u ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$.

Obratno, ako je D injektivan objekt u ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$, $y \in D$ i $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, neka je $f\colon n\mathbb{Z} \to D$ homomorfizam $\mathbb{Z}$-modula jedinstveno određen sa $n \mapsto y$. Tada postoji $\bar{f}\colon \mathbb{Z} \to D$ za kojeg je $f(t) = \bar{f}(t)$ za sve $t \in n\mathbb{Z}$. Za $x := \bar{f}(1) \in D$ očito vrijedi $nx = y$, pa je D djeljiva Abelova grupa. □

Lema 3.2.25. *Za svaku Abelovu grupu A postoji monomorfizam $A \to D$, gdje je D djeljiva Abelova grupa. Dakle, kategorija* **Ab** *ima dovoljno injektivnih objekata.*

Dokaz. Znamo da postoji epimorfizam $F \to A$ sa slobodne Abelove grupe $F = \sum \mathbb{Z}$, pa po prvom teoremu o izomorfizmu vrijedi $F/K \cong A$, gdje je K jezgra navedenog epimorfizma. Neka je $i\colon \sum \mathbb{Z} \hookrightarrow \sum \mathbb{Q} =: D$ ulaganje, te uočimo da je D djeljiva Abelova grupa. Lako se vidi da vrijedi $F/K \cong i(F)/i(K)$, pa kompozicijom

$$A \cong F/K \cong i(F)/i(K) \hookrightarrow D/i(K)$$

dobijemo monomofizam. No, lako se vidi da je kvocijentna grupa dijeljive grupe opet djeljiva. Druga tvrdnja sada slijedi iz leme 3.2.24. □

Za Abelovu grupu A imamo Abelovu grupu $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, A)$ svih homomorfizama Abelovih grupa $R \to A$. Ona ima i strukturu unitarnog lijevog R-modula, definiranu sa $(rf)(x) := f(xr)$ za $r, x \in R$ i $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, A)$.

Propozicija 3.2.26. *Neka je $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ zaboravni funktor (koji modulu sačuva samo aditivnu strukturu). Tada vrijedi adjunkcija $U \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, -)$.*

Dokaz. Za R-modul M i Abelovu grupu A imamo preslikavanje

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, A) \to \mathrm{Hom}_{{}_R\mathbf{Mod}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, A))$$

definirano na način da $(\alpha(f))(m)$ bude funkcija $r \mapsto f(rm)$ (za $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, A)$, $m \in M$ i $r \in R$). Lako se provjeri da je α dobro definirano i prirodno u M i A. Inverz od α je preslikavanje β definirano formulom $\beta(g)(m) := g(m)(1_R)$, za $g\colon M \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, A)$ homomorfizam R-modula i $m \in M$. □

Propozicija 3.2.27. *Desni adjungirani funktor egzaktnom funktoru čuva injektivne objekte.*

Dokaz. Neka je $L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egzaktni funktor, $R\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ njemu desni adjungirani, i I injektivan objekt u $\mathcal{B}$. Za bilo koji monomorfizam $f\colon A \to A'$ u $\mathcal{A}$ je i $Lf\colon LA \to LA'$ monomorfizam u $\mathcal{B}$, zbog egzaktnosti od L. Adjunkcija $L \dashv R$ nam daje komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(LA', I) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "-\circ Lf"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', RI) \arrow[d, "-\circ f"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(LA, I) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, RI)
\end{tikzcd}$$

u kojem je zbog injektivnosti od I funkcija $(- \circ Lf)$ surjektivna. Ali tada je također i funkcija $(- \circ f)$ surjektivna, pa je RI injektivan objekt. $\square$

Korolar 3.2.28. *Ako je D djeljiva Abelova grupa, tada je* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, D)$ *injektivan R-modul.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi redom iz leme 3.2.24, propozicije 3.2.26, činjenice da je zaboravni funktor $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ egzaktan, i propozicije 3.2.27. $\square$

Teorem 3.2.29. *Kategorija ${}_R\mathbf{Mod}$ ima dovoljno injektivnih objekata.*

Dokaz. Neka je dan R-modul A. Prema lemi 3.2.25, postoji monomorfizam Abelovih grupa $f\colon A \to D$ u djeljivu grupu D. Djelovanjem funktora $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, -)$ dobijemo monomorfizam $\bar{f}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, D)$ R-modula. Definirajmo sada preslikavanje $\varphi\colon A \to \mathrm{Hom}_{{}_R\mathbf{Mod}}(R, A)$ formulom $\varphi(a)(r) = ra$, za $a \in A$ i $r \in R$. Direktno se provjeri da je φ monomorfizam R-modula, pa je stoga kompozicija

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{{}_R\mathbf{Mod}}(R, A) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, A) \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, D)$$

monomorfizam R-modula u, prema korolaru 3.2.28, injektivan R-modul $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, D)$. $\square$

Naravno, i kategorije $\mathbf{Mod}_R$ desnih unitarnih R-modula imaju dovoljno projektivnih i injektivnih objekata, što se dokaže potpuno analogno. Fiksirajmo lijevi R-modul B, te uočimo funktor $(- \otimes_R B)\colon \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Ab}$ tenzorskog produkta sa B.

Za Abelovu grupu C imamo Abelovu grupu $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C)$ svih homomorfizama Abelovih grupa $B \to C$. Ona ima i strukturu unitarnog desnog R-modula, definiranu sa $(fr)(x) := f(rx)$ za $r \in R$, $x \in B$ i $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, A)$.

Teorem 3.2.30. *Za lijevi R-modul B vrijedi adjunkcija* $(- \otimes_R B) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, -)$.

Dokaz. Neka su desni R-modul A i Abelova grupa C izabrani po volji. Tražena prirodna bijekcija $\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A \otimes_R B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C))$ se realizira formulom $(\alpha(f))(a)(b) := f(a \otimes b)$; inverz joj je funkcija β dana formulom $(\beta(g))(a \otimes b) := g(a)(b)$ na generatorima od $A \otimes_R B$. Potrebni detalji se direktno provjere. $\square$

Korolar 3.2.31. *Funktor* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, -)\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Mod}_R$ *je lijevo egzaktan, a funktor tenzorskog produkta* $(- \otimes_R B)\colon \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Ab}$ *desno egzaktan.*

Sada kada smo osigurali nužne uvjete za egzistenciju, možemo definirati važne primjere deriviranih funktora.

Definicija 3.2.32. *Za lijevi R-modul B i $n \in \mathbb{N}_0$ definiramo* Ext**-funktor** *formulom*

$$\mathrm{Ext}^n_R(B, -) := R^n \,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, -)\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Mod}_R,$$

te Tor**-funktor** *formulom*

$$\mathrm{Tor}_n^R(-, B) := L_n(- \otimes_R B) \colon \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Ab}.$$

Napomena 3.2.33. Ext-funktori se na analogan način mogu definirati na bilo kojoj Abelovoj kategoriji koja ima dovoljno injektivnih objekata, budući da su po teoremu 1.7.37 funktori $\mathrm{Hom}(B, -)$ uvijek lijevo egzaktni.

Uočimo da vrijedi $\mathrm{Ext}_R^0(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, B)$ i $\mathrm{Tor}_0^R(A, B) := A \otimes_R B$. Ext- i Tor-funktori imaju tzv. svojstvo *balansiranosti* na razini univerzalnih δ-funktora:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_R^*(A, B) &:= R^* \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, -)(B) \cong R^* \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(-, B)(A), \\ \mathrm{Tor}_*^R(A, B) &:= L_*(- \otimes_R B)(A) \cong L_*(A \otimes_R -)(B). \end{aligned}$$

Dokazi navedenih tvrdnji mogu se vidjeti u [33, 2.7], a daljnja svojstva Ext- i Tor-funktora u [33, 3].

3.2.6. Aciklične rezolvente

Neka je F lijevo egzaktni funktor kojemu domena $\mathcal{A}$ ima dovoljno injektivnih objekata. Objekt A iz $\mathcal{A}$ je ***F-acikličan***, ako je $R^n F(A) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Lema 3.2.14 kaže da je svaki injektivan objekt F-acikličan, za svaki lijevo egzaktni funktor F. Ako je A F-acikličan, tada za svaki kratki egzaktni niz $0 \to A \to B \to C \to 0$ vrijedi da je $0 \to FA \to FB \to FC \to 0$ također kratki egzaktni niz, što vidimo iz dugog egzaktnog niza funktora F.

Lema 3.2.34 (Pomak dimenzije)**.** *Neka su dani F-aciklični objekti $A^0, A^1, \ldots, A^m$ i egzaktan niz $0 \to B \to A^0 \to A^1 \to \ldots \to A^m \to C \to 0$. Tada je $R^n F(C) \cong R^{n+m+1} F(B)$ za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. U slučaju $m = 0$ tvrdnja slijedi direktno iz dugog egzaktnog niza desnih deriviranih funktora od F i F-acikličnosti od A^0. U slučaju $m \in \mathbb{N}$, za $i = 0, 1, \ldots, m-1$ morfizam $A^i \to A^{i+1}$ rastavimo u mono-epi faktorizaciju $A^i \twoheadrightarrow K^i \hookrightarrow A^{i+1}$. Na taj način dobijemo egzaktne nizove

$$\begin{gathered} 0 \to B \to A^0 \to K^0 \to 0, \\ 0 \to K^0 \to A^1 \to K^1 \to 0, \\ \vdots \\ 0 \to K^{m-2} \to A^{m-1} \to K^{m-1} \to 0, \\ 0 \to K^{m-1} \to A^m \to C \to 0. \end{gathered}$$

Iz prvog dijela dokaza slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo izomorfizme

$$R^nF(C) \cong R^{n+1}F(K^{m-1}) \cong R^{n+2}F(K^{m-2}) \cong \ldots \cong R^{n+m-1}F(K^1) \cong R^{n+m}F(K^0) \cong R^{n+m+1}F(B).$$

$\square$

Desna rezolventa $0 \to B \to A^0 \to A^1 \to \ldots$ od B je F-***aciklična***, ako je A^n F-acikličan za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Desni derivirani funktori od F se mogu računati i pomoću F-acikličkih rezolventi:

Teorem 3.2.35. *Neka je $0 \to B \to A^\bullet$ F-aciklična desna rezolventa od B. Tada je $R^nF(B) \cong H^n(FA^\bullet)$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.*

Dokaz. Jer je F lijevo egzaktan, niz $0 \to FB \to FA^0 \to FA^1$ je egzaktan, iz čega lako slijedi da je $FB \cong H^0(FA^\bullet)$, čime je dokazana tvrdnja za $n = 0$. Neka je $A^0 \twoheadrightarrow C \hookrightarrow A^1$ mono-epi faktorizacija morfizma $A^0 \to A^1$. Imamo sljedeće egzaktne nizove:

$$0 \to B \to A^0 \to C \to 0, \tag{3.2}$$

$$0 \to C \to A^1 \to A^2 \to \ldots \tag{3.3}$$

Primjenimo li dugi egzaktni niz desnih deriviranih funktora od F na (3.2) i (lijevo egzaktni) funktor F na (3.3), dobijemo sljedeće egzaktne nizove:

$$0 \to F(B) \to F(A^0) \to F(C) \to R^1F(B) \to 0, \tag{3.4}$$

$$0 \to F(C) \to F(A^1) \to F(A^2). \tag{3.5}$$

Iz egzaktnosti niza (3.5) slijedi da je $\operatorname{Ker}\big(F(A^1) \to F(A^2)\big) = \big(F(C) \to F(A^1)\big)$, a iz egzaktnosti niza (3.4) slijedi da je $\operatorname{Coker}\big(F(A^0) \to F(C)\big) = \big(F(C) \to R^1F(B)\big)$. Iz tih činjenica i iz komutativnosti dijagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(A^0) \arrow[r] \arrow[dr] & F(A^1) \arrow[r] & F(A^2) \\
& & F(C) \arrow[u] \arrow[r] & R^1F(B)
\end{tikzcd}$$

slijedi da je $R^1F(B) \cong H^1(FA^\bullet)$, tj. da tvrdnja teorema vrijedi i za $n = 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Primjenimo li lemu 3.2.34 na (3.2), slijedi $R^{n+1}F(B) \cong R^nF(C) \overset{(3.3)}{\cong} H^n\Big(0 \to F(A^1) \to F(A^2) \to \ldots\Big) = H^{n+1}(FA^\bullet)$, pa je teorem dokazan po principu matematičke indukcije. $\square$

3.3. Simplicijalni skupovi

3.3.1. Rubni i degeneracijski morfizmi

Neka je Δ simpleks-kategorija konačnih nepraznih ordinala i (ne nužno strogo) rastućih funkcija[9] između njih (vidi primjer 1.1.6). Za $n \in \mathbb{N}_0$, skup $\{0, 1, \ldots, n\} \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ ćemo označavati sa $[n]$, i podrazumijevati standardni uređaj.

Definicija 3.3.1. **Simplicijalni objekt** *u kategoriji C je funktor $\Delta^{op} \to C$.* **Kosimplicijalni objekt** *u kategoriji C je funktor $\Delta \to C$.*

(Ko)simplicijalni objekt u kategoriji **Set** zovemo ***(ko)simplicijalni skup***, te koristimo analogne nazive za ostale poznate kategorije. Morfizmi (ko)simplicijalnih objekata u C su prirodne tranformacije. Kategoriju svih simplicijalnih objekata u C ćemo označavati sa $\mathbf{s}C := [\Delta^{op}, C]$. Posebno, kategoriju svih simplicijalnih skupova označavamo sa $\mathbf{sSet} := \hat{\Delta}$.

Simplicijalni skup X je dakle zadan familijom skupova $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ i funkcijama $X(f): X_n \to X_m$ definiranim za svaku rastuću funkciju $f: [m] \to [n]$, tako da vrijedi $X(g \circ f) = X(f) \circ X(g)$ čim je $g \circ f$ definirano, i $X(1_{[n]}) = 1_{X_n}$. Elemente od X_n zovemo ***n-simpleksima*** od X.

Definicija 3.3.2. *Za $n \in \mathbb{N}$ i $i \in [n]$,* ***i-to rubno preslikavanje***[10] $\partial_n^i : [n-1] \to [n]$ *je jedina strogo rastuća funkcija $[n-1] \to [n]$ koja nema i u slici. Za $n \in \mathbb{N}_0$ i $i \in [n]$,* ***i-to degeneracijsko preslikavanje*** $\sigma_n^i : [n+1] \to [n]$ *jedina rastuća surjekcija $[n+1] \to [n]$ za koju vrijedi $\sigma_n^i(i) = \sigma_n^i(i+1) = i$. Vrijedi:*

$$\partial_n^i(k) = \begin{cases} k & : \ k < i, \\ k+1 & : \ k \geq i, \end{cases} \qquad \sigma_n^i(k) = \begin{cases} k & : \ k \leq i, \\ k-1 & : \ k > i. \end{cases}$$

Direktno se iz gornjih formula provjeri sljedeća lema.

Lema 3.3.3. *Rubna i degeneracijska preslikavanja zadovoljavaju formule:*

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^j \partial_n^i &= \partial_{n+1}^i \partial_n^{j-1} && \text{za } i < j; \\
\sigma_n^j \sigma_{n+1}^i &= \sigma_n^i \sigma_{n+1}^{j+1} && \text{za } i \leq j; \\
\sigma_{n-1}^j \partial_n^i &= \begin{cases} \partial_{n-1}^i \sigma_{n-2}^{j-1} & \text{za } i < j; \\ 1_{[n-1]} & \text{za } i = j \text{ ili } i = j+1; \\ \partial_{n-1}^{i-1} \sigma_{n-2}^j & \text{za } i > j+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

[9] *Rastućom* (ili *neopadajućom*) funkcijom smatramo onu koja čuva uređaj $\leq$, a *strogo rastućom* onu koja čuva uređaj $<$.

[10] Eng. *face map*.

Lema 3.3.4. *Rastuća funkcija $f\colon [m] \to [n]$ se može na jedinstven način prikazati u obliku*

$$f = \partial_n^{i_1}\partial_{n-1}^{i_2}\ldots\partial_{n-s+1}^{i_s}\sigma_{m-t}^{j_t}\ldots\sigma_{m-2}^{j_2}\sigma_{m-1}^{j_1}, \tag{3.6}$$

gdje su $n \geq i_1 > i_2 > \ldots > i_s \geq 0$, $m > j_1 > j_2 > \ldots > j_t \geq 0$ i $n = m - t + s$.

Dokaz. Funkcija f se očito može na jedinstven način zapisati kao kompozicija rastuće surjekcije $[m] \to [m-t]$ i strogo rastuće funkcije $[m-t] \to [n]$. Zatim se lako vidi da tvrdnja leme vrijedi u slučaju rastuće surjekcije za $s = 0$, i u slučaju strogo rastuće funkcije za $t = 0$. $\square$

Uočimo kako za bilo koji kompozabilan par funkcija u Δ danih u obliku (3.6) možemo izračunati njihovu kompoziciju u obliku (3.6) koristeći samo formule iz leme 3.3.3. Stoga zbog kontravarijantne funktorijalnosti vrijedi:

Propozicija 3.3.5. *Svaki simplicijalni objekt X je jednoznačno određen familijom objekata $\{X_n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ i morfizmima $\partial_n^0, \partial_n^1, \ldots, \partial_n^n\colon X_n \to X_{n-1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ (koja zovemo* **rubnim morfizmima***) i $\sigma_n^0, \sigma_n^1, \ldots, \sigma_n^n\colon X_n \to X_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$ (koja zovemo* **degeneracijskim morfizmima***),*

$$\ldots\; X_3 \;\substack{\longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow}\; X_2 \;\substack{\longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow}\; X_1 \;\substack{\longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longrightarrow}\; X_0,$$

za koje vrijede tzv. **simplicijalni identiteti***:*

$$\begin{aligned}
\partial_n^i\partial_{n+1}^j &= \partial_n^{j-1}\partial_{n+1}^i && \text{za } i < j;\\
\sigma_{n+1}^i\sigma_n^j &= \sigma_{n+1}^{j+1}\sigma_n^i && \text{za } i \leq j;\\
\partial_n^i\sigma_{n-1}^j &= \begin{cases} \sigma_{n-2}^{j-1}\partial_{n-1}^i & \text{za } i < j;\\ 1_{X_{n-1}} & \text{za } i = j \text{ ili } i = j+1;\\ \sigma_{n-2}^j\partial_{n-1}^{i-1} & \text{za } i > j+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Primjer 3.3.6. Neka je C mala kategorija. Stavimo da je $X_0 := \mathrm{Ob}(C)$, $X_1 := \mathrm{Hom}(C)$ i X_n neka bude skup svih kompozabilnih n-torki morfizama iz C, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Definirajmo rubne i degeneracijske funkcije: $\sigma_0^0\colon A \mapsto 1_A$, $\partial_1^0 := \mathrm{cod}$, $\partial_1^1 := \mathrm{dom}$, za $n \in \mathbb{N}$ i $i \in [n]$ neka je

$$\sigma_n^i\colon\ (A_0 \to \ldots \to A_n) \mapsto \left(A_0 \to \ldots \to A_{i-1} \to A_i \xrightarrow{1_{A_i}} A_i \to A_{i+1} \to \ldots \to A_n\right),$$

te za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ neka je

$$\partial_n^0\colon\ (A_0 \to \ldots \to A_n) \mapsto (A_1 \to \ldots \to A_n)\,,$$

$$\partial_n^i\colon\ \left(A_0 \to \ldots \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots \to A_n\right) \mapsto \left(A_0 \to \ldots \to A_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1}f_i} A_{i+1} \to \ldots \to A_n\right),$$

$$\partial_n^n\colon\ (A_0 \to \ldots \to A_n) \mapsto (A_0 \to \ldots \to A_{n-1})\,.$$

Direktno se provjeri da vrijede simplicijalni identiteti, pa smo po propoziciji 3.3.5 dobili simplicijalni skup $X =: \mathrm{N}(C)$ kojeg zovemo ***nerv kategorije*** C. Uočimo da se kategorija može rekonstruirati iz svog nerva do na izomorfizam.

Primjer 3.3.7. Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ pokrivač topološkog prostora Y. Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ definirajmo $X_n := \left\{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I^{n+1} : U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\right\}$, te za svaku rastuću funkciju $f : [m] \to [n]$ stavimo $X(f)(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) := (\alpha_{f(0)}, \alpha_{f(1)}, \ldots, \alpha_{f(m)})$. Lako se vidi da smo tako dobili simplicijalni skup, kojeg zovemo ***nerv pokrivača*** $\mathcal{U}$.

3.3.2. Geometrijska realizacija

Primjer 3.3.8. Za $n \in \mathbb{N}_0$, ***standardni n-simpleks*** je kontravarijantni reprezentabilni funktor $\Delta^n := \mathrm{Hom}_\Delta(-, [n]) : \Delta^{op} \to \mathbf{Set}$.

Iz Yonedine leme (teorem 1.2.6) slijedi da za svaki simplicijalni skup X i svaki $n \in \mathbb{N}_0$ imamo prirodnu u $[n]$ bijekciju

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, X) \cong X_n. \tag{3.7}$$

Drugim riječima, biranje morfizma sa standardnog n-simpleksa u X je ekvivalentno biranju nekog n-simpleksa od X. Iz teorema 1.3.28 slijedi korolar:

Korolar 3.3.9. *Svaki simplicijalni skup je kolimes standardnih n-simpleksa.*

Za $n \in \mathbb{N}_0$ definirajmo ***standardni topološki n-dimenzionalni simpleks*** kao sljedeći topološki potprostor od $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$|\Delta^n| := \left\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0, x_1, \ldots, x_n \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\right\}. \tag{3.8}$$

Za $i \in [n]$, ***i-ti vrh*** od $|\Delta^n|$ je točka $e_i^n := (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i+1}, 0, \ldots, 0) \in |\Delta^n|$. Za bilo koju rastuću funkciju $f : [m] \to [n]$ definirajmo neprekidnu funkciju $\Delta_f : |\Delta^m| \to |\Delta^n|$ na način da preslikava vrhove $e_i^m \mapsto e_{f(i)}^n$ za $i = 0, 1, \ldots, m$, te se zatim proširi na jedinstven način do linearnog preslikavanja $|\Delta^m| \to |\Delta^n|$. Uočimo da smo time dobili funktor $\Delta \to \mathbf{Top}$. Sada, za bilo koji simplicijalni skup X označimo sugestivno $X \cong \mathrm{colim}_{\Delta^n \to X} \Delta^n$ kanonski kolimes standardnih n-simpleksa konstruiran u dokazu teorema 1.3.28, te definirajmo topološki prostor

$$|X| := \operatorname*{colim}_{\Delta^n \to X} |\Delta^n| \tag{3.9}$$

koji zovemo ***geometrijska realizacija*** simplicijalnog skupa X. Time smo dobili dobro definiran funktor $|\cdot| : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$, zbog kanonskog prikaza od X kao kolimesa, činjenice da je konstrukcija kategorije $\mathcal{J}$ funktorijalna s obzirom na funktor F u dokazu teorema 1.3.28[11], i činjenice da je kategorija **Top** kopotpuna. Zovemo ga ***realizacijski funktor***.

Obratno, za svaki topološki prostor Y možemo konstruirati simplicijalni skup SY na sljedeći način: za $n \in \mathbb{N}_0$ stavimo da je $SY_n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, Y)$ (gdje je $|\Delta^n|$ dan s (3.8)), a za morfizam f u Δ stavimo da je $SY(f)$ predkompozicija sa Δ_f. Tako dobiven SY zovemo ***singularni simplicijalni skup*** topološkog prostora Y. Sada lagano možemo dobiti funktor $S : \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$ tako da za neprekidno preslikavanje f komponente prirodne tranformacije $S(f)$ budu postkompozicije sa f. Funktor S zovemo ***singularni funktor***.

Teorem 3.3.10. *Realizacijski funktor je lijevi adjungirani singularnom funktoru, tj.* $|\cdot| \dashv S$.

Dokaz. Za simplicijalni skup X i topološki prostor Y uočimo sljedeći niz prirodnih izomorfizama:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) &\overset{(3.9)}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\operatorname*{colim}_{\Delta^n \to X} |\Delta^n|, Y) \\
&\overset{1.3.35}{\cong} \lim_{\Delta^n \to X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, Y) \\
&\overset{(3.7)}{\cong} \lim_{\Delta^n \to X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, SY) \\
&\overset{1.3.35}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\operatorname*{colim}_{\Delta^n \to X} \Delta^n, SY) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X, SY).
\end{aligned}$$

□

Korolar 3.3.11. *Realizacijski funktor čuva kolimese, a singularni limese.*

Sada se lako može vidjeti da je geometrijska realizacija standardnog n-simpleksa standardni topološki n-dimenzionalni simpleks, tj. da je oznaka $|\Delta^n|$ u (3.8) opravdana.

Napomena 3.3.12. Može se provjeriti da je geometrijska realizacija simplicijalnog skupa X kvocijentni topološki prostor

$$|X| = \coprod_{n \in \mathbb{N}_0} |\Delta^n| \times X_n \Big/ \sim, \tag{3.10}$$

gdje je $\sim$ najmanja relacija ekvivalencije na gornjoj disjunktnoj uniji $\coprod_{n\in\mathbb{N}_0} |\Delta^n| \times X_n$ koja identificira elemente $(s, x) \in |\Delta^n| \times X_n$ i $(t, y) \in |\Delta^m| \times X_m$ čim postoji rastuća funkcija $f\colon [m] \to [n]$ za koju vrijedi $y = X(f)(x)$ i $s = \Delta_f(t)$. Skupovima X_n u formuli (3.10) je dana diskretna topologija.

[11] Naime, ako pretpostavimo da su funktori F i F' kolimesi redom dijagrama $M\colon \mathcal{J}^{op} \to [\mathcal{D}, \mathbf{Set}]$ i $M'\colon \mathcal{J}'^{op} \to [\mathcal{D}, \mathbf{Set}]$ (uz oznake kao u dokazu navedenog teorema) i $\alpha\colon F \to F'$ prirodna transformacija, tada imamo očiti funktor $\mathcal{J} \to \mathcal{J}'$ koji ovisi o α i komutira sa M i M'. Taj funktor je odgovoran za induciranje morfizma na geometrijskim realizacijama simplicijalnih skupova.

Napomena 3.3.13. Može se pokazati da geometrijska realizacija svakog simplicijalnog skupa ima strukturu CW kompleksa. Za dokaz vidi [12, I.2].

Primjer 3.3.14. Neka je G grupa. Definirajmo simplicijalni skup BG na sljedeći način. Za $n \in \mathbb{N}_0$ neka je $BG_n := G^n$, a za bilo koju rastuću funkciju $f\colon [m] \to [n]$ stavimo da je $BG(f)(g_1, g_2, \dots, g_n) = (h_1, h_2, \dots, h_m)$, gdje je

$$h_i := \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j, \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

Simplicijalni skup BG možemo dobiti i kao nerv kategorije koja ima samo jedan objekt i kojoj su morfizmi svi elementi od G, te se oni komponiraju tako da se u obrnutom poretku pomnože u G. Geometrijska realizacija $|BG|$ se zove ***klasificirajući prostor*** grupe G.

3.3.3. Simplicijalni objekti i (ko)lančani kompleksi

Neka je $A = \{A_n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ simplicijalni objekt u Abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$. Definirajmo niz $C(A)$

$$\dots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{d_2} A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \longrightarrow 0$$

tako da za $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$d_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_n^i, \tag{3.11}$$

gdje su $\partial_n^0, \partial_n^1, \dots, \partial_n^n$ rubni morfizmi od A (propozicija 3.3.5). Lako se provjeri koristeći simplicijalne identitete da je $C(A)$ lančani kompleks, kojeg zovemo ***Mooreov kompleks*** simplicijalnog objekta A. Očito možemo C dodefinirati do funktora $C\colon \mathbf{s}\mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$.

Ukoliko je A simplicijalna Abelova grupa, tada možemo definirati njoj pridružen ***normaliziran Mooreov kompleks*** $N(A)$ tako da za $n \in \mathbb{N}$ stavimo da je $N(A)_n := \bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker} \partial_n^i$ i $d_n := (-1)^n \partial_n^n|_{N(A)_n}$. Konstrukcija normaliziranog Mooreovog kompleksa se može provesti u bilo kojoj Abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$, budući da se presjek objekata može poopćiti u bilo kojoj Abelovoj kategoriji (vidi npr. [4, 4.2]). Nadalje, ta konstrukcija proširuje se do funktora $N\colon \mathbf{s}\mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$. Važnost tog funktora očituje se u sljedećem teoremu, čiji dokaz se može vidjeti u [33, 8.4]:

Teorem 3.3.15 (Dold-Kanova korespodencija)**.** *Funktor $N\colon \mathbf{s}\mathcal{A} \to \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ je ekvivalencija kategorija.*

Dold-Kanova korespodencija zapravo tvrdi i više od gore navedenog teorema—tvrdi da je funktor N *Quillenova ekvivalencija modelnih kategorija*. Ti pojmovi, koji pripadaju apstraktnoj teoriji homotopije, izvan su dosega ovog rada.

Ukoliko X nije simplicijalni objekt u Abelovoj kategoriji, već simplicijalni skup, tada možemo također konstruirati lančani kompleks (u oznaci $C_\bullet(X,\mathbb{Z})$)

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}X_2 \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}X_1 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}X_0 \longrightarrow 0,$$

gdje je $C_n(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}X_n$ slobodna Abelova grupa generirana skupom X_n i d_n definiran na generatorima X_n formulom (3.11), za $n \in \mathbb{N}$. Općenitije, umjesto $\mathbb{Z}X_n$ možemo uzeti Abelovu grupu formalnih konačnih linearnih kombinacija n-simpleksa od X s koeficijentima u nekoj drugoj zadanoj Abelovoj grupi A (tada dobiveni lančani kompleks označavamo s $C_\bullet(X,A)$ i zovemo lančani kompleks pridružen simplicijalnom skupu X ***s koeficijentima u*** A), ili se uzimaju slobodni R-moduli generirani sa skupom X_n.

Ukoliko je Y topološki prostor, homologije lančanog kompleksa $C_\bullet(SY,A)$ pridruženog singularnom simplicijalnom skupu SY zovemo ***singularnim homološkim grupama*** od Y ***s koeficijentima u*** A, u oznakama $H_n^{\mathrm{sing}}(Y,A)$. Vidi [15, 2.1].

Za simplicijalni skup X možemo konstruirati i kolančani kompleks $C^\bullet(X,A)$ pridružen X ***s koeficijentima u*** Abelovoj grupi A na sljedeći način. Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ neka je $C^n(X,A)$ skup svih funkcija $f\colon X_n \to A$. Taj skup ima prirodnu strukturu Abelove grupe. Definirajmo $d^n\colon C^n(X,A) \to C^{n+1}(X,A)$ formulom

$$d^n(f) := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f \circ \partial^i_{n+1}.$$

Lako se provjeri da je tako definiran $C^\bullet(X,A)$ zaista kolančani kompleks. Konstrukcija se na očit način dodefinira na morfizmima simplicijalnih skupova, tako da dobijemo funktor $C^\bullet(-,A)\colon \mathbf{sSet}^{op} \to \mathbf{coCh}^{\geq 0}(\mathbf{Ab})$.

Definicija 3.3.16. Kohomološke grupe *simplicijalnog skupa X* **s koeficijentima u** *Abelovoj grupi A (u oznakama $H^n(X,A)$) su kohomologije kolančanog kompleksa $C^\bullet(X,A)$.*

Ukoliko je Y topološki prostor, kohomološke grupe singularnog simplicijalnog skupa SY s koeficijentima u Abelovoj grupi A zovemo ***singularnim kohomološkim grupama*** od Y ***s koeficijentima u*** A, u oznakama $H^n_{\mathrm{sing}}(Y,A)$.

Postoji lagano poopćenje gornje konstrukcije u kojem Abelovu grupu koeficijenata zamjenjujemo pogodno odabranom familijom Abelovih grupa. ***Kohomološki sustav koeficijenata*** $\mathcal{A}$ na simplicijalnom skupu X je familija Abelovih grupa $\{A_x\colon x \in X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ i homomorfizama $\{A(f,x)\colon A_{X(f)(x)} \to A_x\colon (f,x) \in \mathrm{Hom}_\Delta([m],[n]) \times X_n,\ m,n \in \mathbb{N}_0\}$, tako da vrijedi:

- ◇ za svaki $x \in X_n$ vrijedi $A(1_{[n]},x) = 1_{A_x}$,
- ◇ za morfizme $[k] \xrightarrow{g} [m] \xrightarrow{f} [n]$ u Δ i $x \in X_n$ je $A(f \circ g, x) = A(f,x) \circ A(g, X(f)(x))$.

Definirajmo sada kolančani kompleks $C^\bullet(X,\mathcal{A})$ za kohomološki sustav koeficijenata na simplicijalnom skupu X, na sljedeći način. Za $n \in \mathbb{N}_0$ neka je $C^n(X,\mathcal{A})$ Abelova grupa svih funkcija f definiranih na X_n za koje je $f(x) \in A_x$ za sve $x \in X_n$, uz zbrajanje definirano po točkama, te neka je $d^n\colon C^n(X,\mathcal{A}) \to C^{n+1}(X,\mathcal{A})$ definiran formulom:

$$d^n(f)(x) := \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i A(\partial^i_{n+1}, x)\big(f(X(\partial^i_{n+1})(x))\big), \qquad f \in C^n(X,\mathcal{A}),\ x \in X_{n+1},$$

gdje su sada $\partial^0_{n+1}, \partial^1_{n+1}, \dots, \partial^{n+1}_{n+1}\colon [n] \to [n+1]$ rubna preslikavanja definirana u 3.3.2. Tada je $C^\bullet(X,\mathcal{A})$ kolančani kompleks, ***s koeficijentima u*** $\mathcal{A}$.

Definicija 3.3.17. Kohomološke grupe *simplicijalnog skupa X* **s koeficijentima u** *kohomološkom sustavu koeficijenata $\mathcal{A}$ na X (u oznakama $H^n(X,\mathcal{A})$) su kohomologije kolančanog kompleksa $C^\bullet(X,\mathcal{A})$.*

Ukoliko je $\mathcal{A}$ kohomološki sustav koeficijenata kojemu su sve grupe jednake A i svi morfizmi jednaki 1_A (tj. $\mathcal{A}$ je ***konstantan***), tada je očito $C^\bullet(X,\mathcal{A}) = C^\bullet(X,A)$, pa stoga i $H^n(X,\mathcal{A}) = H^n(X,A)$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Slično se može definirati *homološki sustav koeficijenata* $\mathcal{B}$ na simplicijalnom skupu X, konstruirati lančani kompleks pridružen X *s koeficijentima u* $\mathcal{B}$, te definirati *homološke grupe* $H_n(X,\mathcal{B})$ simplicijalnog skupa X *s koeficijentima u* $\mathcal{B}$. Vidi [10, I.4.7-11].

4. Kohomologija

U ovom poglavlju prethodno izgrađenu teoriju ćemo primjeniti na Abelovu kategoriju **AbSh**(X) za fiksiran topološki prostor X, od čega će se ponešto prenijeti i na Abelovu kategoriju ${}_{O_X}$**Mod**, za prstenovani prostor (X, O_X). Funktor globalnih prereza je na kategoriji predsnopova egzaktan, međutim na kategoriji snopova on je samo lijevo egzaktan. Da bi vidjeli da nije nužno egzaktan, uzmimo $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sa standardnom topologijom, te promotrimo snopove Abelovih grupa nad X: snop O holomorfnih funkcija (s aditivnom strukturom) i snop O^* holomorfnih invertibilnih funkcija (sa multiplikativnom strukturom). Uočimo morfizam snopova $\exp\colon O \to O^*$ za kojeg se lako vidi da je surjektivan na svim vlatima (kompleksni logaritam možemo uzimati na dovoljno malim otvorenim skupovima—vidi [31, 5.31]), pa je stoga exp epimorfizam u **AbSh**(X) (propozicija 2.3.3). No, globalni prerez od exp nije surjektivan, jer npr. 1_X ne može imati globalni kompleksni logaritam. Vidimo da funktor globalnih prereza u ovom slučaju ne čuva epimorfizme, pa ne može biti ni desno egzaktan (korolar 1.7.35).

Zadaća homološke algebre u ovom slučaju jest da kontrolira taj nedostatak desne egzaktnosti funktora globalnih prereza, te da gubitak informacija prouzrokovan tim nedostatkom svede na najmanju moguću mjeru.

Ako se drugačije ne navede, u ovom poglavlju svaki snop je snop Abelovih grupa nad topološkim prostorom X.

4.1. Snopovska kohomologija

4.1.1. Definicija i osnovna svojstva

Uočimo da je zaboravni funktor $U\colon {}_{O_X}\mathbf{Mod} \to \mathbf{AbSh}(X)$ (koji komponentama O_X-modula sačuva samo aditivnu strukturu) egzaktan, da reflektira egzaktnost (slijedi iz činjenice da se jezgra i slika homomorfizma modula mogu definirati u terminima samo aditivnih struktura tih modula), te da komutira sa funktorom $\Gamma\colon {}_{O_X}\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$ globalnih prereza, gdje je $R := O_X(X)$. Iz tih činjenica lako slijedi da je funktor $\Gamma\colon {}_{O_X}\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$ globalnih prereza lijevo egzaktan.

Propozicija 4.1.1. *Kategorija* **AbSh**(X) *ima dovoljno injektivnih objekata.*

Dokaz. Neka je zadan snop F, i za svaki $x \in X$ neka je $\iota^x\colon \{x\} \hookrightarrow X$ inkluzija. Po lemi 3.2.25 možemo naći monomorfizam grupa $\varphi_x\colon F_x \to I_x$, gdje je I_x injektivan objekt u **Ab** (možemo ga shvatiti kao snop Abelovih grupa nad $\{x\}$). Definirajmo snop

$$I := \prod_{x\in X} \iota^x_* I_x$$

Abelovih grupa nad X. Funktor direktne slike ι^x_* je desni adjungiranu funktoru vlati u x, pa iz korolara 2.3.4 i propozicije 3.2.27 slijedi da su svi $\iota^x_* I_x$ injektivni objekti; stoga je i njihov produkt I injektivan objekt.

Za otvoren podskup $U \subseteq X$ definirajmo preslikavanje $\psi_U\colon FU \to IU = \prod_{x\in U} I_x$ formulom $\psi_U(s) = (\varphi_x([s]_x))_{x\in U}$, $s \in FU$. Lako se vidi da je time dobiven monomorfizam snopova $\psi\colon F \to I$ Abelovih grupa. □

Napomena 4.1.2. Analogno dokazu propozicije 4.1.1 može se vidjeti da i kategorija ${}_{O_X}\mathbf{Mod}$ ima dovoljno injektivnih objekata. Vidi [14, III.2].

Definicija 4.1.3. *Neka je F snop Abelovih grupa nad X i $n \in \mathbb{N}_0$, i $\Gamma\colon \mathbf{AbSh}(X) \to \mathbf{Ab}$ funktor globalnih prereza. Tada Abelovu grupu*

$$H^n(X, F) := R^n\Gamma(F)$$

zovemo n**-ta snopovska kohomologija** *(ili* n**-ta kohomologija deriviranog funktora***) snopa F. Često kraće kažemo samo* n**-ta kohomologija** *od F.*

Napomena 4.1.4. Analogno se definiraju snopovske kohomologije O_X-modula F: kao vrijednost n-tog deriviranog funktora od funktora $\Gamma\colon {}_{O_X}\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$ globalnih prereza u F. Na taj način kohomologije su $O_X(X)$-moduli, no uočimo da je aditivna struktura n-te kohomologije od F jednaka n-toj kohomologiji snopa F shvaćenog kao snopa Abelovih grupa nad X. To slijedi direktno iz propozicije 3.2.18 i činjenice da je zaboravni funktor ${}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ egzaktan.

Iz propozicije 3.2.11 slijedi da za svaki snop F nad X imamo prirodan izomorfizam $H^0(X, F) \cong FX$. Nadalje, teorem 3.2.15 kaže da je familija $\{H^n(X, -)\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ univerzalni δ-funktor na $\mathbf{AbSh}(X)$. Posebno, ukoliko je $0 \to F \to F' \to F'' \to 0$ kratki egzaktni niz snopova, tada imamo dugi egzaktni niz njihovih kohomologija:

$$\begin{aligned} &0 \to FX \to F'X \to F''X \to H^1(X,F) \to H^1(X,F') \to H^1(X,F'') \to H^2(X,F) \to \dots \\ &\dots \to H^n(X,F'') \to H^{n+1}(X,F) \to H^{n+1}(X,F') \to H^{n+1}(X,F'') \to H^{n+2}(X,F) \to \dots. \end{aligned}$$

Za Γ-acikličan snop (snop F nad X za kojeg vrijedi $H^n(X, F) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$) ćemo kraće reći samo da je ***acikličan***.

Napomena 4.1.5. Važna činjenica za primjene jest da su na *lokalno kontraktibilnom* topološkom prostoru X *singularne kohomologije* od X *s koeficijentima u* Abelovoj grupi A prirodno izomorfne odgovarajućim snopovskim kohomologijama konstantnog snopa u A nad X. Detalji i dokaz mogu se vidjeti u [27, 4.4].

4.1.2. Uveli snopovi

Definicija 4.1.6. *Snop F je* **uveo**[1], *ako je za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$ restrikcija $FX \to FU$ surjekcija.*

Očito je kod uvelog snopa svaka restrikcija $FU \to FV$ surjekcija, za $V \subseteq U$ otvorene podskupove od X.

Lema 4.1.7. *Neka je $0 \to F' \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} F'' \to 0$ egzaktan niz snopova i neka je F' uveo. Tada je za svaki otvoreni podskup $U \subseteq X$ niz $0 \to F'U \xrightarrow{\varphi_U} FU \xrightarrow{\psi_U} F''U \to 0$ egzaktan.*

Dokaz. Niz $U \subseteq X$ niz $0 \to F'U \xrightarrow{\varphi_U} FU \xrightarrow{\psi_U} F''U$ je egzaktan, što lako vidimo restringirajući dane snopove na potprostor U i primjenjujući lijevo egzaktan funktor globalnih prereza (funktor restrikcije na potprostor je egzaktan, što se može vidjeti koristeći korolar 1.7.35 i propoziciju 2.3.3). Stoga je dovoljno dokazati da je funkcija ψ_U surjektivna. Neka je $s'' \in F''U$ bilo koji element, te definirajmo skup

$$\mathcal{S} := \Big\{(s, V) \colon\ V \subseteq U,\ V \text{ otvoren},\ s \in FV,\ \psi_V(s) = s''|_V\Big\}.$$

Lako se vidi da je $\mathcal{S}$ neprazan koristeći egzaktnost funktora vlati u točki. Definirajmo da vrijedi $(s, V) \leq (s', V')$ ako i samo je $V \subseteq V'$ i $s'|_V = s$. Lako se vidi da je to uređaj na $\mathcal{S}$ i da su ispunjene pretpostavke Zornove leme. Neka je (s_0, V_0) maksimalni element u $\mathcal{S}$ i pretpostavimo da je $V_0 \neq U$. Fiksirajmo $x \in U \setminus V_0$. Zbog egzaktnosti funktora vlati u x možemo naći dovoljno malu okolinu $W \subseteq U$ od x i $t \in FW$ tako da vrijedi $\psi_W(t) = s''|_W$. Tada je $\psi_{V_0 \cap W}(s_0|_{V_0 \cap W} - t|_{V_0 \cap W}) = 0$, pa zbog egzaktnosti početnog niza možemo naći $r \in F'(V_0 \cap W)$ tako da vrijedi $\varphi_{V_0 \cap W}(r) = s_0|_{V_0 \cap W} - t|_{V_0 \cap W}$. Jer je F' uveo, postoji $\bar{r} \in F'U$ takav da je $\bar{r}|_{V_0 \cap W} = r$. Zbog snopovskog uvjeta od F možemo naći $s_1 \in F(V_0 \cup W)$ za kojeg vrijedi $s_1|_{V_0} = s_0$ i $s_1|_W = \varphi_U(\bar{r})|_W + t$. Sada vidimo da vrijedi $(s_1, V_0 \cup W) \in \mathcal{S}$, $(s_0, V_0) \leq (s_1, V_0 \cup W)$ i $V_0 \neq V_0 \cup W$, što je kontradikcija. Dakle, vrijedi $V_0 = U$, pa je $s_0 \in FU$ i $\psi_U(s_0) = s''$. Time je pokazano da je ψ_U surjekcija. □

Lema 4.1.8. *Neka je $0 \to F' \to F \xrightarrow{\psi} F'' \to 0$ egzaktan niz snopova. Ako su F' i F uveli, onda je i F'' uveo.*

Dokaz. Ako je $s'' \in F''U$, tada je prema lemi 4.1.7 $s'' = \psi_U(s)$ za neki $s \in FU$. Jer je F uveo, možemo naći $\bar{s} \in FX$ za kojeg je $\bar{s}|_U = s$. Sada lako slijedi $\psi_X(\bar{s})|_U = s''$, pa iz toga vidimo da je i F'' uveo. □

Teorem 4.1.9. *Uveli snop je acikličan.*

[1]Eng. *flabby*, franc. *flasque*.

Dokaz. Neka je F uveli snop, te uzmimo monomorfizam $F \to I$ koji je konstruiran u dokazu propozicije 4.1.1. Lako se vidi da je I uveo. Iz tog monomorfizma možemo dobiti kratki egzaktni niz $0 \to F \to I \to G \to 0$. Iz leme 4.1.8 slijedi da je i G uveo, dok iz leme 4.1.7 i dugog egzaktnog niza kohomologija slijedi $H^1(X, F) = 0$ i $H^{n+1}(X, F) \cong H^n(X, G)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tvrdnja teorema sada slijedi po principu matematičke indukcije. □

Koristeći teoreme 4.1.9 i 3.2.35 vidimo da se snopovske kohomologije mogu dobiti pomoću ***uvelih rezolventi***. Posebno, uvela rezolventa koja se dobije uzastopnim ponavljanjem konstrukcije uvelog injektivnog snopa I iz dokaza propozicije 4.1.1 (uz uzimanje kojezgre u međukoraku, da se dobije egzaktnost) se zove ***Godementova rezolventa***. Sâm snop I zovemo ***snopom isprekidanih prereza***[2].

4.1.3. Teoremi isčezavanja

Za kraj odjeljka navesti ćemo neke važne klasične rezultate u algebarskoj geometriji poznate pod nazivom teoremi isčezavanja[3]. No, prije toga imamo definicije:

Definicija 4.1.10. *Neka je X topološki prostor. Neprazan podskup $Y \subseteq X$ je* **ireducibilan** *u X ako se ne može napisati kao unija $Y = Y_1 \cup Y_2$ svoja dva prava podskupa, svaki od kojih je zatvoren u Y.* **Dimenzija** *od X je supremum svih $n \in \mathbb{N}_0$ za koje postoji niz $Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_n$ međusobno različitih ireducibilnih zatvorenih podskupova od X.*

Topološki prostor X je **Noetherin***, ako u njemu za svaki padajući niz zatvorenih skupova $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \ldots$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $Y_n = Y_{n+k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$.*

Definicija 4.1.11. *Komutativan prsten s jedinicom je* **Noetherin***, ako u njemu svaki neprazan skup ideala sadrži maksimalan element s obzirom na inkluziju.*

Shema $(X, \mathcal{O}_X)$ je **Noetherina***, ako X ima konačan pokrivač[4] $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ takav da je $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ kao lokalno prstenovan prostor izomorfan spektru nekog Noetherinog prstena, za $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Teorem 4.1.12 (Grothendieck)**.** *Neka je X Noetherin topološki prostor dimenzije n. Tada za bilo koji snop F Abelovih grupa nad X i za bilo koji prirodni broj $k > n$ vrijedi $H^k(X, F) = 0$.*

Teorem 4.1.13 (Serre)**.** *Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ Noetherina shema. Tada je ona afina shema ako i samo ako za svaki kvazikoherentan $\mathcal{O}_X$-modul F i svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $H^k(X, F) = 0$.*

Dokaz prvog od njih se može vidjeti u [14, III.2], a drugog u [14, III.3].

[2] Eng. *sheaf of discontinuous sections.*

[3] Eng. *vanishing theorems.*

[4] Ako nije drugačije naglašeno, redovito smatramo da se pokrivač sastoji samo od otvorenih skupova.

4.2. Čechova kohomologija

4.2.1. Čechov kompleks

Neka je $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ pokrivač topološkog prostora X i F snop Abelovih grupa nad X. Za $n \in \mathbb{N}_0$ definirajmo Abelovu grupu

$$\check{C}^n(\mathcal{U}, F) := \prod_{(i_0,i_1,\ldots,i_n)\in I^{n+1}} F(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_n}). \tag{4.1}$$

Za rastuću funkciju $g : [m] \to [n]$ definirajmo preslikavanje $\check{C}(g) : \check{C}^m(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^n(\mathcal{U}, F)$ na sljedeći način: za $\varphi = (\varphi_{i_0,\ldots,i_m})_{I^{m+1}} \in \check{C}^m(\mathcal{U}, F)$ neka $\check{C}(g)(\varphi)$ ima komponente

$$(\check{C}(g)(\varphi))_{i_0,\ldots,i_n} := \varphi_{i_{g(0)},\ldots,i_{g(m)}}|_{U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_n}} \in F(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n}), \qquad \forall\, (i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}.$$

Lako je vidjeti provjeriti da smo na taj način dobili kosimplicijalnu Abelovu grupu $\check{C}(\mathcal{U}, F)$ ***Čechovih kolanaca***. Njima ćemo pridružiti kolančani kompleks sljedećom konstrukcijom (koja je dualna konstrukciji ne-normaliziranog Mooreovog lančanog kompleksa iz simplicijalnog Abelovog objekta, u pododjeljku 3.3.3.). Za $n \in \mathbb{N}_0$ definirajmo diferencijal $d^n : \check{C}^n(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}, F)$ formulom po komponentama: za $\varphi = (\varphi_{i_0,\ldots,i_n})_{I^{n+1}} \in \check{C}^n(\mathcal{U}, F)$ neka je

$$d^n(\varphi)_{i_0,\ldots,i_{n+1}} := \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \varphi_{i_0,\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_{n+1}}|_{U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_{n+1}}}, \qquad \forall\, (i_0, \ldots, i_{n+1}) \in I^{n+2},$$

gdje je skup indeksa $\{i_0, \ldots, \hat{i_k}, \ldots, i_{n+1}\}$ standardna pokrata za $\{i_0, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_{n+1}\}$. Tako dobiveni kolančani kompleks $0 \to \check{C}^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{d^0} \check{C}^1(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{d^1} \check{C}^2(\mathcal{U}, F) \to \ldots$ označavamo s $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)$ i zovemo ***Čechov kompleks*** od F s obzirom na pokrivač $\mathcal{U}$.

Definicija 4.2.1. *Za $n \in \mathbb{N}_0$, Abelovu grupu $\check{H}^n(\mathcal{U}, F) := H^n(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$ (tj. n-tu kohomologiju Čechovog kompleksa snopa F s obzirom na pokrivač $\mathcal{U}$) zovemo* **n-ta Čechova kohomologija** *snopa F* **s obzirom na pokrivač**[5] *$\mathcal{U}$.*

Elemente skupa $\check{C}^n(\mathcal{U}, F)$ zovemo ***Čechovim n-kolancima***. Elemente jezgre diferencijala d^n zovemo ***Čechovim n-kociklusima***. Elemente slike diferencijala d^{n-1} zovemo ***Čechovim n-korubovima***. Sliku Čechovog n-kociklusa φ u kvocijentu $\check{H}^n(\mathcal{U}, F)$ zovemo ***kohomološkom klasom*** od φ; Čechovi n-kociklusi su ***kohomologni***, ako imaju istu kohomološku klasu, odnosno ako im je razlika Čechov n-korub.

Morfizam snopova inducira morfizam između njihovih Čechovih komplesa, pa stoga i njihovih n-tih Čechovih kohomologija. Dakle, za $n \in \mathbb{N}_0$ i $\mathcal{U}$ pokrivač od X imamo funktor $\check{H}^n(\mathcal{U}, -) : \mathbf{AbSh}(X) \to \mathbf{Ab}$.

[5] Ponekad se kaže da je $\check{H}^n(\mathcal{U}, F)$ ***n-ta Čechova kohomologija*** pokrivača $\mathcal{U}$ ***s koeficijentima u*** snopu F.

Napomena 4.2.2. Važno je uočiti kako Čechove kohomologije od kratkih egzaktnih nizova ne tvore općenito duge egzaktne nizove kao što je slučaj sa snopovskom kohomologijom. Primjerice, uzmemo li pokrivač $\mathcal{U} := \{X\}$ od X, lako se dobije da je $\check{H}^0(\mathcal{U}, F) = FX$ i $\check{H}^n(\mathcal{U}, F) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i snopove F. Egzistencija dugog egzaktnog niza bi tada povlačila egzaktnost funktora globalni prereza, što znamo da općenito nije slučaj.

Napomena 4.2.3. Čechov kompleks se ponegdje u literaturi (npr. [14, III.4]) definira u ***reduciranoj verziji*** u kojoj su Čechovi kolanci definirani kao produkt (4.1) u kojem se indeksira po skupovima $\{i_0 < i_1 < \ldots < i_n\} \subseteq I$, gdje pretpostavljamo fiksiran dobar uređaj na I; diferencijali su dani istom formulom. Može se pokazati da tada dobijemo iste Čechove kohomologije (vidi [28, 20.2]). Iz te ekvivalencije možemo vidjeti da su n-te Čechove kohomologije uvijek trivijalne ako n premašuje kardinalnost pokrivača $\mathcal{U}$.

Propozicija 4.2.4. *Postoji prirodan izomorfizam* $\check{H}^0(\mathcal{U}, F) \cong \Gamma F$.

Dokaz. Uočimo da je $(\varphi_i)_{i\in I} \in \operatorname{Ker} d^0 \cong \check{H}^0(\mathcal{U}, F)$ ako i samo ako je $\varphi_j|_{U_i\cap U_j} = \varphi_i|_{U_i\cap U_j}$ za sve $i, j \in I$. Traženi prirodni izomorfizam se lako konstruira koristeći snopovski uvjet. □

Propozicija 4.2.5. *Ako je u pokrivaču* $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ *od* X *imamo* $U_j = X$ *za neki* $j \in I$, *tada za svaki snop* F *nad* X *vrijedi* $\check{H}^n(\mathcal{U}, F) = 0$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Konstruirati ćemo homotopiju Σ između identitete i nul-morfizma na kompleksu $\check{C}^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{d^0} \check{C}^1(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{d^1} \ldots$ na sljedeći način. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo homomorfizam grupa $\Sigma^n : \check{C}^n(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^{n-1}(\mathcal{U}, F)$ formulom:

$$\Sigma^n\left((\varphi_{i_0,\ldots,i_n})_{I^{n+1}}\right) := \left(\varphi_{j,i_0,\ldots,i_{n-1}}\right)_{I^n}.$$

Nije teško provjeriti da vrijedi $d^{n-1}\Sigma^n + \Sigma^{n+1}d^n = 1$, pa tvrdnja slijedi iz propozicije 3.1.14. □

4.2.2. Čechova i snopovska kohomologija

Da bi mogli uspoređivati Čechovu i snopovsku kohomologiju, tj. naći kanonski morfizam između njih, uvesti ćemo tzv. ***snopificiranu verziju Čechovog kompleksa***. Ako je $\mathcal{U}$ pokrivač od X i $V \subseteq X$ otvoren skup, tada je $\mathcal{U}|_V := \{U \cap V : U \in \mathcal{U}\}$ pokrivač od V. Ako je F snop nad X i $n \in \mathbb{N}_0$, tada za svaki otvoreni podskup $V \subseteq X$ imamo Abelovu grupu $\check{C}^n(\mathcal{U}|_V, F|_V)$. Tada pridruživanje $V \mapsto \check{C}^n(\mathcal{U}|_V, F|_V)$, uz očite restrikcije postaje snop nad X, kojeg ćemo označavati također s $\check{C}^n(\mathcal{U}, F)$. Uočimo da imamo i kolančani kompleks snopova $0 \to \check{C}^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{d^0} \check{C}^1(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{d^1} \check{C}^2(\mathcal{U}, F) \to \ldots$ (također u oznaci $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)$) kojem diferencijale dobijemo od diferencijala Čechovih kompleksa $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}|_V, F|_V)$.

Definirajmo morfizam snopova $\epsilon : F \to \check{C}^0(\mathcal{U}, F)$ po komponentama (za otvorene podskupove $V \subseteq X$) $\epsilon_V : FV \to \check{C}^0(\mathcal{U}|_V, F|_V)$ formulom $s \mapsto (s|_{U_i\cap V})_{i\in I}$.

Lema 4.2.6. *Kompleks* $0 \to F \xrightarrow{\epsilon} \check{C}^0(\mathcal{U},F) \xrightarrow{d^0} \check{C}^1(\mathcal{U},F) \xrightarrow{d^1} \check{C}^2(\mathcal{U},F) \to \dots$ *(kraće pišemo* $0 \to F \xrightarrow{\epsilon} \check{C}^\bullet(\mathcal{U},F)$*) je desna rezolventa od* F*, tj. egzaktan je u* $\mathbf{AbSh}(X)$*. Navedenu rezolventu zovemo* **Čechovom rezolventom** *od* F*.*

Dokaz. Lako se vidi koristeći snopovski uvjet da je ϵ po komponentama injekcija, pa je po propoziciji 2.3.3 je i monomorfizam, tj. niz je egzaktan u F. Iz korolara 2.3.5 vidimo da je dovoljno dokazati da je egzaktan na svakoj vlati. Za bilo koji $x \in X$ promotrimo niz $F_x \xrightarrow{\epsilon_x} \check{C}^0(\mathcal{U},F)_x \xrightarrow{d^0_x} \check{C}^1(\mathcal{U},F)_x$. Za okolinu $V \subseteq X$ od x i $s \in FV$ imamo:

$$d^0_x(\epsilon_x([s]_x)) = d^0_x([\epsilon_V(s)]_x) = \left[d^0_V((s|_{U_i\cap V})_{i\in I})\right]_x = \left[\left(s|_{U_i\cap U_j\cap V} - s|_{U_i\cap U_j\cap V})_{(i,j)\in I^2}\right)\right]_x = 0,$$

pa je $\operatorname{Im}\epsilon_x \subseteq \operatorname{Ker} d^0_x$. Obratno, ako je $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I} \in \check{C}^0(\mathcal{U}|_V, F|_V) = \prod_{i\in I} F(U_i \cap V)$ za kojeg je $d^0_x([\varphi]_x) = 0$, tada vrijedi

$$0 = d^0_x([\varphi]_x) = [d^0_V(\varphi)]_x = \left[\left(\varphi_j|_{U_i\cap U_j\cap V} - \varphi_i|_{U_i\cap U_j\cap V}\right)_{(i,j)\in I^2}\right]_x,$$

stoga postoji okolina $W \subseteq V$ od x za koju vrijedi $\varphi_i|_{U_i\cap U_j\cap W} = \varphi_j|_{U_i\cap U_j\cap W}$ za sve $i, j \in I$, pa iz snopovskog uvjeta zaključujemo da postoji $s \in FW$ za kojeg je $s|_{U_i\cap W} = \varphi_i|_{U_i\cap W}$ za sve $i \in I$. Iz toga lako slijedi $\epsilon_x([s]_x) = [\varphi]_x$, pa vidimo da je $\operatorname{Im}\epsilon_x = \operatorname{Ker} d^0_x$, tj. početni niz je egzaktan u $\check{C}^0(\mathcal{U},F)$.

Za $n \in \mathbb{N}_0$ promotrimo niz $\check{C}^n(\mathcal{U},F)_x \xrightarrow{d^n_x} \check{C}^{n+1}(\mathcal{U},F)_x \xrightarrow{d^{n+1}_x} \check{C}^{n+2}(\mathcal{U},F)_x$. Za bilo koju okolinu od V od x vrijedi $d^{n+1}_V \circ d^n_V = 0$, pa prelaskom na vlati u x dobivamo inkluziju $\operatorname{Im} d^n_x \subseteq \operatorname{Ker} d^{n+1}_x$. Obratno, neka je $[\varphi]_x \in \operatorname{Ker} d^{n+1}_x$ za neku okolinu V od x i

$$\varphi = (\varphi_{i_0,\dots,i_{n+1}})_{I^{n+2}} \in \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}|_V, F|_V) = \prod_{(i_0,\dots,i_{n+1})\in I^{n+2}} F(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{n+1}} \cap V).$$

Možemo očito bez gubitka općenitosti pretpostaviti da je $V \subseteq U_j$ za neki $j \in I$. Postoji okolina $W \subseteq V$ od x tako da za sve $(i_0,\dots,i_{n+2}) \in I^{n+3}$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n+2} (-1)^k \varphi_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{n+2}}|_{U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_{n+2}}\cap W} = 0. \tag{4.2}$$

Definirajmo $\psi \in \check{C}^n(\mathcal{U}|_V, F|_V)$ po komponentama sa $\psi_{i_0,\dots,i_n} := \varphi_{j,i_0,\dots,i_n}$. Sada koristeći jednakost (4.2) nije problem vidjeti da je $d^n_x([\psi]_x) = [\varphi]_x$, pa je $\operatorname{Im} d^n_x = \operatorname{Ker} d^{n+1}_x$. □

Neka je $0 \to F \to I^\bullet$ bilo koja injektivna rezolventa. Iz lema 4.2.6 i 3.2.8 slijedi da postoji jedinstven do na homotopiju morfizam kompleksa $f^\bullet\colon \check{C}^\bullet(\mathcal{U},F) \to I^\bullet$ za kojeg dijagram

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[dr] & \check{C}^0(\mathcal{U},F) \arrow[d, "f^0"] \\ & I^0 \end{tikzcd}$$

komutira. Morfizam kompleksa $f^\bullet$ inducira morfizam na globalnim prerezima tih kompleksa, pa stoga i na kohomologijama dobivenih kompleksa. Zaključno, konstruirali smo ***kanonski morfizam*** kompleksa

$$\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, F) \to H^\bullet(X, F),$$

koji po komponentama za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ daje ***kanonski morfizam*** $\check{H}^n(\mathcal{U}, F) \to H^n(X, F)$ između n-te Čechove kohomologije snopa F s obzirom na pokrivač $\mathcal{U}$ i n-te snopovske kohomologije snopa F. Nije teško vidjeti da je kanonski morfizam prirodan u F.

Prirodno pitanje koje se nameće jest pod kojim uvjetima je taj kanonski morfizam izomorfizam, tj. kada se Čechova kohomologija s obzirom na zadani pokrivač podudara sa snopovskom kohomologijom. To pitanje je od interesa budući da se Čechova kohomologija u konkretnim situacijama lakše izračuna, dok snopovska kohomologija ima bolja teoretska svojstva.

Korolar 4.2.7. *Ako je F uveli snop, tada je $\check{H}^n(\mathcal{U}, F) = H^n(X, F) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Nije teško vidjeti da je Čechova rezolventa od F uvela, stoga koristeći teoreme 4.1.9 i 3.2.35 vidimo da se $H^n(X, F)$ mogu računati iz te rezolvente umjesto neke injektivne rezolvente. No, na isti način se i Čechove kohomologije računaju iz Čechove rezolvente. Jer je F uveo, tvrdnja slijedi iz teorema 4.1.9. □

Slijedeći teorem o podudarnostima kohomologija ćemo navesti bez dokaza, koji se može vidjeti u [11, 5.3].

Teorem 4.2.8 (Leray)**.** *Ako za bilo koji konačan presjek $V := U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_n}$ skupova iz pokrivača $\mathcal{U}$ i bilo koji $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $H^k(V, F|_V) = 0$, tada su kanonski morfizmi $\check{H}^k(\mathcal{U}, F) \to H^k(X, F)$ izomorfizmi, za sve $k \in \mathbb{N}_0$.*

Napomena 4.2.9. U algebarskoj geometriji česta je situacija kvazikoherentnog snopa nad Noetherinom *separiranom* shemom. U tom slučaju su za svaki otvoreni *afini* pokrivač $\mathcal{U}$ od X i svaki $n \in \mathbb{N}_0$ kanonski morfizmi $\check{H}^n(\mathcal{U}, F) \to H^n(X, F)$ izomorfizmi. Detalji i dokaz se mogu vidjeti u [14, II.4, III.4].

4.2.3. Profinjenje pokrivača

Neka su $\mathcal{U} = \{U_i \colon i \in I\}$ i $\mathcal{V} = \{V_j \colon j \in J\}$ pokrivači od X. Kažemo da $\mathcal{V}$ ***profinjuje*** $\mathcal{U}$, ako postoji funkcija $f \colon J \to I$ tako da vrijedi $V_j \subseteq U_{f(j)}$ za sve $j \in J$, te tada pišemo $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ (lako je vidjeti da smo uređaj na skupu svih pokrivača od X uz kojeg on postaje usmjeren skup). Funkcija f inducira morfizam kompleksa $f^\bullet \colon \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, F)$ Abelovih grupa na sljedeći način: za $n \in \mathbb{N}_0$ i $\varphi = (\varphi_{i_0,\ldots,i_n})_{I^{n+1}} \in \check{C}^n(\mathcal{U}, F)$ neka je

$$f^n(\varphi) := \left(\varphi_{f(j_0),\ldots,f(j_n)}|_{V_{j_0}\cap\ldots\cap V_{j_n}}\right)_{(j_0,\ldots,j_n)\in J^{n+1}}.$$

Lema 4.2.10. *Ako su $f, g\colon J \to I$ funkcije za koje vrijedi $V_j \subseteq U_{f(j)}$ i $V_j \subseteq U_{g(j)}$ za sve $j \in J$, tada su inducirani morfizmi kompleksa $f^\bullet, g^\bullet\colon \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, F)$ homotopni.*

Dokaz. Homotopija Σ između njih dana je formulom: $\Sigma^n\colon \check{C}^n(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^{n-1}(\mathcal{V}, F)$ (za $n \in \mathbb{N}$),

$$\Sigma^n(\varphi) := \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \varphi_{f(j_0),\dots,f(j_k),g(j_k),\dots,g(j_{n-1})}|_{V_{j_0}\cap\dots\cap V_{j_{n-1}}}\right)_{(j_0,\dots,j_{n-1})\in J^n}.$$

□

Iz leme 4.2.10 i propozicije 3.1.14 zaključujemo da je za zadani snop F i $n \in N_0$ pridruživanje $\mathcal{U} \mapsto \check{H}^n(\mathcal{U}, F)$ dobro definiran direktni sustav.

Definicija 4.2.11. *Direktni limes prethodno opisanog direktnog sustava*

$$\check{H}^n(X, F) := \operatorname*{colim}_{\mathcal{U}} \check{H}^n(\mathcal{U}, F)$$

(gdje $\mathcal{U}$ varira po usmjerenom skupu svih pokrivača od X) zovemo n**-ta Čechova kohomologija** *snopa*[6] *F.*

Iz propozicije 4.2.4 lako dobijemo prirodan izomorfizam $\check{H}^0(X, F) \cong \Gamma F$. Ukoliko imamo $F \to G$ morfizam snopova i pokrivače $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ od X, tada se lako provjeri da je inducirani dijagram

$$\begin{tikzcd}
\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F) \arrow[r] \arrow[d] & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, G) \arrow[d] \\
\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, F) \arrow[r] & \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, G)
\end{tikzcd}$$

komutativan. Stoga prelaskom na kohomologije kompleksa, te koristeći univerzalno svojstvo kolimesa dobijemo morfizam $\check{H}^n(X, F) \to \check{H}^n(X, G)$. Na taj način smo dobili funktor $\check{H}^n(X, -)\colon \mathbf{AbSh}(X) \to \mathbf{Ab}$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Ukoliko su dani pokrivači $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ od X, te $0 \to F \to I^\bullet$ injektivna rezolventa snopa F, tada imamo dijagram

$$\begin{tikzcd}
\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, F) \arrow[dl] \\
& I^\bullet &
\end{tikzcd}$$

[6] Ponekad se kaže ***n*-ta Čechova kohomologija** topološkog prostora X ***s koeficijentima u*** snopu F.

koji je komutativan do na homotopiju morfizama kompleksa, što slijedi iz leme 3.2.8. Stoga, prijeđemo li na n-te kohomologije kompleksa, koristeći propoziciju 3.1.14 dobijemo komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd} \check{H}^n(\mathcal{U}, F) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \check{H}^n(\mathcal{V}, F) \arrow[dl] \\ & \check{H}^n(X, F) & \end{tikzcd}$$

Univerzalno svojstvo kolimesa nam sada daje ***kanonski morfizam*** $\check{H}^n(X, F) \to H^n(X, F)$ između n-te Čechove kohomologije i n-te snopovske kohomologije snopa F, za kojeg se lako vidi da je prirodan u F.

Od interesa je naći uvjete na prostor ili snop pod kojima su kanonski morfizmi izomorfizmi. O tome govore sljedeća dva teorema i sljedeći pododjeljak.

Teorem 4.2.12 (Cartan)**.** *Neka je $\mathcal{U}$ neka baza od X koja je zatvorena na konačne presjeke, te neka za snop F nad X vrijedi $\check{H}^n(U, F|_U) = 0$ za sve $U \in \mathcal{U}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada su kanonski morfizmi $\check{H}^n(X, F) \to H^n(X, F)$ izomorfizmi, za sve $n \in \mathbb{N}_0$.*

Teorem 4.2.13. *Kanonski morfizam $\check{H}^n(X, F) \to H^n(X, F)$ je izomorfizam za $n = 0$ i $n = 1$, te monomorfizam za $n = 2$.*

Dokazi navedenih teorema se mogu vidjeti u [11, 5.9].

4.2.4. Kohomologije na parakompaktnom Hausdorffovom prostoru

Pokrivač topološkog prostora X je ***lokalno konačan***, ako svaki $x \in X$ ima okolinu koja ima neprazan presjek sa najviše konačno mnogo elemenata tog pokrivača. Topološki prostor X je ***parakompaktan***, ako svaki njegov pokrivač ima lokalno konačan potpokrivač.

Teorem 4.2.14. *Ako je X parakompaktan Hausdorffov topološki prostor i $n \in \mathbb{N}_0$, onda je kanonski morfizam između n-te Čechove kohomologije bilo kojeg snopa nad X i n-te snopovske kohomologije tog snopa izomorfizam.*

Dokaz ovog teorema se može vidjeti u [7, I.3]. U dokazu se koristi tehnologija tzv. *spektralnih nizova* i *hiperkohomologije*.

A. Dodatak: Leme o dijagramima

Ovaj dodatak nastao je nakon predaje i obrane mog diplomskog rada, te stoga nije dio mog službenog diplomskog rada koji se (ocjenjen) nalazi u Središnjoj matematičkoj knjižnici na PMF-Matematičkom odsjeku (kao i neki ispravljeni tipfeleri u tekstu rada). U ovom dodatku su (zbog potpunosti) dokazane najvažnije leme homološke algebre, od kojih su neke iskazane u pododjeljku 1.7.5., te koje zbog nedostatka vremena i 'povećeg' opsega ovog rada nisu dokazane u službenom dijelu.

U ovom dodatku radimo u Abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$.

A.1. Pseudo-elementi

Definicija A.1.1. *Neka je A objekt i $A \xrightarrow{f} B$ morfizam u $\mathcal{A}$.*

- **Pseudo-element** *objekta A je svaki morfizam $\bullet \xrightarrow{a} A$ s kodomenom A. Pišemo $a \overset{*}{\in} A$.*
- *Pseudo-elementi $X \xrightarrow{a} A$ i $X' \xrightarrow{a'} A$ objekta A su* **pseudo-jednaki***, ako postoji objekt Y i epimorfizmi $Y \xrightarrow{p} X$ i $Y \xrightarrow{p'} X'$ za koje je $a \circ p = a' \circ p'$. Pišemo $a \overset{*}{=} a'$.*
- **Pseudo-slika** *duž f pseudo-elementa $a \overset{*}{\in} A$ je pseudo-element $f(a) := f \circ a \overset{*}{\in} B$.*

Trivijalno iz definicije slijedi:

Propozicija A.1.2. *Neka su dani morfizmi $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, te $a, a' \overset{*}{\in} A$. Ako je $a \overset{*}{=} a'$, tada je $f(a) \overset{*}{=} f(a')$. Nadalje, vrijedi $(g \circ f)(a) \overset{*}{=} g(f(a))$.*

Lema A.1.3. *Neka je dijagram*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & E \end{tikzcd}$$

pullback od f i g (u Abelovoj kategoriji $\mathcal{A}$), gdje je g epimorfizam. Tada je i k epimorfizam[1].

[1] Zanimljiva je činjenica da pod pretpostavkama leme, dani dijagram je također i pushout od k i h. Dokaz se može vidjeti u [5, 1.7].

Dokaz. Označimo biprodukt od A i B kao u (1.15), označimo sa $D \xrightarrow{m} C$ jedinstveni morfizam za kojeg je $k = p_A m$ i $h = p_B m$, te stavimo $n := f p_A - g p_B$.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "m"] \arrow[dd, "h"'] & & A \arrow[dd, "f"] \\
& C \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dl, shift right, "p_B"'] \arrow[dr, "n"] & \\
B \arrow[ur, shift right, "\iota_B"'] \arrow[rr, "g"'] & & E
\end{tikzcd}$$

Iz definicije i univerzalnih svojstava direktno slijedi $m = \operatorname{Ker} n$. Jer je $-n\iota_B = g$, lako slijedi da je i n epimorfizam. Stoga je $n \overset{(1.17)}{=} \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} n) = \operatorname{Coker} m$.

Neka je $A \xrightarrow{u} F$ bilo koji morfizam za kojeg je $uk = 0$. Tada je $(up_A)m = 0$, pa postoji morfizam $E \xrightarrow{v} F$ za kojeg je $up_A = vn$. Vrijedi $vg = -vn\iota_B = -up_A\iota_B = 0$, pa jer je g epimorfizam, slijedi $v = 0$. No, tada je $up_A = 0$, pa je nužno $u = 0$ (iz leme 1.7.12 slijedi da je p_B epimorfizam). Time smo pokazali da je k epimorfizam. □

Strelica oblika $\hookrightarrow$ nam predstavlja monomorfizam, a strelica oblika $\twoheadrightarrow$ epimorfizam.

Propozicija A.1.4. *Pseudo-jednakost je relacija ekvivalencije na klasi pseudo-elemenata objekta A.*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost su očite. Dokažimo još i tranzitivnost. Neka su $a, a', a'' \overset{*}{\in} A$ takvi da je $a \overset{*}{=} a'$ i $a' \overset{*}{=} a''$. Tada postoje epimorfizmi p, p', p'', p''' koji čine sljedeći dijagram komutativnim:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, two heads, "p"'] \arrow[dr, two heads, "p'"] & & \bullet \arrow[dl, two heads, "p''"'] \arrow[dr, two heads, "p'''"] & \\
\bullet \arrow[drr, "a"'] & & \bullet \arrow[d, "a'"'] & & \bullet \arrow[dll, "a''"] \\
& & A & &
\end{tikzcd}$$

Napravimo li pullback od p' i p'', prema lemi A.1.3 dobijemo epimorfizme s kojima lako dobijemo traženu relaciju $a \overset{*}{=} a''$. □

Napomena A.1.5. Uočimo da postoji klasa ekvivalencije na pseudo-elementima od A koja se sastoji točno od svih nul-morfizama s kodomenom A. Da su bilo koji nul-morfizmi

$X \xrightarrow{0} A$ i $Y \xrightarrow{0} A$ pseudo-jednaki lako vidimo koristeći projekcije biprodukta $X \oplus Y$, koje su epimorfizmi. S druge strane, očito svaki pseudo-element od A koji je pseudo-jednak nul-morfizmu mora i sâm biti nul-morfizam. Dakle, kada pišemo $0 \overset{*}{\in} A$, nije potrebno napominjati o kojem se točno nul-morfizmu radi—naprosto govorimo o ***nul-pseudo-elementu*** objekta A.

Nul-morfizmi, monomorfizmi, epimorfizmi i egzaktnost se u Abelovim kategorijama karakteriziraju pomoću djelovanja na pseudo-elementima analogno kao u kategoriji modula pomoću djelovanja na elementima.

Teorem A.1.6. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. *Morfizam $A \xrightarrow{f} B$ je nul-morfizam ako i samo ako za svaki $a \overset{*}{\in} A$ vrijedi $f(a) \overset{*}{=} 0$.*

2. *Morfizam $A \xrightarrow{f} B$ je monomorfizam ako i samo ako za svaki $a \overset{*}{\in} A$ vrijedi implikacija $f(a) \overset{*}{=} 0 \Rightarrow a \overset{*}{=} 0$. To je ekvivalentno i s činjenicom da za sve $a, a' \overset{*}{\in} A$ vrijedi implikacija $f(a) \overset{*}{=} f(a') \Rightarrow a \overset{*}{=} a'$.*

3. *Morfizam $A \xrightarrow{f} B$ je epimorfizam ako i samo ako za svaki $b \overset{*}{\in} B$ postoji $a \overset{*}{\in} A$ takav da je $f(a) \overset{*}{=} b$.*

4. *Niz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ je egzaktan ako i samo ako za svaki $a \overset{*}{\in} A$ vrijedi $g(f(a)) \overset{*}{=} 0$ i za svaki $b \overset{*}{\in} B$ za kojeg je $g(b) \overset{*}{=} 0$ postoji $c \overset{*}{\in} A$ takav da je $f(c) \overset{*}{=} b$.*

5. *Neka je dan morfizam $A \xrightarrow{f} B$ i $a, a' \overset{*}{\in} A$ za koje je $f(a) \overset{*}{=} f(a')$. Tada postoji $a'' \overset{*}{\in} A$ takav da je $f(a'') \overset{*}{=} 0$ i da za svaki morfizam $A \xrightarrow{g} C$ vrijedi implikacija $g(a') \overset{*}{=} 0 \Rightarrow g(a'') \overset{*}{=} g(a)$.*

Dokaz. Prva tvrdnja je trivijalna ($f = f(1_A)$), a druga lako slijedi iz propozicije 1.7.23.

3. Neka je $A \xrightarrow{f} B$ epimorfizam i $b \overset{*}{\in} B$ bilo koji. Napravimo pullback od f i b:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "p"] \arrow[d, "a"'] & \bullet \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Prema lemi A.1.3, p je epimorfizam. Vrijedi $f(a) = b \circ p$, tj. $f(a) \overset{*}{=} b$. Obratno, ako možemo naći $a \overset{*}{\in} A$ takav da je $f(a) \overset{*}{=} 1_B$, tada postoje epimorfizmi p i q za koje je $f \circ a \circ p = q$. Iz toga slijedi da je i f epimorfizam.

4. Neka je dan niz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, te neka je $f = me$ mono-epi faktorizacija. Egzaktnost tog niza je ekvivalentna s jednakošću $m = \operatorname{Ker} g$. Dokažimo da je to pak ekvivalentno s uvjetom
$$\begin{cases} \forall a \overset{*}{\in} A \quad g(f(a)) \overset{*}{=} 0, \\ \forall b \overset{*}{\in} B \quad g(b) \overset{*}{=} 0 \Rightarrow \exists c \overset{*}{\in} A \quad f(c) \overset{*}{=} b. \end{cases} \tag{A.1}$$
Ako je $m = \operatorname{Ker} g$, tada je $gf = gme = 0$, iz čega slijedi da je $g(f(a)) \overset{*}{=} 0$ za svaki $a \overset{*}{\in} A$. Neka je $b \overset{*}{\in} B$ bilo koji tako da vrijedi $g(b) \overset{*}{=} 0$, odnosno $gb = 0$. Tada se b faktorizira preko $\operatorname{Ker} g = m$, tj. postoji morfizam b' za kojeg je $b = mb'$. Napravimo pullback od e i b':
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "c"'] \arrow[r, two heads, "p"] & \bullet \arrow[dl, "b'"'] \arrow[d, "b"] & \\ A \arrow[r, two heads, "e"'] & \bullet \arrow[r, hook, "m"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$
Vrijedi $f(c) = b \circ p$, a p je prema lemi A.1.3 epimorfizam. Stoga je $f(c) \overset{*}{=} b$. Pretpostavimo sada da vrijedi uvjet (A.1), i dokažimo da je $m = \operatorname{Ker} g$. Vrijedi $gme = gf = g(f(1_A)) = 0$, pa jer je e epimorfizam slijedi $gm = 0$. Neka je dan $b \overset{*}{\in} B$ takav da je $gb = 0$, tj. $g(b) \overset{*}{=} 0$. Tada po pretpostavci postoji $a \overset{*}{\in} A$ i epimorfizmi p, q takvi da donji dijagram komutira:
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, two heads, "p"'] \arrow[dr, two heads, "q"] & & \\ \bullet \arrow[d, "a"'] & \bullet \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "c"'] & \bullet \arrow[d, "b"] & \\ A \arrow[r, two heads, "e"'] & \bullet \arrow[r, hook, "m"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$
Na istom dijagramu se nalazi i pullback morfizama m i b, s komponentama c i j. Jer je m monomorfizam, lako se vidi koristeći univerzalno svojstvo pullback-a da tada i j mora biti monomorfizam. Jer je $bq = meap$, univerzalno svojstvo pullback-a također povlači i da postoji morfizam r za kojeg vrijedi $jr = q$. Stoga je j i epimorfizam, pa po propoziciji 1.7.21 zaključujemo da je j izomorfizam. Dakle, b se faktorizira preko m u obliku $b = mcj^{-1}$. No, ta faktorizacija mora biti jedinstvena, jer je m monomorfizam. Zaključujemo da je $m = \operatorname{Ker} g$.

5. Postoje epimorfizmi p, p' za koje je $fap = fa'p'$. Definirajmo $a'' := ap - a'p'$.

$\square$

Lema A.1.7. *Neka je dan pullback*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

morfizama f i g. Ako za $c \stackrel{*}{\in} C$ i $b \stackrel{*}{\in} B$ vrijedi $f(c) \stackrel{*}{=} g(b)$, tada postoji $a \stackrel{*}{\in} A$ takav da je $h(a) \stackrel{*}{=} c$ i $k(a) \stackrel{*}{=} b$.

Dokaz. Iz pretpostavke slijedi da postoje epimorfizmi p, q s istom domenom, za koje vrijedi $fcp = gbq$. Univerzalno svojstvo pullback-a povlači da postoji $a \stackrel{*}{\in} A$ takav da je $ha = cp$ i $ka = bq$, odnosno $h(a) \stackrel{*}{=} c$ i $k(a) \stackrel{*}{=} b$. □

Napomena A.1.8. Nije teško vidjeti koristeći jedinstvenost do na izomorfizam mono-epi faktorizacije da su klase ekvivalencije pseudo-elemenata zadanog objekta u 1-1 korespodenciji s klasama ekvivalencije podobjekata tog objekta.

A.2. *Diagram chasing* koristeći pseudo-elemente

U nastavku redovito koristimo karakterizacije iz teorema A.1.6 bez eksplicitnog navođenja.

Lema A.2.1 (Lema o jezgri)**.** *Neka je dan komutativni dijagram*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\delta"'] & C \arrow[d, "\epsilon"] \\ & D \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\theta"'] & E \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\lambda"'] & F \arrow[d, "\mu"] \\ 0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\nu"'] & H \arrow[r, "\xi"'] & I \end{tikzcd}$$

u kojem je $\gamma = \operatorname{Ker}\theta$, $\delta = \operatorname{Ker}\lambda$ i $\epsilon = \operatorname{Ker}\mu$, te u kojem su oba retka egzaktna. Tada postoje jedinstveni morfizmi $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ koji, dodani u taj dijagram, ne kvare njegovu komutativnost. Nadalje, niz $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ je egzaktan.

Dokaz. Iz relacije $\lambda\zeta\gamma = \nu\theta\gamma = \nu\theta(\operatorname{Ker}\theta) = 0$ dobivamo egzistenciju i jedinstvenost od α, a analogno tako i od β. Uočimo da vrijedi $\epsilon\beta\alpha = \eta\zeta\gamma = \eta 0 = 0$, pa jer je ϵ monomorfizam, imamo $\beta\alpha = 0$. Izaberimo $b \stackrel{*}{\in} B$ takav da vrijedi $\beta(b) \stackrel{*}{=} 0$. Zbog $(\eta\delta)(b) \stackrel{*}{=} (\epsilon\beta)(b) \stackrel{*}{=} 0$ i egzaktnosti, postoji $d \stackrel{*}{\in} D$ takav da je $\zeta(d) \stackrel{*}{=} \delta(b)$. Vrijedi $(\nu\theta)(d) \stackrel{*}{=} (\lambda\zeta)(d) \stackrel{*}{=} (\lambda\delta)(b) \stackrel{*}{=} 0$, pa jer je ν monomorfizam, vrijedi $\theta(d) \stackrel{*}{=} 0$. Opet zbog egzaktnosti, postoji $a \stackrel{*}{\in} A$ takav da je $\gamma(a) \stackrel{*}{=} d$. Vrijedi $(\delta\alpha)(a) \stackrel{*}{=} (\zeta\gamma)(a) \stackrel{*}{=} \zeta(d) \stackrel{*}{=} \delta(b)$, pa jer je δ monomorfizam, vrijedi $\alpha(a) \stackrel{*}{=} b$. Time smo pokazali da je niz $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ egzaktan. □

Lema A.2.2 (5-lema)**.** *Neka je dan komutativni dijagram*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\epsilon"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\zeta"'] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\eta"'] & D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\theta"'] & E \arrow[d, "\lambda"'] \\
F \arrow[r, "\mu"'] & G \arrow[r, "\nu"'] & H \arrow[r, "\xi"'] & I \arrow[r, "\pi"'] & J
\end{tikzcd}$$

kojemu su oba retka egzaktna. Ako su ϵ, ζ, θ i λ izomorfizmi, tada je i η izomorfizam.

Dokaz. Po principu dualnosti i propoziciji 1.7.21, dovoljno je pokazati da je η monomorfizam. Neka je dan $c \stackrel{*}{\in} C$ za kojeg je $\eta(c) \stackrel{*}{=} 0$. Vrijedi $(\theta\gamma)(c) \stackrel{*}{=} (\xi\eta)(c) \stackrel{*}{=} 0$, pa jer je θ monomorfizam, slijedi $\gamma(c) \stackrel{*}{=} 0$. Zbog egzaktnosti, postoji $b \stackrel{*}{\in} B$ takav da je $\beta(b) \stackrel{*}{=} c$. Sada imamo $(\nu\zeta)(b) \stackrel{*}{=} (\eta\beta)(b) \stackrel{*}{=} \eta(c) \stackrel{*}{=} 0$, pa zbog egzaktnosti postoji $f \stackrel{*}{\in} F$ za kojeg vrijedi $\mu(f) \stackrel{*}{=} \zeta(b)$. Jer je ϵ epimorfizam, postoji $a \stackrel{*}{\in} A$ za kojeg je $\epsilon(a) \stackrel{*}{=} f$. Računamo $(\zeta\alpha)(a) \stackrel{*}{=} (\mu\epsilon)(a) \stackrel{*}{=} \mu(f) \stackrel{*}{=} \zeta(b)$, pa jer je ζ monomorfizam, vrijedi $\alpha(a) \stackrel{*}{=} b$. Naposlijetku, vrijedi $c \stackrel{*}{=} \beta(b) \stackrel{*}{=} (\beta\alpha)(a) \stackrel{*}{=} 0$. Dakle, η je monomorfizam. □

Lema A.2.3 (Kratka 5-lema)**.** *Neka je dan komutativni dijagram*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\delta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\zeta"'] & E \arrow[r, "\eta"'] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kojemu su oba retka egzaktna. Ako su γ i ϵ monomorfizmi (resp. epimorfizmi, izomorfizmi), tada je i δ monomorfizam (resp. epimorfizam, izomorfizam).

Dokaz. Po principu dualnosti i propoziciji 1.7.21, dovoljno je dokazati slučaj monomorfizama. Neka su γ i ϵ monomorfizmi, i neka je $b \stackrel{*}{\in} B$ takav da je $\delta(b) \stackrel{*}{=} 0$. Uočimo da je $(\epsilon\beta)(b) \stackrel{*}{=} (\eta\delta)(b) \stackrel{*}{=} 0$, pa jer je ϵ monomorfizam, vrijedi $\beta(b) \stackrel{*}{=} 0$. Zbog egzaktnosti postoji $a \stackrel{*}{\in} A$ takav da je $\alpha(a) \stackrel{*}{=} b$. Vrijedi $(\zeta\gamma)(a) \stackrel{*}{=} (\delta\alpha)(a) \stackrel{*}{=} \delta(b) \stackrel{*}{=} 0$, pa jer su oba ζ i γ monomorfizmi, zaključujemo da je $a \stackrel{*}{=} 0$. Stoga je i $b \stackrel{*}{=} 0$, pa je δ monomorfizam. □

Lema A.2.4 (9-lema ili 3 × 3-lema)**.** *Neka je dan komutativni dijagram*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\delta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\theta"'] & E \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\lambda"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\nu"'] \arrow[d] & H \arrow[r, "\xi"'] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

u kojem su srednji redak i srednji stupac, te još tri od preostala četiri retka i stupca egzaktni. Tada je i preostali redak ili stupac egzaktan. Nadalje, α i γ su komponente pullback-a od δ i ζ, dok su μ i ξ komponente pushout-a od η i λ.

Dokaz. Možemo bez gubitka općenitosti pretpostaviti da su svi stupci i donja dva retka egzaktni (gledajući suprotnu kategoriju ako je potrebno). Jer su ζ i γ monomorfizmi, slijedi da je i α monomorfizam. Leme o jezgri (lema A.2.1) povlači da je dovoljno pokazati još da je β epimorfizam.

Neka je $c \overset{*}{\in} C$ bilo koji. Jer je η epimorfizam, postoji $e \overset{*}{\in} E$ takav da je $\eta(e) \overset{*}{=} \epsilon(c)$. Vrijedi $(\xi\lambda)(e) \overset{*}{=} (\mu\eta)(e) \overset{*}{=} (\mu\epsilon)(c) \overset{*}{=} 0$, pa zbog egzaktnosti postoji $g \overset{*}{\in} G$ takav da je $\nu(g) \overset{*}{=} \lambda(e)$. Jer je θ epimorfizam, postoji $d \overset{*}{\in} D$ takav da je $\theta(d) \overset{*}{=} g$. Vrijede jednakosti $(\lambda\zeta)(d) \overset{*}{=} (\nu\theta)(d) \overset{*}{=} \nu(g) \overset{*}{=} \lambda(e)$. Prema teoremu A.1.6 (5.), postoji $e' \overset{*}{\in} E$ takav da vrijedi $\lambda(e') \overset{*}{=} 0$ i $\eta(e') \overset{*}{=} \eta(e)$ (jer je $(\eta\zeta)(d) \overset{*}{=} 0$). Zbog egzaktnosti postoji $b \overset{*}{\in} B$ takav da je $\delta(b) \overset{*}{=} e'$. Naposlijetku, $(\epsilon\beta)(b) \overset{*}{=} (\eta\delta)(b) \overset{*}{=} \eta(e') \overset{*}{=} \eta(e) \overset{*}{=} \epsilon(c)$, pa jer je ϵ monomorfizam, slijedi $\beta(b) \overset{*}{=} c$. Time smo dokazali da je β epimorfizam.

Dokažimo još da su α i γ komponente pullback-a od δ i ζ. Preostala tvrdnja za pushout će slijediti po dualnosti. Neka su dani morfizmi $X \xrightarrow{x} D$ i $X \xrightarrow{y} B$ takvi da je $\zeta x = \delta y$. Vrijedi $\epsilon\beta y = \eta\delta y = \eta\zeta x = 0$, pa jer je ϵ monomorfizam, vrijedi $\beta y = 0$. Jer je $\alpha = \mathrm{Ker}\beta$, postoji jedinstven $X \xrightarrow{z} A$ takav da je $y = \alpha z$. Računamo $\zeta\gamma z = \delta\alpha z = \delta y = \zeta x$, pa jer je ζ monomorfizam, slijedi $x = \gamma z$. Time je pokazano univerzalno svojstvo pullback-a. □

Ukoliko je $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ monomorfizam (odnosno A je podobjekt od B), tada ćemo s B/A označavati kodomenu kojezgre od f, odnosno smatramo $\operatorname{Coker} f \colon B \twoheadrightarrow B/A$.

Teorem A.2.5 (Noetherin teorem o izomorfizmu)**.** *Neka su dani podobjekti $A \hookrightarrow B \hookrightarrow C$. Tada je B/A podobjekt od C/A, te je $(C/A)/(B/A)$ kanonski izomorfno s C/B.*

Dokaz. Uočimo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & A \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & C \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & C/B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& B/A \arrow[d] & C/A \arrow[d] & C/B \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

kojemu su sve reci i stupci egzaktni. Univerzalno svojstvo kojezgre nam da je jedinstvene morfizme $0 \to B/A \to C/A \to C/B \to 0$ koji, dodani u gornji dijagram, ne kvare njegovu komutativnost. No, iz 9-leme (lema A.2.4) slijedi da je niz $0 \to B/A \to C/A \to C/B \to 0$ egzaktan, iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Lema A.2.6. *Neka je dan komutativan dijagram*

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\delta"] & C \arrow[d, "\epsilon"] & \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\theta"'] & E \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\lambda"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\pi"'] & H \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\rho"] & I \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
& J \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d] & K \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

kojemu su svi reci i stupci egzaktni. Tada postoji (kanonski odabran) morfizam $C \overset{\omega}{\to} J$ takav da je niz $B \overset{\beta}{\to} C \overset{\omega}{\to} J \overset{\tau}{\to} F$ egzaktan.

Dokaz. Označimo pullback od ϵ i η sa Δ i Γ, pushout od ν i π sa Λ i Ξ, te stavimo da je $\Sigma := \operatorname{Ker}\Delta$ i $\Upsilon := \operatorname{Coker}\Xi$. Iz leme o jezgri (lema A.2.1) i njezinog duala slijedi da postoje morfizmi Ψ i Ω takvi da donji dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\Sigma"] \arrow[d, "\Psi"'] & Z \arrow[r, two heads, "\Delta"] \arrow[d, hook, "\Gamma"] & C \arrow[d, hook, "\epsilon"] \\
D \arrow[r, hook, "\zeta"] \arrow[d, "\theta"'] & E \arrow[r, two heads, "\eta"] \arrow[d, "\lambda"] & F \arrow[d, "\mu"] \\
G \arrow[r, hook, "\nu"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & H \arrow[r, two heads, "\xi"] \arrow[d, two heads, "\Lambda"] & I \arrow[d, "\Omega"] \\
J \arrow[r, hook, "\Xi"'] & Y \arrow[r, two heads, "\Upsilon"'] & W
\end{tikzcd}$$

Nije teško vidjeti da su u tom dijagramu svi reci i stupci egzaktni, osim možda središnjeg stupca. Lako se provjeri da je Γ monomorfizam i Λ epimorfizam (koristeći univerzalno svojstvo pullback-a, odnosno pushout-a), dok iz leme A.1.3 i njezinog duala slijedi da je Δ epimorfizam i Ξ monomorfizam.

Vrijedi $\Lambda\lambda\Gamma\Sigma = \Xi\pi\theta\Psi = 0$ i $\operatorname{Coker}\Sigma = \Delta$, stoga postoji jedinstven $C \overset{\chi}{\to} Y$ za kojeg je $\chi\Delta = \Lambda\lambda\Gamma$. Sada uočimo $\Upsilon\chi\Delta = \Upsilon\Lambda\lambda\Gamma = \Omega\mu\epsilon\Delta = 0$, pa jer je Δ epimorfizam, vrijedi $\Upsilon\chi = 0$. Zbog $\Xi = \operatorname{Ker}\Upsilon$ sada zaključujemo da postoji jedinstven $C \overset{\omega}{\to} J$ za kojeg vrijedi jednakost $\Xi\omega = \chi$.

Proučimo sada djelovanje od ω na pseudo-elementima. Neka je $c \overset{*}{\in} C$ uzet po volji. Jer je η epimorfizam, možemo naći $e \overset{*}{\in} E$ za kojeg vrijedi $\eta(e) \overset{*}{=} \epsilon(c)$. Uočimo da vrijedi $(\xi\lambda)(e) \overset{*}{=} (\mu\eta)(e) \overset{*}{=} (\mu\epsilon)(c) \overset{*}{=} 0$, pa zbog egzaktnosti postoji $g \overset{*}{\in} G$ za kojeg vrijedi $\nu(g) \overset{*}{=} \lambda(e)$. U sljedećem odlomku ćemo dokazati da tada vrijedi $\omega(c) \overset{*}{=} \pi(g)$.

Prema lemi A.1.7, jednakost $\eta(e) \overset{*}{=} \epsilon(c)$ povlači da postoji $z \overset{*}{\in} Z$ za kojeg je $\Delta(z) \overset{*}{=} c$ i $\Gamma(z) \overset{*}{=} e$. Računamo $(\Xi\omega)(c) \overset{*}{=} \chi(c) \overset{*}{=} (\chi\Delta)(z) \overset{*}{=} (\Lambda\lambda\Gamma)(z) \overset{*}{=} (\Lambda\lambda)(e) \overset{*}{=} (\Lambda\nu)(g) \overset{*}{=} (\Xi\pi)(g)$, pa jer je Ξ monomorfizam, slijedi $\omega(c) \overset{*}{=} \pi(g)$.

Sada ćemo dokazati da je niz $B \overset{\beta}{\to} C \overset{\omega}{\to} J \overset{\tau}{\to} F$ egzaktan; prvo u C, zatim u J. Neka je $b \overset{*}{\in} B$ bilo koji. Označimo $c := \beta(b)$ i $e := \delta(b)$; vrijedi $\eta(e) \overset{*}{=} \epsilon(c)$. Kao i prije, izaberimo $g \overset{*}{\in} G$ za kojeg je $\nu(g) \overset{*}{=} \lambda(e)$. No, $\nu(g) \overset{*}{=} \lambda(e) \overset{*}{=} (\lambda\delta)(b) \overset{*}{=} 0$, pa jer je ν monomorfizam, vrijedi $g \overset{*}{=} 0$. Tada je i $(\omega\beta)(b) \overset{*}{=} \omega(c) \overset{*}{=} \pi(g) \overset{*}{=} 0$.

Izaberimo $c \overset{*}{\in} C$ za kojeg je $\omega(c) \overset{*}{=} 0$, te konstruirajmo pseudo-elemente e i g kao prije, tj. takve da vrijede relacije $\eta(e) \overset{*}{=} \epsilon(c)$, $\nu(g) \overset{*}{=} \lambda(e)$ i $\omega(c) \overset{*}{=} \pi(g)$. Tada je $\pi(g) \overset{*}{=} 0$, pa zbog egzaktnosti postoji $d \overset{*}{\in} D$ takav da je $\theta(d) \overset{*}{=} g$. Vrijedi $(\lambda\zeta)(d) \overset{*}{=} (\nu\theta)(d) \overset{*}{=} \nu(g) \overset{*}{=} \lambda(e)$, pa prema teoremu A.1.6 (5.) postoji $e'' \overset{*}{\in} E$ takav da vrijedi $\lambda(e'') \overset{*}{=} 0$ i $\eta(e'') \overset{*}{=} \eta(e)$. Zbog egzaktnosti možemo naći $b \overset{*}{\in} B$ za kojeg vrijedi jednakost $\delta(b) \overset{*}{=} e''$. Sada uočimo da je $(\epsilon\beta)(b) \overset{*}{=} (\eta\delta)(b) \overset{*}{=} \eta(e'') \overset{*}{=} \eta(e) \overset{*}{=} \epsilon(c)$, pa jer je ϵ monomorfizam, vrijedi $\beta(b) \overset{*}{=} c$. Time smo pokazali da je niz $B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\omega} J$ egzaktan.

Neka sada je $c \overset{*}{\in} C$ bilo koji, te izaberimo pseudo-elemente e i g kao prije. Računamo $(\tau\omega)(c) \overset{*}{=} (\tau\pi)(g) \overset{*}{=} (\rho\nu)(g) \overset{*}{=} (\rho\lambda)(e) \overset{*}{=} 0$.

Naposlijetku, neka je $j \overset{*}{\in} J$ takav da je $\tau(j) \overset{*}{=} 0$. Jer je π epimorfizam, postoji $g \overset{*}{\in} G$ takav da je $\pi(g) \overset{*}{=} j$. Vrijedi $(\rho\nu)(g) \overset{*}{=} (\tau\pi)(g) \overset{*}{=} \tau(j) \overset{*}{=} 0$, pa zbog egzaktnosti postoji $e \overset{*}{\in} E$ takav da je $\lambda(e) \overset{*}{=} \nu(g)$. Nadalje, vrijedi $(\mu\eta)(e) \overset{*}{=} (\xi\lambda)(e) \overset{*}{=} (\xi\nu)(g) \overset{*}{=} 0$, pa zbog egzaktnosti postoji $c \overset{*}{\in} C$ takav da je $\epsilon(c) \overset{*}{=} \eta(e)$. Iz toga, kao i prije slijedi $\omega(c) \overset{*}{=} \pi(g) \overset{*}{=} j$, pa je i niz $C \xrightarrow{\omega} J \xrightarrow{\tau} F$ egzaktan. □

Lema A.2.7 (Lema o zmiji[2]). *Neka je dan komutativan dijagram*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\delta"] & C \arrow[d, "\epsilon"] & \\
 & D \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\theta"'] & E \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\lambda"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\nu"'] \arrow[d, "\pi"'] & H \arrow[r, "\xi"'] \arrow[d, "\rho"] & I \arrow[d, "\sigma"] & \\
 & J \arrow[d] & K \arrow[d] & L \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

kojemu su svi reci i svi stupci egzaktni. Tada postoje jedinstveni morfizmi $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ i $J \xrightarrow{\tau} K \xrightarrow{\varphi} L$ koji, dodani u taj dijagram, ne kvare njegovu komutativnost. Nadalje, postoji (kanonski odabran) **vezni morfizam** *$C \xrightarrow{\omega} J$ takav da je sljedeći niz egzaktan:*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\omega} J \xrightarrow{\tau} K \xrightarrow{\varphi} L. \tag{A.2}$$

[2]Eng. *Snake lemma*.

Dokaz. Egzistencija i jedinstvenost traženih morfizama α, β, τ i φ, kao i egzaktnost niza (A.2) na mjestima B i K direktno slijedi iz leme o jezgri (lema A.2.1) i njezinog duala. Neka su $\zeta = \zeta_2\zeta_1$ i $\xi = \xi_2\xi_1$ mono-epi faktorizacije, neka su Γ i Δ dobiveni pomoću teorema 1.7.25 takvi da donji dijagram komutira, te označimo $\Lambda := \operatorname{Ker}\Gamma$, $\Sigma := \operatorname{Coker}\Gamma$, $\Xi := \operatorname{Ker}\Delta$ i $\Upsilon := \operatorname{Coker}\Delta$. Koristeći univerzalno svojstvo (ko)jezgre, lako se vidi da postoje faktorizacije $\alpha = \alpha_2\alpha_1$, $\beta = \beta_2\beta_1$, $\tau = \tau_2\tau_1$ i $\varphi = \varphi_2\varphi_1$ takve da donji dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, hook, "\gamma"'] & V \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, hook, "\Lambda"'] & B \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, hook, "\delta"'] & U \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\Xi"'] & C \arrow[d, hook, "\epsilon"] \\
D \arrow[r, two heads, "\zeta_1"] \arrow[d, "\theta"'] & Z \arrow[r, hook, "\zeta_2"] \arrow[d, "\Gamma"'] & E \arrow[r, two heads, "\eta"] \arrow[d, "\lambda"'] & F \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Delta"'] & F \arrow[d, "\mu"] \\
G \arrow[r, equal] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & G \arrow[r, hook, "\nu"] \arrow[d, two heads, "\Sigma"'] & H \arrow[r, two heads, "\xi_1"] \arrow[d, two heads, "\rho"'] & W \arrow[r, hook, "\xi_2"] \arrow[d, two heads, "\Upsilon"'] & I \arrow[d, two heads, "\sigma"] \\
J \arrow[r, "\tau_1"'] \arrow[d] & T \arrow[r, "\tau_2"'] \arrow[d] & K \arrow[r, "\varphi_1"'] \arrow[d] & S \arrow[r, "\varphi_2"'] \arrow[d] & L \arrow[d] \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Očito su svi stupci tog dijagrama egzaktni, te su α_2 i β_2 monomorfizmi, a τ_1 i φ_1 epimorfizmi.

Dokažimo da je β_2 epimorfizam. Za bilo koji $c \overset{*}{\in} C$ vrijedi $(\xi_2\Delta\epsilon)(c) \overset{*}{=} (\mu\epsilon)(c) \overset{*}{=} 0$, pa jer je ξ_2 monomorfizam, vrijedi $(\Delta\epsilon)(c) \overset{*}{=} 0$. Zbog egzaktnosti postoji $u \overset{*}{\in} U$ takav da je $\Xi(u) \overset{*}{=} \epsilon(c)$. Sada imamo $(\epsilon\beta_2)(u) \overset{*}{=} \Xi(u) \overset{*}{=} \epsilon(c)$, pa jer je ϵ monomorfizam, vrijedi $\beta_2(u) \overset{*}{=} c$. Stoga je β_2 zaista epimorfizam, pa je prema propoziciji 1.7.21 izomorfizam. Po dualnosti je i τ_1 izomorfizam.

Lako je vidjeti da sada možemo primjeniti lemu A.2.6 na središnji dio gornjeg dijagrama. Time dobijemo morfizam $U \xrightarrow{\chi} T$ takav da je niz $B \xrightarrow{\beta_1} U \xrightarrow{\chi} T \xrightarrow{\tau_2} K$ egzaktan. Definirajmo $\omega := \tau_1^{-1} \circ \chi \circ \beta_2^{-1} \colon C \to J$. Koristeći činjenice da su β_2 i τ_1 izomorfizmi, lako se vidi da je tada i niz (A.2) egzaktan i na mjestima C i J. $\square$

Lema A.2.8 (Prirodnost veznog morfizma)**.** *Ukoliko nam je dan (trodimenzionalan) komutativni dijagram*

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr] \arrow[dd, "\theta"'] \arrow[dr] & & E \arrow[rr] \arrow[dd, "\lambda"' near start] \arrow[dr] & & F \arrow[rr] \arrow[dd, "\mu"' near start] \arrow[dr] & & 0 & \\
 & & D' \arrow[rr, crossing over] & & E' \arrow[rr, crossing over] & & F' \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[rr] \arrow[dr] & & H \arrow[rr] \arrow[dr] & & I \arrow[dr] & & & \\
 & 0 \arrow[r] & G' \arrow[rr] \arrow[from=uu, crossing over, "\theta'" near start] & & H' \arrow[rr] \arrow[from=uu, crossing over, "\lambda'" near start] & & I' \arrow[from=uu, crossing over, "\mu'" near start] & &
\end{tikzcd}$$

s egzaktnim recima, univerzalno svojstvo (ko)jegre i lema o zmiji (lema A.2.7) daju nam dijagram

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\theta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\lambda \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\mu \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\theta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\lambda \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\mu \arrow[d] \\
\operatorname{Ker}\theta' \arrow[r] & \operatorname{Ker}\lambda' \arrow[r] & \operatorname{Ker}\mu' \arrow[r, "\omega'"'] & \operatorname{Coker}\theta' \arrow[r] & \operatorname{Coker}\lambda' \arrow[r] & \operatorname{Coker}\mu'
\end{tikzcd}$$

s egzaktnim recima, gdje su ω i ω' vezni morfizmi. Taj dijagram je komutativan.

Dokaz. Lako se provjeri komutativnost svih kvadrata u gornjem dijagramu osim središnjeg (onog koji sadrži vezne morfizme kao stranice). Da bi pokazali komutativnost tog kvadrata, potrebno je proći kroz cijelu konstrukciju veznog morfizma, i to prvo u situaciji leme A.2.6, pa tek onda leme A.2.7. Treba uočavati da je svaki korak u konstrukciji "funktorijalan", odnosno inducira morfizme u trodimenzionalnom dijagramu između dvije "paralelne situacije"; za te inducirane morfizme se provjeri da ne kvare komutativnost cijelokupnog dijagrama. □

Bibliografija

[1] J. Adámek, H. Herrlich, i G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*, Reprints in Theory and Applications of Categories (2006), br. 17, `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/17/tr17abs.html`.

[2] J. C. Baez i M. Shulman, *Lectures on n-Categories and Cohomology*, (2006), `http://arxiv.org/abs/math/0608420`.

[3] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 3: Categories of Sheaves*, Cambridge University Press, 1994.

[4] ———, *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 2008.

[5] ———, *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structures*, Cambridge University Press, 2008.

[6] K. S Brown, *Abstract Homotopy Theory and Generalized Sheaf Cohomology*, Transactions of the American Mathematical Society **186** (1973), 419–458, `http://nlab.mathforge.org/nlab/show/BrownAHT`.

[7] J. L. Brylinski, *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Birkhäuser, 1993.

[8] H. Cartan i S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[9] G. Friedman, *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*, (2008), `http://arxiv.org/abs/0809.4221`.

[10] S. I. Gelfand i Y. I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer-Verlag, 2003.

[11] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1964.

[12] P. G. Goerss i J. F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Birkhäuser, 1991.

[13] U. Görtz i T. Wedhorn, *Algebraic Geometry 1: Schemes, With Examples and Exercises*, Vieweg+Teubner Verlag, 2010.

[14] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1997.

[15] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[16] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer, 2003.

[17] M. Kashiwara i P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer, 2006.

[18] G. M. Kelly, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, Reprints in Theory and Applications of Categories (2005), br. 10, `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html`.

[19] Z. Škoda, *Snopovi, bilješke—skripta dijela poslijediplomskog kolegija*, (2008/2009), `http://www.irb.hr/korisnici/zskoda/snop.html`.

[20] T. Leinster, *Higher Operads, Higher Categories*, (2003), `http://arxiv.org/abs/math.CT/0305049`.

[21] J. Lurie, *Higher Topos Theory*, (2006), `http://arxiv.org/abs/math/0608040v4`.

[22] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 2003.

[23] S. Mac Lane i I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, 1992.

[24] B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press, Inc., 1965.

[25] I. Moerdijk, *Introduction to the Language of Stacks and Gerbs*, (2002), `http://arxiv.org/abs/math/0212266`.

[26] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall, 2000.

[27] S. Ramanan, *Global Calculus*, American Mathematical Society, 2005.

[28] J. P. Serre, *Faisceaux Algébriques Cohérents*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser. **61** (1955), br. 2, 197–278, `http://www.mat.uniroma1.it/people/arbarello/FAC.pdf`.

[29] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*, Springer-Verlag, 1998.

[30] ______, *Basic Algebraic Geometry 2: Schemes and Complex Manifolds*, Springer-Verlag, 1998.

[31] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, skripta PMF-Matematičkog odsjeka, 2009, `http://web.math.hr/~ungar/NASTAVA/KA/kompleksna.pdf`.

[32] A. Vistoli, *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, (2004), `http://arxiv.org/abs/math/0412512`.

[33] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 2010.

Sažetak

U ovom radu obrađeni su osnovni koncepti teorije kategorija, te teorije snopova na topološkim prostorim. Uvedene su neke osnovne konstrukcije homološke algebre u Abelovim kategorijama, te pojam simplicijalnog skupa. Kohomologije snopova su defnirane kao derivirani funktori globalnih prereza, te u Čechovom smislu. Na kraju su navedeni neki teoremi o podudarnostima tih dviju kohomologija.

Summary

In this paper, basic concepts in category theory and sheaf theory on topological spaces are introduced. Basic constructions in homological algebra in abelian categories are introduced, and so is the notion of simplicial set. Sheaf cohomologies are defined as derived functors of global sections, and in a Čech approach. In the end, some theorems on isomorphism of these cohomologies are stated.

Životopis

Rođen sam u Zadru, 31. prosinca 1987. godine. Moje školovanje se odvijalo sljedećim redosljedom:

- 1994–2002: Osnovna škola Biograd, Biograd na Moru.
- 2002–2006: Gimnazija Jurja Barakovića, Zadar; maturirao sam s odličnim uspjehom.
- 2006–2009: Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.
- 2009–2011: Diplomski sveučilišni studij Teorijska matematika, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.

Tijekom studija sam redovito polagao kolegije s najvišim ocjenama, te sam bio demonstrator iz raznih kolegija. Sudjelovao sam na u nastavku nabrojanim međunarodnim matematičkim studentskim natjecanjima:

- International Mathematics Competition for University Students, Blagoevgrad 2008.
- Vojtěch Jarník 2009.
- Vojtěch Jarník 2010.

Pohađao sam ljetnu školu "School on D-modules and applications in Singularity Theory" 20–25.6.2011. University of Sevilla i 27.6–2.7.2011. ICMAT (Madrid).